



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Análise Matemática do Método SPH via Estudo do Modelo de Ruptura de Barragens

Neylan Leal Dias

Orientador: Prof. Dr. Messias Meneguete Júnior

Co-orientadora: Profa. Dra. Analice Costacurta Brandi

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Novembro de 2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Análise Matemática do Método SPH via Estudo do Modelo de Ruptura de Barragens

Neylan Leal Dias

Orientador: Prof. Dr. Messias Meneguette Júnior

Co-orientadora: Profa. Dra. Analice Costacurta Brandi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, 17 de Novembro de 2017

D541a Dias, Neylan Leal
 Análise Matemática do Modelo SPH via Estudo do Modelo de
 Ruptura de Barragens / Neylan Leal Dias. -- Presidente Prudente,
 2017
 56 p.

 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
 Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
 Orientadora: Messias Meneguette Jr
 Coorientadora: Analice Costacurta Brandi

 1. Smoothed Particle Hydrodynamics. 2. Ruptura de barragem. 3.
 SPHysics. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Presidente Prudente

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Análise do Método SPH via Modelo de Ruptura de Barragem

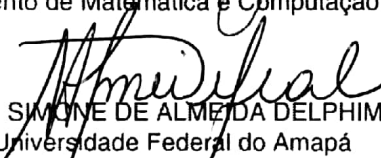
AUTOR: NEYLAN LEAL DIAS

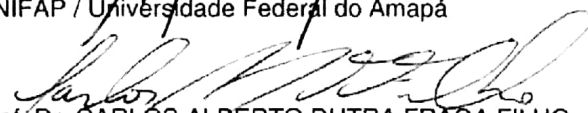
ORIENTADOR: MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR

COORIENTADORA: ANALICE COSTACURTA BRANDI

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente


Profa. Dra. SIMONE DE ALMEIDA DELPHIM
UNIFAP / Universidade Federal do Amapá


Prof. Dr. CARLOS ALBERTO DUTRA FRAGA FILHO
Unidade Vitória / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo

Presidente Prudente, 17 de novembro de 2017

*Dedico à minha amada esposa Erica Dias
aos meus pais Neilza Leal, Edimilson Vales e Ailton Dias
e aos meus irmãos Daniela Mayra e Keven Westin*

Agradecimentos

Agradeço acima de tudo a Deus por proporcionar a oportunidade de cursar o mestrado, pela saúde física, mental e autocontrole diante das situações difíceis enfrentadas em cada etapa deste mestrado.

Agradeço a minha mãe Neilza Pantoja Leal, pelo seu amor, dedicação, preocupação e apesar de longe, sempre atenciosa em todas etapas da minha vida.

Agradeço a minha amada esposa Erica Brito Dias, pela sua dedicação, aceitando o desafio de mudar para uma cidade distante, pelo tempo que fiquei ausente de casa para os estudos do mestrado, e por me aturar em todos os momentos dessa caminhada.

Ao Prof. Dr. Messias Meneguette Jr, que além de orientador, um amigo, pela sua paciência, e acreditar no meu potencial, colaborando para meu crescimento pessoal e profissional.

Ao Prof. Dr. Carlos Alberto Dutra Fraga Filho, pela sua enorme contribuição para com a construção dos resultados alcançados por essa dissertação, bem como pela sua disponibilidade e paciência.

À profa. Dra. Analice Costacurta Brandi, pela sua disponibilidade e ensinamentos durante o mestrado.

Ao prof. Dr. Cássio Oishi, coordenador do mestrado, pela sua disposição para resolver alguns problemas ocorridos, e pelos seus ensinamentos na disciplina ministrada.

À profa. Dra. Simone de Almeida Delphin, por me mostrar o caminho da ciência, e sempre me acompanhar nas etapas dos meus estudos, e ao meu grande amigo Edson Leal.

Aos meus familiares, meus irmãos Keven Westin Leal dos Santos e Daniela Mayra Pantoja Leal, meu pai Ailton Dias Ferreira, minha avó Sebastiana Pantoja Leal, minha sogra Adalgisa, e sogro Ziomar Brito e em especial ao meu Pai de criação Edimilson Vales dos Santos, pelo seu amor, preocupação e auxílios durante meus estudos.

Aos meus amigos da PosMAC: Leonardo, Paulo, Rafael, Anderson, Laison, Rhuan, Jorge, Rodrigo, Tânia, Karlla, Maria cecília, Thais, Guilherme, Luciano, em especial às minhas amigas Débora, grande parceira durante as disciplinas, e trabalhos, e à Clícia pelo apoio durante a pesquisa e construção dos resultados; por inúmeras vezes discutimos acerca do tema estudado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“ A matemática é o alfabeto com o qual DEUS escreveu o universo”.
Pitágoras

Resumo

O estudo dos métodos sem malha tem sido muito atrativo nos últimos anos, devido a suas capacidades de melhor resolver deficiências enfrentadas pelos métodos tradicionais que usam malha. O SPH é um dos primeiros métodos sem malha, por isso vários estudos têm sido feitos para seu melhor desenvolvimento. Uma das aplicações clássicas em dinâmica dos fluidos é a ruptura de barragens. Uma das problemáticas enfrentadas na aplicação da ruptura de barragem é a recuperação do campo de velocidades e de pressão. O objetivo deste trabalho é analisar as correções aplicadas ao SPH a fim de suavizar as oscilações dos campos de velocidades e do campo de pressões, usando a viscosidade artificial e as correções dos filtros de densidade Shepard e MLS, por meio do *software SPHysics*. Além disso, foi feita uma comparação dos resultados simulados com resultados de laboratório. As correções aplicadas se mostraram eficientes na recuperação dos campos propostos. Quando comparados os resultados simulados para o escoamento do fluido com os resultados laboratoriais, foram obtidas boas aproximações, com diferenças percentuais baixas.

Palavras-Chave: *Smoothed Particle Hydrodynamics, Filtro de densidade Shepard e Moving Least Squares, Ruptura de barragem, SPHysics.*

Abstract

The study of the meshless methods have been very attractive in recent years due to their ability to better address shortcomings faced by traditional mesh based methods. SPH is one of the first meshless methods, so several studies have been done for its best development. One of the classic applications in fluid dynamics is the dam break problem, which has been the subject of much research using the SPH method. One of the difficulties faced in the application of dam break is the recovery of velocity and pressure fields. The objective of this work is to analyze the corrections applied to SPH in order to smooth and better recover the velocity and pressure fields, using artificial viscosity and the corrections of the Shepard and MLS density filters, through the SPHysics software. In addition, a comparison between simulated and available experimental results is made in order to validate the study. The applied corrections were efficient for recovering the mentioned fields. The comparisons showed very good agreement, that is, very low percentage differences.

Keywords: *Smoothed Particle Hydrodynamics, Shepard density filters and Moving Least Squares, Dam Break, SPHysics.*

Lista de Figuras

2.1	Descrições euleriana e lagrangiana.	20
2.2	Diferentes tipos de discretização. Fonte:[6]	20
2.3	Partículas dispostas de forma regular (a) e randômica (b). Fonte: [23]	21
3.1	Exemplo de uma distribuição de partículas 2-D envolvendo a partícula a . O raio de influência é expresso como um múltiplo, k , do comprimento de suavização h . [22]	26
3.2	Figura a) mostra todo o domínio computacional e Figura b) células adjacentes às partículas vizinhas [21].	27
3.3	Núcleo Gaussiano e sua derivada dividida pelo fator dimensional α_D . [3]	28
3.4	Núcleo Quadrático e sua derivada dividida pelo fator dimensional α_D . [3]	28
3.5	Núcleo Spline cúbico e sua derivada dividida pelo fator dimensional α_D . [3]	29
3.6	Núcleo Quíntico e sua derivada dividida pelo fator dimensional α_D . [3]	30
4.1	Condição de repulsão. [22]	33
4.2	Evolução de novas células na direção Z, dependendo das partículas do fluido em movimento. [22]	34
5.1	Escoamento de lava, sem correção XSPH (a) e com (b). [18]	38
5.2	Estudo da tensão SPH. [20]	39
5.3	Árvore do diretório.	41
5.4	Esquema da simulação.	42
6.1	Configuração inicial do tanque	43
6.2	Campo de velocidades do fluidos parte 1.	44
6.3	Campo de velocidades dos fluidos parte 2.	44
6.4	Pressão com uso da viscosidade artificial $\alpha = 0.3$, com filtros de densidade de Shepard e MLS.	45
6.5	Gráfico dos valores da pressão com uso da viscosidade artificial $\alpha = 0.3$ e com filtros de densidade de Shepard e MLS.	46
6.6	Geometria do tanque para validação experimental. [4]	47
6.7	Geometria 1 (a) e geometria 2 (b) para simulações.	47
6.8	Comparação com modelo experimental, para $\alpha = 0.2$	48
6.9	Comparação com modelo experimental, para $\alpha = 0.3$	49
6.10	Comparação com modelo experimental, segunda geometria, para $\alpha = 0.2$	49
6.11	Comparação com modelo experimental, segunda geometria, para $\alpha = 0.3$	50
6.12	Dimensões do tanque 2	50
6.13	Comparação da interface do fluido simulada com experimento laboratorial, para os tempos 0.01s e 0.16s	51
6.14	Comparação da interface do fluido simulada com experimento laboratorial, para os tempos 0.27s e 0.37s	51

6.15 Comparação da interface do fluido simulada com experimento laboratorial, para o tempo 0.45s	51
---	----

Lista de Tabelas

1.1	Rompimento de barragens no Brasil.	16
6.1	Valores médios da pressão de acordo com o tempo, referentes as análises da figura (6.5)	46
6.2	Resultados das figuras (6.8) e (6.9), primeira geometria.	48
6.3	Resultados das figuras (6.10) e (6.11), segunda geometria.	48
6.4	Resultados das figuras (6.13) e (6.14), segunda geometria.	52

Sumário

Resumo	5
Abstract	7
Lista de Figuras	8
Lista de Tabelas	10
Capítulos	
1 Introdução	15
1.1 Aplicações SPH	15
1.2 Ruptura de Barragens	16
1.3 Objetivos	17
2 Matemática do Fluido	19
2.1 Descrição do Fluido	19
2.2 Modelagem Computacional	20
3 Fundamentos do SPH	23
3.1 Interpolação Padrão SPH	23
3.1.1 Erros	24
3.2 Núcleo de Suavização	25
3.2.1 Busca por partículas vizinhas	26
3.3 Tipos de Núcleos	27
4 Modelagem Matemática	31
4.1 Equação de Quantidade de Movimento	31
4.2 Equação de Estado	31
4.3 Conservação de Massa	32
4.4 Conservação de Energia	32
4.5 Tratamento de Fronteira	32
4.5.1 Fronteira Sólida	33
4.5.2 Fronteira Livre	33
5 Correções Aplicadas ao SPH	35
5.1 Viscosidade Artificial	35
5.2 Filtro de Densidade	36
5.2.1 Filtro Shepard - Ordem Zero	36
5.2.2 Mínimos Quadrados Móveis (MLS) - Primeira Ordem	36
5.3 Renormalização do Núcleo	37

5.3.1	Correção do Gradiente do Núcleo	37
5.4	Movimento das Partículas	38
5.5	Correção da Tensão	39
5.6	Atualização Temporal	40
5.7	Simulador	41
6	Resultados	43
6.1	Campo de velocidades	43
6.2	Campo de pressões	45
6.3	Frente de onda: Validação experimental, tanque 1.	46
6.4	Frente de onda: Validação experimental, tanque 2.	49
7	Conclusão	53
	Referências	53
	Apêndices	

Introdução

Desde o seu nascimento em 1977, o *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) tem sido melhorado, atingindo resultados promissores. Isso se deve a um intenso esforço teórico pela comunidade trabalhando nesta área e também a uma evolução na capacidade computacional, principalmente em computação paralela. Por ser um método sem malha e relativamente recente já é considerado uma ferramenta promissora em aplicações industriais e ambientais, pois pode ser usado com certa facilidade para problemas com geometrias complexas e fronteiras livres.

Nos últimos anos, alguns códigos SPH tornaram-se uma parte inerente do arsenal numérico de laboratórios industriais de pesquisa e desenvolvimento e instituições acadêmicas. Existem várias razões que explicam este sucesso [22]: (1) a crescente necessidade da indústria e pesquisa em utilizar ferramentas apropriadas para solução numérica de modelos hidrodinâmicos complexos; (2) avanços recentes na teoria SPH que resolveram uma série de problemas deste método; e (3) o surgimento das unidades de processamento gráfico (GPUs) que permitem aos códigos SPH a simulação de fluxos tridimensionais complexos em escalas reais, mantendo tempos computacionais razoáveis.

1.1 Aplicações SPH

O SPH foi originalmente desenvolvido para a modelagem astrofísica, onde a densidade do fluido pode variar no espaço e com o tempo em algumas ordens de grandezas e na ausência de fronteiras físicas.

A capacidade do SPH lidar com as questões de densidade variável e fluxos diversos, decorre do fato de sua natureza ser totalmente lagrangiana. A idéia do método é acompanhar o fluido por meio das partículas em movimento, sem qualquer restrição de malha. Em meados da década de 1990 Monaghan [12] fez uma primeira tentativa de usar SPH para fluidos simples, ou seja, aplicou-se à hidráulica de superfície livre encontrada na vida cotidiana. Para isto, Monaghan apresentou duas idéias básicas, mas úteis, para resolver os problemas: aproximar densidade constante e impor limites rígidos. A idéia de impor uma densidade constante equivale a uma condição quase incompressível, ou seja, uso da equação de estado com velocidade de som suficientemente grande que não impedisse simulações. Esta é a variante conhecida atualmente como WCSPH (SPH quase compressível).

Surpreendentemente, o tratamento da superfície livre não exigiu cuidado especial nessa tentativa inicial. Este primeiro sucesso revelou-se tão impressionante que a comunidade de modeladores do SPH na hidráulica cresceu rapidamente desde meados da década de 1990, propondo novas idéias e melhorias para o modelo simples original de Monaghan.

O sucesso do SPH na hidráulica é devido à sua extraordinária capacidade de simular uma variedade de fluxos complexos, envolvendo um amplo aspecto de processos físicos. As principais características e mais interessantes [22] permitem lidar com :

- superfícies livres com deformações acentuadas e rápida movimentação sem qualquer restrição em relação às suas topologias;
- fluxos altamente não-lineares, dominados por inércia e processos de impacto;
- fluxos multi-fluidos e multi-físicos;
- interações fluido / estrutura, incluindo o movimento rígido do corpo em um acoplamento fluido e fluido / elasticidade;
- facilidade de programação (pelo menos para o básico), seja em 2-D ou 3-D.

Uma das características atraentes do SPH é seu caráter variacional, que mantém harmonia com os fundamentos da mecânica lagrangiana e hamiltoniana (para fenômenos não dissipativos). Desde seu uso na hidráulica, o SPH foi aplicado a diversos problemas na pesquisa de escoamentos e engenharia hidráulica. O sucesso deste método em vários campos deve-se à relativa facilidade com que as simulações SPH foram capazes de produzir resultados para casos não-lineares complicados e muitas vezes fenômenos multi-físicos. Com pouca modificação da metodologia básica, o SPH conseguiu gerar resultados em estreita concordância com soluções de referência/dados em testes de validação, sem algoritmos altamente sofisticados exigidos em esquemas baseados em malha. A maioria dos campos acima mencionados são considerados muito difíceis (para não dizer impossíveis) para outros métodos numéricos.

No modelo de escoamento com superfície livre, o SPH tem rivalizado com o método dos volumes finitos e de outras abordagens dedicadas a esse tipo especial de escoamento. Além disso, o progresso recente em sanar aspectos numéricos antes deficitários do SPH, aumentam a credibilidade no uso do método e faz crescer a comunidade que se dedica a esta abordagem.

1.2 Ruptura de Barragens

O rompimento de barragens é uma modalidade de desastres consideravelmente recorrente na história da humanidade. Dois são os principais fatores que podem ser apontados como causa primária desse evento: o advento de um fenômeno natural intenso responsável por abalar a estrutura da barragem ou o mau planejamento dessa estrutura que independentemente de fatores externos entra em colapso em razão dos erros de cálculos dos engenheiros [1].

No Brasil há ocorrência de rompimento de represas com dejetos minerais e também em barragens de água nas últimas décadas, com vítimas, como observado na Tabela (1.1).

Tabela 1.1: Rompimento de barragens no Brasil.

Local	Ano	Danos causados
Itabirinto	1986	7 óbitos
Nova Lima	2001	5 óbitos
Mirai	2007	4000 pessoas desabrigadas.
Mariana	2015	19 óbitos, 8 desaparecidos, 600 desabrigados.

O problema da quebra de barragens foi introduzido pela primeira vez por Stoker (1957). Este problema consiste em ter um espaço fechado cheio de água; a barreira para um lado é então removida e a água pode fluir livremente para dentro do vazio.

Para essa simulação é utilizado um código 2D-SPH (*2D-SPHysics*). A ruptura da barragem é simulada com diferentes combinações de opções de compilação que modificam

tratamento numérico e teóricos da modelagem. Assim, os diversos resultados do método SPH são comparados entre si e também contra os dados experimentais existentes, para se encontrar uma combinação adequada que forneça a melhor precisão para a simulação.

1.3 Objetivos

O objetivo deste trabalho, é apresentar uma análise matemática do método SPH através do estudo do modelo de ruptura de barragens. Este trabalho está dividido da seguinte forma: o primeiro capítulo traz a introdução, onde é exposto de forma resumida o problema e aspectos gerais da evolução do método SPH e sua utilização; o segundo capítulo versa sobre alguns conceitos básicos sobre fluidos, que são importantes para a compreensão da aplicação estudada neste trabalho; o terceiro trata dos aspectos fundamentais sobre o método SPH, através de sua formulação matemática, erro e apresentação dos núcleos; o quarto capítulo aborda as equações de conservação e governantes do escoamento juntamente com suas discretizações SPH; o capítulo cinco descreve as correções que são aplicadas ao SPH, de tal forma que o método possa modelar o fluido corretamente; o capítulo seis traz os resultados obtidos nas simulações e, por último, o capítulo sete finaliza o trabalho com as conclusões.

Matemática do Fluido

Pode-se descrever várias características a respeito do fluido, dentre elas, apresenta-se a seguir as principais.

2.1 Descrição do Fluido

É interessante descrever sumarizadamente as concepções euleriana e lagrangiana de um escoamento. Assim, as quantidades físicas associadas aos elementos de fluido variam em um meio contínuo e podem ser descritas como dois tipos [19]:

Euleriana

Ao invés de acompanhar o movimento ao longo do tempo do escoamento, considera-se um conjunto de posições fixas no espaço como se fossem partículas e, em seguida calcula-se as variações das quantidades físicas do fluido sempre nessas posições.

Lagrangiana

O escoamento é representado por uma coleção de partículas de fluido e cada uma delas se locomove no tempo, muda de posição no espaço, e então sobre cada partícula são calculadas as novas quantidades físicas do fluido. Observe que elas poderão estar em posições espaciais diferentes em cada tempo; por exemplo, como na figura (2.1).

A figura (2.1) procura dar ideia dos dois tipos de abordagens comumente usados na simulação numérica. O método SPH utiliza a abordagem lagrangiana.

Compressibilidade

Um fluido que tem um grande variação em sua densidade é definido como compressível, já quando não há variação (fixo) é chamado de incompressível. Considera-se um fluido ligeiramente compressível, ou quase-compressível, por exemplo a água, quando há variações de densidades muito baixas. Neste trabalho iremos tratar deste último caso.

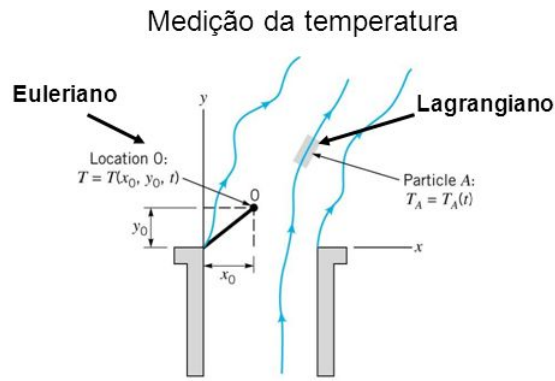


Figura 2.1: Descrições euleriana e lagrangiana.

2.2 Modelagem Computacional

O uso de computadores para a simulação computacional de modelos matemáticos é fundamental para a evolução da engenharia, ciência e tecnologia. Estas simulações envolvem experimentos em laboratórios e computações numéricas baseadas em modelos matemáticos. Para efetuar a simulação do modelo matemático é preciso discretizar o domínio por meio de malha estruturada ou não, ou por meio de partículas, ou seja, sem malha. Na figura (2.2) podemos ver diferentes casos de discretizações.

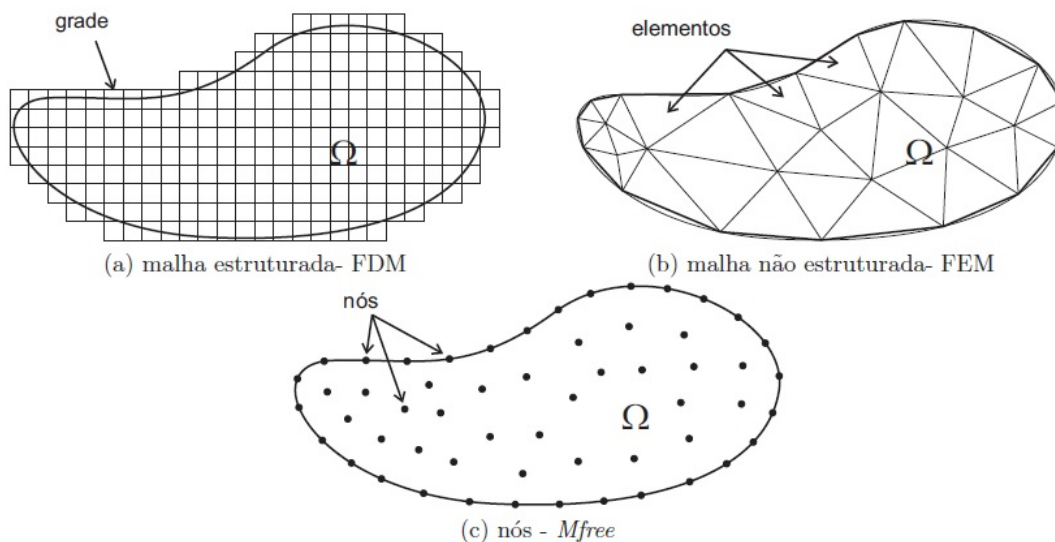


Figura 2.2: Diferentes tipos de discretização. Fonte:[6]

Modelos com malha:

Malhas computacionais são constituídas por linhas e pontos. Os pontos são considerados onde essas linhas se interceptam e servem de posição para o cálculo de propriedades físicas conforme o modelo matemático. Essas malhas podem ser malhas, grades, volumes, células ou elementos, de acordo com o método utilizado. Muitas utilizam pontos igualmente espaçados, como é o caso de diferenças finitas [5], outras necessitam de adaptações de acordo com o domínio adotado.

Sem Malha:

Métodos sem malha (ou *meshfree*) usam um conjunto de partículas espalhadas dentro do domínio do problema. Pensando cada partícula como um nó, existe interação entre cada nó com todos os seus vizinhos, assim os nós carregam propriedades como velocidade, energia, massa, etc.

As partículas podem estar distribuídas de forma (fixa) regular ou randômica [23]; o mais comum é que as partículas se movimentem (mudando de posição espacial) com o tempo. A figura 2.2 ilustra as situações: com malha e sem malha. Já a figura (2.3) exemplifica as distribuições uniforme e randômica.

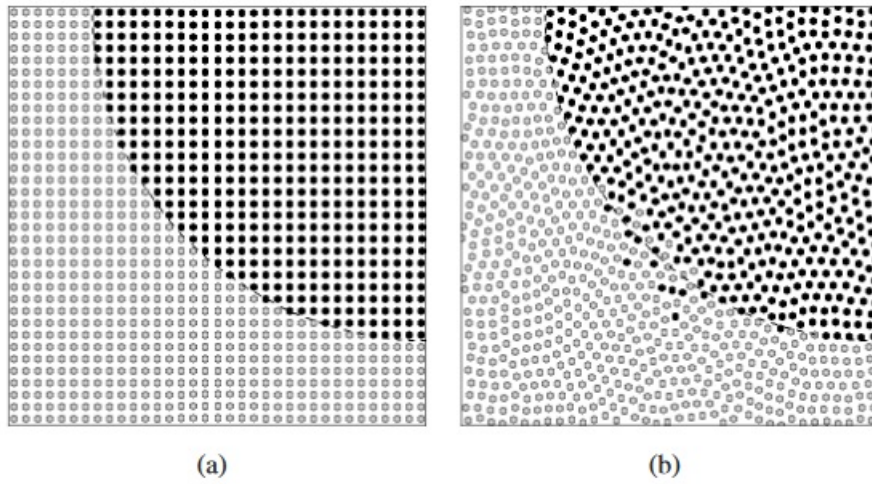


Figura 2.3: Partículas dispostas de forma regular (a) e randômica (b). Fonte: [23]

Fundamentos do SPH

O *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) é um método lagrangiano que não requer malha ou grade. O material é representado por elementos de massa, chamados de partículas. A simulação avança no tempo calculando a nova posição e respectivas propriedades de cada partícula, por meio de um esquema de integração.

3.1 Interpolação Padrão SPH

Pode-se conceituar, do ponto de vista computacional, que o fluido é representado por uma porção de partículas evoluindo com a velocidade do escoamento. A base da formulação SPH é uma interpolação integral que utiliza a função δ de Dirac, introduzida pelo físico teórico Paul Dirac em 1930. Trata-se de uma função generalizada ou distribuição geralmente representado por δ tal que

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{r} = \mathbf{r}', \\ 0, & \text{se } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'. \end{cases}$$

Na modelagem computacional, o fluido é apresentado como uma parcela de partículas que evoluem com o movimento do escoamento. Cada partícula representa um ponto de interpolação no qual todas as propriedades do fluido são conhecidas. Assim, considerando uma função A de um campo escalar, em um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, com posições \mathbf{r}, \mathbf{r}' e pela definição da distribuição do delta de Dirac δ , é possível escrever

$$A(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} A(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (3.1)$$

Devido a função delta de *Dirac* ser generalizada, necessita de propriedades de continuidade e diferenciabilidade, logo não pode ser empregada para modelos discretizados numericamente. A partir disso, aproxima-se $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ através de uma função suave $W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)$ [8] parametrizada por um comprimento de suavização h , que define a área de influência da função núcleo W . É exigido então

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' = 1, \\ \lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = \delta,$$

onde o limite é pretendido no sentido das distribuições, onde \mathbf{r} é a posição do vetor; W é a função de ponderação ou núcleo, h é chamado de comprimento de suavização e controla

o domínio de influência Ω . Afim de aproximar o valor da função $A(\mathbf{r})$ coloca-se

$$A(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} A(\mathbf{r}')W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)d\mathbf{r}'. \quad (3.2)$$

A formulação SPH da integral na equação (3.2) em sua forma discreta é representada por um somatório sobre todas as partículas no domínio de influência da partícula a , ou seja, com as partículas b vizinhas mais próximas. O domínio contendo as partículas vizinhas é chamado de domínio do suporte compacto de W .

Em termos físicos o domínio Ω representa o corpo do fluido, que será discretizado com um conjunto finito de partículas, cada uma com massa m_a e densidade ρ_a . O volume infinitesimal $d\mathbf{r}'$ na integral (3.2) é substituído pelo volume da partícula b^{th} que será identificado por ∇V_b e dado pela expressão:

$$\nabla V_b = \frac{m_b}{\rho_b}. \quad (3.3)$$

Na notação discreta consideramos $W_{ab} = W(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, h)$. Assim a função A pode ser aproximada usando o valor das partículas próximas por um somatório:

$$A(\mathbf{r}_a) \approx \sum_b W(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, h)A(\mathbf{r}_b)\frac{m_b}{\rho_b}. \quad (3.4)$$

Esta é a formulação básica do SPH, que calcula o valor da função por interpolação integral. Formalmente, seja uma função de densidade $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e um conjunto de pontos $\{\mathbf{r}_a\} \subset \Omega$. Assim a aproximação em notação discreta, leva à seguinte aproximação da função em uma partícula a .

$$A(\mathbf{r}_a) = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} W_{ab} \quad (3.5)$$

onde o somatório considera todas as partículas dentro da região do suporte compacto da função núcleo centrada em a .

3.1.1 Erros

Baseado na equação (3.4) podemos encontrar a fórmula diretamente para um gradiente:

$$\nabla A(\mathbf{r}_a) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} A(\mathbf{r}_b) \nabla_b W_{ab} \quad (3.6)$$

onde o termo $\nabla_b W_{ab}$ indica o gradiente do núcleo de suavização em relação as coordenadas da partícula a :

$$\nabla_a W_{ab} = \left(\frac{\partial}{\partial x_a} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y_a} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z_a} \mathbf{k} \right) W_{ab}, \quad (3.7)$$

onde \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são vetores unitários nas suas coordenadas direcionais. No entanto usando a equação (3.6) para uma função A pode acontecer uma resposta sem significado físico para o gradiente, levando a erros significativos [11]. Por esta razão, é sempre sugerido na literatura o uso da seguinte identidade matemática para calcular o gradiente SPH:

$$\rho \nabla A = \nabla(\rho A) - A \nabla \rho. \quad (3.8)$$

Essa identidade leva a seguinte formulação para o gradiente SPH:

$$\nabla A_b = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (A_b - A_a) \nabla_a W_{ab}. \quad (3.9)$$

A modelagem das forças entre as partículas tanto na primeira como na segunda fórmula (equações (3.6) e (3.9)) dão uma reação igual e oposta [11]. Para criar um gradiente mais simétrico, a seguinte identidade pode ser usada

$$\frac{\nabla}{\rho} = \nabla\left(\frac{A}{\rho}\right) - \frac{A}{\rho^2}\nabla\rho. \quad (3.10)$$

Essa identidade leva à seguinte formulação para o gradiente SPH:

$$\nabla A_a = \sum_b m_b \left(\frac{A_b}{\rho_b^2} + \frac{A_a}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab}. \quad (3.11)$$

O erro da interpolação integral pode ser encontrado usando uma função de expansão da série de Taylor $A(\mathbf{r})$ em torno de r [11], cujos dois primeiros termos são:

$$A(\mathbf{r}') = A(\mathbf{r}) + (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla A(\mathbf{r}) + O\left(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2\right). \quad (3.12)$$

Para o último termo, o erro de truncamento de segunda ordem, a ordem da distância entre as posições \mathbf{r} e \mathbf{r}' é geralmente semelhante à ordem do comprimento de suavização h . Se usarmos a interpolação SPH na equação 3.12 podemos obter:

$$A(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \int_{\Omega} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\Omega + \nabla A(\mathbf{r}) \int_{\Omega} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\Omega + O(h^2). \quad (3.13)$$

O núcleo de suavização é uma função uniforme em relação a \mathbf{r} e, portanto, $(\mathbf{r}' - \mathbf{r})W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)$ é uma função ímpar [8] tornando o segundo termo igual a zero. Além disso, devido às propriedades do núcleo, que são descritas na próxima seção, a primeira integral é igual à unidade, levando-nos a:

$$A(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) + O(h^2). \quad (3.14)$$

Comprovamos assim que a interpolação SPH é pelo menos de segunda ordem de precisão. Este resultado pressupõe que as integrais podem ser aplicadas a todo o volume especificado pelo comprimento de suavização. Perto da fronteira, isso não se aplica, levando a uma precisão reduzida e possíveis instabilidades numéricas.

3.2 Núcleo de Suavização

O desempenho de um modelo SPH depende da escolha das funções de suavização. Esta deve tender para a função delta à medida que o comprimento de suavização se aproxima de zero:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.15)$$

Os núcleos de suavização são estendidos apenas para partículas em uma vizinhança de a , por isso estes precisam possuir suporte compacto como na figura(3.1).

O núcleo precisa obedecer as seguintes propriedades:

1. **suficientemente suave:**

$$W \in C > k, k > 1$$

2. **normalizado:**

$$\int_R W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' = 1$$

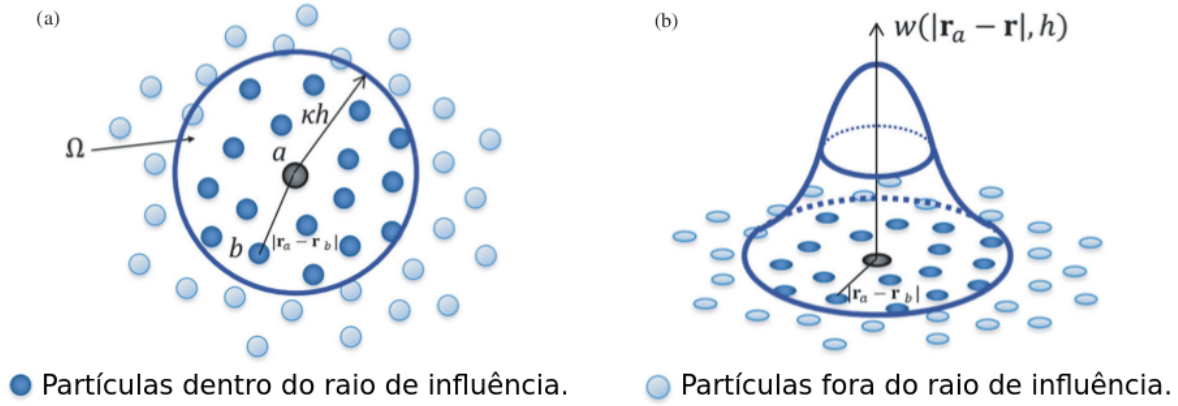


Figura 3.1: Exemplo de uma distribuição de partículas 2-D envolvendo a partícula a . O raio de influência é expresso como um múltiplo, k , do comprimento de suavização h . [22]

3. suporte compacto:

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = 0, \text{ quando: } |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \mathbf{r}_{ab} > kh$$

4. positivo:

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) \geq 0$$

5. decrescente:

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) < W(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', h), \text{ se: } |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_k|$$

6. simétrico:

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = W(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, h) = W(\vec{\mathbf{r}})$$

7. convergente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

A terceira condição é fundamental pois permite a aproximação ser gerada localmente. O domínio local corresponde à zona de influência do núcleo. Devido ao suporte compacto, o esforço computacional é reduzido ao usar apenas as partículas vizinhas.

3.2.1 Busca por partículas vizinhas

Devido à movimentação das partículas, é preciso manter o controle sobre as partículas. Afim de explorar as vantagens do suporte compacto do SPH é usado um algoritmo de busca de vizinhas, baseado na subdivisão do domínio em células quadradas, de lado $2h$. Assim é possível restringir a pesquisa das partículas vizinhas apenas às células adjacentes como mostrado na figura (3.2).

Existem várias funções que obedecem as propriedades mostradas. Para garantir que a integral do núcleo seja igual à unidade é usado um fator de normalização α_D , descrito na

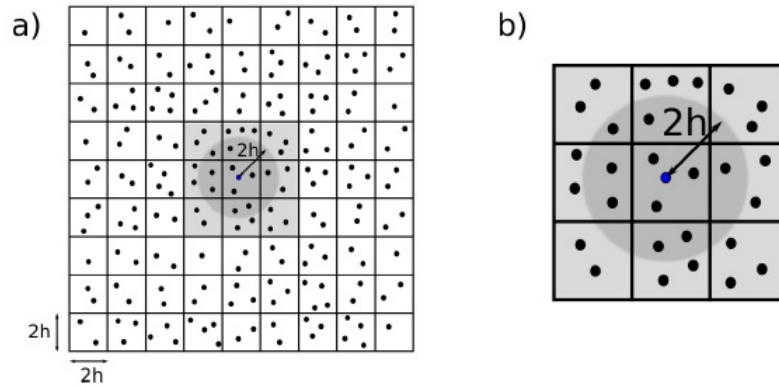


Figura 3.2: Figura a) mostra todo o domínio computacional e Figura b) células adjacentes às partículas vizinhas [21].

próxima subseção, que varia de acordo com as dimensões do domínio adotado. O núcleo é então escrito como função de uma variável não dimensional que é a distância da partícula ao longo do comprimento de suavização. Por exemplo, a variável em uma dimensão fica:

$$q = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{h}. \quad (3.16)$$

3.3 Tipos de Núcleos

A seguir iremos descrever os núcleos que serão utilizados nas simulações. Várias aproximações de núcleo são descritas em [8] e [11].

Gaussiano

O núcleo Gaussiano é uma função suave, mesmo para derivadas de ordem mais altas [8]. Por ser uma série infinita, possui um alto custo computacional e não possui suporte compacto. É representado por,

$$W(r, h) = \alpha_D e^{-q^2}, \quad (3.17)$$

onde

$$\alpha_D = \begin{cases} 1/(h\sqrt{\pi}), & \text{para } 1D, \\ 1/(\pi h^2), & \text{para } 2D, \\ 1/(\sqrt{\pi} h^3), & \text{para } 3D. \end{cases} \quad (3.18)$$

Quadrático

Esta função foi utilizada para simular o problema de impacto de alta velocidade [3], sendo que foi então afirmado que esta função evita o agrupamento de partículas. Possui um custo computacionalmente baixo. Não tem nenhum extremo em seu gradiente, mas tem uma precisão reduzida por ser um polinômio do segundo grau.

$$W(r, h) = \alpha \left[\frac{3}{16} q^2 - \frac{3}{4} q + \frac{3}{4} \right] \quad (3.19)$$

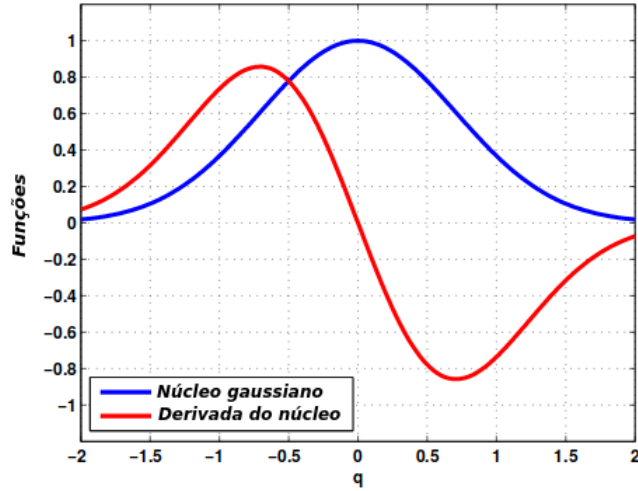


Figura 3.3: Núcleo Gaussiano e sua derivada dividida pelo fator dimensional α_D . [3]

onde

$$\alpha_D = \begin{cases} 3/4h, & \text{para } 1D, \\ 2/(\pi h^2), & \text{para } 2D, \\ 5/(4\pi h^3), & \text{para } 3D. \end{cases} \quad (3.20)$$

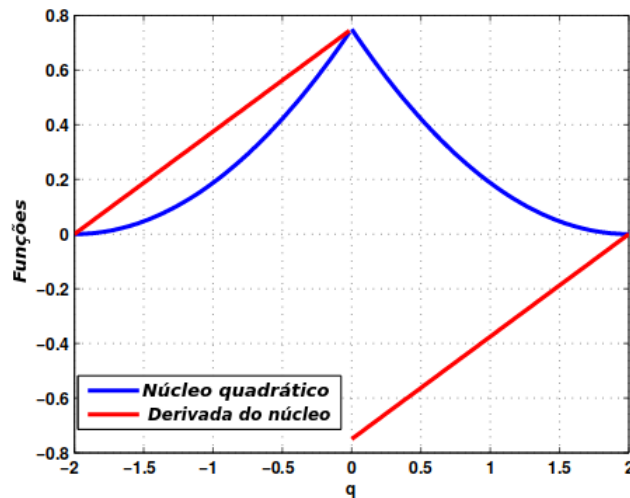


Figura 3.4: Núcleo Quadrático e sua derivada dividida pelo fator dimensional α_D . [3]

Spline cúbico

É o mais utilizado, este núcleo é uma aproximação do núcleo gaussiano, tornando-se computacionalmente barato [14], e possui seu suporte compacto. A equação do Núcleo Spline cúbica é da forma

$$W(r, h) = \alpha_D \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3, & \text{se } 0 \leq q \leq 1, \\ \frac{1}{4}(2 - q)^3, & \text{se } 1 \leq q \leq 2 \end{cases} \quad (3.21)$$

onde

$$\alpha_D = \begin{cases} 2/3h, & \text{para } 1D, \\ 10/(7\pi h^2), & \text{para } 2D, \\ 1/(\pi h^3), & \text{para } 3D. \end{cases} \quad (3.22)$$

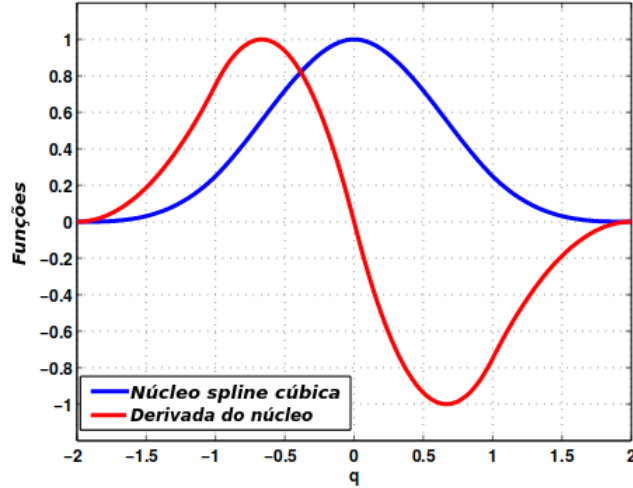


Figura 3.5: Núcleo Spline cúbico e sua derivada dividida pelo fator dimensional α_D . [3]

Quíntico

É um polinômio de alta ordem e pode capturar efeitos de ordem superior com precisão aprimorada. Essa função é a que apresenta melhor custo benefício, entre precisão e custo computacional. Em geral, quanto maior a ordem dos núcleos, maior a precisão para a aproximação SPH [3].

$$W(r, h) = \alpha_D \left(1 - \frac{q}{2}\right)^4 (2q + 1) \quad 0 \leq q \leq 2 \quad (3.23)$$

onde

$$\alpha_D = \begin{cases} 3/4h, & \text{para } 1D, \\ 7/(4\pi h^2), & \text{para } 2D, \\ 7/(8\pi h^3), & \text{para } 3D. \end{cases} \quad (3.24)$$

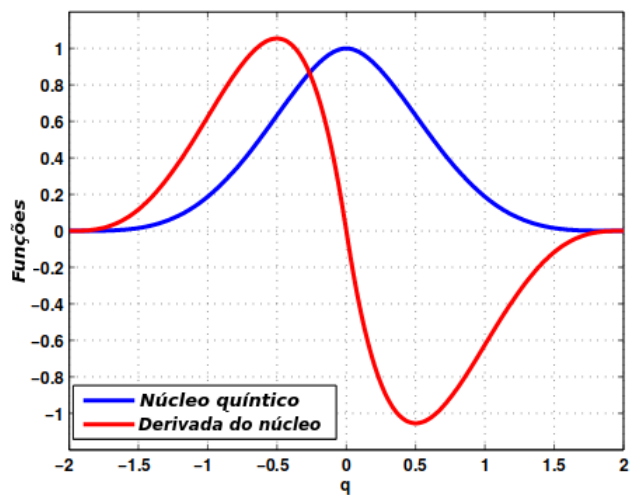


Figura 3.6: Núcleo Quíntico e sua derivada dividida pelo fator dimensional α_D . [3]

Modelagem Matemática

Neste capítulo são apresentadas as discretizações das equações de modelagem de fluidos, usando SPH. Considera-se que o fluido tem uma baixa compressibilidade, e portanto, se pode usar uma equação de estado para a relação entre pressão e densidade.

4.1 Equação de Quantidade de Movimento

A equação de conservação do momentum é dada por

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \mathbf{g} + \Gamma, \quad (4.1)$$

onde:

Γ são os termos difusivos relacionados as forças de viscosidade,

$\mathbf{g}=(0, 0, -9.81)ms^{-2}$ é a aceleração gravitacional,

ρ é a massa específica,

\mathbf{v} é a velocidade,

P é a pressão e

∇P é a força devido a pressão, por unidade de volume.

A equação (4.1) é descrita para um fluido Newtoniano. A equação do momento geralmente é tratada em sua forma inviscida, assim para se ter em conta o termo viscoso, é utilizado a viscosidade artificial, que será mostrada no capítulo 6.

4.2 Equação de Estado

O fluido compressível é aproximado a um fluido incompressível por meio de um fluido quase-compressível, onde a pressão é calculada através de uma equação de estado, o que torna o processo mais rápido do que o tradicional que utiliza a equação de Poisson.

Outra limitação da compressibilidade é imposta pelo fato de a velocidade do som ser cerca de dez vezes maior do que a velocidade máxima do fluido, mantendo assim variações de densidade no máximo 1%. Assim a pressão é calculada através da equação de estado conhecida como equação de Tait,

$$P = B\left(\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma - 1\right), \quad (4.2)$$

onde:

$B = c^2\rho_0/\gamma$, é o termo relacionado às flutuações das massas específicas do fluido,

ρ_0 é a massa específica de repouso do fluido e $\gamma = 7$.
 c é a magnitude da velocidade de propagação do som no fluido.

4.3 Conservação de Massa

Como o fluido aqui tratado é a água, no SPH, é considerado como fracamente compressível (ou quase-compressível). Assim, não é possível garantir que a massa específica seja constante. Considerando a equação de conservação de massa

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}. \quad (4.3)$$

No formalismo padrão do SPH o fluido é tratado como compressível, o que permite o uso de uma equação de estado para determinar a pressão do fluido, em vez de resolver outra equação diferencial. No entanto, a compressibilidade é ajustada para diminuir a velocidade do som para que o tempo do modelo (com base na velocidade do som) seja razoável. Da equação (4.3) na notação SPH, calcula-se as mudanças na massa específica do fluido por meio de:

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \nabla_a W_{ab} \quad (4.4)$$

em vez de usar uma soma ponderada de termos de massa, pois é sabido resultar em uma diminuição de densidade artificial em relação a interfaces de fluidos [11]. Pode-se também discretizar a densidade como uma função, ficando na forma como na equação (4.5), que é utilizada em problemas onde não há mudança considerável da massa específica; considera-se o fluido quase-compressível [14].

$$\langle \rho_i \rangle = \sum_{b=1}^N m_b W_{ab}. \quad (4.5)$$

4.4 Conservação de Energia

Durante a simulação, calcula-se a energia cinética, potencial e térmica. A energia térmica associada a cada partícula usando viscosidade artificial é dada por

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{\rho} - P \cdot \nabla \mathbf{v} + \varepsilon_{\mathbf{v}} + \nabla \cdot \mathbf{q} + qH \quad (4.6)$$

que na notação SPH é calculada pela expressão dada por [11]

$$\frac{de_a}{dt} = \frac{1}{2} \sum_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} + \prod_{ab} \right) \mathbf{v}_{ab} \nabla_a W_{ab} \quad (4.7)$$

onde \prod_{ab} é o termo de viscosidade artificial. A energia total do sistema é calculada como a soma da energia cinética e potencial.

4.5 Tratamento de Fronteira

A imposição de fronteiras sólidas impermeáveis é essencial para a aplicação de ruptura de barragens. Dentre as existentes na literatura, escolheu-se a de funções repulsivas. Pode também ocorrer o desprendimento de partículas do fluido (fronteira livre) que no *SPHysics* é identificado e tratado adequadamente, como observado na figura(4.2).

4.5.1 Fronteira Sólida

As partículas do fluido sofrem uma força repulsiva cuja magnitude está em função direta com a distância entre a partícula e a fronteira, como mostrado na figura (4.1). Em [12] é utilizada uma função de repulsão para definir uma força que mantém as partículas dentro do domínio computacional. No caso de uma partícula que se move paralelamente à fronteira o resultado não é satisfatório [15]. Porém mais tarde, em [15] esta técnica foi modificada para se adequar às partículas que se movem paralelamente a uma parede.

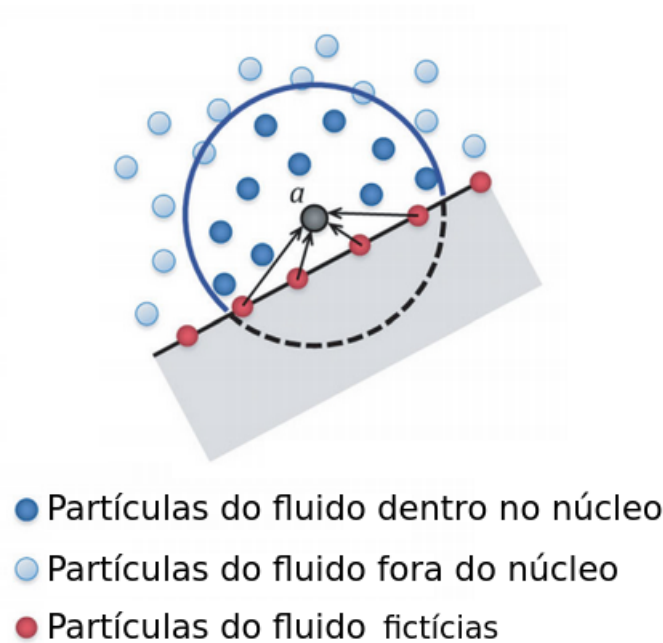


Figura 4.1: Condição de repulsão. [22]

4.5.2 Fronteira Livre

No SPH, as partículas do fluido podem se desprender de diferentes formas. Essas partículas devem ser identificadas e tratadas para evitar efeitos espúrios. O tratamento dessas partículas é chamado, no *SPHysics*, de "Verificação dos Limites"[3].

Quando uma partícula do fluido supera o limite superior na direção Z vertical, o domínio computacional é estendido e novas células são criadas, como observado na figura (4.2). As partículas do fluido podem então ocupar essas células de acordo com sua posição. Assim, o número de células na vertical é modificado dinamicamente dependendo da posição da "maior" partícula do fluido. O caso inverso ocorre quando as partículas descem, como mostrado na figura (4.2).

É interessante observar que o *SPHysics* também faz esse mesmo controle nas direções X e Y, para aumentar a eficiência computacional [3].

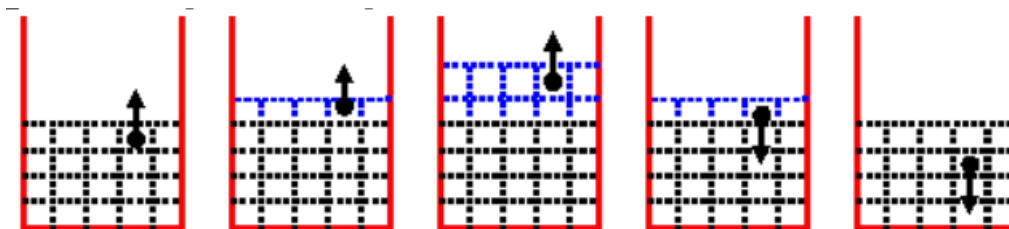


Figura 4.2: Evolução de novas células na direção Z , dependendo das partículas do fluido em movimento. [22]

Correções Aplicadas ao SPH

Embora a cinemática das simulações de SPH seja geralmente realista, o campo de pressão das partículas pode exibir grandes oscilações, que podem ser particularmente importantes nas áreas próximas de superfícies livres. Um dos métodos mais simples e computacionalmente menos onerosos para suavizar as oscilações do campo pressão, mesmo no caso do uso da equação de Tait, é a utilização de um termo de viscosidade artificial, conforme a equação (5.1). Outra técnica neste mesmo sentido é o filtro de Shepard, também abordado neste capítulo.

5.1 Viscosidade Artificial

Em problemas que envolvem ondas de choque, ocorre a transformação da energia cinética em calor, é representada como uma forma de dissipação viscosa. Seu uso tem por finalidade diminuir as instabilidades numéricas e a interpenetração entre partículas.

A equação (4.1) pode ser escrita da forma:

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \right) \nabla_a W_{ab} + \mathbf{g} \quad (5.1)$$

O termo gradiente de pressão em forma simétrica é expresso em notação SPH como

$$-\frac{1}{\rho} \nabla P = - \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab} \quad (5.2)$$

onde P é a pressão e ρ a densidade.

O termo Π_{ab} é o de viscosidade artificial:

$$\Pi_{ab} = \begin{cases} \frac{-\alpha \overline{c_{ab}} \mu_{ab}}{\overline{\rho_{ab}}} & \text{se } \mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab} < 0, \\ 0, & \text{c.c..} \end{cases}$$

com

$$\mu_{ab} = \frac{h \mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab}}{\mathbf{r}_{ab}^2 + \eta^2} \quad (5.3)$$

$$\overline{\rho_{ab}} = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b), \quad \overline{c_{ab}} = \frac{1}{2}(c_a + c_b) \quad \text{e} \quad \eta^2 = 0.01h^2,$$

onde:

α um parâmetro livre que pode ser alterado de acordo com cada problema.

c_a e c_b são as velocidades do som nas partículas fixas e vizinhas respectivamente,

h_a e h_b são os raios de suporte das partículas fixas e vizinhas, respectivamente,

φ^2 é um fator que evita diferenças numéricas quando duas partículas se aproximam.

O termo relacionado à viscosidade artificial é adicionado aos termos de pressão nas aproximações de SPH para as equações de equilíbrio de momento e conservação de energia [7].

5.2 Filtro de Densidade

As partículas no SPH podem sofrer grandes variações de pressão, principalmente nas proximidades das fronteiras e da superfície livre. Para diminuir o efeito da variação, foram introduzidas algumas correções. Um dos problemas é que o número de partículas varia nessas regiões mais afetadas. Assim, uma das correções busca adequar o valor de cada massa específica que ocorre no suporte compacto do núcleo, isso corresponde a uma "filtração" dos valores em questão. Assim, corrigindo por meio de um filtro de densidade, nas massas específicas das partículas vizinhas, consegue-se suavizar computacionalmente as flutuações de pressão. Esse procedimento pode ser repetido periodicamente "reiniciando" as propriedades em intervalos definidos de iterações.

5.2.1 Filtro Shepard - Ordem Zero

O filtro Shepard é uma correção rápida e simples para o campo de densidade. O seguinte procedimento é aplicado a cada m especificado entre 20 e 50 passos do tempo

$$\rho_a^{\text{new}} = \sum_b \rho_j \widehat{W}_{ab} \frac{m_b}{\rho_b} = \sum_b m_b \widehat{W}_{ab} \quad (5.4)$$

onde o núcleo foi corrigido usando uma correção de ordem zero,

$$\widehat{W}_{ab} = \frac{W_{ab}}{\sum_b W_{ab} \frac{m_b}{\rho_b}}. \quad (5.5)$$

Esta técnica possui um baixo custo computacional.

5.2.2 Mínimos Quadrados Móveis (MLS) - Primeira Ordem

A abordagem *Moving Least Squares* (MLS) foi desenvolvida por Dilts (1999) e aplicada por Colagrossi e Landrini (2003). O método é uma correção de primeira ordem para que a variação linear do campo de densidade possa ser reproduzida exatamente:

$$\rho_a^{\text{new}} = \sum_b \rho_b W_{ab}^{\text{MLS}} \frac{m_b}{\rho_b} = \sum_b m_b W_{ab}^{\text{MLS}} \quad (5.6)$$

O núcleo corrigido é calculado da seguinte forma:

$$W_{ab}^{MLS} = \beta(\mathbf{x}_a \cdot (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)) W_{ab} \quad (5.7)$$

De modo que, por exemplo, em 2-D

$$W_{ab}^{MLS} = [\beta_0(\mathbf{x}_a) + \beta_{1x}(\mathbf{x}_a)(x_a - x_b) + \beta_{1z}(\mathbf{x}_a)(z_a - z_b)] W_{ab}, \quad (5.8)$$

onde o vetor de correção β é dado por

$$\beta(\mathbf{x}_a) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1x} \\ \beta_{1z} \end{bmatrix} = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$A = \sum_b W_{ab} \hat{A} \frac{m_b}{\rho_b} \quad (5.10)$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & (x_a - x_b) & (z_a - z_b) \\ (x_a - x_b) & (x_a - x_b)^2 & (z_a - z_b)(x_a - x_b) \\ (z_a - z_b) & (x_a - x_b)(z_a - z_b) & (z_a - z_b)^2 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Semelhante ao filtro Shepard, a correção de densidade deve ser aplicada a cada passo do tempo. Nota-se que na aplicação do interpolador MLS, se faz necessária a solução de um sistema linear, em que a matriz dos coeficientes \hat{A} pode ser singular, devido à falta de partículas vizinhas. Assim, faz-se uma verificação da possibilidade de redução da matriz, para uma submatriz com determinante não nulo, como uma propriedade de envelopamento da matriz dos coeficientes, uma das características do interpolador MLS.

5.3 Renormalização do Núcleo

A correção periódica da função núcleo W é necessária nos cálculos hidráulicos SPH, onde o domínio finito e a superfície livre são muitas vezes parte do domínio computacional. As partículas perto dos limites ou na superfície livre possuem uma função de alisamento do núcleo truncada devido à ausência de partículas vizinhas. A condição de consistência de W falha. Corrigindo oportunamente a função W ou o seu gradiente resolve-se este problema.

5.3.1 Correção do Gradiente do Núcleo

Garante que o gradiente do campo de velocidades seja avaliado corretamente, modificando o gradiente do núcleo através da introdução de uma matriz de correção \mathbf{L} :

$$\tilde{\nabla} W_b(\mathbf{r}_a) = \mathbf{L}_a \nabla W_b(\mathbf{r}_a) \quad (5.12)$$

O gradiente da velocidade é consequentemente estimado como

$$\nabla \mathbf{v}_a = \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a) \otimes \tilde{\nabla} W_b(\mathbf{r}_a) \quad (5.13)$$

$$= \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a) \otimes \mathbf{L}_a \nabla W_b(\mathbf{r}_a). \quad (5.14)$$

O gradiente do Núcleo corrigido deve satisfazer a condição

$$\sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a) \otimes \nabla W_b(\mathbf{r}_a) = \mathbf{I}. \quad (5.15)$$

Assim

$$\sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a) \otimes \tilde{\nabla} W_b(\mathbf{r}_a) \quad (5.16)$$

$$= \left(\sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a) \otimes \nabla W_b(\mathbf{r}_a) \right) \mathbf{L}_a^T = \mathbf{I} \quad (5.17)$$

da qual \mathbf{L} é avaliado como

$$\mathbf{L}_a = \left(\sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \nabla W_b(\mathbf{r}_a) \otimes (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a) \right)^{-1}. \quad (5.18)$$

O uso desta técnica permite que o campo de velocidades seja corretamente avaliado [2].

5.4 Movimento das Partículas

Para um movimento mais ordenado das partículas pode ser utilizado o XSPH, que corrige a velocidade das partículas, é dado por:

$$\frac{d\mathbf{r}_a}{dt} = \mathbf{v}_a + \varepsilon \sum_b \frac{m_b}{\tau_{ab}} \mathbf{v}_{ba} W_{ab} \quad (5.19)$$

onde $\rho = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b)$ e ε é uma constante, onde seus valores variam de zero até um, sendo $\varepsilon = 0.5$ frequentemente usado. A velocidade é recalculada tendo em conta a velocidade dessa partícula e a velocidade média de todas as partículas que interagem com a partícula a . Assim são evitados interpenetrações das partículas e as partículas ficam organizadas como pode-se notar na Figura(5.1), melhorando a estabilidade numérica das simulações. Devido ao suporte compacto do núcleo, somente as partículas vizinhas serão incluídas.

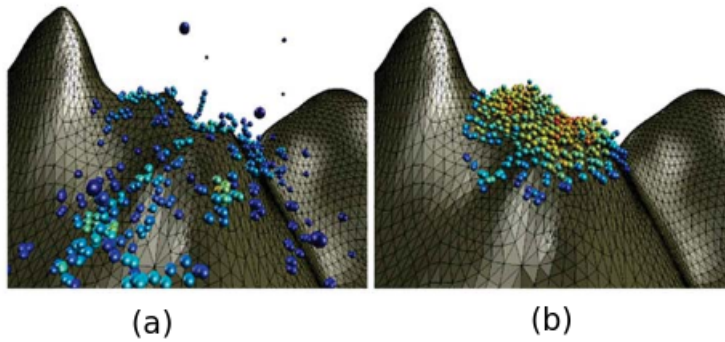


Figura 5.1: escoamento de lava, sem correção XSPH (a) e com (b). [18]

5.5 Correção da Tensão

Na implementação do *SPHysics*, existe a preocupação nos casos em que há o agrupamento de partículas, que é denominada instabilidade de tensão. Uma correção desta instabilidade, proposta por [13] e usada no código, é mostrada a seguir.

Em [20] é feito um estudo sobre critérios de estabilidade para equações de SPH, e observou-se as seguintes condições de crescimento instável:

$$\sum W''(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot T > 0 \quad (5.20)$$

onde W'' é a segunda derivada do núcleo e a tensão T é negativa na compressão e positiva na tensão, como observado na figura (5.2).

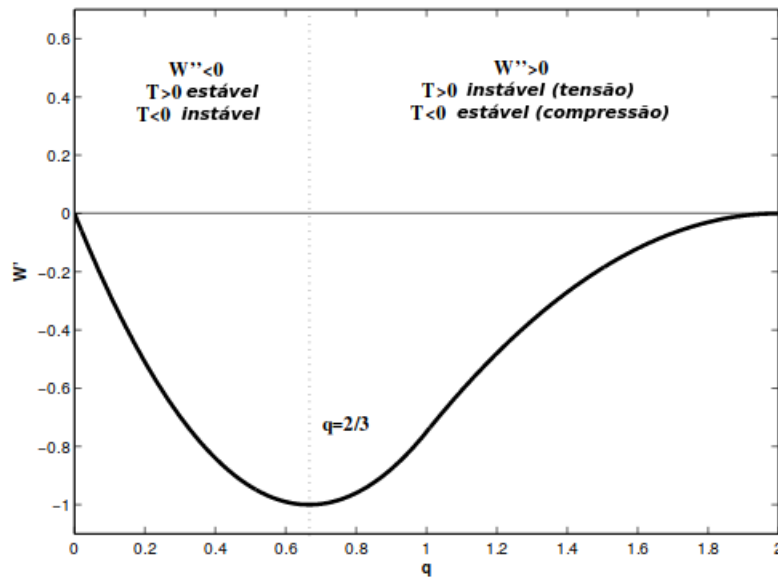


Figura 5.2: Estudo da tensão SPH. [20]

Na figura podemos observar os regimes de estabilidade para o núcleo de spline cúbico. Se a derivada segunda for positiva ($W'' > 0$), eles são instáveis em tensão ($T > 0$) e estáveis na compressão. Se a derivada secundária é negativa, é instável na compressão e estável na tensão.

A instabilidade de tensão resulta em um agrupamento de partículas de SPH. O agrupamento é claro em materiais com uma equação de estado que pode dar origem a pressões negativas. O aglomerado das partículas de SPH não é físico porque será impedido em um sólido real pelas forças repulsivas entre os átomos.

Em [13] é mostrado como a instabilidade no caso de fluidos pode ser removida usando a pressão artificial. Então basta adicionar a pressão artificial na equação do momento, como:

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} + \prod_{ab} + R f_{ab}^n \right) \nabla_a W_{ab} + \mathbf{g} \quad (5.21)$$

O termo adicionado é chamado de termo de correção de tensão. Considerando um núcleo, a força repulsiva deve aumentar e a separação entre duas partículas diminuir. Para remover

a instabilidade numérica, esta força repulsiva é escrita em termos do núcleo. Uma função adequada que aumenta as reduções de separação é

$$f_{ab} = \frac{W(q)}{W(\nabla p)} \quad (5.22)$$

onde ∇p é o espaçamento médio das partículas dividido pelo comprimento de suavização h :

usando $q = \nabla p \rightarrow W(q) = W(\nabla p) \rightarrow f_{ab} = 1$

usando $q > \nabla p \rightarrow W(q) < W(\nabla p) \rightarrow f_{ab} \rightarrow 0$

usando $q < \nabla p \rightarrow W(q) > W(\nabla p) \rightarrow f_{ab} \gg 1$ (área de interesse a ser corrigida).

5.6 Atualização Temporal

Tendo a finalidade de desenvolver as equações SPH no tempo, é aconselhável usar um esquema preciso de integração, pelo menos segunda ordem no tempo. Assim é utilizado o algoritmo Predictor-Corretor descrito por [10]. Considere a Equação do momento (4.1), Equação de continuidade (4.4), posição (5.19) e densidade de energia (4.7) da seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \mathbf{F}_a \quad (5.23)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = D_a \quad (5.24)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_a}{dt} = \mathbf{V}_a \quad (5.25)$$

$$\frac{de_a}{dt} = E_a \quad (5.26)$$

onde \mathbf{V}_a representa a contribuição de velocidade da partícula a e de partículas vizinhas (correção XSPH).

O esquema predictor-corretor prevê a evolução no tempo como:

$$\mathbf{v}_a^{n+1/2} = \mathbf{v}_a^n + \frac{\nabla t}{2} \mathbf{F}_a^n \quad (5.27)$$

$$\rho_a^{n+1/2} = \rho_a^n + \frac{\nabla t}{2} D_a^n \quad (5.28)$$

$$\mathbf{r}_a^{n+1/2} = \mathbf{r}_a^n + \frac{\nabla t}{2} \mathbf{V}_a^n \quad (5.29)$$

$$e_a^{n+1/2} = e_a^n + \frac{\nabla t}{2} E_a^n \quad (5.30)$$

calculando $P_a^{n+1/2} = f(\rho_a^{n+1/2})$ de acordo com a equação (4.2).

Esses valores são corrigidos usando forças no meio passo

$$\mathbf{v}_a^{n+1/2} = \mathbf{v}_a^n + \frac{\nabla t}{2} \mathbf{F}_a^{n+1/2} \quad (5.31)$$

$$\rho_a^{n+1/2} = \rho_a^n + \frac{\nabla t}{2} D_a^{n+1/2} \quad (5.32)$$

$$\mathbf{r}_a^{n+1/2} = \mathbf{r}_a^n + \frac{\nabla t}{2} \mathbf{V}_a^{n+1/2} \quad (5.33)$$

$$e_a^{n+1/2} = e_a^n + \frac{\nabla t}{2} E_a^{n+1/2} \quad (5.34)$$

Finalmente, os valores são calculados no final do intervalo de tempo seguinte

$$\mathbf{v}_a^{n+1} = 2\mathbf{v}_a^{n+1/2} - \mathbf{v}_a^n \quad (5.35)$$

$$\rho_a^{n+1} = 2\rho_a^{n+1/2} - \rho_a^n \quad (5.36)$$

$$\mathbf{r}_a^{n+1} = 2\mathbf{r}_a^{n+1/2} - \mathbf{r}_a^n \quad (5.37)$$

$$e_a^{n+1} = 2e_a^{n+1/2} - e_a^n. \quad (5.38)$$

Finalmente, a pressão é calculada a partir da densidade usando $P_a^{n+1} = f(\rho_a^{n+1})$.

Segundo [10], esse desenvolvimento é usado para que o SPH conserve o momento linear e angular. Na prática, eles usam o valor do ponto médio do tempo anterior em vez de calcular o valor no instante n , o que economiza tempo e cria apenas um pequeno erro. O esquema geral é de segunda ordem.

5.7 Simulador

As simulações são efetuadas usando o *SPHysics* que é um código livre de hidrodinâmica de partículas suavizadas (SPH) inspirado na formulação de [11]. É uma colaboração conjunta entre vários pesquisadores da Universidade Johns Hopkins (EUA), da Universidade de Vigo (Espanha), da Universidade de Manchester (U.K.) e da Universidade de Roma La Sapienza (Itália). O código *SPHysics* pode simular vários fenômenos, incluindo quebra de onda, barragens, objetos deslizantes, impacto de onda em uma estrutura etc. O modelo foi colocado em forma modular e uma variedade de recursos estão disponíveis para escolher diferentes opções de compilação.

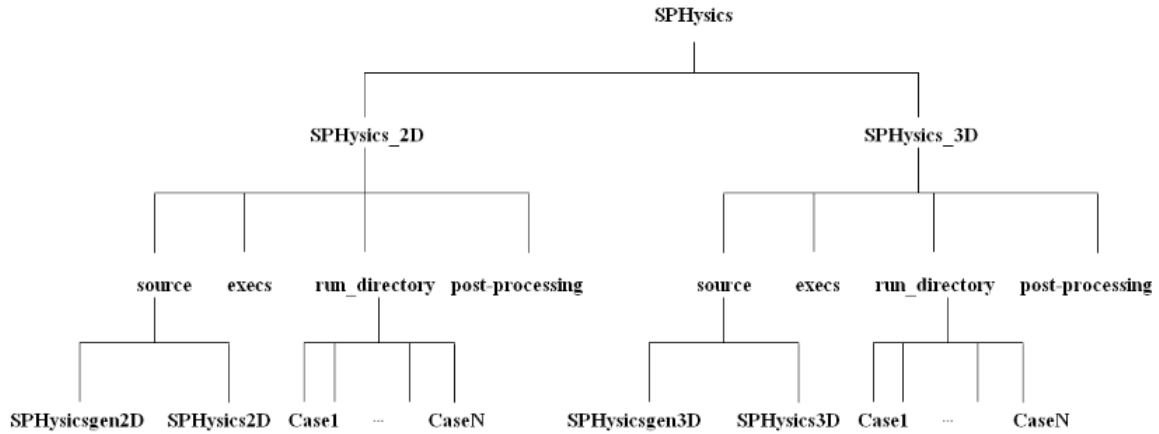


Figura 5.3: Árvore do diretório.

O *SPHysics* é distribuído em um arquivo compactado (gz ou zip). A árvore de diretório é mostrada na Figura (5.3). Diferentes arquivos de saída são criados pela *SPHysicsgen*. Esses arquivos podem ser usados pelo executável *SPHysics* como arquivos de entrada ou por códigos MATLAB para visualizar os resultados (diferentes códigos MATLAB são fornecidos no subdiretório pós-processamento).

Neste trabalho é usado um código em MATLAB que lê os arquivos de saída do *SPHysics* e permite gerar os gráficos do campo de velocidades, pressão e posição das partículas.

Assim podemos analisar os resultados de acordo com os parâmetros e as correções adotadas.

Na figura (5.4) são apresentados os passos de simulação, que serão aplicadas para solução da equação do momento, e as atualizações das propriedades do fluido, bem como a atualização das partículas no passo temporal.

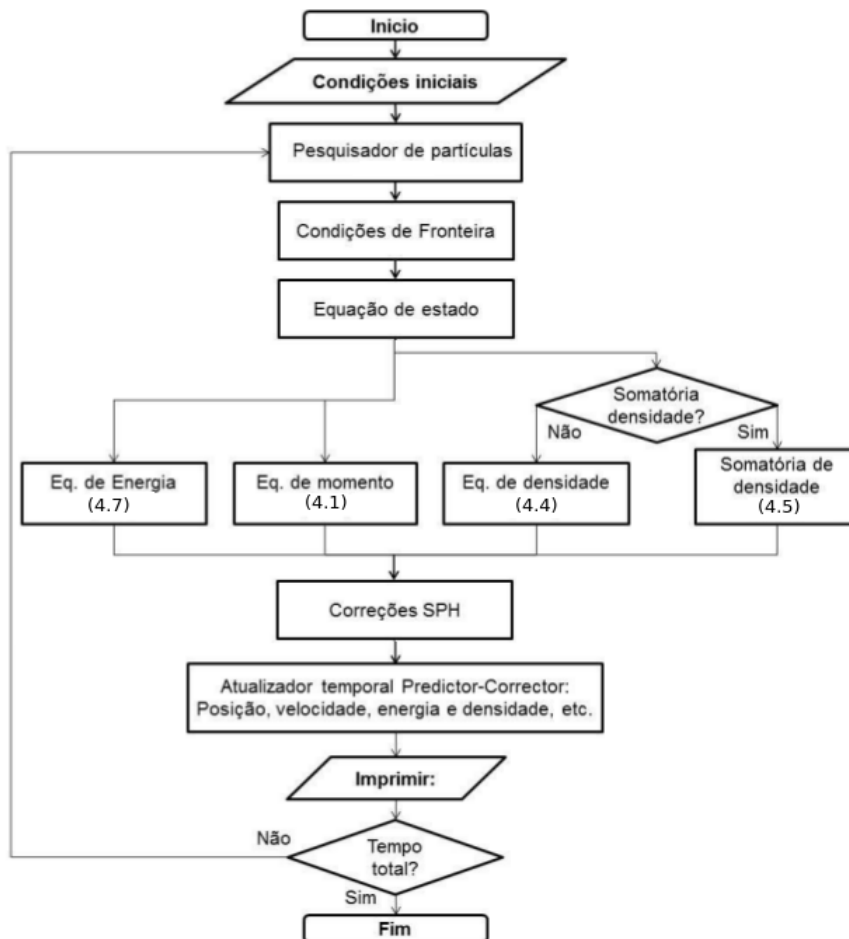


Figura 5.4: Esquema da simulação.

Resultados

A massa de fluido com uma configuração retangular inicial $H_0 = 2m$ de altura e $1m$ de largura é deixada livre para fluir dentro de uma caixa de medidas $4m \times 4m$ como na Figura (6.1).

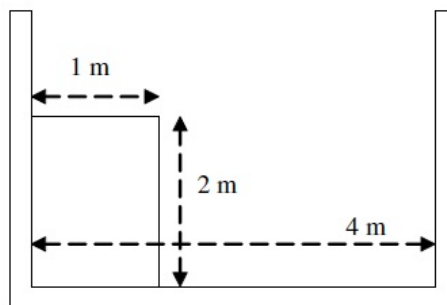


Figura 6.1: Configuração inicial do tanque

6.1 Campo de velocidades

A primeira análise é do campo de velocidades, onde é escolhido o núcleo Quíntico ou Wendland (3.24), e coeficiente de viscosidade artificial $\alpha = 0.3$, que é o sugerido pelas bibliografias, filtro de densidade MLS (5.6), com correção a cada 30 passos, e velocidade do som $c = 30m/s$. Nas simulações foram utilizadas 5123 partículas.

Nas figuras (6.2) e (6.3) são mostrados diferentes instantes da evolução na barragem. A barra de cores é comum a todos os instantâneos. As distâncias estão em metros e as velocidades em metros por segundo. Cada partícula é representada por uma cor correspondente à sua velocidade instantânea. Faz-se uma comparação das velocidades com e sem o uso da viscosidade artificial.

Percebe-se que o fluido escoar mais rapidamente sem o uso da viscosidade artificial, alcançando a parede sólida do tanque em $0.67s$ como mostrado na figura (6.2). Já com a viscosidade artificial a parede sólida do tanque é alcançada em $0.77s$.

Na figura (6.3) verifica-se um desprendimento das partículas ao se chocar com a parede sólida do tanque, o que não ocorre quando usada a viscosidade artificial como observado na mesma figura. O mesmo desprendimento de partículas foi reportado em [7]. O comportamento do campo de velocidades com o uso da viscosidade artificial está de acordo com as bibliografias pesquisadas, como [17].

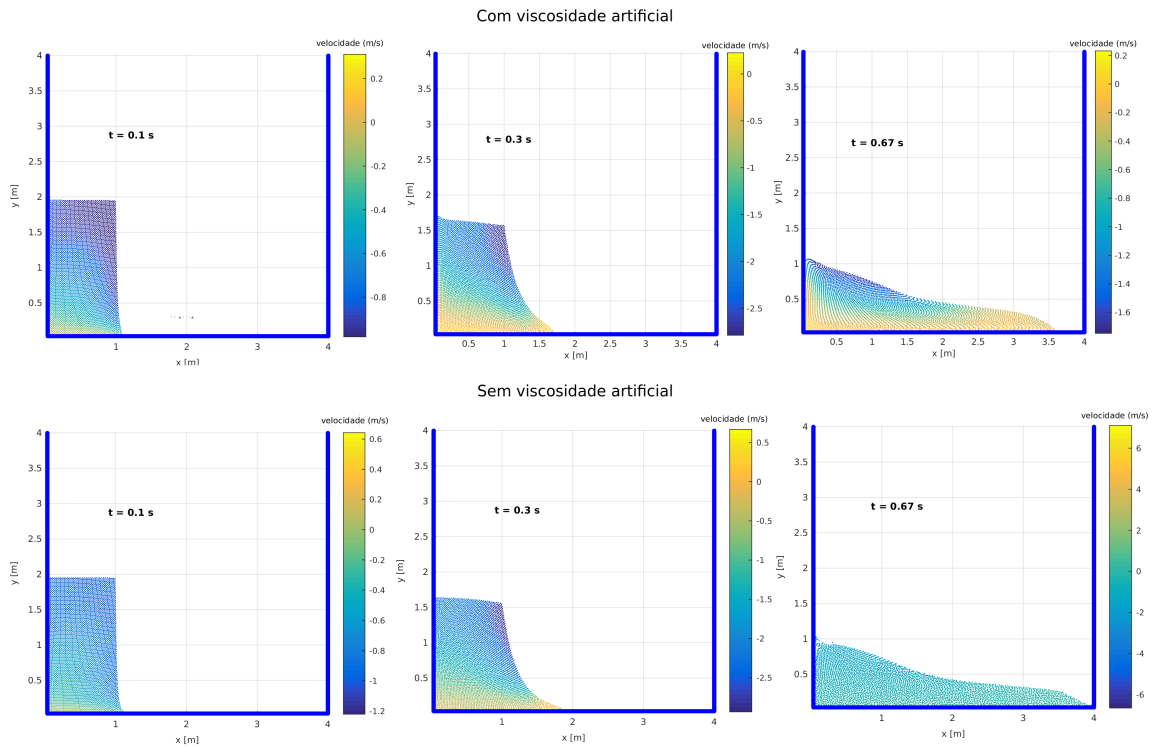


Figura 6.2: Campo de velocidades do fluidos parte 1.

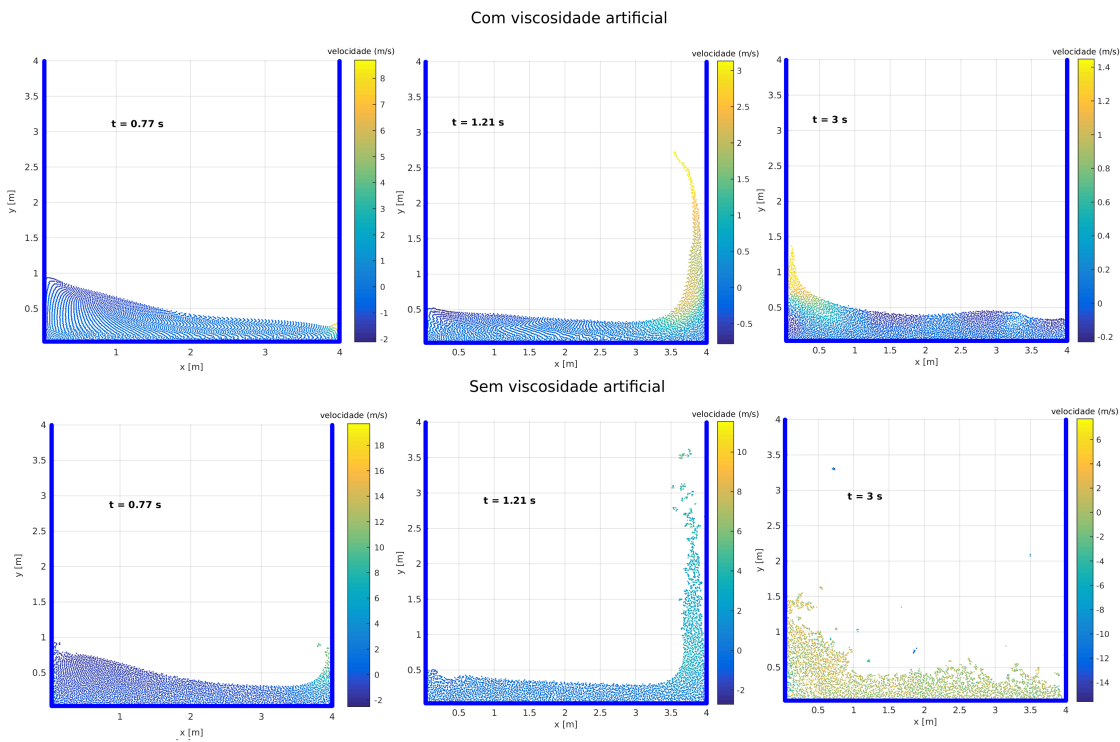


Figura 6.3: Campo de velocidades dos fluidos parte 2.

Por fim na figura (6.3) em $t=3s$ no caso sem uso da viscosidade artificial, há algumas partículas totalmente desprendidas, estas mantêm suas propriedades físicas inalteradas (pela cor da partícula), em relação a $t=1.21s$. Isto acontece porque estas partículas não

tenham vizinhas em seu núcleo, logo suas propriedades físicas (nesse caso a velocidade) mudam a partir do momento que esta partícula possui outras vizinhas. Isto confirma a influência das partículas vizinhas no SPH, afim de modelar propriedades físicas do fluido.

6.2 Campo de pressões

O modelo tradicional do SPH não consegue recuperar o campo de pressões de forma suave, faz-se necessário o uso de correções para este fim, como filtro de densidade. A seguir é apresentada a análise com respeito ao campo de pressões. Nas simulações foram utilizados 5123 partículas.

A análise para o campo de pressões é feita com a finalidade de avaliar o uso dos filtros de densidade de Shepard e MLS. Novamente é escolhido o núcleo de Quíntico ou Wendland (3.24), e $\alpha = 0.3$ para viscosidade artificial.

Na figura (6.4) são dispostos os comportamentos dos valores do campo de pressões para cada tempo, correspondentes ao escoamento simulado, para $t=0.49s$, $1.59s$ e $3.09s$. É possível notar que o uso das correções Shepard e MLS conseguem prever o campo de pressões de forma suavizada.

Através da figura (6.5) nota-se a diferença das variações dos valores das pressões, referentes as simulações presentes na figura (6.4). Os filtros de densidade Shepard e MLS mantêm praticamente os mesmos valores, sendo o MLS com uma pequena vantagem, como se observa na Tabela (6.4).

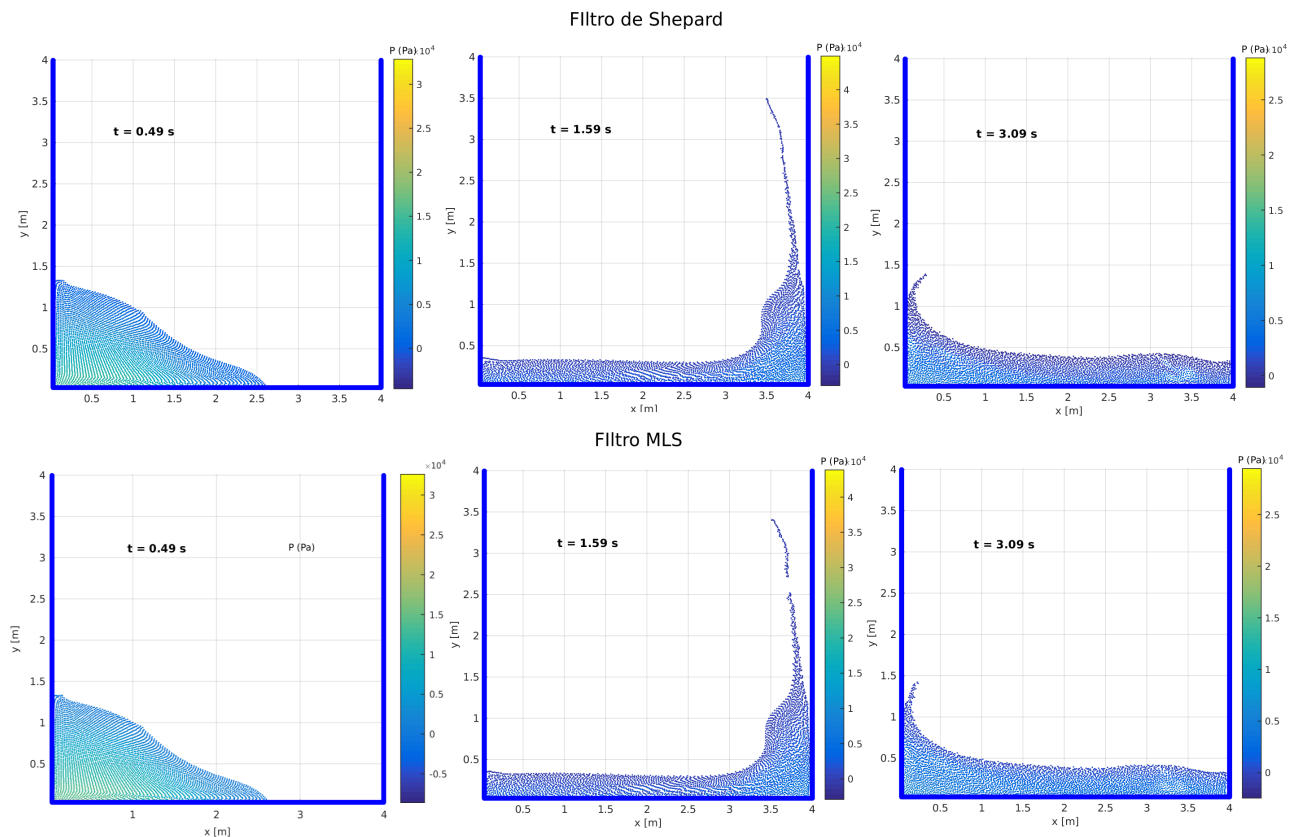


Figura 6.4: Pressão com uso da viscosidade artificial $\alpha = 0.3$, com filtros de densidade de Shepard e MLS.

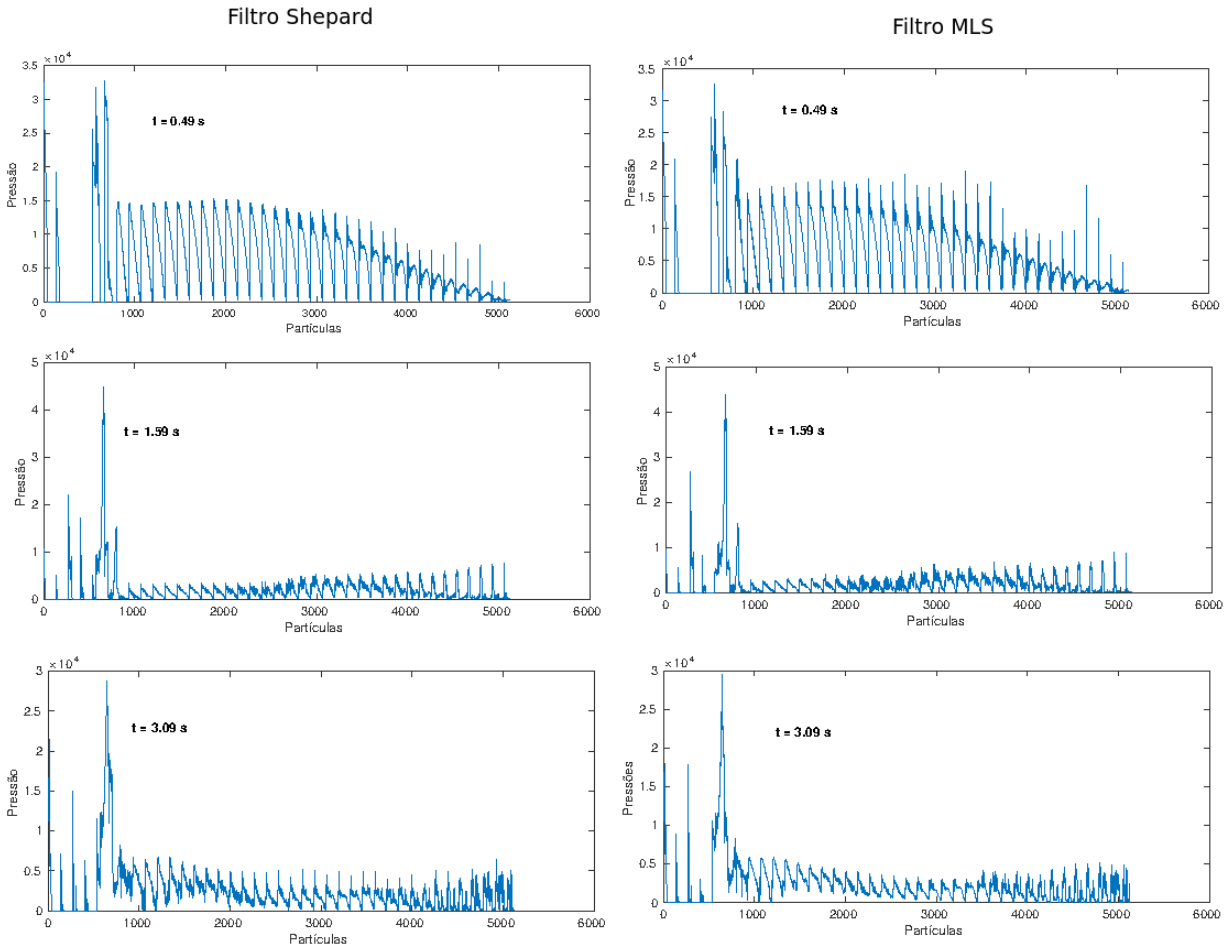


Figura 6.5: Gráfico dos valores da pressão com uso da viscosidade artificial $\alpha = 0.3$ e com filtros de densidade de Shepard e MLS.

Tabela 6.1: Valores médios da pressão de acordo com o tempo, referentes as análises da figura (6.5)

	Tempo	Média das pressões
Com viscosidade artificial e com filtro de densidade de Shepard	0.49	6.1586×10^3
	1.59	1.9805×10^3
	3.09	2.3824×10^3
Com viscosidade artificial e com filtro de densidade MLS	0.49	6.1136×10^3
	1.59	2.0023×10^3
	3.09	2.3108×10^3

6.3 Frente de onda: Validação experimental, tanque 1.

Em [4] é desenvolvido um experimento que fornece dados da evolução da frente de onda com propriedades de fluidos diferentes. Dentre estes é utilizado a água, com a geometria descrita na figura (6.6).

As figuras (6.8) e (6.9) apresentam as comparações das simulações, usando o *SPHysics* com os resultados experimentais de [4], usa-se a seguinte equação para o cálculo das frentes de onda [7]:

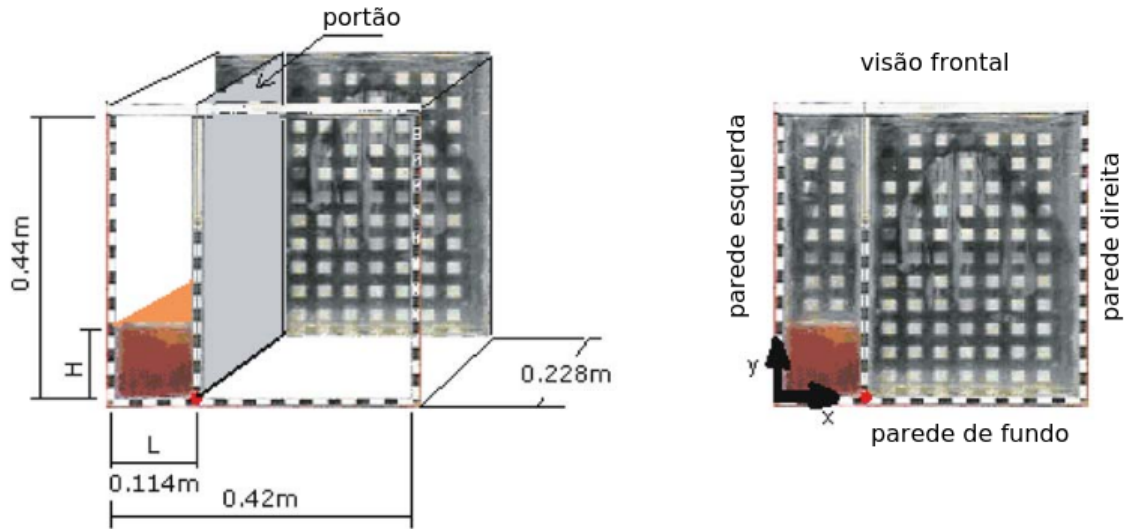


Figura 6.6: Geometria do tanque para validação experimental. [4]

$$\Delta x_p = \left(\frac{x_{exp} - x_{SPH}}{x_{exp}} \right) \quad (6.1)$$

onde:

Δx_p é a diferença percentual entre as abcissas das frentes de onda, obtidas experimentalmente e pelo SPH,

x_{exp} é abcissa da frente de onda obtida experimentalmente,

x_{SPH} é abcissa da frente de onda obtida pelo SPH.

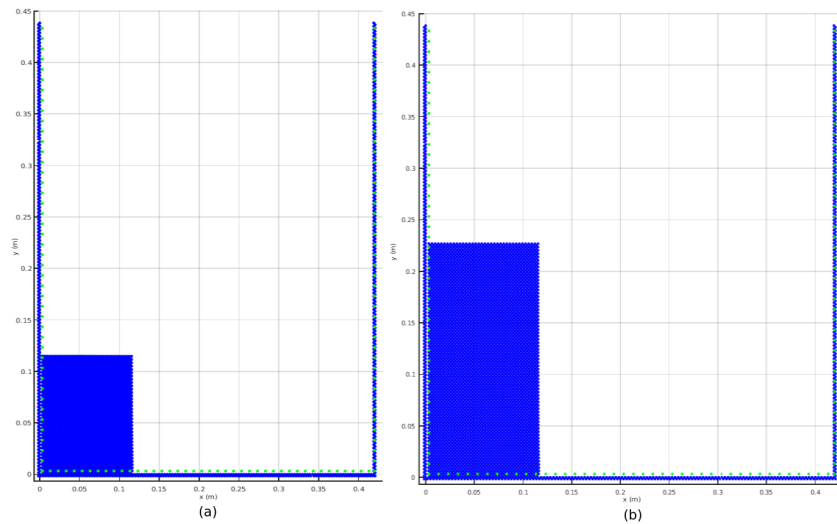


Figura 6.7: Geometria 1 (a) e geometria 2 (b) para simulações.

Na figura (6.7) está disposta a configuração inicial dos tanques para as simulações, com a finalidade de comparar com os resultados experimentais. A primeira geometria a esquerda contém 3369 partículas e a segunda à direita 5854. Pelos resultados expostos na tabela (6.3) podemos constatar que a diferença entre as frentes de onda da simulação

e com os resultados experimentais é bem pequena. Observa-se que com a evolução do passo temporal o erro percentual decai. Quando utilizado $\alpha = 0.3$ foi possível alcançar melhores resultados.

Tabela 6.2: Resultados das figuras (6.8) e (6.9), primeira geometria.

	Tempo (s)	x_{exp} (cm)	x_{SPH}	Erro Percentual
$\alpha = 0.2$	0.1	19.0	17.7	6.84
	0.2	29.0	29.7	-2.41
$\alpha = 0.3$	0.1	19.0	17.5	7.89
	0.2	29.0	29.1	-0.34

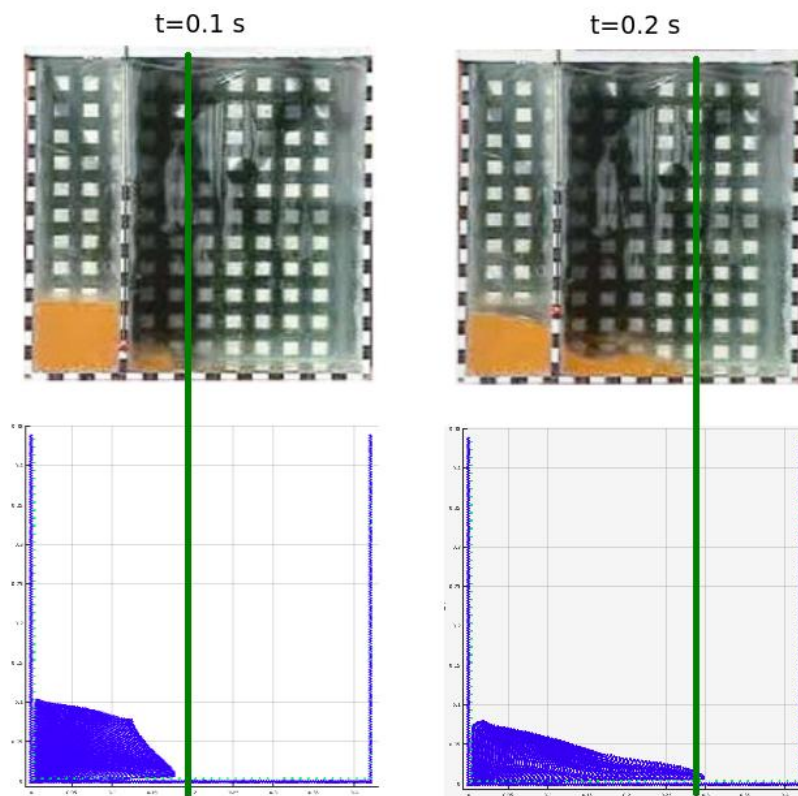


Figura 6.8: Comparação com modelo experimental, para $\alpha = 0.2$

Tabela 6.3: Resultados das figuras (6.10) e (6.11), segunda geometria.

	Tempo (s)	x_{exp} (cm)	x_{SPH}	Erro Percentual
$\alpha = 0.2$	0.1	22.0	19.1	13.18
	0.2	36.0	36.2	0.05
$\alpha = 0.3$	0.1	22.0	18.5	15.90
	0.2	36.0	34.9	3.00

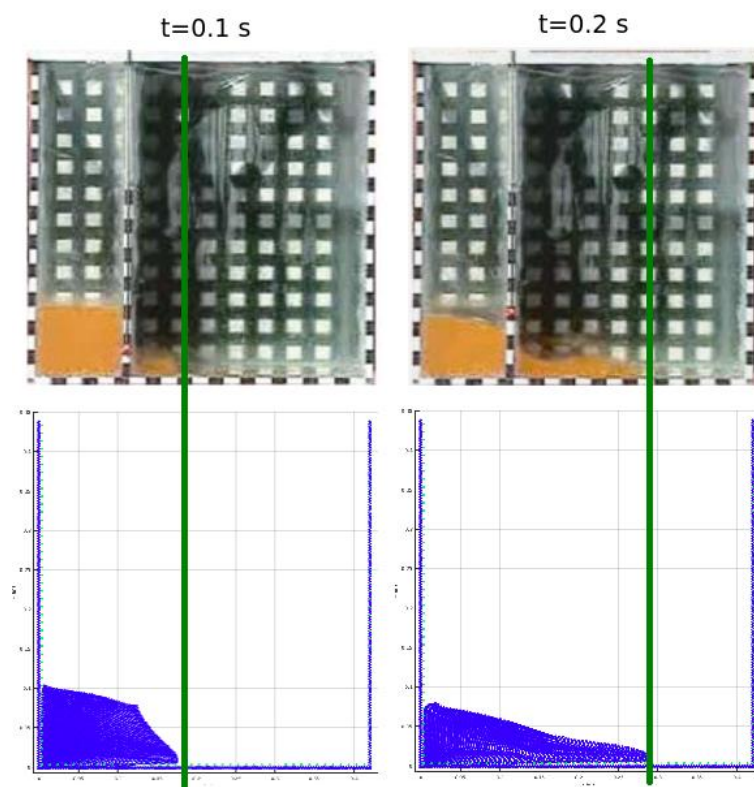


Figura 6.9: Comparação com modelo experimental, para $\alpha = 0.3$

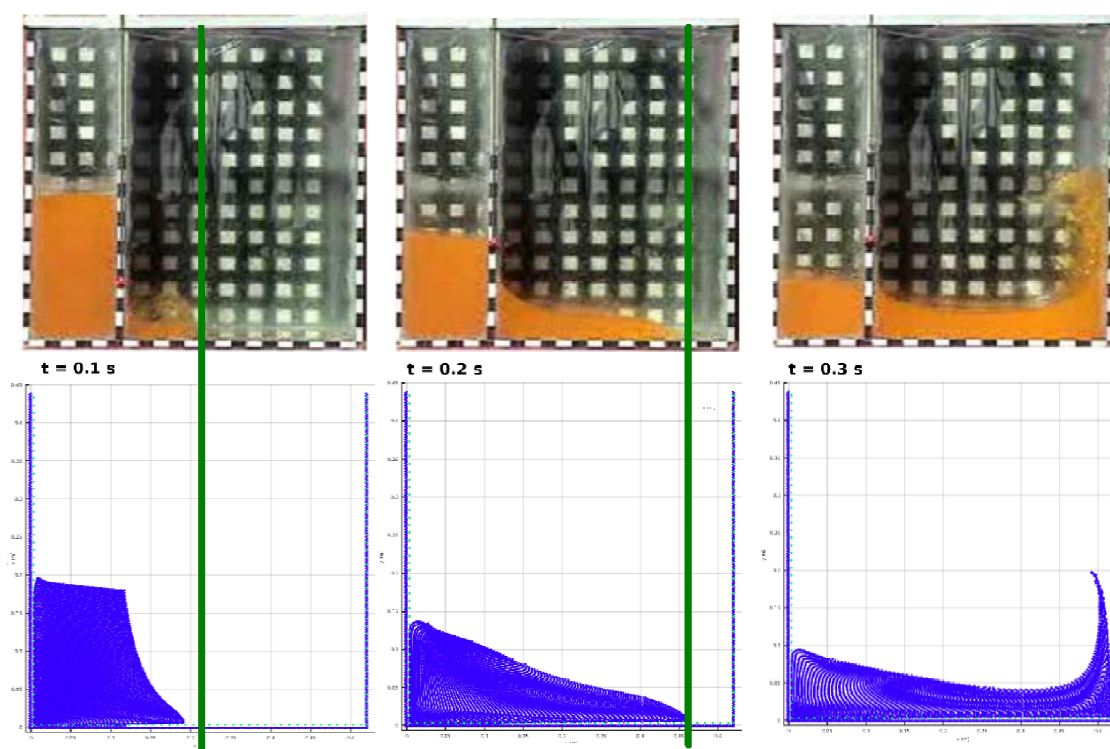


Figura 6.10: Comparação com modelo experimental, segunda geometria, para $\alpha = 0.2$

6.4 Frente de onda: Validação experimental, tanque 2.

Recentemente em [9] foi desenvolvido um experimento que fornece dados da evolução da interface de fluido; também neste caso o fluido é a água. A geometria e o dispositivo utilizado para o experimento, são descritos na figura (6.12).

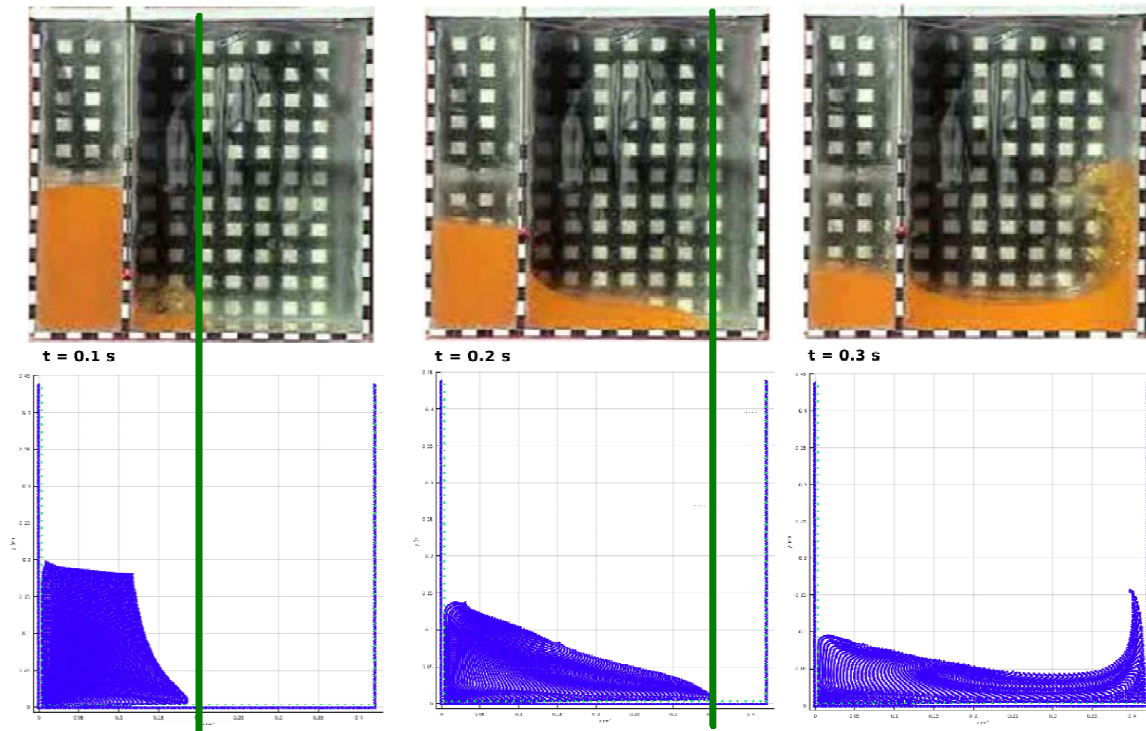


Figura 6.11: Comparação com modelo experimental, segunda geometria, para $\alpha = 0.3$

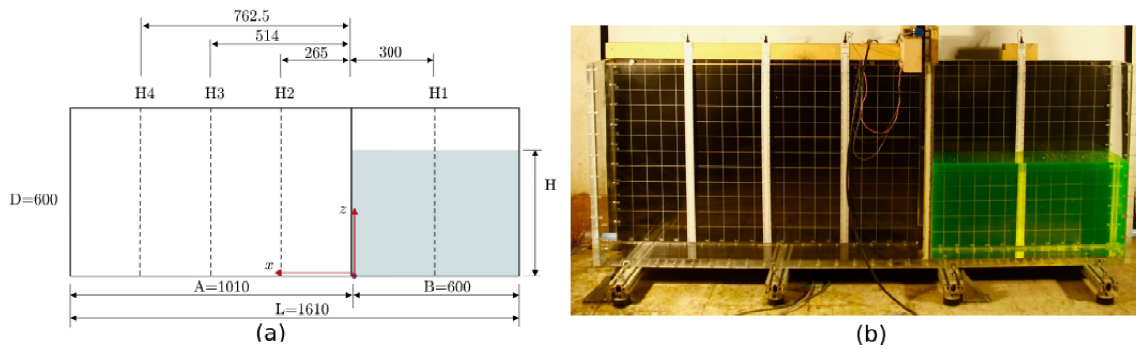


Figura 6.12: Dimensões do tanque 2

É utilizado a equação (6.1) para o cálculo da diferença entre a frente de onda modelada e do experimental. A tabela (6.4) mostra os resultados numéricos com uso da equação (6.1), concluindo que o modelo simulado SPH com uso da viscosidade artificial $\alpha = 0.1$ obteve êxito. Foram utilizadas nessa simulação 36823 partículas.

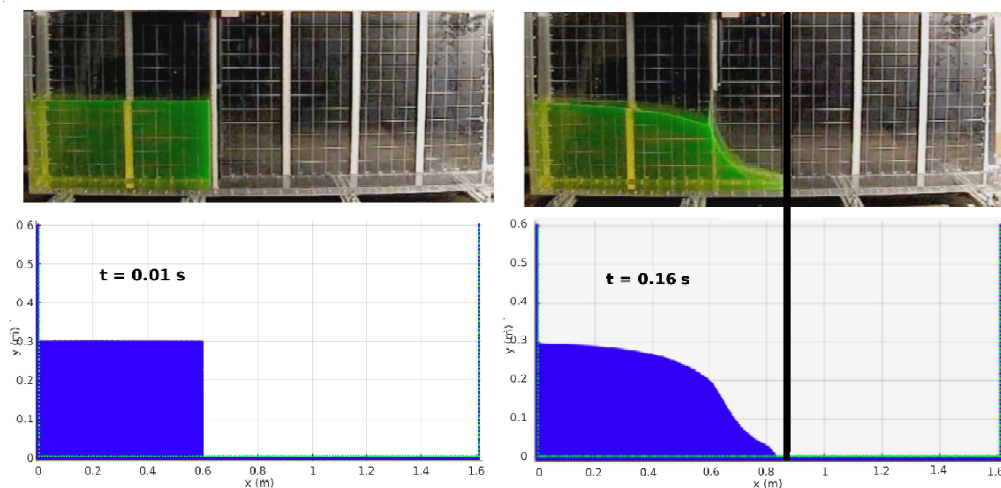


Figura 6.13: Comparação da interface do fluido simulada com experimento laboratorial, para os tempos 0.01s e 0.16s

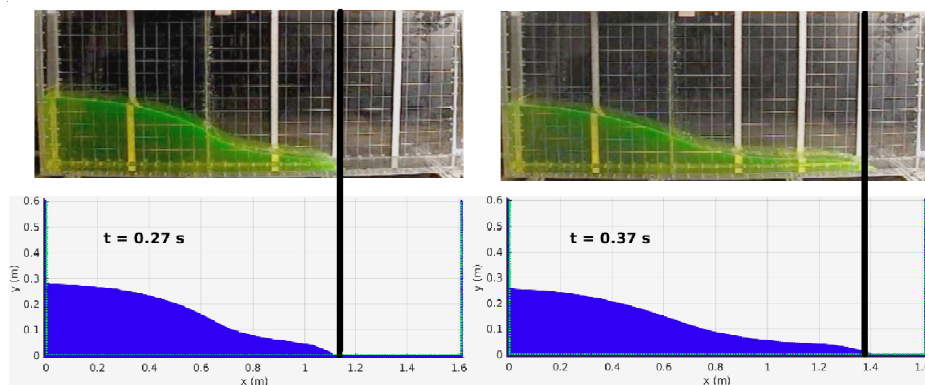


Figura 6.14: Comparação da interface do fluido simulada com experimento laboratorial, para os tempos 0.27s e 0.37s

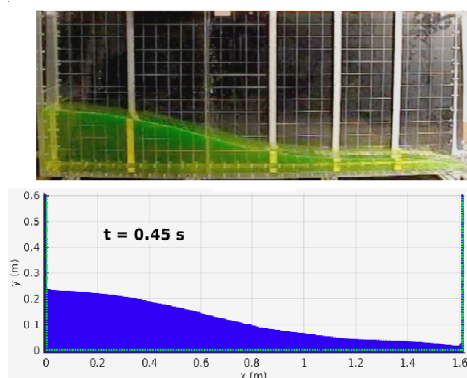


Figura 6.15: Comparação da interface do fluido simulada com experimento laboratorial, para o tempo 0.45s

Nas figuras (6.13), (6.14) e (6.15) são expostas graficamente as interfaces do fluido simuladas e comparadas com as correspondentes no experimento apresentado em [9].

Tabela 6.4: Resultados das figuras (6.13) e (6.14), segunda geometria.

	Tempo (s)	x_{exp} (cm)	x_{SPH}	Erro Percentual
$\alpha = 0.1$	0.16	86.5	82.7	4.39
	0.27	114.0	110.0	3.50
	0.37	136.2	139.4	-2.34

Conclusão

Os estudos realizados durante o projeto de mestrado forneceram subsídios para a modelagem do problema ruptura de barragem através do *software SPHysics* (*open source*), com a metodologia SPH. A formação nessa área do conhecimento se mostra muito importante, tendo em vista que o método estudado possui várias áreas de aplicações, possibilitando diversos estudos durante muitos anos de pesquisa.

Nas apresentações feitas em eventos Locais (II Seminário de Métodos numéricos em Engenharia, 2017), Internacional (Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA 2017) e Nacional (Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional 2017) observou-se que o estudo do método SPH tem sido bem aceito e isto motiva a continuação dos estudos nessa temática.

O *SPHysics* é um código aberto que se mostrou muito útil para a simulação do problema da ruptura de barragem, além de possuir uma gama de opções que ainda podem ser exploradas. Foi possível analisar o uso da viscosidade artificial e observar que esta é uma ferramenta muito importante para o escoamento do fluido, conforme pode ser visto nas comparações feitas com o modelo experimental e também para a correção do campo de velocidades e pressão. O uso dos filtros de Shepard e MLS também ajudaram a melhorar a simulação do campo de pressões.

Além disso constatou-se, como já previsto nos estudos teóricos, que os filtros de densidade de Shepard e MLS desempenham um importante papel no campo de pressões, sendo que este último possui desempenho teórico um pouco melhor devido sua capacidade de recuperar campos lineares. Vale ressaltar que os filtros MLS e Shepard são usados pra resolver o mesmo tipo de dificuldade, mas em alguns casos o filtro de Shepard pode ser considerado mais adequado pois o MLS é mais oneroso computacionalmente.

A partir da experiência obtida será possível, em trabalhos futuros, explorar outros casos que o *SPHysics* possa nos ajudar. Ainda, para o problema de ruptura de barragem, pode-se modelar a ruptura de barragem no caso 3D, ou, ainda, no caso 2D considerar obstáculos no escoamento do fluido. Outra possibilidade de futuro vai na direção de problemas com geometria mais exigentes, bem como casos multifásicos. Nesta direção grupos internacionais pesquisam ativamente, por exemplo, desenvolvendo o *software DualPhysics* que já inclui paralelização que aumenta significativamente a performance nas simulações.

Referências

- [1] H.R. Alves. O rompimento de barragens no brasil e no mundo: Desastres mistos ou tecnológicos? *DOM*, 2015.
- [2] T.S.L. Bonet; J. and Lok;. Variational and momentum preservation aspects of smoothed particle hydrodynamics formulations. *Computat.Methods Appl. Mech. Engineering*, 180:97–115, 1999.
- [3] A.J. Crespo. *Application of the Smoothed Particle Hydrodynamics model SPHysics to free-surface hydrodynamics*. PhD thesis, Universidade de Vigo, Vigo-ESP, Junho 2008.
- [4] E.T. Cruchaga; M.A. Celentano; D.J. Tayfun. Collapse of a liquid column: numerical simulation and experimental validation. *Comput. Mech.*, 39:453–476, 2007.
- [5] J.A. Cuminato; M. Meneguette. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais: técnicas de diferenças finitas*. SBM, 2013.
- [6] R.A. Fonseca. *Algoritmos Eficientes em Métodos sem Malha*. PhD thesis, UFMG, Minas Gerais, Março 2011.
- [7] F.D.C. Fraga. *Estudo da fase gravitacional-inercial do espalhamento de óleo em mar calmo empregando o método lagrangiano de partículas Smoothed Particle Hydrodynamics*. PhD thesis, UFES, Espírito Santo, Dezembro 2014.
- [8] R.G. Liu; M.B. Liu. *Smoothed Particle Hydrodynamics, a meshfree particle method*. World, Scientific Publishing, 2003.
- [9] A. Lobovsky; L. Botia-Vera; E. Castellana; F. Mas-Soler; J. Souto-Iglesias. Experimental investigation of dynamic pressure loads during dam break. *Journal of Fluids and Structures*, 48:407–434, 2014.
- [10] J.J. Monaghan. On the problem of penetration in particle methods. *Journal Computational Physics*, 82:1–15, 1989.
- [11] J.J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Rev. Astron. Appl.*, 30:543–574, 1992.
- [12] J.J. Monaghan. Simulating free surface flows with sph. *Journal of Computational Physics*, 110:399–406, 1994.
- [13] J.J. Monaghan. Sph without tensile instability. *Journal Computational Physics*, 159:290–311, 2000.
- [14] J.J. Monaghan. Conduction modelling using smoothed particle hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, 68:1703–1759, 2005.

-
- [15] J.J. Monaghan and Kos A. Solitary waves on a cretan beach. *Journal Waterway, Portm Coastal and Ocean Engineering.*, 125:145–154, 1999.
- [16] J.P. Morris; P.J. Fox; Y. Zhu. Modeling low reynolds number incompressible flows using sph. *Journal of Computational Physics*, 136:214–226, 1997.
- [17] E.A.P. Narino. *Modelagem numérica de microfluídica através do Método Lagrangeano sem malha Smoothed Particle Hydrodynamics*. PhD thesis, Unicamp, Campinas, 2017.
- [18] A. Paiva. *Uma abordagem lagrangeana para simulação de escoamentos de fluidos viscoplásticos e multifásicos*. PhD thesis, PUC-RJ, Rio de Janeiro, 2007.
- [19] A. Paiva; F. Petronetto; G. Tavares; T. Lewiner. *Simulação de Fluidos sem Malha: Uma introdução ao método SPH*. IMPA, 2009.
- [20] W.J. Swegle. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis. *Journal of Computational Physics*, 116:123–134, 1995.
- [21] J.R.G. Vasco. *Desenvolvimento de software utilizando a técnica SPH na geração de ondas de submersão*. PhD thesis, Unesp, 2014.
- [22] B.D. Violeau; D. Rogers. Smoothed particle hydrodynamics (sph) for free-surface flows: past, present and future. *Journal of Hydraulic Research*, 54:1–26, 2016.
- [23] R. Xu; P. Stansby; D. Laurence. Accuracy and stability in incompressible sph (isph) based on the projection method and a new approach. *Journal of Computational Physics*, 228:6703–6725, 2009.