

# A Proposed Methodology Involving Progressive Bounded Constraints And Interior-Exterior Methods in Smoothed Economic/Environmental Dispatch Problems

M. R. B. D. Santos, A. R. Balbo, E. Gonçalves, E. M. Soler, R. B. N. M. Pinheiro, L. Nepomuceno, *IEEE Member* and E. C. Baptista

**Abstract**—This paper proposes a methodology involving the primal-dual predictor-corrector interior/exterior point, the progressive bounded constraints and the arctangent smoothing methods, to be applied in economic/environmental dispatch multi-objective problem with valve-point load effects. The interior/exterior point method explores the logarithmic barrier modified function, which belongs to the nonlinear rescaling methods, allowing it a relaxation of the feasible set that includes its boundary, to iterate with exterior and unfeasible points. To treat non-convex functions, the inertia correction strategy is considered to ensure that it produces descent directions, avoiding the convergence to stationary points which are not local minima. Besides, the arctangent smoothing technique is used to treat nonsmooth functions and their modular parts, which are the main characteristic of the economic dispatch function. The progressive bounded constraints method are used to transform the multi-objective problem into a set of mono-objective subproblems and to allow that the economic/environmental dispatch multi-objective problem was solved by the proposed methodology, which was applied to solve test problem with nineteen and forty generating units. The results are compared with others published in the literature and with the solver Knitro.

**Keywords**— primal-dual interior/exterior point method, inertia correction, smoothing arctangent function, progressive bounded constraints method, economic/environmental dispatch multiobjective problem.

## I. INTRODUÇÃO

A GERAÇÃO de energia em uma termoeletrica, de acordo com [21], ocorre a partir da energia liberada por qualquer

produto que possa gerar calor, tais como óleo combustível, óleo diesel, gás natural, urânio enriquecido e carvão mineral, entre outros. Em geral, a matriz energética da maioria dos países tem como principal fonte de geração de energia elétrica as usinas termoeletricas. Grande parte dessa geração é proveniente de derivados do petróleo [3] e para o processo de geração de energia faz-se necessária a aquisição de combustível, o que implica em um custo monetário adicional, que deve ser considerado para a unidade geradora. Na matriz energética brasileira, em que predomina a geração hidroeletrica, a geração termoeletrica é responsável por, aproximadamente, 33% de sua produção de energia, dos quais, 10% são provenientes de combustíveis fósseis [4]. Quando se considera a geração de energia em termoeletricas, em que ocorre a queima de combustíveis fósseis, esta provoca emissões de poluentes atmosféricos, assim é de fundamental importância para diversas áreas de pesquisa, formular problemas em que os custos dos combustíveis e a emissão de poluentes atmosféricos sejam tratados simultaneamente. Dentre esses problemas, destacam-se o problema de despacho econômico com a inserção de pontos de válvula (PDE-PV), o problema de despacho ambiental (PDA), e o problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental (PMDEA-PV).

O problema de despacho econômico com a inserção de pontos de válvula (PDE-PV) [20], é modelado como um problema de otimização restrito não-linear, não convexo e além disso é não diferenciável, pois termos modulares que envolvem a função seno são considerados. O PDE-PV tem por objetivo minimizar o custo dos combustíveis na geração de energia de uma unidade termoeletrica, de forma que a demanda seja atendida e as restrições operacionais do sistema de geração sejam satisfeitas. Outro problema a ser considerado é o relativo à minimização desta emissão, o qual é denominado de problema de despacho ambiental (PDA), [5]. A fim de minimizar, simultaneamente, o custo de geração e a emissão de poluentes tem-se o problema de despacho econômico e ambiental (PMDEA-PV). O PMDEA-PV é modelado como um problema de otimização multiobjetivo, não convexo e não diferenciável.

Na literatura diversos métodos têm sido empregados para a resolução do PDE-PV e do PMDEA-PV, dentre eles os algoritmos evolucionários [13], [15] e [19] têm sido muito utilizados devido à não-diferenciabilidade das funções envolvidas. Em [17] o PMDEA foi resolvido por métodos determinísticos e em [6] o PMDEA-PV foi resolvido

---

M. R. B. D. Santos, Unesp – Universidade Estadual Paulista, Brasil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - FEB, Bauru, mariana.rsb@gmail.com.

A. R. Balbo, Unesp – Universidade Estadual Paulista, Brasil, Departamento de Matemática, Bauru, arbalbo@fc.unesp.br.

E. Gonçalves, Unesp – Universidade Estadual Paulista, Brasil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - FEB, Bauru, elisgon01@hotmail.com.

E. M. Soler, Unesp – Universidade Estadual Paulista, Brasil, Departamento de Matemática, Bauru, edilaine@fc.unesp.br.

R. B. N. M. Pinheiro – Universidade de São Paulo, Brasil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - EESC, São Carlos, ribenopi@hotmail.com.

L. Nepomuceno, Unesp – Universidade Estadual Paulista, Brasil, Departamento de Engenharia Elétrica, Bauru, leo@feb.unesp.br.

E. C. Baptista, Unesp – Universidade Estadual Paulista, Brasil, Departamento de Matemática, Bauru, baptista@fc.unesp.br.

utilizando a técnica de suavização hiperbólica dos termos modulares da função objetivo.

Para que seja possível a aplicação de métodos determinísticos de otimização à resolução destes problemas, os quais exigem a diferenciabilidade da função objetivo e das restrições, é necessário suavizar os termos modulares senoidais da função custo do despacho econômico. Com o objetivo de resolver estes problemas através de métodos determinísticos, neste trabalho propõe-se uma metodologia envolvendo os métodos de restrições canalizadas progressivas, de suavização de funções e o primal-dual de pontos interiores/exteriores. Destaca-se: o primeiro é estratégico para a solução de problemas multiobjetivos, o segundo para suavizar os termos modulares da função e o terceiro, para a resolução dos subproblemas mono-objetivos suavizados.

O método primal-dual predictor-corretor de pontos interiores/exteriores, que explora a função barreira logarítmica modificada (PDPCBLM) e a estratégia de correção de inércia, desenvolvidos em [14] e variante de [12], [7] e [11], é utilizado para resolver problemas restritos de otimização não-linear e não convexa. O método de restrições canalizadas progressivas (RCP), proposto em [6], transforma o problema multiobjetivo em um conjunto de subproblemas mono-objetivos, possibilitando a utilização do método PDPCBLM para a resolução do PMDEA-PV. Para tratar os problemas relacionados à não-diferenciabilidade da função de despacho econômico, por conta da inserção de termos modulares, devido ao efeito de ponto de válvula, é realizada a suavização dos termos modulares através do método da suavização arco tangente, o qual é um novo método de suavização e foi desenvolvido pelos autores do trabalho. Foram realizados testes numéricos com os casos testes de 19 e 40 unidades geradoras de energia. Os resultados obtidos foram comparados com os resultados apresentados em [6] e [1], e com os resultados obtidos pelo pacote de otimização Knitro. Os resultados obtidos através da metodologia proposta são promissores e mostram o bom desempenho desta à resolução dos problemas em destaque.

O trabalho é subdividido de acordo com as seguintes seções: na seção I é apresentada uma abordagem sobre o problema multiobjetivo de despacho econômico/ ambiental; na seção II o método de restrição canalizada progressiva é apresentado como uma metodologia de solução para o problema multiobjetivo; a seção III descreve a técnica de suavização arco tangente; na seção IV o método PDPCBLM é apresentado; a seção V os resultados são escritos e por último, na seção VI as conclusões são delineadas.

## I. O PROBLEMA MULTI OBJETIVO DE DESPACHO ECONÔMICO/AMBIENTAL

O problema multiobjetivo de despacho econômico/ambiental com a inserção de pontos de válvula (PMDEA-PV) é definido a partir de dois outros problemas mono-objetivos explorados na literatura: o problema de despacho econômico (PDE) e o problema de despacho ambiental (PDA).

### I.10 PROBLEMA DE DESPACHO ECONÔMICO COM PONTO DE VÁLVULA

O PDE, definido inicialmente em [18] no ano de 1934, é um problema de otimização restrito não-linear que considera a geração termoeétrica baseando-se em seus aspectos econômicos. Ele visa a minimização dos custos dos combustíveis, ou seja, a minimização da função objetivo denominada de *função custo de geração*  $(C_g)_i$ , respeita as restrições operacionais do sistema e garante que a demanda é satisfeita. Nos geradores existem válvulas de admissão a vapor, cujo efeito é denominado de ponto de carregamento de válvula. Este efeito, incorpora à formulação da função  $C_g$  termos modulares compostos à função seno, o que torna a função objetivo não convexa e não diferenciável [15]. Logo a inserção desses pontos, impossibilita a utilização direta dos métodos determinísticos de otimização à sua resolução. O modelo matemático de otimização para o problema de despacho econômico com ponto de válvula é definido (1):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & C_g = \sum_{i=1}^n (C_g)_i = \sum_{i=1}^n (a_e)_i P_i^2 + (b_e)_i P_i + (c_e)_i + \dots \\ & \dots + |(d_e)_i \text{sen}[(e_e)_i (P_i^{\min} - P_i)]| \\ \text{Sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^n (P_i) = P_d \\ & P_i^{\min} \leq P_i \leq P_i^{\max} \end{aligned} \quad (1)$$

em que:

$C_g$  representa o custo total de geração;

$(C_g)_i$  representa os custos de cada unidade geradora  $i$  considerando o efeito do ponto de válvula;

$(a_e)_i, (b_e)_i, (c_e)_i, (d_e)_i$  e  $(e_e)_i$  são os coeficientes da função custo de geração;

$P_i$  é a potência gerada pela unidade geradora  $i$ ;

$P_d$  é a potência demandada;

$P_i^{\min}$  e  $P_i^{\max}$  são os limites operacionais inferiores e superiores, respectivamente.

### I.2 O PROBLEMA DE DESPACHO AMBIENTAL

O PDA foi inicialmente proposto em [5]. A geração de energia em uma termoeétrica ocorre a partir da queima de combustíveis, renováveis ou não. Dentre os combustíveis podemos destacar o carvão mineral, gás natural, petróleo e biomassa. Porém, como resultado dessa geração, há emissão de impurezas do próprio combustível, material particulado, dióxido de enxofre ( $SO_2$ ), óxido de nitrogênio ( $NO_x$ ) e dióxido de carbono ( $CO_2$ ), que prejudicam a saúde dos seres humanos, fauna e flora. Assim, é relevante que as emissões de poluentes durante o processo de geração de energia em usinas termoeletricas sejam controladas. Para diminuir a contaminação do meio ambiente a partir destas emissões, utiliza-se uma estratégia de despacho que minimize a emissão dos poluentes atmosféricos, respeitando as restrições operacionais do sistema e garantindo que a demanda seja satisfeita. Esta estratégia é denominada de problema de

despacho ambiental, [5]. O modelo matemático de otimização para o problema de despacho ambiental é apresentado em (2):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & C_e = \sum_{i=1}^n (C_e)_i = \sum_{i=1}^n (a_a)_i P_i^2 + (b_a)_i P_i + (c_a)_i \\ \text{Sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^n (P_i) = P_d \\ & P_i^{\min} \leq P_i \leq P_i^{\max} \end{aligned} \quad (2)$$

em que:

$(C_e)_i$  representa a emissão de poluentes de cada unidade geradora  $i$ ;

$(a_a)_i$ ,  $(b_a)_i$  e  $(c_a)_i$  são os coeficientes da função ambiental.

### I.3 O PROBLEMA MULTIOBJETIVO– PMDEA -PV

Uma outra modelagem dos problemas de despacho, que considera a minimização simultânea do custo de geração e da emissão de poluentes é denominada de problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental. Os dois objetivos considerados simultaneamente para este problema são conflitantes, ou seja, a minimização de uma função objetivo acarreta a deterioração da outra e vice-versa. O problema multiobjetivo de despacho econômico ambiental pode ser tratado de forma simplificada desconsiderando pontos de carregamento de válvula (PMDEA) ou de forma completa considerando estes pontos (PMDEA-PV). Objetivase desenvolvimento desse trabalho a resolução do PMDEA-PV definido em (3), que explora as funções custo de geração e custo de emissão definidas em (1) e (2), respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \{C_g, C_e\} = \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n (C_g)_i; \sum_{i=1}^n (C_e)_i \right] \right\} \\ \text{Sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^n (P_i) = P_d \\ & P_i^{\min} \leq P_i \leq P_i^{\max} \end{aligned} \quad (3)$$

em que:

$C_g$  é a função custo total de geração;

$C_e$  é a função custo total de emissão;

$P_i$  é a potência gerada pela unidade geradora  $i$  .

$P_d$  é a potência demandada;

$P_i^{\min}$  e  $P_i^{\max}$  são os limites operacionais inferiores e superiores, respectivamente.

Tendo em vista que, a minimização de custos e emissões são objetivos conflitantes, ou sejam, não podem ser simultaneamente minimizados, então é proposta uma estratégia para a determinação de soluções eficientes - no sentido de Pareto-ótimas - para o problema. Dentre as estratégias presentes na literatura destacam-se: soma ponderada [9] e  $\varepsilon$ -restrito [8]. Ambas possibilitam redefinir o problema multiobjetivo através de um conjunto de subproblemas mono-objetivo, os quais permitirão analisar soluções eficientes do PMDEA-PV. Entretanto, o método da soma ponderada não tem se mostrado eficaz para encontrar soluções eficientes cujos valores localizam-se nas partes não convexas da curva de Pareto-ótimo e o método  $\varepsilon$ -restrito

tende a obter muitas soluções dominadas- soluções não-eficientes no sentido de Pareto - dificultando a obtenção dos valores da curva de Pareto-ótima.

## II. MÉTODO DE RESTRIÇÕES CANALIZADAS PROGRESSIVAS (RCP)

No presente trabalho, é explorado o método denominado de restrições canalizadas progressivas (RCP), proposto e desenvolvido em [6]. Este método transforma o PMDEA-PV em um conjunto de subproblemas mono-objetivo, em que a função custo de geração é a função objetivo do problema e a função custo de emissão é incorporada às restrições do problema, limitada superiormente e inferiormente, para níveis mínimos e máximos de emissão. Esses limites são considerados para possibilitar ao método PDPCBLM, que será apresentado na seção IV, investigar a existência de possíveis  $N$  soluções eficientes,  $x(\beta)$ , em cada subintervalo  $[C_e^{\min}(\beta), C_e^{\max}(\beta)]$ .

Inicialmente, após a resolução dos problemas mono-objetivo de despacho econômico e de despacho ambiental, obtém-se o valor de mínimo da função custo de emissão,  $C_e^{\min}$ , a partir da solução ótima do PDA, e o seu valor máximo,  $C_e^{\max}$ , a partir da solução ótima do PDE. Considerando-se estes valores, tem-se que qualquer valor da função custo de emissão  $C_e$  deve pertencer ao intervalo  $[C_e^{\min}, C_e^{\max}]$ . O intervalo obtido inicialmente é subdividido em  $N$  subintervalos igualmente espaçados, para  $\beta = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , e considerando-se  $\delta = \frac{(C_e^{\max} - C_e^{\min})}{N}$ , e  $\beta = 0, 1, \dots, N-1$ , tem-se,

$C_e^{\min}(\beta) = C_e^{\min} + \beta\delta$  e  $C_e^{\max}(\beta) = C_e^{\min} + (\beta+1)\delta$ , onde para  $\beta = 0$ ,  $C_e^{\min}(0) = C_e^{\min}$ ; para  $\beta = N-1$ ,  $C_e^{\max}(N-1) = C_e^{\max}$ , permitindo-se a investigação de possíveis  $N$  soluções eficientes  $x(\beta)$  através do método PDPCBLM, para cada valor de  $\beta$ , no subintervalo  $[C_e^{\min}(\beta), C_e^{\max}(\beta)]$ . O método RCP é definido para cada problema de otimização mono-objetivo, dependente de  $\beta$ , definido em (4):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & C_g \\ \text{Sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^n (P_i) = P_d \\ & C_e^{\min}(\beta) \leq C_e \leq C_e^{\max}(\beta) \\ & P_i^{\min} \leq P_i \leq P_i^{\max}; \beta = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (4)$$

em que:

$C_g$  é a função econômica;

$C_e$  é a função ambiental;

$P_d$  é a potência demandada;

$P_i^{\min}$  e  $P_i^{\max}$  são os limites operacionais inferiores e superiores, respectivamente,

$C_e^{\min}(\beta)$  é o limitante mínimo e  $C_e^{\max}(\beta)$  é o limitante máximo, respectivamente, para a restrição canalizada progressiva definida para  $C_e$ , com  $\beta = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

O método RCP é utilizado para cada valor de  $\beta$ , de tal forma que, cada problema mono-objetivo resultante é resolvido pelo método PDPCBLM, e para cada solução  $x(\beta)$  obtida no intervalo  $[C_e^{\min}(\beta), C_e^{\max}(\beta)]$ , o valor  $C_e(\beta)$  é plotado no gráfico representado pela Fig. 1, para detectar se esta é uma solução eficiente do problema, ou seja, se  $C_e(\beta)$ , pertence à curva de Pareto-ótimo. Para melhorar a distribuição de pontos nesta curva, se o espaçamento  $\bar{\delta}$  entre dois valores associados a duas soluções eficientes for maior que  $\delta$  ( $\bar{\delta} > \delta$ ), então, a partir dessas duas soluções um novo valor mínimo  $\bar{C}_e^{\min}$  e um novo valor máximo  $\bar{C}_e^{\max}$  da função ambiental são determinados. Estes valores são utilizados no conjunto de sub problema mono-objetivo (4), para investigar a existência de possíveis novas soluções eficientes do PMDEA-PV. Esse procedimento trata-se de um refinamento do método RCP para melhorar o preenchimento da curva, tal como é ilustrado pela Fig. 1.

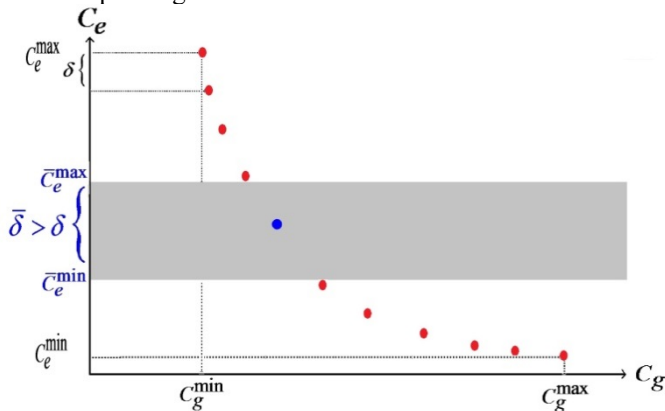


Figura 1. Subintervalo para a função custo de emissão: método de restrições canalizadas progressivas.

### III. SUAVIZAÇÃO ARCO TANGENTE

Problemas de otimização que envolvem funções com termos modulares são difíceis de resolvermos, pois, em geral, tais funções são não diferenciáveis e não convexas. O PMDEA-PV apresentado em (3) se enquadra nesta categoria, pois a função custo do PMDEA-PV envolve o efeito de ponto de carregamento de válvula, o qual é modelado por meio do módulo de funções senoidais.

Para tratarmos a não diferenciabilidade de uma função modular, vamos substituir esta função por uma função suavizante e parametrizada, pois, desta forma, podemos aplicar métodos determinísticos de otimização e do tipo gradiente.

Considere a função (5) :

$$\omega(t) = \frac{2}{\pi} \cdot t \cdot \arctg(t) \quad (5)$$

A função apresentada em (5) possui as seguintes propriedades:

- 1) O domínio de  $\omega$  é  $\mathbb{R}$ ;
- 2) O contra-domínio é o  $\mathbb{R}_+$ ;
- 3)  $\omega(t)$  é uma função de classe  $C^\infty$ ;
- 4)  $\omega(t) = \omega(-t)$  (Função par);
- 5)  $\omega'(t) < 0$ , se  $t < 0$ ;  
 $\omega'(t) > 0$ , se  $t > 0$ ;
- 6)  $\omega''(t) > 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ;
- 7)  $\omega(0) = \omega'(0) = 0$ ;
- 8)  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \omega'(t) = 1$

A Fig.2 ilustra o gráfico da função  $\omega(t)$  :

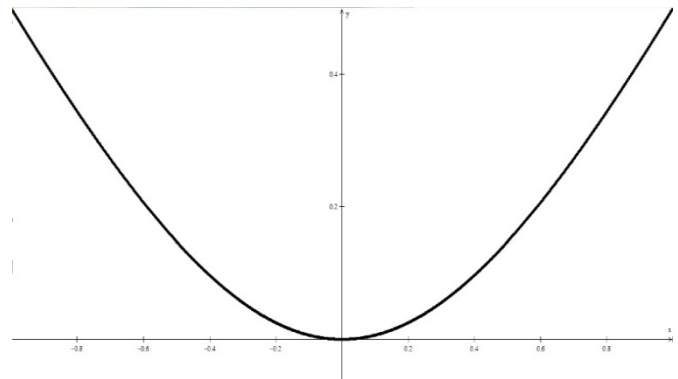


Figura 2. Função  $\omega(t)$ .

Considere o problema de otimização apresentado em (7), cuja função objetivo apresenta um termo modular:

$$\text{Minimizar } z = |f(x)|, \quad (7)$$

$f(x)$  está definida sobre um domínio  $\phi$ .

A suavização da função  $z$  é realizada através da função  $\omega(f(x), \eta)$  apresentada em (8), a qual é denominada função suavizante arco tangente.

$$\omega(f(x), \eta) = \frac{2}{\pi} f(x) \arctg\left(\frac{f(x)}{\eta}\right); \quad (8)$$

em que  $\eta \in \mathbb{R}_{++}$  é denominado parâmetro de suavização.

Teorema 1: Sejam  $f : \phi \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\eta > 0$  o parâmetro de suavização e a função suavizante arco tangente

$$\omega(f(x), \eta) = \frac{2}{\pi} f(x) \arctan\left(\frac{f(x)}{\eta}\right). \text{ Então,}$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \omega(f(x), \eta) = |f(x)|.$$

Demonstração: Queremos mostrar que sempre que  $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \eta = 0$ , então  $\omega(f(x), \eta) = |f(x)|$ . Seja a função

$d : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$d(\eta) = |f(x)| - \omega(f(x), \eta) \quad (9)$$

i) Seja um  $\bar{x} \in \phi$  tal que  $f(\bar{x}) > 0$ . Então, tendo em vista

$$\text{que } \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}, \text{ temos:}$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left( f(\bar{x}) - \frac{2}{\pi} f(\bar{x}) \arctan \left( \frac{f(\bar{x})}{\eta} \right) \right) = f(\bar{x}) - \frac{2}{\pi} f(\bar{x}) \frac{\pi}{2} = f(\bar{x}) - f(\bar{x}) = 0. \tag{10}$$

ii) Seja um  $\bar{x} \in \phi$  tal que  $f(\bar{x}) < 0$ . Então, tendo em vista que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2}$ , temos:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left( -f(\bar{x}) - \frac{2}{\pi} f(\bar{x}) \arctan \left( \frac{f(\bar{x})}{\eta} \right) \right) = f(\bar{x}) - \frac{2}{\pi} f(\bar{x}) \left( -\frac{\pi}{2} \right) = -f(\bar{x}) + f(\bar{x}) = 0. \tag{11}$$

iii) Suponhamos que  $\bar{x} \in \phi$  é tal que  $f(\bar{x}) = 0$ , então:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left( 0 - \frac{2}{\pi} 0 \arctan \left( \frac{0}{\eta} \right) \right) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} 0 = 0, \text{ isto é, conforme a propriedade 7, } d(\eta) = 0 \text{ para todo } \eta_{++}, \text{ então } f(\bar{x}) = 0.$$

Desde que (i), (ii) e (iii) são verdadeiros para qualquer  $\bar{x} \in \phi$ , então o teorema é verificado.

A Fig. 3 ilustra a função  $d(\eta)$  para o caso particular em que  $f(x) = x$ .

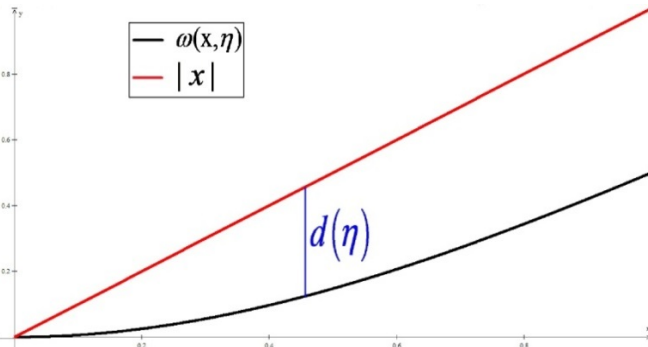


Figura 3. Representação geométrica da função  $d(\eta)$ .

**Teorema 2:** Para todo  $x \in \phi$  e  $\eta \in \mathbb{R}_{++}$ , então  $|f(x)| \geq \omega(f(x), \eta)$ .

**Demonstração:** Queremos mostrar que  $|f(x)| - \omega(f(x), \eta) \geq 0$  para qualquer  $x \in \phi$  e  $\eta \in \mathbb{R}_{++}$ . Seja um  $\bar{x} \in \phi$  tal que  $f(\bar{x}) > 0$ , então:

$$f(\bar{x}) - \omega(f(\bar{x}), \eta) = f(\bar{x}) - \frac{2}{\pi} f(\bar{x}) \arctan \left( \frac{f(\bar{x})}{\eta} \right) = f(\bar{x}) \left( 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{f(\bar{x})}{\eta} \right) \right). \tag{12}$$

Como  $\eta$  é um número estritamente positivo e  $f(\bar{x}) > 0$ , temos que  $0 < \arctan \left( \frac{f(\bar{x})}{\eta} \right) < \frac{\pi}{2}$ . Logo

$$0 < \left( 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{f(\bar{x})}{\eta} \right) \right) < 1, \text{ portanto, temos:}$$

$$f(\bar{x}) - \omega(f(\bar{x}), \eta) = f(\bar{x}) \left( 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{f(\bar{x})}{\eta} \right) \right) \geq 0. \tag{13}$$

Se  $\bar{x} \in \phi$  é tal que  $f(\bar{x}) = 0$ , então, por (iii) em Teorema 1, é imediato que  $|f(x)| - \omega(f(x), \eta) = 0$ . Se  $\bar{x} \in \phi$  tal que  $f(\bar{x}) < 0$ , então, com procedimentos análogos para o caso em que  $f(\bar{x}) > 0$ , temos imediatamente que  $|f(\bar{x})| - \omega(f(\bar{x}), \eta) \geq 0$ . Como  $\bar{x} \in \phi$  é um valor arbitrário em  $\phi$ , então o teorema é verificado.

Com a finalidade de ilustrarmos a função suavizante arco tangente, considere a função  $z = |f(x)|$ , onde  $f(x) = x^3 + 1$ . A Fig. 4 mostra como  $z$  é aproximada pela função suavizante hiperbólica, a qual é apresentada em [6], para alguns valores de  $\eta$ . Em perspectiva, a Fig. 5 mostra como  $z$  é aproximada pela função suavizante arco tangente, proposta neste trabalho, com os mesmos valores  $\eta$ .

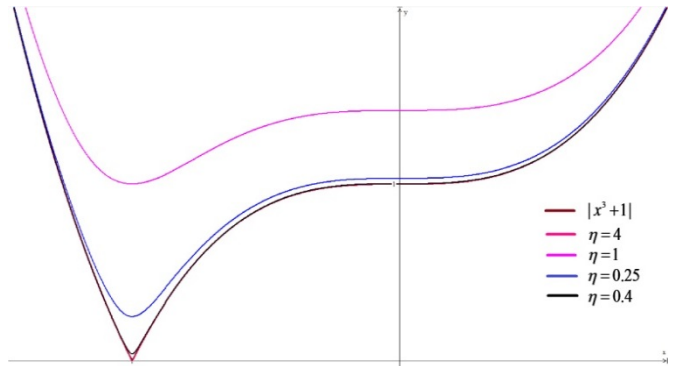


Figura 4. Função  $|x^3 + 1|$  aproximada pela função suavizante hiperbólica.

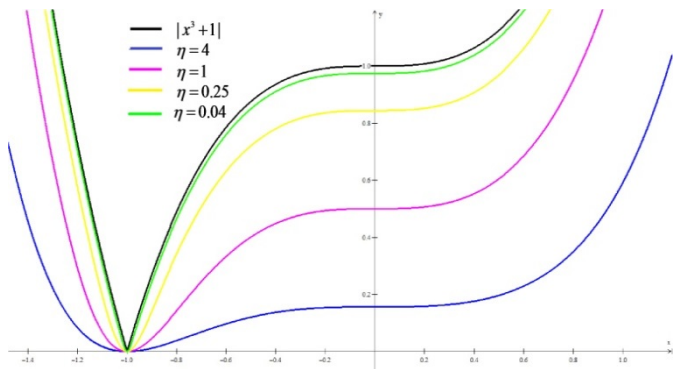


Figura 5. Função  $|x^3 + 1|$  aproximada pelo suavizante arco tangente.

A partir da análise das Fig. 4 e 5 é possível observar que a função suavizante arco tangente se ajusta melhor à função  $|x^3 + 1|$ , na vizinhança do ponto  $x = -1$ . De acordo com os Teoremas 1 e 2, tem-se que  $\omega(x^3 + 1, \eta) = 0$  se  $x^3 + 1 = 0$ . Observe que isso não ocorre se utilizamos a função suavizante hiperbólica.

Com os resultados mostrados nesta seção, a função suavizante arco tangente é uma boa ferramenta para lidarmos com problemas de otimização cuja função objetivo contém termos

modulares. Desta forma, optamos por sua aplicação ao PMDEA-PV investigado neste trabalho.

#### IV. O MÉTODO PRIMAL-DUAL PREVISOR-CORRETOR BARREIRA LOGARÍTMICA MODIFICADA (PDPCBLM)

Baseando-se em [14], [12] e [10], neste trabalho foi investigado e implementado o método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores, com estratégia de rescalamento não linear baseado na função barreira logarítmica modificada (PDPCBLM), que permite inicializar o método com pontos exteriores à região viável (infactíveis para o problema).

Considere o seguinte problema de otimização não linear:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{Sujeito a: } g(x)=0; \\ & \quad h(x) \leq 0; \end{aligned} \quad (14)$$

Transformando-se as restrições de desigualdade em restrições de igualdade pelo acréscimo de variáveis de folga, tem-se o problema (15):

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{Sujeito a: } g(x)=0; \\ & \quad h(x) + s = 0; \\ & \quad s \geq 0; \end{aligned} \quad (15)$$

em que,  $f(x)$  representa a função objetivo,  $g(x)$  e  $h(x)$  são os vetores das restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente e  $s$  é o vetor da variável de folga.

Incorporando as restrições de não-negatividade na função objetivo por meio da função de rescalamento da barreira logarítmica modificada e de estimadores dos multiplicadores de Lagrange, obtém-se o problema transformado (16):

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \delta_j (\ln \mu^{-1} s_j + 1) \\ & \text{Sujeito a : } g(x) = 0; \\ & \quad h(x) + s = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

em que  $\mu > 0$  é o parâmetro de barreira e  $\delta \in \mathbb{R}_+^p$  é o vetor de estimadores dos multiplicadores de Lagrange relativos às restrições de não-negatividade das folgas.

As restrições de igualdade são incorporadas à função objetivo através dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  e  $v \in \mathbb{R}_+^p$ . Desta forma, obtém-se a seguinte função Lagrangiana barreira logarítmica modificada:

$$\begin{aligned} L_\mu(x, s, \lambda, v) = & f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \delta_j \ln(\mu^{-1} s_j + 1) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \\ & + \sum_{j=1}^p v_j [h_j(x) + s_j] \end{aligned} \quad (17)$$

As condições necessárias de otimalidade de primeira ordem de KKT são aplicadas sobre a função Lagrangiana aumentada (17), e o seguinte sistema não-linear é obtido:

$$\nabla_x L_\mu(x, s, \lambda, v) = \nabla f(x) + Jg(x)^T \lambda + Jh(x)^T v = 0 \quad (18a)$$

$$\nabla_s L_\mu(x, s, \lambda, v) = -\mu \bar{S}^{-1} \delta + v = 0 \quad (18b)$$

$$\nabla_\lambda L_\mu(x, s, \lambda, v) = g(x) = 0 \quad (18c)$$

$$\nabla_v L_\mu(x, s, \lambda, v) = h(x) + s = 0 \quad (18d)$$

em que  $Jg(x)$  e  $Jh(x)$  são as matrizes jacobianas de  $g$  e  $h$ , respectivamente, e  $\bar{S}$  é definida por:

$$\bar{S} = \text{diag}(s_1 + \mu, \dots, s_m + \mu) \quad (19)$$

As direções de busca podem ser determinadas pelo sistema (20):

$$\begin{pmatrix} K & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \bar{S}_k^{-1} N^k & 0 & I_p \\ Jg(x^k) & 0 & 0 & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta s^k \\ \Delta \lambda^k \\ \Delta v^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \bar{S}_k^{-1} N^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (20)$$

Em problemas de otimização não-convexo, as direções do sistema (20) nem sempre são de descida para o cálculo de mínimos locais, pois na resolução do sistema, buscam-se pontos que satisfaçam as condições de KKT. Sendo assim, podem aparecer não somente pontos de mínimo local, mas também pontos de máximo local e pontos estacionários, tais como os caracterizados pela função custo de geração (1).

De acordo com [10], a inércia de uma matriz simétrica é a tripla ordenada  $(i_+, i_-, i_0)$ , onde  $i_+$  é o número de autovalores positivos,  $i_-$  é o número de autovalores negativos e  $i_0$  é o número de autovalores nulos da matriz. Se a matriz  $A_k$  não possui a inércia desejada, então uma modificação é realizada na matriz  $A_k$  a fim de obter direções de descida para a resolução do sistema. A matriz (21) é a matriz modificada e para evitar a singularidade pela deficiência de posto de  $Jg(x^k)$  e que um número excessivo de autovalores positivos sejam produzidos, uma perturbação  $-\gamma I_m$  é utilizada, como apresentado em (21).

$$\tilde{A}_k = \begin{pmatrix} K + \beta I_n & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \Sigma & 0 & I_p \\ Jg(x^k) & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Para o cálculo das direções, considere o problema primal-dual modificado (22):

$$\begin{pmatrix} K + \beta I_n & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & N^k & 0 & \bar{S}_k \\ Jg(x^k) & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta s^k \\ \Delta \lambda^k \\ \Delta v^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \pi^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (22)$$

em que  $N^k = \text{diag}(v^k)$  e

$\pi^k = -\bar{S}_k v^k + \mu \delta^k - \Delta s^k \circ \Delta v^k$  e  $\Delta s^k \circ \Delta v^k$  é denominado produto de Hadamard.

Para o cálculo das direções no procedimento previsor, o produto de Hadamard é desconsiderado, e utiliza-se  $\tilde{\pi}^k = -\bar{S}_k v^k + \mu \delta^k$  como resíduo.

O sistema a ser resolvido é definido por:

$$\begin{pmatrix} K + \beta I_n & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & N^k & 0 & \bar{S}_k \\ Jg(x^k) & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Delta x}^k \\ \tilde{\Delta s}^k \\ \tilde{\Delta \lambda}^k \\ \tilde{\Delta v}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \tilde{\pi}^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (23)$$

A partir da resolução do sistema (23), encontram-se as direções do passo previsor:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta x}^k &= \theta_k^{-1} [m^k - \tilde{p}^k - Jg(x^k)^t \tilde{\Delta \lambda}^k] \\ \tilde{\Delta s}^k &= u^k - Jh(x^k) \tilde{\Delta x}^k \\ \tilde{\Delta \lambda}^k &= [Jg(x^k) \theta_k^{-1} Jg(x^k)^t + \gamma I_m]^{-1} [Jg(x^k) \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - t^k] \\ \tilde{\Delta v}^k &= \bar{S}_k^{-1} (\tilde{\pi}^k - N^k \tilde{\Delta s}^k) \end{aligned} \quad (24)$$

Com as direções do passo previsor é possível calcular as direções do passo corretor, considerando-se os termos de segunda ordem dos resíduos de complementaridade  $\pi^k$ . Assim, o sistema a ser resolvido é o sistema apresentado em (22) e as direções obtidas são apresentadas em (25):

$$\begin{aligned} \Delta x^k &= \theta_k^{-1} [m^k - p^k - Jg(x^k)^t \Delta \lambda^k] \\ \Delta s^k &= u^k - Jh(x^k) \Delta x^k \\ \Delta \lambda^k &= [Jg(x^k) \theta_k^{-1} Jg(x^k)^t + \gamma I_m]^{-1} [Jg(x^k) \theta_k^{-1} (m^k - p^k) - t^k] \\ \Delta v^k &= \bar{S}_k^{-1} (\pi^k - N^k \Delta s^k) \end{aligned} \quad (25)$$

Os resíduos dos passos previsor e corretor são calculados de acordo com (26), para  $\beta, \gamma \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \theta_k &= K + \beta I_n + Jh(x^k)^T \bar{S}_k^{-1} N^k Jh(x^k) \\ K &= \nabla^2 f(x^k) + (\nabla^2 g(x^k))^T s^k + (\nabla^2 h(x^k))^T v^k \\ \tilde{p}^k &= Jh(x^k)^T \bar{S}_k^{-1} (\tilde{\pi}^k - N^k u^k) \\ p^k &= Jh(x^k)^T \bar{S}_k^{-1} (\pi^k - N^k u^k) \\ u^k &= -h(x^k) - s^k \\ m^k &= -\nabla f(x^k) - Jg(x^k)^T \lambda^k - Jh(x^k)^T v^k \\ t^k &= -g(x^k) \end{aligned} \quad (26)$$

Após o cálculo das direções do passo previsor e do passo corretor, são calculadas duas soluções provisórias, uma para o previsor (27):

$$\begin{aligned} x_{prev}^+ &= x^k + \alpha_{P,prev}^k \tilde{\Delta x}^k \\ s_{prev}^+ &= s^k + \alpha_{P,prev}^k \tilde{\Delta s}^k \\ \lambda_{prev}^+ &= \lambda^k + \alpha_{D,prev}^k \tilde{\Delta \lambda}^k \\ v_{prev}^+ &= v^k + \alpha_{D,prev}^k \tilde{\Delta v}^k \end{aligned} \quad (27)$$

e outra para o corretor (28):

$$\begin{aligned} x_{cor}^+ &= x^k + \alpha_{P,cor}^k \Delta x^k \\ s_{cor}^+ &= s^k + \alpha_{P,cor}^k \Delta s^k \\ \lambda_{cor}^+ &= \lambda^k + \alpha_{D,cor}^k \Delta \lambda^k \\ v_{cor}^+ &= v^k + \alpha_{D,cor}^k \Delta v^k \end{aligned} \quad (28)$$

em que  $\alpha_{P,prev}$  e  $\alpha_{D,prev}$  são os passos primal e dual, respectivamente, do procedimento previsor e  $\alpha_{P,cor}$  e  $\alpha_{D,cor}$  são os passos primal e dual, respectivamente,

do procedimento corretor.

O novo ponto é determinado com base nos valores provisórios obtidos para as direções do procedimento previsor e do corretor, de acordo com o seguinte critério, em que  $\chi > 0$  é o parâmetro que controla a escolha entre os passos previsor ou corretor, com base nos valores de complementaridade:

Se,  $(s_{prev}^+)^t v_{prev}^+ < \chi (s_{cor}^+)^t v_{cor}^+$ , então:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x_{prev}^+ \\ s^{k+1} &= s_{prev}^+ \\ \lambda^{k+1} &= \lambda_{prev}^+ \\ v^{k+1} &= v_{prev}^+ \end{aligned} \quad (29)$$

caso contrário:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x_{cor}^+ \\ s^{k+1} &= s_{cor}^+ \\ \lambda^{k+1} &= \lambda_{cor}^+ \\ v^{k+1} &= v_{cor}^+ \end{aligned} \quad (30)$$

O parâmetro de barreira é atualizado por:

$$\mu^{k+1} = \tau_1 \mu^k, \tau_1 \in (0, 1) \quad (31)$$

Os estimadores dos multiplicadores de Lagrange são atualizados de acordo com [10]:

$$\delta^{k+1} = v^{k+1} \quad (32)$$

O PDPCBLM não determina uma solução exata para o problema de otimização não-linear, sendo assim, é necessária a utilização de um critério de parada que verificar se as condições de factibilidade primal e dual e as condições de folgas complementares são atingidas, o qual é definida por:

$$\|\nabla L(x^k, s^k, \lambda^k, v^k)\|_{\infty} \leq \varepsilon \quad (33)$$

dada uma precisão  $\varepsilon > 0$ .

## V. RESULTADOS

Através da metodologia proposta foram resolvidos os casos testes de 19 e 40 unidades geradoras para o PMDEA-PV. A metodologia foi programada em linguagem MATLAB 2011a e sua execução realizada em um computador com processador AMB FX(tm)-8150 Eight-Core, com 16 GB de memória RAM. Os dados para a resolução dos casos teste foram extraídos de [1] e [2] respectivamente. O despacho econômico é calculado em unidade monetária (dólar por hora) e representado por,  $\$.h^{-1}$  e o despacho ambiental é calculado em quantidade de emissão,  $tons.h^{-1}$ . Os resultados obtidos para o caso teste de 19 unidades geradoras através da implementação da metodologia proposta foram comparados com os apresentados em [6], o qual utilizou para suavizar os termos modulares da função custo de geração o método de suavização hiperbólica, com os resultados de [1], o qual utilizou a técnica de evolução diferencial para a resolução do PMDEA-PV e com o pacote de otimização Knitro que utiliza o algoritmo Interior/Direct para resolver o problema. Para o caso teste de 40 unidades geradoras, a comparação foi feita somente através do Knitro por não ter sido investigado esse

caso na literatura. Como o pacote de otimização Knitro não opera com funções não diferenciáveis, para que os resultados pudessem ser comparados, foi fornecida a função suavizante arco tangente, com o melhor valor de  $\eta$  obtido por esta,  $\eta = 0,001$ .

Os pontos extremos, denominados de lexicográficos, representados na curva Pareto-ótimo, relativos ao valor mínimo da função emissão e máximo da função custo de geração ( $C_g^{max}, C_e^{min}$ ), bem como o valor máximo da função de emissão e mínimo da função custo de geração ( $C_g^{min}, C_e^{max}$ ), foram determinados através da resolução dos problemas de despacho mono-objetivo, PDE e PDA. O preenchimento da curva de Pareto-ótimo foi realizado através do método RCP, apresentado na seção II, utilizando o subintervalo inicial relativo aos pontos extremos da curva associados à função de emissão [ $C_e^{min}, C_e^{max}$ ]. Este intervalo foi subdividido em pequenos subintervalos de amplitude  $\delta$ , definido na seção II pelo método RCP, tornando possível determinar um conjunto de soluções eficientes para os problemas teste de PMDEA-PV, de 19 e 40 geradores.

No caso de 19 unidades geradoras, os pontos extremos obtidos na curva de soluções, são apresentados na Tabela I.

TABELA I

VALORES MÁXIMOS E MÍNIMOS DE  $C_g$  E  $C_e$  PARA O CASO DE 19 GERADORES.

Custos ( $\$.h^{-1}$ )	Emissão ( $tons.h^{-1}$ )
16987,76	14369,19
17754,08	12810,00

TABELA II

VALORES MÁXIMOS E MÍNIMOS DE  $C_g$  E  $C_e$ : MÉTODO PDPCBLM E MÉTODO DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL, CASO 19 GERADORES.

PDPCBLM		Evolução diferencial	
$C_g^{min}$	$C_e^{max}$	$C_g^{min}$	$C_e^{max}$
16985,49	14384,08	19145,00	17471,00

TABELA III

COMPARAÇÃO DOS VALORES DE  $C_g$  PARA: MÉTODO DE SUAUIZAÇÃO ARCO TANGENTE, SUAUIZAÇÃO HIPERBÓLICA, KNITRO E  $C_g$  ORIGINAL, CASO 19 GERADORES.

Intervalo	Arco tangente	Hiperbólica	Knitro	$C_g$ original
[14300,14500]	16985,4	16992,5	16992,1	16985,5
[14200,14500]	16987,7	16993,8	16988,6	16987,7
[14000,14300]	16999,3	17038,6	-----	16999,3
[13650,13850]	17090,9	17126,2	-----	17090,9
[13600,13750]	17127,2	17156,7	-----	17127,2
[12790,12810]	17682,2	17761,1	17743,1	17682,3

TABELA IV

MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE VALORES DE  $C_g$  PARA: MÉTODO DE SUAUIZAÇÃO ARCO TANGENTE, SUAUIZAÇÃO HIPERBÓLICA, KNITRO E  $C_g$  ORIGINAL, CASO 19 GERADORES.

Intervalo	$ C_{gAT} - C_{gOR} $	$ C_{gHIP} - C_{gOR} $	$ C_{gKIN} - C_{gOR} $

[14300,14500]	0,1	7	6,6
[14200,14500]	0	6,1	0,9
[14000,14300]	0	39,3	-----
[13650,13850]	0	35,3	-----
[13600,13750]	0	29,5	-----
[12790,12810]	0,1	78,8	60,8

Na Tabela IV tem-se que :

$C_{gAT}$  são os valores da função custo geração obtidos através do método de suavização arco tangente;

$C_{gOR}$  são os valores originais da função custo geração;

$C_{gHIP}$  são os valores da função custo geração obtidos através do método de suavização hiperbólica;

$C_{gKIN}$  são os valores da função custo geração obtidos através do pacote de otimização Knitro;

É possível observar na Tabela II, que os valores ( $C_g^{min}, C_e^{max}$ ) encontrados através da metodologia proposta neste trabalho são melhores que os apresentados com a resolução do PMDEA-PV, através do método de evolução diferencial de [1], cujos autores somente apresentaram esta solução para o problema. Nas Tabela III e IV, os resultados obtidos para o caso teste de 19 unidades geradoras através do método de suavização arco tangente, os quais são muito próximos do valor da função  $C_g$  original, são melhores do que aqueles obtidos pelo método de suavização hiperbólica e pelo pacote de otimização Knitro. Vale ressaltar que em alguns intervalos considerados e vistos na Tabela III, o pacote de otimização Knitro não determinou soluções para esse problema, quando operou com o algoritmo Interior/Direct. O método PDPCBLM determinou 20 soluções eficientes para este caso, dentre as 40 (valor de N) soluções possíveis para valores iniciais de  $\delta = 40$ , tais soluções estão representadas na curva da Fig.5.

A Fig.5 apresenta a comparação entre o PMDEA-PV com suavização arco tangente, hiperbólica e pacote Knitro.

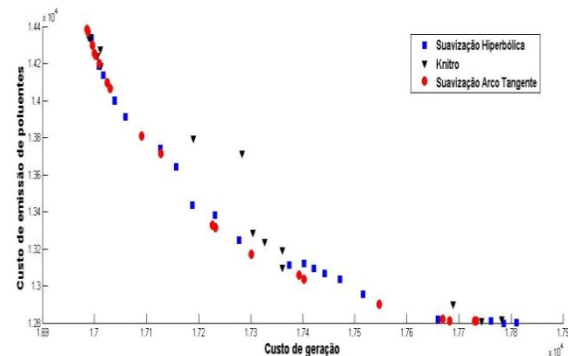


Figura 5. Comparação dos resultados obtidos pelos métodos de suavização arco tangente, hiperbólica e o pacote de otimização Knitro.

TABELA V

VALORES MÁXIMOS E MÍNIMOS DE  $C_g$  E  $C_e$  PARA O CASO DE 40 GERADORES.

Custos ( $\$.h^{-1}$ )	Emissão ( $tons.h^{-1}$ )
126746,2	65019,00
122058,3	75799,99



TABELA VI  
COMPARAÇÃO DOS VALORES DE  $C_g$  PARA: MÉTODO PDPCBLM,  
KNITRO E  $C_g$  ORIGINAL, CASO 40 GERADORES.

Intervalo	PDPCBLM	Knitro	$C_g$ original
[64900,65019]	126746,2	126743,6	126751,02
[65300,65400]	124653,8	124653,8	124658,03
[65600,65700]	124172,6	124172,6	124176,5
[68500,68800]	122376,3	-----	122378,7
[69500,70000]	122222,3	-----	122226,1
[75000,75800]	122058,3	-----	122061,4

TABELA VII  
MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE VALORES DE  $C_g$  PARA: MÉTODO  
PDPCBLM, KNITRO E  $C_g$  ORIGINAL, CASO 40 GERADORES.

Intervalo	$ C_{g_{AT}} - C_{g_{OR}} $	$ C_{g_{KIN}} - C_{g_{OR}} $
[64900,65019]	4,82	7,42
[65300,65400]	4,23	4,23
[65600,65700]	3,9	3,9
[68500,68800]	2,4	-----
[69500,70000]	3,8	-----
[75000,75800]	3,1	-----

A Tabela V indica os pontos lexográficos para o caso de 40 geradores.

Análise das Tabelas VI e VII mostra que os resultados encontrados pela metodologia proposta são melhores que os obtidos pelo pacote de otimização Knitro e em alguns intervalos o pacote de otimização não determinou soluções para este caso.

A Fig.6 a seguir mostra que para o caso de 40 unidades geradoras, o método PDPCBLM obteve um bom desempenho, pois determinou valores iguais aos obtidos pelo pacote de otimização Knitro e em alguns intervalos encontrou soluções que o pacote de otimização não determinou operando com o algoritmo Interior/Direct. Na Fig.6, observamos 14 soluções eficientes, dentre as 53 (valor de N) soluções possíveis, das quais, 11 também foram determinadas pelo pacote de otimização.

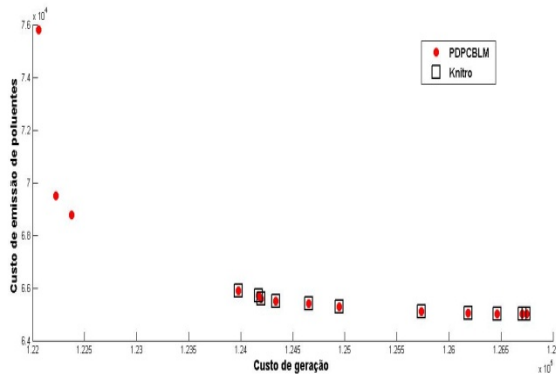


Figura 6. Comparação dos resultados obtidos pelos métodos PDPCBLM e o pacote de otimização Knitro.

VI. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvida uma metodologia que integrou os métodos primal-dual previsor-corretor de pontos interiores/exteriores, de restrições canalizadas progressivas e

de suavização arco-tangente, a qual possibilitou a obtenção de soluções eficientes para o PMDEA-PV e, respectivamente, a curva Pareto-ótima relacionada às funções objetivo deste problema. Visto que, a função custo de geração apresenta termos modulares devido à inserção de pontos de carregamento de válvula, o problema tornou-se não diferenciável nestes e de difícil resolução. Após a geração de um conjunto de subproblemas mono-objetivos através do método RCP, o método de suavização arco tangente, proposto neste trabalho, tratou estes pontos tornando possível a aplicação de um método determinístico de otimização, o método PDPCBLM, à resolução destes. Associado a este método uma estratégia de correção de inércia foi utilizada para garantir que, pelo menos um mínimo local fosse determinado para cada subproblema solucionado e definido pelo método RCP.

Os resultados obtidos foram melhores do que aqueles apresentados em [6], [1] e os obtidos através do pacote de otimização Knitro para o problema de 19 geradores. Em relação ao problema de 40 geradores, a metodologia utilizada determinou um número maior de valores da curva de Pareto-ótima do que os obtidos pelo pacote de otimização Knitro e, sensivelmente melhores, quando ambos, o pacote de otimização e a metodologia utilizada, determinaram soluções eficientes do problema em um mesmo subintervalo. A metodologia utilizada apresenta-se como uma boa ferramenta para a resolução de problemas não lineares, não convexos e não diferenciáveis, tais como o PMDEA-PV, solucionado neste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Pelo suporte financeiro relativo aos projetos FAPESP através dos processos 2013/18036-1 e 2014/20853-0 e ao CNPq através do processo 448645/2014-9.

REFERÊNCIAS

[1] Balamurugan, K., Muralisachithndam, R., & Krishnan, S. R.; Differential evolution based solution for combined economic and emission power dispatch with valve loading effect. *International Journal on Electrical Engineering and Informatics*, 6(1), 2014.

[2] Basu, M.; Economic environmental dispatch using multi-objective differential evolution. *Applied Soft Computing*, 11(2), 2845 - 2853, 2011.

[3] BP 2012 BP Statistical Review of World Energy , 2013.

[4] Brasil; Balanço energético nacional. Empresa de Pesquisa Energética, Ministério, 2015.

[5] El-Hawary, M. E., El-Hawary, F., & Mbamalu, G. A. N.; Nox emission performance models in electric power systems. *Proceedings of the 1992 Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, 2, 1992.

[6] Gonçalves, E.; *Métodos Híbridos de Pontos interiores/exteriores e de aproximantes de função em problemas multiobjetivo de despacho econômico/ambiental*. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, 2015.

[7] Griva, I. & Polyak, R. A. (2006). Primal-dual nonlinear rescaling method with dynamic scaling parameter update. *Mathematical Programming*, 106(2), 237-259.

[8] Haimes, Y. Y.; On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, SMC-1(3), 296-297, 1971.

[9] Miettinen, K.; *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Boston: Kluwer, 1999.

[10] Nocedal, J. & Wright, S. J.; *Numerical Optimization*. New York: Springer, 2006.

[11] Pinheiro, R. B. N., Balbo, A. R., Baptista, E. C., & Nepomuceno, L. Interior-exterior point method with global convergence strategy for solving

thereactive optimal power flow problem. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 66(0), 235–246, 2015.

[12] Polyak, R. Modified barrier functions (theory and methods). *Mathematical Programming*, 54(1-3), 177–222, 1992.

[13] Ravi, G., Chakrabarti, R., & Choudhuri, S.; Nonconvex economic dispatch with heuristic load patterns using improved fast evolutionary program. *Electric Power Components and Systems*, 34(1), 37–45, 2006.

[14] Silva, D. N.; Método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores e exteriores com estratégias de correção de inércia e suavização hiperbólica aplicado ao problema de despacho econômico com ponto de válvula e representação da transmissão. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, 2014.

[15] Sinha, N., Chakrabarti, R., & Chattopadhyay, R.; Evolutionary programming techniques for economic load dispatch. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 7(1), 83–94, 2003.

[16] Stanzani, A. L. *Método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores em problemas multiobjetivo de despacho econômico e ambiental*. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, 2012.

[17] Stanzani, A. L., Balbo, A. R., Nepomuceno, L., & Baptista, E. C.; Solving the multiobjective environmental/economic dispatch problem using weighted sum and  $\epsilon$ -constraint strategies and a predictor-corrector primal-dual interior point method. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 25, 503–515, 2014.

[18] Steinberg, M. J. & Smith, T. H. (1934). The theory of incremental rates and their practical application to load division – part i. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 53(3), 432–445.

[19] Walters, D. C. & Sheble, G. B.; Genetic algorithm solution of economic dispatch with valve point loading. *IEEE Transactions on Power Systems*, 8(3), 1325–1332, 1993.

[20] Wood, A. & Wollenberg, B. *Power generation, operation, and control*. Wiley, 1984.

[21] [www.ons.org.br/home/](http://www.ons.org.br/home/)



aplicados em sistemas de energia.

Mariana Rodrigues Barbosa dos Santos, é graduada em Matemática pela Universidade Estadual Paulista – UNESP, Bauru- SP, em 2009. Atualmente é estudante de mestrado em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - UNESP, Bauru, onde desenvolve pesquisas na área de otimização, com métodos de pontos interiores/exteriores



métodos de pontos interiores/exteriores aplicados em sistemas de energia.

Elis Gonçalves, é graduada em Matemática pela Universidade Estadual Paulista – UNESP, Bauru- SP, em 2012, tendo obtido o título de mestre em Engenharia Elétrica pela mesma universidade, em 2015. Atualmente, é estudante de doutorado pelo programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista – UNESP, Bauru- SP, onde desenvolve pesquisas na área de otimização, com



pesquisas nas áreas de métodos primal-dual previsor-corretor de pontos interiores/exteriores aplicados em sistemas de energia.

Antonio Roberto Balbo, é graduado em Matemática Universidade Estadual Paulista – UNESP – SP, em 1986, tendo obtido seu título de mestre em Ciência da Computação, em 1991 e seu título de doutor em Engenharia de Estruturas em 1998, ambos pela Universidade de São Paulo –USP. Atualmente é Professor Adjunto do Departamento de Matemática da UNESP, em Bauru, onde desenvolve



nas áreas de otimização, atuando principalmente nos seguintes temas: programação não linear, variáveis discretas e problema de fluxo de potência ótimo.

Edilaine Martins Soler, é graduada em Matemática pela Universidade de São Paulo – USP, em 2007, tendo obtido o título de mestre em Ciência da Computação e Matemática Computacional, em 2008, e o título de doutora em Engenharia Elétrica, em 2011, ambos pela Universidade de São Paulo – USP. Atualmente é Professora Assistente da Universidade Estadual Paulista – UNESP – SP, onde desenvolve pesquisas



Ricardo Bento Nogueira Mori Pinheiro é graduado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista - UNESP - SP - Brasil, em 2008. Obteve o título de mestre em

Engenharia Elétrica 2012 pela UNESP e atualmente ele desenvolve o seu doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade de São Paulo - USP - SP - Brasil. Sua área de pesquisa é em programação não-linear e em fluxo de potência ótimo.



Leonardo Nepomuceno, é graduado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Uberlândia – UFU- MG, Brasil, em 1990, tendo obtido os títulos de mestre e doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas– UNICAMP, Campinas – SP, Brasil, respectivamente em 1993 e 1997. No período de 1997 a 2000, o professor atuou em projeto de pós-doutorado na UNICAMP. Atualmente, o professor desenvolve pesquisas na Universidade Estadual Paulista - UNESP, Bauru - SP, na área de planejamento e otimização de sistemas de energia em mercados de energia.



Edméa Cássia Baptista, é graduada em Matemática pela Universidade Estadual Paulista – UNESP – SP, em 1988, tendo obtido os títulos de mestre em Ciência da Computação e doutora em Engenharia Elétrica pela Universidade de São Paulo – USP, em 1993 e 2001, respectivamente. Atualmente é Professora Adjunta do Departamento de Matemática da UNESP, em Bauru, onde desenvolve pesquisas nas áreas de otimização, programação não linear, fluxo de potência ótimo e planicidade.