

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA – UNESP
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
CÂMPUS DE RIO CLARO**

**BIFURCAÇÃO DE HOPF E FORMAS NORMAIS: UMA NOVA
ABORDAGEM PARA SISTEMAS DINÂMICOS**

Vinícius Barros da Silva

**Rio Claro– SP
2018**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE RIO CLARO**

Vinícius Barros da Silva

**Bifurcação de Hopf e Formas normais: Uma nova
abordagem para sistemas dinâmicos**

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas – IGCE-UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física– Programa de Pós-Graduação em Física.

Área de Concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel
Co orientador: Prof. Dr. João Peres Vieira

**UNESP – Rio Claro
Dezembro de 2018**

S586b Silva, Vinícius Barros da
Bifurcação de Hopf e Formas normais : Uma nova
abordagem para sistemas dinâmicos / Vinícius Barros da Silva.
-- Rio Claro, 2018
77 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
(Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel
Coorientador: Prof. Dr. João Peres Vieira

1. Formas normais. 2. Bifurcação de Hopf. 3. Variedade
central. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Vinícius Barros da Silva

Bifurcação de Hopf e Formas normais: Uma nova abordagem para sistemas dinâmicos

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas – IGCE-UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física– Programa de Pós-Graduação em Física.

Área de Concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel
Co orientador: Prof. Dr. João Peres Vieira

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Prof. Dr. Roberto Venegeroles Nascimento

Prof. Dr. Luís Fernando Costa Alberto

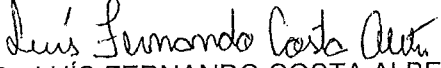
Conceito: Aprovado

Rio Claro/SP, 20 de Dezembro de 2018

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE VINÍCIUS BARROS DA SILVA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, DO INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS.

Aos 20 dias do mês de dezembro do ano de 2018, às 10:00 horas, no(a) Sala de Seminários da Pós-Graduação - Departamento de Física, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. EDSON DENIS LEONEL - Orientador(a) do(a) IGCE / UNESP/Rio Claro (SP), Prof. Dr. LUÍS FERNANDO COSTA ALBERTO do(a) EESC / USP/São Carlos (SP), Prof. Dr. ROBERTO VENEGEROLES NASCIMENTO do(a) CMCC / UFABC/Santo André (SP), sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de VINÍCIUS BARROS DA SILVA, intitulada **Bifurcação de Hopf e Formas normais: Uma nova abordagem para sistemas dinâmicos**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.


Prof. Dr. EDSON DENIS LEONEL


Prof. Dr. LUÍS FERNANDO COSTA ALBERTO


Prof. Dr. ROBERTO VENEGEROLES NASCIMENTO

*Este trabalho é dedicado aos meus pais Francisco A. da Silva
e Maria J. da Conceição Barros,
pelo importante e constante apoio ao longo desta jornada.*

AGRADECIMENTOS

A **DEUS** pela iluminação e proteção ao longo desta jornada.

Aos meus pais **Francisco Alves da Silva** e **Maria José da Conceição Barros**, pelo importante e constante apoio que foram essenciais em todos os momentos.

Ao Prof. Dr. **Edson Denis Leonel**, do Departamento de Física da UNESP "Júlio de Mesquita Filho" campus de Rio Claro, pela oportunidade de aprendizado e confiança depositada. Pela dedicação e paciência, por não medir esforços para ajudar-me e pela compreensão sempre presente em todos os momentos de diálogo.

Aos professores Dr. **João Peres Vieira**, do Departamento de Matemática e Dr. **João Paulo Cerri** do Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação (DEMAC) da UNESP "Júlio de Mesquita Filho" campus de Rio Claro, pela enorme contribuição e auxílio no que tangem às discussões, correções, sugestões e verificação dos resultados deste projeto de pesquisa.

Ao importante apoio do suporte acadêmico dos Srs **Geraldo Ap. de Lima Sobrinho**, **Leandro Xavier Moreno** e **André Paganotti Faber**.

Agradecimentos fundamentais são direcionados ao imensurável apoio da **Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo** (FAPESP), por acreditar na proposta, pela concessão da bolsa e financiamento do projeto (proc. nº 2015/23142-0) que conduziu ao desenvolvimento desta dissertação.

*“Nós devemos fazer o que temos de fazer, para
podermos fazer aquilo que queremos fazer.”
(James Leonard Farmer Sr.)*

RESUMO

DA SILVA, V. B. **Bifurcação de Hopf e Formas normais: Uma nova abordagem para sistemas dinâmicos**. 2018. 74 p. Dissertação (Mestrado em Física – Programa de Pós-Graduação em Física) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro – SP, 2018.

Este estudo objetiva provar que sistemas dinâmicos de dimensão N , de codimensão um e satisfazendo as condições do teorema da bifurcação de Hopf, podem ser expressos em uma forma analítica simplificada que preserva a topologia do espaço de fases da configuração original, na vizinhança do ponto de equilíbrio. A esta forma simplificada é atribuído o nome de forma normal. Para tanto, foi utilizado a teoria da variedade central, necessária para reduzir a dimensão de sistemas à sua variedade bidimensional, e o teorema das formas normais, utilizando-se como método para determinar a forma simplificada da variedade central associada aos sistemas dinâmicos, atendendo as condições do teorema da bifurcação de Hopf. A partir da análise dos resultados aqui encontrados foi possível construir a prova matemática de que sistemas de dimensão N , atendendo as condições do teorema de Hopf, podem ser re-escritos em uma expressão analítica geral e simplificada. Enfim, através deste estudo foi possível resumir todos os resultados aqui obtidos em um teorema geral, além de reduzir a custosa tarefa de obtenção de formas normais, abrange sistemas N -dimensionais com ocorrência da bifurcação de Hopf.

Palavras-chave: formas normais, bifurcação de Hopf, teoria da variedade central.

ABSTRACT

DA SILVA, V. B. **Hopf bifurcation and normal forms: A new description to dynamical systems**. 2018. 74 p. Dissertação (Mestrado em Física – Programa de Pós-Graduação em Física) –Instituto de Geociências e Ciências Exatas , Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro – SP, 2018.

In this work we prove the following: consider a N dimensional system that is reduced to its center manifold. If it is proved the system satisfies the conditions of Hopf bifurcation theorem, then the original system of differential equations is rewritten in a simpler analytical expression that preserves the phase space topology. This last is also known as the normal form. The center manifold is used to derive a reduced order expression, and the normal form theory is applied to simplify the form of the dynamics on the center manifold. The key results here allow constructing a general mathematical proof for the normal form of N -dimensional systems reduced to its center manifold. In the class of dynamical systems under Hopf bifurcations, the present work reduces the work done to obtain normal forms.

Keywords: normal forms, Hopf bifurcation, center manifold theory.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	BIFURCAÇÃO DE HOPF	23
2.1	Teorema da bifurcação de Hopf no \mathbb{R}^2	24
2.2	Teorema da bifurcação de Hopf no \mathbb{R}^n	27
3	TEOREMA DA VARIEDADE CENTRAL	31
3.1	Variedades e teorema da variedade central	32
4	FORMAS NORMAIS	35
4.1	Teorema de formas normais	36
4.2	Um exemplo do cálculo de formas normais	38
5	UMA NOVA ABORDAGEM	43
5.1	Uma nova abordagem para sistemas no \mathbb{R}^2	45
5.2	Aplicações em sistemas bidimensionais	52
5.2.1	<i>Oscilador de Van der Pol</i>	52
5.2.2	<i>Reações químicas oscilatórias</i>	52
6	UMA NOVA ABORDAGEM NO \mathbb{R}^n	55
6.1	Uma nova abordagem para sistemas no \mathbb{R}^n	55
6.2	Aplicações em sistemas tridimensionais	60
6.2.1	<i>Sistema de Lorenz</i>	60
6.2.2	<i>Circuito de Chua</i>	61
7	DISCUSSÕES	63
8	CONCLUSÕES	69
8.1	Publicações Relacionadas à Tese	70
	REFERÊNCIAS	71

INTRODUÇÃO

A natureza é responsável por abranger uma grande diversidade de fenômenos e comportamentos de carácter não-linear. Dentre estes, destaca-se o fenômeno conhecido por bifurcação. No contexto da dinâmica não-linear, sistemas dinâmicos que descrevem sistemas físicos, são caracterizados por parâmetros de controle. Como exemplo, considere um sistema dinâmico envolvendo reações químicas oscilantes, onde o parâmetro de controle é a concentração dos reagentes envolvidos na reação (Figura 1a).

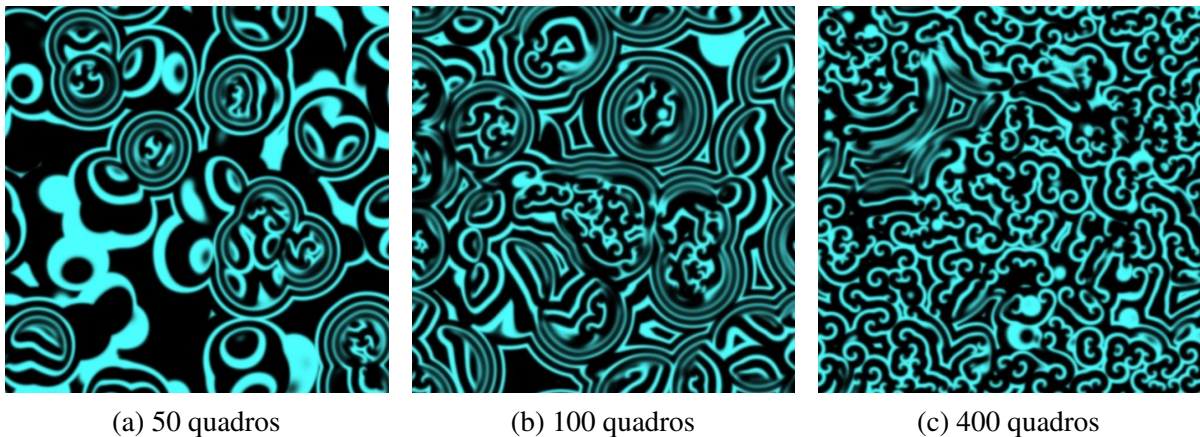


Figura 1 – Simulação de ondas químicas na atividade da reação de Belousov-Zhabotinsky (B.Z.) através do software livre "Processing". A reação (B.Z.) é um exemplo clássico de uma reação química oscilatória. A ordem dos comportamentos se lê da esquerda para a direita. (a) Simulação das oscilações temporais de uma reação (B.Z.) após 50 quadros; (b) Estado após 100 quadros. (c) Estado após 400 quadros. Da Figura 1a para a Figura 1b, nota-se uma mudança de comportamentos vinculada à modificação do parâmetro de controle (consumo dos reagentes). Na Figura 1c, a mudança na estrutura espacial do sistema caracteriza-se por exibir um comportamento periódico. Deste modo, quando à variação do parâmetro de controle conduz ao surgimento de soluções periódicas, diz-se que o sistema dinâmico exibe uma bifurcação de Hopf.

De acordo com [Figura 1b](#), conforme ocorre consumo dos reagentes envolvidos no processo químico, portanto mudança do parâmetro de controle, o comportamento do sistema dinâmico muda qualitativamente. Neste cenário, diz-se que o sistema dinâmico sofreu uma bifurcação ([STROGATZ, 2015](#); [GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983](#)).

Ao analisar a [Figura 1c](#), torna-se evidente que a mudança no comportamento do sistema é caracterizada por exibir um comportamento periódico no que compete à mudança na concentração dos reagentes. Deste modo, segundo a teoria bifurcações, diz-se que o sistema em particular exibe uma bifurcação chamada de bifurcação de Hopf ([GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983](#); [MONTEIRO, 2011](#); [FIEDLER; PRADO, 2011](#); [MARS DEN; MCCRACKEN, 1976](#)). Soluções periódicas obtidas mediante a mudança de um ou mais parâmetros de controle são chamadas de ciclo-limite ([MARS DEN; MCCRACKEN, 1976](#); [MONTEIRO, 2011](#)). Entende-se por ciclo-limite uma trajetória fechada e isolada no retrato de fases ¹.

Na Física estatística, modificações na estrutura do retrato de fases, vinculadas à variação de parâmetros de controle, são chamadas de transições de fase. De modo geral, em uma bifurcação, o ponto de equilíbrio² sofre uma mudança na sua estabilidade. O fluxo de soluções antes e após a bifurcação é diferente, geralmente acarretando em uma mudança da estabilidade do ponto de equilíbrio. O estudo da convergência para este ponto é caracterizado em termos da distância ao ponto fixo ([LEONEL; KAMPHORST, 2002](#)). O estudo da convergência e, à rigor, das propriedades de escala, na bifurcação, é descrito por uma função homogênea generalizada conduzindo a três expoentes críticos: α , β e z . Estes expoentes estão relacionados entre si a partir de uma lei de escala da forma $z = \frac{\beta}{\alpha}$. Nas proximidades da bifurcação, a convergência para o ponto de equilíbrio é dada por uma função exponencial. O tempo de relaxação é expresso a partir de uma lei de potência cujo o argumento é o parâmetro que estabelece a distância da bifurcação, descrito por um expoente δ . Os expoentes críticos definem a classe de universalidade de bifurcações ([LEONEL, 2016](#)).

Em um resultado recente envolvendo o estudo das propriedades de escala de bifurcações em mapeamentos discretos unidimensionais, foi considerado particularmente uma família de mapeamentos do tipo logístico-like ([TEIXEIRA et al., 2015b](#)). A convergência para o ponto fixo em uma bifurcação foi investigada usando tanto a abordagem fenomenológica, a partir

¹ Um dado par de valores, por exemplo (x, \dot{x}) define o estado de um sistema, sendo x a variável dinâmica. A descrição de como este estado evolui no tempo é denominada de diagrama de fases. As possíveis soluções deste sistema são denominadas por trajetórias de fase ou linhas de fluxo. O conjunto de todas as linhas de fluxo é denominado por retrato de fases ([FIEDLER; PRADO, 2011](#); [MONTEIRO, 2011](#)).

² No presente trabalho, entende-se por ponto de equilíbrio, o ponto a qual o sistema dinâmico permanece no estado estacionário, conforme ocorre a evolução deste no tempo. Na literatura ([STROGATZ, 2015](#); [GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983](#)), é comum o uso dos termos ponto fixo, para sistemas dinâmicos cuja evolução no tempo ocorre de modo contínuo, e ponto de equilíbrio, quando o sistema evolui no tempo de modo discreto. Como no presente trabalho não há um estudo profundo e detalhado sobre mapas discretos, então não será feita distinção entre os termos ponto fixo e ponto de equilíbrio, sendo estes portanto tratados aqui como correlatos.

do uso de uma função de escala, conduzindo a uma lei de escala com três expoentes críticos, bem como um procedimento analítico, transformando a equação de diferenças em uma equação diferencial. A investigação fenomenológica considerou um conjunto de três hipóteses de escala e gráficos específicos para obter os expoentes críticos. Neste estudo, ver (TEIXEIRA *et al.*, 2015b), observou-se que o expoente α é constante, enquanto $\beta = -1/\gamma$ e $z = -\gamma$ apresentam dependência da não-linearidade do mapa. Os autores evidenciam que para um mapa logístico da forma $x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma)$, com $\gamma \geq 1$, a lei de escala $z = \alpha/\beta$ é também observada.

Após estes resultados, Ref. (TEIXEIRA *et al.*, 2015b), os autores desenvolvem uma expansão em série de Taylor da segunda iterada do mapeamento e descrevem com sucesso, ver (TEIXEIRA *et al.*, 2015a), os expoentes críticos para uma bifurcação de duplicação de período. Para esta bifurcação, os expoentes não dependem da não-linearidade do mapeamento e, portanto, são universais. Conforme em (TEIXEIRA *et al.*, 2015b; LEONEL; KAMPHORST, 2002), os expoentes críticos podem ser dispostos de forma resumida na Tabela 1.

Tabela 1 – Tabela de expoentes críticos α , β , z e δ observados para uma família de mapeamentos discretos da forma $x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma)$, conforme discutido em (LEONEL, 2016).

Bifurcação	α	β	z	δ
Forquilha	1	$-\frac{1}{\gamma}$	$-\gamma$	-1
Transcrítica	1	$-\frac{1}{\gamma}$	$-\gamma$	-1
Duplicação de período	1	$-\frac{1}{2}$	-2	-1

Uma extensão do procedimento foi feita também para um conjunto de bifurcações observadas em equações diferenciais ordinárias, ver (LEONEL, 2016), considerando um conjunto de três importantes bifurcações unidimensionais, a saber: Sela-nó, Transcrítica e Forquilha supercrítica. Os resultados podem ser resumidos na Tabela 2.

Tabela 2 – Tabela de expoentes críticos α , β , z and δ para três bifurcações locais, conforme discutido em (LEONEL; KAMPHORST, 2002).

Equação	Bifurcação	α	β	z	δ
$\dot{x} = \mu - x^2$	Sela-nó	1	-1	-1	$-\frac{1}{2}$
$\dot{x} = \mu x - x^2$	Transcrítica	1	-1	-1	-1
$\dot{x} = \mu x - x^3$	Forquilha supercrítica	1	$-\frac{1}{2}$	-2	-1

Embora as bifurcações discutidas acima tenham sido especialmente caracterizadas pelo fato de que a estabilidade dos pontos fixos muda à medida que os parâmetros do sistema são variados, levanta-se como questionamento sobre o que aconteceria com as propriedades de escala do sistema se a mudança na estabilidade do ponto fixo conduzisse a uma solução periódica, ou seja, qual seria o comportamento dos expoentes de escala, bem como, da lei de escala se uma bifurcação de Hopf caracterizasse o sistema dinâmico?

Recentemente, significativos avanços foram obtidos no estudo e determinação de propriedades relacionadas à convergência para o estado estacionário na bifurcação de Hopf (SILVA; LEONEL, 2018a; SILVA; LEONEL, 2018b; SILVA, 2018). Nestes estudos, a partir da obtenção da forma normal, investigou-se a dinâmica no ponto de bifurcação e em suas vizinhanças usando o formalismo de escala. O desenvolvimento destes estudos conduziram a determinação de propriedades de escala da forma normal da bifurcação de Hopf, assim como, dos expoentes críticos. Além disso, constatou-se que as propriedades de convergência para o estado estacionário, embora apresentem dependência das formas normais, são invariantes ao tipo de forma normal do sistema.

No entanto, se faz necessário aduzir o seguinte comentário crítico aos nossos procedimentos. Pergunta-se à propósito:

Qual é a relevância das propriedades de escala e por quê deve-se preocupar com a determinação dos expoentes críticos em sistemas dinâmicos teóricos e, à rigor, em sistemas de natureza experimental ?

Suponha um cientista experimental investigando um determinado sistema dinâmico caracterizado por um ciclo limite assintoticamente estável e que o conjunto de equações diferenciais que descreve a dinâmica não seja conhecido. Ao examinar as propriedades de escala, assim como, os expoentes críticos que caracterizam a dinâmica próxima a uma determinada bifurcação, isto permite descobrir e aprender propriedades sobre o sistema em estudo que podem não ser devidamente conhecidas, quando são. Desta maneira, determinados modelos que simulam este sistema dinâmico podem ser eliminados ou suportados dependendo das propriedades de escala observadas.

De modo geral, uma das ferramentas básicas no estudo sobre a mudança no comportamento topológico associado a um fluxo de soluções é a teoria das formas normais (GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983; MONTEIRO, 2011). Contudo, em sua totalidade as formas normais para sistemas dinâmicos que exibem a bifurcação de Hopf ou para diferentes sistemas de equações diferenciais de modo geral, não são de fácil obtenção e acabam por consumir, portanto, demasiado tempo e trabalho, já que as operações são não triviais de serem realizadas devido a ordem e a dimensão que exibem (GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983; CHOW; DRACHMAN; WANG, 1990).

Com base nisso, procura-se com presente trabalho reunir dados para responder ao seguinte problema de pesquisa: É possível reduzir o árduo trabalho de obtenção das formas normais para sistemas dinâmicos de dimensão N com ocorrência da bifurcação de Hopf?

Deste modo, o principal objetivo do presente trabalho consiste em provar que para qualquer sistema dinâmico de dimensão N , satisfazendo as condições do teorema da bifurcação de Hopf, sua forma normal é expressa por:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(\mu)y_1 - \beta(\mu)y_2 + (ay_1 - by_2)((y_1)^2 + (y_2)^2), \\ \dot{y}_2 = \alpha(\mu)y_2 + \beta(\mu)y_1 + (ay_2 + by_1)((y_1)^2 + (y_2)^2). \end{cases} \quad (1.1)$$

Em que y_1 e y_2 descrevem as variáveis dinâmicas, α caracteriza o parâmetro de controle com β , a e b constantes.

Todavia, considera-se relevante fazer também o seguinte questionamento: Por que as formas normais são tão relevantes para o estudo das bifurcações de Hopf?

As formas normais desempenham um formalismo crucial para que seja realizado o estudo da bifurcação de Hopf, assim como de demais outras bifurcações, no que tangem as propriedades de escalas que as caracterizam. Diante disso, é possível afirmar que mesmo o resultado principal deste trabalho limitando-se a sistemas dinâmicos com ocorrência da bifurcação de Hopf, a existência de uma ferramenta matemática robusta que permite reduzir o trabalho de obtenção de formas normais a simples verificação de algumas poucas condições específicas e que, à rigor, auxilia na investigação de propriedades de escala, se torna necessária e extremamente bem-vinda.

É importante salientar que alguns trabalhos já parecem ter realizado um certo "esforço" no sentido de obter uma simplificação na determinação de formas normais, principalmente para sistemas dinâmicos sujeitos à bifurcação de Hopf (JR; AMARAL; ALBERTO, 2013; BETANCUR, 2010; VERRI, 2013). Nestes últimos torna-se evidente que os métodos apresentados convergem para a formulação de Poincaré (POINCARÉ, 1879), extensamente discutida pelos trabalhos de Yuri Kuznetsov, com ênfase na obra *Applied Elements of Bifurcation Theory*. Apesar de intrigante, o método discutido por Kuznetsov, bem como o modo como é apresentado, leva alguns pontos ao questionamento.

A computação de formas normais seguindo o método canônico de Poincaré trata-se de uma construção envolvendo expansões em série de Taylor e é extremamente eficaz no estudo de sistemas dinâmicos unidimensionais. A determinação da forma normal das bifurcações sela-nó, transcítica, forquilha (MONTEIRO, 2011, p. 328-335) e duplicação de período (TEIXEIRA *et al.*, 2015b; TEIXEIRA *et al.*, 2015a), surge através deste método. Entretanto, envolvendo sistemas dinâmicos, principalmente modelados de sistemas físicos, nem sempre o estudo destes se resume ao caso unidimensional, uma vez que é grande a variedade de sistemas de dimensão $N \geq 2$. Segundo Chow, Drachman e Wang (1990), para esta classe de sistemas, além da determinação da forma normal não ser trivial, esta também não é unívoca, o que a torna sua determinação ainda

mais complicada.

Não obstante, Kuznetsov ainda estabelece, para a obtenção de formas normais, uma condição de não-degenerescência, que não tem origem nos trabalhos de E. Hopf (1942) para sistemas dinâmicos no \mathbb{R}^n , tampouco de Andronov no \mathbb{R}^2 (ANDRONOV; VITT; KHAIKIN, 1996; HOPF; MORAWETZ; SERRIN, 2002). A formulação original de E. Hopf, leva estabelecer ainda alguns questionamentos no que compete o restante do espectro de autovalores associados a matriz Jacobiana. Tais pontos serão levantados e esclarecidos nos capítulos seguintes.

A determinação da forma normal não se limita apenas ao método de Poincaré. Outro método consiste na abordagem desenvolvida por Takens e estendida por Ushiki (USHIKI, 1984; CHUA; KOKUBU, 1988; CHUA; KOKUBU, 1989). Esta abordagem encontra-se baseada na computação de transformações não-lineares de coordenadas que sistematicamente reduzem o acoplamento entre termos de menor ordem no sistema original. Esta teoria de transformação encontra-se baseada nas técnicas da álgebra de Lie. Todavia, embora mais prático quando comparado ao método de Poincaré, o formalismo de Takens e Ushiki também não é simples, pois envolve: (i) obrigatoriedade de cálculo de termos de ordem superior da forma normal; (ii) infrutíferos métodos computacionais; (iii) operações matriciais difíceis de serem realizadas sem cometer equívocos.

Diante disso, nota-se que os métodos atuais, apesar de extremamente relevantes, não são simples de serem avaliados, dado que tornam-se cada vez mais trabalhosos dependendo da dimensão do sistema. Deste modo, a proposta do presente trabalho reside em uma nova abordagem que simplifique a determinação de formas normais para a classe de sistemas dinâmicos satisfazendo as condições propostas por E. Hopf. Nesse sentido, a contribuição deste trabalho jaz primeiro em estabelecer um teorema, empregando o formalismo de Takens, para a determinação de formas normais envolvendo sistemas de dimensão 2 e satisfazendo as condições propostas por Andronov (ANDRONOV; VITT; KHAIKIN, 1996; RUELLE; TAKENS, 1971). Um vez tendo-o alcançado, o resultado é generalizado para sistemas N -dimensionais, satisfazendo agora as condições do teorema original de Hopf (HOPF; MORAWETZ; SERRIN, 2002, p. 111).

Para o desenvolvimento e obtenção do resultado de maior relevância neste estudo, os teoremas da bifurcação de Hopf (MARSDEN; MCCracken, 1976; KAZARINOFF N.D; HASSARD; WAM, 1981; ANDRONOV; VITT; KHAIKIN, 1996; RUELLE; TAKENS, 1971; HOPF, 1942; HOPF; MORAWETZ; SERRIN, 2002), bem como, os teoremas de Carr da variedade central (CARR, 1981; KHAIL, 1981; MONTEIRO, 2011; KAZARINOFF N.D; HASSARD; WAM, 1981; SPIVAK, 1965; TU, 2011) e, por fim, do formalismo de formas normais de Takens-Ushiki (GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983; MONTEIRO, 2011; USHIKI, 1984; CHUA; KOKUBU, 1988; CHUA; KOKUBU, 1989) desempenham ambos papel fundamental ao longo deste trabalho. Os teoremas da bifurcação de Hopf, no \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^n , permitem estabelecer que condições sistemas dinâmicos devem satisfazer para a ocorrência da bifurcação de Hopf. Conforme evidenciado, um determinado sistema exhibe a bifurcação de Hopf quando a alteração do parâmetro de controle

deste sistema conduz a uma mudança na estabilidade do ponto fixo, de foco atrator para foco repulsor, com o surgimento de um ciclo-limite assintoticamente estável.

O teorema da variedade central envolve uma rigorosa técnica matemática que possibilita com que seja reduzido a dimensão de um determinado sistema a sua variedade central. Por outro lado, o teorema das formas normais proporciona, através de sucessivas transformações de coordenadas, uma maneira com a qual o sistema dinâmico possa ser re-escrito em uma expressão analiticamente mais simples e que mantêm as características e propriedades do sistema dinâmico original. Ambas as técnicas são aplicadas na vizinhança do ponto de equilíbrio.

Esta dissertação estrutura-se em seis capítulos. Apresentado-se no primeiro os teoremas da bifurcação de Hopf no \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^n . O segundo capítulo, é dedicado à teoria da variedade central. No final, discute-se um exemplo envolvendo o cálculo da variedade central. No terceiro capítulo, é discutido a teoria das formas normais de Takens-Ushiki. O quarto capítulo caracteriza o estudo em questão com o objetivo de responder ao problema de pesquisa levantado acima. Por fim, os capítulos cinco e seis são dedicados à discussões e conclusões, respectivamente.

BIFURCAÇÃO DE HOPF

No contexto da dinâmica não-linear, a teoria de bifurcações encontra-se particularmente interessada no estudo da mudança do comportamento topológico associado a um fluxo de soluções de um sistema dinâmico. Podendo este último ser descrito por uma equação diferencial (HILBORN, 2000) ou por um mapeamento discreto (DEVANEY, 1992). Neste trabalho entende-se por mapas discretos como sistemas dinâmicos que evoluem no tempo de forma discreta. Todavia, uma bifurcação geralmente ocorre quando a alteração de um determinado parâmetro de controle produz uma mudança qualitativa no fluxo de soluções do sistema.

De forma geral, as bifurcações são divididas em dois grandes grupos: locais e globais (MONTEIRO, 2011). As bifurcações mais elementares e mais minuciosamente estudadas são aquelas relacionadas ao comportamento local próximo a um ponto fixo ou periódico de um sistema dinâmico de tempo discreto ou a uma órbita periódica de um sistema de tempo contínuo (KATOK; HASSELBLATT, 2005; GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983; MONTEIRO, 2011).

As bifurcações locais ocorrem quando a alteração do parâmetro de controle provoca uma mudança na estabilidade local associada a um ponto fixo ou a órbitas periódicas. Por outro lado, as bifurcações globais envolvem mudanças qualitativas nos aspectos globais do sistema dinâmico (SAVI, 2006). Algumas bifurcações globais costumam ocorrer quando conjuntos invariantes, por exemplo atratores caóticos, colidem com variedades instáveis, o que acarreta na destruição do atrator¹ (GREBOGI; OTT; YORKE, 1982a; GREBOGI; OTT; YORKE, 1982b).

Segundo Savi (2006), as bifurcações locais tratam-se de mudanças no comportamento topológico do fluxo de soluções do sistema em uma região limitada no espaço de fases, por exemplo, na vizinhança dos pontos fixos. Assim, o procedimento de análise consiste, para este caso, de estudar os diferentes tipos de soluções com a variação do parâmetro de controle. As bifurcações globais, por outro lado, são caracterizadas como bifurcações do tipo não-locais,

¹ Denomina-se atrator um ponto ou um conjunto de pontos para os quais as trajetórias de fase convergem para tempos suficiente longos.

portanto, conclusões sobre estas bifurcações não podem ser obtidas a partir da análise local.

De outra maneira, pode-se dizer que as bifurcações locais descrevem todas as mudanças no espaço de fase que podem ser previstas estudando-se o campo vetorial nas vizinhanças de um ponto fixo ou de uma órbita fechada. Ao passo que, as bifurcações globais são aquelas em que a análise local não permite inferir em nada sobre as mudanças das órbitas no retrato de fases.

O objetivo último do presente trabalho reside na determinação do resultado matemático que garante a representação de sistemas dinâmicos sujeitos à bifurcação de Hopf em uma forma simplificada. Tal configuração, na vizinhança do ponto de equilíbrio, deve manter imutável a topologia do retrato de fases. Conforme destacado, a esta representação, obtida a partir de sucessivas transformações de coordenadas, é dado o nome de forma normal.

“A diferença entre as bifurcações discutidas e a bifurcação de Hopf é que no primeiro caso todos os ramos obtidos representam equilíbrios. Por outro lado, na bifurcação de Hopf o sistema antes representado por um equilíbrio passa a sê-lo por um ciclo-limite onde as oscilações são regulares. Então, a bifurcação de Hopf é um tipo de bifurcação que liga equilíbrio a movimento periódico”. (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 53)

Os autores deixam bem claro na citação acima que diferente das demais bifurcações estudadas na literatura (STROGATZ, 2015; GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983; MONTEIRO, 2011; FIEDLER; PRADO, 2011), uma bifurcação de Hopf descreve a evolução de um foco atrator para ciclo-limite. De tal modo que um sistema antes descrito por um equilíbrio passa a ser por oscilações periódicas. Este último é conhecido como o caso supercrítico da Bifurcação de Hopf. Todavia, esta também pode exibir o caso subcrítico. Ambos os casos serão discutidos em maiores detalhes à seguir.

Todavia, é necessário para o alcance deste objetivo estabelecer quais são condições a serem satisfeitas para que tais sistemas apresentem oscilações periódicas e, portanto, a bifurcação de Hopf. Com base nisso, o presente capítulo dedica-se em introduzir as bifurcações de Hopf, bem como, apresentar os teoremas que fornecem as condições para a existência deste tipo de bifurcação em sistemas dinâmicos de dimensão 2 e dimensão N.

2.1 Teorema da bifurcação de Hopf no \mathbb{R}^2

Seja um sistema dinâmico

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

com parâmetro variável e real μ . Considerando que o sistema seja ainda bem definido, com certa suavidade no campo vetorial não-linear f , com solução única para cada valor inicial $x(t_0) = x_0$ e que detenha um ponto fixo x^* , para cada $\mu \in \mathbb{R}$.

Linearizando o sistema de equações diferenciais em torno de x^* obtêm-se que sua equação linearizada é

$$\dot{x} \approx \mathbf{A}(\mu)(x - x^*),$$

onde a matriz Jacobiana, $\mathbf{A}(\mu)$, possui um par complexo conjugado de autovalores,

$$\lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu).$$

Estes autovalores configuram no retrato de fases um foco estável ou instável, dependendo de $\alpha(\mu)$. Variando-se μ pode-se passar de um foco estável para um foco instável quando μ atinge um valor crítico μ_0 . Se μ for continuamente variado dentro de uma pequena vizinhança próxima de μ_0 e, como consequência, obtêm-se soluções periódicas, então diz-se que o sistema dinâmico exibirá uma bifurcação de Hopf supercrítica (Figura 2). Todavia, a bifurcação é denominada subcrítica (Figura 3), para quando soluções periódicas emergirem de valores de μ menores que μ_0 .

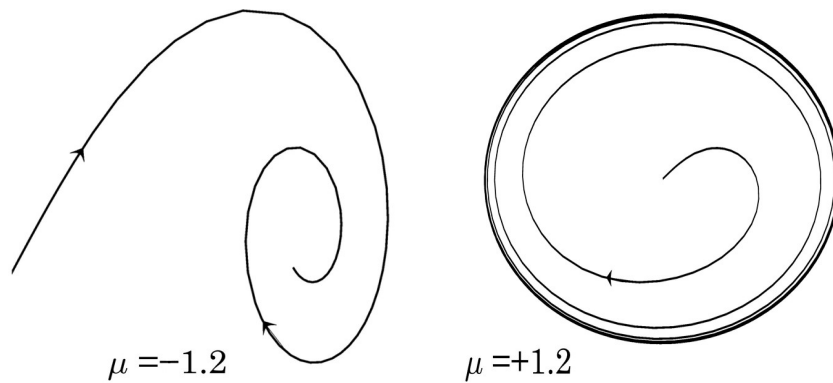


Figura 2 – Quando $\mu < \mu_0$, o ponto fixo é assintoticamente estável (Figura esquerda) e para cada $\mu > \mu_0$, porém na vizinhança deste, existe uma órbita periódica estável (Figura direita) perto do ponto de equilíbrio instável. Para esta configuração, dizemos que o sistema dinâmico exibe uma bifurcação de Hopf do tipo supercrítica.

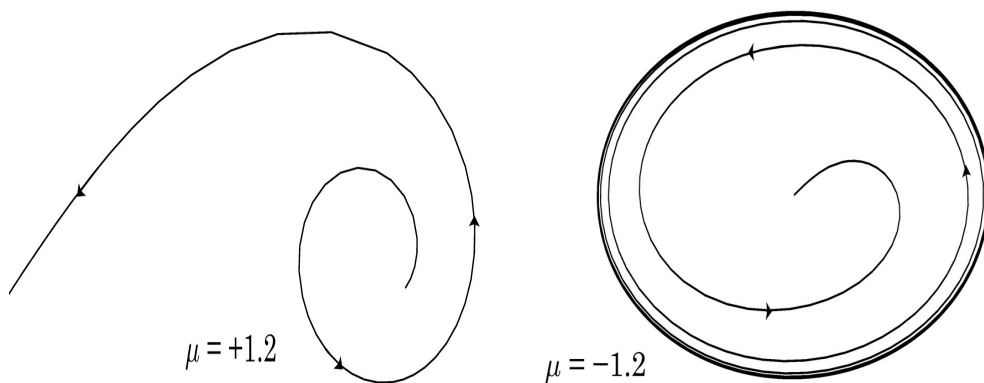


Figura 3 – Quando $\mu > \mu_0$, o ponto fixo é instável (Figura esquerda) e para cada $\mu < \mu_0$, porém na vizinhança deste, existe uma órbita periódica (Figura direita) instável perto do ponto de equilíbrio estável. Nesta configuração, o sistema exibe uma bifurcação de Hopf do tipo subcrítica.

Por exemplo, considere novamente o sistema dinâmico envolvendo reações químicas oscilantes, onde o parâmetro de controle é a concentração dos reagentes envolvidos na reação. Conforme ocorre consumo dos reagentes envolvidos no processo químico, portanto mudança do parâmetro de controle, o comportamento do sistema dinâmico muda de tal maneira a exibir um comportamento periódico no que compete à mudança na concentração dos reagentes. Neste caso particular, o sistema dinâmico exibe uma bifurcação de Hopf supercrítica.

No estudo da dinâmica não-linear, é necessário determinar para que ou quais valores de μ_0 um ramo de soluções periódicas existe. Assim, a principal diferença entre a bifurcação de Hopf e as demais bifurcações estudadas na literatura (GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983; STROGATZ, 2015; FIEDLER; PRADO, 2011) é que um sistema dinâmico antes descrito por um equilíbrio passa a ser descrito por um ciclo limite. Esta é, de fato, a grande contribuição de Hopf em seu teorema fundamental de bifurcação.

Mediante ao que foi exposto acima, enuncia-se a seguir o teorema² de Andronov³ no \mathbb{R}^2 . Uma prova detalhada deste teorema pode ser encontrada em (ANDRONOV; VITT; KHAIKIN, 1996; MARSDEN; MCCRACKEN, 1976; RUELLE; TAKENS, 1971).

Teorema 1. Seja x_μ um campo vetorial no \mathbb{R}^2 de classe C^K ($K \geq 4$) tal que $x_\mu(x^*) = 0$ para todo μ com $x = (x_\mu, x^*)$ também de classe C^K . Seja $\mathbf{A} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x^*}$ a matriz Jacobiana com dois autovalores complexos conjugados distintos $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$. Se

(i) $\alpha(\mu_0) = 0, \beta(\mu_0) \neq 0$ (Condição de Não-hiperbolicidade);

(ii) $\left. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} \neq 0$

(Condição de transversalidade);

Então,

(A) $\mu = \mu_0$ é o ponto de bifurcação;

(B) Quando $\mu > \mu_0$ existe um ciclo-limite em torno de x^* de período $T \simeq \frac{2\pi}{|\beta(\mu_0)|}$ e amplitude $\sqrt{|\mu - \mu_0|}$.

(C) Para valores próximos o suficiente de μ , menores que μ_0 , x^* é assintoticamente estável.

(D) Para valores próximos o suficiente de μ , maiores que μ_0 , x^* é instável.

² Este teorema também é conhecido como teorema da bifurcação de Hopf para sistemas bidimensionais (MARSDEN; MCCRACKEN, 1976, p. 65)

³ A versão do teorema apresentado segue a notação original do trabalho dos principais autores (ANDRONOV; VITT; KHAIKIN, 1996; MARSDEN; MCCRACKEN, 1976; RUELLE; TAKENS, 1971).

Em outras palavras, o teorema 1 estabelece as condições para que um sistema bidimensional genérico, de autovalores imaginários, tenha soluções periódicas conforme a variação do parâmetro de controle μ , na vizinhança de μ_0 . Em outras palavras, este teorema estabelece as condições para que um sistema bidimensional apresente uma bifurcação de Hopf. A condição de não-hiperbolicidade conduz a obtenção de autovalores imaginários puros, quando o sistema é avaliado em μ_0 . Nesta configuração, μ_0 torna-se o ponto de bifurcação, isto é, o ponto que caracteriza o nascimento de soluções periódicas ou do ciclo-limite. A condição de transversalidade determina que os autovalores cruzam o eixo imaginário com velocidade distinta de zero.

Exemplo 1. Prove que o sistema dinâmico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu x_1 - x_2 + x_1 x_2 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \mu x_2 + x_1 x_2\end{aligned}$$

satisfaz as condições do teorema de Andronov em $\mu = 0$.

Resolução. O sistema dinâmico exibe como ponto fixo $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$. Os autovalores associados a este último são $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$. Desta maneira, como $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) \neq 0$ e $\left. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=0} = 1 \neq 0$. Decorre dos fatos acima que o sistema dinâmico satisfaz, portanto, as condições do teorema de Andronov.

O teorema 1, embora erroneamente atribuído a Eberhard Hopf, se deu a partir dos estudos desenvolvidos por Andronov e seus colaboradores por volta de 1930 (ANDRONOV; VITT; KHAIKIN, 1996; MARSDEN; MCCRACKEN, 1976).

O teorema 1 estabelece as condições de ocorrência da bifurcação de Hopf para qualquer sistema dinâmico de dimensão 2. Apesar de relevante, o teorema não é tão abrangente, uma vez que é grande a vastidão de sistemas N-dimensionais. Deste modo, uma generalização se faz necessária. Portanto, a seguir apresentamos o teorema de Eberhard Hopf para o caso N dimensional.

2.2 Teorema da bifurcação de Hopf no \mathbb{R}^n

Consideraremos agora a generalização do teorema 1 para caso N-dimensional.

Teorema 2. Considere o sistema de equações diferenciais:

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

onde μ pertence a um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com a Equação 2.1 possuindo uma dada família de soluções de equilíbrio $(x(\mu), \mu)$, $\mu \in I$. Através de uma mudança de variáveis, pode-se assumir, sem perda de generalidade, que $x(\mu) \equiv 0$ e $0 \in I$. Seja

$$\mathbf{A}(\mu) = D_x f_\mu(0),$$

a matriz Jacobiana avaliada em $(0, \mu)$. Suponha que

(H_1) \mathbf{A} tem um par de autovalores complexos conjugados $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ com $\alpha(\mu_0) = 0, \beta(\mu_0) \neq 0$ e $\left. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} \neq 0$.

Assuma ainda que

(H_2) $\mathbf{A}(\mu_0)$ tem um par de autovalores imaginários puros $\pm i\beta(\mu_0)$, sendo estes os únicos autovalores de $\mathbf{A}(\mu_0)$ no eixo imaginário, de tal modo que os demais outros autovalores não têm parte real nula.

Sob as suposições (H_1) e (H_2) , o sistema dinâmico admite existência de uma família de soluções periódicas, emergindo da solução de equilíbrio $(0, \mu_0)$ com período $T \simeq \frac{2\pi}{|\beta(\mu_0)|}$.

A prova detalhada do teorema 2 pode ser encontrada em (HOPF, 1942; HOPF; MORAWETZ; SERRIN, 2002, pp. 90-115).

Segundo Marsden e McCracken (1976), o teorema de Eberhard Hopf pode ainda ser enunciado da forma como segue.

Teorema 3. Seja \mathbf{x}_μ um campo vetorial no \mathbb{R}^n de classe C^K ($K \geq 4$). Se as suposições (i) e (ii) do teorema 1 são satisfeitas com a única exceção de que o restante do espectro de autovalores associados a matriz Jacobiana seja real, não-nulo e distinto dos dois autovalores $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$. Então, as conclusões de (A) a (D) são verdadeiras.

A prova detalhada do teorema 3 pode ser encontrada em (MARSDEN; MCCRACKEN, 1976, pp. 163-194).

Os teoremas da bifurcação de Hopf no \mathbb{R}^n têm formulações correlatas e, ao mesmo tempo, complementares no que compete às suposições do qual assume-se sistemas dinâmicos diversos satisfazer. As formulações tornam-se correlatas pois, em ambas, ao analisar as condições (H_1) e (i) pode-se concluir que para a classe de sistemas dinâmicos no \mathbb{R}^n poder exibir soluções periódicas, conforme ocorre mudança no parâmetro de controle, ainda é necessário ter dois autovalores complexos conjugados e um par de autovalores imaginários puros, quando avalia-se a correspondente parte real dos autovalores $\alpha(\mu)$ no parâmetro de controle crítico μ_0 . Esta trata-se de uma característica da bifurcação de Hopf. Isso porque, conforme (FIEDLER; PRADO, 2011; MONTEIRO, 2011; GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983), em μ_0 ocorre uma troca de estabilidade, passando-se da configuração de equilíbrio estável para ciclo-limite estável. De outro modo, diz-se que o sistema antes descrito por um equilíbrio passa a sê-lo por oscilações periódicas.

Além disso, as formulações são complementares, pois ambas relevam uma exceção quanto ao restante de autovalores associados a matriz Jacobiana. Ao analisar as condições (H_2)

e (ii), o teorema da bifurcação de Hopf estabelece que o restante do espectro de autovalores associados a matriz Jacobiana do sistema deve ser distinto dos dois autovalores $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ e, portanto, que estes últimos sejam os únicos autovalores no eixo imaginário, quando a matriz Jacobiana é avaliada no parâmetro de controle μ_0 .

Deste modo, ao assumir como conjectura que um sistema dinâmico no \mathbb{R}^n satisfaz as condições de ocorrência dos teoremas 2 e 3, diz-se que o sistema dinâmico N-dimensional deve exibir pelo menos dois autovalores complexos conjugados e que, à rigor, estes devem ser únicos, no sentido de que o restante dos autovalores ou o espectro remanescente de autovalores associados a matriz Jacobiana seja, portanto, real, não-nulo e distinto de $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$.

TEOREMA DA VARIEDADE CENTRAL

Nos capítulos anteriores, o conceito de bifurcações foi estabelecido e exemplificado. Conforme discutido, em sistemas dinâmicos dependentes de parâmetros de controle, e à rigor descrevendo sistemas físicos, se uma mudança no parâmetro ou do conjunto de parâmetro de controle conduzir à mudanças qualitativas em seu comportamento, diz que o sistema dinâmico sofreu uma bifurcação. A análise de sistemas dinâmicos, por outro lado, pode mostrar-se uma tarefa dispendiosa dependendo da dimensão que exibem. Neste cenário, torna-se indispensável o uso de técnicas que permitem analisar uma versão reduzida destes sistemas, sem que haja perda de propriedades ou de informações da configuração original.

Segundo [Guckenheimer e Holmes \(1983\)](#), o teorema da variedade central trata-se de uma ferramenta imprescindível para o estudo de bifurcações em sistemas dinâmicos diversos, uma vez que fornece os meios necessários para reduzir sistematicamente a dimensão de um sistema do qual se tem interesse em analisar bifurcações de um dado tipo.

Em outras palavras, o teorema da variedade central envolve uma rigorosa técnica matemática que possibilita com que seja reduzido a dimensão de um determinado sistema a sua variedade central, de tal maneira que esta última e a versões original sejam topologicamente orbitalmente equivalentes na vizinhança do ponto de equilíbrio.

Para um melhor tratamento do objetivo geral do presente trabalho e melhor apreciação deste capítulo, se faz necessário antes estabelecer alguns conceitos e definições importantes para a compreensão do teorema da variedade central. Deste modo, os conceitos de variedade e variedade invariante são introduzidos. Em seguida o teorema da variedade central é estabelecido e um exemplo de aplicação apresentado.

3.1 Variedades e teorema da variedade central

Neste trabalho entende-se por Variedade¹ como um subconjunto de pontos no espaço de fases de tal modo que este subconjunto é representado univocamente por k parâmetros reais, tal que mudanças destes parâmetros conduzem a deslocamentos infinitesimais sobre a variedade. Se existe no espaço de fases uma dada variedade M K -dimensional para o qual o sistema, a partir de uma condição inicial pertencente a M , permaneça em M para todo instante de tempo t , então esta variedade é denominada invariante (SPIVAK, 1965; TU, 2011). De outro modo, se existe uma determinada superfície no espaço de estados na qual as órbitas, periódicas ou não, que ali se iniciam e lá permanecem, conforme a evolução do sistema no tempo, então tal superfície no espaço de estados é denominada uma variedade invariante.

Em outras palavras, no contexto da dinâmica não linear, variedades podem ser entendidas como superfícies no espaço de fases de sistemas dinâmicos. Se estas superfícies apresentam como propriedade o fato de que as órbitas que ali se iniciam ali permanecem, então tal variedade é dita invariante.

Seja

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

A linearização próximo ao ponto de equilíbrio x^* é

$$\dot{\tilde{x}}_i = A_{ij}\tilde{x}_j = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x_i=x_i^*} \tilde{x}_j, \quad (3.2)$$

com $\tilde{x} = x - x^*$ e A_{ij} o elemento da matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio. Desta maneira,

$$\dot{\tilde{x}} = \mathbf{A}\tilde{x}(t), \quad (3.3)$$

admite como solução geral

$$\tilde{x}(t) = \exp(t\mathbf{A})\tilde{x}(0). \quad (3.4)$$

O termo $\exp(t\mathbf{A})$ trata-se de um operador de evolução temporal. Em termos de série de potências,

$$\exp(t\mathbf{A}) = I + t\mathbf{A} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{A}^2 + \frac{1}{6}t^3\mathbf{A}^3 + \dots \quad (3.5)$$

Admitindo como suposição de que \mathbf{A} seja diagonalizável² pode-se escrever

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad (3.6)$$

com $\boldsymbol{\varepsilon}_i \in \mathbb{R}^n$ os autovalores de \mathbf{A} associados aos respectivos autovalores λ_i , ou seja,

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i = \lambda_i \boldsymbol{\varepsilon}_i. \quad (3.7)$$

¹ Do inglês, *Manifolds*.

² Destaca-se que a presente suposição pode ocorrer para operadores unitários e adjuntos conforme o teorema espectral de Von-Neumann (FIEDLER; PRADO, 2011).

Na [Equação 3.6](#) as n constantes c_i são determinadas pelas condições iniciais.

Segundo [Fiedler e Prado \(2011\)](#) e [Callioli, Domingues e Costa \(1987\)](#), $\exp(t\mathbf{A}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ pode ser interpretada como o conjunto de todas as possíveis soluções da [Equação 3.1](#). Nesse conjunto, determinadas soluções encontram-se nos subespaços lineares gerados pelos autovalores ([FIEDLER; PRADO, 2011](#), p. 35). Estes subespaços são ditos invariantes³ sob o fluxo $\exp(t\mathbf{A})$. Deste modo, sendo ν^j um autovalor real de J e de $\exp(t\mathbf{A})$, então uma solução em um ponto $c_j\nu^j \in \mathbb{R}^n$ permanecerá o tempo todo no subespaço gerado por ν_j . De outro modo, pode-se estabelecer que os auto-espaços de \mathbf{A} são subespaços invariantes do fluxo.

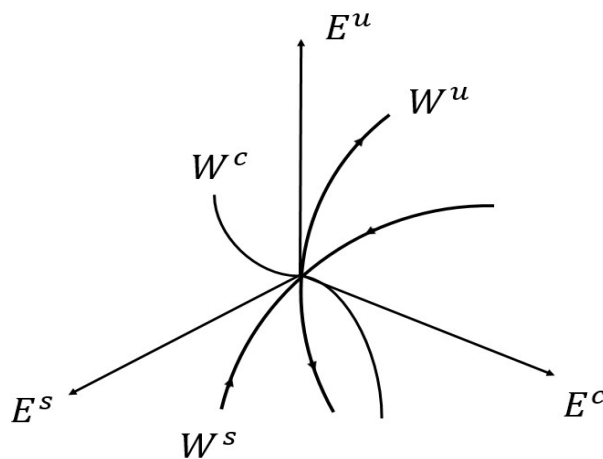


Figura 4 – Variedades instável (W^u), estável (W^s) e central (W^c).

Existem 3 possíveis subespaços gerados pelos autovetores: (i) E^s (Subespaço estável): gerado pelos autovetores cujos autovalores têm parte real negativa; (ii) E^u (Subespaço instável): gerado pelos autovetores cujos autovalores têm parte real positiva; (iii) E^c (Subespaço central): gerado pelos autovetores cujos autovalores têm parte real nula. Com base nisso, enuncia-se o teorema da variedade central.

Teorema 4 (Teorema da variedade central). Seja f um campo vetorial C^r no \mathbb{R}^n , nulo na origem e seja $\mathbf{A} = Df(0)$, $D = \partial/\partial x$. Divida-se o espectro de \mathbf{A} em três partes, $\sigma_s, \sigma_c, \sigma_u$ com

$$Re(\lambda) \begin{cases} < 0 & \text{se } \lambda \in \sigma_s, \\ = 0 & \text{se } \lambda \in \sigma_c, \\ > 0 & \text{se } \lambda \in \sigma_u. \end{cases}$$

Considere o espaço gerado pelos autovetores de σ_s , σ_c e σ_u como E^s , E^c e E^u , respectivamente. Então, existem variedades estáveis e instáveis W^s , W^u de classe C^r tangentes às variedades E^s e E^u em 0, e uma variedade central W^c , invariante local, tangente ao subespaço E^c em x^* e de classe C^{r-1} ([Figura 4](#)). As variedades W^u , W^c e W^s são invariantes ao fluxo de f . As variedades W^u e W^s são únicas, mas W^c não precisa ser.

³ Considere um conjunto $S \in \mathbb{R}^n$. S é dito invariante sob o campo vetorial $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ se para qualquer $x_0 \in S$ tem-se $x(x_0, t) \in S \forall t \in \mathbb{R}$.

Para a prova detalhada deste teorema 4 (MARSDEN; MCCracken, 1976, pp. 27–50).

Uma vez apresentado os conceitos de variedade e tendo enunciado o teorema da variedade central, discute-se a seguir um exemplo de aplicação.

Exemplo 2. Determine as variedades do sistema

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad (3.8)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2. \quad (3.9)$$

Resolução. O presente sistema dinâmico apresenta como ponto de equilíbrio $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$. Deste modo, o cálculo da matriz Jacobiana conduz a dois autovalores, a saber $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Então, decorre do teorema da variedade central, que o sistema dinâmico caracteriza-se por exibir as sub-variedades estável e instável, σ^s e σ^u , respectivamente. Para determinar as variedades associadas, é necessário antes resolver o sistema de equações diferenciais. Assim, obtém-se:

$$x_2 = \frac{x_1^2}{3} + \frac{\mathbb{C}}{x_1} \quad (3.10)$$

onde \mathbb{C} é constante de integração. A variedade estável coincide com E^s , pois para $\mathbb{C} = 0$ e $x_1 = 0$, a solução permanece no eixo x_2 . Portanto, a variedade estável é expressa como

$$W^s = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}.$$

A variedade instável é tangente ao subespaço E^u , isto é, $x_2 = 0$ e $\frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{x_1^*=0} = 0$, quando $\mathbb{C} = 0$.

Portanto, a variedade instável é expressa como

$$W^s = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \frac{x_1^3}{3} \right\}.$$

O teorema da variedade central mostra-se como uma técnica magistral e robusta para a análise de sistemas dinâmicos de dimensão N , uma vez que fornece os meios com que se permita a redução da dimensão de um sistema a uma dimensão finita, sem perder ou alterar qualquer informação no que compete a estabilidade do sistema dinâmico, preservando, portanto, a topologia do espaço de fases.

FORMAS NORMAIS

No capítulo anterior, discorreu-se sobre o conceito de variedades, apresentando-se, por fim, o teorema da variedade central para fluxos. Conforme destacado, este teorema torna-se essencial para o estudo de sistemas dinâmicos, uma vez que permite a redução da dimensão destes a uma dimensão finita, não havendo perda de informação e ou propriedades do espaço de fases, pelo menos na vizinhança do ponto de equilíbrio. Todavia, na análise de sistemas dinâmicos reduzidos a sua variedade central, pode ser ainda que as expressões resultantes apresentem termos acoplados e de ordem superior. Assim, é necessário uma teoria que permita simplificar a redução obtida para o sistema dinâmico de tal modo a ainda manter imutável a topologia do espaço de fases do sistema original.

Uma das abordagens mais eficientes para análise de sistemas dinâmicos neste cenário se trata da teoria da forma normal. Para [Guckenheimer e Holmes \(1983\)](#), um determinado sistema dinâmico complexo descrito por equações diferenciais pode ser simplificado, através de sucessivas transformações de coordenadas, em uma expressão analítica que preserva a topologia do espaço de fases do sistema original, na vizinhança do ponto de equilíbrio. Esta abordagem para formas normais baseia-se no método de Takens-Ushiki ([USHIKI, 1984](#); [CHUA; KOKUBU, 1988](#); [CHUA; KOKUBU, 1989](#)).

Desse modo, de posse de um determinado sistema dinâmico, reduzido ou não a sua variedade central, cujo objetivo se resume em investigar um possível tipo de bifurcação que o mesmo possa vir a apresentar e que é dificultado devido à configuração com a qual o sistema encontra-se escrito, é possível, mediante ao formalismo das formas normais, transformá-lo em uma forma simplificada sem perder as características, bem como, as propriedades do sistema dinâmico original.

“Suponha que se queira encontrar transformações de coordenadas adicionais, $\vec{y} \rightarrow \vec{x}$, que simplifiquem ao máximo a expressão analítica da parte não-linear do campo vetorial estudado, de modo que as novas expressões (mais simples) contenham toda a informação que é necessária

para se reproduzir o retrato de fases gerado pelas equações originais, na vizinhança do ponto de equilíbrio \bar{z} . Esses campos vetoriais simplificados, escritos na forma de polinômios, são chamados de formas normais” (MONTEIRO, 2011, p. 222).

Em outras palavras, o autor da citação deixa claro que a expressão analiticamente mais simples que uma equação diferencial pode ser escrita, via transformações de coordenadas, de tal maneira a manter a topologia do espaço de fases do sistema original imutável é sua forma normal.

À vista disso, o presente capítulo é dedicado integralmente em apresentar o formalismo de formas normais para sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais. Em seguida, um exemplo de aplicação é enunciado e conclusões sobre o método obtidas.

4.1 Teorema de formas normais

Seja um sistema dinâmico

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^n J_{ji}y_i + g_j(y_1, \dots, y_n) \text{ para } j = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

com J_{ji} elementos da matriz de Jordan. Como suposição, assume-se que as funções g_j são nulas ou descritas pela soma de monômios de grau k . A origem será o único ponto de equilíbrio hiperbólico do sistema se $J_{jj} \neq 0$ para $j = 1, \dots, n$.

A abordagem clássica para a construção de formas normais de um sistema dinâmico não-linear envolve a construção de uma sequência de transformações de coordenadas que torna o sistema original o mais simples possível. Para o sistema descrito pela [Equação 4.1](#) considere uma mudança de coordenadas da forma

$$y_j = x_j + h_j(x_1, \dots, x_n), \quad (4.2)$$

com h_j monômios a determinar.

Tendo em vista que a mudança de coordenadas deve, em princípio, simplificar o sistema, então espera-se que seja possível escrevê-lo como

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=1}^n J_{ji}x_i \text{ para } j = 1, \dots, n. \quad (4.3)$$

Com o objetivo de determinar h_j que simplifique a [Equação 4.1](#), obtemos a derivada da [Equação 4.2](#) que conduz a

$$\frac{dy_j}{dt} = \frac{dx_j}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}. \quad (4.4)$$

Deste modo, a partir da [Equação 4.3](#)

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{dy_j}{dt} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n J_{ji} x_i. \quad (4.5)$$

Substituindo as Equações 4.2, 4.4 na [Equação 4.5](#) obtêm-se

$$g_j(y_1, \dots, y_n) = - \sum_{i=1}^n J_{ji} h_j(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt},$$

portanto

$$g_j(y_1, \dots, y_n) = - \sum_{i=1}^n J_{ji} h_j(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \left(\sum_{l=1}^n J_{il} x_l \right). \quad (4.6)$$

Expressa-se como L_J o operador linear que age sobre $\vec{h} = h_j(x_1, \dots, x_n)$ conforme a [Equação 4.6](#). A equação associada ao operador linear é

$$L_J(\vec{h}) = \vec{g}, \quad (4.7)$$

com $\vec{g} = g_j(y_1, \dots, y_n)$.

A [Equação 4.6](#) só tem solução se h_j e g_j forem monômios de mesmo grau. Por isso, a função h_j deve ser formada pela combinação linear de monômios $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, com $\sum_i^n k_i = k$. No caso em que o ponto de equilíbrio tem autovalores λ_j distintos, então $J_{jj} = \lambda_j$ e $J_{ji} = 0$ para $j \neq i$. Neste caso, o segundo termo do lado direito da [Equação 4.6](#) será $\sum_i k_i \lambda_i h_j$ e o primeiro termo $\lambda_j h_j$. Portanto, da [Equação 4.6](#) determina-se

$$\left(\sum_i^n k_i \lambda_i - \lambda_j \right) h_j = g_j. \quad (4.8)$$

A partir da [Equação 4.8](#) encontram-se as funções h_j que linearizam o sistema descrito pela [Equação 4.1](#), desde que nenhuma das quantidades $\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i - \lambda_j$ se anule.

O principal teorema que resume estes resultados é

Teorema 5. Considere $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ como sendo um sistema de equações diferenciais de classe C^r com $\mathbf{f}(0) = 0$ e $D\mathbf{f}(0)\mathbf{x} = J$. Escolha um espaço complementar $G^{(k)}$ para $L_J(H^{(k)})$ em $(H^{(k)})$ tal que

$$L_J(H^{(k)}) \oplus G^{(k)} = H^{(k)}. \quad (4.9)$$

Então, existe uma mudança analítica de coordenadas na vizinhança próxima da origem na qual pode-se transformar o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ em $\dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{y}) = g^{(1)}(\mathbf{y}) + g^{(2)}(\mathbf{y}) + \dots + g^{(r)}(\mathbf{y}) + R_r$ com $J(\mathbf{y}) = g^{(1)}(\mathbf{y})$ e $R_r = O(|\mathbf{y}|^r)$ para $2 \leq k \leq r$.

Um prova detalhada deste teorema pode ser encontrada em ([GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983](#); [MARSDEN; MCCracken, 1976](#)).

4.2 Um exemplo do cálculo de formas normais

Nesta seção, ilustramos o cálculo de formas normais para um sistema dinâmico com autovalores nulos. O procedimento para obtenção das formas normais consiste em realizar sucessivas transformações de coordenadas de tal modo que o sistema dinâmico possa ser escrito em termos de uma configuração simplificada e que preserve a topologia do espaço de fases (MONTEIRO, 2011). O procedimento usual para a determinação de formas normais pode ser expresso em três etapas:

- As funções h_j são expressas em termos de monômios de grau k . Por conveniência, denotaremos tais funções como $h_j^{(k)}$. O conjunto de monômios $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ será usado para construir o espaço vetorial $H^{(k)}$.
- A equação $L_J(\vec{h}^{(k)}) = \vec{g}^{(k)}$ ou $\vec{h}^{(k)} = L_J^{-1}(\vec{g}^{(k)})$ permite a remoção de termos não-lineares que não contribuem para a forma normal. $L_J(\vec{h}^{(k)})$ trata-se da representação matricial da ação do operador linear L_J sobre $\vec{h}^{(k)}$. Se o determinante de $L_J(\vec{h}^{(k)})$ é nulo, então a matriz de $L_J(\vec{h}^{(k)})$ não admite inversa. Deste modo, estes termos não-lineares da ordem k considerada são denominados de *ressonantes*¹. Portanto, tais termos compõem a forma normal, dado que não são eliminados após a sequência de transformações de coordenadas. Por outro lado, quando a matriz de $L_J(\vec{h}^{(k)})$ admite inversa, isto é, possui determinante não nulo, então os termos não-lineares respectivos a ordem k considerada são denominados de *não-ressonantes*. Estes não compõem a forma normal, uma vez que, após sucessivas transformações de coordenadas, são eliminados da expressão da forma normal.
- Através de uma sequência de transformações de coordenadas, re-escreve-se a Equação 4.1 na forma normal do sistema conforme o teorema 5.

Exemplo 3. Escreva a forma normal de um campo bidimensional, na vizinhança de um ponto de equilíbrio que tem (dois) autovalores nulos.

Resolução: De acordo com este exemplo, o sistema dinâmico possui dois autovalores nulos. Desta maneira, sua matriz de Jordan é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para o caso bidimensional, a base de $H^{(2)}$ será dada pelos seguintes monômios:

$$\begin{bmatrix} (x_1)^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (x_2)^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ (x_1)^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ (x_2)^2 \end{bmatrix}.$$

¹ O conceito de ressonância, no contexto das formas normais, relaciona-se com a resistência que termos de ordem superior têm em serem eliminados quando sucessivas transformações de coordenadas são estabelecidas para simplificar o sistema (GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983; MONTEIRO, 2011).

Estes vetores são representados respectivamente por $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_6$. Para este caso, as funções $\vec{g}^{(2)}$ e $\vec{h}^{(2)}$ são elementos do espaço $H^{(2)}$, uma vez que estas funções são formadas pela combinação linear dos vetores \vec{m}_j ($j = 1, \dots, 6$). Contudo, para a forma normal é necessário encontrar a função \vec{h} que relacione as antigas coordenadas de \vec{y} com as novas coordenadas de \vec{x} . Como discutido acima, essa função \vec{h} deve ser formada pela combinação linear dos monômios \vec{m}_j . Dessa forma teremos que:

$$\vec{h} = \sum_{j=1}^6 \alpha_j \vec{m}_j,$$

$$\vec{g} = \sum_{j=1}^6 \beta_j \vec{m}_j,$$

com α_j e β_j constantes não-nulas.

Para determinar quais funções de \vec{h} podem ser construídas, satisfeitas as condições, com o objetivo principal de eliminar possíveis termos não-lineares, a partir de transformações de coordenadas, é necessário antes avaliar

$$L_J(\vec{m}_j) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \vec{m}_j}{\partial x_i} \sum_{l=1}^2 J_{il} x_l - J \vec{m}_j \text{ para } j = 1, \dots, 6.$$

Por exemplo, para \vec{m}_1 , obtém-se

$$L_J(\vec{m}_1) = L_J \begin{bmatrix} (x_1)^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 0 \end{bmatrix} (J_{11}x_1 + J_{12}x_2) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (J_{21}x_1 + J_{22}x_2) - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1)^2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que resulta em

$$L_J(\vec{m}_1) = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Todavia, este é o procedimento apenas para o primeiro \vec{m}_1 . Portanto, é necessário repetir estas operações para o número de monômios associados à ordem considerada da forma normal. Assim,

$$L_J(\vec{m}_1) = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad L_J(\vec{m}_2) = \begin{bmatrix} (x_2)^2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$L_J(\vec{m}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad L_J(\vec{m}_4) = \begin{bmatrix} -(x_1)^2 \\ 2x_1 x_2 \end{bmatrix};$$

$$L_J(\vec{m}_5) = \begin{bmatrix} -x_1 x_2 \\ (x_2)^2 \end{bmatrix}; \quad L_J(\vec{m}_6) = \begin{bmatrix} -(x_2)^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note que estes termos podem ainda ser expressos em termos dos próprios monômios \vec{m}_j . Desta maneira, obtêm-se

$$L_J(\vec{m}_1) = 2\vec{m}_2; \quad L_J(\vec{m}_2) = \vec{m}_3;$$

$$L_J(\vec{m}_3) = 0; \quad L_J(\vec{m}_4) = -\vec{m}_1 + 2\vec{m}_5;$$

$$L_J(\vec{m}_5) = -\vec{m}_2 + \vec{m}_6; \quad L_J(\vec{m}_6) = -\vec{m}_3.$$

O sub-espço formado por estes vetores é chamado de $L_J(H^{(2)})$ e sua forma matricial é

$$L_J(H^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Em particular, a configuração matricial de $L_J(H^{(2)})$ permite a escrevermos na seguinte configuração²

$$L_J(H^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os termos de segunda ordem de \vec{g} , que são combinações lineares destes vetores, podem ser desprezados. Contudo, os termos de segunda ordem que pertencem ao espaço complementar de $L_J(H^{(2)})$ não podem ser eliminados por transformações de coordenadas. Uma vez que o determinante de $L_J(H^{(2)})$ é nulo. Conforme o teorema 5

$$L_J(H^{(2)}) \oplus G^{(2)} = H^{(2)}. \quad (4.10)$$

A Equação 4.10 permite concluir que o sub-espço complementar de $G^{(2)}$ deve ter dimensão 2, posto que a base de $H^{(2)}$ tem dimensão 6 e a base de $L_J(H^{(2)})$ tem dimensão 4. Em

² Nesta configuração, realizou-se a operação entre as colunas da matriz $L_J(H^{(2)})$ de tal maneira que a coluna 2 foi substituída pela coluna 2, C_2 , somada a coluna C_6 , ou seja, $C_2 \rightarrow C_2 + C_6$. Note que esta operação não altera o determinante, dado que se uma matriz possui uma linha ou uma coluna constituída de zeros, então seu determinante é, invariavelmente, zero.

outras palavras, o sub-espaço complementar necessário para a construção da forma normal do sistema dinâmico com dois autovalores nulos deve ser formado por dois vetores \vec{v} linearmente independentes, ortogonais entre si e a cada coluna da matriz de $L_J(H^{(2)})$.

Assim, estes vetores devem satisfazer a relação:

$$(\vec{v}^\top)L_J(H^{(2)}) = 0, \quad (4.11)$$

em que \top representa a operação de transposição.

Para este exemplo, dois possíveis vetores que satisfazem tais condições são

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Contudo, na base de $(H^{(2)})$, estes vetores correspondem a

$$\begin{bmatrix} -(x_1)^2 \\ -x_1x_2/2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ (x_1)^2 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, todos os campos vetoriais, cuja parte linear é dada pela matriz de Jordan, podem ser transformados, levando em conta apenas termos de ordem 2, na forma normal:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + a(x_1)^2 + \mathcal{O}(3), \\ \dot{x}_2 &= \frac{a}{2}x_1x_2 + b(x_1)^2 + \mathcal{O}(3), \end{cases} \quad (4.12)$$

com a e b constantes.

O método das formas normais, enunciado pelo teorema 5 e exemplificado para um sistema com autovalores nulos, envolve uma abordagem no qual é possível re-escrever equações diferenciais, a partir apenas de sucessivas transformações de coordenadas, em uma forma simplificada que mantém a topologia do espaço de fases imutável. Este método mostra-se como fundamental para a análise de sistemas dinâmicos, reduzidos ou não à variedade central. Todavia, esta abordagem também é, em alguns casos, desvantajosa.

De modo geral, o estudo de sistemas dinâmicos não-lineares nem sempre envolve matrizes de ordem 2, tão pouco matrizes cujas entradas ou elementos que em sua maioria são nulos. Para estes casos, as operações algébricas associadas à construção dos sub-espaços complementares $L_J(H^{(2)})$ e $G^{(2)}$ são difíceis de serem realizadas sem cometer quaisquer equívocos. A razão para isto está na necessidade de encontrarmos g_j de ordem $k \geq 2$. De acordo com o teorema 5, a ordem 1 corresponde a própria forma canônica de Jordan associada ao sistema dinâmico, os termos de ordem 2, por outro lado, nem sempre são suficientes para a construção da forma normal, além de poderem ser não-ressonantes. Além disso, convém lembrar do exemplo discutido que para a forma normal (Equação 4.12) obtida para a matriz J podem haver inúmeras formas normais equivalentes. Isto acontece pela simples razão de que a escolha dos vetores que formam a base de $L_J(H^{(2)})$ não é única. Consequentemente, a base de $G^{(2)}$ também não será única. Assim, é possível notar que embora seja uma técnica poderosa, esta detém limitações.

UMA NOVA ABORDAGEM

Nos capítulos anteriores, os métodos elementares para o estudo de bifurcações foram apresentados. O teorema da variedade central permite a redução na dimensão de um sistema em uma determinada variedade de dimensão finita, de tal maneira que as versões linear e não-linear são topologicamente orbitalmente equivalentes. O teorema das formas normais, por outro lado, permite escrever a forma analítica do sistema dinâmico, reduzido ou não a sua variedade central, em uma configuração mais simples e que mantém a topologia do espaço de fases. Ambos os métodos são considerados em uma determinada vizinhança do ponto de equilíbrio. A combinação destes teoremas configura um repertório de técnicas rigorosas e robustas para a análise local de bifurcações em sistemas dinâmicos.

Contudo, ambos os métodos possuem limitações. No capítulo 3 vimos que um determinado sistema, na vizinhança de um ponto de equilíbrio, pode exibir uma variedade central não única, quando a parte real correspondente aos autovalores é nula. No capítulo 4, vimos que a forma normal, embora seja uma técnica eficiente, envolve operações matriciais difíceis de serem conduzidas sem cometer equívocos, a razão para isto está na determinação, primeiro, do espaço complementar $L_J(H^{(k)})$ e, em seguida, do espaço sub-complementar necessário para a construção da forma normal $G^{(k)}$. Estes sub-espços complementares dependem diretamente da dimensão do sistema, bem como, do tipo de sistema, assim termos da forma normal de ordem superior a 2 tornam-se uma obrigatoriedade, posto que termos associados à ordem 2 ou não são suficientes ou não contribuem para a forma normal por serem do tipo não-ressonantes.

No cenário correspondente à classe constituída de sistemas dinâmicos sujeitos à bifurcação de Hopf, torna-se necessário a obtenção de um resultado matemático que permita o conhecimento da forma normal de sistemas tanto bidimensionais quanto N dimensionais, porém, sem que seja necessário passar por ambos os métodos discutidos nos capítulos anteriores. Em outras palavras, se faz necessário uma prova matemática de que sistemas pertencentes a uma determinada classe, no qual as condições de ocorrência da bifurcação de Hopf são satisfeitas, têm uma forma normal comum e geral.

Em linhas gerais na matemática, o conceito de prova ou demonstração matemática envolve o estabelecimento de axiomas que, através da argumentação lógica, passo a passo, chega-se a uma determinada conclusão. Os teoremas fazem uso deste procedimento, e uma vez demonstrados, estes tornam-se verdades até o fim dos tempos. Segundo Russel,

“A Matemática é uma ciência dedutiva: partindo de certas premissas, chega, por um estrito processo de dedução, aos vários teoremas que a constituem. É verdade que, no passado, as deduções matemáticas eram com frequência muito destituídas de rigor; é também verdade que o rigor é um ideal dificilmente alcançável. Não obstante, se faltar rigor em uma prova matemática, ela será, sob esse aspecto, defeituosa; não constitui defesa a alegação de que o senso comum mostra ser o resultado correto, porquanto, se tivéssemos de confiar nisso, melhor seria abandonar completamente o argumento do que trazer a falácia em socorro do senso comum”. (RUSSEL, 2006, p. 199)

Em outras palavras, o autor evidencia da citação acima que os teoremas são concebidos a partir de um processo lógico na qual determinadas premissas são assumidas. Além disso, o autor destaca a importância para o rigor em uma demonstração, dado que se as premissas ou axiomas estiverem incorretos e a lógica irregular ou defeituosa, então a conclusão fica comprometida. Esta conclusão, por fim, não permite estabelecer um teorema como uma verdade absoluta ou irrefutável.

O conceito de verdade absoluta é motivo de grande debate nas ciências, mas não no que compete ao universo da demonstração matemática. A razão deste confronto se deve à diferença sutil entre uma prova científica e uma prova matemática. Uma prova científica envolve o estabelecimento de hipóteses e evidências. A soma das evidências pode ser tamanha que a hipótese torna-se um corpo teórico, isto é, uma teoria científica. Contudo, mesmo a teoria científica sendo altamente provável, esta tem por base hipóteses e evidências, e ambas estão sujeitas à falhas (GOWER, 2012). Em uma demonstração isto não ocorre, contanto que a lógica esteja correta.

Segundo Bicudo,

“Como o conhecimento matemático parece estar baseado em demonstração, não em observação, a matemática é um aparente contra-exemplo à principal tese empiricista. De fato, a matemática é, algumas vezes, tida como um paradigma de um conhecimento a priori – conhecimento anterior a, e independente da experiência”. (BICUDO, 2002, p. 10)

De outro modo, o autor deixa claro a diferença sutil entre uma prova científica e uma prova matemática, quando ressalta que a primeira se baseia na observação e a experimentação para aceitar ou negar hipóteses enquanto que a segunda é invariante a experiência para sua consolidação.

À vista disso, para uma melhor tratamento dos objetivos e apreciação deste trabalho, o presente capítulo dedica-se em realizar a demonstração matemática do teorema que permite provar para sistemas dinâmicos bidimensionais, pertencentes à classe em que as condições de ocorrência da bifurcação de Hopf são satisfeitas, a existência de uma forma normal comum e geral. Em seguida, duas aplicações do teorema em sistemas dinâmicos são propostas e conclusões sobre o resultado principal deste capítulo discutidas.

5.1 Uma nova abordagem para sistemas no \mathbb{R}^2

O seguinte teorema é o principal resultado deste capítulo:

Teorema 6. Seja um sistema dinâmico $\dot{x} = f(x, \mu)$ com $x \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$ e (x^*, μ_0) um ponto de equilíbrio. Se $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ são os autovalores para os quais as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i) $\mathbf{A} = D_x f_{\mu_0}(x^*)$ tem um par de autovalores imaginários puros $\lambda(\mu_0) = \pm i\beta(\mu_0)$;

(Condição de não-hiperbolicidade).

- (ii) $\left. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} \neq 0$.

(Condição de transversalidade).

Então, a forma normal para do sistema dinâmico é

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(\mu)y_1 - \beta(\mu)y_2 + (ay_1 - by_2)((y_1)^2 + (y_2)^2), \\ \dot{y}_2 = \alpha(\mu)y_2 + \beta(\mu)y_1 + (ay_2 + by_1)((y_1)^2 + (y_2)^2), \end{cases} \quad (5.1)$$

com a e b constantes

Ideia da demonstração: a demonstração deste teorema 6 é estabelecida em três passos. Primeiro, o sistema e as condições a serem satisfeitas pela campo vetorial f . Segundo, escreve-se a forma canônica de Jordan do sistema, assumindo que este satisfaça as condições de ocorrência da bifurcação de Hopf. Terceiro, de posse da forma canônica de Jordan, deriva-se a forma normal do sistema .

Demonstração. Considere um sistema dinâmico

$$\dot{x} = f(x, \mu), \text{ onde } f \in C^K(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}), K \geq 4, f(x^*, \mu) \equiv 0. \quad (5.2)$$

Em outras palavras, assumindo f como um campo vetorial no \mathbb{R}^2 de classe C^K ($K \geq 4$) tal que $f(x^*, \mu) \equiv 0$ para todo μ , com $f(x^*, \mu)$ também de classe C^K . Seja $\mathbf{A} = D_x f_{\mu}(x^*)$ a matriz Jacobiana com dois autovalores complexos conjugados distintos $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$.

Proposição 1. Para a classe de sistemas dinâmicos com ocorrência da bifurcação de Hopf, o sistema descrito pela [Equação 5.2](#) deve satisfazer as condições do teorema 1.

Demonstração. O sistema descrito pela [Equação 5.2](#) admite autovalores $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$. Então, se para μ_0 for verificado que $\alpha(\mu_0) = 0, \beta(\mu_0) \neq 0$ e $\left. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} \neq 0$, decorre do teorema 1 que o sistema possui uma bifurcação de Hopf. \square

Lema 1. Se $(x^*, \mu_0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ é um ponto de Hopf, isto é, o ponto de bifurcação para o sistema dinâmico com autovalores $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\mu)$, então existe uma matriz T que transforma a matriz Jacobiana na forma canônica de Jordan.

Demonstração. Seja $z = a - ib$ um autovetor de A com autovalor $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ com $\beta \neq 0$. Sendo assim, $\bar{z} = a + ib$ também é autovetor de A com autovalor $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Defina $z + \bar{z} = 2a$ e $z - \bar{z} = 2ib$. Então,

$$a = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ e } b = \frac{\bar{z} - z}{2i}.$$

Seja $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $c_1a + c_2b = 0$. Portanto,

$$(c_1 + ic_2)z + (c_1 - ic_2)\bar{z} = 0. \quad (5.3)$$

Como b é distinto de zero, então $\{z, \bar{z}\}$ é linearmente independente e a base $\gamma = \{a, b\}$ também o é. Portanto, $c_1 = c_2 = 0$. Note que para $\bar{z} = a + ib$ a equação de autovalores $A(a + ib) = (\alpha - i\beta)(a + ib)$ resulta em

$$Aa = a\alpha + b\beta \text{ e } Ab = -a\beta + b\alpha.$$

Portanto, de uma matriz real A de ordem 2 com autovalores $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$, onde $\beta(\mu) > 0$, existe uma base tal que a matriz de T em relação a esta base é

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

denominada de forma canônica de Jordan associada a A .

\square

Observação 1. A forma normal de Jordan expressa pela [Equação 5.4](#) é de fundamental importância para que seja possível simplificar o sistema dinâmico através do método das formas normais. No presente capítulo, a obtenção da forma de Jordan encontra-se baseada em (JUNIOR; VIEIRA; ALVES, 2014, p. 87). Todavia, também é possível encontrar esta demonstração em (PRESS, 2014; DAMIANO; LITTLE, 2014).

Lema 2. Cada matriz T pode ser univocamente decomposta como a soma de duas matrizes J_1 e \tilde{J} , sendo J_1 uma matriz simétrica e \tilde{J} , uma matriz anti-simétrica.

Demonstração. $\frac{T + T^\top}{2}$ é simétrica, dado que

$$\frac{1}{2}(T + T^\top)^\top = \frac{1}{2}(T^\top + (T^\top)^\top) = \frac{T + T^\top}{2}.$$

Todavia, $\frac{T - T^\top}{2}$ é anti-simétrica, dado que

$$\frac{1}{2}(T - T^\top)^\top = \frac{1}{2}(T^\top - (T^\top)^\top) = -\frac{1}{2}(T - T^\top).$$

Colocando $J_1 = \frac{T + T^\top}{2}$ e $\tilde{J} = \frac{T - T^\top}{2}$, teremos

$$T = \frac{2T}{2} = \frac{T + T}{2} + \frac{T^\top}{2} - \frac{T^\top}{2} = \frac{T + T^\top}{2} + \frac{T - T^\top}{2}.$$

Portanto,

$$T = J_1 + \tilde{J},$$

é a única decomposição da matriz T nas matrizes simétrica e anti-simétrica. \square

Do teorema 5, nota-se que o emprego do formalismo de Takens-Ushiki sobre a matriz J_1 permite concluir que a mesma não apresenta contribuição para a forma normal. A matriz J_1 apresenta termos de ordem 2 e 3 não-ressonantes, estes são eliminados a partir da imposição de sucessivas transformações de coordenadas.

De posse de \tilde{J} é feito uso do formalismo descrito no Capítulo 4 e resumido no teorema 5. À vista disso, seguindo o procedimento estabelecido e empregando-o sobre a matriz \tilde{J} , obtém-se, para ordem 2, que a base de $H^{(2)}$ será composta pelos seguintes monômios:

$$\begin{bmatrix} (y_1)^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 y_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (y_2)^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ (y_1)^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ (y_2)^2 \end{bmatrix}.$$

Estes monômios são representados, respectivamente, por $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_6$. Para este caso, as funções $\vec{g}^{(2)}$ e $\vec{h}^{(2)}$ são elementos do espaço $H^{(2)}$, uma vez que estas funções são formadas pela combinação linear dos vetores \vec{m}_j ($j = 1, \dots, 6$).

Contudo, para determinarmos a forma normal é necessário encontrar a função \vec{h} que relacione as antigas coordenadas com as novas. Assim, essa função \vec{h} deverá ser formada pela combinação linear dos monômios \vec{m}_j . A fim de descobrir que funções \vec{h} podem ser construídas,

com o intuito de eliminar possíveis termos não-lineares a partir de transformações de coordenadas, precisa-se, inicialmente, calcular

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial \vec{m}_j}{\partial y_i} \left(\sum_{l=1}^2 \tilde{J}_{il} y_l \right) - \tilde{J} \vec{m}_j \equiv L_J(\vec{m}_j),$$

para todos os monômios \vec{m}_j ($j = 1, \dots, 6$). Desta maneira, teremos que

$$L_J(\vec{m}_1) = -\beta \vec{m}_4 - 2\beta \vec{m}_2; \quad L_J(\vec{m}_2) = -\beta \vec{m}_5 - \beta \vec{m}_3 + \beta \vec{m}_1;$$

$$L_J(\vec{m}_3) = 2\beta \vec{m}_2 - \beta \vec{m}_6; \quad L_J(\vec{m}_4) = \beta \vec{m}_1 - 2\beta \vec{m}_5;$$

$$L_J(\vec{m}_5) = \beta \vec{m}_2 + \beta \vec{m}_4 - \beta \vec{m}_6; \quad L_J(\vec{m}_6) = \beta \vec{m}_3 + 2\beta \vec{m}_5.$$

Mais uma vez, o sub-espaço formado por estes vetores é chamado de $L_J(H^{(2)})$. Para determinarmos a forma normal procurada, é necessário encontrar o sub-espaço complementar de $G^{(2)}$. No espaço $H^{(2)}$, cuja a base é composta pelos vetores \vec{m}_j , representa-se $L_J(H^{(2)})$ pela matriz

$$L_J(H^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 & \beta & 0 & 0 \\ -2\beta & 0 & 2\beta & 0 & \beta & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & \beta \\ -\beta & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & -2\beta & 0 & 2\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Observando esta matriz, nota-se que o determinante de $L_J(H^{(2)})$ é $9\beta^6$, isto é, não-nulo. Pelo formalismo, todos os termos não-lineares de segundo grau podem ser eliminados. Desta maneira, ao considerarmos a matriz \tilde{J} para ordem 2, o resultado obtido não é suficiente para descrever a forma normal do sistema em estudo. Nestes casos, repete-se o procedimento acima, considerando uma ordem superior, isto é, $k = 3$.

A base de $H^{(3)}$ passa a ser constituída pelos seguintes monômios

$$\begin{bmatrix} (y_1)^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (y_1)^2 y_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 (y_2)^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (y_2)^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0 \\ (y_1)^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ (y_1)^2 y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 (y_2)^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ (y_2)^3 \end{bmatrix}.$$

Desta maneira, e novamente, a fim de descobrir que funções \vec{h} podem ser construídas, deve-se calcular um novo conjunto de $L_J(\vec{m}_j)$. Repetindo-se o procedimento ficaremos com

$$L_J(\vec{m}_1) = -3\beta\vec{m}_2 - \beta\vec{m}_5; \quad L_J(\vec{m}_2) = \beta\vec{m}_1 - 2\beta\vec{m}_3 - \beta\vec{m}_6;$$

$$L_J(\vec{m}_3) = 2\beta\vec{m}_2 - \beta\vec{m}_4 - \beta\vec{m}_7; \quad L_J(\vec{m}_4) = 3\beta\vec{m}_3 - \beta\vec{m}_8;$$

$$L_J(\vec{m}_5) = \beta\vec{m}_1 - 3\beta\vec{m}_6; \quad L_J(\vec{m}_6) = \beta\vec{m}_2 + \beta\vec{m}_5 - 2\beta\vec{m}_7.$$

$$L_J(\vec{m}_7) = \beta\vec{m}_3 + 2\beta\vec{m}_6 - \beta\vec{m}_8; \quad L_J(\vec{m}_8) = \beta\vec{m}_4 + 3\beta\vec{m}_7;$$

O sub-espaço formado por estes vetores é chamado de $L_J(H^{(3)})$. Para determinarmos a forma normal procurada, é necessário encontrar o sub-espaço complementar de $L_J(H^{(3)})$. Assim, a matriz que caracteriza $L_J(H^{(3)})$ é

$$L_J(H^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ -3\beta & 0 & 2\beta & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & -2\beta & 0 & 3\beta & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & -3\beta & 0 & 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & -2\beta & 0 & 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Através do método de escalonamento, é possível simplificar $L_J(H^{(3)})$ em

$$L_J(H^{(3)}) = \begin{bmatrix} -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & -3\beta & 0 & 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & -2\beta & 0 & 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6\beta & 0 & -6\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\beta & 0 & -2\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O $\det(L_J(H^{(3)}))$ é nulo. Desta forma, termos não-lineares de ordem 3 não podem ser eliminados e, portanto, deve existir um sub-espaço complementar $G^{(3)}$. Como a base de $L_J(H^{(3)})$ tem dimensão 6 e a base de $H^{(3)}$ tem dimensão 8, então a base de $G^{(3)}$ é formada por dois vetores \vec{u}_1 e \vec{u}_2 linearmente independentes e ortogonais a cada linha da matriz $L_J(H^{(3)})$. Dois vetores que são ortogonais entre si e a cada linha desta matriz são:

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= (\vec{m}_1 + \vec{m}_3 + \vec{m}_6 + \vec{m}_8), \\ \vec{u}_2 &= (-\vec{m}_2 - \vec{m}_4 + \vec{m}_5 + \vec{m}_7).\end{aligned}$$

Como \vec{u}_1 e \vec{u}_2 são dois vetores que satisfazem as condições, então a função $\vec{g}^{(3)}$ formada pela combinação linear¹ dos monômios é

$$\vec{g}^{(3)} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2. \quad (5.5)$$

Por tanto, levando em consideração termos até o terceiro ordem, a forma normal fica dada por :

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \vec{g}^{(3)}. \quad (5.6)$$

Calculando o vetor $\vec{g}^{(3)}$ em termos de \vec{u}_1 e \vec{u}_2 , obtém-se

$$\vec{g}^{(3)} = a \begin{pmatrix} y_1^3 + y_1 y_2^2 \\ y_1^2 y_2 + y_2^3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -y_1^2 y_2 - y_2^3 \\ y_1^3 + y_1 y_2^2 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Portanto,

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(\mu)y_1 - \beta(\mu)y_2 + (ay_1 - by_2)((y_1)^2 + (y_2)^2), \\ \dot{y}_2 = \alpha(\mu)y_2 + \beta(\mu)y_1 + (ay_2 + by_1)((y_1)^2 + (y_2)^2). \end{cases} \quad (5.8)$$

sendo a e b constantes.

Este resultado conclui a prova do teorema 6. □

Como consequência do teorema 6 segue o Corolário.

Corolário 1. Supondo que um sistema dinâmico seja dado por

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (5.9)$$

e que $x^* \in \mathbb{R}^2$ descreva um ponto fixo deste sistema tal que para $\mu = \mu_0$ há uma bifurcação de Hopf. Supondo ainda que para $\mu < \mu_0$, a parte linear do campo de vetores, calculada no ponto fixo, possua um par complexo conjugado, com parte real negativa, como autovalores e que para $\mu > \mu_0$ estes autovalores passem a ter parte real positiva. Então, para a forma normal

¹ Por uma questão de conveniência e procurando-se evitar equívocos, trocou-se a notação dos coeficientes constantes e não-nulos de β_1 para a e β_2 para b .

1. Quando $a < 0$, o ponto de equilíbrio (x^*) , para $\mu = \mu_0$, é assintoticamente estável e para cada $\mu > \mu_0$, porém na vizinhança deste, existe uma órbita periódica estável perto do ponto de equilíbrio instável (x^*, μ) . Nesta situação, dizemos que o sistema dinâmico exibe uma bifurcação de Hopf do tipo supercrítica.
2. Quando $a > 0$, o ponto de equilíbrio (x^*) , quando $\mu = \mu_0$ é instável e para cada $\mu < \mu_0$, porém na vizinhança deste, existe uma órbita periódica instável perto do ponto de equilíbrio estável (x^*, μ) . Nesta situação, dizemos que o sistema dinâmico exibe uma bifurcação de Hopf do tipo subcrítica.

O corolário acima, em sua totalidade, permite determinar os tipos de bifurcações de Hopf do sistema em estudo.

É importante salientar que a forma normal apresentada acima, exibe dois coeficientes constantes, a e b . No formalismo de Takens-Ushiki, tais constantes são denominadas de coeficientes da forma normal. Se a parte linear do sistema dinâmico jaz na forma canônica de Jordan, podemos expressar a [Equação 5.8](#) como

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(\mu)y_1 - \beta(\mu)y_2 + F(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 = \alpha(\mu)y_2 + \beta(\mu)y_1 + G(y_1, y_2), \end{cases} \quad (5.10)$$

sendo $F(y_1, y_2)$ e $G(y_1, y_2)$ as funções não-lineares de ordem 3, de tal maneira que $F(0, 0) = G(0, 0) = 0$. Á vista disso, conforme em ([USHIKI, 1984](#); [CHUA](#); [KOKUBU, 1988](#); [CHUA](#); [KOKUBU, 1989](#); [GUCKENHEIMER](#); [HOLMES, 1983](#)), os coeficientes da forma normal são dados por²

$$a = \frac{1}{16}(F_{y_1y_1y_1} + F_{y_1y_2y_2} + G_{y_1y_1y_2} + G_{y_2y_2y_2}) + \frac{1}{16\beta(\mu_0)}(F_{y_1y_2}(F_{y_1y_1} + F_{y_2y_2}) - G_{y_1y_2}(G_{y_1y_1} + G_{y_2y_2}) - F_{y_1y_1}G_{y_1y_1} + F_{y_2y_2}G_{y_2y_2}).$$

E

$$b = \frac{1}{16}(-F_{y_2y_2y_2} + G_{y_1y_2y_2} - F_{y_1y_1y_2} + G_{y_1y_1y_1}) + \frac{1}{48\beta(\mu_0)}(-5F_{y_2y_2}^2 - 2G_{y_2y_2}^2) + \frac{1}{48\beta(\mu_0)}(5F_{y_1y_2}G_{y_2y_2} - 2F_{y_1y_2}^2 + F_{y_2y_2}G_{y_1y_2} - 2G_{y_1y_2}^2) + \frac{1}{48\beta(\mu_0)}(-5F_{y_2y_2}F_{y_1y_1} + 5F_{y_1y_1}G_{y_1y_2} - 5G_{y_2y_2}G_{y_1y_1}) + \frac{1}{48\beta(\mu_0)}(F_{y_1y_2}G_{y_1y_1} - 5G_{y_1y_1}^2 - 2F_{y_1y_1}^2).$$

² ONDE SE LÊ: $F_{y_1y_2}$ como $\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} |_{\mu=\mu_0}(y_1^*, y_2^*)$, $F_{y_2y_2} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial y_2 \partial y_2} |_{\mu=\mu_0}(y_1^*, y_2^*)$ e assim por diante.

5.2 Aplicações em sistemas bidimensionais

5.2.1 Oscilador de Van der Pol

O estudo de comportamentos não-lineares pode ser ilustrado através do oscilador de Van der Pol (STROGATZ, 2015). Originalmente, o modelo matemático desenvolvido para o circuito surgiu em paralelo com o desenvolvimento de circuitos eletrônicos não-lineares usados nos primeiros rádios. O circuito de Van der Pol é um circuito RLC em série. As relações entre as variáveis é fácil de ser obtida através das leis de Kirchhoff. Assim, as equações que descrevem a dinâmica do circuito de Van der Pol são

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + (\mu - x_2^2)x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{cases} \quad (5.11)$$

Analisando-se este sistema, nota-se que a origem é o único ponto de equilíbrio. Portanto, a matriz Jacobiana avaliada em $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ é

$$\mathbf{A}(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}.$$

Os autovalores associados a matriz Jacobiana são $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \frac{\mu}{2} \pm i\frac{\sqrt{4-\mu^2}}{2}$. Avaliando o parâmetro de controle crítico μ_0 , temos que $\lambda(\mu_0), \bar{\lambda}(\mu_0) = \pm i$. Deste modo, a condição de não-hiperbolicidade é satisfeita. Por outro lado, a condição de transversalidade do teorema 6 revela que $\left. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} = \frac{1}{2} \neq 0$. À vista disso, como ambas as condições (i) e (ii) do teorema 6 são satisfeitas, então a forma normal do oscilador de Van der Pol é

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(\mu)y_1 - \beta(\mu)y_2 + (ay_1 - by_2)((y_1)^2 + (y_2)^2), \\ \dot{y}_2 = \alpha(\mu)y_2 + \beta(\mu)y_1 + (ay_2 + by_1)((y_1)^2 + (y_2)^2). \end{cases}$$

sendo a e b constantes.

5.2.2 Reações químicas oscilatórias

As reações químicas oscilatórias de B.Z. descrevem um fenômeno não-linear particularmente interessante. Em contraste com as demais reações, onde um estado de homogeneidade e equilíbrio é rapidamente alcançado, esta notável reação oscilatória mantém um prolongado estado de não-equilíbrio levando à oscilações temporais e a formação de padrões espaciais sob a forma de ondas circulares e anéis (FIEDLER; PRADO, 2011). A primeira tentativa teórica para explicar reações oscilantes foi realizada por G. Nicolis e Ilya Prigogine e o modelo concebido passou a ser denominado de *Brusselator* (KONDEPUDI; PRIGOGINE, 2015; PRIGOGINE,

1967). A forma adimensional das equações para uma reação de B.Z. (SILVA, 2018) são expressas por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a - (1 + \mu)x_1 + x_2x_1^2, \\ \dot{x}_2 = \mu x_1 - x_2x_1^2, \end{cases} \quad (5.12)$$

com x_1, x_2, a e $\mu \in \mathbb{R}$. Para esta configuração, a é assumido constante e μ tratado como o parâmetro de controle. O sistema dinâmico possui um único ponto de equilíbrio em $(x_1^*, x_2^*) = (a, \frac{\mu}{a})$. Ao avaliar a matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio temos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mu - 1 & a^2 \\ -\mu & -a^2 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Os autovalores do sistema dinâmico considerando o ponto de equilíbrio são

$$\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \frac{(\mu - a^2 - 1)}{2} \pm i \frac{\sqrt{4a^2 - (\mu - a^2 - 1)^2}}{2}.$$

Avaliando $\mu_0 = a^2 + 1$ temos $\lambda(\mu_0), \bar{\lambda}(\mu_0) = \pm i\beta(\mu_0) \neq 0$. Por outro lado, $\left. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} = \frac{1}{2} \neq 0$. Deste modo, como as condições (i) e (ii) do teorema 6 são satisfeitas, então a forma normal do sistema dinâmico para reações químicas oscilatórias é

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(\mu)y_1 - \beta(\mu)y_2 + (ay_1 - by_2)((y_1)^2 + (y_2)^2), \\ \dot{y}_2 = \alpha(\mu)y_2 + \beta(\mu)y_1 + (ay_2 + by_1)((y_1)^2 + (y_2)^2). \end{cases}$$

sendo a e b constantes.

A partir da análise dos dois sistemas desta seção, foi possível verificar a aplicabilidade do teorema 6. O teorema estabelece que para um sistema em duas dimensões de codimensão um, ao satisfazer as condições do teorema da bifurcação de Hopf, a sua forma normal é conhecida. Deste teorema nota-se ainda que o mesmo reduz enormemente o trabalho de obtenção das formas normais para uma classe de sistemas dinâmicos que exibem a bifurcação de Hopf, uma vez que o trabalho envolvendo operações matriciais é substituído pela simples verificação de condições.

UMA NOVA ABORDAGEM NO \mathbb{R}^n

No capítulo anterior, o teorema 6 permitiu a determinação de uma forma normal comum para a classe de sistemas dinâmicos atendendo as condições do teorema de Andronov. Apesar de fundamental, o resultado não é tão abrangente, uma vez que limita-se a sistemas dinâmicos no \mathbb{R}^2 . À vista disso, o presente capítulo dedica-se em generalizar a demonstração matemática do teorema 6, para sistemas N-dimensionais. Em seguida, duas aplicações do teorema em sistemas dinâmicos são estudadas e conclusões sobre o resultado principal deste capítulo discutidas.

6.1 Uma nova abordagem para sistemas no \mathbb{R}^n

O seguinte teorema é o principal resultado deste capítulo:

Teorema 7. Seja um sistema dinâmico $\dot{z} = f(z, \mu)$ com $z \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ e (z^*, μ_0) um ponto de equilíbrio. Assumindo que:

- (i') $\mathbf{A} = D_x f_\mu(z^*)$ tem um par de autovalores imaginários $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ com a única exceção de que o restante do espectro de autovalores associados a matriz Jacobiana seja distinto dos dois autovalores $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$, sendo estes os únicos autovalores da matriz Jacobiana no eixo imaginário.
- (ii') $\mathbf{A} = D_x f_{\mu_0}(z^*)$ tem um par de autovalores $\pm i\beta(\mu_0)$, de tal modo que os demais outros autovalores não têm parte real nula mas negativa.

(Condição de não-hiperbolicidade).

$$(iii') \left. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} \neq 0.$$

(Condição de transversalidade).

Então, a forma normal para do sistema dinâmico, reduzido a sua variedade central, é

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(\mu)y_1 - \beta(\mu)y_2 + (ay_1 - by_2)((y_1)^2 + (y_2)^2), \\ \dot{y}_2 = \alpha(\mu)y_2 + \beta(\mu)y_1 + (ay_2 + by_1)((y_1)^2 + (y_2)^2), \end{cases} \quad (6.1)$$

com a e b constantes.

Ideia da demonstração: a demonstração deste teorema 7 é estabelecida em três etapas. Primeiro, o sistema e as condições a serem satisfeitas pela campo vetorial f . Segundo, teoremas da teoria da variedade central são estabelecidos para (i) garantir a existência da variedade central; (ii) determinar a variedade; (iii) garantir que a dinâmica do sistema reduzido a sua variedade central é topologicamente, orbitalmente equivalente à dinâmica do sistema original. Terceiro, a forma normal do sistema é determinada da forma conônica de Jordan do sistema reduzido.

Demonstração. Considere o sistema

$$\dot{z} = f(z, \mu) \quad (6.2)$$

com

$$f \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), f(z^*, \mu) \equiv 0. \quad (6.3)$$

Observação 2. Geralmente é estabelecido a origem como ponto de equilíbrio. Para sistemas dinâmicos, uma mudança conveniente de coordenadas pode transladar o ponto de equilíbrio para origem. Contudo, não ocorre perda de generalidade ao se assumir z^* (MARSDEN; MCCRACKEN, 1976; KAZARINOFF N.D; HASSARD; WAM, 1981).

Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Assuma que $Df(z^*)$ tenha n autovalores de parte real nula e m autovalores de parte real negativa. Sendo $N = m + n$. Então, existe uma matriz real invertível Q tal que

$$Q^{-1}[Df(z^*)]Q = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

com autovalores de uma matriz $J_{n \times n}$ com parte real nula e com todos os autovalores de uma matriz $\mathbf{B}_{m \times m}$ de parte real negativa. Escreva u_1 para os vetores coluna em \mathbb{R}^n e u_2 para os vetores coluna em \mathbb{R}^m , de tal maneira que a mudança linear de coordenadas definida por $w = Q[u_1^T \ u_2^T]^T$ transforme $\dot{z} = f(z)$ em

$$\dot{u}_1 = Ju_1 + f(u_1, u_2), \quad (6.5)$$

$$\dot{u}_2 = \mathbf{B}u_2 + g(u_1, u_2). \quad (6.6)$$

Teorema 8 (Existência da variedade central). Suponha que, nas Equações 6.5-6.6, f e g sejam de classe C^2 em uma vizinhança do ponto de equilíbrio de tal modo que J tenha autovalores de parte real nula e \mathbf{B} autovalores de parte real negativa. Então, existe $\delta > 0$ e uma transformação suave $h : \mathbf{B}_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que a equação $u_2 = h(u_1)$ defina uma variedade central das Equações 6.5-6.6.

A prova detalhada deste teorema pode ser encontrada em (CARR, 1981, pp.16-19) e em (KHAIL, 1981).

Seja (u_1^*, u_2^*) um ponto de equilíbrio e pertencente a uma variedade central das Equações 6.5-6.6 definida por $n : \mathbf{B}_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Por invariância, a solução $(u_1(t), u_2(t))$ com condição inicial $(u_1(0), u_2(0)) = (u_1^0, u_2^0) = (u_1^0, h(u_1^0))$, satisfaz $u_2(t) = h(u_1(t))$ para todo t próximo de $t_0 = 0$. Então, soluções de $(u_1(t), u_2(t))$ na própria variedade central são determinadas apenas através das condições iniciais para a Equação

$$\dot{x} = Jx + f(x, h(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < \delta, \quad (6.7)$$

pois, por invariância local, $u_2(t) = h(u_1(t))$ satisfaz a Equação 6.6. Consequentemente, o sistema descrito na Equação 6.7 descreve a dinâmica reduzida associada à variedade central $u_2(t) = h(u_1(t))$.

Teorema 9 (Redução da dinâmica à variedade central). Sob as hipóteses do teorema 8 deixe $u_2(t) = h(u_1(t))$ ser a variedade central próxima do ponto de equilíbrio do sistema de equações 6.5-6.6. Então, as seguintes conclusões são verdadeiras:

- (a) Se o ponto de equilíbrio da Equação 6.7 é instável, então o ponto de equilíbrio das Equações 6.5-6.6 também o será.
- (b) Suponha que o ponto de equilíbrio é instável, então existe uma vizinhança U de $(u_1, u_2) = (0, 0)$ tal que para cada condição inicial $(u_1(0), u_2(0)) = (u_1^0, u_2^0)$ em U existe uma solução da Equação 6.7 tal que

$$\begin{cases} \dot{u}_1 &= u(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}), \\ \dot{u}_2 &= h(u(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}). \end{cases} \quad (6.8)$$

conforme, $t \rightarrow \infty$ com γ sendo uma constante dependente apenas da matriz \mathbf{B} na Equação 6.6.

- (c) Se a origem da Equação 6.7 é assintoticamente estável, então o ponto de equilíbrio das equações 6.5-6.6 é assintoticamente estável.

A prova detalhada deste teorema 9 pode ser encontrada em (CARR, 1981, pp. 21-25).

Observação 3. Os teoremas 8 e 9 garantem que o sistema dinâmico, satisfazendo as condições assim estabelecidas, possui uma variedade central e que, mais importante, o estudo da dinâmica do sistema original é topologicamente orbitalmente equivalente a sua versão reduzida e que esta última contém toda a informação do primeiro.

Proposição 2. Para um sistema dinâmico satisfazendo as condições dos teoremas 2 e 3 de Hopf no \mathbb{R}^n , com tanto que os demais autovalores do espectro da matriz Jacobiana sejam reais e negativos, então o sistema dinâmico N-dimensional, descrito pela Equação 6.10, pode ser reduzido, na variedade central, à Equação 6.7.

Demonstração. Seja o sistema N-dimensional descrito pela Equação 6.10 no qual a matriz Jacobiana, avaliada no ponto z^* e em μ_0 , detenha um par de autovalores imaginários puros $\lambda(\mu_0), \bar{\lambda}(\mu_0) = \pm i\beta(\mu_0)$, com $\beta(\mu_0) \neq 0$, e $\left. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} \neq 0$. Sendo o restante do espectro de autovalores de \mathbf{A} real e negativo, portanto, distinto dos dois primeiros autovalores $\lambda, \bar{\lambda}$ que são os únicos autovalores no eixo imaginário. Então decorre dos teoremas 8 e 9 que o sistema dinâmico possui uma variedade central, invariante local tal que

$$\dot{z} = f(z, \mu) \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

é localmente, topologicamente orbitalmente equivalente a

$$\dot{x} = Jx + f(x, h(x)), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

ou ainda

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & -\beta(\mu) \\ \beta(\mu) & \alpha(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x_1, h(x_1)) \\ f(x_2, h(x_2)) \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

com J a forma canônica de Jordan. □

Observação 4. Os teoremas da teoria da variedade central podem ser aplicados a qualquer sistema para os quais as condições estabelecidas são demonstradas. Contudo, para poder reduzir o sistema à variedade central, assumindo que este satisfaça as condições de ocorrência da bifurcação de Hopf, é necessário estabelecer que o restante do espectro de autovalores da matriz Jacobiana seja, de fato, real e negativo. Entretanto, o teorema de Hopf descrito neste trabalho e em (HOPF; MORAWETZ; SERRIN, 2002; MARSDEN; MCCracken, 1976) estabelece que para a ocorrência da bifurcação, basta com que o restante do espectro de autovalores seja real, não-nulo e distinto do par de autovalores imaginários.

Deste modo, a condição para que os autovalores sejam reais e negativos é condição necessária para reduzir o sistema a variedade central, mas condição suficiente para ocorrência da bifurcação de Hopf em sistemas N-dimensionais. A redução do sistema dinâmico N-dimensional

a variedade central é também encontrada em (MARSDEN; MCCracken, 1976; KAZARI-NOFF N.D; HASSARD; WAM, 1981; HASSARD; WAN, 1982).

Agora, decorre do Lema 1, Lema 2 e do teorema 5 que a forma normal do sistema dinâmico descrito pela Equação 6.9 é

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(\mu)y_1 - \beta(\mu)y_2 + (ay_1 - by_2)((y_1)^2 + (y_2)^2), \\ \dot{y}_2 = \alpha(\mu)y_2 + \beta(\mu)y_1 + (ay_2 + by_1)((y_1)^2 + (y_2)^2). \end{cases}$$

sendo a e b constantes. É importante mais uma vez ressaltar de que a forma normal exhibe os mesmos coeficientes, a e b , apresentados e discutidos no capítulo anterior.

Este resultado conclui a prova do teorema 7. □

Como consequência do teorema 7 segue o Corolário.

Corolário 2. Supondo que um sistema dinâmico seja dado por

$$\dot{z} = f(z, \mu), z \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}, \quad (6.10)$$

e que $z^* \in \mathbb{R}^n$ descreva um ponto fixo deste sistema tal que para $\mu = \mu_0$ há uma bifurcação de Hopf. Supondo ainda que para $\mu < \mu_0$, a parte linear do campo de vetores, calculada no ponto fixo, possua um par complexo conjugado, com parte real negativa, como autovalores e que para $\mu > \mu_0$ estes autovalores passem a ter parte real positiva. Então, para a forma normal

1. Quando $a < 0$, o ponto de equilíbrio (z^*), para $\mu = \mu_0$, é assintoticamente estável e para cada $\mu > \mu_0$, porém na vizinhança deste, existe uma órbita periódica estável perto do ponto de equilíbrio instável (z^*, μ). Nesta situação, dizemos que o sistema dinâmico exhibe uma bifurcação de Hopf do tipo supercrítica.
2. Quando $a > 0$, o ponto de equilíbrio (z^*), quando $\mu = \mu_0$ é instável e para cada $\mu < \mu_0$, porém na vizinhança deste, existe uma órbita periódica instável perto do ponto de equilíbrio estável (z^*, μ). Nesta situação, dizemos que o sistema dinâmico exhibe uma bifurcação de Hopf do tipo subcrítica.

6.2 Aplicações em sistemas tridimensionais

Para ilustrar a aplicação do teorema consideraremos dois sistemas. O primeiro é sistema de Edward Lorenz para estudos meteorológicos e o segundo tratá-se do circuito de Leon Chua.

6.2.1 Sistema de Lorenz

O modelo de Edward Lorenz tratá-se de uma aproximação para a o estudo da convecção na atmosfera. Este sistema dinâmico é notável pela sua natureza caótica, uma vez que dependendo do conjunto de parâmetros e condições iniciais, esta se assemelha a uma borboleta (STROGATZ, 2015; MONTEIRO, 2011; GLEICK, 2008). O sistema é caracterizado por exibir três equações diferenciais acopladas

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sigma(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_2 = \mu x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - b x_3, \end{cases} \quad (6.11)$$

com σ , b constantes e μ o parâmetro de controle.

A análise das equações 6.11 revela que o sistema de Lorenz possui três pontos de equilíbrio, sendo um deles $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (\sqrt{b(\mu - 1)}, \sqrt{b(\mu - 1)}, (\mu - 1))$. Assim, para este ponto, a matriz Jacobiana é

$$\mathbf{A}(\mu) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(\mu - 1)} \\ \sqrt{b(\mu - 1)} & \sqrt{b(\mu - 1)} & -b \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

com polinômio característico dado por

$$p(\lambda, \mu) = \lambda^3 + (\sigma + 1 + b)\lambda^2 + b(\sigma + \mu)\lambda + 2b\sigma(\mu - 1). \quad (6.13)$$

Quando $\mu = \mu_0 = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{(\sigma - 1 - b)}$ temos como autovalores

$$\lambda_1 = -(\sigma + 1 + b) \text{ e } \lambda_{2,3} = \pm i \sqrt{\frac{2b\sigma(1 + \sigma)}{(\sigma - 1 - b)}}.$$

Portanto, as condições (i') e (ii') do teorema 7 são satisfeitas. Para a condição de transversalidade,

$$\left. \frac{dRe\{\lambda(\mu)\}}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} = \frac{2b\sigma(b(\sigma + \mu_0) - 3\beta(\mu_0)^2) + 2\beta(\mu_0)^2(\sigma + 1 + b)b}{(b(\sigma + \mu_0) - 3\beta(\mu_0)^2)^2 + (2\beta(\mu_0)(\sigma + 1 + b))^2} \neq 0.$$

Portanto, a condição (iii') é verificada. Decorre do teorema 7 que se as condições (i'), (ii') e (iii') são satisfeitas, então a forma normal do sistema de Lorenz, reduzido à variedade central, é expressa por

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(\mu)y_1 - \beta(\mu)y_2 + (ay_1 - by_2)((y_1)^2 + (y_2)^2), \\ \dot{y}_2 = \alpha(\mu)y_2 + \beta(\mu)y_1 + (ay_2 + by_1)((y_1)^2 + (y_2)^2). \end{cases}$$

6.2.2 Circuito de Chua

O circuito de Chua trata-se de um dos mais simples circuitos eletrônicos já concebidos para o estudo e investigação de uma extensa variedade de fenômenos caóticos e de bifurcação (MUKHERJEE; HALDER, 2017; MATSUMOTO, 1984; CHUA, 1994). O sistema é caracterizado por exibir três equações diferenciais dadas por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - x_1 - (c_0x_1 + c_1x_1^3)), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -\mu x_2 \end{cases} \quad (6.14)$$

com α , c_0 , c_1 constantes e μ o parâmetro de controle. O circuito de Chua possui três pontos de equilíbrio. Entre estes está $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (\sqrt{-\frac{(1+c_0)}{c_1}}, 0, -\sqrt{-\frac{(1+c_0)}{c_1}})$. Assim, para este ponto, a matriz Jacobiana é

$$\mathbf{A}(\mu) = \begin{bmatrix} 2\alpha(1+c_0) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\mu & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Colocando $c = 2\alpha(1+c_0)$, obtêm-se como polinômio característico

$$p(\lambda, \mu) = -\lambda^3 + (c-1)\lambda^2 + (c-\mu+\alpha)\lambda + c\mu. \quad (6.16)$$

Quando $\mu = \mu_0 = (-c^2 - c\alpha + c + \alpha)$ temos como autovalores

$$\lambda_1 = (c-1) \text{ e } \lambda_{2,3} = \pm i\beta(\mu_0), \text{ com } \beta(\mu_0) = \sqrt{\frac{c\mu_0}{c-1}}.$$

Portanto, as condições (i') e (ii') do teorema 7 são satisfeitas, contanto que $c < 1$. Para a condição de transversalidade,

$$\left. \frac{dRe\{\lambda(\mu)\}}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} = \frac{2\beta(\mu_0)^2(c-1)}{(3\beta(\mu_0)^2 + c - \mu_0 + \alpha)^2 + (2\beta(\mu_0)(c-1))^2} \neq 0.$$

Desse modo, a condição (iii') é verificada. Como consequência do teorema 7, a forma normal do circuito de Chua, reduzido à variedade central, é

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(\mu)y_1 - \beta(\mu)y_2 + (ay_1 - by_2)((y_1)^2 + (y_2)^2), \\ \dot{y}_2 = \alpha(\mu)y_2 + \beta(\mu)y_1 + (ay_2 + by_1)((y_1)^2 + (y_2)^2). \end{cases}$$

Em coordenadas polares, a forma normal do circuito de Chua é

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \alpha(\mu)\rho + a\rho^3, \\ \dot{\phi} &= \phi_0 + b\rho^2. \end{cases}$$

Vale destacar que a forma normal acima já foi determinada através da aplicação direta do formalismo de Takens-Ushiki ([ALTMAN, 2000](#)). Neste trabalho, E. J. Altman, determina a forma normal considerando matrizes $L_J(H^{(3)})$ de ordem 18×18 . É possível estabelecer este como um trabalho impressionante. Recomendamos o leitor interessado comparar a forma normal determinada aqui através do teorema 7 com a obtida por Altman através da aplicação direta do teorema 5.

O teorema 7 generaliza os resultados do capítulo anterior, abrangendo sistemas dinâmicos N-dimensionais. Os resultados da análise de sistemas dinâmicos diversos permite compreender como a forma normal pode ser obtida a partir de uma nova abordagem na qual a custosa tarefa se resume apenas à verificação das condições de ocorrência da bifurcação de Hopf.

DISCUSSÕES

Este estudo teve como propósito obter um resultado matemático que permite determinar formas normais para uma classe de sistemas dinâmicos sujeita à bifurcação de Hopf. O método das formas normais em sistemas dinâmicos parte da suposição de que é possível escrever as equações que descrevem a dinâmica de um determinado sistema em uma forma analítica mais simplificada e que mantém intacta a topologia do espaço de fases, na vizinhança das configurações de equilíbrio. Embora este seja um método poderoso e de fundamental importância para a análise de sistemas dinâmicos, este também o é extremamente trabalhoso, e, muitas vezes infrutífero. Isso porque, conforme em [Chow, Drachman e Wang \(1990\)](#), [Monteiro \(2011\)](#), a técnica envolve operações difíceis de serem realizadas sem cometer equívocos.

Além disso, dependendo do sistema dinâmico e sua correspondente dimensão, estes implicam diretamente sobre a ordem da forma normal, sendo necessário, portanto, de termos de ordem superior a 2, dado que ou a ordem 2 não será suficiente ou os termos correspondentes a esta ordem serão não-ressonantes e, conseqüentemente, não irão contribuir para construção da forma normal.

Neste ínterim, envolvendo sistemas dinâmicos sob a bifurcação de Hopf, torna-se necessário, portanto, um resultado matemático que permita obter conhecimento das formas normais, mas sem que o método que as define precise ser empregado diretamente.

A partir da teoria da variedade central e do método de formas normais de Takens-Ushiki, foi possível realizar um esforço nesse sentido. A partir dos desenvolvimentos do presente estudo, dois teoremas foram obtidos e demonstrados, recuperando as formas normais para sistemas dinâmicos, contanto que as condições de ocorrência da bifurcação de Hopf sejam satisfeitas em toda sua extensão.

O teoremas de Hopf aplicam-se à sistemas no \mathbb{R}^2 , sendo este resultado obtido pelos estudos de Andronov em 1929, e no \mathbb{R}^n , sendo este estabelecido por Hopf em 1942. Ambos os teoremas permitem, satisfeitas suas exigências, determinar se sistemas dinâmicos, de modo geral, exibem

ou não esta bifurcação. Ambos os teoremas têm sua demonstração estabelecida nas condições de não-hiperbolicidade e transversalidade.

Conforme discutido no [Capítulo 4](#), a forma canônica de Jordan desempenha papel fundamental para a a forma normal de sistemas dinâmico gerais, bem como, os que exibem bifurcações. Nesta classe de sistemas, torna-se notável que a forma de Jordan caracteriza-se por configurações matriciais sempre expressas a partir de pares de autovalores complexo conjugados. A partir do método das formas normais e do estudo de uma classe de sistemas dinâmicos no \mathbb{R}^2 um teorema foi obtido e sua aplicação em sistemas dinâmicos analisada.

Com o resultado obtido neste trabalho, dois sistemas dinâmicos foram estudados, o oscilador de Van der Pol e modelo de Prigogine para reações químicas oscilatórias. Em ambos os sistemas, o teorema [6](#) mostrou-se eficaz na determinação de formas normais, uma vez que o trabalho antes tido como condição imutável para formas normais foi substituído pela simples verificação de condições, sendo estas as condições do teorema de Andronov.

Apesar de fundamental, o resultado não é tão abrangente, uma vez que limita-se a sistemas dinâmicos no \mathbb{R}^2 , o que torna necessário a obtenção de uma generalização para sistemas de dimensão $N > 2$. À vista disso, foi possível também realizar um esforço nesse sentido a partir da teoria da variedade central. O teorema da variedade central mostra-se como uma técnica magistral e robusta para a análise de sistemas dinâmicos de dimensão N , uma vez que fornece os meios com que se permita a redução da dimensão de um sistema a uma dimensão finita, sem perder ou alterar qualquer informação no que compete a estabilidade do sistema dinâmico, preservando, portanto, a topologia do espaço de fases.

À vista disso, partindo-se dos teoremas da existência da variedade central e da redução do sistema à variedade invariante, foi possível obter uma configuração na qual as versões não-linear e linear do sistema são topologicamente orbitalmente equivalentes. De posse desta, a técnica das formas normais é aplicada, escrevendo os sistemas na sua forma analítica mais simples possível através de sucessivas transformações de coordenadas. O resultado obtido, também na forma de teorema, generaliza os principais achados da teoria para sistemas dinâmicos no \mathbb{R}^n .

Com base neste resultado, duas aplicações em sistemas dinâmicos foram propostas. Primeiro, para o sistema de Lorenz, segundo para o circuito de Chua. A determinação das formas normais destes sistemas, foram obtidos a partir dos resultados encontrados e advindos do teorema concebido. Ambos os teoremas [6](#) e [7](#) mostram-se como alternativas viáveis para a análise de sistemas dinâmicos que exibem bifurcações. A razão disso é que, conforme em ([GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983](#); [MONTEIRO, 2011](#); [MARSDEN; MCCRACKEN, 1976](#); [KAZARINOFF N.D](#); [HASSARD; WAM, 1981](#)), tais simplificações são estabelecidas nas vizinhanças dos estados configuracionais de equilíbrio, mantendo intacta, portanto, a topologia do espaço de fases.

Apesar de relevantes se faz necessário aduzir o seguinte comentário crítico aos resultados aqui obtidos: o que garante que estes sejam válidos do ponto de vista matemático?

Os resultados principais deste trabalho, não são expressos em termos de conjecturas ou hipóteses, mas a partir de teoremas, portanto provados matematicamente. Na matemática, em linhas gerais, uma prova ou demonstração matemática envolve o estabelecimento de axiomas e preposições que, a partir da argumentação lógica, passo a passo, é possível obter uma determinada conclusão. Segundo Russel (RUSSEL, 2006), os teoremas constituem-se como produtos advindos destes processos, e uma vez provados tornam-se verdades até o fim dos tempos.

Além disso, questiona-se também: No que este trabalho contribui para o estudo de formas normais se existem alguns teoremas que já exploraram o assunto?

Este questionamento é de fato pertinente. Conforme evidenciado, alguns trabalhos parecem trazer um certo "esforço" no sentido de facilitar a determinação de formas normais, bem como, de apresentar teoremas para sistemas dinâmicos sujeitos à bifurcação de Hopf (JR; AMARAL; ALBERTO, 2013; BETANCUR, 2010; VERRI, 2013). Nestes últimos, torna-se evidente que os métodos e teoremas apresentados decantam da abordagem de Yuri Kuznetsov, com ênfase na obra *Applied Elements of Bifurcation Theory*. Contudo, podemos dizer também que há muitos problemas com abordagem deste último, no que compete ao estudo de formas normais. Enfatizamos alguns aqui.

1) Os trabalhos discutidos no parágrafo anterior estão baseados na versão de Y. Kuznetsov acerca do método de Poincaré (POINCARE, 1879). Apesar de intrigante, o método discutido por Kuznetsov trata-se de uma construção envolvendo expansões em série de Taylor. Tal método é conveniente para o estudo de sistemas unidimensionais, isso por quê, conforme Monteiro (2011), Teixeira *et al.* (2015b), Teixeira *et al.* (2015a), a forma normal das bifurcações sela-nó, transcítica, forquilha surge através deste método. Entretanto, envolvendo sistemas dinâmicos, principalmente aqueles modelados de sistemas físicos, nem sempre o estudo destes restringe-se ao caso 1D, uma vez que é grande a variedade de sistemas de dimensão $N \geq 2$. Segundo Chow, Drachman e Wang (1990), para esta classe de sistemas, além da determinação da forma normal não ser trivial por este método, esta também não é unívoca, o que a torna sua determinação ainda mais complicada.

Por outro lado, a abordagem envolvendo os teoremas de maior relevância deste trabalho reduzem de forma eficaz a determinação das formas normais para a classe de sistemas dinâmicos de dimensão $N \geq 2$, satisfazendo as condições estabelecidas por Andronov (1930) e E. Hopf (1942);

2) Kuznetsov, e outros autores (JR; AMARAL; ALBERTO, 2013, p. 177), estabelecem teoremas para a determinação de formas normais notáveis por exigirem condições de não-degenerescência. Todavia, tal condição não se deve aos trabalhos de E. Hopf (1942) para sistemas dinâmicos no \mathbb{R}^n , tampouco de Andronov (1930) para o \mathbb{R}^2 (ANDRONOV; VITT; KHAIKIN,

1996; HOPF; MORAWETZ; SERRIN, 2002). Além disso, esta condição não mostra-se como algo necessário a ser provado para a determinação das formas normais, dado que: (i) o método de formas normais de Takens-Ushiki¹ parte unicamente da forma canônica de Jordan para promover a computação da forma normal; (ii) os coeficientes da forma normal tem origem nos elementos \vec{g} que constitui o espaço G^k . Conforme discutido no Capítulo 4, os elementos deste espaço são

$$\vec{g} = \sum_{j=1} \beta_j \vec{m}_j, \quad (7.1)$$

onde, os coeficientes β_j são constantes e distintos de zero. Estes constituem os coeficientes da forma normal. Deste modo, não necessário provar a condição de não-degenerescência, uma vez que esta é consequência direta do formalismo de Takens-Ushiki. Não obstante, o formalismo permite ainda determinar tais coeficientes, conforme evidenciado no capítulo Capítulo 5, além dos trabalhos principais (USHIKI, 1984; CHUA; KOKUBU, 1988; CHUA; KOKUBU, 1989).

3) Conforme discutido por Kuznetsov, e outros autores (JR; AMARAL; ALBERTO, 2013, p. 148-164) procura-se eliminar da forma normal apresentada, nestes trabalhos, termos de ordem superior maiores ou iguais a 4, estabelecendo um homeomorfismo entre o sistema com termos de ordem 3. Tal resultado além de confuso, é totalmente desnecessário. Isso por quê, segundo Monteiro (2011, p.227-228) e Guckenheimer e Holmes (1983), para um sistema satisfazendo as condições de Hopf, com um par de autovalores imaginários puros, isto é, $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, o formalismo de Takens-Ushiki já estabelece que os termos da forma normal de grau par são do tipo não-ressonantes. Deste modo, termos de ordem 2,4, e assim por diante, não trazem contribuição para as formas normais.

4) A formulação do teorema apresentado por Kuznetsov, e outros autores (JR; AMARAL; ALBERTO, 2013, p. 177) leva à interpretações errôneas quanto os autovalores da matriz Jacobiana. Um sistema dinâmico no R^n pode exibir n autovalores (CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 1987). A definição imprecisa dos teoremas, apresentados nestes trabalhos, leva a uma compreensão equivocada, dado que estabelece como possibilidade o sistema admitir infinitos pares de autovalores complexo conjugados e ainda distintos do par $\lambda, \bar{\lambda}$, estabelecido pelo teorema de E. Hopf. Tal imprecisão se deve ao fato de que o teorema e os postulados apresentados não serem os mesmos propostos por E. Hopf (1942). O teorema de Hopf (HOPF; MORAWETZ; SERRIN, 2002, p. 111) exige que para sistemas dinâmicos apresentarem soluções periódicas, portanto a bifurcação que recebe seu nome, é necessário de que a matriz Jacobiana $\mathbf{A} = D_x f_\mu(z^*)$ tenha um par de autovalores imaginários $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ com a única exceção de que o restante do espectro seja real, não-nulo e distintos dos dois autovalores $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$, sendo estes os únicos autovalores da matriz Jacobiana no eixo imaginário.

Em resumo, os resultado obtidos em termos dos teoremas 6 e 7, bem como da análise de sistemas diversos a partir destes, permitiu evidenciar a eficácia destas novas abordagens, assim

¹ resumido pelo teorema 5.

como, os erros e imprecisões de abordagens anteriores. Estes atributos tornam estas alternativas viáveis para a obtenção de formas normais, bem como, para a determinação de propriedades de sistemas dinâmicos, uma vez que o mesmo apresenta a vantagem de estar em uma configuração caracterizada por ser a mais simples possível.

Acreditamos fortemente na abordagem como apresentada neste trabalho. Escrevemos esta para mostrar ao leitor a formulação em toda sua generalidade, de tal modo que se possa ver toda a força deste formalismo que, de modo algum liquida a necessidade das formas normais, apenas permite simplificar a sua determinação para classes de sistemas dinâmicos sujeitos a uma característica notória, ou seja, a bifurcação de Hopf.

CONCLUSÕES

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou provar que para um sistema dinâmico de dimensão $N \geq 2$ descrito por um conjunto de equações diferenciais, satisfazendo as condições de não-degenerescência e transversalidade do teorema da bifurcação de Hopf, apresenta uma forma geral simplificada denominada de forma normal.

Para a estruturação do resultado de maior relevância neste trabalho, o formalismo das formas normais e a teoria da variedade central desempenharam ambos papel fundamental ao longo do desenvolvimento. A teoria da variedade central possibilita com que seja reduzido a dimensão do espaço de estados de um determinado sistema dinâmico a sua variedade central. Por outro lado, o formalismo das formas normais proporciona, através de transformações de coordenadas, uma maneira com a qual o sistema dinâmico possa ser re-escrito em uma expressão analiticamente mais simples e que mantem as características e propriedades do sistema dinâmico original.

Em sua totalidade a determinação de formas normais para sistemas dinâmicos que exibem a bifurcação de Hopf, assim como outros sistemas de modo geral, não se trata de uma tarefa simples. Além disso, por mais variados que sejam, os métodos empregados para a obtenção das formas normais usualmente envolvem operações matriciais difíceis de serem realizadas sem cometer equívocos.

De certo modo, o desenvolvimento do presente estudo possibilitou realizarmos um esforço nesse sentido, uma vez que determinamos um conjunto de resultados teóricos que, em sua essência, reduzem enormemente o árduo trabalho para a obtenção de formas normais em uma classe de sistemas dinâmicos com ocorrência da bifurcação de Hopf, sendo ela supercrítica ou subcrítica.

Nesta perspectiva, os resultados principais desenvolvidos ao longo deste trabalho que se resumem aos teoremas 6 e 7 e seus respectivos corolários, nos fornecem um conjunto de ferramentas matemáticas, através das quais, é possível investigar sistemas dinâmicos com a

ocorrência da bifurcação de Hopf, além de determinar, com pouco esforço, a forma normal que os caracterizam.

8.1 Publicações Relacionadas à Tese

- i Da Silva, Vinícius Barros, Leonel, Edson Denis. "Evolution Towards the Steady State in a Hopf Bifurcation: A Scaling Investigation", *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, vol. 7, n. 1, pp. 67-79, 2018.
- ii Da Silva, Vinícius Barros, Leonel, Edson Denis. "A scaling investigation for a Van der Pol circuit:normal form applied to a Hopf bifurcation", *Int. J. Nonlinear Dynamics and Control*, vol. 1, n. 2, pp.154-170, 2018.
- iii Da Silva, Vinícius Barros, Leonel, Edson Denis, and Vieira, João Peres. "A new application of the normal form description to an N-dimensional dynamical systems attending the conditions of a Hopf bifurcation", *Journal of Vibration Testing and System Dynamics*, vol. 2, n. 3, pp. 249-256, 2018.
- iv Da Silva, Vinícius Barros. "Statistical Scaling Laws for Chemical Oscillators", *Physica A*, vol. 509 , n. 1 , pp. 66-73, 2018.

REFERÊNCIAS

- ALTMAN, E. J. Bifurcation analysis of chua's circuit with applications for low-level visual sensing. **Journal of Circuits, Systems and Computers**, World Scientific, v. 3, n. 63, p. 63–92, March 2000. Citado na página 62.
- ANDRONOV, A.; VITT, A.; KHAIKIN, S. E. **Theory of Oscillators**. Oxford: Pergamon Press, 1996. Citado nas páginas 20, 26, 27 e 66.
- BETANCUR, H. A. **Bifurcaciones basicas y formas normales**. Dissertação (phdthesis) — Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias, Bogota, 2010. Citado nas páginas 19 e 65.
- BICUDO, I. Demonstração em matemática. **Bolema**, v. 18, n. 1, p. 79–90, 2002. Citado na página 44.
- CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, C. F. R. **Álgebra linear e aplicações**. São Paulo: Atual Editora, 1987. Citado nas páginas 33 e 66.
- CARR, J. **Applications of central manifold theory: Applied mathematical sciences**. Nova York: Princeton University Press, 1981. Citado nas páginas 20 e 57.
- CHOW, S.; DRACHMAN, B.; WANG, D. Computation of normal forms. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 29, n. 2, p. 129–143, 1990. Citado nas páginas 18, 19, 63 e 65.
- CHUA, L. O. Chua's circuit 10 years later. **International Journal of Circuit Theory and Application**, v. 22, n. 4, p. 279–305, 1994. Citado na página 61.
- CHUA, O. L.; KOKUBU, H. Normal forms of nonlinear vector fields—part i: Theory and algorithm. **IEEE Trans. Circuits Sys.**, v. 35, n. 7, p. 863–880, 1988. Citado nas páginas 20, 35, 51 e 66.
- _____. Normal forms of nonlinear vector fields—part ii: Applications. **IEEE Trans. Circuits Sys.**, v. 36, n. 8, p. 51–70, 1989. Citado nas páginas 20, 35, 51 e 66.
- DAMIANO, D. B.; LITTLE, J. B. **A Course in Linear Algebra**. Nova York: Dover, 2014. Citado na página 46.
- DEVANEY, R. L. **A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory And Experiments**. Oxford: Nova York, 1992. Citado na página 23.
- FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. do. Estabilidade linear e não linear. In: _____. **Caos: uma introdução**. Nova York: Blücher, 1994. cap. 1, p. 53. Citado na página 24.
- FIEDLER, N.; PRADO, C. P. C. do. **Caos: uma introdução**. São Paulo: Livraria da Física, 2011. Citado nas páginas 16, 24, 26, 28, 32, 33 e 52.
- GLEICK, J. **Caos: a criação de uma nova ciência**. Nova York: Springer, 2008. Citado na página 60.

- GOWER, B. **Scientific Method: A Historical and Philosophical Introduction**. london: Routledge, 2012. Citado na página 44.
- GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Chaotic attractors in crisis. **Phys. Rev. Lett.**, v. 48, n. 1507, 1982. Citado na página 23.
- _____. Strange attractors that are not chaotic. **Physica D**, v. 13, n. 1, p. 261–268, 1982. Citado na página 23.
- GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields**. Nova York: Springer, 1983. Citado nas páginas 16, 18, 20, 23, 24, 26, 28, 31, 35, 37, 38, 51, 64 e 66.
- HASSARD, B.; WAN, Y. H. Bifurcation formulae derived from center manifold theory. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 63, n. 1, p. 297–312, 1982. Citado na página 59.
- HILBORN, R. C. **Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers**. Oxford: Oxford University Press, 2000. Citado na página 23.
- HOPF, E. Abzweigung einer periodischen losung von einer stationaren losung eines differentialsystems. **Ber. Math-Phys.**, v. 94, n. 2, p. 1–22, 1942. Citado nas páginas 20 e 28.
- HOPF, E.; MORAWETZ, S.; SERRIN, J. **Selected Works of Eberhard Hopf: With Commentaries**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2002. Citado nas páginas 20, 28, 58 e 66.
- JR, J. R. G.; AMARAL, F. M.; ALBERTO, L. F. Stability boundary characterization of nonlinear autonomous dynamical systems in the presence of a supercritical hopf equilibrium point. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 23, n. 12, p. 1350196, 2013. Citado nas páginas 19, 65 e 66.
- JUNIOR, A. P.; VIEIRA, J. P.; ALVES, C. **Formas elementares: Diagonal, triangular e de Jordan**. São Paulo: Cultura acadêmica Editora, 2014. Citado na página 46.
- KATOK, A.; HASSELBLATT, B. **Introduction to the modern theory of dynamical systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. Citado na página 23.
- KAZARINOFF N.D; HASSARD, B.; WAM, Y. **Theory and Applications of Hopf Bifurcation**. Cambridge: Cambridge University Press, 1981. Citado nas páginas 20, 56, 59 e 64.
- KHAIL, H. **Nonlinear Systems**. Nova Jersey: Springer, 1981. Citado nas páginas 20 e 57.
- KONDEPUDI, D.; PRIGOGINE, I. **Modern Thermodynamics: From Heat Engines to Dissipative Structures**. [S.l.]: Wiley, 2015. Citado nas páginas 52 e 53.
- LEONEL, E. D. Defining universality classes for three different local bifurcations. **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.**, v. 39, n. 30, p. 520–528, 2016. Citado nas páginas 16 e 17.
- LEONEL, J. L. d. S. E. D.; KAMPHORST, S. O. Relaxation and transients in a time-dependent logistic mapping. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 12, n. 7, p. 1667–1674, 2002. Citado nas páginas 16 e 17.
- MARSDEN, J. E.; MCCracken, M. **The Hopf bifurcation and its applications**. Nova York: Springer-Verlag, 1976. Citado nas páginas 16, 20, 26, 27, 28, 34, 37, 56, 58, 59 e 64.

- MATSUMOTO, T. A chaotic attractor from chua circuit. **Circuit and Systems, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 31, n. 7, p. 1055–1058, December 1984. Citado na página 61.
- MONTEIRO, L. **sistemas dinâmicos**. São Paulo: Livraria da Física, 2011. Citado nas páginas 16, 18, 19, 20, 23, 24, 28, 36, 38, 60, 63, 64, 65 e 66.
- MUKHERJEE, M.; HALDER, S. Stabilization and control of chaos based on nonlinear dynamic inversion. **Energy Procedia**, Elsevier, v. 117, n. 7, p. 731–738, June 2017. Citado na página 61.
- POINCARÉ, H. Tese (phdthesis), Gauthier - Villars, Paris, 1879. Citado nas páginas 19 e 65.
- PRESS, P. U. **Stability and Stabilization: An Introduction**. Oxford: Dover, 2014. Citado na página 46.
- PRIGOGINE, I. **Thermodynamics OF Irreversible processes**. [S.l.]: Wiley & Sons, 1967. Citado nas páginas 52 e 53.
- RUELLE, D.; TAKENS, F. On the nature of turbulence. **Comm. Math. Phys.**, v. 23, n. 2, p. 343–344, 1971. Citado nas páginas 20 e 26.
- RUSSEL, B. **Introdução à Filosofia Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 2006. Citado nas páginas 44 e 65.
- SAVI, M. A. **dinâmica não linear e Caos**. Rio de Janeiro: Epapers serviços editoriais, 2006. Citado na página 23.
- SILVA, V. B. Statistical scaling laws for chemical oscillators. **Physica A**, v. 509, n. 1, p. 66–73, 2018. Citado nas páginas 18 e 53.
- SILVA, V. B.; LEONEL, E. D. Evolution towards the steady state in a hopf bifurcation: A scaling investigation. **Discontinuity, Nonlinearity and Complexity**, v. 7, n. 1, p. 67–79, 2018. Citado na página 18.
- _____. A scaling investigation for a van der pol circuit: normal form applied to a hopf bifurcation. **Int. J. of Systems, Control and Communications**, v. 1, n. 2, p. 154 – 170, 2018. Citado na página 18.
- SPIVAK, M. **Calculus on Manifolds: A modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus**. Nova York: Addison-Wesley, 1965. Citado nas páginas 20 e 32.
- STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos**. Florida: CRC Press, 2015. Citado nas páginas 16, 24, 26, 52 e 60.
- TEIXEIRA, R. M. N.; RANDO, D. S.; GERALDO, F. C.; FILHO, R. N. C.; OLIVEIRA, J. A. de; LEONEL, E. D. Addendum to: “convergence towards asymptotic state 1-d mappings: A scaling investigation” phys. lett. a 379 (2015). **Physics Letters A**, v. 379, n. 30-31, p. 1796–1798, set. 2015. Citado nas páginas 17, 19 e 65.
- _____. Convergence towards asymptotic state in 1-d mappings: A scaling investigation. **Physics Letters A**, v. 379, n. 18-19, p. 1246–1250, jun. 2015. Citado nas páginas 16, 17, 19 e 65.
- TU, L. W. **An Introduction to Manifolds**. Nova York: Cambridge University Press, 2011. Citado nas páginas 20 e 32.

USHIKI, S. Normal forms for singularities of vector fields. **Japan J. Appl. Math.**, v. 1, p. 1–37, 1984. Citado nas páginas 20, 35, 51 e 66.

VERRI, J. A. **Estabilidade Global e Bifurcação de Hopf em um Modelo de HIV baseado em Sistemas do Tipo Lotka-Volterra**. Dissertação (mathesis) — Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente, jun. 2013. Citado nas páginas 19 e 65.