



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica

Arthur Nicolini Corazza

UTILIZAÇÃO DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO NÃO
LINEARES PARA AUMENTO DE EFICÁCIA DE
RECUPERADOR DE ENERGIA DO TIPO DIAPASÃO

Bauru

2018

Arthur Nicolini Corazza

UTILIZAÇÃO DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO NÃO
LINEARES PARA AUMENTO DE EFICÁCIA DE
RECUPERADOR DE ENERGIA DO TIPO DIAPASÃO

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica na Área de Projetos Mecânicos, como parte dos requisitos necessários à obtenção de Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Silveira

Bauru

2018

Corazza, Arthur Nicolini.

Utilização de rigidez e amortecimento não lineares
para aumento de eficácia de recuperador de energia
do tipo diapasão /

Arthur Nicolini Corazza, 2018

59 f. : il.

Orientador: Marcos Silveira

Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2018

1. Recuperação de energia. 2. Excitação
paramétrica. 3. Rigidez não linear. I. Universidade
Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II.
Título.

Errata

CORAZZA, Arthur Nicolini. Utilização de rigidez e amortecimento não lineares para aumento de eficácia de recuperador de energia do tipo diapasão. Bauru, 2018. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia, 2018.

Página de agradecimentos, linha 7.

Onde se lê: Ao apoio financeiro da FAPESP durante o período.

Leia-se: Ao apoio financeiro dado a esse projeto, através do processo nº 2016/11.200-9, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE ARTHUR NICOLINI CORAZZA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 12 dias do mês de dezembro do ano de 2018, às 14:00 horas, no(a) Anfiteatro da Pós-graduação / FEB, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. MARCOS SILVEIRA - Orientador(a) do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. FABRICIO CESAR LOBATO DE ALMEIDA do(a) Departamento de Engenharia de Biosistemas / Faculdade de Ciências e Engenharia de Tupã - UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de ARTHUR NICOLINI CORAZZA, intitulada **RIGIDEZ E AMORTECIMENTO NÃO LINEARES PARA AUMENTO DE EFICÁCIA DE RECUPERADOR DE ENERGIA DO TIPO DIAPASÃO**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO _____. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.


Prof. Dr. MARCOS SILVEIRA


Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES


Prof. Dr. FABRICIO CESAR LOBATO DE ALMEIDA

PROPOSTA DE ALTERAÇÃO DO TÍTULO


A BANCA EXAMINADORA PROPÕE A ALTERAÇÃO DO TÍTULO DO TRABALHO DO ALUNO:
ARTHUR NICOLINI CORAZZA

DE: "RIGIDEZ E AMORTECIMENTO NÃO LINEARES PARA AUMENTO DE EFICÁCIA DE RECUPERADOR DE ENERGIA DO TIPO DIAPASÃO."

PARA:

UTILIZAÇÃO DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO NÃO LINEARES
PARA AUMENTO DE EFICÁCIA DE RECUPERADOR DE ENERGIA
DO TIPO DIAPASÃO

Bauru, 12 de dezembro de 2018.


Prof. Dr. Marcos Silveira

orientador

Dedicatória...

*Aos meus pais, Aladio e Teresinha, aos meus irmãos Andreza e Aladio, e a minha
namorada Fernanda.*

Agradecimentos

Agradeço à minha família e amigos, que sempre me apoiaram nos estudos e me ajudaram nos momentos difíceis.

Ao meu orientador Professor Dr. Marcos Silveira pelo comprometimento, dedicação, paciência e conhecimentos transmitidos.

Aos demais professores e membros do grupo de pesquisa NDE pelos ensinamentos e apoios nas disciplinas.

Ao apoio financeiro da FAPESP durante o período.

Resumo

CORAZZA, A. N., UTILIZAÇÃO DE RIGIDEZ E AMORTECIMENTO NÃO LINEARES PARA AUMENTO DE EFICÁCIA DE RECUPERADOR DE ENERGIA DO TIPO DIAPASÃO, Bauru: Faculdade de Engenharia, UNESP - Universidade Estadual Paulista, 2018, 59 p., Dissertação (Mestrado).

Neste trabalho, o comportamento dinâmico de um giroscópio do tipo diapasão para recuperação de energia será estudado. O giroscópio consiste em duas vigas verticais engastadas sobre uma massa de suspensão. A massa suspensa é sujeita a força de excitação vertical, e pode-se mostrar que o sistema é um sistema parametricamente excitado. Quando as vigas oscilam em fase, a excitação paramétrica pode levar a vibração no movimento horizontal da massa de suspensão. O problema é particularmente interessante para captação ou recuperação de energia. Devido à interação entre os graus de liberdade do sistema, a energia é transferida a partir da direção vertical à direção horizontal. Estudos paramétricos serão realizados para analisar o comportamento dinâmico do sistema no que se refere ao desempenho de recuperação de energia. Será analisado o impacto da introdução de não linearidades de rigidez e amortecimento para aumentar a eficiência do dispositivo. Será analisada também a existência de regimes periódicos, quasiperiódicos e caóticos, e sua influência na transferência de energia entre as direções vertical e horizontal.

Palavras-chave: recuperação de energia, rigidez não linear, amortecimento não linear

Abstract

CORAZZA, A. N., USE OF NONLINEAR STIFFNESS AND DAMPING TO INCREASE ENERGY RECOVERY EFFICIENCY OF THE TUNING FORK TYPE GYROSCOPE, Faculty of Engineering, UNESP - São Paulo State University, 2018, 59 p., Dissertation (Master degree).

In this work, the dynamical behaviour of a tuning-fork gyroscope for energy harvesting will be studied. The gyroscope consists of two vertical beams fixed on a suspension mass, which is subject to vertical excitation force. It can be shown that the system is parametrically excited. When the beams oscillate in phase, the parametric excitation can lead to vibration in the horizontal direction. The problem is particularly interesting for energy harvesting. Due to the interaction between the degrees of freedom of the system, energy is transferred from the vertical toward the horizontal direction. Parametric studies will be performed to analyse the dynamical behaviour of the system with respect to energy recovery performance. The impact of the introduction of nonlinear stiffness and damping to increase the device efficiency will be analysed. The existence of periodic, quasi-periodic and chaotic regimes will be investigated, and its influence on the energy transfer between the vertical and horizontal directions.

Keywords: energy recovery, nonlinear stiffness, nonlinear damping

LISTA DE SÍMBOLOS

Designação	Explicação
Símbolos latinos	
A	amplitude de excitação da base
c	coeficiente de amortecimento viscoso
c_n	coeficiente de amortecimento não linear
F_{nc}	força não conservativa
g	aceleração da gravidade
k	coeficiente linear de rigidez da mola
k_n	coeficiente não linear de rigidez da mola
k_{t_i}	coeficiente linear de rigidez torcional da mola
k_{tn_i}	coeficiente não linear de rigidez torcional da mola
L	Lagrangeano
l_i	comprimento da haste
M	massa do bloco
m_i	massa da haste
T	energia cinética
V	energia potencial
y	deslocamento do bloco
y_b	deslocamento vertical da base
z	deslocamento relativo
Z	deslocamento admensional

Símbolos gregos

θ_i	deslocamento angular da haste
δ_1	coeficiente adimensional de amortecimento
δ_2	coeficiente adimensional de amortecimento não linear
δ_3	coeficiente adimensional de rigidez
δ_4	coeficiente adimensional de rigidez não linear
δ_5	coeficiente adimensional de rigidez torcional da mola 1
δ_6	coeficiente adimensional de rigidez torcional não linear mola 1
δ_7	coeficiente adimensional de rigidez torcional da mola 2
δ_8	coeficiente adimensional de rigidez torcional não linear mola 2
η_i	razão de amplitude
λ_i	razão de massa
τ	tempo adimensional
ω	freqüencia de oscilação

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Aspectos gerais de recuperadores de energia	2
1.2	Justificativa	6
1.3	Objetivos	7
1.4	Estrutura da Dissertação	7
2	METODOLOGIA	9
3	MODELAGEM DO GIROSCÓPIO DO TIPO DIAPASÃO	10
3.1	Modelagem do sistema com 2 DOF	10
3.2	Modelagem do sistema com 3 DOF	14
4	EXPLORAÇÃO NUMÉRICA DAS NÃO LINEARIDADES	18
4.1	Sistema 2 DOF	18
4.2	Sistema 3 DOF	26
5	COMPARAÇÃO DAS CURVAS <i>BACKBONE</i> UTILIZANDO OS DIFERENTES TERMOS NÃO LINEARES	37
5.1	Modelo linear	37
5.2	Modelo com amortecimento não linear c_n	38
5.3	Modelo com rigidez não linear k_n	39
5.4	Modelo com rigidez torcional não linear k_{tn}	40
5.5	Curvas backbone para todos os parâmetros	40
6	RESPOSTAS CAÓTICAS	42

7	CONCLUSÕES	45
8	DISSEMINAÇÃO DOS RESULTADOS	47
9	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	48

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O conceito de recuperação de energia (do inglês “energy harvesting”) baseia-se na captação de energia presente no ambiente e a sua conversão em energia elétrica. As aplicações do princípio de recuperação de energia estendem-se a diversos campos de atuação. A energia do ambiente pode ser transformada utilizando-se vários tipos de transdutores, como químicos, piroelétricos, piezoelétricos, eletrostáticos e eletromagnéticos. Transdutores eletromecânicos são bem explorados em engenharia, principalmente transdutores piezoelétricos ou eletromagnéticos. Este último utiliza uma bobina com ímã permanente, convertendo perturbação mecânica em energia eletromagnética [1].

Dispositivos recuperadores de energia podem substituir fontes externas de energia em sistemas embarcados, fornecendo energia elétrica recuperada a partir de vibrações mecânicas presentes no ambiente. Por exemplo, recuperadores de energia podem ser utilizados para suprir energia a sistemas de sensores sem fio para monitoramento estrutural, possibilitando grande flexibilidade e posicionamento de sensores em locais de difícil acesso [2].

Giroscópios vibratórios do tipo diapasão são utilizados para medir velocidade angular. Eles são dispositivos não rotacionais e funcionam com base no efeito de aceleração de Coriolis. Eles consistem de dois prolongamentos, os quais vibram em sentidos opostos para medir a velocidade angular. O seu desempenho é limitado devido ao seu tamanho pequeno e imperfeições na fabricação. O aumento da amplitude ou velocidade de excitação pode melhorar o seu desempenho. No entanto, isto depende da potência fornecida pela fonte externa.

Já foi estudado que excitação paramétrica pode ser utilizada para aumentar a amplitude das vibrações dos dois prolongamentos. Por exemplo, Ghandchi Tehrani *et al.* [3] investigaram experimentalmente a instabilidade causada pela excitação paramétrica em uma viga esbelta sujeita a excitação da base. Quando a frequência de excitação da base é o dobro da frequência natural da viga, grandes amplitudes de vibração podem ocorrer na direção perpendicular ao movimento da base. Lee [4] demonstrou a resposta de um diapásão sujeito a excitação paramétrica experimentalmente. Foi mostrado que a excitação paramétrica pode ser aproveitada de modo a aumentar a sensibilidade dos giroscópios diapásão. Vibrações de sistemas parametricamente excitados com fontes de energia ideais e não ideais têm sido investigadas [5], como um sistema que consiste de um oscilador mecânico não linear com um pêndulo amortecido [6]. A interação dinâmica entre sistemas pendulares e com excitação pela base também tem sido considerada. Xu *et al.* [7] empregou técnicas numéricas e analíticas para explorar a dinâmica do pêndulo paramétrico harmonicamente excitado quando ele exhibe órbitas rotacionais e oscilatórias.

1.1 ASPECTOS GERAIS DE RECUPERADORES DE ENERGIA

A máxima recuperação de energia possível está sujeita a restrições quanto ao tamanho, peso e custo do sistema. É intuitivo que um dispositivo que exhibe comportamento ressonante irá fornecer o melhor desempenho, e os efeitos potencialmente benéficos de adição de rigidez e amortecimento não linear também são considerados [8]. Existem diversas configurações de recuperadores de energia. Por exemplo, Beeby *et al.* [2] e Kulkarni *et al.* [9] analisaram microgeradores eletromagnéticos, otimizados para a recuperação de energia em ambientes com baixa vibração. O fato deste sistema ter um tamanho reduzido proporciona um maior aproveitamento da grande densidade de enrolamento da bobina e das propriedades magnéticas do material da massa. Portanto, os resultados obtidos mostram que é possível obter energia utilizável a partir de microgeradores, o que demonstra ser um futuro promissor para os sensores sem fio, sistemas em que há a necessidade da autonomia do dispositivo ou para o reaproveitamento da energia dissipada.

Considerando a aplicabilidade desses dispositivos para sistemas de grande escala, Munteanu *et al.* [10] exploraram o uso de dispositivos eletromecânicos como amortecedores de vibração em pequenos edifícios. Brasil *et al.* [11] estudaram a recuperação de energia através de sistema eletromecânico em estruturas de turbinas eólicas. Zhu *et al.* [12] analisaram a aplicação de sistemas de amortecimento eletromagnéticos de movimento linear em estruturas civis a fim de atenuar as vibrações e recuperar a energia vibratória. Além da atuação como um dispositivo de amortecimento, estes sistemas recuperam energia, podendo ser utilizados em sensores sem fio para transmissão de dados e informações sobre a estrutura, por exemplo. No estudo, quatro tipos diferentes de circuitos elétricos ligados ao amortecedor eletromagnético foram estudados, tanto teoricamente, quanto experimentalmente. A atuação do amortecedor eletromagnético e a recuperação energética são altamente afetados pelo tipo de circuito elétrico ligado ao amortecedor. Os autores afirmam que a utilização destes tipos de amortecedores em estruturas civis é promissor.

Outra aplicação estudada de sistemas de recuperação de energia envolve sistemas regenerativos de suspensão automotivos e ferroviários. Em um sistema de amortecimento veicular comum, os amortecedores viscosos dissipam energia em forma de calor, ou seja, perde-se energia para o ambiente. A implementação de um sistema de recuperação de energia possibilita que parte desta energia seja reaproveitada. Estes dispositivos apresentam vantagens em comparação ao amortecedor viscoso convencional, como maior facilidade de aplicação de um controle ativo e de ajuste de parâmetros, absorção em maior faixa de frequências, e possibilidade de recuperação de energia do sistema [13, 14]. Um modelo de amortecedor eletromagnético foi demonstrado por Kawamoto *et al.* [15]. O uso de controle ativo no sistema de suspensão mostrou ser possível redução considerável de vibrações com balanço positivo de energia.

Alguns autores estudaram as condições ideais para uma máxima recuperação de energia. Stephen [16], por exemplo, estudou a recuperação de energia oriunda da vibração presente no ambiente. É importante salientar que a quantidade de energia fornecida à parte elétrica do sistema não pode ser maior do que a dissipada pela parte mecânica. Portanto para um máximo fluxo de energia no aparelho, são necessárias as condições ideais em dois fatores, o ambiente (frequência e amplitude) e o tamanho do aparelho.

Recentemente houve muito interesse no conceito de sistemas microeletromecânicos de baixa potência (MEMS) que são capazes de recuperar energia de seu ambiente operacional. Como a energia a ser recuperada é pouca, um sensor inteligente, que mede o nível de vibração, faz com que o dispositivo recupere e armazene energia durante um período de tempo, antes de realizar uma leitura, e depois faz um novo período de recuperação. Tais dispositivos podem ser utilizados em ambientes hostis ou de difícil acesso, e que exigem pouca ou nenhuma manutenção. A amplitude do deslocamento de uma massa sob excitação da base está limitada em qualquer dispositivo prático e isso, juntamente com a magnitude e frequência da excitação, definem a máxima potência que pode ser extraída a partir do ambiente [16].

Renno *et al.* [17] consideraram os subsistemas mecânico e elétrico para uma otimização do sistema de recuperação de energia. Mostrou-se que determinados valores da razão de amortecimento resultam em dois valores (ressonância e antirressonância) onde a recuperação é máxima. Além disso, materiais com valores de acoplamento eletromecânico maiores nem sempre acarretam em uma maior recuperação de energia. Em relação ao sistema elétrico, a utilização de um indutor ideal no circuito pode aumentar consideravelmente a recuperação de energia.

Um gerador linear ressonante tem sido o tipo mais comum de gerador usado em recuperação de energia. No entanto, o bom desempenho do gerador está limitado a uma estreita faixa de frequências, quando o dispositivo está sintonizado de modo que a sua frequência natural coincide com a frequência de excitação. Se mal sintonizado, o desempenho do gerador de ressonância cai rapidamente. Análises baseadas no princípio da conservação de energia revelam uma eficácia de qualquer dispositivo não linear sobre um dispositivo linear para tal aplicação. Diversos trabalhos exploram características não lineares de recuperadores de energia eletromagnéticos de forma a aumentar a eficiência energética. Por exemplo, a presença de não linearidades geométricas e de ferorressonância podem melhorar o desempenho do sistema [18]. Um sistema eletromagnético considerando uma relação não linear entre campo magnético e a posição da bobina mostrou que a transferência de energia sofre grande impacto nas transições entre oscilações periódicas e caóticas [19].

Dois mecanismos não lineares foram considerados por Ramlam *et al.* [20]. O primeiro

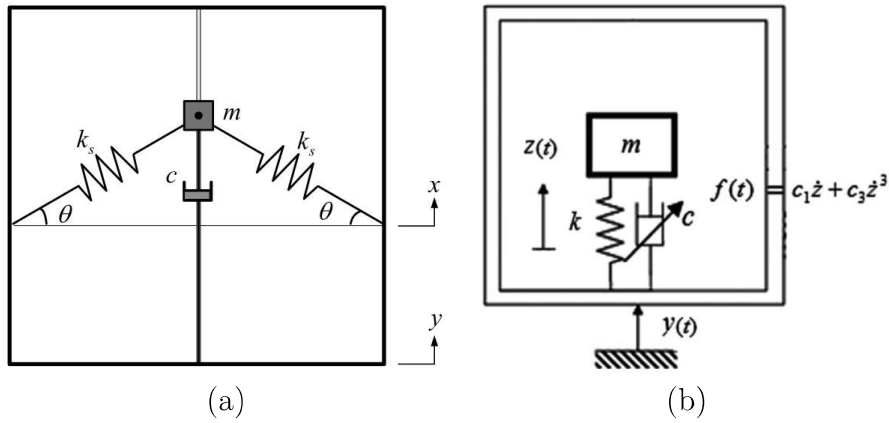


Figura 1.1: Sistema com rigidez não linear (a) e sistema com amortecimento não linear (b) para aumentar recuperação de energia. Fontes: Ramlam *et al.* [20]; Ghandchi Tehrani & Elliot [21]

sistema tem um mecanismo não linear biestável do tipo *snap-through* de um grau de liberdade (figura 1.1-a), que tem o efeito de aumento da resposta de deslocamento da massa em função de tempo, resultando em uma maior velocidade para uma dada excitação de entrada, aumentando assim a quantidade de energia recuperada. O outro sistema não linear estudado tem uma mola endurecida, que tem o efeito de deslocar a frequência de ressonância.

Com relação a amortecimento não linear, Ghandchi Tehrani & Elliott [21] utilizaram amortecimento não linear cúbico em um sistema mecânico para recuperação de energia (figura 1.1-b), a fim de investigar um método de aumentar o intervalo dinâmico de operação do recuperador de energia. Foi visto que um recuperador não linear fornece maior potência na ressonância, em comparação com um recuperador linear.

1.1.1 GIROSCÓPIO DO TIPO DIAPASÃO PARA RECUPERAÇÃO DE ENERGIA

Ghandchi Tehrani *et al.* [22] analisaram a dinâmica de um modelo de um giroscópio do tipo diapasão, mostrado na figura 1.2. As duas vigas verticais engastadas em uma massa de suspensão podem vibrar em ambos o movimento horizontal e vertical. O sistema está sujeito a excitação de base por meio de um *shaker* eletromecânico, cuja dinâmica interage com a estrutura. O problema é complexo, uma vez que há acoplamento entre os graus de liberdade através da excitação paramétrica, inércia e não linearidades geométricas.

Utilizando diferentes representações, tais como respostas de tempo, respostas em

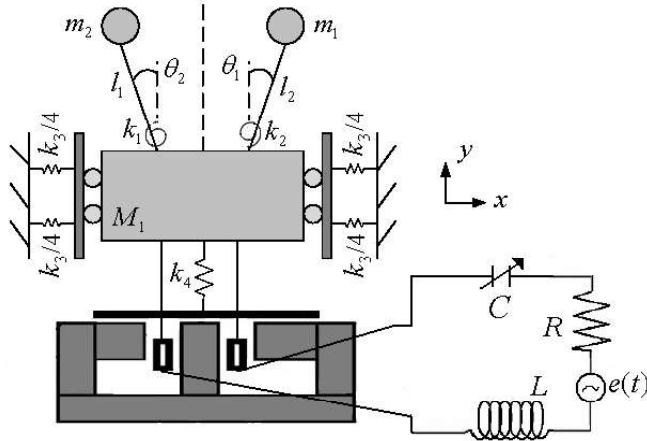


Figura 1.2: Desenho esquemático de recuperador de energia de giroscópio do tipo diapasão. Fonte: Ghandchi Tehrani *et al.* [22].

frequência e retratos de fase, foi visto que o sistema pode ter comportamento periódico e caótico, dependendo dos parâmetros relacionados à excitação da base. Devido à interação entre os graus de liberdade do sistema, a energia é transferida da direção vertical para a direção horizontal.

Dentro deste contexto, neste trabalho deseja-se dar continuidade à análise da dinâmica de um dispositivo giroscópio do tipo diapasão, com foco em aplicação a sistemas de recuperação de energia. Pretende-se investigar os efeitos da inclusão de rigidez e amortecimento não lineares na eficiência de transferência de energia entre os graus de liberdade do sistema. Também serão analisados em detalhes os movimentos em fase e fora de fase das vigas verticais. As análises serão realizadas utilizando-se excitação harmônica.

1.2 JUSTIFICATIVA

A busca por novas fontes de energia tem sido um dos desafios da ciência nos últimos tempos. Sistemas autônomos geralmente são alimentados através de baterias, que são fontes finitas de energia. Nesse contexto, o uso de dispositivos de recuperação de energia são usados a fim de aumentar a autonomia das baterias, convertendo mínimas quantidades de energia presentes no meio ambiente em eletricidade, acumulando-a e armazenando-a para uso posterior. O desenvolvimento de sistemas de recuperação de energia requer a

construção de modelos físicos e matemáticos onde, na maioria das vezes, engenheiros adotam apenas uma abordagem linear. Em outros casos, não linearidades são introduzidas a fim de alterar o comportamento dinâmico do sistema, produzindo benefícios tais como colheita de energia e transferência de energia.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo deste projeto de pesquisa é estudar o comportamento dinâmico de um sistema giroscópio do tipo diapasão usado como recuperador de energia, de forma a utilizar vibração na direção transversal à excitação. Este objetivo principal será dividido em três partes:

1. Analisar o impacto de inclusão de rigidez e amortecimento não lineares nos suportes da massa e nas vigas verticais na dinâmica do sistema, com foco na transferência de energia entre os graus de liberdade do sistema.
2. Analisar os movimentos em fase e fora de fase das vigas verticais do sistema, de forma a identificar e quantificar o efeito da diferença de fase entre o movimento das duas vigas.
3. Analisar a existência de regimes periódicos e caóticos para excitação harmônica, e sua influência na transferência de energia entre os graus de liberdade do sistema.

1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação encontra-se estruturada da seguinte forma: o capítulo 2 mostra a metodologia a ser empregada para análise do comportamento dinâmico do sistema. O capítulo 3 apresenta a modelagem do giroscópio do tipo diapasão como recuperador de energia demonstrando a obtenção das equações dinâmicas pelo método de Lagrange. O capítulo 4 apresenta os resultados das simulações envolvendo os parâmetros não lineares de rigidez e amortecimento, onde são realizadas análises de máximo deslocamento em função da frequência. No capítulo 5 foram observadas as comparações das curvas *backbones* para os casos com o modelo tendo todos os termos lineares, somente com amor-

tecimento não linear, somente com rigidez não linear, e somente com rigidez torcional não linear, mostrando que, mesmo incluindo termos cúbicos positivos, o comportamento resultante possui na maioria das vezes característica *softening*. Durante as análises das seções anteriores foi verificado que o sistema pode apresentar respostas aperiódicas ou caóticas. No capítulo 6 estas respostas são mostradas em mais detalhes para o modelo com a rigidez não linear (k_n). Foram mostrados históricos de deslocamento, velocidade e planos de fase com seção de Poincaré onde foi verificado que o sistema pode apresentar respostas aperiódicas ou caóticas. O capítulo 7 apresenta as conclusões obtidas.

CAPÍTULO 2

METODOLOGIA

Um modelo matemático baseado no que foi discutido por Ghandchi Tehrani *et al.* [22] (figura 1.2) será utilizado de forma simplificada, sem acoplamento com a dinâmica da base. Inicialmente, será utilizada uma aproximação com três graus de liberdade (movimento vertical da massa e flexão das duas vigas). Uma análise paramétrica será feita para determinar a sensibilidade da resposta dinâmica a variações nos termos não lineares. Soluções analíticas aproximadas serão desenvolvidas onde possível, utilizando o método de balanço harmônico, múltiplas escalas, modos normais não lineares e o conceito de *targeted nonlinear energy transfer*. Posteriormente, o movimento lateral da massa será incluído no modelo, resultando em um modelo de quatro graus de liberdade. As análises já mencionadas serão refeitas para esse modelo.

O movimento das duas vigas verticais será investigado para situações em fase e fora de fase utilizando o conceito de sincronização de sistemas dinâmicos. Será analisada a influência da diferença de fase na transferência de energia entre os modos de vibrar.

Serão utilizadas ferramentas computacionais para analisar a existência de regimes periódicos, quasiperiódicos e caóticos, bem como a eficiência de recuperação energética em cada regime.

CAPÍTULO 3

MODELAGEM DO GIROSCÓPIO DO TIPO DIAPASÃO

Neste capítulo serão deduzidas as equações de movimento do giroscópio do tipo diapasão. As equações de movimento serão obtidas através do método de Lagrange. Para isso é necessário obter as energias cinética e potencial do sistema. Duas versões do modelo apresentado no capítulo 1 são apresentados, uma com 2 graus de liberdade (2-DOF), referente a um sistema com uma haste única, e outra com três graus de liberdade (3-DOF), referente a um sistema com duas hastes. Também são apresentadas as equações na forma adimensional. Além disso, são apresentadas as equações de estado, necessárias para as análises nos capítulos seguintes.

3.1 MODELAGEM DO SISTEMA COM 2 DOF

O modelo de giroscópio de diapasão com 2 graus de liberdade, referente a um sistema com uma única haste, é mostrado na figura 3.1. A haste é representada por um pêndulo simples de massa m_1 , acoplado a um bloco de massa M sob excitação harmônica vertical da base y_b , sendo k a constante elástica da mola, c o amortecimento referente ao amortecedor ligado ao bloco, e k_{t1} a rigidez da mola torcional ligada à haste. Os termos não lineares referentes ao amortecimento c_n , rigidez k_n e rigidez torcional k_{tn_1} também foram incluídos na análise.

A coordenada $y(t)$ define o deslocamento da massa M , e a coordenada $\theta(t)$ repre-

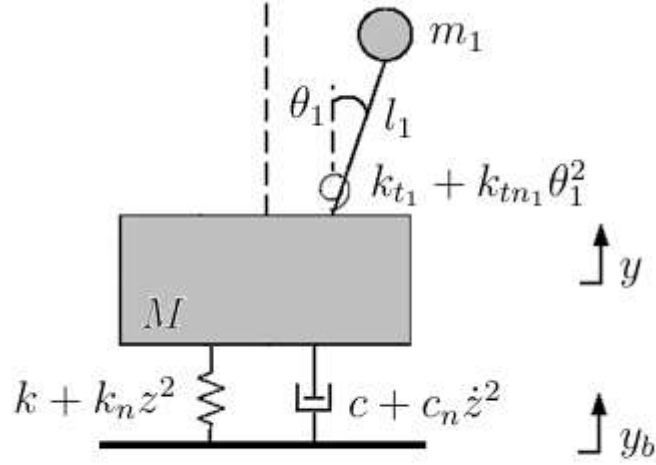


Figura 3.1: Modelo do giroscópio com 2 graus de liberdade excitado harmonicamente pela base

senta o deslocamento angular da haste. As coordenadas que definem os deslocamentos horizontal e vertical da massa m_1 são dadas pela equação 3.1.

$$x_{m_1} = l_1 \sin \theta \qquad y_{m_1} = y + l_1 \cos \theta \qquad (3.1)$$

As equações de movimento são obtidas utilizando-se o método de Lagrange. Para isso é necessário conhecer o Lagrangeano L , que representa a diferença entre as energias cinética T e potencial V do sistema, conforme visto pela equação 3.2.

$$L = T - V \qquad (3.2)$$

A energia cinética deve-se ao movimento das massas M e m_1 (equação 3.3), e a energia potencial está relacionada com a altura das massas e deformação da mola (equação 3.4).

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_{m_1}^2 + \dot{y}_{m_1}^2) \qquad (3.3)$$

$$V = \frac{1}{2}k(\dot{y}_M - \dot{y}_b)^2 + \frac{1}{4}k_n(\dot{y}_M - \dot{y}_b)^4 + \frac{1}{2}k_t\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{4}k_{tn}\dot{\theta}_1^4 + m_1gy_{m_1} \qquad (3.4)$$

Tendo obtido o Lagrangeano, faz-se o uso da equação diferencial de Euler-Lagrange (equação 3.5) para obtenção das equações de movimento, onde q se refere à coordenada generalizada e F_{nc} às forças não conservativas relacionadas ao amortecimento.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_{nc} \quad (3.5)$$

As forças não conservativas referentes ao amortecimento podem ser vistas na equação 3.6.

$$F_{nc_1} = -c(\dot{y} - \dot{y}_b) - c_n(\dot{y} - \dot{y}_b)^3 \quad (3.6)$$

Aplicando-se a equação diferencial de Euler Lagrange para as coordenadas y e θ obtém-se as equações de movimento, como mostra a equação 3.7.

$$\begin{aligned} (M + m_1)\ddot{y} - m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1) + \\ + c(\dot{y} - \dot{y}_b) + c_n(\dot{y} - \dot{y}_b)^3 + k(y - y_b) + k_n(y - y_b)^3 + m_1 g = 0 \\ -m_1 l_1 \ddot{y} \sin(\theta_1) + m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_1 g l_1 \sin(\theta_1) + k_{t_1} \theta_1 + k_{tn_1} \theta_1^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Definindo M_t a massa total do sistema ($M_t = M + m_1$) e z como sendo o deslocamento relativo ($z = y - y_b$) e somando-se $-M_t \ddot{y}_b$ em ambos os membros da primeira equação, as equações de movimento podem ser reescritas conforme visto na equação 3.8.

$$\begin{aligned} M_t \ddot{z} - m l \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - m l \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1) + c \dot{z} + c_n \dot{z}^3 + k z + k_n z^3 + m_1 g = -M_t \ddot{y}_b \\ -m_1 l_1 \ddot{y} \sin(\theta_1) + m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_1 g l_1 \sin(\theta_1) + k_{t_1} \theta_1 + k_{tn_1} \theta_1^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

A equação 3.8 pode ser escrita na forma adimensional, tomando-se como base os seguintes parâmetros adimensionais descritos pela equação 3.9, onde τ é o tempo adimensional, Z o deslocamento adimensional, dado pela razão entre a coordenada z do deslocamento relativo vertical do sistema e a amplitude A da excitação pela base, e Y_b

a razão entre a coordenada y_b e A .

$$\tau = \omega t \qquad Z = \frac{z}{A} \qquad Y_b = \frac{y_b}{A} \qquad (3.9)$$

Através da regra da cadeia e utilizando os parâmetros adimensionais fornecidos pela equação 3.9 obtêm-se as derivadas das coordenadas z , y_b e θ_1 , dados pela equação 3.10:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Z' A \omega & \dot{y}_b &= Y_b' A \omega & \dot{\theta}_1 &= \theta_1' \omega \\ \ddot{z} &= Z'' A \omega^2 & \ddot{y}_b &= Y_b'' A \omega^2 & \ddot{\theta}_1 &= \theta_1'' \omega^2 \end{aligned} \qquad (3.10)$$

As equações de movimento na forma adimensional podem ser vistas na equação 3.11, e os parâmetros adimensionais estão descritos na equação 3.12.

$$\begin{aligned} Z'' + \delta_1 Z' + \delta_2 (Z')^3 + \delta_3 Z + \delta_4 Z^3 - \lambda_1 (\theta_1'' \sin \theta_1 + (\theta_1')^2 \cos \theta_1) + \sigma_1 &= Y_b'' \\ \theta_1'' + \delta_5 \theta_1 + \delta_6 \theta_1^3 - \eta_1 \sin \theta_1 (Z'' - \gamma) &= 0 \end{aligned} \qquad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{c}{M_t \omega} & \delta_2 &= \frac{c_n}{\sqrt{(M_t k)^3}} & \delta_3 &= \frac{k}{M_t \omega^2} & \delta_4 &= \frac{k_n A^2}{M_t \omega^2} \\ \delta_5 &= \frac{k_{t1}}{m_1 l_1^2 \omega^2} & \delta_6 &= \frac{k_{tn1}}{m_1 l_1^2 \omega^2} & \lambda_1 &= \frac{m_1 l_1}{M_t A} & \sigma_1 &= \frac{m_1 g}{M_t A \omega^2} \\ \eta_1 &= \frac{A}{l_1} & \gamma &= \frac{g}{A \omega^2} \end{aligned} \qquad (3.12)$$

As equações de movimento formam um sistema com duas equações diferenciais de segunda ordem. Usando a representação no domínio de espaço de estados essas equações podem ser escritas com quatro equações diferenciais de primeira ordem. Para isso faz-se o uso das seguintes variáveis de estado:

$$y = y_1 \qquad \dot{y} = y_2 \qquad \theta_1 = y_3 \qquad \dot{\theta}_1 = y_4 \qquad (3.13)$$

As equações de estado são dadas pelas derivadas das variáveis de estado:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_2 \\
\dot{y}_2 &= [- [k(y_1 - y_b) + k_n(y_1 - y_b)^3 + c(y_2 - \dot{y}_b) + c_n(y_2 - \dot{y}_b)^3] l_1 \\
&\quad - [k_{t_1} y_3 + K_{tn_1} y_3^3] \sin y_3 - m_1 g l_1 \cos^2 y_3 + m_1 l_1^2 y_4^2 \cos y_3] \\
&\quad / (M l_1 + m_1 l_1 \cos^2 y_3) \\
\dot{y}_3 &= y_4 \\
\dot{y}_4 &= [- [k(y_1 - y_b) + k_n(y_1 - y_b)^3 + c(y_2 - \dot{y}_b) + k_n(y_2 - \dot{y}_b)^3] m_1 l_1 \sin y_3 \\
&\quad - [k_{t_1} y_3 + K_{tn_1} y_3^3] (M + m_1) + M m_1 g l_1 \sin y_3 + m_1^2 l_1^2 y_4^2 \sin y_3 \cos y_3] \\
&\quad / m_1 l_1 (M l_1 + m_1 l_1 \cos^2 y_3) \tag{3.14}
\end{aligned}$$

3.2 MODELAGEM DO SISTEMA COM 3 DOF

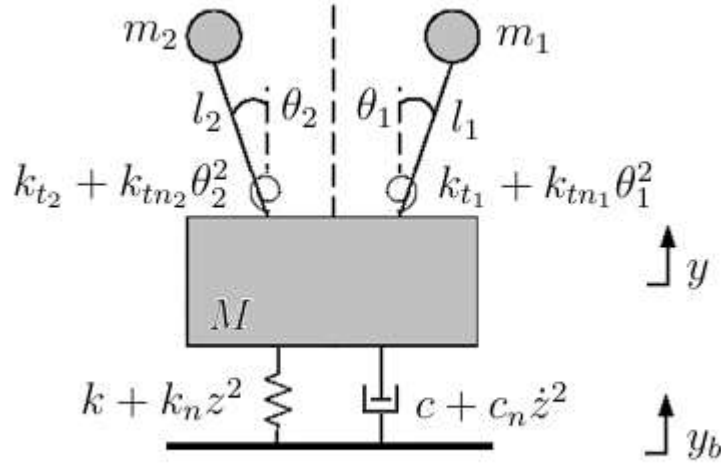


Figura 3.2: Desenho esquemático de um giroscópio tipo diapásão para recuperação de energia

Para realizar análise de resposta em fase e antifase, é necessário incluir as duas hastes no modelo. Isto é feito adicionando-se mais uma haste ao bloco conforme visto na figura 3.2. Semelhante à primeira, a segunda haste é modelada através de um pêndulo de massa m_2 , comprimento l_2 , rigidez k_{t_2} e rigidez não linear k_{tn_2} . Utilizando-se o método de Lagrange, conforme visto na seção 3.1, as equações de movimento do sistema são

dadas por 3.15:

$$\begin{aligned}
(M + m_1 + m_2)\ddot{y} - m_1 l_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_2 \sin \theta_2 \ddot{\theta}_2 - m_1 l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\
+c(\dot{y} - \dot{y}_b) + c_n(\dot{y} - \dot{y}_b)^3 + k(y - y_b) + k_n(y - y_b)^3 + (m_1 + m_2)g = 0 \\
-m_1 l_1 \sin \theta_1 \ddot{y} + m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + k_{t1} \theta_1 + k_{tn1} \theta_1^3 - m_1 g l_1 \sin \theta_1 = 0 \\
-m_2 l_2 \sin \theta_2 \ddot{y} + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + k_{t2} \theta_2 + k_{tn2} \theta_2^3 - m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Sendo a massa total do sistema $M_t = M + m_1 + m_2$, z o deslocamento relativo ($z = y - y_b$), e subtraindo $M_t \ddot{y}_b$ em ambos os membros da primeira equação, as equações de movimento podem ser simplificadas segundo a equação 3.16:

$$\begin{aligned}
M_t \ddot{z} - \sum_{i=1}^2 m_i l_i (\ddot{\theta}_i \sin \theta_i + \dot{\theta}_i^2 \cos \theta_i) + c \dot{z} + c_n \dot{z}^3 + k z + k_n z^3 + (m_1 + m_2)g = -M_t \ddot{y}_b \\
-m_1 l_1 \sin \theta_1 \ddot{y} + m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + k_{t1} \theta_1 + k_{tn1} \theta_1^3 - m_1 g l_1 \sin \theta_1 = 0 \\
-m_2 l_2 \sin \theta_2 \ddot{y} + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + k_{t2} \theta_2 + k_{tn2} \theta_2^3 - m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Seguindo o mesmo raciocínio desenvolvido na seção 3.1 e tomando-se como referência os parâmetros adimensionais descritos pela equação 3.18, as equações de movimento na forma adimensional para o sistema 3-DOF podem ser vistas através da equação 3.17.

$$\begin{aligned}
Z'' + \delta_1 Z' + \delta_2 (Z')^3 + \delta_3 Z + \delta_4 Z^3 - \sum_{i=1}^2 \lambda_i (\theta_i'' \sin \theta_i + \theta_i'^2 \cos \theta_i) + \sigma_2 = -Y_b'' \\
\theta_1'' + \delta_5 \theta_1 + \delta_6 \theta_1^3 - \eta_1 \sin \theta_1 (Y'' + \gamma) = 0 \\
\theta_2'' + \delta_7 \theta_2 + \delta_8 \theta_2^3 - \eta_2 \sin \theta_2 (Y'' + \gamma) = 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{c}{M_t \omega} & \delta_2 &= \frac{c_n A^2 \omega}{M_t} & \delta_3 &= \frac{k}{M_t \omega^2} & \delta_4 &= \frac{k_n A^2}{M_t \omega^2} \\
\delta_5 &= \frac{k_{t_1}}{m_1 l_1^2 \omega^2} & \delta_6 &= \frac{k_{tn_1}}{m_1 l_1^2 \omega^2} & \delta_7 &= \frac{k_{t_2}}{m_2 l_2^2 \omega^2} & \delta_8 &= \frac{k_{tn_2}}{m_2 l_2^2 \omega^2} \\
\lambda_1 &= \frac{m_1 l_1}{M_t A} & \lambda_2 &= \frac{m_2 l_2}{M_t A} & \sigma_2 &= \frac{(m_1 + m_2)g}{M_t A \omega^2} & \gamma &= \frac{g}{A \omega^2} \\
\eta_1 &= \frac{A}{l_1} & \eta_2 &= \frac{A}{l_2} & & & &
\end{aligned} \tag{3.18}$$

As variáveis de estado podem ser vistas segundo a equação 3.19 e as equações de estado na equação 3.21.

$$y = y_1 \quad \dot{y} = y_2 \quad \theta_1 = y_3 \quad \dot{\theta}_1 = y_4 \quad \theta_2 = y_5 \quad \dot{\theta}_2 = y_6 \tag{3.19}$$

Neste caso, foi admitido que a massa, o comprimento e a rigidez de ambas as hastes são iguais. Sendo assim, os parâmetros encontram-se representados pela equação 3.20.

$$m = m_1 = m_2 \quad l = l_1 = l_2 \quad k_t = k_{t_1} = k_{t_2} \quad k_{tn} = k_{tn_1} = k_{tn_2} \tag{3.20}$$

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\begin{aligned} y_2 = & (-[k(y_1 - y_b) + k_n(y_1 - y_b)^3 + c(y_2 - \dot{y}_b) + k_n(y_2 - \dot{y}_b)^3]l \\ & - k_t(y_3 \sin y_3 + y_5 \sin y_5) - k_{tn}(y_3^3 \sin y_3 + y_5^3 \sin y_5) \\ & - mgl(\cos^2 y_3 + \cos^2 y_5) + ml^2(y_4^2 \cos y_3 + y_6^2 \cos y_5)) \\ & /l(M + m \cos^2 y_3 + m \cos^2 y_5) \end{aligned}$$

$$\dot{y}_3 = y_4$$

$$\begin{aligned} y_4 = & (-[k(y_1 - y_b) + k_n(y_1 - y_b)^3 + c(y_2 - \dot{y}_b) + k_n(y_2 - \dot{y}_b)^3]ml \sin y_3 \\ & - k_t[My_3 + 2my_3 + (-y_3 \sin y_5 + y_5 \sin y_3)m \sin y_5] \\ & - k_{tn}[My_3^3 + 2my_3^3 + (-y_3^3 \sin y_5 + y_5^3 \sin y_3)m \sin y_5] \\ & + Mmgl \sin y_3 + m^2l^2(y_4^2 \cos y_3 + y_6^2 \cos y_5) \sin y_3) \\ & /ml^2(M + m \cos^2 y_3 + m \cos^2 y_5) \end{aligned}$$

$$\dot{y}_5 = y_6$$

$$\begin{aligned} y_6 = & (-[k(y_1 - y_b) + k_n(y_1 - y_b)^3 + c(y_2 - \dot{y}_b) + k_n(y_2 - \dot{y}_b)^3]ml \sin y_5 \\ & - k_t[My_5 + 2my_5 + (-y_5 \sin y_3 + y_3 \sin y_5)m \sin y_3] \\ & - k_{tn}[My_5^3 + 2my_5^3 + (-y_5^3 \sin y_3 + y_3^3 \sin y_5)m \sin y_3] \\ & + Mmgl \sin y_5 + m^2l^2(y_4^2 \cos y_3 + y_6^2 \cos y_5) \sin y_5) \\ & /ml^2(M + m \cos^2 y_3 + m \cos^2 y_5) \end{aligned} \quad (3.21)$$

CAPÍTULO 4

EXPLORAÇÃO NUMÉRICA DAS NÃO LINEARIDADES

Análises paramétricas foram realizadas envolvendo os parâmetros lineares e não lineares de rigidez, amortecimento e rigidez torcional, para os modelos com 2 e 3 graus de liberdades com as condições em fase e antifase. As análises foram realizadas utilizando-se simulação numérica das equações 3.14 e 3.21 e o software MATLAB através do método Runge Kutta.

4.1 SISTEMA 2 DOF

Primeiramente, foram feitas simulações utilizando-se os parâmetros nominais da tabela 4.1 com o sistema submetido a um deslocamento angular inicial $\theta_0 = 0.01rad$. Foram observados as respostas variando-se os parâmetros c , m , k e k_t . Posteriormente também foram observadas as respostas variando-se os parâmetros não lineares de rigidez k_n , amortecimento c_n e rigidez torcional k_{tn} . Para as análises realizadas nesse trabalho, os parâmetros foram baseados segundo *et al.* Brzeski [24] e idealizando-se um experimento de bancada.

	Descrição	Parâmetro	Unidade SI	Valor
Parâmetro de simulação	tempo de simulação		s	200
	passo de simulação		s	0.01
Parâmetros nominais	massa do bloco	M	kg	4
	massa da haste	m_1	kg	0.5
	coeficiente de amortecimento viscoso	c	Ns/m	10
	coeficiente de amortecimento não linear	c_n	Ns^3/m^3	0
	rigidez da mola	k	N/m	1000
	rigidez da mola não linear	k_n	N/m^3	0
	rigidez torcional	k_{t1}	Nm/rad	2
	rigidez torcional não linear	k_{tn1}	Nm/rad^3	0
	comprimento da haste	l_1	m	0.3
	aceleração da gravidade	g	m/s^2	9.81
	amplitude de excitação	A	m	0.01
Condições iniciais	deslocamento inicial do bloco	y_0	m	0
	velocidade inicial do bloco	\dot{y}_0	m/s	0
	deslocamento inicial da haste	θ_{10}	rad	0.01
	velocidade inicial da haste	$\dot{\theta}_{10}$	rad/s	0

Tabela 4.1: Parâmetros utilizados na simulação do modelo com 2 graus de liberdade

INFLUÊNCIA DA MASSA m_1

Três valores da massa m_1 da haste, representada pelo pêndulo invertido, foram utilizados na simulação a fim de verificar sua influência no comportamento do sistema. É possível observar através da figura 4.1 que um pequeno deslocamento do bloco M provoca um grande deslocamento da haste m_1 em uma das frequências naturais do sistema. Porém, para a outra frequência natural, uma grande amplitude de deslocamento do bloco não provoca deslocamento da haste.

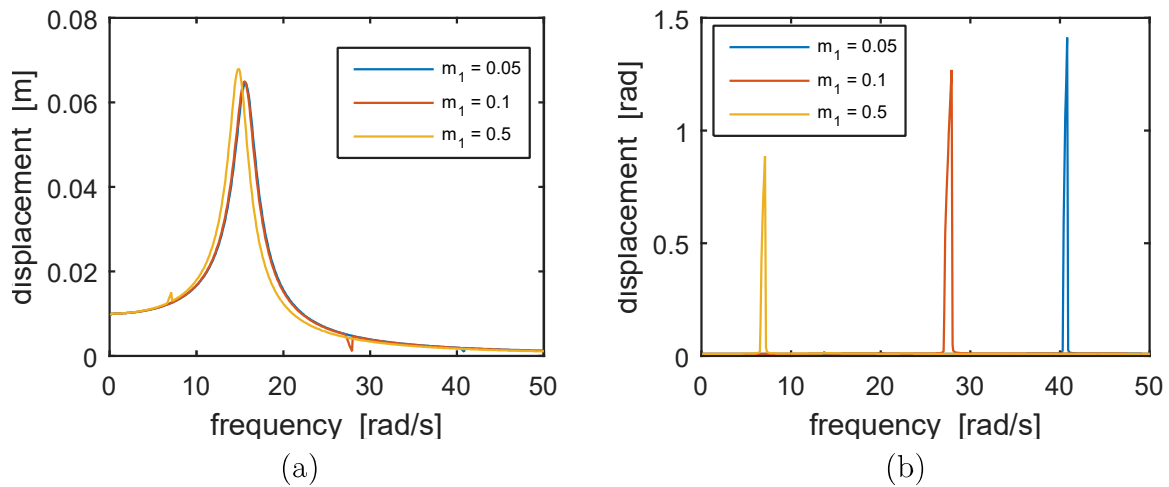


Figura 4.1: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) e do deslocamento angular θ_1 da haste para diferentes valores de m_1

INFLUÊNCIA DO AMORTECIMENTO c

A influência do coeficiente de amortecimento no sistema também foi verificada. Através da figura 4.2 é possível observar a transferência de movimento entre os graus de liberdade do sistema na região da primeira frequência natural ($\omega = 7,18 \text{ rad/s}$), e uma redução nas amplitudes do deslocamento em todos os graus de liberdade do sistema conforme os valores do coeficiente de amortecimento aumentam.

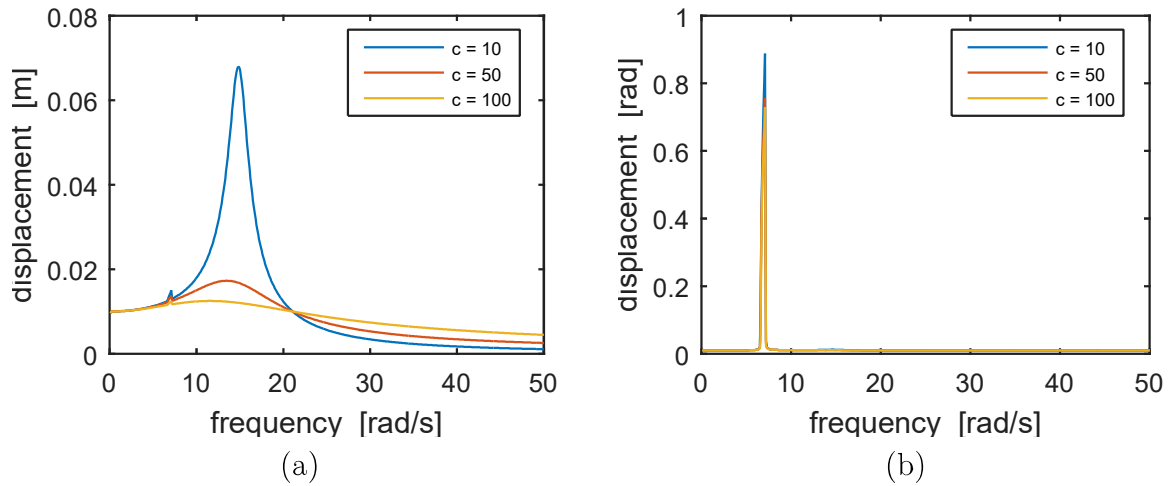


Figura 4.2: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) e do deslocamento angular θ_1 da haste para diferentes valores de c

INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ k

Mantendo-se os demais parâmetros do sistema fixos e variando a rigidez k , através da figura 4.3 é possível observar que o intervalo de frequências na região da primeira frequência natural diminui à medida que a rigidez aumenta, e há um deslocamento da segunda frequência natural para regiões de maior frequência.

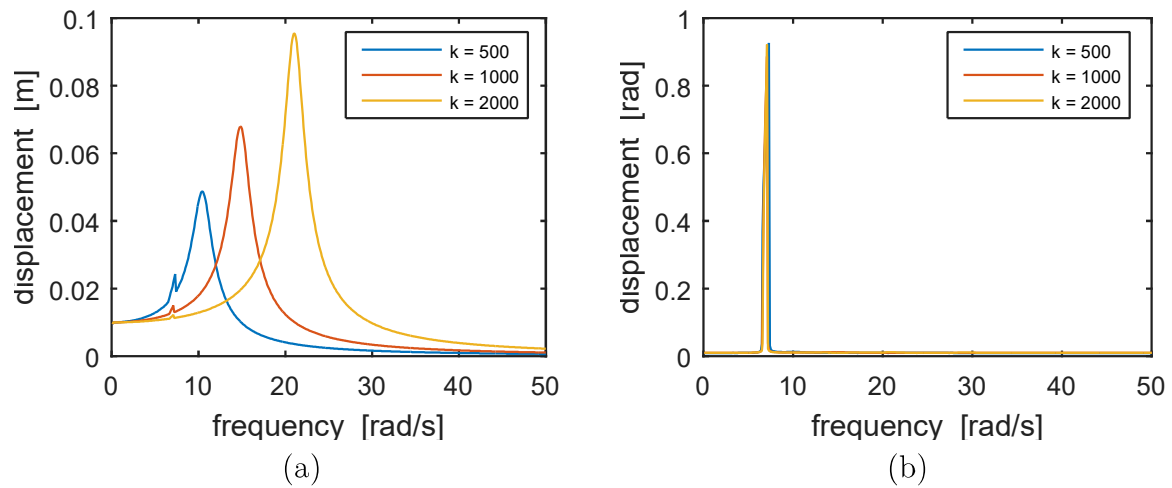


Figura 4.3: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) e do deslocamento angular θ_1 da haste para diferentes valores de k

INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ TORCIONAL k_t

Aumentando-se a rigidez torcional k_t , é possível observar um aumento nas amplitudes de deslocamento entre os graus de liberdade do sistema e no intervalo de frequências na região da primeira frequência natural, e há um deslocamento da primeira frequência natural para regiões de maior frequência.

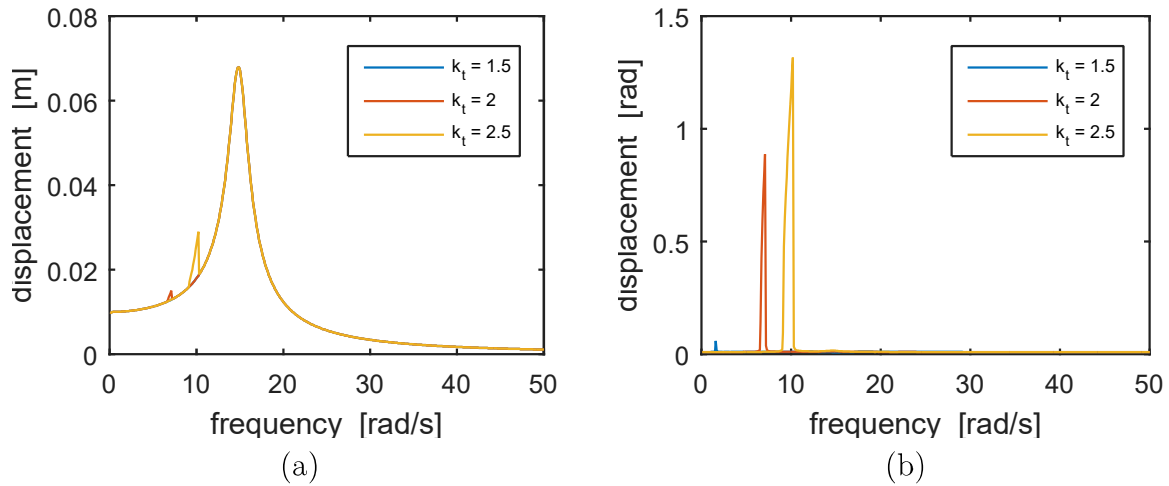


Figura 4.4: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) e do deslocamento angular θ_1 da haste para diferentes valores de k_t

INFLUÊNCIA DO COEFICIENTE DE AMORTECIMENTO NÃO LINEAR c_n

Variando-se o coeficiente de amortecimento não linear até que a força de amortecimento atinja o dobro da força obtida quando apenas o termo linear estiver presente, para velocidades de até 1 m/s, foram obtidos os valores dos coeficientes de amortecimento não linear usados na simulação, como visto na figura 4.5.

Nota-se, através da figura 4.6, apenas uma diminuição na amplitude do deslocamento do bloco M referente à segunda frequência natural, enquanto que não ocorre alterações na região da primeira frequência natural.

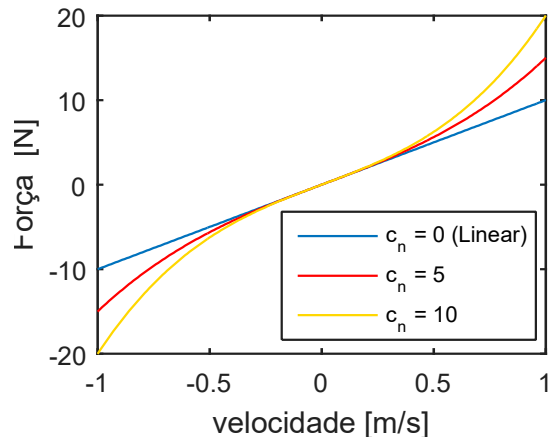


Figura 4.5: Força de amortecimento para diferentes valores do coeficiente de amortecimento não linear c_n .

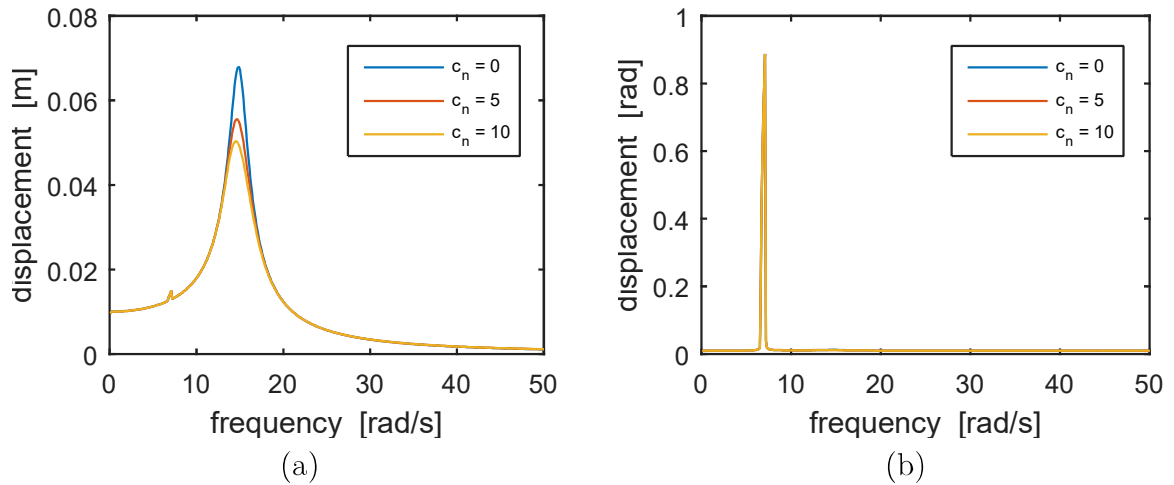


Figura 4.6: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) e do deslocamento angular θ_1 da haste para diferentes valores de c_n

INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ NÃO LINEAR k_n

Variando-se o termo não linear de rigidez até que a força seja o dobro da força obtida quando apenas o termo linear está presente, para uma máxima deformação da mola de 0.05 m, os valores não lineares do coeficiente de rigidez a serem utilizados podem ser vistos na figura 4.7.

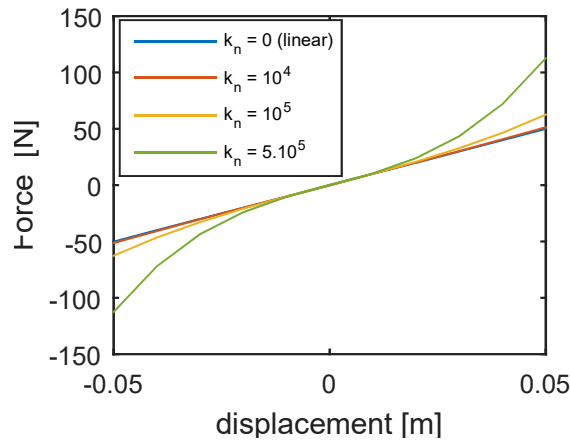


Figura 4.7: Força elástica para diferentes valores do coeficiente de rigidez não linear k_n

A não linearidade pode ser observada na figura 4.8 (a) através de um leve "tombamento" na curva da resposta em frequência para o bloco de massa M à medida que o coeficiente k_n aumenta.

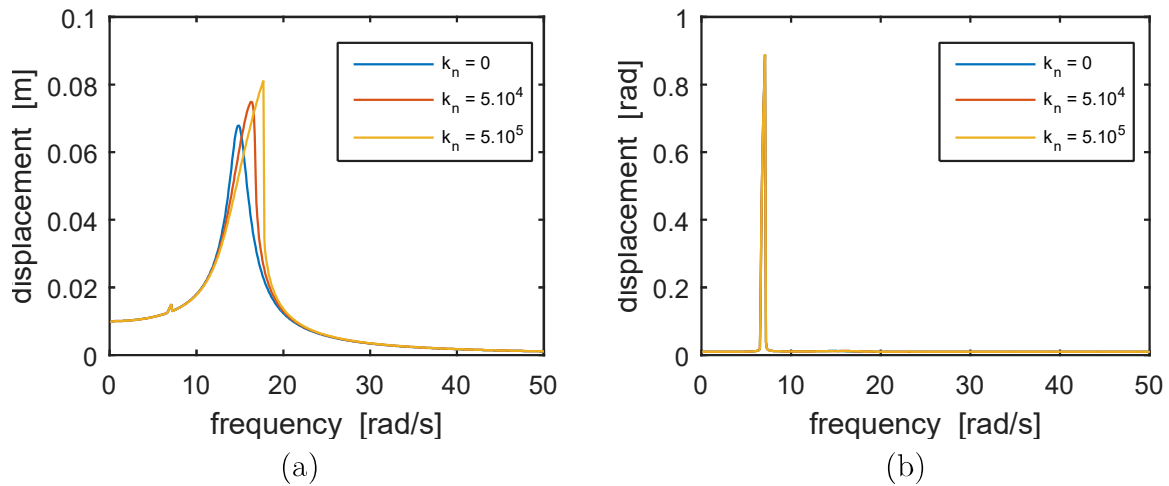


Figura 4.8: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) e do deslocamento angular θ_1 da haste para diferentes valores de k_n

INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ TORCIONAL NÃO LINEAR k_{tn}

Os parâmetros não lineares do coeficiente de rigidez torcional utilizados na simulação foram obtidos variando-se o deslocamento angular da haste até que o torque necessário para uma máxima deformação da mola de 0.1 rad fosse o dobro em comparação quando apenas o termo linear estava presente no modelo, como visto na figura 4.9.

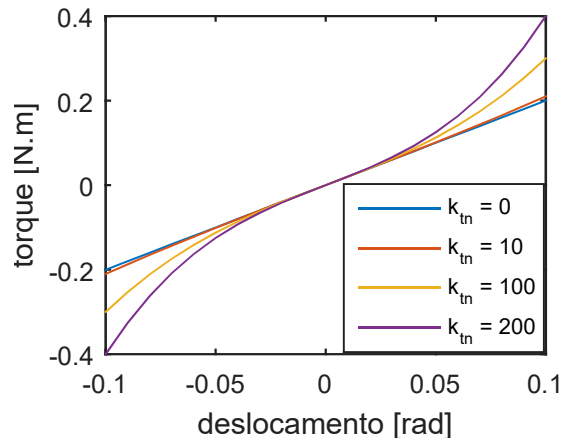


Figura 4.9: Torque para diferentes valores do coeficiente de rigidez torcional não linear k_{tn}

À medida que o termo não linear k_{tn} de rigidez torcional aumenta, as amplitudes dos deslocamentos em todos os graus de liberdade do sistema diminuem. É possível observar na figura 4.10 (b) que o intervalo de frequências aumenta na região da primeira frequência natural do sistema.

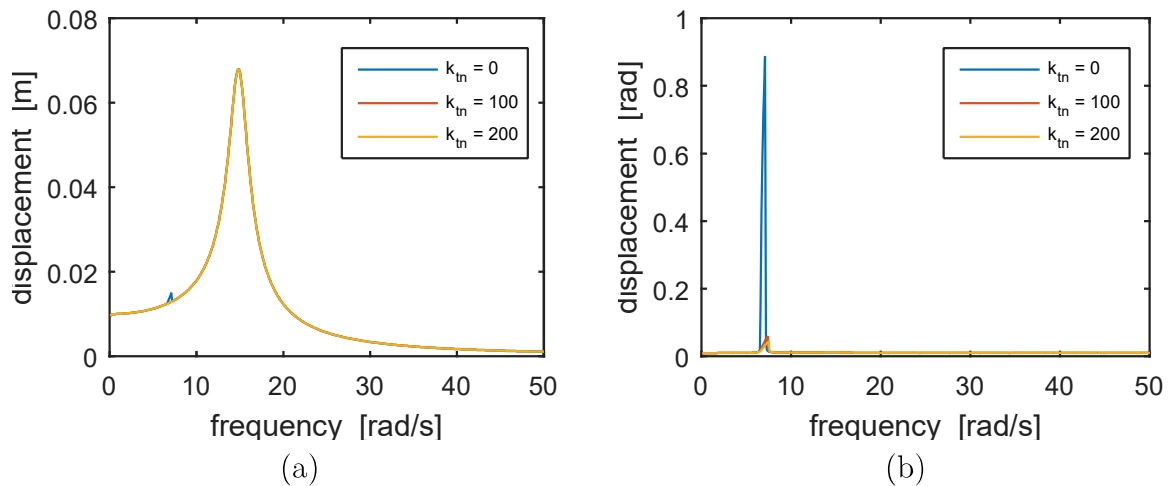


Figura 4.10: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) e do deslocamento angular θ_1 da haste para diferentes valores de k_{tn}

4.2 SISTEMA 3 DOF

Utilizando equação 3.21 e aplicando-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem, foram realizadas simulações para o sistema com 3 graus de liberdade. Admitindo que as massas m_1 e m_2 das hastes são iguais a m , assim como os comprimentos $l_1 = l_2 = l$ e rigidez torcional $k_{t_1} = k_{t_2} = k_t$, foram observadas as respostas em frequência variando-se os parâmetros m, c, c_n, k, k_n, k_t e k_{tn} , com o sistema submetido a condições iniciais em fase, $\theta_{1_0} = 0.01\text{rad}$ e $\theta_{2_0} = 0.01\text{ rad}$, e em antifase $\theta_{1_0} = 0.01\text{rad}$ e $\theta_{2_0} = -0.01\text{rad}$, conforme visto na tabela 4.2.

	Descrição	Parâmetro	Unidade SI	Valor
Parâmetro de simulação	tempo de simulação		s	200
	passo de simulação		s	0.01
Parâmetros nominais	massa do bloco	M	kg	4
	massa da haste	m	kg	0.5
	coeficiente de amortecimento viscoso	c	Ns/m	10
	coeficiente de amortecimento não linear	c_n	Ns^3/m^3	0
	rigidez da mola	k	N/m	1000
	rigidez da mola não linear	k_n	N/m^3	0
	rigidez torcional	k_t	Nm/rad	2
	rigidez torcional não linear	k_{tn}	Nm/rad^3	0
	comprimento da haste	l	m	0.3
	aceleração da gravidade	g	m/s^2	9.81
	amplitude de excitação	A	m	0.01
Condições iniciais	deslocamento inicial do bloco	y_0	m	0
	velocidade inicial do bloco	\dot{y}_0	m/s	0

Tabela 4.2: Parâmetros utilizados na simulação do modelo com 3 graus de liberdade

INFLUÊNCIA DA MASSA m

A influência das massas das hastes no comportamento do sistema foi verificada para diferentes valores de m .

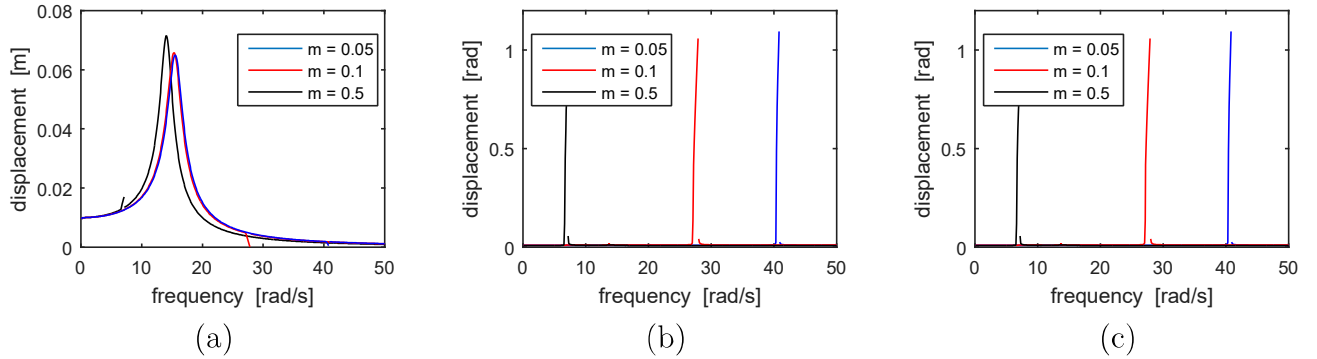


Figura 4.11: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) do deslocamento angular θ_1 da massa m_1 ; (c) e do deslocamento angular θ_2 da massa m_2 , com sistema em fase para diferentes valores de m

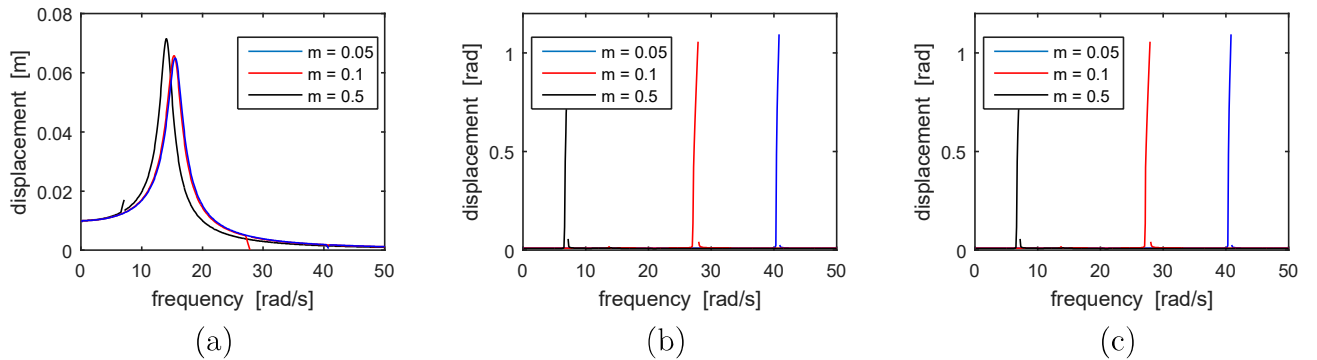


Figura 4.12: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) do deslocamento angular θ_1 da massa m_1 ; (c) e do deslocamento angular θ_2 da massa m_2 , com sistema em antifase para diferentes valores de m

A fim de observar a influência da não linearidade geométrica do sistema, a figura 4.11 foi ampliada nas regiões em destaque em torno da primeira frequência natural $\omega = 7.18 \text{ rad/s}$, no caso, especificamente para $m = 0.5 \text{ kg}$ na condição em fase, como pode ser visto na figura 4.13. Neste caso, para uma pequena amplitude de deslocamento do bloco M tem-se um grande deslocamento das massas m_1 e m_2 .

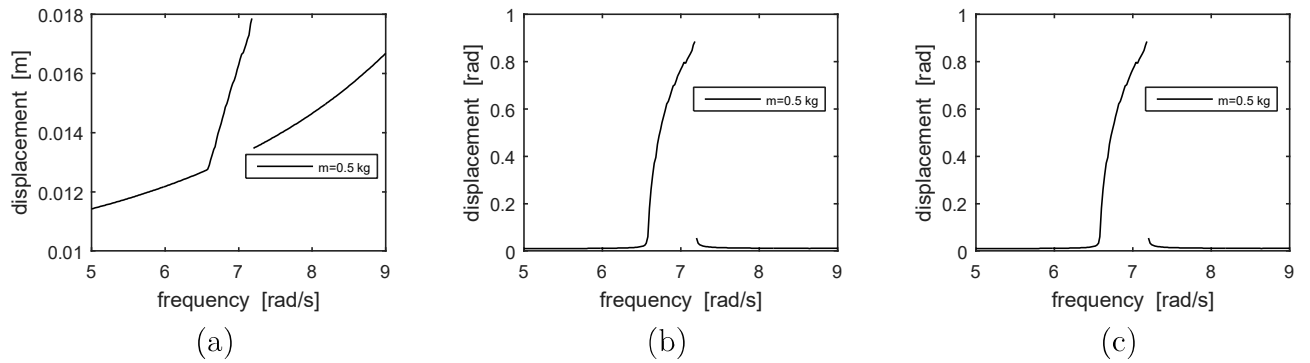


Figura 4.13: Detalhe da resposta em frequência (a) do bloco M ; (b) da massa m_1 ; (c) da massa m_2 , na região da primeira frequência natural ($\omega = 7.18\text{rad/s}$) com sistema em fase para $m = 0.5\text{kg}$

INFLUÊNCIA DO AMORTECIMENTO c

A influência do coeficiente de amortecimento no comportamento do sistema também foi observada para diferentes valores de c , com condições iniciais em fase (figura 4.14) e antifase (figura 4.15).

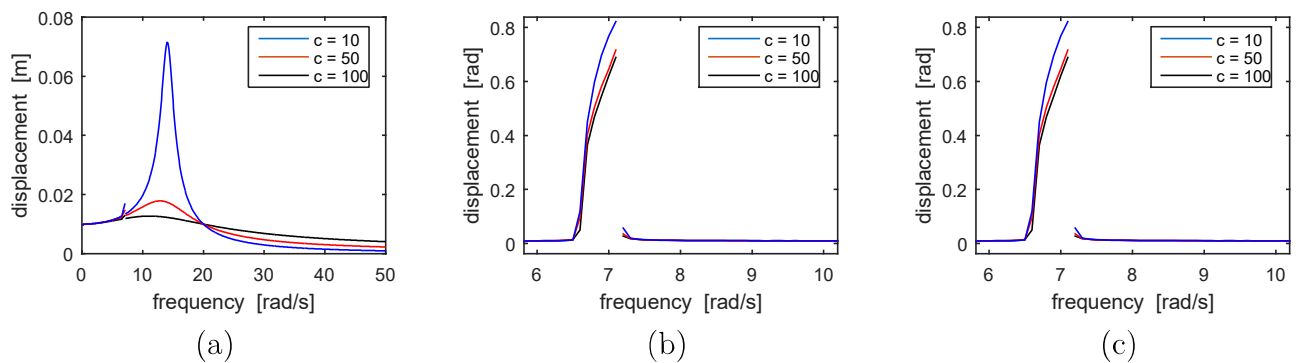


Figura 4.14: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) do deslocamento angular θ_1 da massa m_1 ; (c) e do deslocamento angular θ_2 da massa m_2 , com sistema em fase para diferentes valores de c

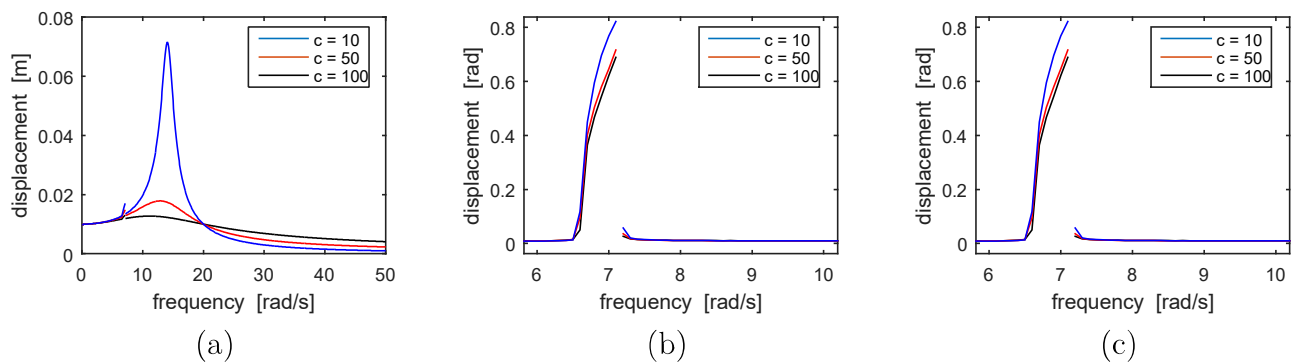


Figura 4.15: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) do deslocamento angular θ_1 da massa m_1 ; (c) e do deslocamento angular θ_2 da massa m_2 , com sistema em antifase para diferentes valores de c

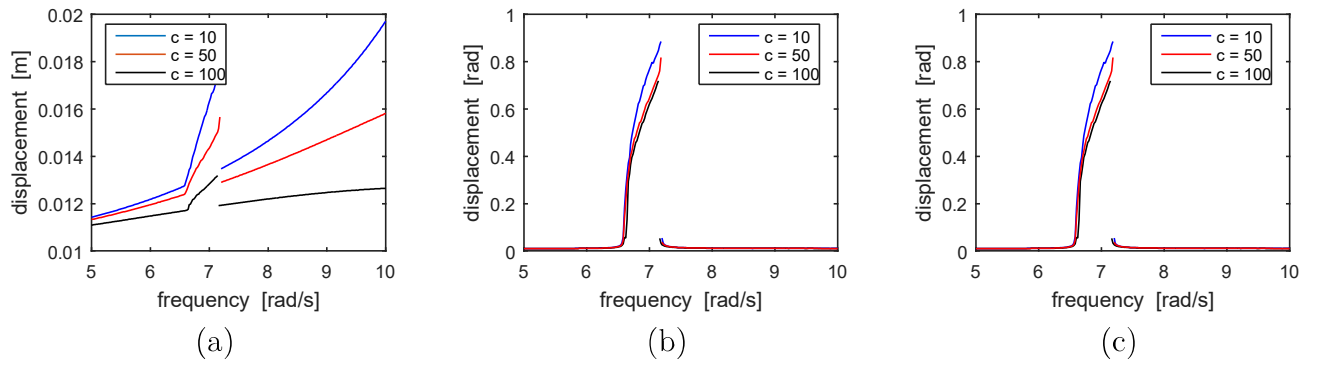


Figura 4.16: Detalhe da resposta em frequência (a) do bloco M (b) da massa m_1 (c) da massa m_2 , na região da primeira frequência natural ($\omega = 7.18 \text{ rad/s}$) com sistema em fase para diferentes valores de c

À medida que o coeficiente de amortecimento aumenta há uma diminuição nas amplitudes dos deslocamentos em todos os graus de liberdade do sistema. Ampliando-se a figura 4.14 em torno da região da primeira frequência natural $\omega = 7.18 \text{ rad/s}$, para uma pequena amplitude de deslocamento do bloco M tem-se um grande deslocamento das massas m_1 e m_2 , como pode ser visto na figura 4.16. O inverso ocorre para a região da segunda frequência natural, onde uma grande amplitude de deslocamento do bloco M provoca um pequeno deslocamento das massas m_1 e m_2 .

INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ k

As figuras 4.17 e 4.18 mostram variações paramétricas na mola k ligada ao bloco de massa M .

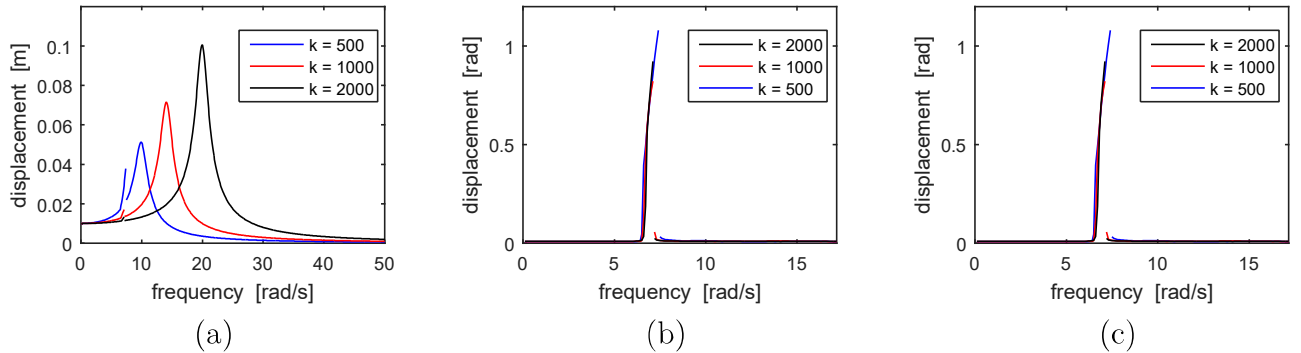


Figura 4.17: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) do deslocamento angular θ_1 da massa m_1 ; (c) e do deslocamento angular θ_2 da massa m_2 , com sistema em fase para diferentes valores de k

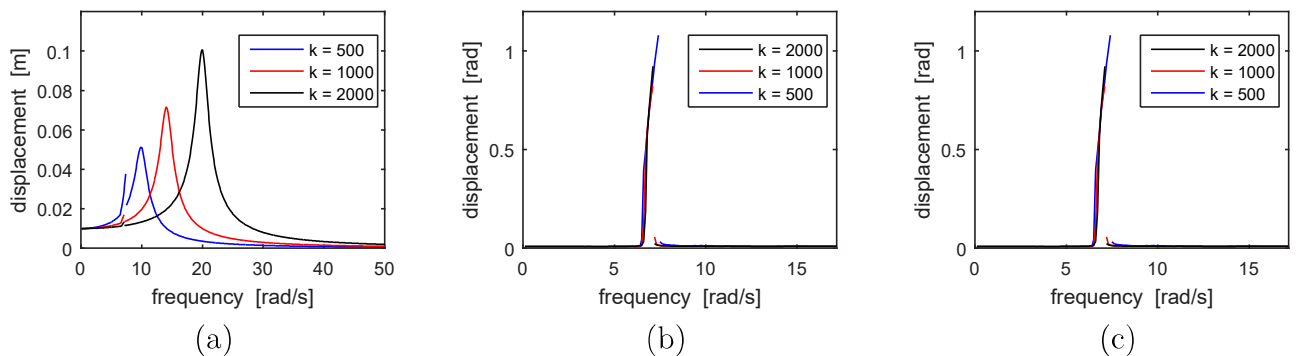


Figura 4.18: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) do deslocamento angular θ_1 da massa m_1 ; (c) e do deslocamento angular θ_2 da massa m_2 , com sistema em antifase para diferentes valores de k

Conforme o coeficiente de rigidez k aumenta verifica-se um deslocamento da segunda frequência natural para regiões de maior frequência. Ampliando-se as regiões em destaque da figura 4.17 é possível observar através da figura 4.19 que o intervalo de frequências na região da primeira frequência natural diminui à medida que a rigidez aumenta.

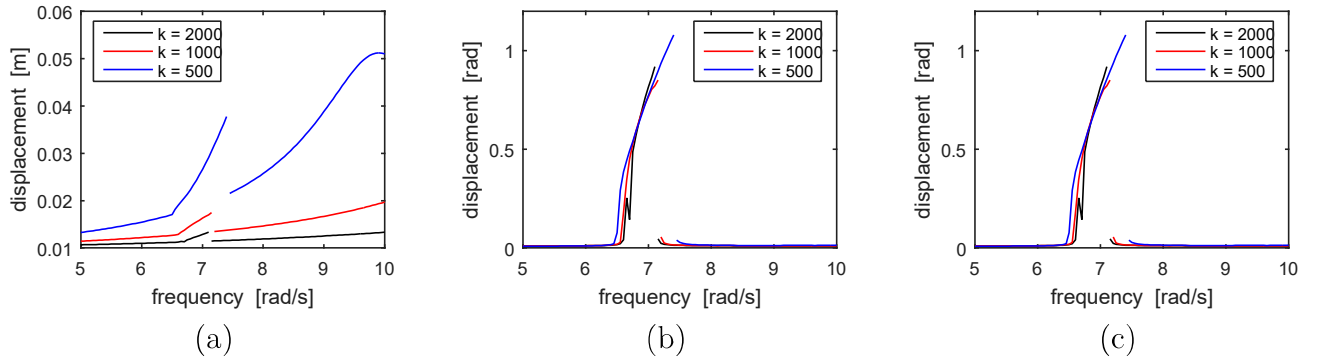


Figura 4.19: Detalhe da resposta em frequência (a) do bloco M (b) da massa m_1 (c) da massa m_2 , na região da primeira frequência natural ($\omega = 7.18 \text{ rad/s}$) com sistema em fase para diferentes valores de k

INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ TORCIONAL k_t

Foram utilizados 3 valores de rigidez torcional k_t para verificar sua influência com relação a transferência de energia no sistema.

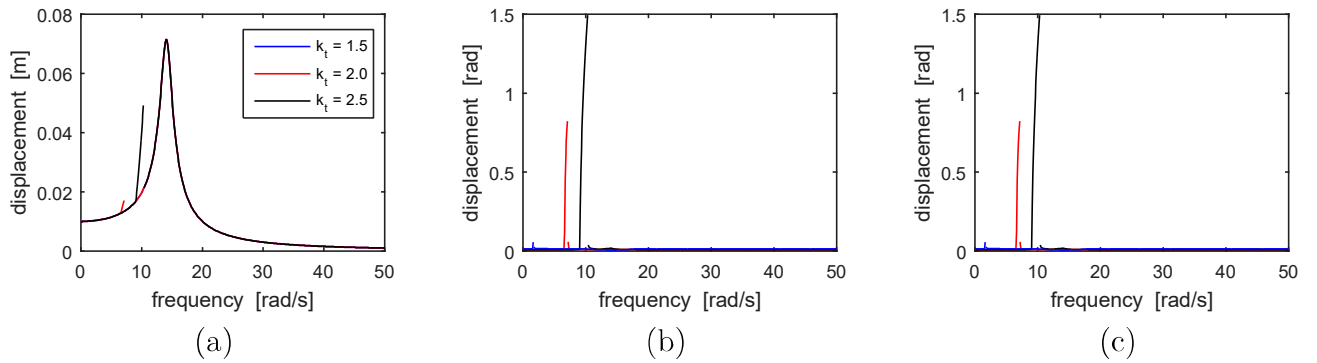


Figura 4.20: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) do deslocamento angular θ_1 da massa m_1 ; (c) e do deslocamento angular θ_2 da massa m_2 , com sistema em fase para diferentes valores de k_t

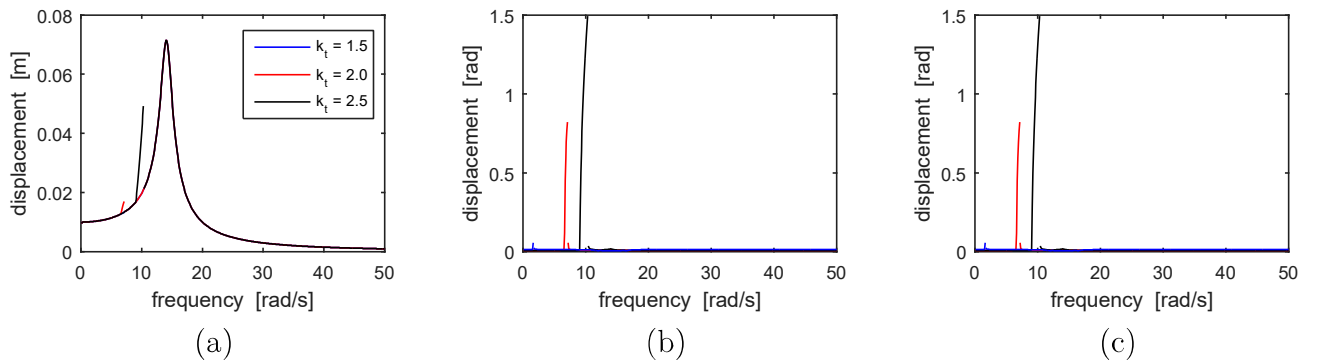


Figura 4.21: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) do deslocamento angular θ_1 da massa m_1 ; (c) e do deslocamento angular θ_2 da massa m_2 , com sistema em antifase para diferentes valores de k_t

Através das figuras 4.20 e 4.21 é possível verificar à medida que a rigidez torcional k_t

aumenta, aumenta-se as amplitudes de deslocamento dos graus de liberdade do sistema e verifica-se um deslocamento da primeira frequência natural para regiões de maior frequência. Ao contrário do que acontece quando se aumenta a rigidez k , verifica-se que o intervalo de frequências na região da primeira frequência natural aumenta à medida que a rigidez torcional k_t aumenta.

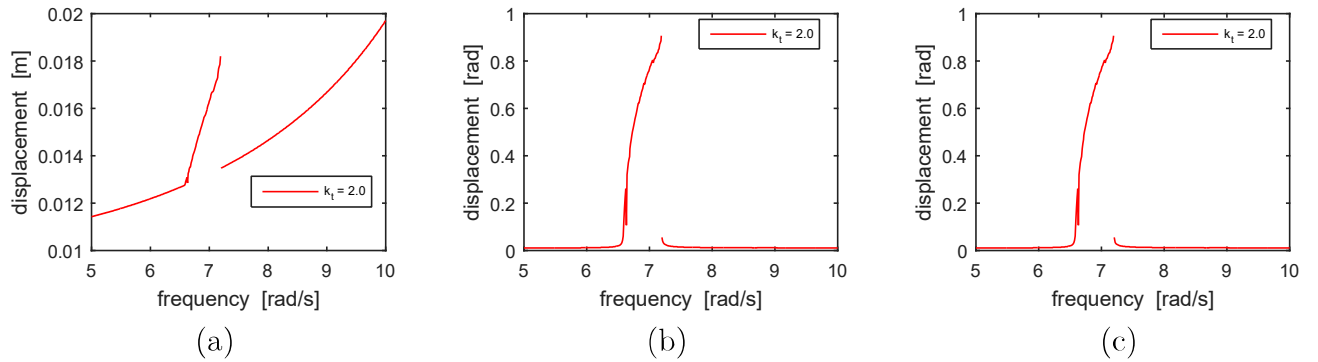


Figura 4.22: Detalhe da resposta em frequência (a) do bloco M (b) da massa m_1 (c) da massa m_2 , com sistema em fase para $k_t = 2Nm/rad$

Em seguida foram feitas simulações levando-se em consideração os parâmetros não lineares de rigidez (k_n), rigidez torcional (k_{tn}), e amortecimento (c_n).

INFLUÊNCIA DO COEFICIENTE DE AMORTECIMENTO NÃO LINEAR c_n

Os valores dos coeficientes de amortecimento não lineares a serem utilizados na simulação foram obtidos variando-se estes valores até que a força de amortecimento atingisse o dobro da força obtida quando apenas o termo linear estava presente, para velocidades de até 1 m/s, como pode ser visto na figura 4.5 da seção 4.1 .

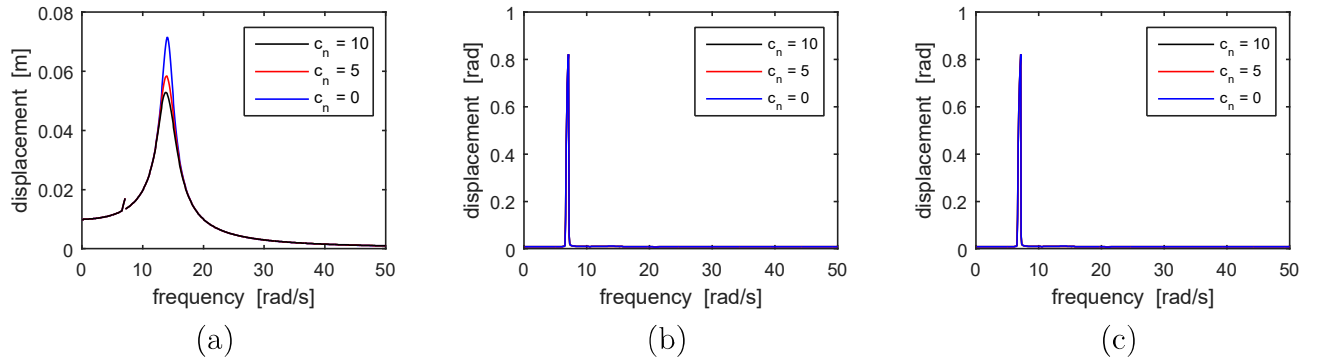


Figura 4.23: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) do deslocamento angular θ_1 da massa m_1 ; (c) e do deslocamento angular θ_2 da massa m_2 , com sistema em fase para diferentes valores de c_n

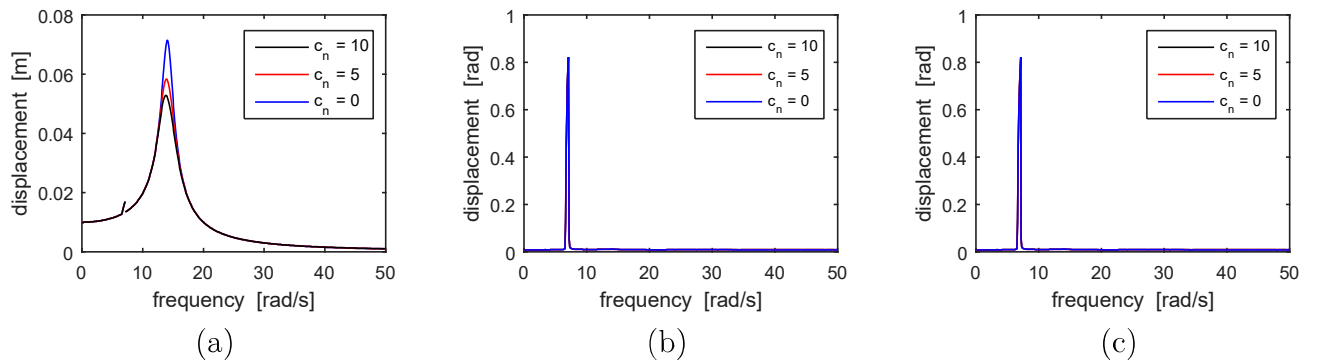


Figura 4.24: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) do deslocamento angular θ_1 da massa m_1 ; (c) e do deslocamento angular θ_2 da massa m_2 , com sistema em antifase para diferentes valores de c_n

À medida que o coeficiente de amortecimento não linear aumenta, há uma diminuição nas amplitudes do deslocamento relacionadas somente a segunda frequência, como pode ser visto nas figuras 4.23 e 4.24, para o sistema em fase e antifase, respectivamente.

INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ NÃO LINEAR k_n

Conforme visto na seção 4.2, o mesmo procedimento foi adotado para escolha dos coeficientes de rigidez não linear a serem utilizados na simulação. A figura 4.7 da seção 4.1

mostra os valores não lineares de coeficiente de rigidez a serem utilizados, tomando-se como referência uma máxima deformação da mola de 0.05 m e o dobro da força obtida quando apenas o coeficiente linear de rigidez está presente no modelo.

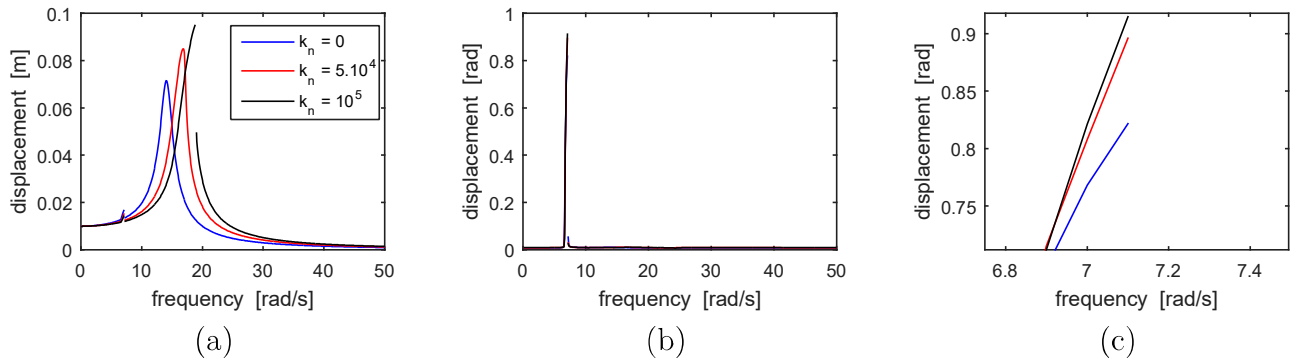


Figura 4.25: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) do deslocamento angular θ_1 da massa m_1 ; (c) e do deslocamento angular θ_2 da massa m_2 , com sistema em fase para diferentes valores de k_n

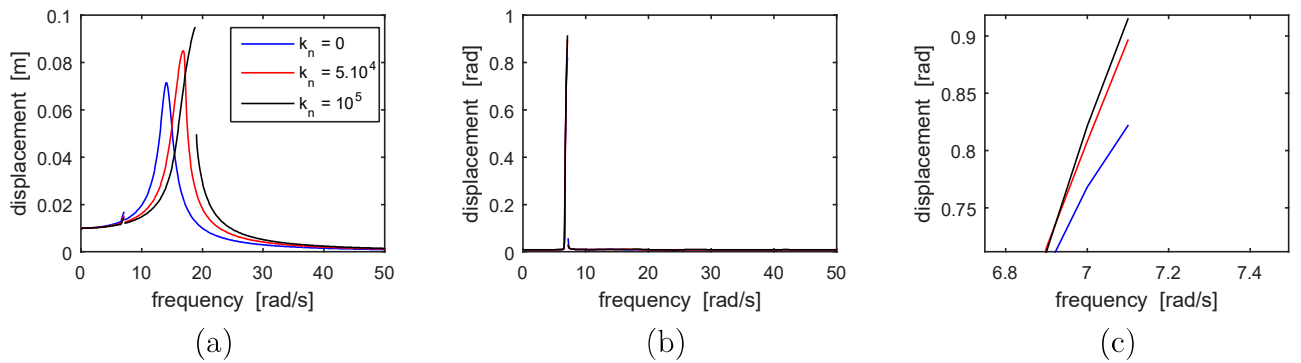


Figura 4.26: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) do deslocamento angular θ_1 da massa m_1 ; (c) e do deslocamento angular θ_2 da massa m_2 , com sistema em antifase para diferentes valores de k_n

Através das figuras 4.25 e 4.26 é possível observar que há um deslocamento da segunda frequência natural para regiões de maior frequência. Além disso, nessa região a não linearidade pode ser observada através de um leve "tombamento" na curva da resposta em frequência para o bloco de massa M à medida que o coeficiente k_n aumenta.

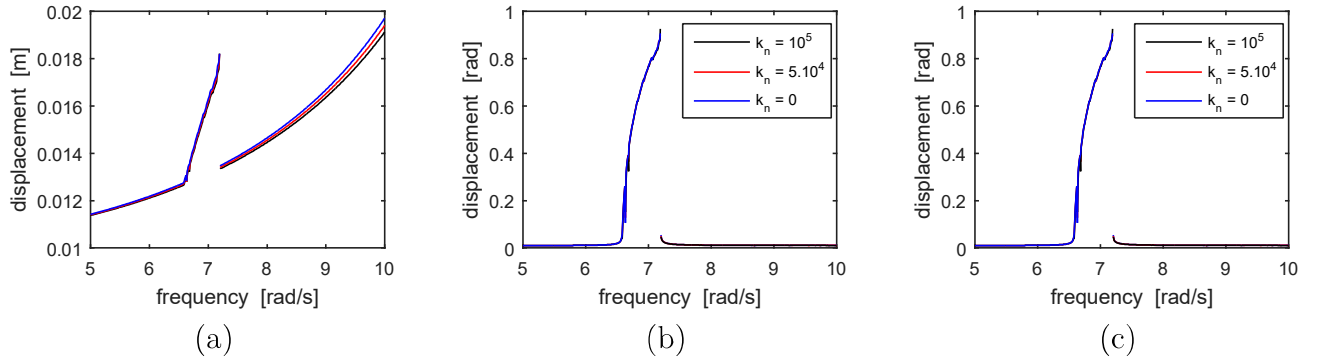


Figura 4.27: Detalhe da resposta em frequência (a) do bloco M (b) da massa m_1 (c) da massa m_2 , na região da primeira frequência natural com sistema em fase para diferentes valores de k_n

INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ TORCIONAL NÃO LINEAR k_{tn}

Como visto na figura 4.9 da seção 4.1, os parâmetros não lineares do coeficiente de rigidez torcional utilizados na simulação foram obtidos variando-se o deslocamento angular da haste até que o torque necessário para uma máxima deformação da mola de 0.1 rad fosse o dobro em comparação quando apenas o termo linear estava presente no modelo.

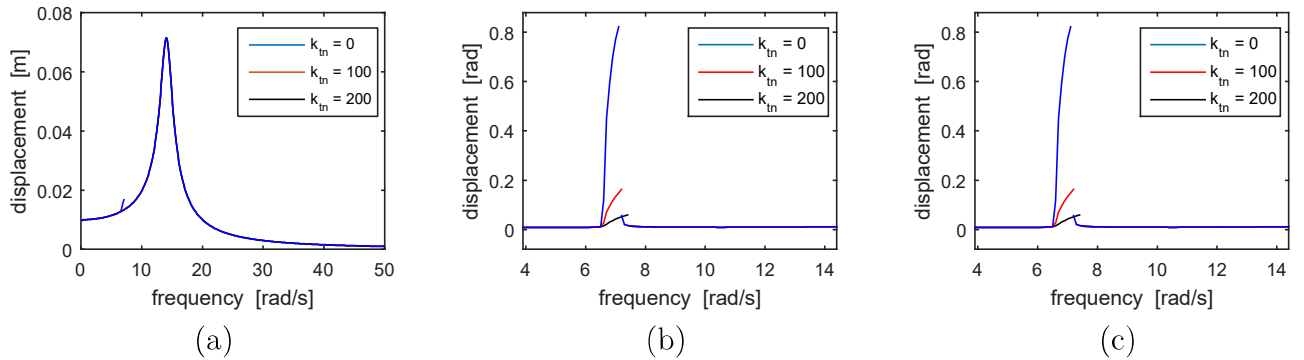


Figura 4.28: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) do deslocamento angular θ_1 da massa m_1 ; (c) e do deslocamento angular θ_2 da massa m_2 , com sistema em fase para diferentes valores de k_{tn}

À medida que k_{tn} aumenta, diminui-se as amplitudes de deslocamento dos graus de liberdade do sistema e verifica-se que o intervalo de frequências na região da primeira frequência natural aumenta à medida que a rigidez torcional k_{tn} aumenta.

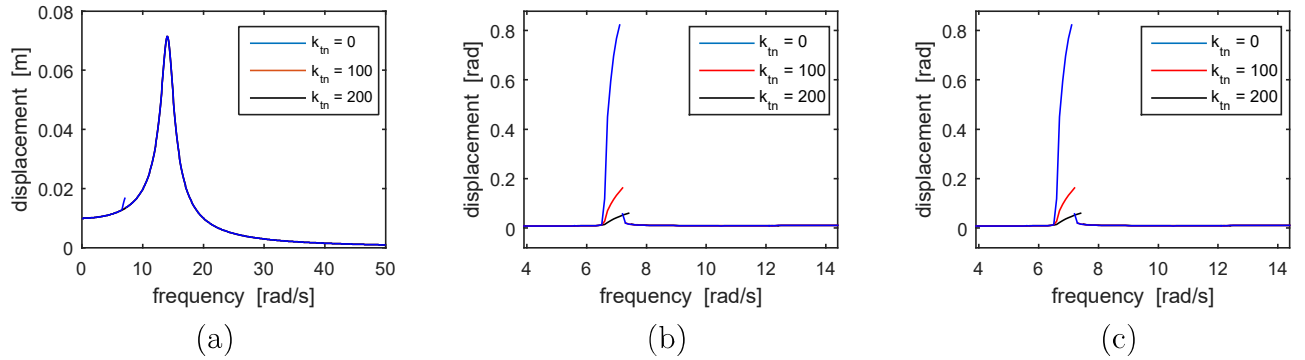


Figura 4.29: Resposta em frequência (a) do deslocamento y do bloco M ; (b) do deslocamento angular θ_1 da massa m_1 ; (c) e do deslocamento angular θ_2 da massa m_2 , com sistema em antifase para diferentes valores de k_{tn}

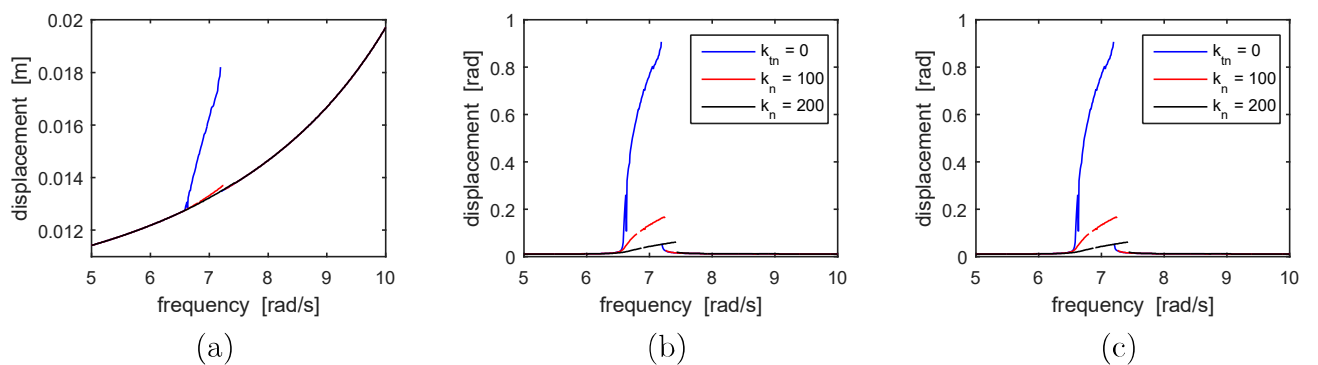


Figura 4.30: Detalhe da resposta em frequência (a) do bloco M (b) da massa m_1 (c) da massa m_2 , na região da primeira frequência natural com sistema em fase para diferentes valores de k_{tn}

CAPÍTULO 5

COMPARAÇÃO DAS CURVAS *BACKBONE* UTILIZANDO OS DIFERENTES TERMOS NÃO LINEARES

Nesta seção serão mostradas as comparações das curvas *backbones* para os diferentes termos não lineares apresentados nas seções anteriores. Especificamente serão mostrados 4 casos: modelo com todos os termos lineares; modelo somente com amortecimento não linear; modelo somente com rigidez não linear; e modelo somente com rigidez torcional não linear. Nos casos a seguir, o parâmetro de rigidez torcional k_t foi alterado de $2Nm/rad$ para $0.5Nm/rad$. Em todos os casos, o parâmetro não linear escolhido foi o máximo valor de cada variação paramétrica das respostas em frequência verificadas nas seções anteriores.

5.1 MODELO LINEAR

No modelo considerando apenas os parâmetros lineares é possível verificar que em todas as frequências naturais do sistema as curvas *backbone* são linhas retas verticais. As respostas para as coordenadas θ_1 e θ_2 são iguais, como é possível observar nas figuras 5.1 (b) e (c).

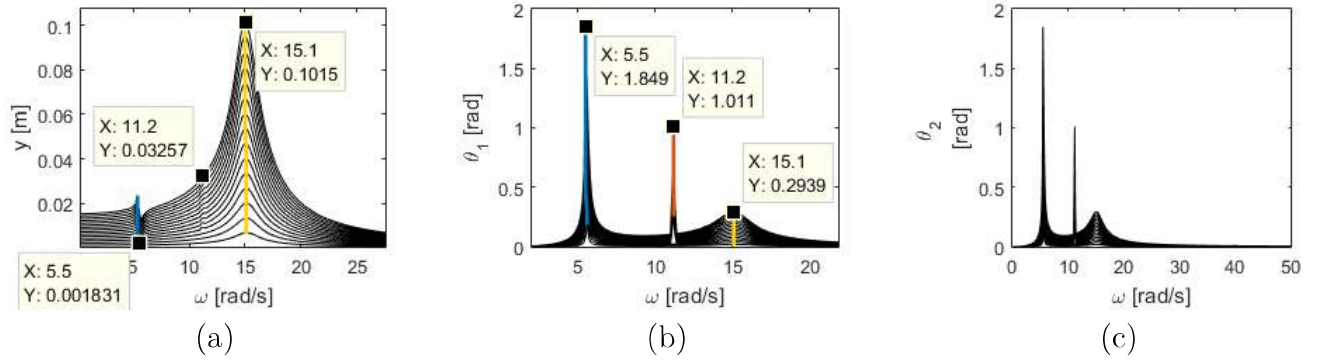


Figura 5.1: Resposta em frequência variando-se a amplitude de excitação pela base A para(a) para as coordenadas y ; (b) θ_1 ; e (c) θ_2 para o sistema linear

5.2 MODELO COM AMORTECIMENTO NÃO LINEAR c_n

No caso para o amortecimento não linear há uma tendência de *softening* das curvas *backbone* em todas as frequências naturais do sistema.

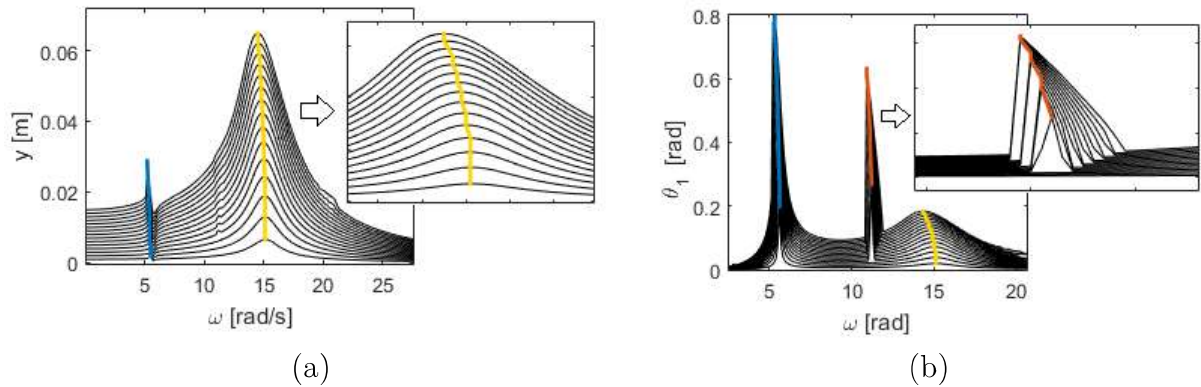


Figura 5.2: Resposta em frequência variando-se a amplitude de excitação pela base A para(a) para as coordenadas y ; e (b) θ_1 para o sistema com amortecimento não linear c_n

5.3 MODELO COM RIGIDEZ NÃO LINEAR k_n

Em contrapartida, utilizando o parâmetro não linear de rigidez k_n produz uma tendência *hardening* nas curvas *backbone* referentes à segunda frequência natural da coordenada y e ao terceiro pico de frequência da coordenada θ_1 .

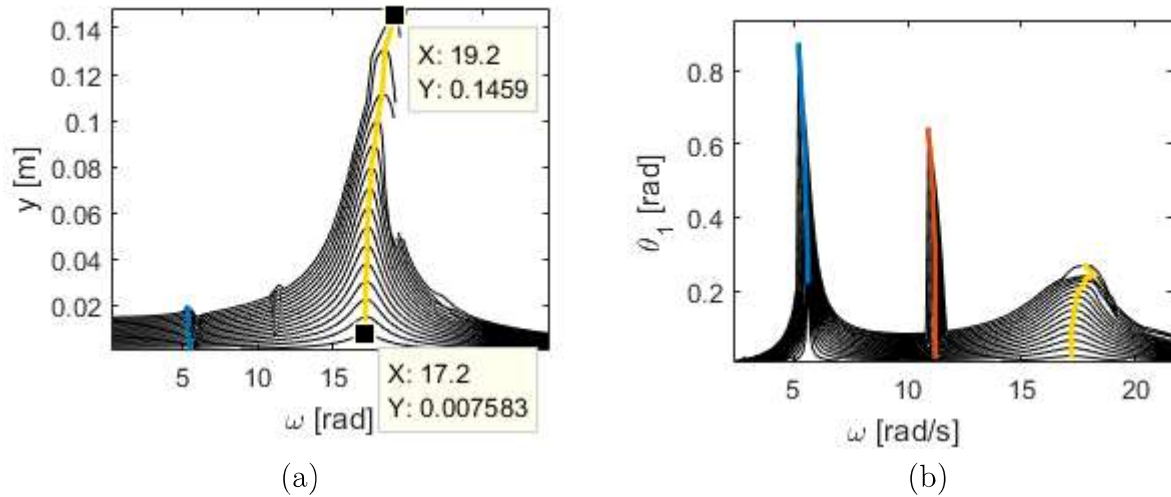


Figura 5.3: Resposta em frequência variando-se a amplitude de excitação pela base A para (a) para as coordenadas y ; e (b) θ_1 para o sistema com rigidez não linear k_n

5.4 MODELO COM RIGIDEZ TORCIONAL NÃO LINEAR k_{tn}

No caso da rigidez torcional não linear há também uma tendência de *softening* em todas as curvas *backbone* do sistema.

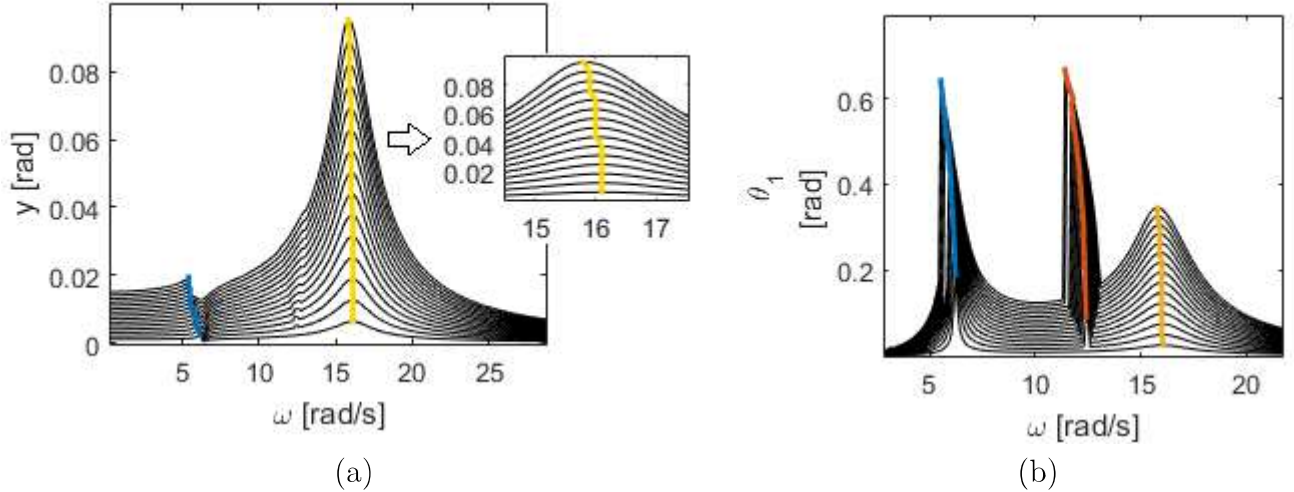


Figura 5.4: Resposta em frequência variando-se a amplitude de excitação pela base A para (a) para as coordenadas y ; e (b) θ_1 para o sistema com rigidez torcional não linear k_{tn}

5.5 CURVAS BACKBONE PARA TODOS OS PARÂMETROS

Para comparação entre os 4 casos, são mostradas a seguir as 4 curvas *backbones* referentes a cada um dos picos nas respostas em frequência mostradas anteriormente. Para a resposta do bloco (y) são mostrados os conjuntos de curva *backbone* nas duas regiões de ressonância, $\omega=5.5$ rad/s (figura 5.5-a) e $\omega=16$ rad/s (figura 5.5-b). Para a resposta da haste (θ_1) são mostrados os conjuntos de curva *backbone* nas três regiões de ressonância em $\omega=5.5$ rad/s (figura 5.6-a), $\omega=11.5$ rad/s (figura 5.6-b) e $\omega=16$ rad/s (figura 5.6-c).

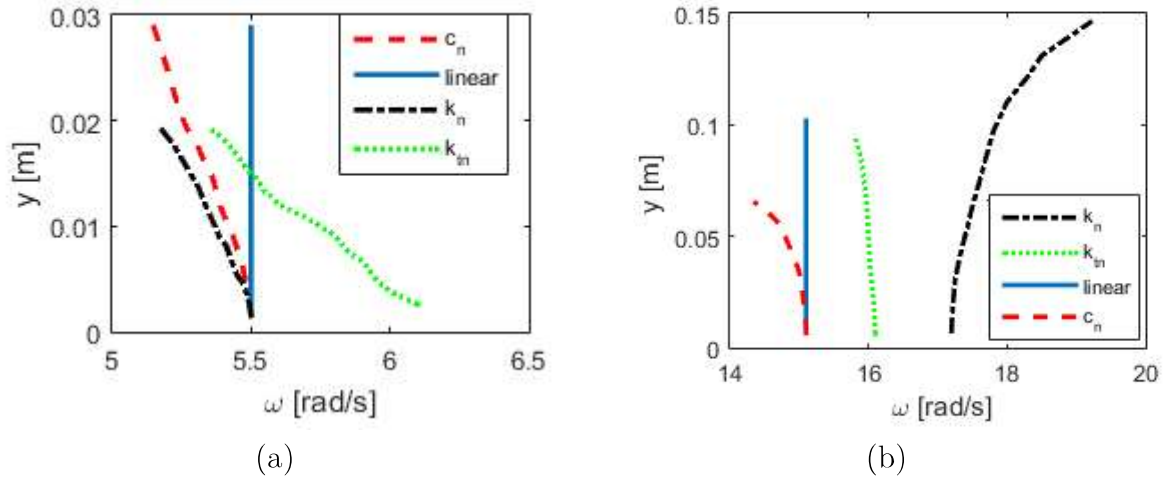


Figura 5.5: Curvas backbone em y (a) para a primeira frequência natural; e (b) segunda frequência natural

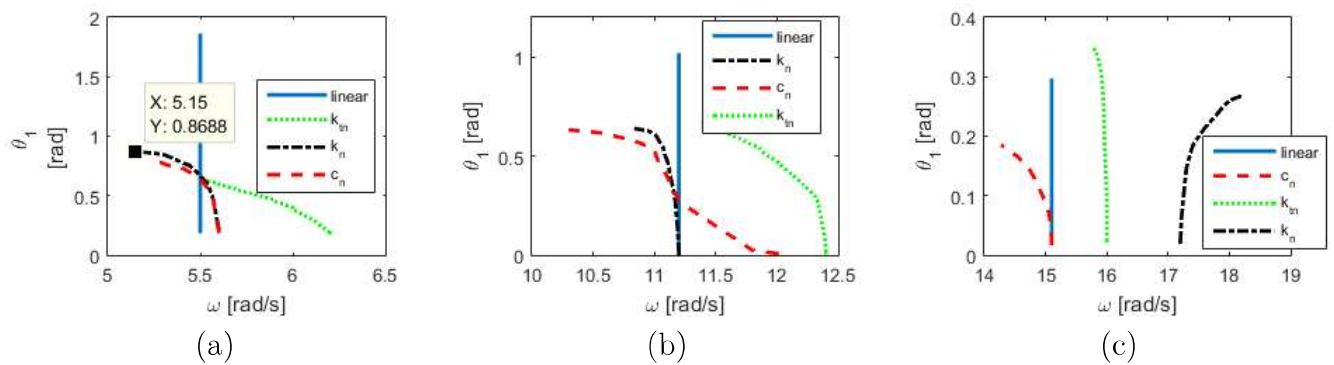


Figura 5.6: Curvas backbone em θ_1 (a) para a primeira frequência natural; (b) segunda frequência natural; e (c) terceira frequência natural

CAPÍTULO 6

RESPOSTAS CAÓTICAS

Durante as análises das seções anteriores foi verificado que o sistema pode apresentar respostas aperiódicas ou caóticas. Nesta seção estas respostas são mostradas em mais detalhes para o modelo com a rigidez não linear (k_n). Os parâmetros utilizados foram os mesmos para a seção 7.3, para duas frequências: $\omega=16.5$ rad/s (figuras 6.1-6.3) e $\omega=23$ rad/s (figuras 6.4-6.6), que estão antes e depois da última ressonância da resposta em frequência (5.3). Especificamente são mostrados históricos de deslocamento, velocidade e planos de fase com seção de Poincaré. Pode-se notar que nestas respostas caóticas a amplitude de θ_1 e θ_2 , e respectivas velocidades, são consideravelmente maiores que nas respostas periódicas, evidenciando a transferência de energia para esse grau de liberdade.

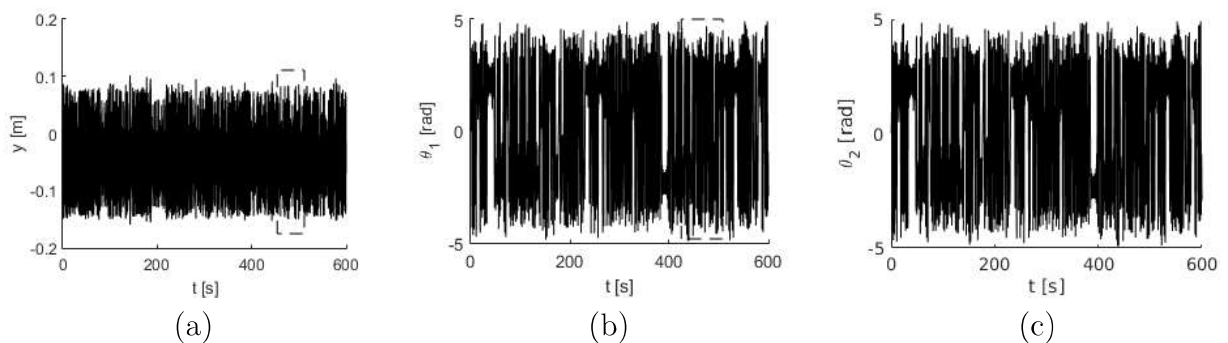


Figura 6.1: Históricos de deslocamento para $\omega=16.5$ rad/s para (a) y ; (b) θ_1 ; e (c) θ_2

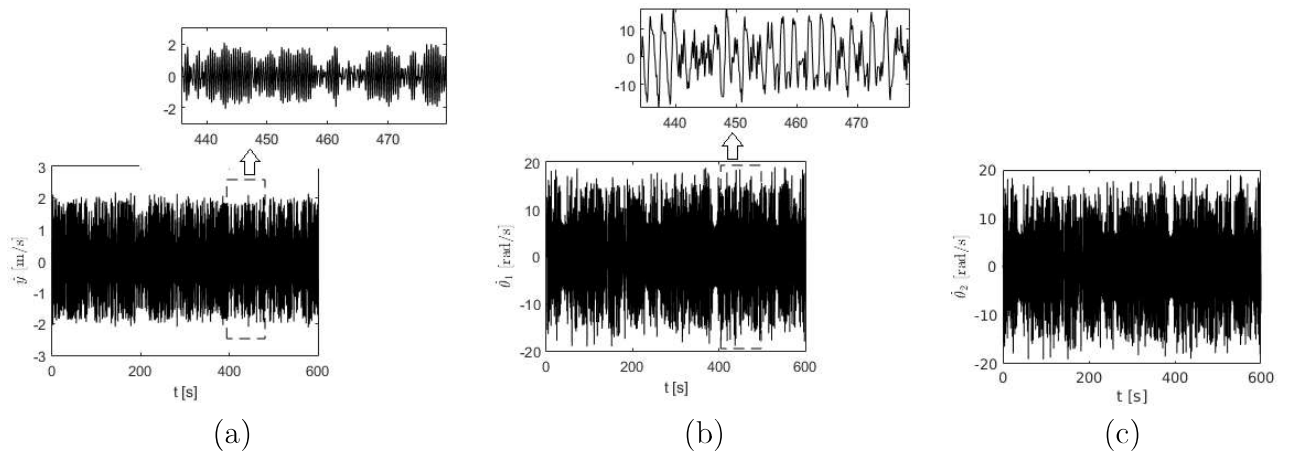


Figura 6.2: Históricos de velocidade para $\omega=16.5$ rad/s para (a) \dot{y} ; (b) $\dot{\theta}_1$; e (c) $\dot{\theta}_2$

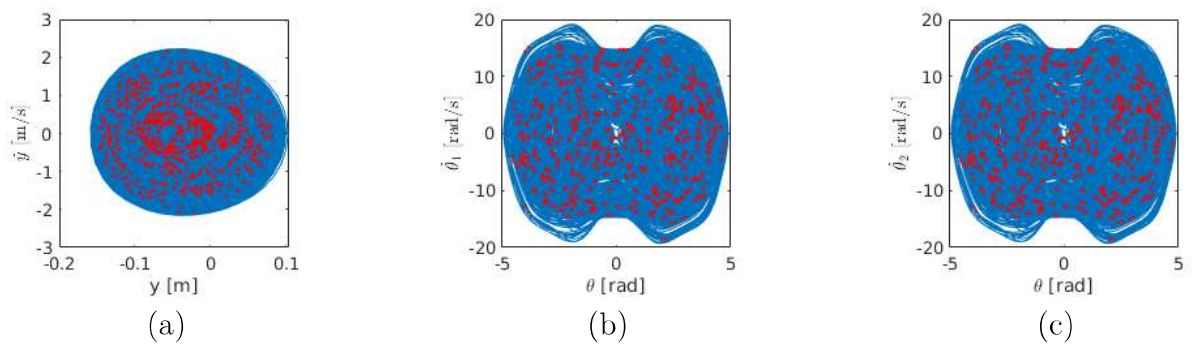


Figura 6.3: Planos de fase para $\omega=16.5$ rad/s para (a) $y - \dot{y}$; (b) $\theta_1 - \dot{\theta}_1$; e (c) $\theta_2 - \dot{\theta}_2$

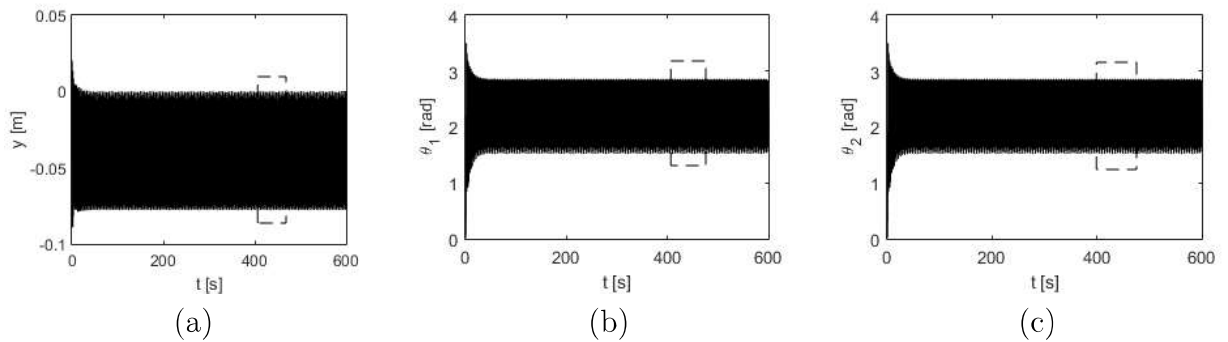


Figura 6.4: Históricos de deslocamento para $\omega=23$ rad/s para (a) y ; (b) θ_1 ; e (c) θ_2

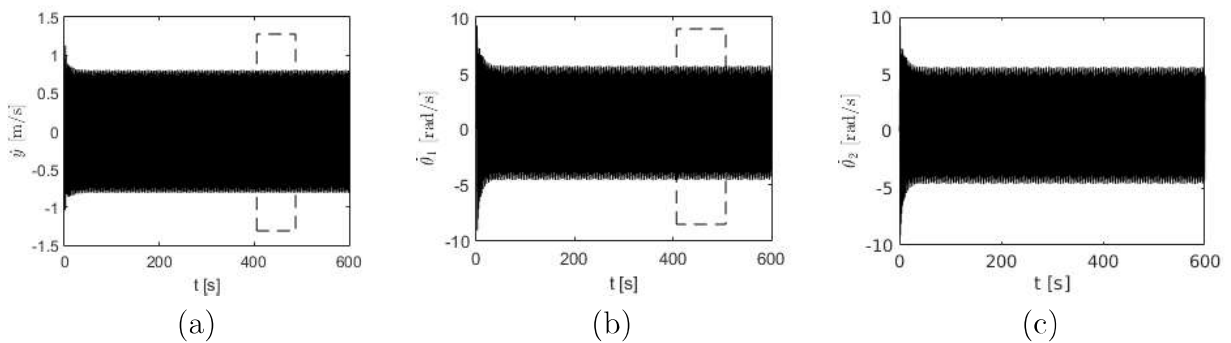


Figura 6.5: Históricos de velocidade para $\omega=23$ rad/s para (a) \dot{y} ; (b) $\dot{\theta}_1$; e (c) $\dot{\theta}_2$

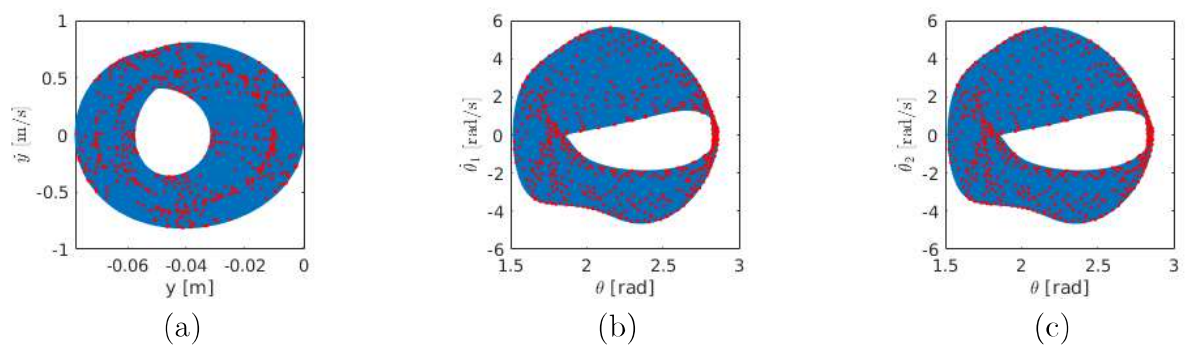


Figura 6.6: Planos de fase para $\omega=23$ rad/s para (a) $y - \dot{y}$; (b) $\theta_1 - \dot{\theta}_1$; e (c) $\theta_2 - \dot{\theta}_2$

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

O estudo do comportamento dinâmico do giroscópio do tipo diapásão incluindo as não linearidades paramétricas é importante no que se refere à otimização de colheita de energia.

Tanto para o modelo com 2 graus de liberdade quanto para o de 3 graus de liberdade os sistemas apresentam dois picos de amplitude que representam as frequências naturais, onde a amplitude de deslocamento da haste é significativamente maior na primeira frequência. Embora o sistema com 3 graus de liberdade apresente 2 picos de amplitude, ele possui 3 frequências naturais, sendo duas delas iguais devido as hastes possuírem os mesmos valores de parâmetros. Uma condição inicial de deslocamento foi inserida nas hastes a fim de retirá-las da sua posição de equilíbrio e permitir os deslocamentos angulares. Foi verificado que ambos sistemas com condições iniciais em fase e anti-fase apresentaram as mesmas respostas devido à restrição horizontal imposta ao bloco proveniente da simplificação do modelo apresentado na figura 1.2. .

À medida que a massa m aumenta, ocorre um deslocamento da primeira frequência natural para regiões de menor frequência, ou seja, há um deslocamento para esquerda das frequências naturais que promovem uma maior amplitude de deslocamento da haste.

Valores maiores do coeficiente de amortecimento c provocam uma diminuição nas amplitudes dos deslocamentos em todos os graus de liberdade do sistema. Com relação aos parâmetros não lineares, o uso do amortecimento não linear c_n provocou apenas reduções nas amplitudes dos deslocamentos.

Aumentando-se a rigidez k , há um deslocamento da segunda frequência natural para

regiões de maior frequência. Também é possível observar que o intervalo de frequências na região da primeira frequência natural diminui à medida que a rigidez k aumenta. O mesmo ocorre quando incluiu-se a rigidez não linear K_n .

Foi verificado que aumentando-se a rigidez torcional k_t , há um aumento nas amplitudes dos deslocamentos em todos os graus de liberdade do sistema e um deslocamento da primeira frequência natural para regiões de maior frequência. Também é possível observar que, ao contrário do que ocorre quando aumenta-se a rigidez k , o intervalo de frequências na região da primeira frequência natural aumenta à medida que k_t aumenta, o que permite colher mais energia em uma maior faixa de frequências. O mesmo ocorre quando incluiu-se a rigidez não linear k_{tn} , porém verificou-se uma diminuição nas amplitudes dos deslocamentos.

Através da comparação das curvas *backbone* verifica-se que os parâmetros não lineares de amortecimento e rigidez torcional produzem uma tendência de *softening* nas curvas *backbone*, já o parâmetro não linear de rigidez produz uma tendência *hardening* nas regiões da segunda frequência natural da coordenada y e da terceira frequência natural da coordenada θ_1 , mostrando que, mesmo incluindo termos cúbicos positivos, o comportamento resultante possui na maioria das vezes característica *softening*.

Foram mostrados históricos de deslocamento, velocidade e planos de fase com seção de Poincaré, onde foi verificado que o sistema pode apresentar respostas aperiódicas ou caóticas. Esse comportamento foi ilustrado para o modelo com rigidez não linear k_n .

De forma geral, pode-se observar no sistema giroscópio do tipo diapasão os efeitos da inclusão de termos não lineares, seja de rigidez ou amortecimento. Especificamente mostrou-se que estes termos resultam na transferência de energia entre os graus de liberdade, e isto pode ser explorado no projeto de sistemas recuperadores de energia.

CAPÍTULO 8

DISSEMINAÇÃO DOS RESULTADOS

Os resultados preliminares deste projeto foram apresentados em eventos científicos conforme oportunidades no período, especificamente:

- SILVEIRA, M., CORAZZA, A. N., TEHRANI, M. G., BALTHAZAR, J. M. Non-linear damping to increase energy transfer in tuning fork gyroscope. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON DYNAMIC PROBLEMS OF MECHANICS - DINAME, XVII, 2017. São Sebastião.
- CORAZZA, A. N.;SILVEIRA, M. Rigidez e amortecimento não lineares para aumento de eficácia de recuperador de energia do tipo diapasão.In: SEMINÁRIO DA PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHERIA MECÂNICA, X., 2016. Bauru.

CAPÍTULO 9

SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para um entendimento mais amplo sobre o comportamento dinâmico de dispositivos recuperadores de energia e possível verificação dos resultados obtidos, soluções analíticas aproximadas para o sistema com três graus de liberdade poderão ser desenvolvidas através do uso do método do balanço harmônico. Neste trabalho, devido à presença de termos não lineares e ao fato de que as expressões algébricas obtidas pelo método do balanço harmônico serem muito extensas, a solução destas equações foi de difícil obtenção. Substituindo-se uma solução no formato de uma série de Fourier na equação de movimento do sistema, calcula-se os coeficientes de cada um dos harmônicos, obtendo-se então a solução analítica aproximada, permitindo a comparação com as respostas numéricas apresentadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A Preumont 2006 *Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectrics Systems*, Springer.
- [2] SP Beeby, RN Torah, MJ Tudor, P Glynn-Jones, T O'Donnell, CR Saha, S Roy 2007 A micro electromagnetic generator for vibration energy harvesting, *J Micromech Microeng*, 17, 1257–1265.
- [3] M Ghandchi Tehrani, M Kalkowski 2015 Active control of parametrically excited systems, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1–13.
- [4] Y Lee, P Frank, ZC Feng 2008 Nonlinear complex response of a parametrically excited tuning fork, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22, 1146–1156.
- [5] J Warminski, JM Balthazar 2003 Vibration of a parametrically and self-excited system with ideal and non-ideal energy source, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, 25, 413–420.
- [6] K Kecik, J Warminski 2012 Chaos in mechanical pendulum-like system near parametric resonance, *IUTAM Symposium on 50 years of chaos: Applied and Theoretical*, 5, 249–258.
- [7] X Xu, E Pavlovskaja, M Wiercigroch, F Romeo, S Lenci 2007 Dynamic interactions between parametric pendulum and electro-dynamical shaker, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 87, 172–186.
- [8] RS Langley 2014 A general mass law for broadband energy harvesting, *J Sound and Vibration*, 333, 927–936.
- [9] S Kulkarni, E Koukharenko, R Torah, J Tudor, S Beeby, T O'Donnell, S Roy 2008 Design, fabrication and test of integrated micro-scale vibration-based electromagnetic generator, *Sensors and Actuators*, 145, 336–342.
- [10] L Munteanu, V Chiroiu, T Sireteanu 2013 On the response of small buildings to vibrations, *Non-linear Dynamics*, 73, 1527–1543.
- [11] RMLRF Brasil, LCS Feitosa, JM Balthazar 2006 A nonlinear and non-ideal wind generator supporting structure. *Appl Mech Mater*, 5, 433–442.
- [12] S Zhu, W Shen, Y Xu 2012 Linear electromagnetic devices for vibration damping and energy harvesting: Modeling and testing, *Engineering Structures*, 34, 198–212.

- [13] N Amati, A Festini, A Tonoli 2011 Design of electromagnetic shock absorbers for automotive suspensions, *Vehicle System Dynamics* 49, 1913–1928.
- [14] A Tonoli, N Amati, JG Detoni, R Galluzi, E Gasparin 2013 Modelling and validation of electro-mechanical shock absorbers, *Vehicle System Dynamics*, 51, 1186–1199.
- [15] Y Kawamoto, Y Suda, H Inoue, T Kondo 2007 Modeling of electromagnetic damper for automobile suspension, *J System Design and Dynamics*, 1, 524–535.
- [16] NG Stephen 2006 On energy harvesting from ambient vibration, *J Sound and Vibration*, 293, 409–425.
- [17] JM Renno, MF Daqaq, DJ Inman 2009 On the optimal energy harvesting from a vibration source, *J Sound and Vibration*, 320, 386–405.
- [18] GTO Tékam, EBT Tchuisseu, CAK Kwuimy, P Wofo 2014 Analysis of an electromechanical energy harvester system with geometric and ferroresonant nonlinearities, *Nonlinear Dynamics*, 76, 1561–1568.
- [19] MS Siewe, CND Buckjohn 2014 Heteroclinic motion and energy transfer in coupled oscillator with nonlinear magnetic coupling, *Nonlinear Dynamics*, 77, 297–309.
- [20] R Ramlan, MJ Brennan, BR Mace, I Kovacic 2010 Potential benefits of a non-linear stiffness in an energy harvesting device, *Nonlinear Dynamics*, 59, 545–558. doi:10.1007/s11071-009-9561-5.
- [21] M Ghandchi Tehrani, SJ Elliot 2014 Extending the dynamic range of an energy harvester using nonlinear damping, *J Sound and Vibration*, 333, 623–629.
- [22] M Ghandchi Tehrani, M Silveira, JM Balthazar 2016 Periodic and chaotic response of a macro-scale tuning fork gyroscope, *Applied Mechanics and Materials*, accepted.
- [23] Nayfeh, A.H., Balachandran, B., Applied nonlinear dynamics. WILEY-VCH Verlag GmbH Co. 1994.
- [24] Brzeski, P., Perlikowskia, P., Yanchukb S., Kapitaniaka T., The dynamics of the pendulum suspended on the forced Duffing oscillator. 1994.