

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

LUCAS RANGEL DE OLIVEIRA

**CONCEPÇÃO DE UM ÍNDICE PARA LOCALIZAÇÃO DE TRINCAS EM EIXOS
ROTATIVOS ATRAVÉS DA ANÁLISE DO *SDI (SHAPE AND
DIRECTIVITY INDEX)***

Ilha Solteira

2019

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA

LUCAS RANGEL DE OLIVEIRA

**CONCEPÇÃO DE UM ÍNDICE PARA LOCALIZAÇÃO DE TRINCAS
EM EIXOS ROTATIVOS ATRAVÉS DA ANÁLISE DO *SDI (SHAPE
AND DIRECTIVITY INDEX)***

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia
de Ilha Solteira – UNESP como parte dos
requisitos para obtenção do título de Doutor
em Engenharia Mecânica.

Gilberto Pechoto de Melo
Orientador

Ilha Solteira
2019

Ficha catalográfica

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

O48c Oliveira, Lucas Rangel de.
Concepção de um índice para localização de trincas em eixos rotativos através da análise do SDI (Shape and Directivity Index) / Lucas Rangel de Oliveira. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2019
101 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2019

Orientador: Gilberto Pechoto de Melo
Inclui bibliografia

1. Dinâmica de rotores. 2. Detecção de trincas. 3. Análise modal complexa.
4. Monitoramento de falhas .


João Josué Barbosa

Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação
Diretor Técnico
CRB 8-5642

Certificado de aprovação

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Concepção de um índice para localização de trincas em eixos rotativos através da análise do SDI (*Shape and Directivity Index*)

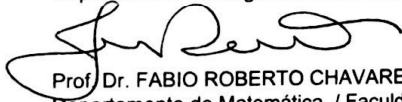
AUTOR: LUCAS RANGEL DE OLIVEIRA

ORIENTADOR: GILBERTO PECHOTO DE MELO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA MECÂNICA, área: Mecânica dos Sólidos pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. GILBERTO PECHOTO DE MELO
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. FABIO ROBERTO CHAVARETTE
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. GUSTAVO LUIZ CHAGAS MANHAES DE ABREU
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. ALDEMIR APARECIDO CAVALINI JUNIOR
Departamento de Engenharia Mecânica / Universidade Federal de Uberlândia



Prof. Dr. EDIVALDO ROMANINI
Curso de Matemática - Câmpus de Três Lagoas / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Ilha Solteira, 18 de fevereiro de 2019

DEDICATÓRIA

À minha mãe, Leila Maria Machado de Oliveira, ao meu pai, Valdir Rangel de Oliveira, à minha irmã, Sayonara Rangel de Oliveira, e, à minha esposa, Mariana Costa Falcão, pelo apoio, companhia e amor.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe Leila Maria Machado de Oliveira, ao meu pai Valdir Rangel de Oliveira, que nos momentos de minha ausência dedicados ao curso, sempre compreenderam que o futuro se constrói a partir da constante dedicação do presente, não medindo esforços para oferecer educação de qualidade aos seus filhos, mesmo não tendo eles a mesma oportunidade no passado.

À minha irmã Sayonara Rangel de Oliveira pela eterna companhia, inspiração, e que mesmo distante, ainda compartilhamos ótimos momentos e experiência de vida.

À minha esposa, Mariana Costa Falcão pelo afeto, carinho, diálogo, compreensão e amizade que temos em nossos dias, e, que juntos, possamos trilhar um futuro de felicidade, amor e sucesso, tanto na vida acadêmica quanto na vida amorosa.

Ao meu orientador, professor e amigo Gilberto Pechoto de Melo, que ao longo desses anos me inspirou, através de seus ensinamentos e exemplos de vida. Por trás da função de professor, que você desempenha exemplarmente, está um ser humano admirável, sempre disposto a apoiar e orientar pessoalmente. À você, todo o meu carinho e gratidão.

Aos meus avós Sabino, Teresinha e Gabriel que mesmo distantes sempre demonstraram todo apoio e carinho, desejando sempre o sucesso de seu neto.

Aos meus amigos e amigas de graduação que, mesmo à distância, continuaram sendo muito especiais em minha vida. Aos amigos de mestrado e doutorado do GMSINT que se tornaram parte da família e tornaram o trabalho de pesquisa muito mais prazeroso pelo ambiente, dividindo comigo as angústias e alegrias.

Finalmente à Deus, pela força durante toda minha vida, iluminando meu caminho e possibilitando a presença de pessoas tão especiais a meu lado. A Ele eu devo minha gratidão.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

“As pessoas costumam dizer que a motivação não dura para sempre. Bem, nem o efeito do banho, por isso recomenda-se diariamente”.

Zig Ziglar

RESUMO

A identificação de trincas ainda é um desafio na área de monitoramento da integridade estrutural em eixos rotativos. Embora muitas técnicas e modelos tenham sido desenvolvidos, encontrar uma técnica eficiente que possa localizar uma única ou múltiplas trincas ao longo do eixo, ainda é um grande desafio. Nesse trabalho, um novo índice para localização de trincas em eixos rotativos é apresentado. A equação do movimento do rotor com trinca utiliza a notação em coordenadas complexas a fim de separar as contribuições dos modos de precessão direta e retrógrada. O índice *SDI* (*shape and directivity index*) é calculado para o rotor, cujo modelo matemático considera a variação instantânea da rigidez do elemento finito devido à abertura e o fechamento gradual da trinca, conhecido como efeito *breathing*. Através da manipulação do *SDI* no modelo de cores HSV (*hue, saturation and value*), desenvolve-se uma escala métrica, visualizada em um mapa de cores, que possibilita localizar a anisotropia causada pela trinca ao longo do eixo. Profundidade e posição da trinca, presença de múltiplas trincas, entre outros fatores que afetam a assinatura da trinca em outros métodos de identificação são analisados. Bons resultados demonstram a eficiência e robustez do novo índice para diversos casos de operação do rotor. Essa métrica de dano acrescenta uma contribuição para os métodos de localização de trincas em sistemas rotativos.

Palavras-chave: Dinâmica de rotores. Detecção de trincas. Análise modal complexa. Modos operacionais.

ABSTRACT

Crack identification is still a challenge in the area of structural health monitoring dedicated to rotating shafts. Although many techniques and models have been developed, finding an efficient technique capable of locating a single or multiple cracks along the shaft is still a challenge. In this work, a new index for locating cracks in rotating shafts is proposed. The equation of motion of the cracked rotor uses notation in complex coordinates in order to separate the contributions of forward and backward precession modes. The *SDI* (shape and directivity index) is calculated for the cracked rotor, which mathematical model considers the instantaneous variation of the finite element stiffness due to the gradual opening and closing of the crack, known as the breathing effect. By manipulating the *SDI* in the HSV (hue, saturation and value) color model, a metric scale is developed to locate the anisotropy caused by cracks along the shaft, visualized on a color map. Depth and position of the crack, presence of multiple cracks, among other factors that affect the signature of the crack in other identification methods are analyzed. Good results demonstrate the efficiency and robustness of the new index for several rotor operation conditions. This damage metric contributes to crack localization methods in rotating systems.

Keywords: Rotordynamics. Crack detection. Complex modal analysis. Operational modes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Ilustração da linha do eixo defletido (linha vermelho escuro) e das órbitas em alguns pontos do rotor (linha verde escuro).....	19
Figura 2- Movimentos de precessão direta e retrógrada.	19
Figura 3- Sistema de coordenadas de referência para um disco em um eixo flexível..	29
Figura 4- Graus de liberdade do elemento finito do eixo.	31
Figura 5- (a) Eixo suportado por mancais. (b) Sistemas de coordenadas do deslocamento de um ponto P na seção transversal do eixo.....	33
Figura 6- Representação dos coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais. ..	36
Figura 7- Massa de desbalanceamento localizada no disco de um rotor de Laval. (a) Vista isométrica do rotor. (b) Vista frontal do disco.....	37
Figura 8- Montagem da matriz de massa global do sistema através do acoplamento das matrizes de massa do elemento.	39
Figura 9- Sistema de coordenadas para a formulação complexa.	43
Figura 10- Órbita elíptica formada a partir da superposição das órbitas circulares em precessão direta (Ω) e retrógrada ($-\Omega$).....	45
Figura 11- Direção do eixo do movimento elíptico no rotor com mancais anisotrópicos.	46
Figura 12- Conceito da matriz de função de resposta em frequência direcional.....	51
Figura 13- Aplicação do <i>SDI Plot</i> para um rotor anisotrópico.....	52
Figura 14- Relação das cores puras no sistema HSV e seus valores angulares e escalares.....	54
Figura 15- Escala para a cor azul. (a) Saturação; (b) Valor.....	54
Figura 16- Modelo em Elementos Finitos para o sistema com três mancais.	56
Figura 17- (a) Diagrama de rigidez dos mancais. (b) Diagrama de Campbell.	57
Figura 18- (a) FRF do nó 16 na direção vertical. (b) dFRF do nó 16.....	58
Figura 19- (a) dFRF dos modos retrógrado e direto sobrepostos do driving-point 16z. (b) Diagrama de Campbell.	59
Figura 20- Rotor com mancais isotrópicos, $k_{zz} = k_{xx} = 20$ kN/m. (a) <i>SDI Plot</i> . (b) dFRF para o nó 8.	59
Figura 21- Rotor com mancais anisotrópicos, $k_{zz} = 20$ kN/m e $k_{xx} = 19$ kN/m. (a) <i>SDI Plot</i> . (b) dFRF para o nó 8.....	60

Figura 22- Rotor com mancais anisotrópicos, $k_{zz} = 20$ kN/m e $k_{xx} = 16$ kN/m. (a) SDI_{Plot} . (b) dFRF para o nó 8.	61
Figura 23- Rotor com mancais anisotrópicos com amortecimento, $k_{zz} = 20$ kN/m, ...	61
Figura 24- Rotor com mancais anisotrópicos com amortecimento, $k_{zz} = 20$ kN/m, ...	62
Figura 25- Rotor com mancais anisotrópicos com amortecimento, $k_{zz} = 20$ kN/m, ...	62
Figura 26- SDI_{Plot} indicando as velocidades de visualização das órbitas do rotor.	63
Figura 27- Órbitas do rotor para diferentes valores de velocidade de rotação em diferentes posições do eixo.	64
Figura 28- Sistemas de coordenadas para o elemento de trinca. (a) antes da rotação. (b) depois da rotação.	66
Figura 29- Estados da trinca e localização do centroide da seção transversal do elemento com trinca para diferentes ângulos de rotação do eixo.	67
Figura 30- Ilustração da estrutura discretizada por Elementos Finitos incluindo a indicação da trinca no eixo.	72
Figura 31- (a) Diagrama de rigidez. (b) Diagrama de Campbell.	73
Figura 32- SDI_{Plot} para o rotor com diferentes aberturas da trinca.	74
Figura 33- SDI_{Plot} na região próxima à primeira velocidade crítica do rotor.	75
Figura 34- Ocorrência de modos operacionais próximos à primeira velocidade crítica do rotor com trinca para o nó 10.	76
Figura 35- Órbitas do rotor com trinca na passagem por (a)-(d) velocidades críticas direta e retrógrada, (e)-(l) velocidades subcríticas direta e retrógrada.	78
Figura 36- SDI_{Plot} na região próxima à segunda velocidade crítica do rotor.	79
Figura 37- Resposta do rotor em $\frac{1}{3} \times$ de 8930 rpm.	79
Figura 38- Representação do intervalo de cores para o AII_{Plot}	81
Figura 39- Desempenho do AII_{Plot} devido à mudança de posição dos mancais.	82
Figura 40- Sensibilidade do AII_{Plot} devido à mudança de rigidez dos mancais.	82
Figura 41- Pseudocódigo do parâmetro $AII3D$ para localização de trincas.	83
Figura 42- Diferença entre os mapas de cores. (a) AII_{Plot} . (b) $AII3D$	84
Figura 43- Localização da trinca para diferentes ângulos de abertura. (a) AII_{Plot} . (b) $AII3D$	85
Figura 44- Desempenho do $AII3D$ devido à mudança do elemento de trinca.	86
Figura 45- Desempenho do $AII3D$ devido à mudança da profundidade da trinca.	87
Figura 46- Localização de múltiplas trincas com a mesma profundidade pelo $AII3D$	87

Figura 47- Localização de múltiplas trincas com profundidades diferentes pelo <i>AIBD</i>	88
Figura 48- Influência da direção da trinca em relação ao ângulo da massa de desbalanceamento no desempenho do índice <i>AIBD</i>	89
Figura 49- Influência da direção entre as trincas no desempenho do índice <i>AIBD</i>	90

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Relação entre os valores de SDI e os tipos de movimento do eixo.....	47
Tabela 2- Relação entre as cores desejadas no SDI_{plot} e os valores no sistema HSV. .	55
Tabela 3- Parâmetros físicos do sistema com três mancais.....	56
Tabela 4- Estados de <i>breathing</i> da trinca durante uma revolução completa do eixo..	67
Tabela 5- Parâmetros físicos do sistema com trinca.	72
Tabela 6- Formato das órbitas durante a passagem por velocidades subcríticas de um eixo com trinca.	77
Tabela 7- Coeficientes de rigidez [N/m] e amortecimento [Ns/m] dos mancais.....	82

LISTA DE SÍMBOLOS

A_I	Área sem trinca da seção transversal do elemento com trinca
$A_2(t)$	Área da seção transversal da porção fechada
$A_{ce}(t)$	Área total da seção transversal do elemento da trinca durante a rotação do eixo
b	A distância do centroide da área sem a trinca até a borda da trinca
D	Matriz global de amortecimento
D_R	Função de dissipação de Rayleigh
E	Módulo de elasticidade de Young
$f_1(t), f_2(t)$	Funções matemáticas para aproximar a variação dos momentos de inércia sobre os eixos \bar{X} e \bar{Y}
\vec{F}	Vetor de forças atuantes no rotor
F_u	Força de reação dos mancais na direção x
F_w	Força de reação dos mancais na direção z
$g_l(t)$	Vetor de força transversal em coordenadas complexas
$g_o(t)$	Vetor de força angular em coordenadas complexas
G	Matriz global de efeito giroscópio
G_D	Matriz giroscópica do disco
G_e	Matriz giroscópica do elemento finito do eixo
I	Momento de inércia de área para a posição totalmente fechada da trinca
\bar{I}_1, \bar{I}_2	Momentos de inércia da área A_1 sobre os eixos inerciais do centroide \bar{x} e \bar{z}
I_x^c, I_z^c	Momentos de inércia de área para o segmento da trinca sobre os eixos móveis x e z
$I_X^{A_1}(t), I_Z^{A_1}(t)$	Momentos de inércia da área A_1 sobre os eixos inerciais X e Z
$I_X^{A_2}(t), I_Z^{A_2}(t)$	Momentos de inércia da área $A_2(t)$ sobre os eixos de inercia X e Z
$I_X(t), I_Z(t)$	Momentos de inércia da área $A_{ce}(t)$ sobre os eixos inerciais X e Z
$I_{\bar{X}}(t), I_{\bar{Z}}(t)$	Momentos de inércia da área $A_{ce}(t)$ sobre os eixos \bar{X} e \bar{Z}
$\hat{I}_X(t), \hat{I}_Z(t)$	Aproximação dos momentos de inércia sobre os eixos \bar{X} e \bar{Z}
I_{D_x}	Momento de inércia de área do disco na direção x

I_{D_y}	Momento de inércia de área do disco na direção y
I_{D_z}	Momento de inércia de área do disco na direção z
I_e	Momento de inércia de área do elemento finito do eixo em relação ao seu eixo neutro
h	Profundidade radial da trinca
h_D	Espessura do disco
\mathbf{K}	Matriz global de rigidez
\mathbf{K}_e	Matriz clássica de rigidez do elemento finito do eixo
$\mathbf{K}_{et1}, \mathbf{K}_{et2}$	Matrizes de rigidez devido ao mecanismo de <i>breathing</i> da trinca
L_e	Comprimento do elemento finito
m	Massa de desbalanceamento
m_D	Massa do disco
\mathbf{M}	Matriz global de massa (incluindo a massa do eixo e do disco)
\mathbf{M}_D	Matriz clássica de massa do disco
\mathbf{M}_e	Matriz clássica de massa do elemento finito do eixo
\mathbf{M}_e^s	Matriz de massa devido à influência rotacional da seção transversal
n	Número de graus de liberdade do sistema
N	Número de nós do sistema
$N_1(y), N_2(y)$	Funções de forma de uma viga em flexão
$p_l(t)$	Vetor de deslocamento transversal em coordenadas complexas
$p_\phi(t)$	Vetor de deslocamento angular em coordenadas complexas
\vec{q}	Vetor de deslocamento nodal generalizado de todo o sistema
q_k	Coordenada generalizada independente do sistema
Q_k	Força generalizada
r	Distância entre o centro geométrico do disco e a massa de desbalanceamento
R	Raio do elemento finito da trinca
R_D^e	Raio externo do disco
R_D^i	Raio interno do disco
s	Largura da trinca em relação ao eixo Z
S_e	Área de seção transversal do eixo
T	Energia cinética do sistema
T_D	Energia cinética do disco

T_e	Energia cinética do elemento finito do eixo
T_m	Energia cinética da massa de desbalanceamento
u	Coordenada do centro de massa na direção x
U	Energia potencial do sistema
U_e	Energia potencial de deformação do elemento finito do eixo
w	Coordenada do centro de massa na direção z
X, Y, Z	Sistema inercial de coordenadas
$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$	Sistema primário de coordenadas para o elemento da trinca
x_1, y_1, z_1	Sistema primário de coordenadas
x_2, y_2, z_2	Sistema secundário de coordenadas
x, y, z	Sistema móvel de coordenadas ou de referência
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	Sistema móvel de coordenadas para o elemento da trinca

LISTA DE SÍMBOLOS GREGOS

α	Ângulo de abertura da trinca
δ_D	Vetor de deslocamento nodal do centro de massa do disco
δ_e	Vetor de deslocamento nodal do centro de massa do elemento finito do eixo
δ_m	Vetor de deslocamento nodal da massa de desbalanceamento
ε	Deformação longitudinal do elemento de eixo
ϕ_x	Ângulo de rotação em torno do eixo x_1
ϕ_y	Ângulo de rotação em torno do eixo y_2
ϕ_z	Ângulo de rotação em torno do eixo Z
μ	Profundidade adimensional da trinca
η	Fator de proporcionalidade da matriz de amortecimento do eixo
ω_x	Velocidade angular na direção x
ω_y	Velocidade angular na direção y
ω_z	Velocidade angular na direção z
Ω	Velocidade de rotação do eixo em torno do eixo y
ρ_D	Densidade do material do disco
ρ_e	Densidade do material do eixo
θ_1	Ângulo de início do fechamento da trinca
θ_2	Ângulo de fechamento completo da trinca

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	MOVIMENTOS DE PRECESSÃO DO ROTOR	18
1.2	REVISÃO DA LITERATURA SOBRE MODOS OPERACIONAIS MISTOS EM EIXOS ROTATIVOS	20
1.3	REVISÃO DA LITERATURA SOBRE TRINCAS TRANSVERSAIS EM EIXOS ROTATIVOS	21
1.4	REVISÃO DA LITERATURA SOBRE MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE TRINCAS.....	23
1.5	OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO	25
1.6	DIVISÃO DO TRABALHO	26
2	MODELAGEM DO SISTEMA ROTATIVO	28
2.1	DISCO	28
2.2	EIXO	31
2.2.1	Energia cinética do eixo	31
2.2.2	Energia de deformação do eixo	33
2.3	MANCAIS	36
2.4	EFEITO DA MASSA DE DESBALANCEAMENTO	37
2.5	EQUAÇÃO DE MOVIMENTO DO ROTOR PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.....	39
2.6	ANÁLISE DE AUTOVALORES E AUTOVETORES	40
3	ANÁLISE EM COORDENADAS COMPLEXAS	43
3.1	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DE COORDENADAS COMPLEXAS	43
3.2	CONSTRUÇÃO DO MAPA SDI_{PLOT}	52
3.3	ANÁLISE NUMÉRICA DE UM ROTOR ATRAVÉS DE COORDENADAS COMPLEXAS	56
4	MODELAGEM DA TRINCA	65
5	UTILIZAÇÃO DE COORDENADAS COMPLEXAS NA ANÁLISE DO ROTOR COM TRINCA	72

5.1	ANÁLISE DOS MODOS OPERACIONAIS PARA O ROTOR COM TRINCA.....	73
5.2	CONCEPÇÃO DE ÍNDICES MÉTRICOS PARA LOCALIZAÇÃO DE ANISOTROPIA EM EIXOS ROTATIVOS	80
5.2.1	Concepção do índice AII_{plot} para localização de anisotropia	80
5.2.2	Concepção do índice $AII3D$ para localização de anisotropia	83
5.2.2.1	<i>Localização de uma única trinca pelo índice $AII3D$</i>	86
5.2.2.2	<i>Localização de múltiplas trincas pelo índice $AII3D$</i>	87
6	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	91
	REFERÊNCIAS	93
	APÊNDICE	93

1 INTRODUÇÃO

Os conceitos e análises desenvolvidos na dinâmica de rotores estão relacionados à teoria clássica da vibração. Assim como na análise de vibração, análises de frequências naturais, modos de vibrar, resposta à excitação forçada são encontrados na dinâmica de rotores. No entanto, o efeito giroscópico, presente em sistemas rotativos, faz com que a equação do movimento se torne não-simétrica e acoplada nas duas direções radiais (SWANSON et al., 2005; YOON; LIN; ALLAIRE, 2013a).

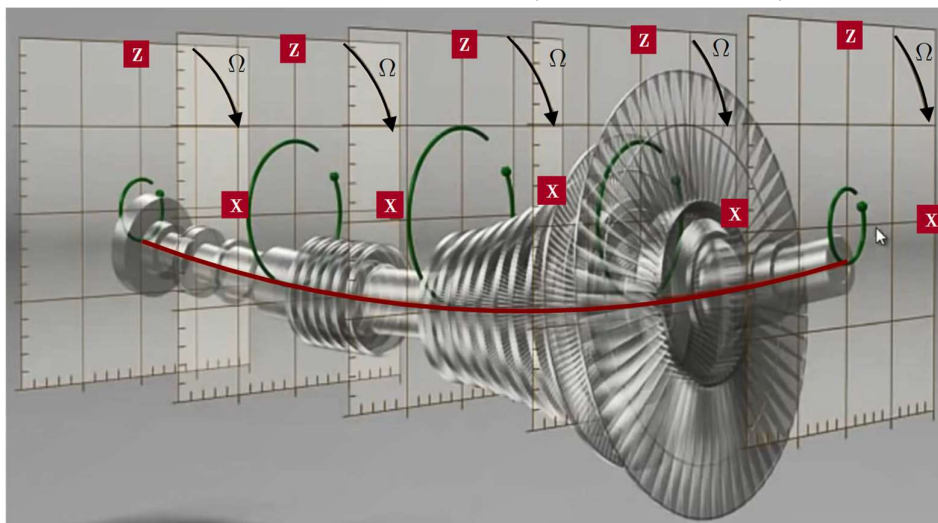
Este capítulo introduz os conceitos sobre os movimentos de precessão do rotor, bem como realiza, de forma concisa, uma revisão bibliográfica sobre trabalhos que investigam os modos operacionais em rotores e os efeitos e métodos de identificação de trincas em eixos rotativos.

1.1 MOVIMENTOS DE PRECESSÃO DO ROTOR

O ramo da dinâmica de rotores (considerado como uma particularidade no estudo das vibrações mecânicas) investiga as vibrações em eixos rotativos, com o objetivo de prever as vibrações do rotor e manter o nível de vibração abaixo de um limite aceitável (YOON; LIN; ALLAIRE, 2013b). Nesse trabalho, o termo “rotor” é utilizado para descrever o sistema rotativo como um todo, no qual inclui o eixo, discos, rolamentos, engrenagens, acoplamentos e outros elementos anexados ao eixo (MUSZYNSKA, 1995).

Os deslocamentos, deformações e tensões do rotor estão relacionados tanto aos parâmetros físicos do sistema quanto ao seu regime de operação. Dessa maneira, o movimento resultante do rotor é composto pelos modos operacionais do sistema, consequência da rotação do eixo defletido em torno de sua configuração não defletida (precessão ou *whirl*), representado pela linha vermelha escuro na Figura 1 e, também, pelo formato da resposta forçada em uma determinada rotação, podendo ser visualizado pelas suas órbitas, representadas pelas linhas verdes escuro na Figura 1 (MESQUITA; DIAS JR, 2004; MOBIUS INSTITUTE, [s.d.]).

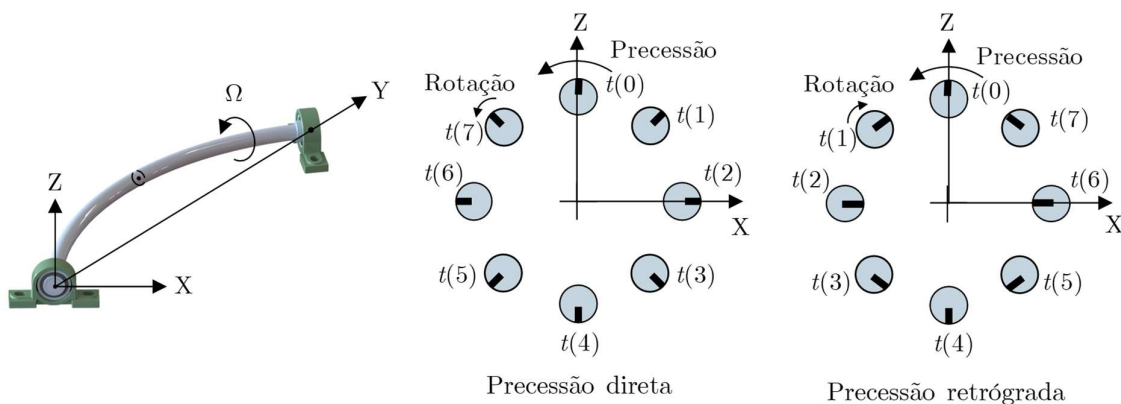
Figura 1. Ilustração da linha do eixo defletido (linha vermelho escuro) e das órbitas em alguns pontos do rotor (linha verde escuro).



Fonte: Modificado de (MOBIUS INSTITUTE, [s.d.]).

O centro geométrico do eixo pode ter uma trajetória no mesmo sentido que a rotação própria do rotor, movimento caracterizado como precessão direta (*forward whirl*), ou ter sentido oposto, caracterizado como precessão retrógrada ou inversa (*backward whirl*), como mostra a Figura 2 (MESQUITA; DIAS JR, 2004; SWANSON et al., 2005).

Figura 2. Movimentos de precessão direta e retrógrada.



Fonte: Adaptado de Swanson (2005).

Os movimentos de precessão retrógrada requerem mais atenção, pois causam alternância das tensões no eixo, o que pode levá-lo à ruptura por fadiga. Um caso mais preocupante é a ocorrência simultânea de movimentos de precessão direta e

retrógrada no eixo do rotor, ou seja, para uma mesma rotação, algumas regiões do eixo possuem uma trajetória no mesmo sentido que a rotação própria do rotor, e outras em sentido oposto. Este fenômeno é denominado de modo operacional misto (DIAS et al., 2004a, 2004b; JR; ALLEMANG, 2001).

Neste contexto, dentre outras técnicas, a utilização de coordenadas complexas na modelagem de sistemas rotativos, em conjunto com a análise modal complexa, possibilita o uso de ferramentas que caracterizam a forma da órbita e a direcionalidade do movimento de precessão (DIAS et al., 2004a).

1.2 REVISÃO DA LITERATURA SOBRE MODOS OPERACIONAIS MISTOS EM EIXOS ROTATIVOS

A utilização de coordenadas complexas para descrever a equação de movimento de um sistema rotativo possibilita determinar as componentes de precessão direta e de precessão retrógrada. Essa metodologia é fundamental para melhor compreender os movimentos de precessão, bem como averiguar a existência de modos operacionais mistos.

Lee (1991) empregou a notação complexa na modelagem de um sistema rotativo, propondo um método de teste modal complexo para identificar os parâmetros modais de máquinas rotativas e comparou com o método clássico. Com a utilização da notação complexa, é possível distinguir os modos direto e retrógrado e separá-los no domínio da frequência, facilitando a identificação dos parâmetros modais. Lee e Joh (1993) apresentaram diversos métodos de excitação para o uso de testes modais complexos em máquinas rotativas. Os métodos de excitação foram desenvolvidos, baseados na relação entrada/saída para sinais complexos, a fim de avaliar as funções de respostas em frequência (FRFs) e funções de coerência. Os resultados numéricos mostraram que a excitação estacionária bidirecional permitiu boas estimativas de FRFs entre entradas e saídas complexas na presença dos ruídos de medição.

Dias et al. (2004b) investigaram a ocorrência de modos operacionais mistos em rotores rígidos e flexíveis apoiados em mancais anisotrópicos modelados pelo método de Elementos Finitos. Através dos resultados simulados, verificaram que esse fenômeno é afetado pela quantidade de amortecimento nos mancais, pela distribuição espacial das forças de desbalanceamento, pela distribuição de massa ao longo do eixo e pelo nível de anisotropia dos mancais. Um mapa de cores, denominado *SDI Plot*, foi

introduzido e apresentado como uma ferramenta útil e fácil de usar, no qual, mostrava claramente a direção e a forma de qualquer nó do rotor a qualquer velocidade de rotação.

Dias et al. (2004a) apresentaram em seu trabalho a existência dos modos operacionais mistos em rotores flexíveis. Um modelo de elemento finito baseado em coordenadas complexas foi utilizado para calcular a resposta complexa do sistema quando submetido a múltiplas forças de desbalanceamento aplicadas nos dois discos do rotor. O índice de forma e diretividade, *SDI* (*Shape and Directivity Index*), foi utilizado para identificar a faixa de velocidade de rotação onde o fenômeno ocorre. O estudo numérico foi comprovado pelos resultados experimentais confirmando a existência de modos operacionais mistos.

No mesmo ano, Bachschmid et al. (2004) analisaram o espectro total de vibrações de uma grande unidade geradora de turbina a fim de diagnosticar assinaturas de falhas devido a fricções do conjunto rotor-estator. Foram analisadas as mudanças do parâmetro *SDI*, inclinação e amplitude do eixo principal da órbita elíptica que ocorre durante o procedimento de *run-up* e *run-down*. Essas análises permitiram obter informações de diagnóstico sobre o sistema, podendo correlacionar com sintomas significativos de alguns tipos de falha, além de serem usados para ajustar os coeficientes dos mancais presentes no modelo matemático do sistema.

De forma geral, a identificação da direcionalidade dos modos, atentando-se para a ocorrência de modos retrógrados e mistos, são de grande relevância, pois afetam diretamente a vida útil do sistema, devido à alternância de tensões ao longo do eixo. Essa alternância de tensões em pontos de concentração de tensão, como cantos vivos, filetes, entalhes, rasgos de chaveta, defeitos de fabricação, é capaz de levar o rotor à fratura, causando grandes prejuízos.

1.3 REVISÃO DA LITERATURA SOBRE TRINCAS TRANSVERSAIS EM EIXOS ROTATIVOS

O fenômeno de falhas por propagação catastrófica de uma trinca em sistemas rotativos possui também um papel significativo no ramo da dinâmica de rotores. Diversos artigos foram publicados sobre o estudo teórico e experimental da análise dinâmica e o desenvolvimento de metodologias para detecção e diagnóstico de trincas (AL-SHUDEIFAT; BUTCHER, 2011; BACHSCHMID; PENNACCHI; TANZI, 2010b; CAVALINI JR et al., 2016; GUO; YAN; YANG, 2017a), além de extensas

revisões da literatura mostrando a particularidade de cada modelo e condensando as informações presentes ao longo dos anos (KAN; TAN; MATHEW, 2015; PAPADOPOULOS, 2008; SABNAVIS et al., 2004a).

Durante a operação de um eixo horizontal flexível, seu próprio peso produz uma curvatura que induz a trinca abrir e fechar repetidamente. Essa condição faz com que a rigidez nesse local seja sincronizada com o ângulo de rotação do eixo. Este mecanismo é chamado de “*breathing crack*” (PAPADOPOULOS, 2008; PATEL; DARPE, 2008; SINOUE; LEES, 2005). Desse modo, o primeiro passo para entender os efeitos dinâmicos de um rotor com trinca é encontrar um modelo eficaz de “*breathing crack*” (AL-SHUDEIFAT; BUTCHER, 2011).

Davies e Mayes (1984) desenvolveram uma técnica de cálculo para permitir que, através do monitoramento de vibração em eixos rotativos, previsões confiáveis fossem feitas para que trincas transversais pudessem ser detectadas antes da ocorrência de uma falha catastrófica. A passagem da abertura para o fechamento total da trinca é considerada suave, com uma característica harmônica dependente da posição angular do rotor. Gasch (1993) já adotou uma modelagem mais simples para o “*breathing crack*” – na qual considera apenas dois estados: totalmente aberto e totalmente fechado – a fim de analisar o comportamento dinâmico e a estabilidade do rotor com trincas transversais. Embora mais simples, esse modelo se mostrou muito bem representativo para baixas profundidades de trincas.

Em trabalhos mais atuais, o efeito da trinca sobre o elemento resulta em um momento de inércia de área da seção transversal variante no tempo, juntamente com a função que representa o efeito de “*breathing crack*”. Sinou e Lees (2005) analisaram as mudanças na frequência natural do rotor para diferentes profundidades de trinca e o comportamento dinâmico do rotor próximo a $1/2x$ da velocidade crítica. Para calcular a resposta, os autores utilizaram o método do balanceamento harmônico, que permite discretizar funções desconhecidas no tempo utilizando seus componentes de Fourier. A influência da trinca é devido à mudança dos momentos de inércia de acordo com a profundidade da trinca e o efeito de “*breathing crack*” é representado por uma função senoidal apresentada por Davies e Mayes (1984).

Al-Shudeifat e Butcher (2011) apresentaram duas novas funções – uma para cada eixo de coordenadas – para representar o efeito de “*breathing crack*” e propuseram novas equações para calcular a variação dos momentos de inércia de área da seção transversal do elemento com trinca. O trabalho realizou uma comparação com a modelagem usada em Sinou e Lees (2005). Os resultados foram promissores: os

momentos de inércia do novo modelo corresponderam corretamente à realidade e as novas funções para o “*breathing crack*” apresentaram resultados mais precisos para o comportamento dinâmico do rotor com trinca.

A presença de trincas no eixo introduz uma flexibilidade local que acarreta em uma diminuição da rigidez no elemento da trinca, tornando o sistema anisotrópico. Trabalhos mais recentes modelam o sistema em coordenadas complexas a fim de utilizar o método de espectro completo (*Full-Spectrum*) para obter através da transformada rápida de Fourier (FFT) os coeficientes de força e deslocamento para os modos diretos e retrógrado (SHRAVANKUMAR; TIWARI, 2016; TIWARI; CHANDRASEKARAN, 2013). Esses coeficientes são então usados como uma entrada para algoritmos de identificação de trinca.

1.4 REVISÃO DA LITERATURA SOBRE MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE TRINCAS

A necessidade de monitorar a integridade estrutural de sistemas mecânicos está se tornando cada vez mais importante, já que o aumento do processo produtivo exige cada vez mais a disposição de máquinas e equipamentos capazes de executar mais funções em um menor tempo. Nesse contexto, o termo monitoramento de integridade estrutural – ou do inglês, *structural health monitoring* (SHM) – pode ser definido como a implementação de uma estratégia para detecção de danos. Essa estratégia envolve a observação de uma estrutura durante um período de tempo, a identificação de recursos para medições de sinais e a análise desses dados para determinar o estado de dano atual do sistema (CAVALINI JR et al., 2016; MANI; QUINN; KASARDA, 2006).

Na literatura, as técnicas de SHM para detecção e diagnóstico de trincas em máquinas rotativas são, geralmente, agrupadas em três categorias: métodos clássicos baseados em vibração (métodos tradicionais), análise modal e métodos não-convencionais (SABNAVIS et al., 2004b). Essa última categoria – que, por não envolver conceitos utilizados nesse trabalho, não será detalhada na tese – baseia-se em métodos não-tradicionais de detecção de trincas de eixos, tais como redes neurais, lógica difusa, algoritmo genético, transformadas de Wavelet, entre outros mais.

Os métodos clássicos ou tradicionais monitoram as componentes do sinal de vibração medido sob operação em estado estacionário e/ou transiente. Diversos autores baseiam seus estudos na amplitude da vibração síncrona $1x$ e na fase

associada. De acordo com Bently e Hatch (2002), esse fenômeno deve-se ao fato de que, quando uma trinca se propaga através do diâmetro de um eixo, a área remanescente da seção transversal torna-se menor, diminuindo a rigidez à flexão, ocasionando um aumento na deflexão para uma mesma carga estática ou dinâmica. Assim, a ocorrência da trinca, bem como a sua propagação, produz uma alteração na amplitude e fase em $1x$ (CAVALINI JR, 2013; MUSZYNSKA, 2005; SABNAVIS et al., 2004b).

Outros pesquisadores consideram o monitoramento da componente $2x$ como um bom indicador de trincas no eixo. Bachschmid et. al (2010a), Saavedra e Cuitino (2002) demonstraram que a trinca causa diferenças consideráveis na amplitude e na fase da resposta vibracional do rotor na metade do primeiro valor crítico de velocidade, devido a componente $2x$ da vibração lateral, sendo um bom indicador da presença da trinca. Ainda, outros autores sugerem analisar velocidades subcríticas, justificando que nessas velocidades os efeitos da trinca são mais sensíveis (DARPE; GUPTA; CHAWLA, 2006; GUO; YAN; YANG, 2017b; ISHIDA; YAMAMOTO, 2012; JUN; GADALA, 2008; SINOU; LEES, 2005; ZHOU et al., 2005). Al-Shudeifat e Butcher (2011) sintetizaram, em tabelas e figuras, a diferença do comportamento das órbitas durante a passagem por velocidades subcríticas de precessão direta e retrógrada, de acordo com os harmônicos dominantes na resposta.

Na segunda categoria, a análise modal analisa as alterações nas características modais do sistema devido a presença da trinca, tais como: alterações no modo de vibrar, na frequência natural e na resposta em frequência devido à excitação externa (diferente da força de desbalanceamento) (SABNAVIS et al., 2004b).

A variação das frequências naturais foi o estudo de alguns autores como um parâmetro de diagnóstico em procedimentos de avaliação estrutural (CZAJKOWSKI; BARTOSZEWICZ; KULESZA, 2017; SALAWU, 1997). No entanto, muitos dos métodos propostos requerem um modelo teórico de dano ou um conjunto de valores de sensibilidade a serem computados antes das medições físicas. Esses métodos de análise podem ser muito lentos se as matrizes forem grandes, especialmente se for necessária a solução de autovalores completa para cada iteração. Além disso, mudanças de frequência natural, por si só, podem não ser suficientes para uma identificação única da localização do dano estrutural – já que diferentes configurações de danos podem produzir a mesma resposta ao sistema. Outros fatores a considerar são o efeito das condições ambientais na resposta dinâmica da estrutura e a confiabilidade dos procedimentos de teste (SALAWU, 1997).

Na mesma categoria, engloba-se os trabalhos que estudam o acoplamento entre diferentes tipos de vibrações, isto é, axial, radial e torcional, em eixos com trinca. Darpe et. al (2003) analisaram um rotor com trinca submetido à excitação axial. A presença de frequências de excitação axial no espectro de frequência de vibração lateral indicou a presença de acoplamento destas vibrações laterais e longitudinais. Ishida e Inoue (2005) apresentaram um estudo teórico e experimental sobre a detecção de trinca utilizando forças periódicas de excitação. Quando estas são aplicadas ao rotor, picos em frequências associadas com combinações de ressonâncias surgem devido à característica não linear do sistema, não visualizadas em rotores sem trinca. Nesse contexto, diversos autores investigaram o comportamento não-linear da trinca através de uma técnica que utiliza forças externas de diagnóstico aplicadas em certas frequências (CAVALINI JR, 2013; CAVALINI JR et al., 2016; MANI; QUINN; KASARDA, 2006; SAWICKI et al., 2011).

Em suma, pode ser visto que a área de detecção de trincas está ativa e em constante evolução. Novas técnicas estão surgindo à medida que novos conhecimentos são obtidos nos campos da mecânica da fratura, simulação e condições de monitoramento. Na base de dados disponíveis, não foram encontrados estudos que utilizam as informações do *SDI* como método de detecção de trincas em máquinas rotativas. Desta forma, à métrica de dano, proposta nesse trabalho, pode ser atribuído o caráter inédito, contribuindo para os métodos de localização de trincas em sistemas rotativos.

1.5 OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

Não há muitos estudos que investigam a ocorrência de modos operacionais (diretos, retrógrados e mistos) devido a anisotropia inserida pela trinca em sistemas rotativos, nem ao menos, a utilização das informações do *SDI* na localização de trincas ao longo do eixo.

Nesse contexto, esse trabalho tem por objetivos: investigar a ocorrência de modos operacionais diretos, retrógrados e mistos em rotores anisotrópicos devido a presença da trinca no eixo através das informações do *SDI*; apresentar a concepção de um índice – a partir da modificação do *SDI* – a fim de propor uma nova técnica de localização de trincas em sistemas rotativos, analisando sua eficiência em diversas situações.

1.6 DIVISÃO DO TRABALHO

Esse trabalho está dividido em seis capítulos. Como já descrito, o Capítulo 1 apresenta uma breve fundamentação teórica sobre a modos operacionais em eixos rotativos, tal como trabalhos que utilizam essa temática em suas análises, além de realizar uma breve revisão bibliográfica sobre modelos e métodos de identificação de trincas em rotores, e, ainda, expõe as contribuições e objetivos desse trabalho.

O Capítulo 2 apresenta a formulação das matrizes elementares que constituem o modelo matemático dos principais componentes do rotor utilizando o Método de Elementos Finitos. Também, apresenta a montagem das matrizes elementares dos componentes a fim de descrever a equação geral de movimento do rotor. Ao final do capítulo, apresenta-se o cálculo dos autovalores e autovetores do sistema, relacionado com as frequências naturais e modos de vibrar, respectivamente.

A primeira parte do Capítulo 3 mostra a formulação da equação do movimento do rotor utilizando coordenadas complexas, possibilitando determinar as componentes de precessão direta e de precessão retrógrada, bem como o formato das órbitas e a direcionalidade dos movimentos de precessão, através do parâmetro SDI . Ainda, esse capítulo, apresenta uma breve revisão da análise modal clássica para obtenção das funções de resposta em frequência (FRFs) de sistemas rotativos e a análise modal complexa, baseada na descrição das respostas e forças de excitação como sendo sinais complexos para obtenção das funções de resposta em frequência direcional (dFRFs), na qual possuem a capacidade de incorporar a direcionalidade dos modos. A segunda parte analisa e discute o comportamento do parâmetro SDI e das dFRFs para um sistema rotativo suportado por mancais anisotrópicos, semelhante ao apresentado em Mesquita (2004).

O Capítulo 4 descreve os conceitos matemáticos envolvidos no método de modelagem do fenômeno *breathing* e da variação da localização do centroide do elemento de trinca apresentado por Al-Shudeifat e Butcher (2011), bem como a inserção do modelo de trinca no Método de Elementos Finitos.

O Capítulo 5 apresenta a aplicação das coordenadas complexas na equação de movimento para eixos com trinca, investigando o significado do parâmetro SDI para a identificação da ocorrência de modos operacionais diretos, retrógrados e mistos no sistema, para velocidade críticas e subcríticas. Ainda, a partir dos valores do parâmetro SDI no modelo de cores HSV, propõe a concepção de um índice para

localizar regiões com diferentes níveis de anisotropia, possibilitando a localização de trincas ao longo do eixo.

O Capítulo 6 exhibe as conclusões e sugestões de trabalhos futuros. As referências, citadas ao longo do texto, são apresentadas na sequência e, por fim, o Apêndice exhibe detalhadamente as matrizes elementares utilizadas nas equações de movimento.

2 MODELAGEM DO SISTEMA ROTATIVO

O modelo físico de um sistema rotativo pode ser descrito pela combinação de elementos de disco, eixo e mancais, sendo que as massas de desbalanceamento também devem ser consideradas. A equação de movimento do sistema é obtida aplicando-se a equação de Lagrange (ISHIDA; YAMAMOTO, 2012; LALANNE; FERRARIS, 1998)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D_R}{\partial \dot{q}_i} = Fq_i \quad (1)$$

sendo $i (1 \leq i \leq n)$ o número referente ao grau de liberdade do sistema, q_i as coordenadas generalizadas independentes, Fq_i as forças generalizadas, T a energia cinética, U a energia potencial, D_R a função de dissipação de energia de Rayleigh das forças não conservativas.

A parcela de energia cinética caracteriza o disco, o eixo e a massa de desbalanceamento. A energia potencial de deformação caracteriza o eixo. A influência dos mancais é inserida através do trabalho virtual das forças não-conservativas (amortecimento viscoso), escrito em termos das forças e coordenadas generalizadas.

2.1 DISCO

O disco é considerado rígido e caracterizado apenas por sua energia cinética. Adota-se para a modelagem o sistema inercial (X, Y, Z) , o sistema primário (x_1, y_1, z_1) , o sistema secundário (x_2, y_2, z_2) e o sistema fixo no disco (x, y, z) , também chamado de sistema de referência. Os ângulos ϕ_x , ϕ_y e ϕ_z relacionam esses quatro sistemas (LALANNE; FERRARIS, 1998).

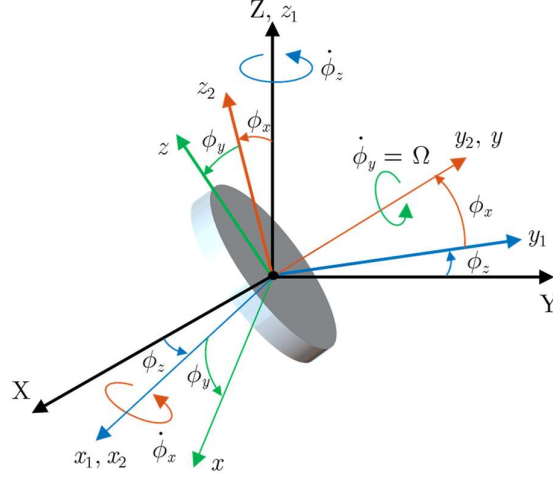
O ângulo ϕ_z rotaciona o disco em torno do eixo Z , gerando o sistema (x_1, y_1, z_1) ; ϕ_x rotaciona em torno do eixo x_1 , gerando o sistema (x_2, y_2, z_2) ; ϕ_y em torno do eixo y_2 , gerando o sistema fixo no disco (x, y, z) , conforme ilustra a Figura 3.

O vetor de velocidade instantânea do disco no sistema de referência é dado por

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}_z \vec{z}_1 + \dot{\phi}_x \vec{x}_2 + \dot{\phi}_y \vec{y} \quad (2)$$

sendo \vec{z}_1 , \vec{x}_2 e \vec{y} os vetores unitários ao longo dos eixos z_1 , x_2 e y .

Figura 3. Sistema de coordenadas de referência para um disco em um eixo flexível.



Fonte: Modificado de Lalanne e Ferraris (1998).

A energia cinética do disco em relação ao seu centro de massa O é calculado no sistema inercial (X, Y, Z). Nesse sistema o vetor de velocidade angular se torna

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\phi}_z \cos \phi_x \sin \phi_y + \dot{\phi}_x \cos \phi_y \\ \dot{\phi}_y + \dot{\phi}_z \sin \phi_x \\ \dot{\phi}_z \cos \phi_x \cos \phi_y + \dot{\phi}_x \sin \phi_y \end{Bmatrix} \quad (3)$$

A partir dos raios externo e interno, R_D^e e R_D^i , espessura, h_D , e densidade, ρ_D , pode-se calcular a massa e os momentos de inércia de área do disco por

$$m_D = \pi \left[(R_D^e)^2 - (R_D^i)^2 \right] h_D \rho_D \quad (4)$$

$$I_{D_x} = \frac{m_D}{12} \left[3(R_D^i)^2 + 3(R_D^e)^2 + (h_D)^2 \right] \quad (5)$$

$$I_{D_y} = \frac{M_D}{2} \left[(R_D^i)^2 + (R_D^e)^2 \right] \quad (6)$$

$$I_{D_z} = \frac{M_D}{12} \left[3(R_D^i)^2 + 3(R_D^e)^2 + (h_D)^2 \right] \quad (7)$$

Designando u e w as coordenadas do centro de massa do disco nas direções X e Z, respectivamente, a energia do disco pode ser expressa por (LALANNE; FERRARIS, 1998)

$$T_D = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{D_x} \omega_x^2 + I_{D_y} \omega_y^2 + I_{D_z} \omega_z^2) \quad (8)$$

Considerando o disco simétrico nas direções x e z , $I_{D_x} = I_{D_z}$, os ângulos ϕ_z e ϕ_x pequenos e a velocidade de rotação do disco constante, $\dot{\phi}_y = \Omega$, a Eq. (8) pode ser reescrita por

$$T_D = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{D_x} (\dot{\phi}_x^2 + \dot{\phi}_z^2) + \frac{1}{2} I_{D_y} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\phi}_z \dot{\phi}_x) \quad (9)$$

Na discretização por Elementos Finitos, cada nó do elemento de eixo possui quatro graus de liberdade: dois deslocamentos transversais (u e w), e dois deslocamentos angulares (ϕ_x e ϕ_z). Desse modo, o vetor de deslocamentos nodais do centro de massa do disco é dado por

$$\delta_D = \{u, w, \phi_x, \phi_z\}^T \quad (10)$$

Aplicando a equação de Lagrange na Eq. (9) em relação ao vetor de deslocamento nodal do disco, obtêm-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{\delta}_D} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \delta_D} = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{D_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{D_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\phi}_z \\ \ddot{\phi}_x \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{D_y} \\ 0 & 0 & -I_{D_y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\phi}_z \\ \dot{\phi}_x \end{bmatrix} \quad (11)$$

ou, de forma reduzida,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{\delta}_D} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \delta_D} = \mathbf{M}_D \delta_D + \Omega \mathbf{G}_D \dot{\delta}_D \quad (12)$$

sendo \mathbf{M}_D a matriz clássica de massa do disco e \mathbf{G}_D a matriz giroscópica do disco, devido ao efeito de Coriolis (ISHIDA; YAMAMOTO, 2012).

2.2 EIXO

2.2.1 Energia cinética do eixo

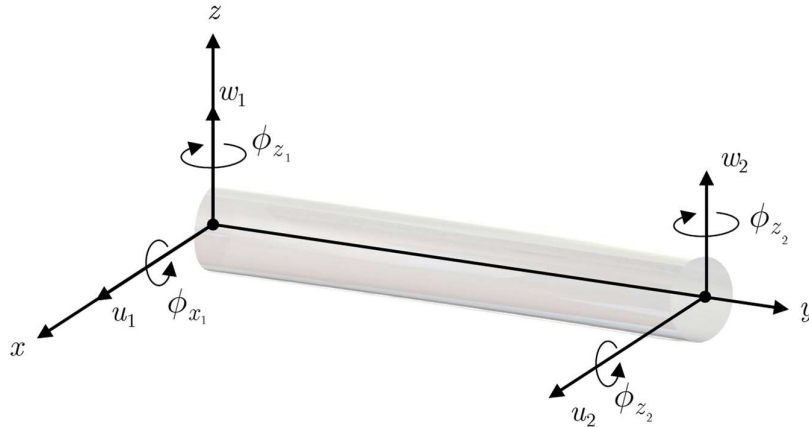
A energia cinética do eixo é uma extensão da Eq. (9) do disco, considerando um elemento de comprimento L_e , na qual pode ser escrita por

$$T_e = \frac{\rho_e S_e}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho_e I_e}{2} \int_0^L (\dot{\phi}_z^2 + \dot{\phi}_x^2) dy + \rho_e I_e \Omega^2 L_e + 2\rho_e I_e \Omega \int_0^L \dot{\phi}_z \dot{\phi}_x dy \quad (13)$$

sendo ρ_e a densidade do material do eixo, S_e a área de seção transversal do eixo e I_e o momento de inércia de área do elemento finito do eixo em relação ao seu eixo neutro.

Baseada na formulação descrita por Lalanne e Ferraris (1998) e Yoon et al. (2013b), o elemento finito do eixo possui dois nós. Sendo assim, as suas matrizes possuem ordem oito, contendo quatro deslocamentos transversais e quatro deslocamentos angulares, conforme a Figura 4.

Figura 4. Graus de liberdade do elemento finito do eixo.



Fonte: Modificado de Yoon et al. (2013b).

A relação entre os deslocamentos é dada por

$$\phi_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (14)$$

$$\phi_z = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (15)$$

O vetor de deslocamentos nodais inclui os deslocamentos transversais e angulares nas direções X e Z, dado por

$$\delta_e = \{u_1, w_1, \phi_{x1}, \phi_{z1}, u_2, w_2, \phi_{x2}, \phi_{z2}\}^T \quad (16)$$

Os deslocamentos transversais podem ser escritos por

$$u = N_1(y) \delta u \quad (17)$$

$$w = N_2(y) \delta w \quad (18)$$

sendo $N_1(y)$ e $N_2(y)$ as funções de forma de uma viga em flexão (ISHIDA; YAMAMOTO, 2012; PILKEY, 2002)

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L_e^2} + \frac{2y^3}{L_e^3}; \quad -y + \frac{2y^2}{L_e} - \frac{y^3}{L_e^2}; \quad \frac{3y^2}{L_e^2} - \frac{2y^3}{L_e^3}; \quad \frac{y^2}{L_e} - \frac{y^3}{L_e^2} \right] \quad (19)$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L_e^2} + \frac{2y^3}{L_e^3}; \quad y - \frac{2y^2}{L_e} + \frac{y^3}{L_e^2}; \quad \frac{3y^2}{L_e^2} - \frac{2y^3}{L_e^3}; \quad -\frac{y^2}{L_e} + \frac{y^3}{L_e^2} \right] \quad (20)$$

Após a substituição das Eq. (17)-(20) na Eq. (13), a parcela de energia cinética do eixo pode ser escrita de forma compacta por

$$\begin{aligned} T_e = & \frac{\rho_e S_e}{2} \int_0^L \left[\delta_e \dot{u}^T N_1^T N_1 \delta_e \dot{u} + \delta_e \dot{w}^T N_2^T N_2 \delta_e \dot{w} \right] dy + \\ & \frac{\rho_e I_e}{2} \int_0^L \left[\delta_e \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta_e \dot{u} + \delta_e \dot{w}^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta_e \dot{w} \right] dy - \\ & 2\rho_e I_e \Omega \int_0^L \left[\delta_e \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta_e \dot{w} dy \right] + \rho_e I_e L_e \Omega^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Aplicando a equação de Lagrange na Eq. (21) em relação ao vetor de deslocamentos nodais do eixo, obtém-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_e}{\partial \dot{\delta}_e} \right) - \frac{\partial T_e}{\partial \delta_e} = (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_e^s) \ddot{\delta}_e + \Omega \mathbf{G}_e \dot{\delta}_e \quad (22)$$

sendo M_e a matriz clássica de massa, M_e^s a matriz de massa devido à inércia de rotação da seção transversal e G_e a matriz de efeito giroscópico – todas para o elemento finito do eixo. Tais matrizes são apresentadas no Apêndice (ISHIDA; YAMAMOTO, 2012).

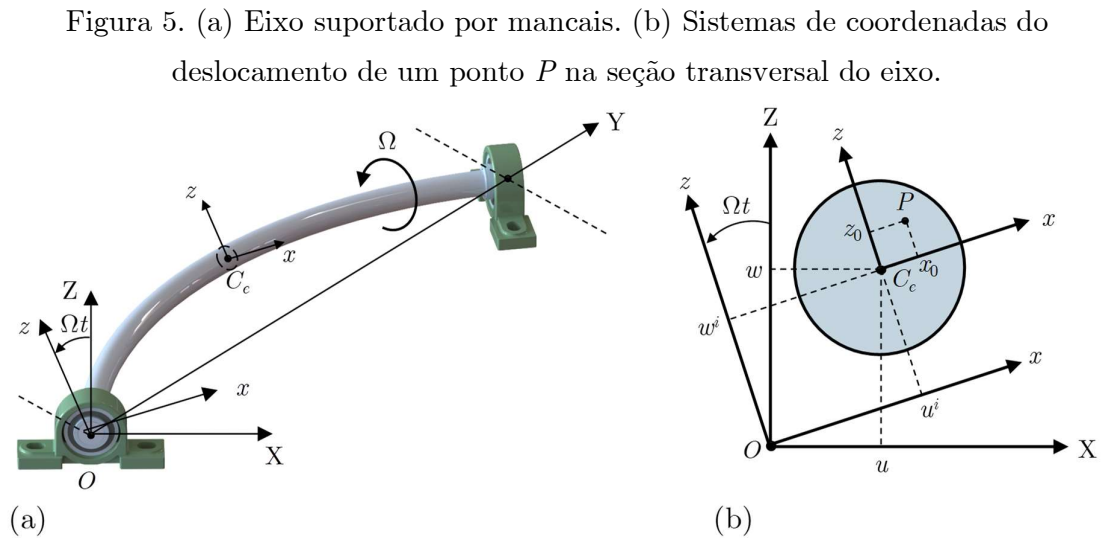
2.2.2 Energia de deformação do eixo

A energia de deformação do eixo é dada por

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV \quad (23)$$

sendo σ o vetor de tensões, que dentro do regime linear é dado pela lei de Hooke, $\sigma = E\varepsilon$, E o módulo de elasticidade de Young e ε o vetor de deformações.

Seguindo a notação utilizada na Figura 5, C_c é o centro geométrico do eixo, $P(x_0, z_0)$ é um ponto localizado na seção transversal, u e w são os deslocamentos do centro geométrico em relação aos eixos x e z .



Fonte: Modificado de Lalanne e Ferraris (1998).

A deformação longitudinal do ponto P pode ser escrita por

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^i}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^i}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^i}{\partial y} \right)^2 \quad (24)$$

Substituindo a Eq. (24) na Eq.(23) e relacionando-a com a lei de Hooke, a energia de deformação pode ser escrita em funções dos termos lineares, ε_l , e não-lineares, ε_{nl} , por

$$U_e = \frac{E}{2} \int_V (\varepsilon_l^2 + 2\varepsilon_l \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) dV \quad (25)$$

Considerando a simetria do eixo nas direções x e z, tem que

$$\int_V \varepsilon_{nl} \varepsilon_l dV = 0 \quad (26)$$

Seguindo a formulação de Lalanne e Ferraris (1998). o terceiro termo da Eq. (25) é negligenciada. Desprezando as deformações normais à espessura do eixo nas direções radiais e a deformação de membrana na direção longitudinal, a deformação longitudinal medida na direção y pode ser escrita por

$$\varepsilon_y = -x_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - z_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (27)$$

As deformações são medidas no sistema de referência, u^i e w^i , situado no centro do eixo. A transformação para o sistema inercial é dada pela relação

$$\begin{Bmatrix} u^i \\ w^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\text{sen}(\Omega t) \\ \text{sen}(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Substituindo a Eq. (28) na Eq.(23), obtém-se a expressão para a energia de deformação do eixo em flexão (LALANNE; FERRARIS, 1998)

$$U_e = \frac{1}{2} E \int_V \left[-x \frac{\partial^2 u^i}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^i}{\partial y^2} \right]^2 dV \quad (29)$$

Desenvolvendo a Eq.(29), as integrais resultantes podem ser separadas em uma integral na seção transversal e a outra ao longo do comprimento do eixo

$$U_e = \frac{1}{2} E \left[\int_A x^2 dx dz \int_0^L \left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial y^2} \right)^2 dy + \int_A z^2 dx dz \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w^i}{\partial y^2} \right)^2 dy + \int_A xz dx dz \int_0^L \left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w^i}{\partial y^2} \right) dy \right] \quad (30)$$

Considerando os momentos de inércia de seção em relação aos eixos principais de inércia x e z , tem-se que (ISHIDA; YAMAMOTO, 2012; LALANNE; FERRARIS, 1998)

$$\begin{aligned} \int_A x^2 dx dz &= I_z \\ \int_A z^2 dx dz &= I_x \\ \int_A xz dx dz &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Assumindo o eixo simétrico, no qual $I_x = I_z = 0$, e considerando a Eq. (28), a equação da energia de deformação do eixo no sistema inercial é dado por

$$U_e = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (32)$$

Após a substituição das Eq. (17)-(20) na Eq.(32), a parcela de energia de deformação do eixo, desconsiderando a parcela de carregamento axial, pode ser escrita de forma compacta por

$$U_e = \frac{E_e I_e}{2} \int_0^L \left[\delta_e u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta_e u + \delta_e w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta_e w \right] dy \quad (33)$$

Aplicando a equação de Lagrange na Eq. (33) em relação ao vetor de deslocamento nodal do eixo, obtém-se

$$\frac{\partial U_e}{\partial \delta_e} = K_e \delta_e \quad (34)$$

sendo \mathbf{K}_e a matriz clássica de rigidez do elemento finito do eixo, apresentada no Apêndice A (ISHIDA; YAMAMOTO, 2012).

2.3 MANCAIS

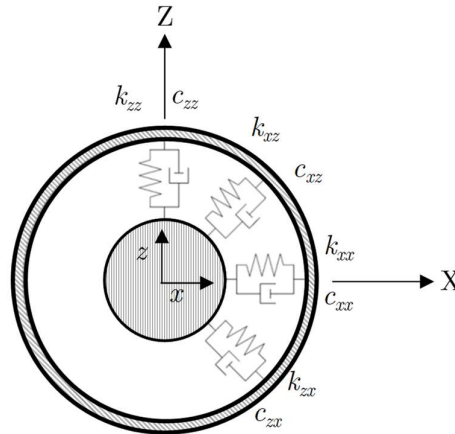
As forças agindo no eixo devido a ação dos mancais, F_u e F_w , são utilizadas para o cálculo do trabalho virtual, dado por

$$\delta W = F_u \delta_u^m + F_w \delta_w^m \quad (35)$$

Com base na Figura 6, assume-se que os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais sejam conhecidos e a influência da flexão nos mancais possa ser desconsiderada. Com isso, as forças contidas na Eq. (35) podem ser descritas na forma matricial por

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

Figura 6. Representação dos coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais.



Fonte: Modificado de Lalanne e Ferraris (1998).

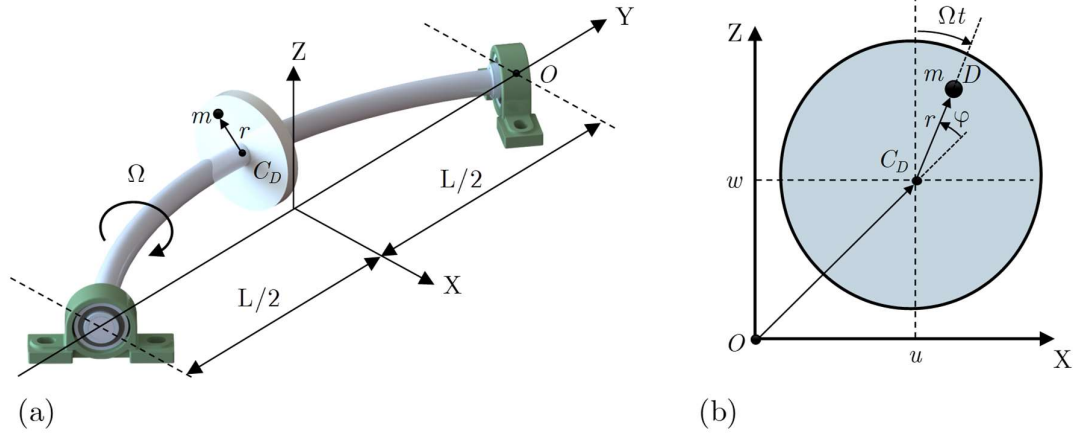
A Eq. (36) pode ser expandida de forma à introduzir os graus de liberdade relativos aos deslocamentos angulares, ϕ_x e ϕ_z , como segue

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_{\phi_x} \\ F_{\phi_z} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} & 0 & 0 \\ k_{zx} & k_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \phi_x \\ \phi_z \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} & 0 & 0 \\ c_{zx} & c_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\phi}_x \\ \dot{\phi}_z \end{Bmatrix} \quad (37)$$

2.4 EFEITO DA MASSA DE DESBALANCEAMENTO

O desbalanceamento em um sistema rotativo não pode ser evitado. Dessa forma, a sua modelagem matemática é definida por uma massa m situada a uma distância r do centro geométrico do disco, conforme a Figura 7.

Figura 7. Massa de desbalanceamento localizada no disco de um rotor de Laval. (a) Vista isométrica do rotor. (b) Vista frontal do disco.



Fonte: Modificado de Yoon et al. (2013b).

O deslocamento da massa de desbalanceamento no sistema inercial de coordenadas é dado por

$$\overrightarrow{OD} = \begin{Bmatrix} u + r \sin(\Omega t) \\ \bar{y} \\ w + r \cos(\Omega t) \end{Bmatrix} \quad (38)$$

sendo \bar{y} uma constante.

O vetor velocidade instantânea da massa de desbalanceamento é calculado por

$$\vec{V}_m = \frac{d\vec{OD}}{dt} = \begin{Bmatrix} \dot{u} + \Omega r \cos(\Omega t) \\ 0 \\ \dot{w} - \Omega r \sin(\Omega t) \end{Bmatrix} \quad (39)$$

O efeito da massa de desbalanceamento é introduzido nas equações de movimento do rotor através do cálculo de sua energia cinética

$$T_m = \frac{m}{2} \left[\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 r^2 + 2\Omega \dot{u} r \cos(\Omega t) - 2\Omega \dot{w} r \sin(\Omega t) \right] \quad (40)$$

Considerando que a massa de desbalanceamento é desprezível em relação a massa do rotor, e sabendo que o terceiro termo da Eq. (40) é constante, a energia cinética pode ser reescrita por

$$T_m \simeq \Omega m r \left[\dot{u} \cos(\Omega t) - \dot{w} \sin(\Omega t) \right] \quad (41)$$

Aplicando a equação de Lagrange na Eq. (41) em relação ao vetor de deslocamento nodal da massa de desbalanceamento, δ_m , obtém-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_m}{\partial \dot{\delta}_m} \right) - \frac{\partial T_m}{\partial \delta_m} = -\Omega^2 m r \begin{Bmatrix} \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \end{Bmatrix} \quad (42)$$

sendo $\delta_m = \{u, w\}^T$.

No rotor pode coexistir diversas massas de desbalanceamento agindo simultaneamente em posições angulares diferentes. Desse modo, a força causada pela massa de desbalanceamento em uma certa posição angular, φ , em relação ao eixo z é dada por

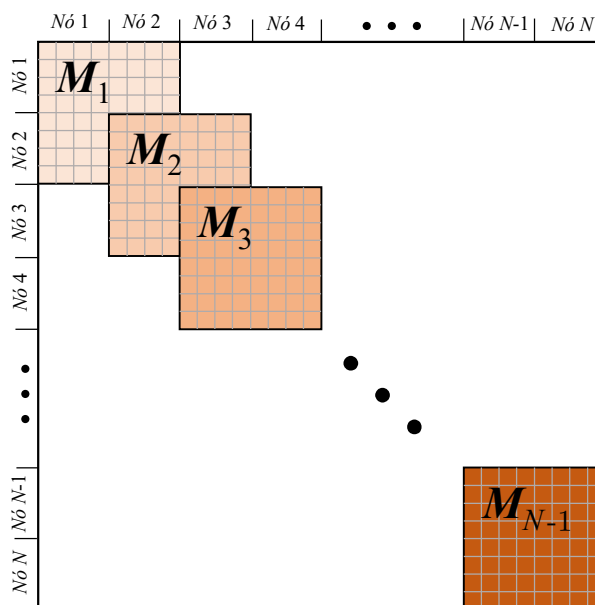
$$\begin{Bmatrix} F_u^m \\ F_w^m \end{Bmatrix} = m r \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin(\Omega t + \varphi) \\ \cos(\Omega t + \varphi) \end{Bmatrix} \quad (43)$$

2.5 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO DO ROTOR PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Antes de escrever a equação geral de movimento do rotor é necessário realizar a montagem das matrizes elementares dos componentes. Dessa forma, pode-se garantir que cada uma das linhas e colunas da matriz do elemento seja identificado pelo grau de liberdade correspondente.

A montagem da matriz de massa global a partir das matrizes de massa individuais dos elementos do eixo é ilustrada na Figura 8. As regiões sobrepostas entre os blocos correspondentes aos nós adjacentes na Figura 8 são somadas na matriz global, que ao final possui uma dimensão $n \times n$, sendo n o número de graus de liberdade do sistema. Em seguida, as matrizes de massa dos discos – e quaisquer outros componentes contribuintes – são adicionadas ao sistema global. Os mesmos passos podem ser seguidos para formar as matrizes globais de rigidez e amortecimento do sistema.

Figura 8. Montagem da matriz de massa global do sistema através do acoplamento das matrizes de massa do elemento.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Após a montagem das matrizes globais, a equação diferencial de movimento do rotor é dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{q}}(t) + (\mathbf{D} + \Omega\mathbf{G})\dot{\vec{q}}(t) + \mathbf{K}\vec{q}(t) = \vec{F}(t) \quad (44)$$

sendo $\vec{q} = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}_{1 \times n}^T$ o vetor de deslocamento nodal generalizado de todo o sistema, $\mathbf{M}_{n \times n}$ a matriz global de massa (inclui a massa do eixo e do disco), $\mathbf{D}_{n \times n}$ a matriz global de amortecimento (inclui o amortecimento interno do eixo e dos mancais), $\mathbf{G}_{n \times n}$ a matriz global de efeito giroscópico (inclui o efeito giroscópico do eixo e do disco), $\mathbf{K}_{n \times n}$ a matriz global de rigidez (inclui a rigidez do eixo e dos mancais) e $\vec{F}_{n \times 1}$ o vetor de forças atuantes no rotor. O amortecimento interno do eixo é considerado proporcional à rigidez, $\mathbf{D}_e = \eta\mathbf{K}_e$, sendo η o fator de proporcionalidade. Todas as matrizes e vetores do sistema são definidos na mesma ordem que os deslocamentos nodais no vetor \vec{q} (ISHIDA; YAMAMOTO, 2012; LALANNE; FERRARIS, 1998; SINOUE; LEES, 2005; YOON; LIN; ALLAIRE, 2013b).

2.6 ANÁLISE DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Para análise de autovalores e autovetores do sistema rotativo, considera-se a solução homogênea da Eq. (44)

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{q}}(t) + (\mathbf{D} + \Omega\mathbf{G})\dot{\vec{q}}(t) + \mathbf{K}\vec{q}(t) = \vec{0} \quad (45)$$

Adota-se a solução geral da Eq. (45) por (BESSELINK et al., 2013; BUCHER; EWINS, 2001)

$$\vec{q}(t) = \vec{\varphi}_i e^{\lambda_i t} \quad \text{para } 1 \leq i \leq n \quad (46)$$

Considerando o termo exponencial não-nulo e não interessado na solução trivial, a Eq. (46) constitui-se de um problema de autovalor generalizado (MESQUITA; JR; MIRANDA, 2002)

$$(\lambda_i^2 \mathbf{M} + \lambda_i (\mathbf{D} + \Omega\mathbf{G}) + \mathbf{K}) \vec{\varphi}_i = \vec{0} \quad (47)$$

sendo λ_i o autovalor e $\vec{\varphi}_i$ o autovetor associado ao i -ésimo modo.

Os autovalores possuem a característica de serem complexos conjugados, em geral, possuem a forma de (BUCHER; EWINS, 2001)

$$\lambda_i = a_i \pm jb_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq n \quad (48)$$

sendo a_i a parte real do autovalor devido ao amortecimento constante, ou seja, para um sistema sem amortecimento o autovalor é puramente imaginário, b_i a parte imaginária devido a frequência natural, velocidade de rotação e efeito giroscópico e o número imaginário $j = \sqrt{-1}$. (BUCHER; EWINS, 2001).

Como a variação da rotação do sistema altera diretamente a Eq. (47), os autovalores resultantes mudam, e, conseqüentemente, as frequências naturais do sistema são alteradas. Desse modo, quando calculadas para diversas velocidades de rotação do eixo, a Eq. (48) permite traçar o diagrama de Campbell e determinar as velocidades críticas do sistema (DUMITRU; SECARĂ; MIHĂLCICĂ, 2009). O cálculo dos autovalores é realizado através das raízes da equação característica, dada por

$$\det\left(\lambda_i^2 \mathbf{M} + \lambda_i (\mathbf{D} + \Omega \mathbf{G}) + \mathbf{K}\right) = 0 \quad (49)$$

A expansão da Eq. (49) é um polinômio de ordem $2n$ em λ para um sistema com n graus de liberdade

$$a_{2n} \lambda^{2n} + a_{2n-2} \lambda^{2n-2} + a_{2n-4} \lambda^{2n-4} \dots + a_0 \lambda^0 = 0 \quad (50)$$

Outra possibilidade é visualizar esse polinômio como de ordem n em λ^2 , resultando em n autovalores λ^2 .

Substituindo cada autovalor, λ_i , na Eq. (47) pode-se determinar a solução para os autovetores associados, $\vec{\varphi}_i$, referentes a cada autovalor. O vetor contendo os autovalores do sistema é chamado de vetor de frequências naturais, $\vec{\omega}_i$, e a matriz de autovetores é chamada de matriz dos modos de vibrar do sistema, Φ .

Diferentemente de estruturas estacionárias, a equação de movimento do sistema rotativo engloba a matriz giroscópica que possui caráter antissimétrico, resultando em um problema de autovalor não-adjunto (BUCHER; EWINS, 2001). Sendo assim, o problema de autovalor associado com a Eq. (47) é dado por

$$\left(\lambda_i^2 \mathbf{M}^T + \lambda_i (\mathbf{D}^T + \Omega \mathbf{G}^T) + \mathbf{K}^T\right) \vec{\varphi}_i^e = 0 \quad (51)$$

Os autovalores da Eq. (47) e da Eq. (51) são os mesmos, já que

$$\det\left(\lambda_i^2 \mathbf{M} + \lambda_i (\mathbf{D} + \Omega \mathbf{G}) + \mathbf{K}\right) = \det\left(\lambda_i^2 \mathbf{M}^T + \lambda_i (\mathbf{D}^T + \Omega \mathbf{G}^T) + \mathbf{K}^T\right) \quad (52)$$

No entanto, os autovetores são diferentes e denominadas autovetores à direita, $\vec{\varphi}_i^d$, e autovetores à esquerda, $\vec{\varphi}_i^e$, quando calculados a partir da Eq. (47) e Eq. (51), respectivamente.

3 ANÁLISE EM COORDENADAS COMPLEXAS

De acordo com Chen (1998), o uso de coordenadas complexas na descrição de movimentos rotativos têm-se mostrado uma alternativa muito eficiente em relação ao uso de coordenadas reais. Neste capítulo, são abordadas a separação das componentes diretas e retrógradas da resposta, a combinação dessas componentes para o cálculo do *SDI* e análise modal complexa. Em seguida, é abordada a construção de um mapa de cores que apresenta os valores do *SDI* e realiza-se a análise numérica de um rotor através da notação complexa.

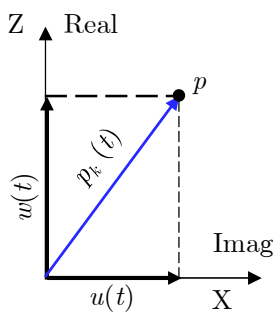
3.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DE COORDENADAS COMPLEXAS

Baseando-se nas coordenadas da Figura 9, obtêm-se uma formulação alternativa para a descrição do movimento de um nó k do eixo através da utilização das coordenadas complexas, definida por (CHEN, 1998; DIAS et al., 2004a; HAN; LEE, 1999)

$$p_k(t) = z_k(t) + jx_k(t) \quad (53)$$

$$p_{\phi k}(t) = \phi_{xk}(t) + j\phi_{zk}(t) \quad (54)$$

Figura 9. Sistema de coordenadas para a formulação complexa.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Da mesma forma, para as expressões das forças de excitação agindo nestas coordenadas, tem-se

$$g_k(t) = f_{zk}(t) + jf_{xk}(t) \quad (55)$$

$$g_{\phi k}(t) = f\phi_{xk}(t) + jf\phi_{zk}(t) \quad (56)$$

A transformação do vetor de resposta real para complexo de cada nó do eixo é dada por (DIAS et al., 2004a)

$$\begin{Bmatrix} p(t) \\ p^*(t) \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} p_l(t) \\ p_\phi(t) \\ p_l^*(t) \\ p_\phi^*(t) \end{Bmatrix}_k = \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} x(t) \\ z(t) \\ \phi_x(t) \\ \phi_z(t) \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} z(t) + jx(t) \\ \phi_x(t) + j\phi_z(t) \\ z(t) - jx(t) \\ \phi_x(t) - j\phi_z(t) \end{Bmatrix}_k \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N \quad (57)$$

ou, de maneira compacta, assumindo todos os nós do modelo de Elementos Finitos

$$\begin{Bmatrix} \vec{p}(t) \\ \vec{p}^*(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \vec{q}(t) \quad (58)$$

sendo

$$\begin{Bmatrix} \vec{p}(t) \\ \vec{p}^*(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_l(t) \\ p_\phi(t) \\ p_l^*(t) \\ p_\phi^*(t) \end{Bmatrix}_{1:N} ; \vec{q}(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ z(t) \\ \phi_x(t) \\ \phi_z(t) \end{Bmatrix}_{1:N} ; \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & j \\ -j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -j \end{bmatrix} ; \mathbf{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -j & 0 & j & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -j & 0 & j \end{bmatrix}$$

Aplicando a mesma transformação \mathbf{T} no vetor de excitação, substituindo ambas transformações (de resposta e excitação complexas) na equação do movimento, e pré-multiplicando o resultado pela inversa de \mathbf{T} , obtém-se (DIAS et al., 2004a):

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \ddot{\vec{p}}(t) \\ \ddot{\vec{p}}^*(t) \end{Bmatrix} + \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{D} + \Omega \mathbf{G}) \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \dot{\vec{p}}(t) \\ \dot{\vec{p}}^*(t) \end{Bmatrix} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \vec{p}(t) \\ \vec{p}^*(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \vec{g}(t) \\ \vec{g}^*(t) \end{Bmatrix} \quad (59)$$

ou de forma compacta, dada por

$$\mathbf{M}_a \begin{Bmatrix} \ddot{\vec{p}}(t) \\ \ddot{\vec{p}}^*(t) \end{Bmatrix} + (\mathbf{D}_a + \Omega \mathbf{G}_a) \begin{Bmatrix} \dot{\vec{p}}(t) \\ \dot{\vec{p}}^*(t) \end{Bmatrix} + \mathbf{K}_a \begin{Bmatrix} \vec{p}(t) \\ \vec{p}^*(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{g}(t) \\ \vec{g}^*(t) \end{Bmatrix} \quad (60)$$

sendo \mathbf{M}_a , \mathbf{D}_a , \mathbf{G}_a , \mathbf{K}_a as matrizes complexas de massa, amortecimento, giroscópica e de rigidez, ainda $\vec{g}(t)$ é o vetor de excitação em coordenadas complexas.

Considerando um rotor com mancais anisotrópicos operando em rotação constante e regime permanente, pode-se decompor o deslocamento complexo, $\vec{p}(t)$, e a força externa complexa, $\vec{g}(t)$, em suas componentes diretas, \vec{P}_f e \vec{G}_f , e retrógradas, \vec{P}_b e \vec{G}_b , conforme segue (DIAS et al., 2004a; HAN; LEE, 1999; MESQUITA; DIAS JR, 2004)

$$\vec{p}(t) = \vec{P}_f e^{j\Omega t} + \vec{P}_b e^{-j\Omega t} \quad (61)$$

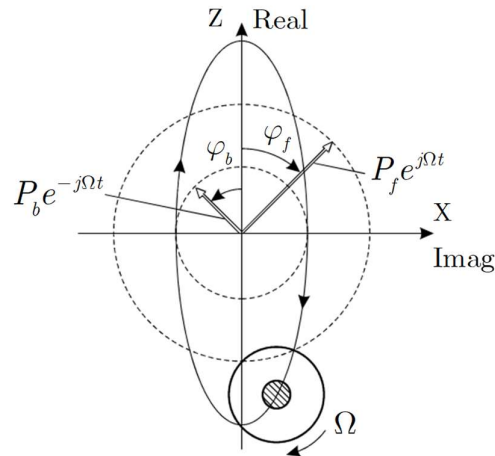
$$\vec{g}(t) = \vec{G}_f e^{j\Omega t} + \vec{G}_b e^{-j\Omega t} \quad (62)$$

As componentes diretas e retrógradas para um determinado nó k do eixo podem ser caracterizadas por dois vetores circulares girando em sentidos opostos na mesma frequência, porém, com amplitudes e fase diferentes. Sendo assim, a Eq. (61) pode ser reescrita por (DIAS et al., 2004a; HAN; LEE, 1999; MESQUITA; DIAS JR, 2004)

$$p_k(t) = |P_f|_k e^{j(\Omega t + \varphi_f)} + |P_b|_k e^{-j(\Omega t + \varphi_b)} \quad (63)$$

sendo $|P_f|$ e $|P_b|$ os raios das órbitas diretas e retrógradas; φ_f e φ_b são os ângulos de fase das respostas direta e retrógrada, respectivamente. A soma destes dois vetores resulta em uma elipse no plano complexo, como ilustra a Figura 10.

Figura 10. Órbita elíptica formada a partir da superposição das órbitas circulares em precessão direta (Ω) e retrógrada ($-\Omega$).

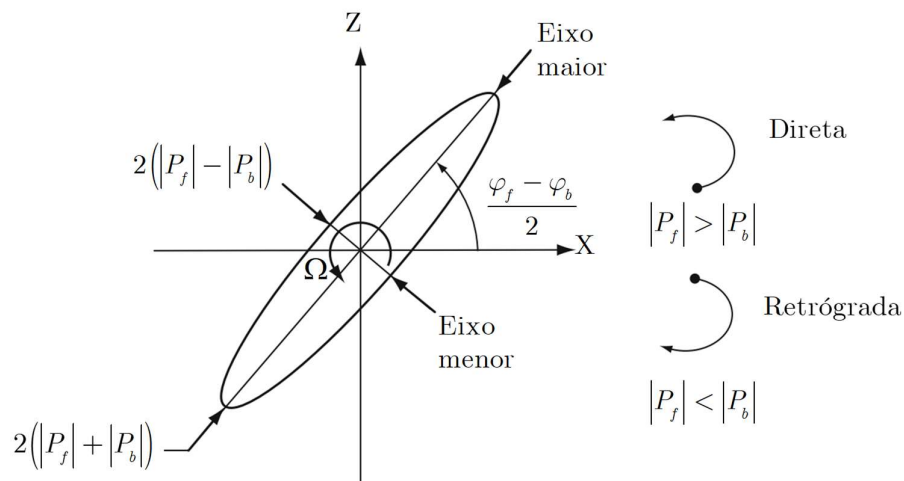


Fonte: Adaptado de Bachschmid et al. (2010a).

O raio do eixo maior da elipse caracteriza-se pela soma de $|P_f|$ e $|P_b|$; já o raio do eixo menor pela diferença entre $|P_f|$ e $|P_b|$. O movimento de precessão direta da órbita elíptica ocorre quando $|P_f| > |P_b|$, enquanto que a precessão retrógrada ocorre quando $|P_f| < |P_b|$, como ilustra a Figura 11.

Conforme a componente $|P_b|$ diminui, o formato da elipse vai se tornando mais suave até atingir a órbita circular com precessão direta (caso em que $|P_b| = 0$). Similarmente, à medida que a componente $|P_f|$ diminui, o formato da elipse se torna mais suave, até atingir a órbita circular com precessão retrógrada (caso em que $|P_f| = 0$). No caso das componentes apresentarem valores iguais, $|P_f| = |P_b|$, o formato da elipse tende à um movimento retilíneo.

Figura 11. Direção do eixo do movimento elíptico no rotor com mancais anisotrópicos.



Fonte: Adaptado de Bachschmid et al. (2010a).

Substituindo as Eqs. (61)-(62) e seus respectivos complexos na Eq. (60), têm-se

$$\left(-\Omega^2 \mathbf{M}_a + j\Omega(\mathbf{D}_a + \Omega \mathbf{G}_a) + \mathbf{K}_a\right) \begin{Bmatrix} \vec{P}_f \\ \vec{P}_b^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{G}_f \\ \vec{G}_b^* \end{Bmatrix} \quad (64)$$

As componentes \vec{P}_f e \vec{P}_b , são obtidas através da solução do sistema de equações lineares dado pela Eq. (64). Como já visto, a relação entre as componentes direta, \vec{P}_f , e retrógrada, \vec{P}_b , oferece a informação sobre o movimento de um determinado nó do eixo. Estas duas componentes podem ser combinadas em um parâmetro, *Shape and Directivity Index* ou *SDI*, definido por Han e Lee (1999) pela expressão

$$-1 \leq SDI = \frac{|P_f| - |P_b|}{|P_f| + |P_b|} \leq 1 \quad (65)$$

O *SDI* aplicado no estudo de mancais anisotrópicos define o tipo de movimento do nó. O sinal define a direção do movimento, podendo ser direto ou retrógrado, e o valor absoluto define a forma da órbita, podendo ser circular, elíptica ou retilínea, resumidos na Tabela 1.

Tabela 1. Relação entre os valores de *SDI* e os tipos de movimento do eixo.

Parâmetro <i>SDI</i>	Tipo de precessão	Aspecto da órbita
$SDI = 1$	Direta	Circular
$1 > SDI > 0$	Direta	Elíptica
$SDI = 0$		Retilínea
$0 > SDI > -1$	Retrógrada	Elíptica
$SDI = -1$	Retrógrada	Circular

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A utilização de coordenadas complexas na descrição do movimento rotativo confere a parte negativa do espectro total da resposta um significado físico. Devido à separação das componentes na Eq. (64), as componentes de precessão retrógrada

apresentam-se na parte negativa de frequências e as componentes de precessão direta surgem na parte de frequência positiva do espectro.

Por essa capacidade de separar as contribuições dos modos de precessão direta e retrógrada, a relação entre entradas e saídas complexas são denominadas de funções de resposta em frequência direcionais (dFRF).

Para a análise em frequência, a transformada de Fourier para os termos, $\vec{p}(t)$, $\vec{p}^*(t)$, $\vec{g}(t)$ e $\vec{g}^*(t)$ são $\vec{P}(\omega)$, $\vec{P}^*(\omega)$, $\vec{G}(\omega)$ e $\vec{G}^*(\omega)$. Desse modo, a Eq. (60) pode ser escrita por

$$-\omega^2 \mathbf{M}_a \begin{Bmatrix} \vec{P}(\omega) \\ \vec{P}^*(\omega) \end{Bmatrix} + j\omega (\mathbf{D}_a + \Omega \mathbf{G}_a) \begin{Bmatrix} \vec{P}(\omega) \\ \vec{P}^*(\omega) \end{Bmatrix} + \mathbf{K}_a \begin{Bmatrix} \vec{P}(\omega) \\ \vec{P}^*(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{G}(\omega) \\ \vec{G}^*(\omega) \end{Bmatrix} \quad (66)$$

Definindo-se o termo $\mathbf{B}_a(\omega)$ na Eq. (66) como

$$\mathbf{B}_a(\omega) = \left(-\omega^2 \mathbf{M}_a + j\omega (\mathbf{D}_a + \Omega \mathbf{G}_a) + \mathbf{K}_a \right) \quad (67)$$

A relação entre os vetores de deslocamento e excitação complexos pode ser escrita por

$$\begin{Bmatrix} \vec{P}(\omega) \\ \vec{P}^*(\omega) \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_a^{-1}(\omega) \begin{Bmatrix} \vec{G}(\omega) \\ \vec{G}^*(\omega) \end{Bmatrix} = \mathbf{H}_a(\omega) \begin{Bmatrix} \vec{G}(\omega) \\ \vec{G}^*(\omega) \end{Bmatrix} \quad (68)$$

sendo a matriz $\mathbf{H}_a(\omega)$ denominada de matriz das funções de resposta em frequência direcionais.

Para o entendimento dos valores da matriz $\mathbf{H}_a(\omega)$, a matriz de massa de um determinado nó pode ser escrita de maneira geral por

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xz} & M_{x\phi_x} & M_{x\phi_z} \\ M_{zx} & M_{zz} & M_{z\phi_x} & M_{z\phi_z} \\ M_{\phi_x x} & M_{\phi_x z} & M_{\phi_x \phi_x} & M_{\phi_x \phi_z} \\ M_{\phi_z x} & M_{\phi_z z} & M_{\phi_z \phi_x} & M_{\phi_z \phi_z} \end{bmatrix}_k \quad (69)$$

A transformação para coordenadas complexas aplicada a Eq. (69) é dada por

$$\mathbf{M}_{a_k} = \begin{bmatrix} j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & j \\ -j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -j \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xz} & M_{x\phi_z} & M_{x\phi_z} \\ M_{zx} & M_{zz} & M_{z\phi_x} & M_{z\phi_z} \\ M_{\phi_x x} & M_{\phi_x z} & M_{\phi_x \phi_x} & M_{\phi_x \phi_z} \\ M_{\phi_z x} & M_{\phi_z z} & M_{\phi_z \phi_x} & M_{\phi_z \phi_z} \end{bmatrix}_k \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -j & 0 & j & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -j & 0 & j \end{bmatrix}_k \quad (70)$$

Resultando na matriz a seguir

$$\mathbf{M}_{a_k} = \left[\begin{array}{cc|cc} M_a^{11} & M_a^{12} & M_a^{13} & M_a^{14} \\ M_a^{21} & M_a^{22} & M_a^{23} & M_a^{24} \\ \hline M_a^{31} & M_a^{32} & M_a^{33} & M_a^{34} \\ M_a^{41} & M_a^{42} & M_a^{43} & M_a^{44} \end{array} \right]_k = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a^f & \mathbf{M}_a^b \\ \mathbf{M}_a^{f*} & \mathbf{M}_a^{b*} \end{bmatrix} \quad (71)$$

sendo

$$\begin{aligned} 2M_a^{11} &= (M_{zz} + M_{xx}) - j(M_{zx} - M_{xz}) & 2M_a^{21} &= (M_{\phi_x z} + M_{\phi_z x}) - j(M_{\phi_x x} + M_{\phi_z z}) \\ 2M_a^{12} &= (M_{z\phi_x} + M_{x\phi_z}) - j(M_{z\phi_z} - M_{x\phi_x}) & 2M_a^{22} &= (M_{\phi_x \phi_x} + M_{\phi_z \phi_z}) - j(M_{\phi_x \phi_z} + M_{\phi_z \phi_x}) \\ 2M_a^{13} &= (M_{zz} - M_{xx}) + j(M_{zx} + M_{xz}) & 2M_a^{23} &= (M_{\phi_x z} - M_{\phi_z x}) + j(M_{\phi_x x} + M_{\phi_z z}) \\ 2M_a^{14} &= (M_{z\phi_x} - M_{x\phi_z}) + j(M_{z\phi_z} + M_{x\phi_x}) & 2M_a^{24} &= (M_{\phi_x \phi_x} - M_{\phi_z \phi_z}) + j(M_{\phi_x \phi_z} + M_{\phi_z \phi_x}) \end{aligned}$$

As matrizes \mathbf{M}_a^{f*} e \mathbf{M}_a^{b*} da Eq. (71) representam os complexos conjugados de \mathbf{M}_a^f e \mathbf{M}_a^b , respectivamente. As demais matrizes da Eq. (64) são determinadas da mesma maneira.

De maneira similar, é realizada a transformação da matriz de funções de resposta em frequência em coordenadas reais, $\mathbf{H}(\omega)$, para matriz de funções de resposta em frequência em coordenadas complexas, $\mathbf{H}_a(\omega)$, dada por

$$\mathbf{H}_k = \left[\begin{array}{cccc} H_{xx} & H_{xz} & H_{x\phi_z} & H_{x\phi_z} \\ H_{zx} & H_{zz} & H_{z\phi_x} & H_{z\phi_z} \\ H_{\phi_x x} & H_{\phi_x z} & H_{\phi_x \phi_x} & H_{\phi_x \phi_z} \\ H_{\phi_z x} & H_{\phi_z z} & H_{\phi_z \phi_x} & H_{\phi_z \phi_z} \end{array} \right]_k \quad (72)$$

A transformação para coordenadas complexas aplicada à Eq. (72), bem como a sua forma reduzida, são dadas por

$$\mathbf{H}_{a_k} = \begin{bmatrix} j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & j \\ -j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xz} & H_{x\phi_x} & H_{x\phi_z} \\ H_{zx} & H_{zz} & H_{z\phi_x} & H_{z\phi_z} \\ H_{\phi_x x} & H_{\phi_x z} & H_{\phi_x \phi_x} & H_{\phi_x \phi_z} \\ H_{\phi_z x} & H_{\phi_z z} & H_{\phi_z \phi_x} & H_{\phi_z \phi_z} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -j & 0 & j & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -j & 0 & j \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\mathbf{H}_{a_k} = \left[\begin{array}{cc|cc} H_a^{p_1 g_1} & H_a^{p_1 g_\phi} & H_a^{p_1 g_1^\otimes} & H_a^{p_1 g_\phi^\otimes} \\ H_a^{p_\phi g_1} & H_a^{p_\phi g_\phi} & H_a^{p_\phi g_1^\otimes} & H_a^{p_\phi g_\phi^\otimes} \\ \hline H_a^{p_1^\otimes g_1} & H_a^{p_1^\otimes g_\phi} & H_a^{p_1^\otimes g_1^\otimes} & H_a^{p_1^\otimes g_\phi^\otimes} \\ H_a^{p_\phi^\otimes g_1} & H_a^{p_\phi^\otimes g_\phi} & H_a^{p_\phi^\otimes g_1^\otimes} & H_a^{p_\phi^\otimes g_\phi^\otimes} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{H}_a^{pg} & \mathbf{H}_a^{pg^\otimes} \\ \mathbf{H}_a^{p^\otimes g} & \mathbf{H}_a^{p^\otimes g^\otimes} \end{array} \right]_k \quad (74)$$

sendo

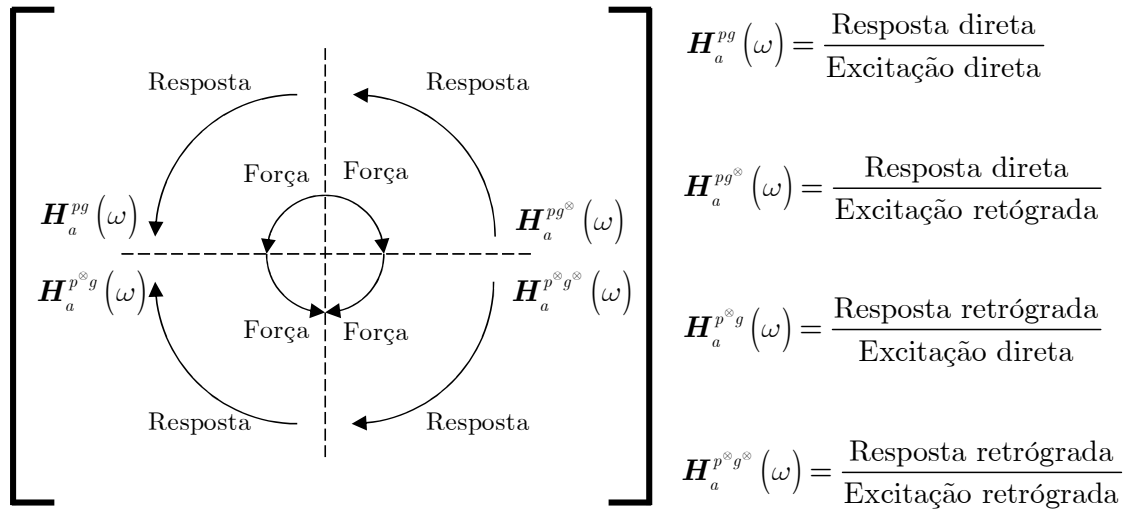
$$\begin{aligned} 2\mathbf{H}_a^{p_1 g_1} &= (H_{zz} + H_{xx}) - j(H_{zx} - H_{xz}) & 2\mathbf{H}_a^{p_\phi g_1} &= (H_{\phi_x z} + H_{\phi_z x}) - j(H_{\phi_x x} + H_{\phi_z z}) \\ 2\mathbf{H}_a^{p_1 g_\phi} &= (H_{z\phi_x} + H_{x\phi_z}) - j(H_{z\phi_z} - H_{x\phi_x}) & 2\mathbf{H}_a^{p_\phi g_\phi} &= (H_{\phi_x \phi_x} + H_{\phi_z \phi_z}) - j(H_{\phi_x \phi_z} + H_{\phi_z \phi_x}) \\ 2\mathbf{H}_a^{p_1^\otimes g_1} &= (H_{zz} - H_{xx}) + j(H_{zx} + H_{xz}) & 2\mathbf{H}_a^{p_\phi^\otimes g_1} &= (H_{\phi_x z} - H_{\phi_z x}) + j(H_{\phi_x x} + H_{\phi_z z}) \\ 2\mathbf{H}_a^{p_1^\otimes g_\phi} &= (H_{z\phi_x} - H_{x\phi_z}) + j(H_{z\phi_z} + H_{x\phi_x}) & 2\mathbf{H}_a^{p_\phi^\otimes g_\phi} &= (H_{\phi_x \phi_x} - H_{\phi_z \phi_z}) + j(H_{\phi_x \phi_z} + H_{\phi_z \phi_x}) \end{aligned}$$

Sendo assim, além de definir a razão entre a entrada e a saída em termos de magnitude e fase, como no FRF convencional, a matriz $\mathbf{H}_a(\omega)$ também indica a direcionalidade do modo. O conceito é ilustrado na Figura 12.

As submatrizes na matriz de resposta em frequência complexa, $\mathbf{H}_a(\omega)$, são chamadas matrizes de resposta em frequência direcionais (dFRMs) e seus elementos são chamados de funções de resposta em frequência direcionais (dFRFs), pois estas funções incluem informação sobre a direcionalidade dos modos.

As dFRMs $\mathbf{H}_a^{pg}(\omega)$ e $\mathbf{H}_a^{p^*g^*}(\omega)$ relacionam excitações e respostas na mesma direção, já as dFRMs $\mathbf{H}_a^{p^*g}(\omega)$ e $\mathbf{H}_a^{pg^*}(\omega)$ relacionam excitações e respostas em direções opostas.

Figura 12. Conceito da matriz de função de resposta em frequência direcional.



Fonte: Adaptado de (KESSLER; KIM, 1998).

Para um sistema excitado por uma massa de desbalanceamento, a componente de precessão retrógrada da força é nula. Portanto, a resposta direta e retrógrada de um determinado nó do rotor é descrita pela primeira coluna da Eq. (74), $\mathbf{H}_a^{p_i g_i}$ e $\mathbf{H}_a^{p_i^* g_i^*}$ (KESSLER; KIM, 1998).

De acordo com (LEE; JOH, 1993), as matrizes $\mathbf{H}_a^{p^*g}$ e $\mathbf{H}_a^{pg^*}$ da Eq. (74) representam os complexos conjugados de $\mathbf{H}_a^{pg^*}$ e \mathbf{H}_a^{pg} , respectivamente, dadas pela relação

$$\mathbf{H}_a^{p^*g}(j\omega) = \bar{\mathbf{H}}_a^{pg^*}(-j\omega) \quad (75)$$

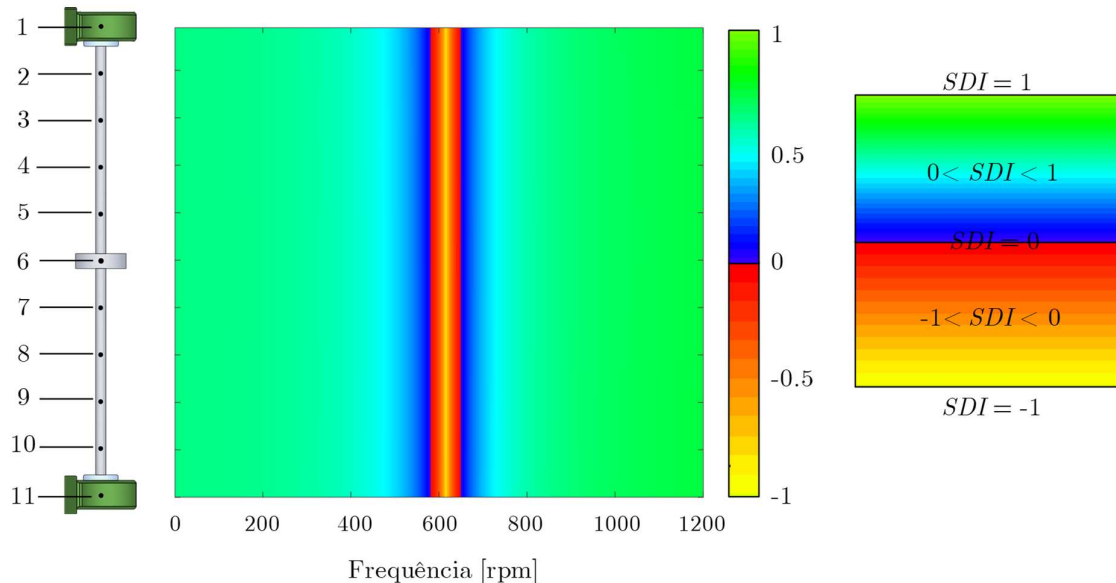
$$\mathbf{H}_a^{p^*g^*}(j\omega) = \bar{\mathbf{H}}_a^{pg}(-j\omega) \quad (76)$$

3.2 CONSTRUÇÃO DO MAPA SDI_{PLOT}

Uma maneira mais interessante de observar o tipo de movimento de nó do rotor, mostrado na Tabela 1, é através da utilização do *SDI Plot* ou *SDI 3D* (DIAS JR; ALLEMANG, 2001; DIAS et al., 2004b; MESQUITA; DIAS JR, 2004). O *SDI Plot* é um mapa que apresenta os valores do *SDI* de todos os nós do modelo de Elementos Finitos para cada valor de velocidade de rotação.

Neste gráfico, cores são associadas aos valores de *SDI* a fim de facilitar a distinção entre os diferentes tipos de movimentos. Com o propósito de ilustração, considera-se um eixo suportado por dois mancais anisotrópicos idênticos, contendo um disco em sua posição central. A Figura 13 mostra o *SDI Plot* e uma escala mostrando o significado das cores utilizadas neste gráfico.

Figura 13. Aplicação do *SDI Plot* para um rotor anisotrópico.



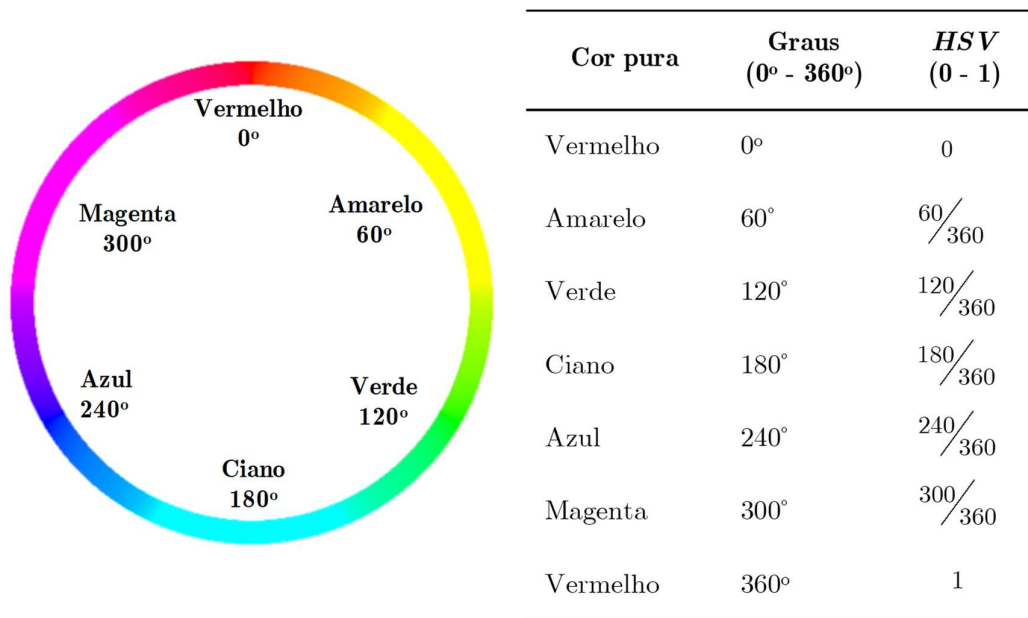
Fonte: Modificado de Mesquita (2004).

No entanto, os trabalhos que mostram o mapa de cores *SDI Plot*, não apresentam a ferramenta computacional ou o código utilizado para a construção deste (DIAS JR; ALLEMANG, 2001; DIAS et al., 2004b; MESQUITA; DIAS JR, 2004).

Nesse trabalho, a construção desse mapa é feita pela manipulação dos valores do vetor *SDI* no sistema de cores HSV.

O modelo HSV é composto pelas componentes de tonalidade (*Hue*), saturação (*Saturation*) e valor (*Value*). A tonalidade representa a cor pura com saturação e luminosidade máximas. Esse parâmetro permite exprimir todas as cores existentes, começando no vermelho, passando pelo laranja, amarelo, verde, azul, roxo, magenta, e volta ao vermelho. Essas cores são quantificadas em um valor angular entre 0 e 360 graus, ou entre o valor 0 e 1, como ilustra a Figura 14.

Figura 14. Relação das cores puras no sistema HSV e seus valores angulares e escalares.



Fonte: Adaptado de COLOR ([s.d]).

A saturação indica a maior ou menor intensidade da tonalidade. Quanto menos saturada, mais apagada, mais cinzenta aparece a imagem. Quanto mais saturada, mais viva, Figura 15(a).

O valor traduz a quantidade de luz que incide na cor. A cor mais clara ou mais escura indica a quantidade de luz que a mesma contém, Figura 15(b) (ALVES, 2010; “COLOR Models: RGB, HSV, HSL.”, [s.d.]).

Figura 15. Escala para a cor azul. (a) Saturação; (b) Valor.



Fonte: Adaptado de COLOR ([s.d]).

Com base no conhecimento sobre o sistema de cores HSV e nos valores do parâmetro SDI , conseguiu-se produzir um mapa de cores semelhantes ao utilizados pelos autores Dias Jr. e Allemang (2001) e Mesquita e Dias Jr. (2004), como ilustra a Figura 13, a partir da seguinte equação

$$SDI_{Plot} = \left[(1 - SDI)(HSV_{\min^+}) - (HSV_{\max^+}) \right] + HSV_{\max^+}, \quad \text{para } SDI > 0$$

$$SDI_{Plot} = \left[(1 - |SDI|)(HSV_{\min^-}) - (HSV_{\max^-}) \right] + HSV_{\max^-}, \quad \text{para } SDI < 0$$
(77)

sendo $SDI_{Plot} \in \mathbb{R}^{k \times \beta}$ os valores do parâmetro SDI no sistema de cores HSV utilizado para criar o mapa de cores, nos quais k é o número de nós e β o tamanho do vetor de frequência. HSV_{\max^+} e HSV_{\min^+} representam a tonalidade da cor para o máximo e mínimo valor absoluto do parâmetro SDI no intervalo $0 < SDI \leq 1$, e HSV_{\max^-} e HSV_{\min^-} representam a tonalidade da cor para o máximo e mínimo valor absoluto do parâmetro SDI no intervalo $-1 \leq SDI < 0$.

Como o mapa de cores mostrado nesse trabalho difere em algumas tonalidades de cores (por exemplo, a presença do magenta e do ciano) do mapa apresentado por (DIAS JR; ALLEMANG, 2001; DIAS et al., 2004b; MESQUITA; DIAS JR, 2004), esse mantém o mesmo nome, porém escrito de maneira diferente, como SDI_{Plot} . Os valores desses parâmetros e a sua relação com as cores desejadas são mostrados na Tabela 2.

Tabela 2. Relação entre as cores desejadas no SDI_{Plot} e os valores no sistema HSV.

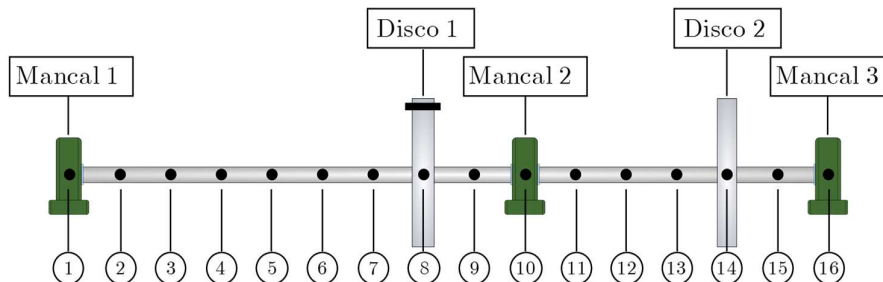
Parâmetro	Valor do SDI	Tonalidade da cor	Valor HSV
HSV_{\max^+}	1	Verde	120/360
HSV_{\min^+}	0 ⁺	Azul	240/360
HSV_{\max^-}	-1	Amarelo	60/360
HSV_{\min^-}	0 ⁻	Vermelho	0

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

3.3 ANÁLISE NUMÉRICA DE UM ROTOR ATRAVÉS DE COORDENADAS COMPLEXAS

Na literatura, a principal aplicação do parâmetro *SDI* e das dFRFs são em eixos suportados por mancais anisotrópicos. Para isso, considera-se como exemplo um eixo modelado em Elementos Finitos, conforme Figura 16, com as características descritas na Tabela 3.

Figura 16. Modelo em Elementos Finitos para o sistema com três mancais.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Tabela 3. Parâmetros físicos do sistema com três mancais.

Descrição	Valores	Descrição	Valores
Comprimento do eixo	0,75 m	Módulo de elasticidade	$2,1 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$
Raio do eixo	0,005 m	Coefficiente de Poisson	0,3
Diâmetro externo dos discos	0,20 m	Coefficiente de rigidez dos mancais	20 kN/m
Diâmetro interno dos discos	0,010 m	Desbalanceamento	10^{-07} kg.m
Espessura dos discos	0,02 m		

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Sabe-se que as frequências naturais e seus modos de vibrar dependem da magnitude da rigidez do mancal, posição do mancal e da massa e rigidez do rotor. Mais especificamente, a relação entre a rigidez do eixo e a rigidez do mancal governa as características modais do sistema (LEADER, 2002; SWANSON et al., 2005).

Quando a rigidez do mancal é baixa em relação à rigidez do eixo, chamado de *soft bearings*, a rigidez do mancal possui grande influência na primeira e segunda velocidades críticas, região à esquerda do diagrama onde mostra a inclinação da curva praticamente constante. Nessa região, as duas primeiras velocidades críticas são atenuadas, não detectando-as em operação normal. Isso faz com que a terceira velocidade crítica se torne a primeira velocidade crítica para o rotor em operação.

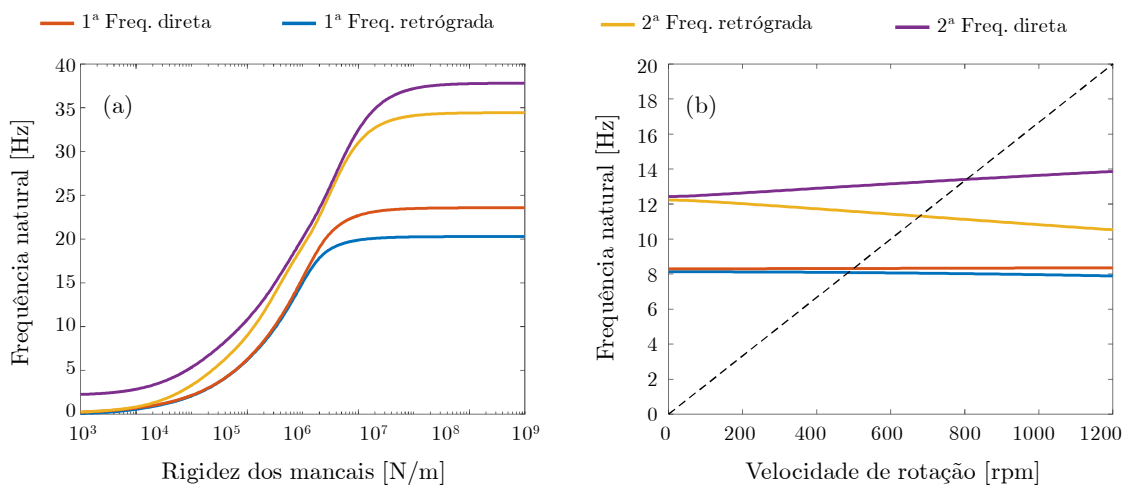
Ao contrário, quando os mancais são muito mais rígidos que o eixo, chamado de *stiff bearing*, a rigidez do mancal praticamente não possui influência nas velocidades críticas, região à direita do diagrama onde a curva tornar-se novamente constante. Nesse caso, aumentar a rigidez do mancal não alterara as frequências naturais. Na faixa onde a rigidez dos mancais possui a mesma magnitude da rigidez do eixo, tanto a geometria do eixo como a rigidez dos mancais contribuem para as características modais do sistema, chamado de *intermediate bearings*.

Embora as rigidezes desse sistema sejam alteradas a cada caso – a fim de avaliar diversas situações de anisotropia – o sistema permanece na região de *soft bearing*, tendo um comportamento predominante de corpo rígido. A variação das velocidades críticas de precessão direta e retrógrada pelos valores dos coeficientes de rigidez dos mancais, para uma velocidade de rotação de 100 rpm, é mostrada na Figura 17(a).

Considerando o valor dos coeficientes de rigidez dos mancais de 20 kN/m, o comportamento das frequências naturais do sistema em função da velocidade de rotação do rotor é mostrado pelo diagrama de Campbell na Figura 17(b), destacando as seis primeiras frequências naturais.

Nesse diagrama, pode-se observar em qual velocidade de rotação o sistema entra em ressonância, já que a força de desbalanceamento atua com frequência igual à frequência de rotação (representada pela linha tracejada, onde $\omega = \Omega$) (DUMITRU; SECARĂ; MIHĂLCICĂ, 2009; MOGENIER et al., 2012).

Figura 17. (a) Diagrama de rigidez dos mancais. (b) Diagrama de Campbell.

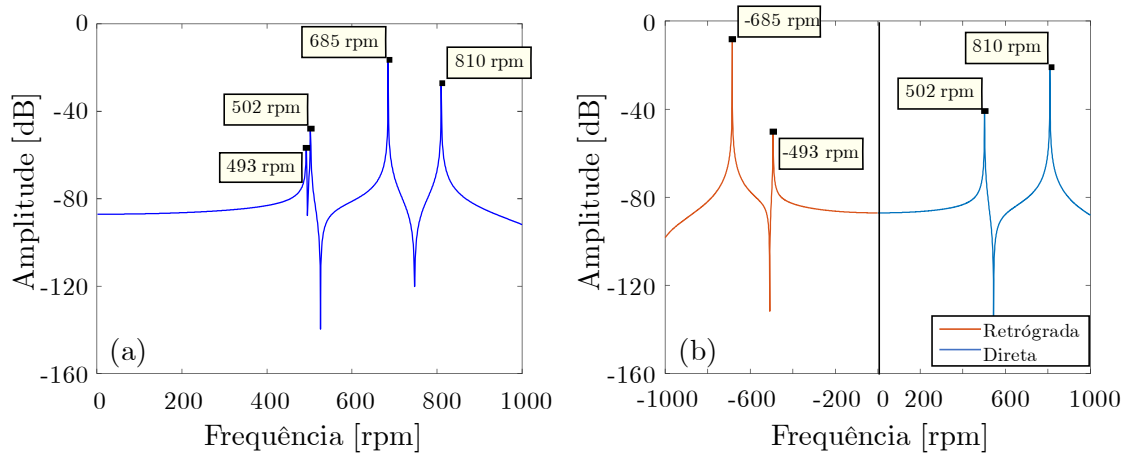


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A FRF do *driving-point* do nó 16 (tanto a força de entrada quanto a resposta são medidas no mesmo ponto e na mesma direção) e as dFRFs do *driving-point* 16 que relacionam a mesma direção, \mathbf{H}_a^{pg} e $\mathbf{H}_a^{p^*g^*}$, são mostradas na Figura 18(a) e Figura 18(b).

Pode-se perceber que na curva da FRF, Figura 18(a), os picos em relação as quatro primeiras frequências são visualizados de maneira acoplada, ou seja, não há informações sobre a direção do movimento. Em contrapartida, a dFRF, Figura 18(b), possui a capacidade de separar os modos retrógrados e diretos, sendo esses exibidos na região de frequência negativa e positiva, respectivamente.

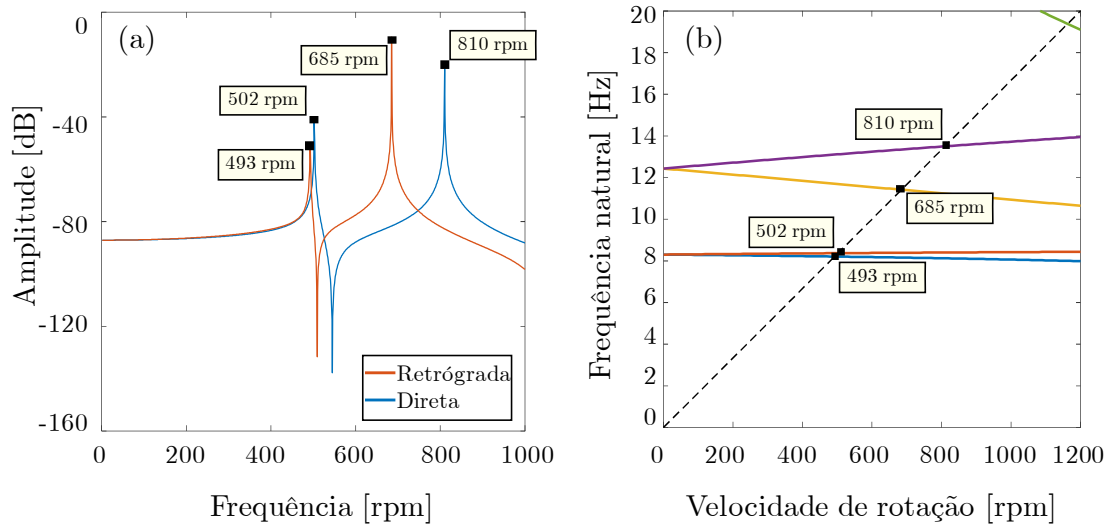
Figura 18. (a) FRF do nó 16 na direção vertical. (b) dFRF do nó 16.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

As curvas dos modos retrógrados e diretos da dFRF ainda podem ser visualizadas de maneira sobreposta, ambos na região de frequência positiva, Figura 19(a). Além do mais, pode-se perceber que os valores de frequência dos picos da FRF e dFRF correspondem com as frequências naturais de precessão nas velocidades críticas no diagrama de Campbell (cruzamento da linha de rotação do eixo, linha tracejada, com as linhas de frequências naturais de precessão, linhas contínuas), Figura 19(b).

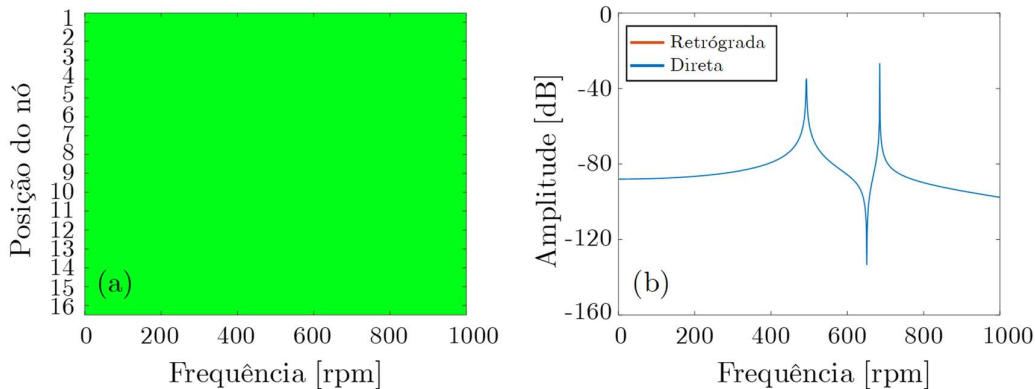
Figura 19. (a) dFRF dos modos retrógrado e direto sobrepostos do driving-point 16z. (b) Diagrama de Campbell.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Como ilustrado na Figura 16, a força de excitação, resultante de uma massa de desbalanceamento a uma certa distância do eixo geométrico do eixo, estará situada no disco 1. No primeiro caso, não se considera amortecimento. Os mancais possuem o valor de 20 kN/m tanto para a rigidez na direção vertical, k_{zz} , quanto na direção horizontal, k_{xx} , ou seja, são idênticos e isotrópicos. Sendo assim, por não haver a presença da componente retrógrada na resposta, observa-se a cor exclusivamente verde no SDI_{Plot} , Figura 20(a), evidenciando uma órbita com formato circular em precessão direta. Também, na curva de dFRF há apenas a componente direta.

Figura 20. Rotor com mancais isotrópicos, $k_{zz} = k_{xx} = 20$ kN/m. (a) SDI_{Plot} . (b) dFRF para o nó 8.



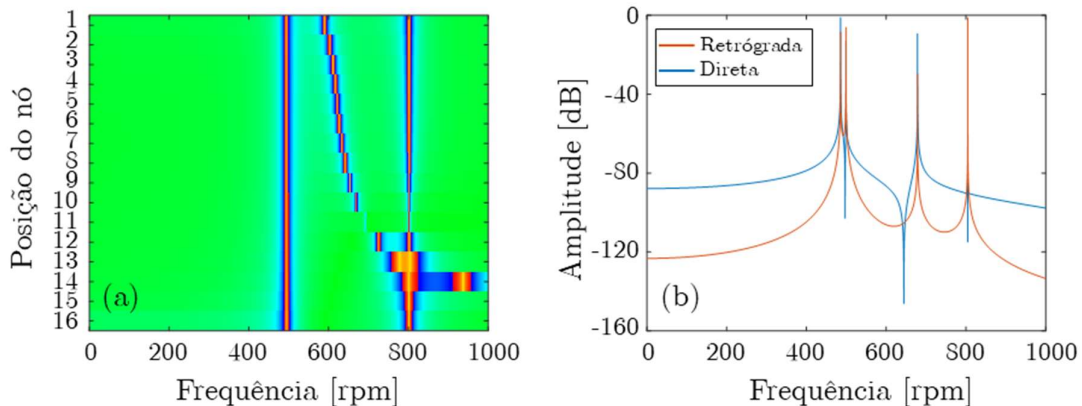
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

No entanto, se houver anisotropia nos mancais, há o aparecimento da componente retrógrada e o parâmetro SDI assume valores entre -1 e 1, como mostrado na Tabela 1, e o mapa de cores indicará essa mudança. Nessa metodologia, o valor da amplitude da componente retrógrada em relação à componente direta irá determinar o tipo do movimento de precessão. Dessa maneira, se a amplitude da componente direta for maior do que a componente retrógrada, ocorre precessão direta, em contrapartida, se a amplitude da componente direta for menor do que a componente retrógrada, ocorre precessão retrógrada.

Para o segundo caso, diminui-se a rigidez na direção horizontal dos três mancais para um valor de 19 kN/m. Devido à diferença de rigidez, há uma diferença de frequências naturais na direção vertical e horizontal. Assim, haverá dois picos de frequências correspondente a cada direção, Figura 21(b).

No gráfico de SDI_{plot} , Figura 21(a), percebe-se que há a variação das cores verde até azul e vermelho até, representando o aparecimento dos três tipos de órbitas (circular, elíptica e retilínea). Além disso, para uma mesma frequência de rotação, alguns nós se movem em precessão direta e outros em precessão retrógrada simultaneamente. Esse fenômeno é conhecido como modo operacional misto.

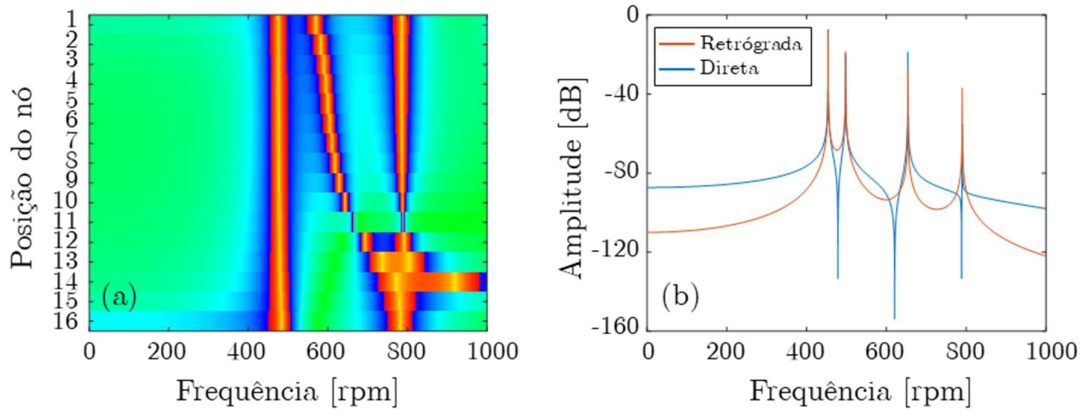
Figura 21. Rotor com mancais anisotrópicos, $k_{zz} = 20$ kN/m e $k_{xx} = 19$ kN/m. (a) SDI_{plot} . (b) dFRF para o nó 8.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Diminuindo-se a rigidez na direção horizontal para 16 kN/m, percebe-se um aumento da região de ocorrência dos modos mistos, Figura 22(a), bem como na amplitude de vibração, além das frequências naturais se afastarem ainda mais, Figura 22(b).

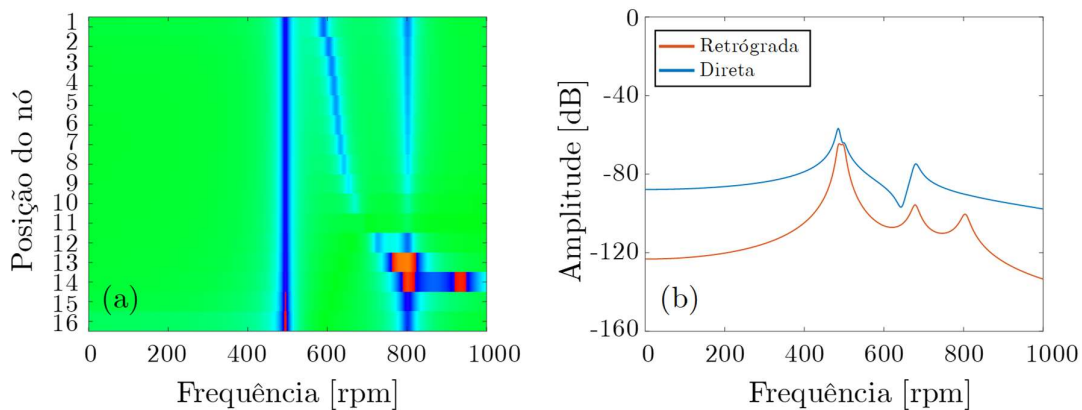
Figura 22. Rotor com mancais anisotrópicos, $k_{zz} = 20$ kN/m e $k_{xx} = 16$ kN/m. (a) SDI_{Plot} . (b) dFRF para o nó 8.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

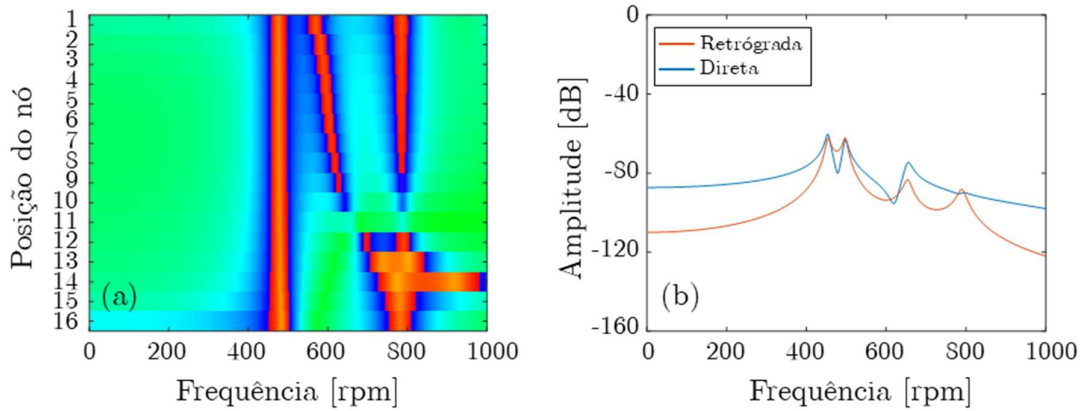
Considerando amortecimento nos mancais, percebe-se que há uma diminuição nas amplitudes das respostas, Figura 23(b) e Figura 24(b), havendo uma mudança na região onde a amplitude da componente retrógrada é maior do que a componente direta. Com isso, diminui-se a faixa de frequências em que ocorre modo de precessão retrógrada, Figura 23(a) e Figura 24(a).

Figura 23. Rotor com mancais anisotrópicos com amortecimento, $k_{zz} = 20$ kN/m, $k_{xx} = 19$ kN/m e $c_{xx} = c_{zz} = 10$ Ns/m. (a) SDI_{Plot} . (b) dFRF para o nó 8.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

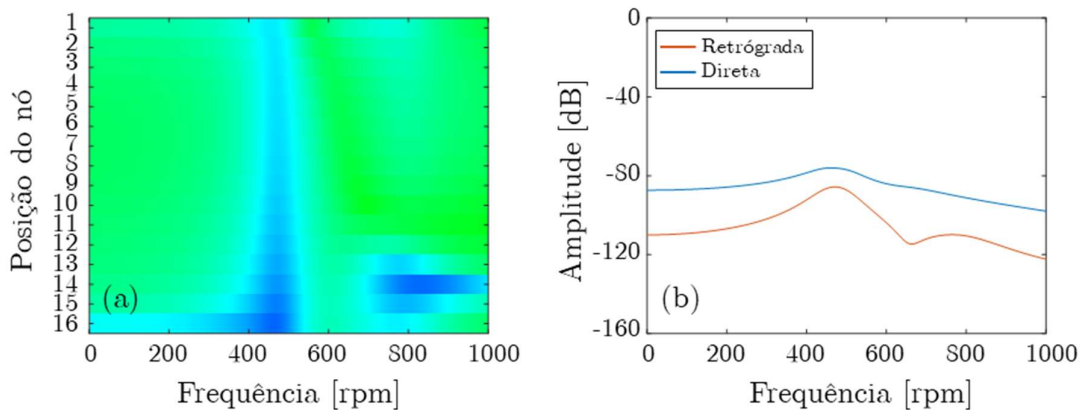
Figura 24. Rotor com mancais anisotrópicos com amortecimento, $k_{zz} = 20$ kN/m, $k_{xx} = 16$ kN/m e $c_{xx}=c_{zz} = 10$ Ns/m. (a) SDI_{plot} . (b) dFRF para o nó 8.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Em alguns casos, se o amortecimento for suficiente, pode-se eliminar a ocorrência de modos mistos, como ilustra a Figura 25(a).

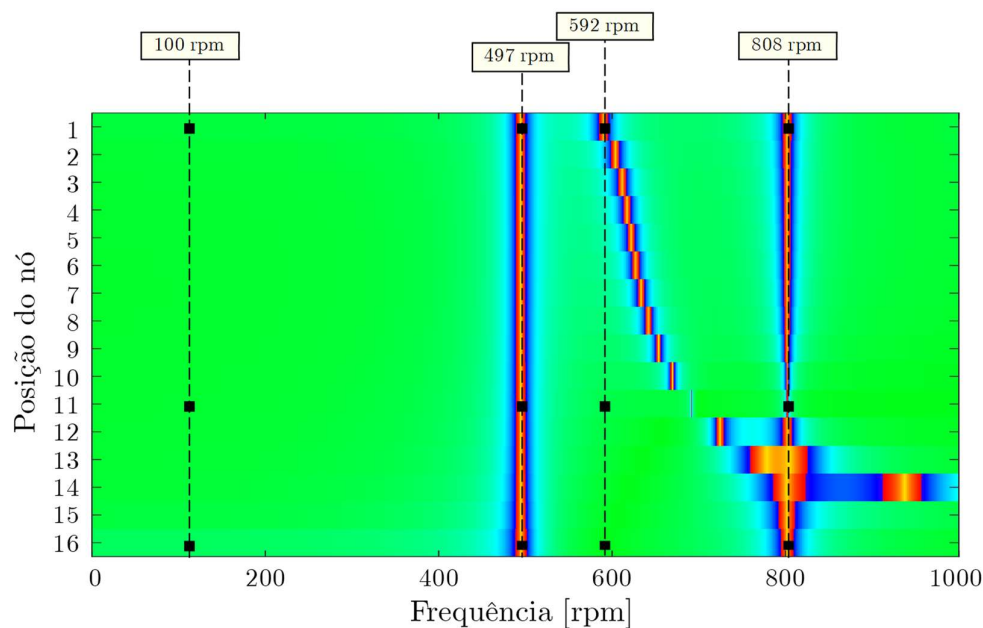
Figura 25. Rotor com mancais anisotrópicos com amortecimento, $k_{zz} = 20$ kN/m, $k_{xx} = 16$ kN/m e $c_{xx}=c_{zz} = 100$ Ns/m. (a) SDI_{plot} . (b) dFRF para o nó 8.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A fim de visualizar as órbitas do eixo na ocorrência de modos mistos, considera-se o caso descrito na Figura 21 operando em quatro velocidades constantes: 100, 497, 592 e 808 rpm. A Figura 26 mostra o SDI_{plot} para essa situação, destacando as quatro velocidades citadas.

Figura 26. SDI_{plot} indicando as velocidades de visualização das órbitas do rotor.



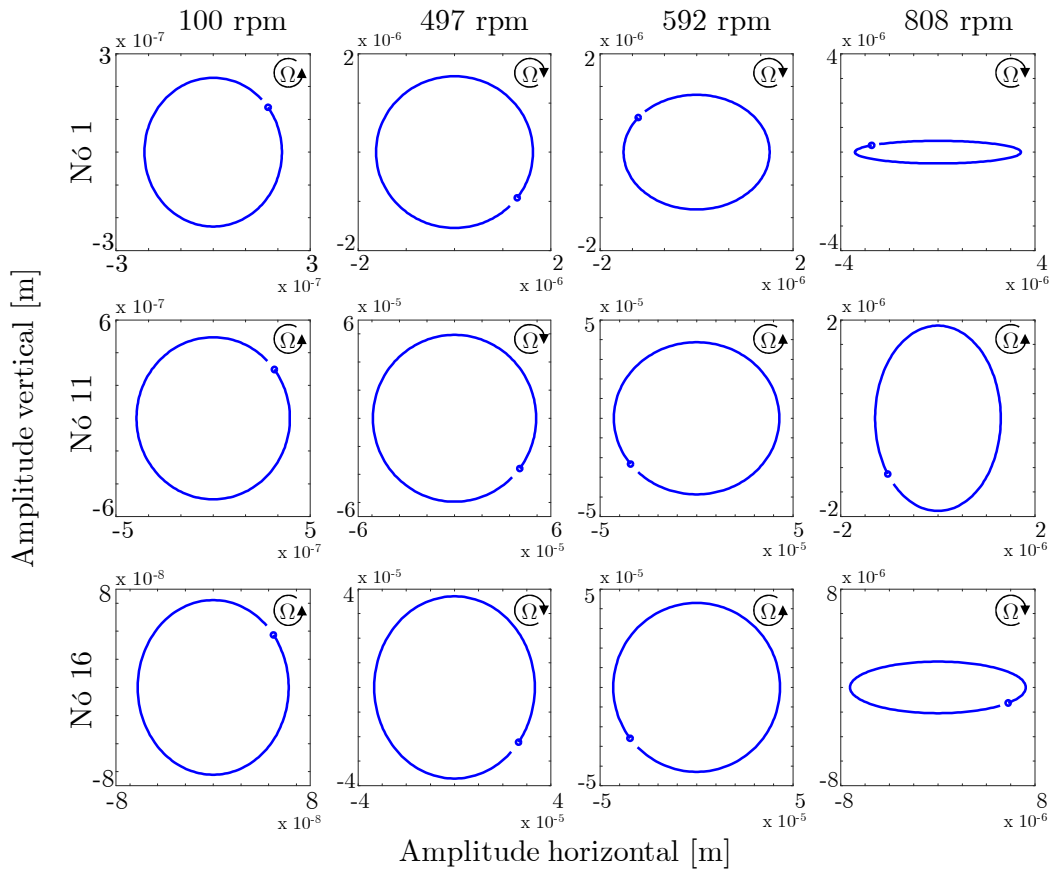
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A Figura 27 mostra as órbitas dos nós 1, 11 e 16 para as quatro velocidades indicadas na Figura 26, abrangendo regiões de precessão direta e retrógrada. O marcador (círculo laranja) inserido na órbita delimita o final do sinal, a fim de facilitar a visualização do sentido de rotação.

Durante a rotação de 100 rpm (cor verde no gráfico de SDI_{plot}) as órbitas possuem o formato circular e o modo de precessão direto, enquanto durante a rotação de 497 rpm (cor amarelo no gráfico de SDI_{plot}) as órbitas possuem o formato circular e o modo de precessão retrógrado.

As rotações de 592 e 808 rpm, entretanto, apresentam tanto variações no formato das órbitas (circular e elipsoidal) quanto mudança na direcionalidade dos modos, confirmando a ocorrência de modos mistos.

Figura 27. Órbitas do rotor para diferentes valores de velocidade de rotação em diferentes posições do eixo.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Dessa maneira, como indicado no mapa de cores da Figura 26, há velocidades em que regiões do rotor se encontram em precessão direta – caracterizado pelas tonalidades das cores verde-ciano-azul, e precessão retrógrada – cores vermelho-laranja-amarelo, para uma mesma velocidade de rotação.

4 MODELAGEM DA TRINCA

Como já exposto na revisão bibliográfica dos modelos de trinca, à medida que o eixo gira, ocorre a abertura e fechamento gradual da trinca transversal, resultando no efeito de *breathing*. Desse modo, a precisão do modelo matemático que avalia a variação instantânea da rigidez do eixo a cada posição angular é preponderante para o comportamento não-linear da trinca.

Nesse trabalho, adota-se o modelo proposto em Al-Shudeifat e Butcher (2011), por apresentar resultados mais precisos quando comparados aos modelos publicados anteriormente, além de demonstrar semelhança com resultados experimentais já conhecidos na literatura. Sendo assim, esse capítulo revisa a modelagem descrita em Al-Shudeifat e Butcher (2011).

A área da seção transversal do elemento com trinca, A_1 , e a localização do centroide e no eixo inercial Z em $t = 0$, conforme Figura 28(a), são dados por

$$A_1 = R^2 \left[\pi - \cos^{-1}(1 - \mu) + (1 - \mu) \gamma \right] \quad (78)$$

$$e = \frac{2R^3}{3A_1} \gamma^3 \quad (79)$$

sendo $\mu = h/R$ a profundidade adimensional da trinca, h a profundidade radial da trinca, R o raio do elemento finito da trinca e $\gamma = \left[\mu(2 - \mu) \right]^{1/2}$.

A distância do ponto O (centroide da área sem a trinca) até a borda da trinca, b , a largura da trinca em relação ao eixo Z , s , e o ângulo de abertura da trinca, α , podem ser escritos em termos da profundidade adimensional por

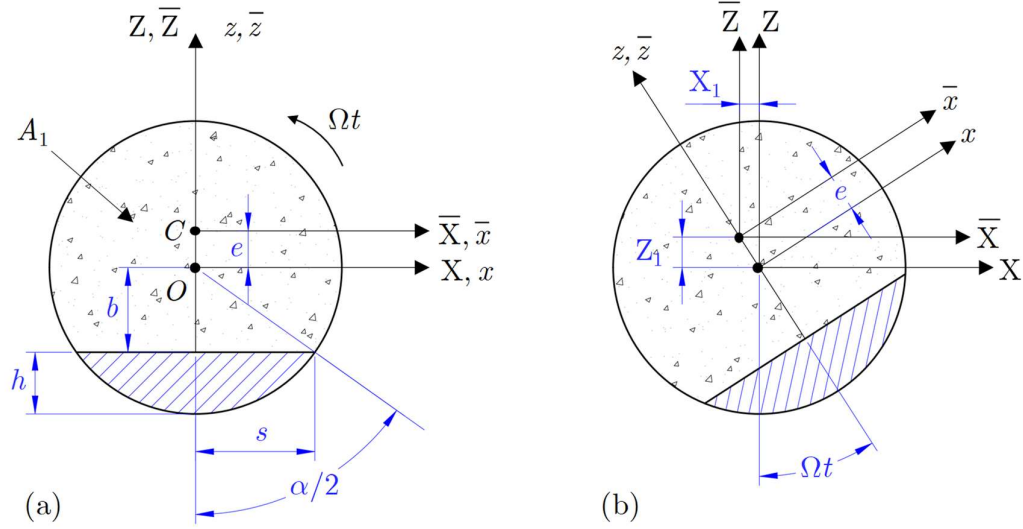
$$b = R(1 - \mu) \quad (80)$$

$$s = R\gamma \quad (81)$$

$$\alpha = 2 \cos^{-1}(1 - \mu) \quad (82)$$

Para essa configuração assume-se o ângulo zero para a borda da trinca com o eixo inercial X para $t = 0$. Conforme o eixo inicia a sua rotação, o ângulo da trinca é alterado para a posição Ωt , Figura 28(b), sendo Ω a velocidade angular de rotação do eixo.

Figura 28. Sistemas de coordenadas para o elemento de trinca. (a) antes da rotação. (b) depois da rotação.



Fonte: Modificado de Al-Shudeifat e Butcher (2011).

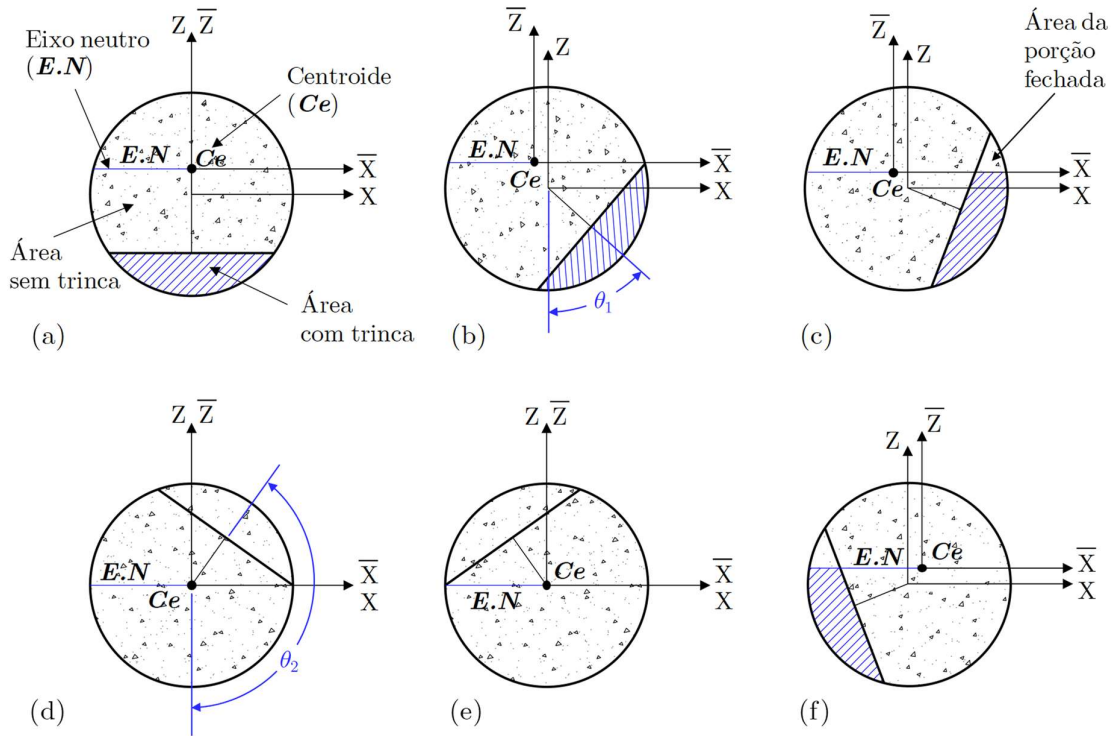
Na seção transversal do elemento com trinca, o eixo neutro delimita dois campos de tensões. Acima do eixo neutro há o campo de compressão que tende a fechar a trinca e abaixo do eixo neutro há o campo de tração que tende a manter a trinca aberta.

A medida que o eixo rotaciona, há a variação da localização do centroide e do eixo neutro do elemento de trinca, como mostra a Figura 29. A trinca começa o fechamento no ângulo θ_1 , na qual a extremidade superior da borda da trinca alcança o campo de tensão de compressão, como mostrado na Figura 29(b). A trinca torna-se totalmente fechada no ângulo θ_2 , como mostra a Figura 29(f). Esses dois ângulos podem ser calculados por

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left[\frac{e + R(1 - \mu)}{R\sqrt{\mu(2 - \mu)}} \right] \quad (83)$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1}(1 - \mu) \quad (84)$$

Figura 29. Estados da trinca e localização do centroide da seção transversal do elemento com trinca para diferentes ângulos de rotação do eixo.



Fonte: Modificado de Al-Shudeifat e Butcher (2011).

A área da seção transversal permanece A_1 durante os intervalos $0 \leq \Omega t \leq \theta_1$ e $2\pi - \theta_1 \leq \Omega t \leq 2\pi$. Assim que a trinca começa a fechar, a área da porção fechada é denotada por $A_2(t)$, já que essa área é variante no tempo. Portanto, a área total da seção transversal do elemento da trinca durante a rotação do eixo é a soma de A_1 e $A_2(t)$, denotada por $A_{ce}(t) = A_1 + A_2(t)$. Os estados de *breathing* da trinca para uma revolução completa do eixo são descritos na Tabela 4.

Tabela 4. Estados de *breathing* da trinca durante uma revolução completa do eixo.

Ângulo de rotação do eixo: $0 \leq \Omega t \leq 2\pi$	Estados de <i>breathing</i> da trinca
$0 \leq \Omega t < \theta_1$ e $(2\pi - \theta_1) \leq \Omega t \leq 2\pi$	Totalmente aberta
$\theta_1 \leq \Omega t \leq (\pi/2 + \alpha/2)$ e $(\pi - \alpha/2) \leq \Omega t \leq (2\pi - \theta_1)$	Parcialmente aberta
$(\pi/2 + \alpha/2) \leq \Omega t \leq (3\pi/2 - \alpha/2)$	Totalmente fechada

Fonte: Adaptado de (AL-SHUDEIFAT; BUTCHER, 2011).

Os momentos de inércia da área A_1 sobre os eixos inerciais X e Z para $t = 0$ ou sobre os eixos móveis x e z para $t \geq 0$ são valores constantes dados por

$$I_1 = I - I_x^c \quad (85)$$

$$I_2 = I - I_z^c \quad (86)$$

sendo $I = I_e = \pi R_e^4 / 4$ o momento de inércia de área para a posição totalmente fechada da trinca (similar ao elemento sem trinca), I_x^c e I_z^c os momentos de inércia de área para o segmento da trinca sobre os eixos móveis x e z para $t \geq 0$ ou sobre os eixos inerciais X e Z para $t = 0$, respectivamente, calculados por

$$I_x^c = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{R^4}{4} \left[(1 - \mu)(2\mu^2 - 4\mu + 1)\gamma + \sin^{-1}(1 - \mu) \right] \quad (87)$$

$$I_z^c = \frac{\pi R^4}{12} \left[(1 - \mu)(2\mu^2 - 4\mu - 3)\gamma + 3 \sin^{-1}(\gamma) \right] \quad (88)$$

Os momentos de inércia da área A_1 sobre os eixos inerciais do centroide \bar{X} e \bar{Z} para $t = 0$ ou sobre os eixos móveis do centroide \bar{x} e \bar{z} para $t \geq 0$ são calculados por

$$\bar{I}_1 = I_1 - A_1 e^2 \quad (89)$$

$$\bar{I}_2 = I_2 \quad (90)$$

Os momentos de inércia da área A_1 sobre os eixos inerciais X e Z variam no tempo de acordo com a rotação do eixo. Utilizando relações trigonométricas, essas quantidades podem ser escritas na forma de (PILKEY, 2002)

$$I_X^A(t) = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cos(2\Omega t) - I_{12} \sin(2\Omega t) \quad (91)$$

$$I_Z^A(t) = \frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{I_1 - I_2}{2} \cos(2\Omega t) + I_{12} \sin(2\Omega t) \quad (92)$$

A seção transversal da trinca é simétrica em relação ao eixo z , assim $I_{12} = 0$. Os momentos de inércia da área $A_2(t)$ sobre os eixos de inércia X e Z que aparecem

devido ao fechamento do segmento da trinca são denotados por $I_X^{A_2}$ e $I_Z^{A_2}$, respectivamente.

Depois que a trinca começa a se fechar, os valores da $A_{ce}(t)$, bem como a localização do seu centroide e para os momentos de inercia $I_X(t)$ e $I_Z(t)$ devem ser calculados a cada variação no ângulo de rotação do eixo

$$I_X(t) = I_X^{A_1}(t) + I_X^{A_2}(t) \quad (93)$$

$$I_Z(t) = I_Z^{A_1}(t) + I_Z^{A_2}(t) \quad (94)$$

Os eixos do centroide \bar{X} e \bar{Z} permanecem paralelos aos eixos inerciais X e Z durante a rotação do eixo. Portanto, os momentos de inércia da área $A_{ce}(t)$ sobre os eixos \bar{X} e \bar{Z} podem ser calculados utilizando o teorema dos eixos paralelos (PILKEY, 2002)

$$I_{\bar{X}}(t) = I_X(t) - Z_{ce}^2(t)A_{ce}(t) \quad (95)$$

$$I_{\bar{Z}}(t) = I_Z(t) - X_{ce}^2(t)A_{ce}(t) \quad (96)$$

sendo $X_{ce}(t)$ e $Z_{ce}(t)$ as coordenadas do centroide da área $A_{ce}(t)$ relativos aos eixos inerciais X e Z. As quantidades $A_2(t)$, $X_{ce}(t)$, $Z_{ce}(t)$, $I_X^{A_2}(t)$ e $I_Z^{A_2}(t)$ são calculadas de forma recursiva a cada novo ângulo de rotação até a trinca se tornar totalmente fechada. O passo a passo desses cálculos são descritos no Apêndice B do trabalho de Al-Shudeifat e Butcher (2011).

Al-Shudeifat e Butcher (2011) perceberam que o comportamento durante o mecanismo de *breathing* da trinca dos momentos de inércia $I_{\bar{X}}(t)$ e $I_{\bar{Z}}(t)$ não são similares. Por isso, propuseram diferentes funções matemáticas para aproximar a variação dessas quantidades no tempo, tais como

$$f_1(t) = \frac{1}{2^m} \left(\frac{m}{m/2} \right) + 2 \sum_{p=1}^{(m/2)} \left(\left(\frac{m}{p} \right) \cos \left((m-2p) \frac{\Omega}{t} \right) \right) \quad (97)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{2}{\theta_2 - \theta_1} \sum_{p=1}^m \frac{\cos(p\theta_2) - \cos(p\theta_1)}{p^2} \cos(p\Omega t) \right) \quad (98)$$

sendo m um número inteiro positivo.

Reunindo as Eqs. (97) e (98) com as Eqs. (89) e (90), os momentos de inércia sobre os eixos \bar{X} e \bar{Z} podem ser aproximados por

$$I_{\bar{X}}(t) \cong \hat{I}_{\bar{X}}(t) = I - (I - \bar{I}_1)f_1(t) \quad (99)$$

$$I_{\bar{Z}}(t) \cong \hat{I}_{\bar{Z}}(t) = I + (I - \bar{I}_1)f_1(t) - (2I - \bar{I}_1 - \bar{I}_2)f_2(t) \quad (100)$$

Considerando $I_{11} = I - \bar{I}_1$ e $I_{22} = -(2I - \bar{I}_1 - \bar{I}_2)$, as Eqs. (99) e (100) podem ser reescritas de forma compacta por

$$\hat{I}_{\bar{X}}(t) = I - I_{11}f_1(t) \quad (101)$$

$$\hat{I}_{\bar{Z}}(t) = I + I_{11}f_1(t) - I_{22}f_2(t) \quad (102)$$

Enfim, a matriz de rigidez do elemento finito com trinca é dada por

$$\mathbf{K}_{et} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_{et_1}f_1(t) + \mathbf{K}_{et_2}f_2(t) \quad (103)$$

sendo \mathbf{K}_e a matriz de rigidez do elemento finito na posição da trinca com o estado da trinca totalmente fechado – semelhante a matriz de rigidez do elemento sem trinca (ISHIDA; YAMAMOTO, 2012), e \mathbf{K}_{et_1} e \mathbf{K}_{et_2} as matrizes de rigidez devido ao mecanismo de *breathing* da trinca, dadas por

$$\mathbf{K}_{et1} = \frac{EI_{11}}{L_e^3} \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & -6L_e & 12 & 0 & 0 & -6L_e \\ 0 & 12 & -6L_e & 0 & 0 & -12 & -6L_e & 0 \\ 0 & -6L_e & 4L_e^2 & 0 & 0 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 \\ -6L_e & 0 & 0 & -4L_e^2 & 6L_e & 0 & 0 & -2L_e^2 \\ 12 & 0 & 0 & 6L_e & -12 & 0 & 0 & 6L_e \\ 0 & -12 & 6L_e & 0 & 0 & 12 & 6L_e & 0 \\ 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 & 6L_e & 4L_e^2 & 0 \\ -6L_e & 0 & 0 & -2L_e^2 & 6L_e & 0 & 0 & -4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (104)$$

$$\mathbf{K}_{et2} = \frac{EI_{22}}{L_e^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6L_e & 0 & 0 & -12 & -6L_e & 0 \\ 0 & -6L_e & 4L_e^2 & 0 & 0 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6L_e & 0 & 0 & 12 & 6L_e & 0 \\ 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 & 6L_e & 4L_e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (105)$$

De forma similar à seção 2.6, a equação de movimento do sistema do rotor com trinca com o modelo de *breathing* é escrita pela equação linear

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{q}}(t) + (\mathbf{D} + \Omega\mathbf{G})\dot{\vec{q}}(t) + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_1f_1(t) + \mathbf{K}_2f_2(t)]\vec{q}(t) = \vec{F}(t) \quad (106)$$

sendo \vec{q} o vetor de deslocamento nodal de todo o sistema, \mathbf{M} a matriz global de massa, \mathbf{D} a matriz global de amortecimento, \mathbf{G} a matriz global de efeito giroscópico, \mathbf{K} a matriz global de rigidez e \vec{F} o vetor de forças atuantes no rotor, semelhantes as descritas na seção 2.6. As matrizes \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 são matrizes de zeros com as matrizes \mathbf{K}_{et_1} e \mathbf{K}_{et_2} posicionadas no elemento da trinca.

O vetor de tempo é amostrado em k amostras, $t = \kappa\tau$, com um intervalo constante de tempo $\tau = t_{\kappa+1} - t_{\kappa}$. Desse modo, a equação do movimento pode ser reescrita utilizando a formulação discreta em espaço de estado como (GAWRONSKI, 2004)

$$\begin{aligned} \vec{x}_{\kappa+1} &= \mathbf{A}_{\kappa}\vec{x}_{\kappa} + \mathbf{B}\vec{u}_{\kappa} \\ \vec{y}_{\kappa} &= \mathbf{C}\vec{x}_{\kappa} \end{aligned} \quad (107)$$

sendo $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a matriz de medidas que indica o número de saídas p do sistema, $\vec{y}_{\kappa} \in \mathbb{R}^p$ as respostas das saídas do sistema. As outras quantidades são definidas por

$$\mathbf{A}_{\kappa} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_{\kappa}^c & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}_{2n \times 2n}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}_{2n \times n}, \quad (\mathbf{B}_0)_{n \times m}, \quad \vec{u}_{\kappa} = \vec{F}_{\kappa}, \quad \vec{x}_{\kappa} = \begin{bmatrix} \vec{q}_{\kappa} \\ \vec{q}_{\kappa+1} \end{bmatrix}_{2n} \quad (108)$$

sendo B_0 a matriz de posicionamento das entradas no grau de liberdade adequados.

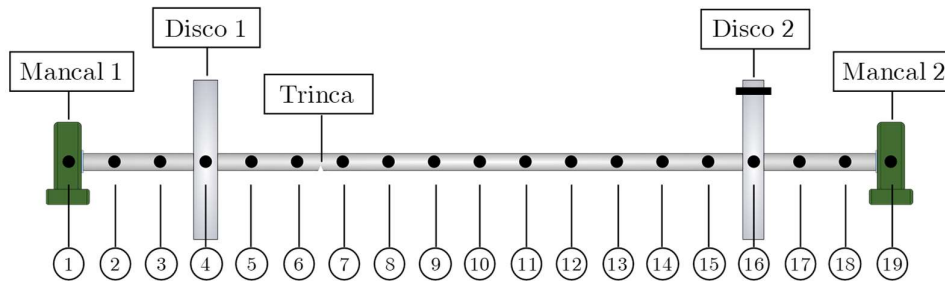
5 UTILIZAÇÃO DE COORDENADAS COMPLEXAS NA ANÁLISE DO ROTOR COM TRINCA

Como visto no Capítulo 4, a ocorrência de uma trinca transversal no eixo promove uma anisotropia no elemento da trinca, no qual o efeito é considerado no elemento de rigidez.

Levando em consideração que, para o caso de mancais anisotrópicos, o parâmetro *SDI* pode ser utilizado para descrever o formato da órbita e o modo de precessão do movimento, a primeira investigação desse trabalho se baseia em analisar o comportamento e as informações que esse parâmetro oferece, sendo a anisotropia causada por uma trinca no eixo e não mais concentrada nos mancais.

O sistema utilizado nas análises a seguir é semelhante ao descrito por Al-Shudeifat e Butcher (2011), Figura 30, com os parâmetros físicos na Tabela 5. O sistema é excitado por uma massa de desbalanceamento posicionada no disco 2.

Figura 30. Ilustração da estrutura discretizada por Elementos Finitos incluindo a indicação da trinca no eixo.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Tabela 5. Parâmetros físicos do sistema com trinca.

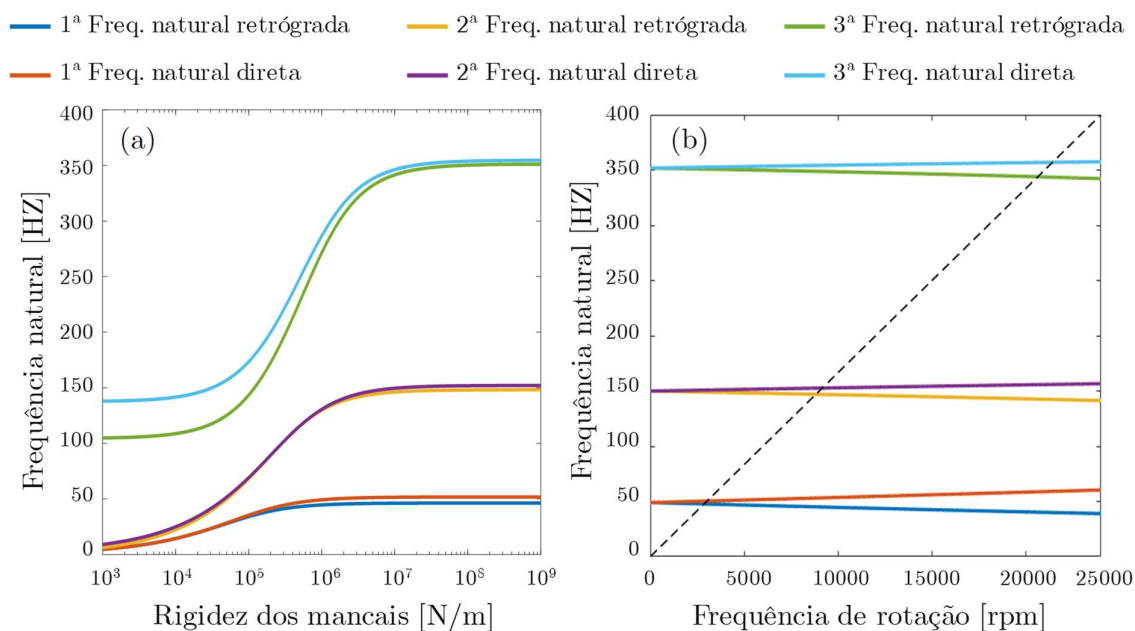
Parâmetros	Valores	Parâmetros	Valores
Comprimento do eixo	0,724 m	Módulo de elasticidade do material do eixo	$2,1 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$
Raio do eixo	0,00794 m	Coefficiente de Poisson	0,3
Diâmetro externo dos discos	0,1524 m	Densidade do material do eixo	7800 kg m^{-3}
Diâmetro interno dos discos	0,01588 m	Densidade do material do disco	2700 kg m^{-3}
Massa dos discos	0,571 kg	Coefficiente de rigidez dos mancais	$7 \cdot 10^7 \text{ N/m}$
Desbalanceamento	10^{-4} m kg	Coefficiente de amortecimento dos mancais	$5 \cdot 10^2 \text{ Ns/m}$

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Na seção 3.3, foi mostrado o Diagrama de Campbell para o sistema da Figura 16, a fim de visualizar o comportamento das frequências naturais do sistema em função da velocidade de rotação do rotor. No entanto, devido a abertura e o fechamento da trinca, a rigidez do sistema varia instantaneamente a cada ângulo de rotação, conseqüentemente, variando as frequências naturais. Nesse caso, a Figura 31(b) apresenta o diagrama de Campbell para o eixo sem dano, com o objetivo compreender as características dinâmicas do sistema sem o dano.

A variação das frequências críticas de precessão direta e retrógrada pelos valores dos coeficientes de rigidez dos mancais desse sistema, para uma velocidade de rotação de 1000 rpm, é mostrada na Figura 31(b). O sistema se encontra na região de *stiff bearing*, comportando-se como um corpo flexível.

Figura 31. (a) Diagrama de rigidez. (b) Diagrama de Campbell.



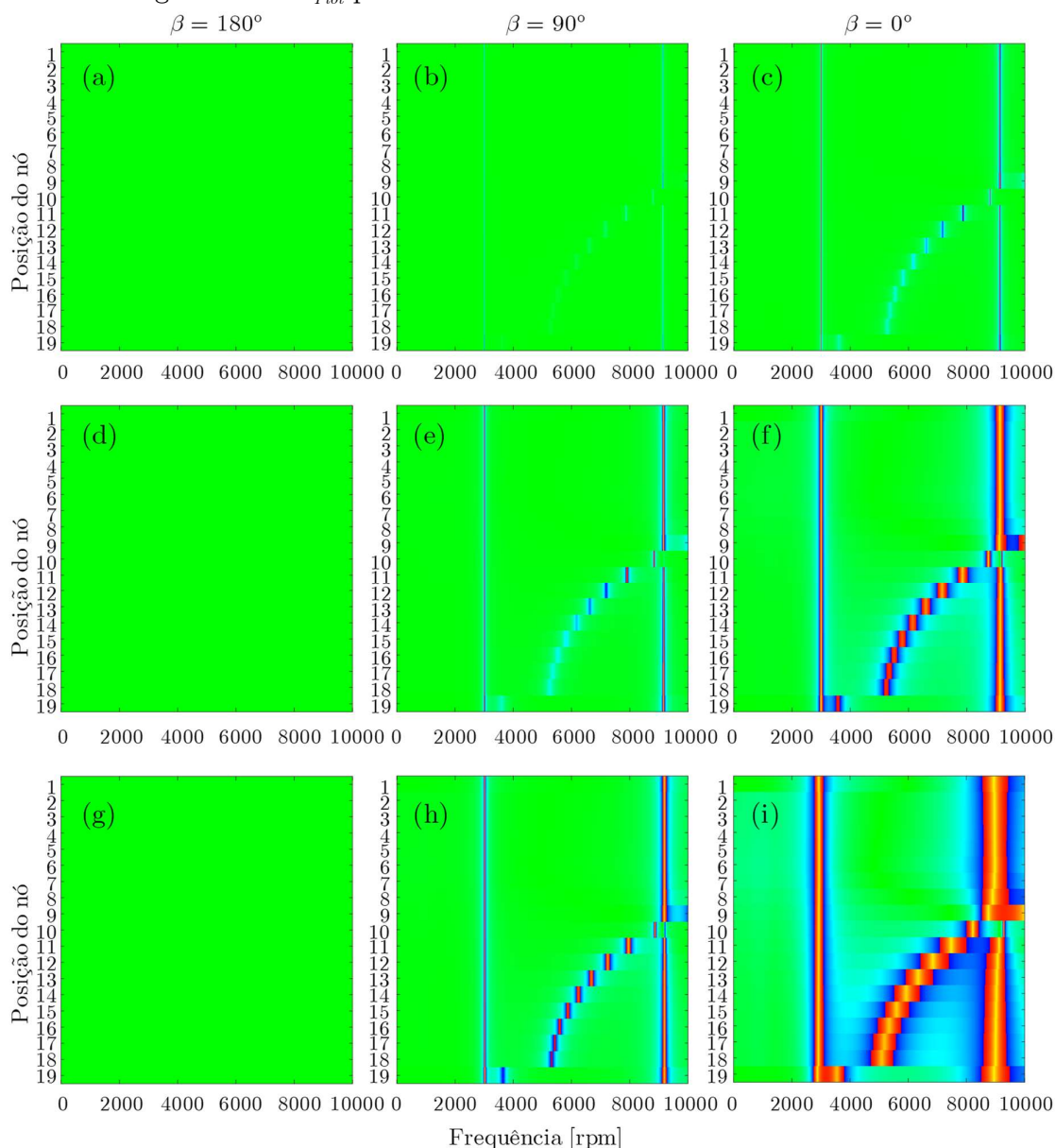
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

5.1 ANÁLISE DOS MODOS OPERACIONAIS PARA O ROTOR COM TRINCA

Esse tópico investiga a ocorrência dos modos operacionais para um rotor com trinca com o auxílio do mapa de cores SDI_{Plot} . O índice SDI é calculado como descrito na seção 3.1, bem como a sua visualização pelo mapa de cores SDI_{Plot} . No entanto, sabe-se que, como a rigidez do elemento da trinca é variante no tempo, haverá uma variação no índice SDI de acordo com o ângulo de rotação do eixo.

Para a posição da trinca totalmente fechada, o SDI assume o valor de unitário, pois o sistema se comporta como isotrópico. Já para as posições de abertura da trinca, o sistema se torna anisotrópico. A maior anisotropia se encontra na posição da trinca totalmente aberta. Também, para maiores profundidades da trinca, há um aumento da anisotropia do sistema, observando um aumento das regiões de precessão retrógrada. A Figura 32 mostra o SDI_{plot} para três ângulos de rotação do eixo, para diferentes profundidades da trinca: $\mu = 5\%$ na Figura 32(a)-(c), $\mu = 30\%$ na Figura 32(d)-(f) e $\mu = 70\%$ na Figura 32(g)-(i)

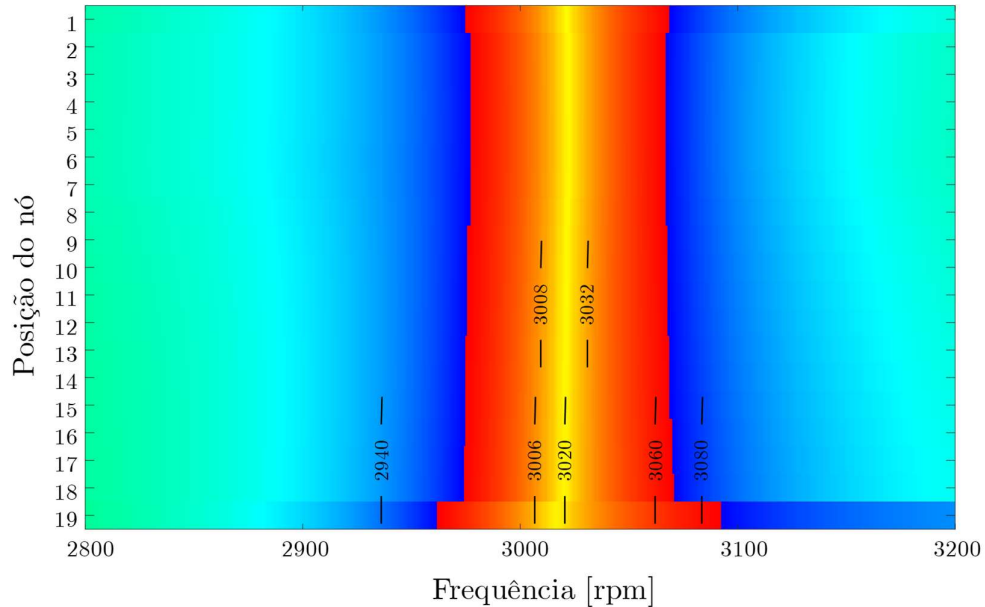
Figura 32. SDI_{plot} para o rotor com diferentes aberturas da trinca.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Considerando a posição da trinca totalmente aberta, $\beta = 0^\circ$, a Figura 33 destaca a região de ocorrência de modos diretos e retrógrados na velocidade de rotação próxima à primeira velocidade crítica. Além disso, nessa figura, são indicados as velocidades de rotação utilizadas para a visualização das órbitas na Figura 34.

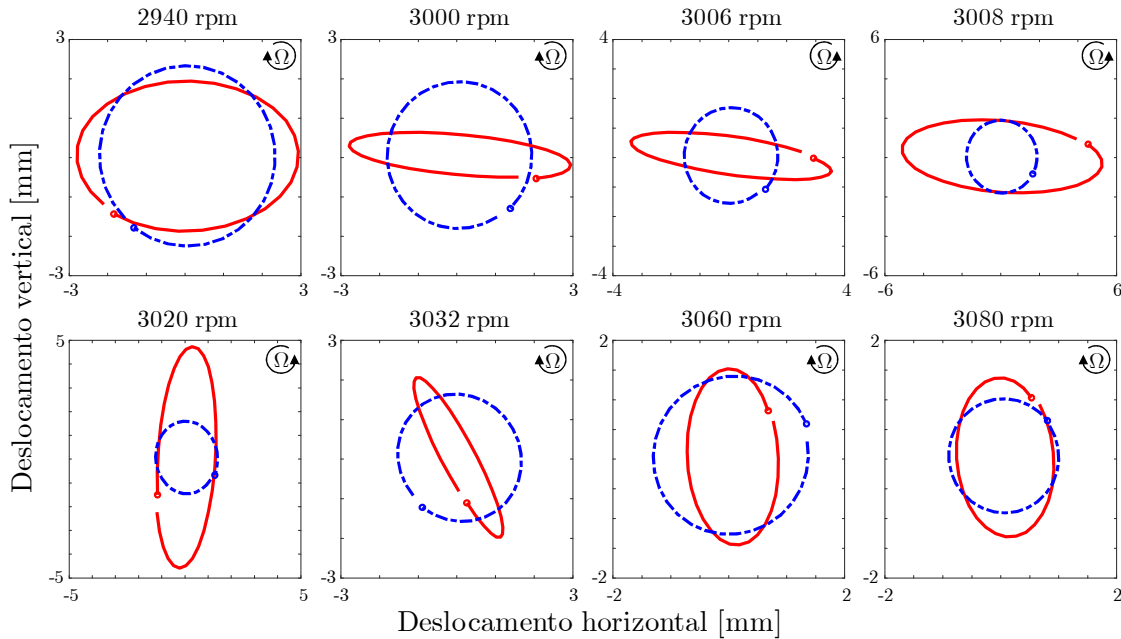
Figura 33. SDI_{Plot} na região próxima à primeira velocidade crítica do rotor.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A Figura 34 mostra a resposta do rotor para o nó 10. Para o rotor sem trinca, a órbita apresenta um formato circular com precessão direta (sentido horário), representada pela linha azul tracejada. Para o rotor com trinca, dependendo da velocidade, a órbita varia seu aspecto de circular à elipsoidal, e a direcionalidade alterna em precessão direta e retrógrada, representada pela linha vermelho contínua. O marcador circular demarca o fim do sinal. A fim de facilitar a visualização da direcionalidade da órbita, o sentido de rotação do rotor com trinca é indicado na borda superior direita para cada velocidade de rotação na Figura 34.

Figura 34. Ocorrência de modos operacionais próximos à primeira velocidade crítica do rotor com trinca para o nó 10.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Nota-se que há a ocorrência de modos diretos para o rotor com trinca em velocidades de rotação (3000, 3032 e 3060 rpm). No entanto, essas velocidades estão na faixa de valores negativos do *SDI* – cores vermelho e amarelo no mapa de cores, divergindo do ocorrido para o rotor com mancais anisotrópicos, como mostrado na Tabela 1. Dessa maneira, o índice *SDI*, calculado pela Eq. (65), bem como as cores indicadas no mapa de cores, não mostram com exatidão os movimentos de precessão no rotor com trinca.

Como comentado na seção 1.4, o efeito da presença da trinca no rotor pode causar particularidades no aspecto das órbitas. Resultados simulados e experimentais encontrados na literatura demonstram que, durante a passagem por velocidades subcríticas, há formação de *loops* internos e externos nas órbitas do rotor. De acordo com Al-Shudeifat e Butcher (2011), durante a passagem por velocidades críticas em precessão direta e retrógrada esses *loops* assumem características diferentes, descritos resumidamente na Tabela 6.

Tabela 6. Formato das órbitas durante a passagem por velocidades subcríticas de um eixo com trinca.

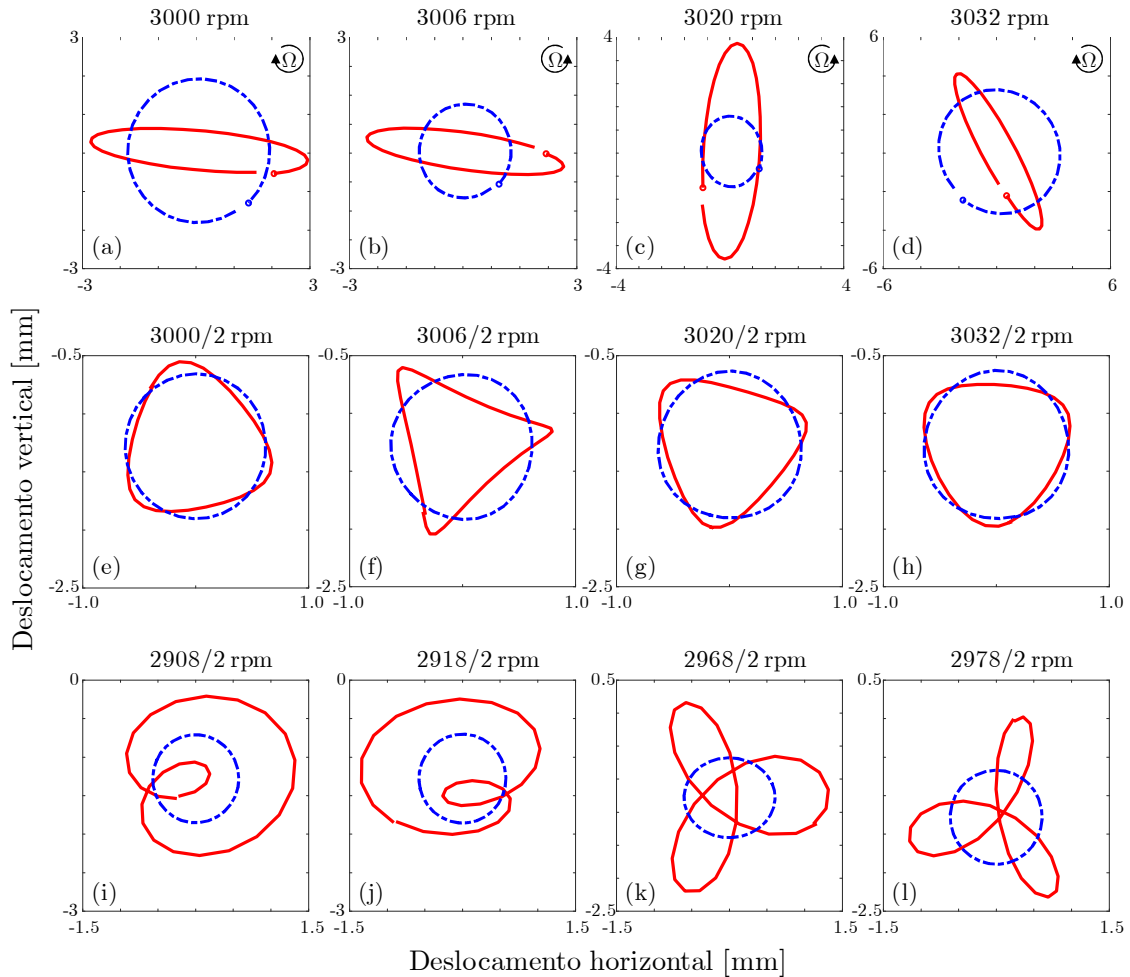
Velocidade subcrítica	Formato da órbita	
	Passagem durante a velocidade subcrítica direta	Passagem durante a velocidade subcrítica retrógrada
1/2 da primeira velocidade crítica	Formação de um <i>loop</i> interno	Formação de três <i>loops</i> externos
1/3 da primeira velocidade crítica	Formação de dois <i>loops</i> internos	Formação de quatro <i>loops</i> externos
1/4 da primeira velocidade crítica	Formação de três <i>loops</i> internos	Formação de cinco <i>loops</i> externos

Fonte: Modificado de Al-Shudeifat e Butcher (2011).

Dessa maneira, diferentemente do caso para mancais anisotrópicos, a órbita não se limita aos formatos circular, elíptico e retilíneo, apresentando um formato mais complexo devido ao comportamento não-linear da trinca. Além disso, o rotor com trinca possui um comportamento distinto durante a velocidade subcrítica direta e retrógrada, formação de *loops* internos e externos, respectivamente (AL-SHUDEIFAT, 2013; AL-SHUDEIFAT; BUTCHER, 2010, 2011; AL-SHUDEIFAT; BUTCHER; STERN, 2010).

Analisando a primeira velocidade subcrítica das velocidades mostradas na Figura 34 (metade das velocidades de 3000, 3006, 3020 e 3032 rpm) constatou-se que a formação de *loops* nas órbitas não ocorreram exatamente nessas velocidades, Figura 35(e)-(h). A formação dos *loops* foram mais evidentes em velocidades menores (metade das velocidades de 2908, 2918, 2968 e 2978 rpm) do que as encontradas na Figura 34, e também, das indicadas no mapa de cores do SDI_{Plot} , como ilustra a Figura 35(i)-(l).

Figura 35. Órbitas do rotor com trinca na passagem por (a)-(d) velocidades críticas direta e retrógrada, (e)-(l) velocidades subcríticas direta e retrógrada.

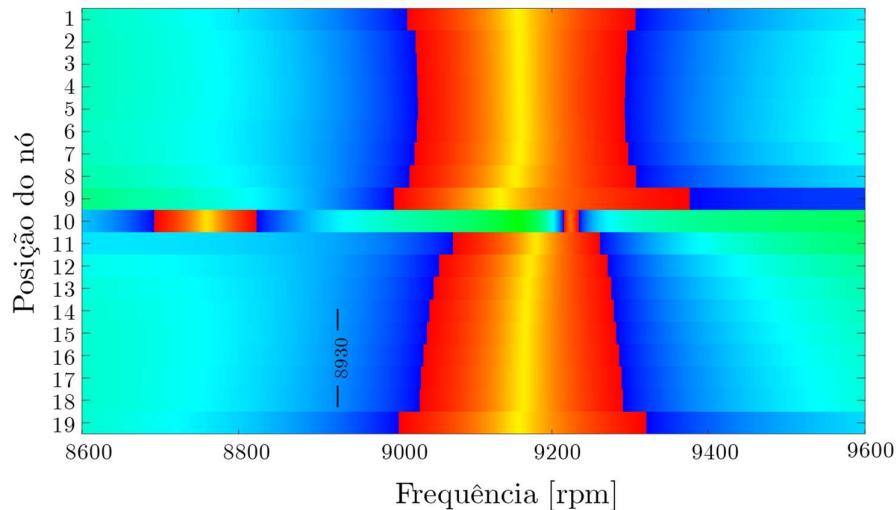


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Verificada a formação dos *loops* durante a passagem pela metade da primeira velocidade crítica de precessão direta, Figura 35(i)-(j), e retrógrada Figura 35(k)-(l), observou-se a dificuldade em relacionar os valores do índice *SDI* com a forma da órbita do rotor. Dessa maneira, a localização da região de ocorrência dos modos operacionais durante a passagem por velocidades subcríticas fica prejudicada.

Investigando-se a resposta do rotor durante um terço da segunda velocidade crítica (8930 rpm), percebeu-se a formação de dois *loops* internos ao longo do eixo, exceto para o nó 10, Figura 37. Essa característica já era esperada, de acordo com o mapa de cores da Figura 36.

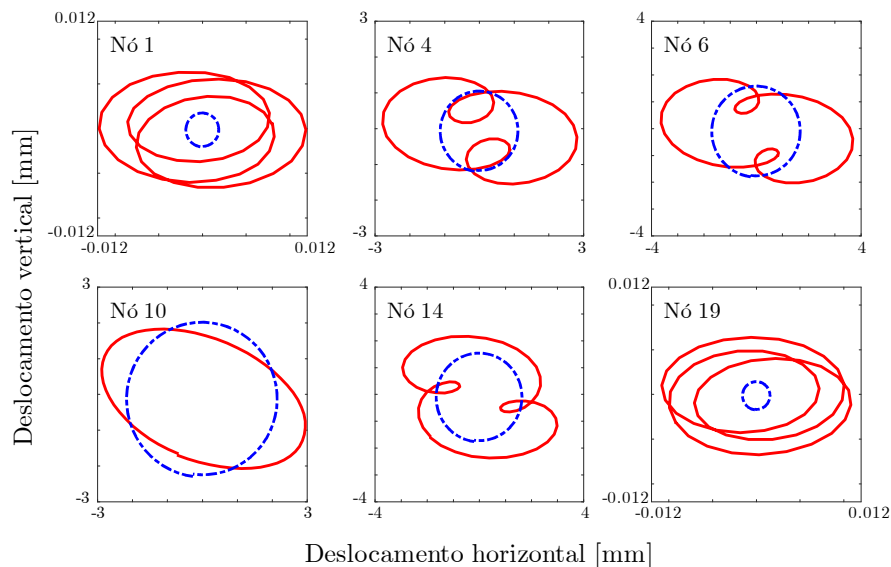
Figura 36. SDI_{Plot} na região próxima à segunda velocidade crítica do rotor.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Novamente, as cores não se enquadram na região de precessão direta e retrógrada como apresentado por Dias et al. (2004b) e Mesquita e Dias Jr. (2004), dificultando a identificação de regiões com formação de *loops* ao longo do mapa.

Figura 37. Resposta do rotor em $1/3 \times$ de 8930 rpm.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Nesse caso, não é observado a ocorrência de modos mistos, como mostrado para o caso do rotor sem trinca com mancais anisotrópicos. A anisotropia nesse caso, para velocidades subcríticas, fazem referência à formação de *loops*, e não só ao formato e direcionalidade das órbitas.

5.2 CONCEPÇÃO DE ÍNDICES MÉTRICOS PARA LOCALIZAÇÃO DE ANISOTROPIA EM EIXOS ROTATIVOS

5.2.1 Concepção do índice AII_{Plot} para localização de anisotropia

Nos sistemas anisotrópicos dos modelos da Figura 16 (rotor com mancais anisotrópicos) e Figura 30 (rotor com a presença da trinca), notou-se que o maior valor para o SDI_{Plot} se encontra nas posições do eixo que contém anisotropia (seja nas posições dos mancais anisotrópicos ou no elemento da trinca) em relação as demais posições do eixo. Este fato é válido para valores menores do que de 0.5 – representado pela cor ciano no mapa.

No entanto, a avaliação dos valores do SDI_{Plot} a cada nó para identificar a posição de maior anisotropia torna-se uma tarefa desgastante. Por isso, propõe-se a concepção de um índice, denominado de AII_{Plot} (*anisotropy identification index*), a fim de identificar de maneira simples os nós com maior e menor anisotropia. Esse índice é mostrado por um mapa de cores, cuja formulação matemática é dada por

$$AII_{Plot} = \left\{ \left[\frac{\min(SDI_{Plot}) - SDI_{Plot}}{\min(SDI_{Plot}) - \max(SDI_{Plot})} \right] \left[(HSV_{\max}) - (HSV_{\min}) \right] \right\} + HSV_{\min} \quad (109)$$

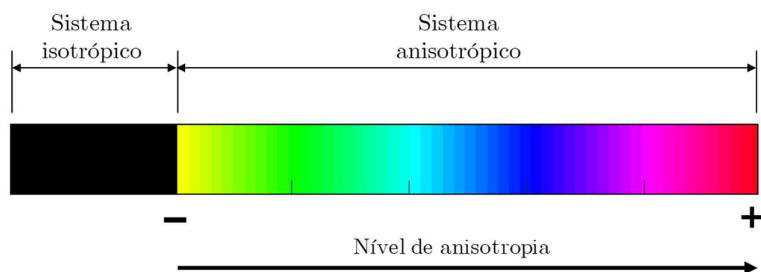
A equação (109) é ponderada de modo a facilitar a identificação de anisotropia ao longo do eixo, tais como:

- (i) nos nós que delimitam o elemento da trinca, o SDI_{Plot} apresenta o maior valor.
- (ii) pela pequena diferença entre os valores absolutos máximos e mínimos, às vezes na terceira casa decimal, a diferença de cores se daria por tonalidades muito próxima da mesma cor. Para que o valor absoluto máximo dessa diferença seja o valor unitário, divide-se pela parcela $|\min(SDI_{Plot}) - \max(SDI_{Plot})|$, que no caso de maior diferença, se iguala à $|\min(SDI_{Plot}) - SDI_{Plot}|$.
- (iii) a cor que representa o menor nível de anisotropia é dado pela tonalidade amarelo, em razão do valor 0 (zero) e 1 (um) representarem a cor vermelha no sistema HSV, dificultando a distinção de cores. Por isso, soma-se o valor de HSV_{\min} ao valor do índice.
- (iv) para um sistema isotrópico, não há diferença entre os valores do parâmetro SDI . Nesse caso, o resultado da divisão da equação (109) torna-se indefinida, e o

valor do AII_{Plot} não existe. Com isso, gera-se a cor preta, ideal para não confundir com nenhuma outra tonalidade de amarelo – cor que representa os mínimos valores de anisotropia.

A Figura 38 mostra, em uma escala, o significado das cores utilizadas neste gráfico. Esse mapa de cores possui um caráter qualitativo, variando de um nível mínimo de anisotropia (valor zero) até um nível máximo de anisotropia (valor unitário).

Figura 38. Representação do intervalo de cores para o AII_{Plot} .



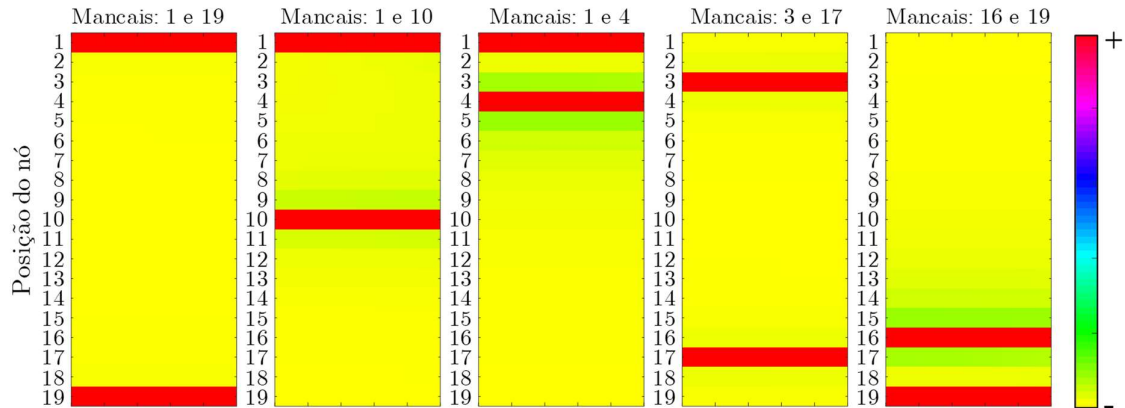
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Primeiramente, essa técnica é aplicada a um sistema onde a anisotropia se dá pela diferença das rigidezes horizontais e verticais dos mancais. O sistema utilizado é semelhante ao descrito nas Figura 30 e Tabela 5, porém, desconsiderando a trinca no eixo.

A fim de analisar a eficiência e robustez do índice, são avaliadas duas situações: havendo variação na posição dos mancais e havendo variação nos valores dos coeficientes dos mancais.

Para a primeira situação, a rigidez na direção vertical dos mancais 1 e 2 são diminuídas de $7 \times 10^7 N/m$ para $5 \times 10^7 N/m$. As posições dos mancais são então alteradas para diversas configurações. A Figura 39 mostra o êxito da localização dos mancais anisotrópicos em cinco diferentes situações. A cor vermelha indica o maior grau de anisotropia nas posições dos mancais anisotrópicos.

Figura 39. Desempenho do AII_{Plot} devido à mudança de posição dos mancais.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

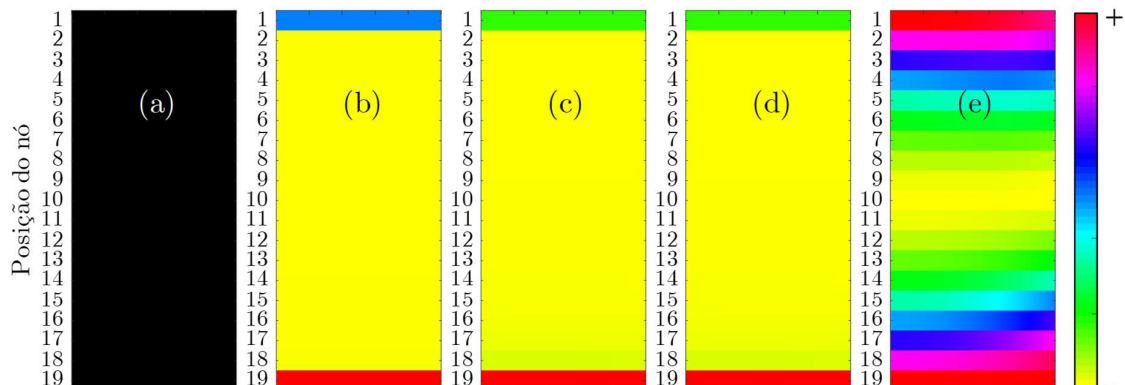
Para a segunda situação, considera-se os mancais 1 e 2 fixos nas extremidades do eixo – nós 1 e 19. A Tabela 7 descreve os casos avaliados na Figura 40.

Tabela 7. Coeficientes de rigidez [N/m] e amortecimento [Ns/m] dos mancais.

	Caso (a)	Caso (b)	Caso (c)	Caso (d)	Caso (e)
Mancal 1	$k_{xx} = 7 \times 10^7$	$k_{xx} = 6 \times 10^7$	$k_{xx} = 6 \times 10^7$	$k_{xx} = 6 \times 10^7$	$k_{xx} = 6 \times 10^3$
	$k_{zz} = 7 \times 10^7$	$k_{zz} = 7 \times 10^7$	$k_{zz} = 7 \times 10^7$	$k_{zz} = 7 \times 10^7$	$k_{zz} = 7 \times 10^3$
				$c_{xx} = 5000$	$c_{zz} = 5000$
Mancal 2	$k_{xx} = 7 \times 10^7$	$k_{xx} = 5 \times 10^7$	$k_{xx} = 1 \times 10^7$	$k_{xx} = 1 \times 10^7$	$k_{xx} = 6 \times 10^3$
	$k_{zz} = 7 \times 10^7$	$k_{zz} = 7 \times 10^7$	$k_{zz} = 7 \times 10^7$	$k_{zz} = 7 \times 10^7$	$k_{zz} = 7 \times 10^3$
				$c_{xx} = 5000$	$c_{zz} = 5000$

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 40. Sensibilidade do AII_{Plot} devido à mudança de rigidez dos mancais.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Como já comentado, não havendo anisotropia, o AII_{plot} fornece a coloração preta no mapa de cores. Desse modo, não há ambiguidade com alguma tonalidade do amarelo, eliminando a situação de um falso positivo, Figura 40(a).

Na Figura 40(b), o índice AII_{plot} identifica as perdas de rigidez nos mancais, e observa-se que a maior diferença entre as rigidezes se encontra no mancal 2. Na Figura 40(c), como há um aumento na anisotropia, a relação entre os parâmetros apresenta um maior intervalo na escala de cores.

Na Figura 40(d), observa-se que o amortecimento não influencia na localização de anisotropia. Na Figura 40(e) a ordem dos coeficientes de rigidez foi diminuída, de modo que a rigidez do eixo fosse consideravelmente maior que a dos mancais. Esse caso confere ao sistema um comportamento de corpo rígido, podendo ser confirmado pelo diagrama de rigidezes na Figura 31(a), influenciando diretamente na resposta, e, conseqüentemente, nos valores do SDI . Embora seja possível localizar a perda de rigidez nos mancais 1 e 2, esse efeito possui considerável influência nos demais nós.

5.2.2 Concepção do índice $AII3D$ para localização de anisotropia

O parâmetro AII_{plot} também pode ser utilizado para localização da trinca, já que o responsável pela anisotropia é o próprio elemento finito com a trinca. No entanto, para a localização da anisotropia causada pela trinca, propõe-se um segundo índice, denominado de $AII3D$, gerando um novo mapa de cores. Esse parâmetro se dá pela ordenação dos nós conforme seus respectivos graus de anisotropia. O pseudocódigo utilizado para a criação do parâmetro $AII3D$ é mostrado na Figura 41.

Figura 41. Pseudocódigo do parâmetro $AII3D$ para localização de trincas.

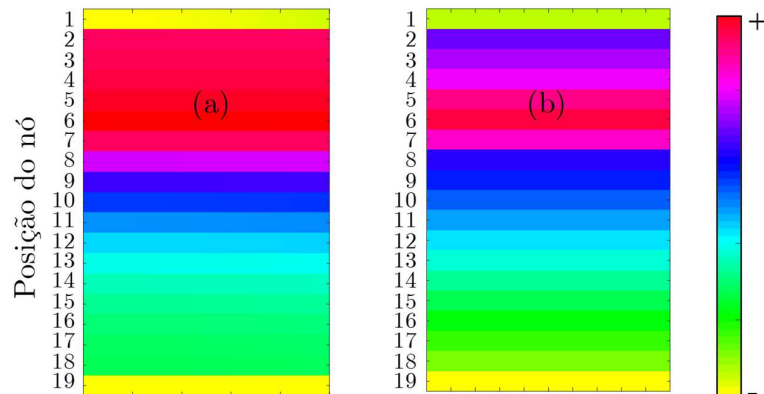
```
[vet, pos] = sort(SDIplot)
//Comentário: num_nos representa o número de nós do modelo em Elementos Finitos
para i = 1 até num_nos
    AII3(i,1) = i * ( (HSVmax - HSVmin) / num_nos ) + HSVmin - ( (HSVmax - HSVmin) / num_nos );
    AII3D(pos(i),1) = AII3(i);
fim
```

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A distinção do mapa de cores gerado pelo AII_{3D} , em relação ao gerado pelo índice AII_{Plot} , se dá pelo incremento constante na tonalidade da cor conforme a mudança do grau de anisotropia, ou seja, cada variação do grau de anisotropia é quantificada por um incremento fixo. A diferença dos mapas de cores na localização da trinca posicionada no sexto elemento é mostrada na Figura 42..

O parâmetro AII_{3D} não considera a real diferença os nós para os valores do SDI , tendo um caráter unicamente qualitativo. Porém, atentando-se apenas à localização da anisotropia, este será utilizado nas análises das seções 5.2.2.1 e 5.2.2.2 por apresentar uma melhor distinção das cores. As mesmas características e conclusões podem ser feitas para a localização pelo AII_{Plot} .

Figura 42. Diferença entre os mapas de cores. (a) AII_{Plot} . (b) AII_{3D} .

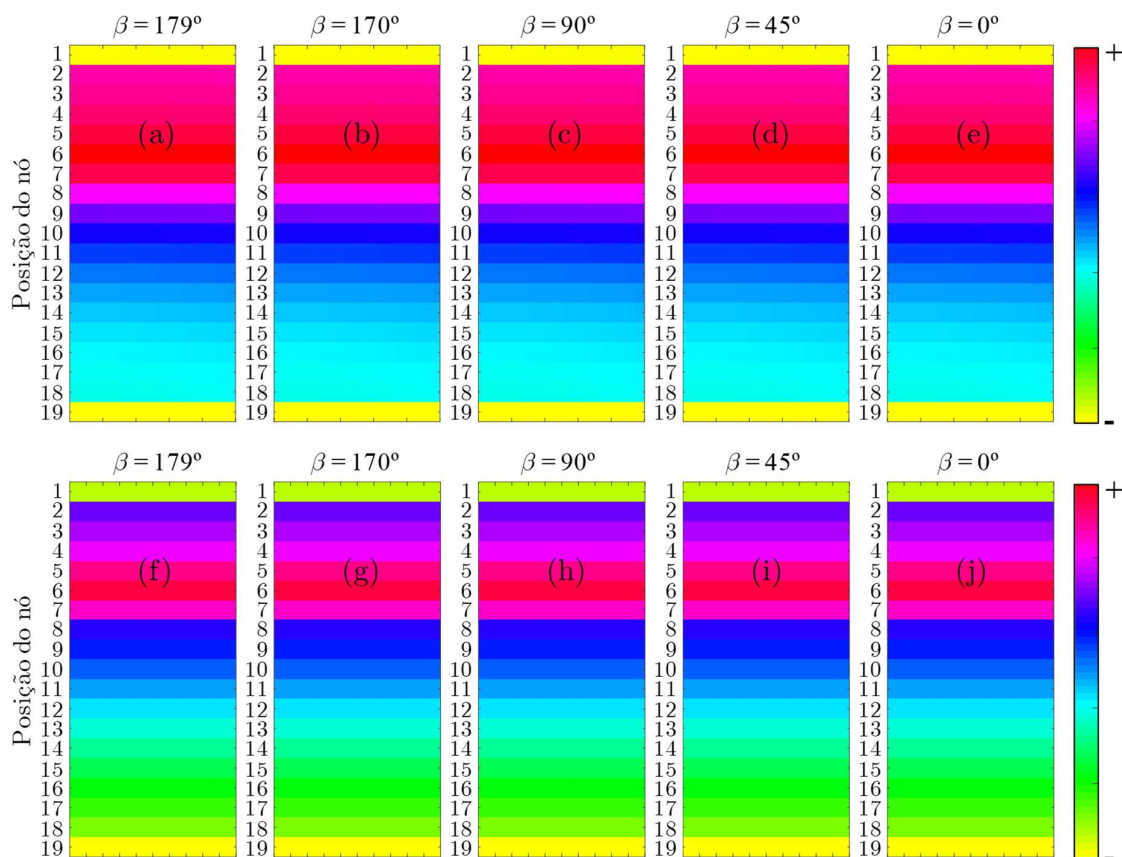


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Como já mostrado na Figura 32, dependendo da abertura da trinca, diferentes graus de anisotropia são considerados no sistema, e, conseqüentemente, diferentes valores do SDI são calculados.

A Figura 43 ilustra que não há diferença no desempenho dos índices de localização para diferentes aberturas da trinca, desde praticamente fechada, Figura 43(a) e (f), até totalmente aberta, Figura 43(e) e (j). Esse comportamento garante a localização da trinca mesmo para pequenos graus de anisotropia

Figura 43. Localização da trinca para diferentes ângulos de abertura. (a) AII_{Plot} .
(b) AII_{3D} .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Embora o parâmetro AII_{3D} não leve em consideração a discrepância real entre os nós para os valores do SDI , tendo um caráter unicamente qualitativo, este será utilizado nas análises das seções 5.2.2.1 e 5.2.2.2 por diferenciar melhor a anisotropia. No entanto, as mesmas características e conclusões podem ser feitas para a localização pelo AII_{Plot} .

Nas análises a seguir, deve-se atentar que a trinca é posicionada no centro do elemento finito. Este, por sua vez, fica delimitado por dois nós consecutivos, por exemplo, o elemento 1 terá os nós 1 e 2 em suas extremidades. Desse modo, a localização da trinca deve levar em consideração a análise dos nós consecutivos do elemento finito com a trinca.

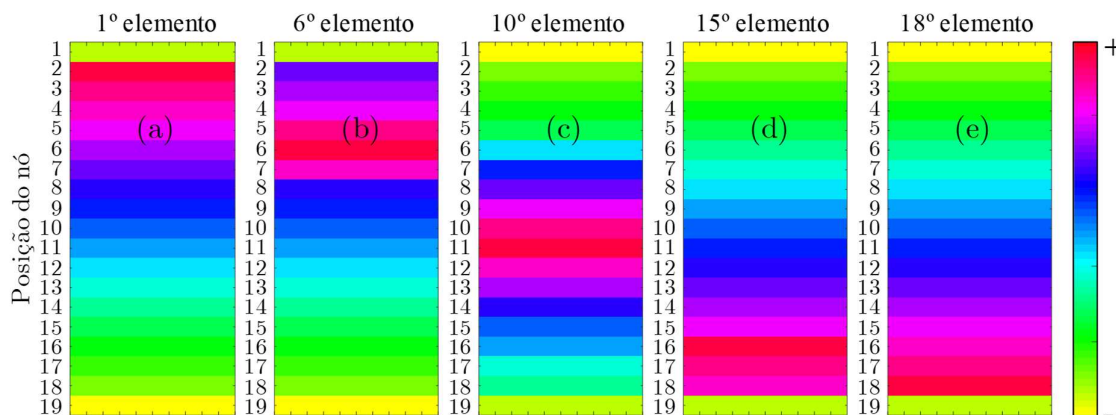
As análises a seguir utilizam o sistema mostrado na Figura 30, com algumas variações descritas caso a caso.

5.2.2.1 Localização de uma única trinca pelo índice $AII3D$

A primeira análise investiga a eficiência do $AII3D$ em localizar o elemento da trinca em diferentes posições no eixo. Para esse caso, considera-se a rotação do eixo em 20 rpm – embora, deva-se destacar, que a velocidade de rotação não interfere nos resultados obtidos – e a profundidade da trinca de 30%.

Percebe-se que, quando a trinca é inserida nos elementos 1 e 18, o grau de anisotropia sofre uma atenuação nos nós dos mancais, Figura 44(a) e Figura 44(e). Esse fato é devido a rigidez adicional do mancal limitar a vibração naquele nó. Apesar disso, a localização da anisotropia é visível no mapa de cores. Nas demais posições, distantes dos mancais, o efeito da trinca na vibração se distribui de maneira mais uniforme pelo eixo, como ilustra a Figura 44(b) até a Figura 44(d).

Figura 44. Desempenho do $AII3D$ devido à mudança do elemento de trinca.

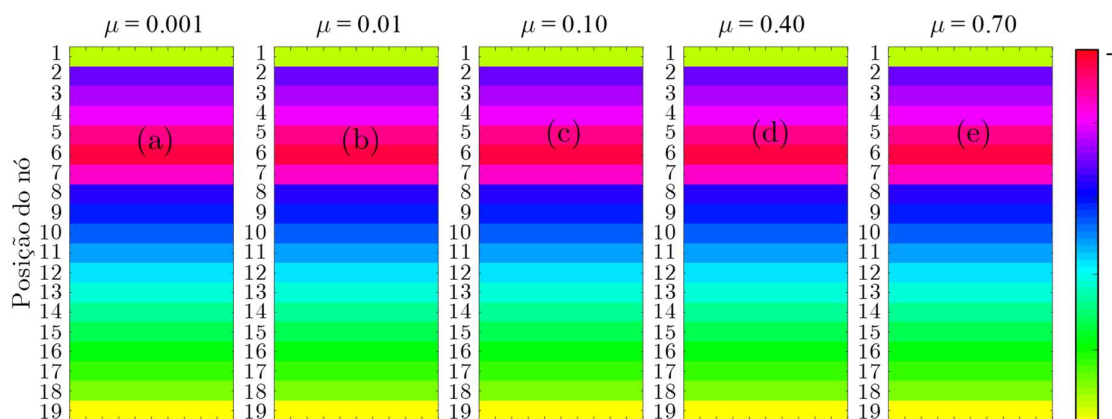


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Para a segunda análise, fixa-se a posição da trinca no sexto elemento e investiga-se o desempenho do $AII3D$ para diferentes profundidades da trinca. Sabe-se da literatura que, quanto menor a profundidade da trinca, menor é sua influência no comportamento não-linear do rotor, dificultando a identificação e localização de sua presença (AL-SHUDEIFAT, 2013; AL-SHUDEIFAT; BUTCHER; STERN, 2010; SINOUE, 2008; SINOUE; LEES, 2007).

Por meio da Figura 54, nota-se que a profundidade da trinca não altera a eficiência da localização pelo $AII3D$. Esse fato é devido ao parâmetro ser normalizado em relação aos valores máximos e mínimos do SDI_{Plot} , como explicado no item 5.2.1, garantindo a localização da trinca, mesmo para pequenas profundidades.

Figura 45. Desempenho do *AII3D* devido à mudança da profundidade da trinca.



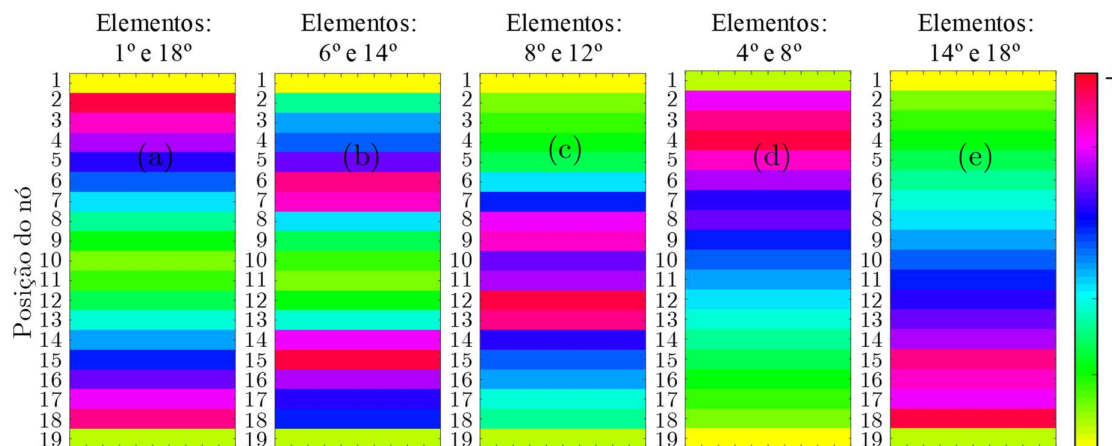
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

5.2.2.2 Localização de múltiplas trincas pelo índice *AII3D*

A primeira análise desse item é investigar se o *AII3D* é capaz de localizar múltiplas trincas – nesse caso são utilizadas duas trincas. Considera-se a rotação do eixo em 20 rpm e a profundidade da trinca fixa em 10%.

A Figura 46 mostra a localização das duas trincas quando essas possuem a mesma profundidade para diferentes posições dos elementos. Percebe-se na Figura 46(a) e Figura 46(e) o êxito da localização dos nós consecutivos aos elementos da trinca, porém, com a mesma característica de atenuação no grau de anisotropia nos nós dos mancais, vistos na Figura 44. Essa habilidade pode ser conferida tanto para o rotor simétrico, Figura 46(b)-(c), quanto assimétrico, Figura 46(d)-(e).

Figura 46. Localização de múltiplas trincas com a mesma profundidade pelo *AII3D*.

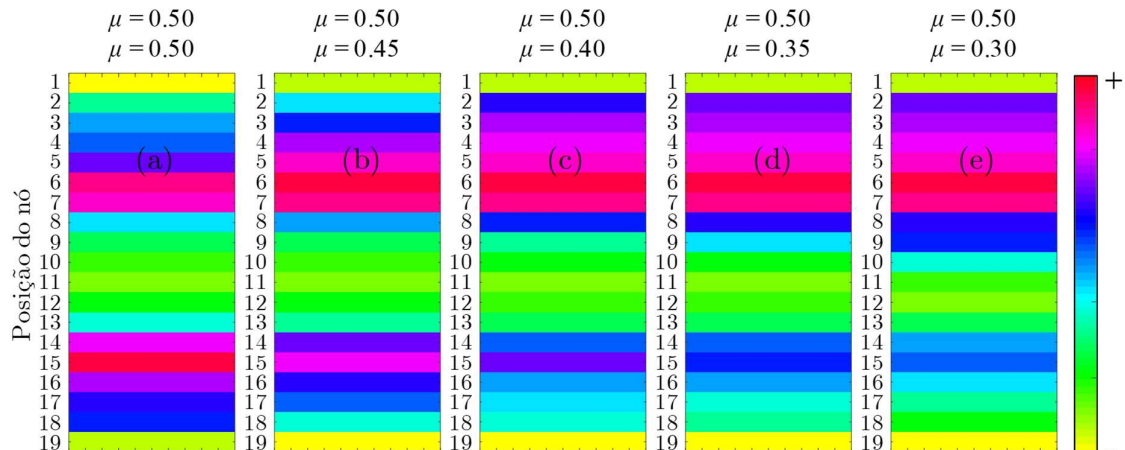


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A Figura 47 analisa o $AI/3D$ quando as trincas possuem diferentes profundidades. As duas trincas são fixadas nos elementos 6 e 14. A profundidade da trinca do elemento 6 permanece constante em 50%, enquanto varia-se a profundidade da trinca posicionada no 14 elemento. A Figura 47(a) mostra que, mesmo para a mesma profundidade, o grau de anisotropia do elemento 14 foi maior, sendo seguido pelo elemento 6. Esse fato pode ser explicado pela maior amplitude ser observada no elemento 14.

Como esperado, diminuindo a profundidade do elemento 14, o grau de anisotropia também diminui, sendo percebido pela mudança de cores. Nesse caso, nós próximos ao elemento da trinca com maior profundidade possuem maior influência no grau de anisotropia – consequentemente na resposta do rotor – do que outra trinca com menor profundidade.

Figura 47. Localização de múltiplas trincas com profundidades diferentes pelo $AI/3D$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

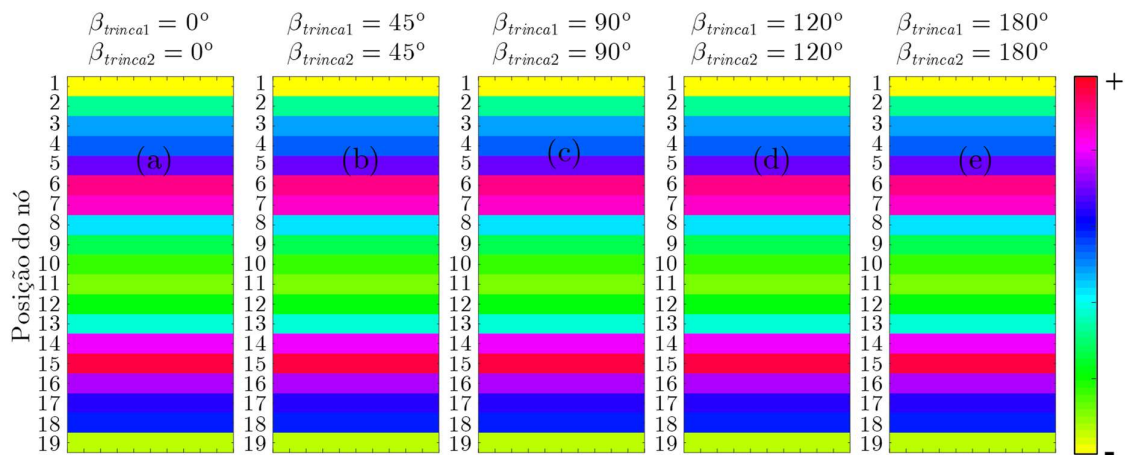
A segunda análise desse item é investigar se o ângulo da massa de desbalanceamento em relação à direção da trinca influencia no grau de anisotropia calculado pelo parâmetro $AI/3D$, influenciando na localização das trincas.

O ângulo 0° é considerado quando a trinca se encontra totalmente aberta, $t = 0$, de acordo com o capítulo 4, sendo esse, o mesmo referencial para a posição da massa de desbalanceamento. Dessa maneira, para o ângulo de desbalanceamento de 0° a posição totalmente aberta da trinca possui a mesma direção da massa desbalanceada, enquanto que para o ângulo de desbalanceamento de 180° , a posição

totalmente aberta da trinca se encontra na direção oposta da localização da massa desbalanceada.

Com base na Figura 48, verifica-se que o ângulo da massa de desbalanceamento em relação à direção da trinca não possui influência no desempenho do índice $AIBD$. Nessa situação, considera-se que as duas trincas posicionadas nos elementos 4 e 16, possuem a mesma direção e mesma profundidade de 30%.

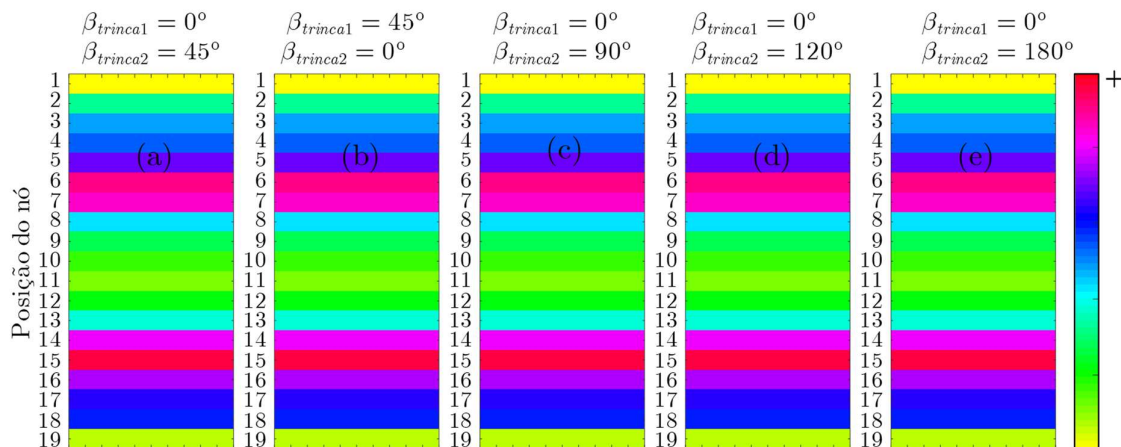
Figura 48. Influência da direção da trinca em relação ao ângulo da massa de desbalanceamento no desempenho do índice $AIBD$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Por fim, o ângulo da massa de desbalanceamento é mantido fixo em 0° , e varia-se apenas a direção entre as trincas, Figura 49.

Figura 49. Influência da direção entre as trincas no desempenho do índice $AIBD$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Com essa análise percebe-se a direção entre as trincas não possui influência na localização das mesmas. Nesse caso, a direção das trincas, $\beta_{trinca1}$ e $\beta_{trinca2}$, é somado ao termo da velocidade de rotação Ω nas equações (97)-(98).

6 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Nesse trabalho, as informações do SDI foram utilizadas com dois propósitos: primeiro, se o mapa de cores, SDI_{plot} , é aplicável na identificação dos modos operacionais para um rotor com trinca em velocidades críticas e subcríticas de rotação, e, segundo, a concepção de um índice de localização de anisotropia, possibilitando a localização de trincas ao longo do eixo.

A primeira análise mostrou a ocorrência de modos operacionais diretos e retrógrados próximos à primeira frequência natural. Na passagem pela primeira velocidade crítica percebeu-se o formato circular e elipsoidal nas órbitas e a mudanças na direcionalidade. Na passagem pela primeira velocidade subcrítica direta e retrógrada notou-se a formação de *loops* internos e externos, respectivamente, como já constatado na literatura. No entanto, as cores indicativas das regiões de precessão direta e retrógrada não corresponderam aos sinais de vibração encontrados nos resultados simulados.

A segunda análise mostrou que o valor do SDI é maior nas posições com anisotropia. Com isso, as informações geradas pelo SDI podem auxiliar na localização de anisotropia causadas tanto por mancais anisotrópicos quanto pelo elemento de trinca ao longo do eixo. Essa segunda aplicação é devido a trinca diminuir a rigidez do eixo em apenas uma direção, tornando o rotor anisotrópico. Os valores do SDI foram manipulados para a concepção de dois índices, AII_{plot} e $AII3D$, mostrados em um mapa de cores, que facilitam a visualização do elemento anisotrópico. O primeiro índice relaciona a tonalidade da cor de acordo com o grau de anisotropia de cada nó, enquanto, o segundo relaciona a tonalidade da cor com a variação do grau de anisotropia através de um incremento fixo. Verificou-se que: mesmo para pequenas profundidades o índice é capaz de localizar a trinca, o ângulo da trinca em relação à massa de desbalanceamento não interfere na localização, e o índice é capaz de localizar mais de uma trinca ao longo do eixo. Tais conclusões foram observadas para os dois índices.

Sendo assim, a investigação do comportamento do SDI em rotores anisotrópicos devido à presença da trinca necessitam de uma investigação mais profunda sobre a ocorrência das regiões de precessão direta e retrógrada. Essa determinação das regiões de formação de *loops* internos e externos poderão auxiliar as técnicas de detecção por análise de órbitas. A concepção dos índices de localização de

anisotropia contribui com mais uma alternativa para os métodos de localização de trincas em eixos rotativos, que como falado, seguem em contínua evolução.

Relacionados com a pesquisa desenvolvida neste trabalho, são citados algumas sugestões de trabalhos futuros:

- a) realizar mais testes investigando a relação do *SDI* com as velocidades subcríticas do rotor, já que a identificação de *loops* nas órbitas são um importante indicativo para a presença de trincas. Para isso, outros métodos de solução podem ser utilizados para o cálculo da resposta do rotor com trinca.
- b) testar os índices de localização para sistemas de ordem reduzidas, nos quais as matrizes de massa, rigidez e amortecimento são desconfiguradas de sua forma original.
- c) aplicar os índices de localização em modelos matemáticos construídos a partir da técnica de identificação de sistema, ou seja, verificar a aplicabilidade dos índices em modelos matemáticos construídos a partir de dados experimentais em rotores com trinca.

REFERÊNCIAS

AL-SHUDEIFAT, M. A. On the finite element modeling of the asymmetric cracked rotor. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 332, n. 11, p. 2795–2807, 2013.

AL-SHUDEIFAT, M. A.; BUTCHER, E. A. On the modeling of open and breathing cracks of a cracked rotor system. In: ASME 2010 INTERNATIONAL DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES AND COMPUTERS AND INFORMATION IN ENGINEERING CONFERENCE. **Proceedings of the [...]** [S.l]: American Society of Mechanical Engineers, 2010.

AL-SHUDEIFAT, M. A.; BUTCHER, E. A. New breathing functions for the transverse breathing crack of the cracked rotor system: Approach for critical and subcritical harmonic analysis. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 330, n. 3, p. 526–544, 2011.

AL-SHUDEIFAT, M. A.; BUTCHER, E. A.; STERN, C. R. General harmonic balance solution of a cracked rotor-bearing-disk system for harmonic and sub-harmonic analysis: Analytical and experimental approach. **International Journal of Engineering Science**, Philadelphia, v. 48, n. 10, p. 921–935, out. 2010.

ALVES, D. R. **Avaliação dos modelos de cores RGB e HSV na segmentação de curvas de nível em cartas topográficas coloridas**. 2010. 65 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010. Disponível em:
http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EngEletrica_AlvesDR_1.pdf. Acesso em: 19 fev. 2019.

BACHSCHMID, N.; PENNACCHI, P.; TANZI, E. **Cracked rotors**. Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010a.

BACHSCHMID, N.; PENNACCHI, P.; TANZI, E. A sensitivity analysis of vibrations in cracked turbogenerator units versus crack position and depth.

Mechanical Systems and Signal Processing, London, v. 24, n. 3, p. 844–859, abr. 2010b.

BACHSCHMID, N.; PENNACCHI, P.; VANIA, A. Diagnostic significance of orbit shape analysis and its application to improve machine fault detection. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Heidelberg, v. 26, n. 2, p. 200–208, jun. 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/jbsmse/v26n2/21055.pdf>. Acesso em: 19 fev. 2019.

BENTLHY, D. E.; HATCH, C. T. **Fundamentals of rotating machinery diagnostics**. Minden: Bently Pressurized Bearing Press, 2002.

BESSELINK, B. et al. A comparison of model reduction techniques from structural dynamics, numerical mathematics and systems and control. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 332, n. 19, p. 4403–4422, set. 2013.

BUCHER, I.; EWINS, D. J. Modal Analysis and Testing of Rotating Structures. **Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, London, v. 359, n. 1778, p. 61–96, 2001.

BUSS, S. R. **3-D computer graphics: a mathematical introduction with OpenGL**. San Diego: Cambridge University Press, 2003.

CAVALINI JR, A. A. **Deteção e identificação de trincas transversais incipientes em eixos horizontais flexíveis de máquinas rotativas**. 2013. 135 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2013. Disponível em: [https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/14730/1/DeteccaoIdentificacaoTrinca parte1.pdf](https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/14730/1/DeteccaoIdentificacaoTrinca%20parte1.pdf). Acesso em 19 fev. 2019.

CAVALINI JR, A. A. et al. Crack identification for rotating machines based on a nonlinear approach. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 79, p. 72–85, out. 2016.

CHEN, W. J. A Note on Computational Rotor Dynamics. **Journal of Vibration and Acoustics**, London, v. 120, n. 1, p. 228, 1998.

COLOR Models: RGB, HSV, HSL. In: WIKIBOOKS: Open books for an open world. Disponível em: https://en.wikibooks.org/wiki/Color_Models:_RGB,_HSV,_HSL. Acesso em: 30 out. 2018.

CZAJKOWSKI, M.; BARTOSZEWICZ, B.; KULESZA, Z. Modal analysis of a rotor with a cracked shaft. **Journal of Vibroengineering**, Kaunas, v. 19, n. 1, p. 150–159, 15 fev. 2017.

DARPE, A. K.; GUPTA, K.; CHAWLA, A. Experimental investigations of the response of a cracked rotor to periodic axial excitation. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 260, n. 2, p. 265–286, 2003.

DARPE, A. K.; GUPTA, K.; CHAWLA, A. Dynamics of a bowed rotor with a transverse surface crack. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 296, n. 4–5, p. 888–907, out. 2006.

DAVIES, W. G. R.; MAYES, I. W. The vibrational behavior of a multi-shaft, multi-bearing system in the presence of a propagating transverse crack. **Journal of vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design**, New York, v. 106, n. 1, p. 146–153, 1984.

DIAS JR, M.; ALLEMANG, R. J. some insights into the simultaneous forward and backward whirling of rotors. In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 19, 2001, San Antonio. **Proceedings of the [...]** San Antonio: [S.n], 2001.

DIAS, M. et al. On the application of directional time-frequency distributions to the identification of simultaneous forward and backward whirling in flexible rotors. **Australian Journal of Mechanical Engineering**, Melbourne, v. 1, n. 2, p. 103–112, jan. 2004a.

DIAS, M. et al. On the simultaneous forward and backward whirling in flexible rotors: numerical analysis and experimental verification. **Australian Journal of Mechanical Engineering**, Melbourne, v. 1, n. 2, p. 113–122, jan. 2004b.

DIAS JR, M. D.; ALLEMANG, R. J. Some insights into the simultaneous forward and backward whirling of rotors. In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 19, 2001, Orlando. **Proceedings of the [...]**. Orlando: [S.n.], 2001. p. 7. Disponível em:
<https://pdfs.semanticscholar.org/8e6e/1e7423bc11b09f222aefcda3e0b5d27ce52f.pdf>.
 Acesso em: 25 fev. 2019.

DUMITRU, N.; SECARÁ, E.; MIHÁLCICÁ, M. Study of rotor-bearing systems using campbell diagram. In: PROCEEDINGS OF THE 1ST INTERNATIONAL CONFERENCE ON MANUFACTURING ENGINEERING, QUALITY AND PRODUCTION SYSTEMS. **Proceedings of the [...]**. 2009. Disponível em:
https://www.researchgate.net/publication/266298337_Study_of_Rotor-Bearing_Systems_Using_Campbell_Diagram/download. Acesso em: 25 fev. 2019.

GASCH, R. A Survey Of The Dynamic Behaviour Of A Simple Rotating Shaft With A Transverse Crack. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 160, n. 2, p. 313–332, 15 jan. 1993.

GAWRONSKI, W. K. **Advanced structural dynamics and active control of structures**. New York: Springer-Verlag, 2004.

GUO, C.; YAN, J.; YANG, W. Crack detection for a Jeffcott rotor with a transverse crack: An experimental investigation. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 83, p. 260–271, jan. 2017a.

GUO, C.; YAN, J.; YANG, W. Crack detection for a Jeffcott rotor with a transverse crack: An experimental investigation. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 83, p. 260–271, jan. 2017b.

HAN, Y.-S.; LEE, C.-W. Directional wigner distribution for order analysis in rotating/reciprocating machines. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 13, n. 5, p. 723–737, set. 1999.

ISHIDA, Y.; INOUE, T. Detection of a rotor crack based on the nonlinear vibration diagnosis using periodic excitation. In: BIENNIAL CONFERENCE ON MECHANICAL VIBRATION AND NOISE, PARTS A, B, AND C, INTERNATIONAL DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES AND COMPUTERS AND INFORMATION IN ENGINEERING CONFERENCE, 20, 2005, Long Beach. **Conference of the [...]** Long Beach: ASME 2005.

ISHIDA, Y.; YAMAMOTO, T. **Linear and nonlinear rotordynamics**: a modern treatment with applications. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2012.

JUN, O. S.; GADALA, M. S. Dynamic behavior analysis of cracked rotor. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 309, n. 1–2, p. 210–245, jan. 2008.

KAN, M. S.; TAN, A. C. C.; MATHEW, J. A review on prognostic techniques for non-stationary and non-linear rotating systems. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 62–63, p. 1–20, out. 2015.

KESSLER, C.; KIM, J. Complex modal analysis and interpretation for rotating machinery. In: PROCEEDINGS OF SPIE - THE INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICAL ENGINEERING. 1998. Proceedings of the [...]. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/253590481_Complex_Modal_Analysis_and_Interpretation_for_Rotating_Machinery/download. Acesso em: 19 fev. 2019.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics prediction in engineering**. 2nd Edition ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 1998.

LEADER, M. E. A practical guide to rotor dynamics. In: ANNUAL MEETING - VIBRATION ILLINOIS, 26, 2002, Pittsburgh. **Proceedings of the [...]**. Pittsburgh: Vibration Institute, 2002

LEE, C.-W. A complex modal testing theory for rotating machinery. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 5, n. 2, p. 119–137, 1991.

LEE, C.-W.; JOH, Y.-D. Theory of excitation methods and estimation of frequency response functions in complex modal testing of rotating machinery. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 7, n. 1, p. 57–74, jan. 1993.

MANI, G.; QUINN, D. D.; KASARDA, M. Active health monitoring in a rotating cracked shaft using active magnetic bearings as force actuators. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 294, n. 3, p. 454–465, jun. 2006.

MAYES, I. W.; DAVIES, W. G. R. Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor. **Journal Of Vibration, Acoustics, Stress, And Reliability In Design**, New York, v. 106, n. 1, p. 139–145, 1984.

MESQUITA, A. L. A.; DIAS JR, M. **Identificação de modos operacionais e naturais de vibração em máquinas rotativas utilizando coordenadas complexas**. 2004. 153 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

MESQUITA, A. L. A.; JR, M. D.; MIRANDA, U. A. A comparison between the traditional frequency response function (FRF) and the directional frequency response function dFRF in rotordynamic analysis. **Mecânica Computacional**, v. 21, p. 2227–2246, 2002.

MOBIUS INSTITUTE. **Vibration analysis - orbit plots-centerline diagram - Mobius Institute**. Disponível em:

https://www.youtube.com/watch?v=wXtOYtI_qqw&t=360s. Acesso em: 5 nov. 2018

MOGENIER, G. et al. The problem of complex shape tracking in a Campbell Diagram or how to overcome crossing/veering phenomena. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON VIBRATIONS IN ROTATING MACHINERY, 10, 2012, London. **Proceedings of the [...]**. London: Elsevier, 2012. p. 257–267.

- MUSZYNSKA, A. Vibrational diagnostics of rotating machinery malfunctions. **International Journal of Rotating Machinery**, New York, v. 1, n. 3–4, p. 237–266, 1995.
- MUSZYNSKA, A. **Rotordynamics**. Nevada: CRC Press, 2005.
- PAPADOPOULOS, C. A. The strain energy release approach for modeling cracks in rotors: A state of the art review. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 22, n. 4, p. 763–789, maio 2008.
- PATEL, T. H.; DARPE, A. K. Influence of crack breathing model on nonlinear dynamics of a cracked rotor. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 311, n. 3–5, p. 953–972, abr. 2008.
- PILKEY, W. D. **Analysis and design of elastic beams: computational methods**. New York: Wiley, 2002.
- SAAVEDRA, P. N.; CUITIÑO, L. A. Vibration analysis of rotor for crack identification. **Modal Analysis**, Bethel, v. 8, n. 1, p. 51–67, jan. 2002.
- SABNAVIS, G. et al. Cracked shaft detection and diagnostics: a literature review. **The Shock and Vibration Digest**, Thousand Oaks, v. 36, n. 4, p. 287–296, jul. 2004a.
- SALAWU, O. S. Detection of structural damage through changes in frequency: a review. **Engineering Structures**, Kidlington, v. 19, n. 9, p. 718–723, 1997.
- SAWICKI, J. T. et al. Detecting cracked rotors using auxiliary harmonic excitation. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 330, n. 7, p. 1365–1381, mar. 2011.
- SHRAVANKUMAR, C.; TIWARI, R. Detection of a fatigue crack in a rotor system using full-spectrum based estimation. **Sadhana**, Bangalore, v. 41, n. 2, p. 239–251, fev. 2016.

SINOUE, J.-J. Detection of cracks in rotor based on the $2\times$ and $3\times$ super-harmonic frequency components and the crack–unbalance interactions. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Amsterdam, v. 13, n. 9, p. 2024–2040, nov. 2008.

SINOUE, J.-J.; LEES, A. W. The influence of cracks in rotating shafts. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 285, n. 4–5, p. 1015–1037, 2005.

SINOUE, J.-J.; LEES, A. W. A non-linear study of a cracked rotor. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, Issy Les Moulineaux, v. 26, n. 1, p. 152–170, jan. 2007.

SWANSON, E. et al. A practical review of rotating machinery critical speeds and modes. **Sound and Vibration**, London, v. 39, n. 5, p. 10 - 17, 2005. Disponível em: <http://sandv.com/downloads/0505swan.pdf>. Acesso em: 19 fev. 2019.

TIWARI, R.; CHANDRASEKARAN, S. Model-based crack identification using full-spectrum. In: ASME 2013 GAS TURBINE INDIA CONFERENCE GAS TURBINE INDIA CONFERENCE, 2013, Bangalore. **Proceedings of the [...]**. Bangalore: ASME, 2013. p. 8.

YOON, S. Y.; LIN, Z.; ALLAIRE, P. E. Introduction to rotor dynamics. In: YOON, S. Y.; LIN, Z.; ALLAIRE, P. E. (Ed). **Control of surge in centrifugal compressors by active magnetic bearings**. London: Springer London, 2013a. p. 17–55.

YOON, S. Y.; LIN, Z.; ALLAIRE, P. E. **Control of surge in centrifugal compressors by active magnetic bearings**. London: Springer London, 2013b.

ZHOU, T. et al. Experimental analysis of cracked rotor. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, New York, v. 127, n. 3, p. 313, 2005.

APÊNDICE

Nesse apêndice, são apresentadas a matriz clássica de massa, \mathbf{M}_e , a matriz de massa devido à influência rotacional da seção transversal, \mathbf{M}_e^s , a matriz de efeito giroscópico, \mathbf{G}_e , e matriz clássica de rigidez, \mathbf{K}_e , para o elemento finito do eixo citadas no Capítulo 2, através da modelagem utilizada por Ishida e Yamamoto (2012).

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho_e S_e L_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L_e & 54 & 0 & 0 & 13L_e \\ 0 & 156 & 22L_e & 0 & 0 & 54 & -13L_e & 0 \\ 0 & 22L_e & 4L_e^2 & 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & 0 \\ -22L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 & -13L_e & 0 & 0 & -3L_e^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L_e & 156 & 0 & 0 & 22L_e \\ 0 & 54 & 13L_e & 0 & 0 & 156 & -22L_e & 0 \\ 0 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 & -22L_e & 4L_e^2 & 0 \\ 13L_e & 0 & 0 & -3L_e^2 & 22L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_e^s = \frac{\rho_e I_e}{30L_e} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L_e & -36 & 0 & 0 & -3L_e \\ 0 & 36 & 3L_e & 0 & 0 & -36 & 3L_e & 0 \\ 0 & 3L_e & 4L_e^2 & 0 & 0 & -3L_e & -L_e^2 & 0 \\ -3L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 & 3L_e & 0 & 0 & -L_e^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L_e & 36 & 0 & 0 & 3L_e \\ 0 & -36 & -3L_e & 0 & 0 & 36 & -3L_e & 0 \\ 0 & 3L_e & -L_e^2 & 0 & 0 & -3L_e & 4L_e^2 & 0 \\ -3L_e & 0 & 0 & -L_e^2 & 3L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_e = \frac{\rho_e I_e}{15L_e} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L_e & 0 & 0 & 36 & -3L_e & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L_e & -36 & 0 & 0 & -3L_e \\ 3L_e & 0 & 0 & -4L_e^2 & -3L_e & 0 & 0 & L_e^2 \\ 0 & 3L_e & 4L_e^2 & 0 & 0 & -3L_e & -L_e^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L_e & 0 & 0 & -36 & 3L_e & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L_e & 36 & 0 & 0 & 3L_e \\ 3L_e & 0 & 0 & L_e^2 & -3L_e & 0 & 0 & -4L_e^2 \\ 0 & 3L_e & -L_e^2 & 0 & 0 & -3L_e & 4L_e^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI_e}{(1+a)L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L_e & -12 & 0 & 0 & -6L_e \\ 0 & 12 & 6L_e & 0 & 0 & -12 & 6L_e & 0 \\ 0 & 6L_e & (4+a)L_e^2 & 0 & 0 & -6L_e^2 & (2-a)L_e^2 & 0 \\ -6L_e & 0 & 0 & (4+a)L_e^2 & 6L_e & 0 & 0 & (2-a)L_e^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L_e & 12 & 0 & 0 & 6L_e \\ 0 & -12 & -6L_e & 0 & 0 & 12 & -6L_e & 0 \\ 0 & 6L_e & (2-a)L_e^2 & 0 & 0 & -6L_e & (4+a)L_e^2 & 0 \\ -6L_e & 0 & 0 & (2-a)L_e^2 & 6L_e & 0 & 0 & (4+a)L_e^2 \end{bmatrix}$$

sendo a o efeito de cisalhamento, dado por

$$a = \frac{24I_e(1+\nu_e)}{S_e L_e^2}$$