



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Câmpus de São José do Rio Preto

Amanda Monteiro

Estudo de polinômios quase homogêneos via Formas de Seifert

São José do Rio Preto  
2019

Amanda Monteiro

Estudo de polinômios quase homogêneos via Formas de Seifert

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

Coorientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Évelin Meneguesso Barbaresco

São José do Rio Preto  
2019

Amanda Monteiro

Estudo de polinômios quase homogêneos via formas de Seifert

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado  
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto  
Orientadora

Prof. Dr. Nivaldo de Goes Grulha Junior  
USP – São Carlos

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Gorete Carreira Andrade  
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto  
27 de fevereiro de 2019

*À minha mãe Karina e à minha irmã Alice  
dedico.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço profundamente à minha mãe por todo seu esforço e suas abdições para me proporcionar uma boa formação.

Um agradecimento especial à minha orientadora Prof<sup>a</sup>. Michelle F. Z. Morgado e à minha coorientadora Prof<sup>a</sup>. Évelin M. Barbaresco por me incentivarem a crescer pessoalmente e matematicamente, pela paciência, dedicação e apoio de sempre.

À Prof<sup>a</sup>. Maria Gorete C. Andrade pelas importantes conversas e contribuições para o desenvolvimento deste trabalho, e por sempre me encorajar desde os tempos de PET.

Ao Prof. Osamu Saeki que foi muito atencioso ao responder minhas dúvidas tão prontamente.

Aos meus amigos pelo apoio de sempre. Em especial ao Carlos que sempre esteve ao meu lado e que dividiu comigo os fardos e as alegrias dessa fase. Ao Luan, pelo companheirismo e carinho nas horas mais difíceis. Ao Maurício, por estar presente e sempre torcer por mim.

Aos professores e funcionários do Ibilce que contribuíram direta e indiretamente para a conclusão deste trabalho.

Aos professores da Banca Examinadora por terem aceitado o convite.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## RESUMO

Dado um polinômio quase homogêneo com singularidade isolada na origem existe associado um polinômio que depende apenas de seus pesos. Motivados por um resultado que garante que dados dois polinômios quase homogêneos com singularidade isolada na origem, eles têm os mesmos pesos se, e somente se, os seus polinômios associados são iguais, fizemos um estudo destes polinômios através das chamadas Formas de Seifert, que são formas sobre o grupo de homologia da fibra de Milnor associadas ao polinômio inicial, definido pelo linking number de dois ciclos. Desenvolvemos a teoria necessária para mostrar que dados dois polinômios quase homogêneos com singularidade isolada na origem, se suas Formas de Seifert forem equivalentes sobre os números reais, então seus polinômios associados são congruentes de uma certa maneira. Ressaltamos que a recíproca deste resultado também é válida e, portanto, existe uma condição necessária e suficiente para que esses polinômios tenham Formas de Seifert reais equivalentes em termos de seus pesos.

Palavras-chave: Polinômios quase homogêneos. Fibra de Milnor. Formas de Seifert.

## **ABSTRACT**

*Given a weighted homogeneous polynomials with isolated singularity at the origin there is a polynomial associated that depends only on its weights. Motivated by a result that ensures that given two weighted homogeneous polynomials with isolated singularity at the origin, they have the same weights if, and only if, their associated polynomials are equal, we did a study of these polynomials through the so-called Seifert Forms, which are forms on the homology group of Milnor fiber associated to the initial polynomial, defined by the linking number of two cycles. We develop the necessary theory to show that given two weighted homogeneous polynomials with isolated singularity at the origin, if their Seifert Forms are equivalent on real numbers, then their associated polynomials are congruent in a certain way. We note that the converse of this result is also valid and, therefore, there is a necessary and sufficient condition for these polynomials to have equivalent real Seifert Forms in terms of their weights.*

*Keywords: Weighted homogeneous polynomials. Milnor fiber. Seifert Forms.*

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1 Variedades Diferenciáveis . . . . .	11
1.2 Variedades Algébricas . . . . .	15
1.2.1 Conjunto Singular de Variedades Algébricas . . . . .	21
1.3 Homologia e Cohomologia . . . . .	26
1.3.1 Homologia Formal . . . . .	26
1.3.2 Cohomologia Formal . . . . .	30
1.4 Alguns Complexos de Cadeias Especiais . . . . .	31
1.4.1 Complexo Simplicial . . . . .	31
1.4.2 Complexo de Estrelas . . . . .	42
<b>2 Linking Number</b>	<b>48</b>
2.1 Número de Interseção . . . . .	48
2.2 Linking Number . . . . .	52
<b>3 Fibra de Milnor</b>	<b>54</b>
3.1 Fibrção de Milnor . . . . .	54
3.2 Operador Monodromia . . . . .	60
<b>4 Estudo de polinômios quase homogêneos</b>	<b>66</b>
4.1 Formas de Seifert . . . . .	66
4.2 Aplicações em polinômios quase homogêneos . . . . .	73
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>82</b>



# Introdução

Uma importante análise no estudo de polinômios quase homogêneos com singularidade isolada na origem são as invariâncias por meio de seus pesos. Em [25], Steenbrink obteve um resultado que nos garante a igualdade dos pesos de dois polinômios quase homogêneos com singularidade isolada na origem  $f$  e  $g$  se, e somente se,  $P_f(t) = P_g(t)$ , onde  $P_f(t)$  e  $P_g(t)$  são polinômios que dependem apenas dos pesos de  $f$  e  $g$ , respectivamente. Dessa forma, faz sentido buscar resultados a respeito de  $P_f(t)$ .

Com o intuito de obter uma resposta afirmativa para o problema da multiplicidade de Zariski para esses polinômios em  $n + 1$  variáveis, é interessante garantir que os pesos são invariantes topológicos, visto que eles já são invariantes analíticos do germe  $(\mathbb{C}^{n+1}, f^{-1}(0))$ . Este resultado vem sendo estudado para os casos particulares  $n = 1, 2$  e  $3$ , desde 1989, por alguns autores, que fizeram uso de diversas ferramentas. Nosso principal objetivo é apresentar um teorema que é uma ferramenta utilizada por Saeki, em [19], para obter uma resposta afirmativa em  $n + 1$  variáveis.

Neste trabalho apresentamos as Formas de Seifert associadas a  $f$ , que são formas sobre o grupo de homologia da fibra de Milnor associada a  $f$ . Para isso, estudamos parte dos importantes conceitos apresentados por Milnor em [17], como a construção da fibração de Milnor e os operadores monodromia associados a  $f$ , que desempenham um papel fundamental na Teoria de Singularidades. Também estudamos o conceito de linking number, que neste caso, é um invariante topológico da fibra de Milnor.

Com essas ferramentas em mãos, o resultado principal deste trabalho garante que se as Formas de Seifert associadas a dois polinômios distintos  $f$  e  $g$  em  $\mathbb{C}^{n+1}$  são equivalentes sobre os números reais, então  $P_f(t) \equiv P_g(t) \pmod{(t^2 - 1)}$ . Ressaltamos que a recíproca deste resultado também é válida e, portanto, existe uma condição necessária e suficiente para que esses polinômios tenham Formas Seifert reais equivalentes em termos de seus pesos.

Para cumprir com o objetivo que é apresentar o resultado principal mencionado, o trabalho está estruturado em quatro capítulos. No capítulo 1, reunimos alguns conceitos e resultados básicos presentes na literatura que serão necessários para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. No Capítulo 2, apresentamos a definição de linking number, que faz-se necessária na definição de Formas de Seifert associadas a um polinômio  $f$ . No Capítulo 3 demonstramos o Teorema da Fibrção de Milnor, e desenvolvemos alguns resultados a cerca dos operadores monodromia homológico e cohomológico. Por fim, no Capítulo 4, definimos as Formas de Seifert associadas a  $f$ , apresentamos alguns resultados a respeito das matrizes associadas às Formas de Seifert e demonstramos o resultado principal deste trabalho.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo reunimos alguns fatos básicos, ferramentas e resultados presentes na literatura, necessários para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

### 1.1 Variedades Diferenciáveis

A principal referência desta seção é [15].

**Definição 1.1.1** *Seja  $M$  um espaço topológico. Um **sistema de coordenadas locais** ou uma **carta** em  $M$  é um homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  de um subconjunto aberto  $U \subset M$  sobre o aberto  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ .*

**Definição 1.1.2** *Um **atlas**  $\mathcal{U}$  de **dimensão**  $m$  (ou  **$m$ -dimensional**) sobre um espaço topológico  $M$  é uma coleção de sistemas de coordenadas locais  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ , cujos domínios  $U$  cobrem  $M$ .*

**Definição 1.1.3** *Dados os sistemas de coordenadas locais  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  no espaço topológico  $M$ , tais que  $U \cap V \neq \emptyset$ , então o homeomorfismo*

$$\phi_{\varphi\psi} = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

*é chamado **mudança de coordenadas**.*

**Observação 1.1.4** *Considere a mudança de coordenadas  $\phi_{\varphi\psi} = \psi \circ \varphi^{-1}$ , então  $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1} = \phi_{\psi\varphi}$  é também uma mudança de coordenadas.*

**Definição 1.1.5** Um atlas  $\mathcal{U}$  sobre um espaço topológico  $M$  diz-se **diferenciável de classe  $C^k$** , se todas as mudanças de coordenadas  $\phi_{\varphi\psi}$ , com  $\varphi, \psi \in \mathcal{U}$ , são aplicações de classe  $C^k$ .

Da Observação 1.1.4 e da definição anterior, segue que em um atlas diferenciável  $\mathcal{U}$  todas as mudanças de coordenadas  $\phi_{\varphi\psi}$  são difeomorfismos.

**Definição 1.1.6** Uma **variedade diferenciável de dimensão  $m$  e classe  $C^k$**  é um par  $(M, \mathcal{U})$  onde  $M$  é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e  $\mathcal{U}$  é um atlas  $m$ -dimensional de classe  $C^k$ .

Como no decorrer do trabalho não vamos estar interessados na classe de diferenciabilidade, escrevemos variedade diferenciável significando variedade diferenciável de classe  $C^k$ , para algum  $k$ .

Por simplicidade, usaremos a notação  $M^m$  significando uma variedade diferenciável  $m$ -dimensional.

**Exemplo 1.1.7** (a) Um aberto de  $\mathbb{R}^k$  é uma variedade diferenciável  $k$ -dimensional.

(b) Um subespaço vetorial  $V$  de dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}^k$  é uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional.

(c) Uma esfera  $m$ -dimensional  $S^m$  é uma variedade diferenciável  $m$ -dimensional.

(d) Sejam  $G$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e  $H$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Temos que  $G \times H$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $m + n$ .

Como visto anteriormente, em um atlas diferenciável  $\mathcal{U}$  todas as mudanças de coordenadas  $\phi_{\varphi\psi}$  são difeomorfismos. É exatamente esta propriedade que nos permite transportar todas as noções de Cálculo Diferencial do  $\mathbb{R}^m$  para as variedades diferenciáveis.

**Definição 1.1.8** Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis. Diz-se que uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é **contínua** no ponto  $p \in M$  (respectivamente, **diferenciável** no ponto  $p \in M$ ) se existem sistemas de coordenadas locais  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  em  $N$ , com  $p \in U$  e  $f(U) \subset V$  tais que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

é contínua (respectivamente, diferenciável) no ponto  $\varphi(p)$ .

Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável e seja  $p$  um ponto de  $M$ . Indicamos por  $\mathcal{C}_p$  o conjunto de todos os caminhos  $\lambda : J \rightarrow M$ , definidos num intervalo aberto  $J$ , contendo 0, tais que  $\lambda(0) = p$  e  $\lambda$  é diferenciável em 0.

**Definição 1.1.9** Dois caminhos  $\lambda, \mu \in \mathcal{C}_p$  são **equivalentes**, e escrevemos  $\lambda \sim \mu$ , quando existir um sistema de coordenadas locais  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$ , com  $p \in U$ , tal que  $\varphi \circ \lambda : J \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\varphi \circ \mu : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  têm o mesmo vetor velocidade em  $t = 0$ , ou seja,  $(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0)$ .

Claramente essa relação é uma relação de equivalência em  $\mathcal{C}_p$ , onde

$$[\lambda] = \{\mu \in \mathcal{C}_p \mid \mu \sim \lambda\}.$$

**Definição 1.1.10** Definimos o **espaço tangente** à variedade diferenciável  $M$  no ponto  $p$  como sendo o conjunto quociente  $\mathcal{C}_p / \sim$ , e denotaremos por  $T_p M$ .

No caso em  $M \subset \mathbb{R}^n$  temos a seguinte caracterização para o espaço tangente (ver [15, Proposição 2, p. 43]):

$$T_p M = \{v = \lambda'(0) \mid \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n \text{ diferenciável, } \lambda(0) = p\}.$$

**Definição 1.1.11** Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável no ponto  $p \in M$ . A **derivada** de  $f$  no ponto  $p$  é a transformação linear

$$d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

que associa a cada  $v = [\lambda] \in T_p M$  o elemento  $d_p f(v) = [(f \circ \lambda)] \in T_{f(p)} N$ .

**Exemplo 1.1.12** Seja  $U$  um subconjunto aberto de uma variedade diferenciável  $M^m$ , que pode ser visto como uma variedade diferenciável de dimensão  $m$ . Na definição de  $T_p M$ ,  $p \in M$ , não há perda de generalidade em se considerar somente os caminhos  $\lambda : J \rightarrow M$ ,  $\lambda \in \mathcal{C}_p$ , tais que  $\lambda(J) \subset U$ . Isto significa que  $T_p U = T_p M$ .

Formalmente, estamos considerando a aplicação de inclusão  $i : U \rightarrow M$  e identificando  $T_p U$  com  $T_p M$  por meio do isomorfismo  $d_p i : T_p U \rightarrow T_p M$ .

**Definição 1.1.13** Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis, e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Um ponto  $p \in M$  diz-se um **ponto regular** de  $f$  quando a derivada  $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  é injetiva. Caso contrário,  $p$  diz-se um **ponto singular** ou **crítico** de  $f$ .

**Definição 1.1.14** Uma **subvariedade**  $M^m$  de classe  $C^k$  de uma variedade diferenciável  $N^n$  de classe  $C^r$  ( $r \geq k$ ) é um subconjunto  $M \subset N$ , com a topologia induzida e uma estrutura de variedade diferenciável  $C^k$ , tal que a aplicação inclusão  $i : M \rightarrow N$  é uma imersão (ou seja,  $d_p i$  injetora para todo  $p$ ) e um homeomorfismo de  $M$  sobre o subespaço  $i(M)$ .

Do mesmo modo não vamos nos preocupar com a classe de diferenciabilidade.

**Proposição 1.1.15** Seja  $N^n$  uma variedade diferenciável. Um subconjunto aberto  $U \subset N$  considerado como variedade diferenciável é uma subvariedade de  $N$  de mesma dimensão que  $N$ . Reciprocamente, toda variedade diferenciável  $n$ -dimensional  $M^n \subset N^n$  é um subconjunto aberto de  $N$ .

Ver a demonstração em [15, p. 153].

**Proposição 1.1.16** Seja  $c \in N^n$  um valor regular de uma aplicação  $f : M^m \rightarrow N^n$  entre variedades diferenciáveis. Então  $f^{-1}(c)$  é vazio ou é uma subvariedade  $(m-n)$ -dimensional de  $M^m$ . O espaço tangente a  $f^{-1}(c)$  em cada ponto  $p$  é o núcleo de  $d_p f : T_p M \rightarrow T_c N$ .

Ver a demonstração em [15, p. 51].

**Definição 1.1.17** Seja  $M^m$  uma variedade diferenciável. Um **campo de vetores diferenciável** em  $M^m$  é uma aplicação diferenciável  $v : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ . O campo  $v : M \rightarrow \mathbb{C}^n$  diz-se **tangente** à  $M^m$  quando  $v(p) \in T_p M$ , para todo  $p \in M$ .

**Observação 1.1.18** No caso em que estamos com a variedade diferenciável  $S^{2n+1}$ , uma  $(2n+1)$ -esfera, o espaço tangente  $T_z S^{2n+1}$  consiste em todos os vetores  $v \in \mathbb{C}^{n+1}$  que satisfazem  $\text{Re}(\langle v, z \rangle) = 0$ .

De fato, se enxergarmos  $\mathbb{C}^{n+1}$  como espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , então  $\mathbb{C}^{n+1}$  tem dimensão  $2n+2$ . O espaço dos vetores  $v \in \mathbb{C}^{n+1}$  que satisfazem  $\text{Re}(\langle v, z \rangle) = 0$  tem dimensão  $2n+1$ , ver [15, p. 45]). Assim temos a seguinte caracterização dos vetores  $v$  em  $T_z S^{2n+1}$  dada por

$$T_z M = \{v = \lambda'(0) \mid \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^{2n+2} \text{ diferenciável, } \lambda(0) = z\}.$$

Agora, derivando a igualdade  $\langle \lambda(t), \lambda(t) \rangle = 1$  obtemos

$$\langle \lambda'(t), \lambda(t) \rangle + \overline{\langle \lambda(t), \lambda'(t) \rangle} = 0,$$

o que é equivalente a

$$\operatorname{Re}(\langle \lambda'(t), \lambda(t) \rangle) = 0.$$

Aplicando em  $t = 0$ , segue que  $\operatorname{Re}(\langle v, z \rangle) = 0$ , logo o espaço tangente que possui dimensão  $2n+1$  está contido neste espaço  $2n+1$ -dimensional, resultando na igualdade desses espaços vetoriais.

## 1.2 Variedades Algébricas

Nesta seção,  $A$  denotará um anel comutativo e com unidade. As principais referências dessa seção são [7], [12] e [6].

**Definição 1.2.1** Dizemos que  $A$  é um **anel Noetheriano** se satisfaz uma das seguintes condições equivalentes:

1. Todo ideal de  $A$  é finitamente gerado;
2. Toda sequência crescente  $I_1 \subset I_2 \subset \dots$  de ideais em  $A$  é estacionária, isto é, existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $I_i = I_{i+1} = I_{i+2} = \dots$ ;
3. Toda família não vazia de ideais de  $A$  contém um elemento maximal.

Note que se  $A$  é um corpo então,  $A$  é um anel Noetheriano pois os únicos ideais de um corpo são os triviais.

Dado um anel  $A$ , podemos considerar o anel dos polinômios  $A[x]$  formado pelos elementos da forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_ix^i + \dots,$$

tal que  $a_i = 0$ , exceto para um número finito de índices.

Se  $A$  é um anel Noetheriano, um fato relevante sobre  $A[x]$  é o resultado conhecido como Teorema da Base de Hilbert:

**Teorema 1.2.2** Se  $A$  é um anel Noetheriano, então o anel dos polinômios  $A[x]$  também é Noetheriano.

A demonstração pode ser vista em [7].

Aplicando indutivamente o Teorema da Base de Hilbert, concluímos que o anel de polinômios em  $n$  variáveis, o qual denotamos por  $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , é também Noetheriano.

**Definição 1.2.3** Seja  $(A, +, \cdot)$  um anel. Um conjunto  $M \neq \emptyset$  é um  **$A$ -módulo** (ou um módulo sobre  $A$ ) se  $(M, +)$  é um grupo abeliano e existe uma operação  $\xi : A \times M \rightarrow M$  dada por  $\xi(a, m) = am \in M$  tal que para todo  $a_1, a_2, a \in A$  e para todo  $m_1, m_2, m \in M$  temos:

1.  $(a_1 + a_2)m = a_1m + a_2m$ ,
2.  $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$ ,
3.  $(a_1a_2)m = a_1(a_2m)$ ,
4.  $1m = m$ .

A função  $\xi$  é chamada de **multiplicação por escalar**.

Se  $A$  é corpo então  $M$  é um espaço vetorial sobre  $A$ .

**Definição 1.2.4** Sejam  $A$  um anel e  $M$  um  $A$ -módulo. Um subgrupo aditivo  $N$  de  $(M, +)$  é um  **$A$ -submódulo** se a multiplicação por escalar em  $M$  preserva  $N$ , isto é,

$$\xi(a, m) = am \in N, \forall a \in A, \forall m \in N.$$

**Definição 1.2.5** Um **homomorfismo de  $A$ -módulos**  $f : M_1 \rightarrow M_2$  é uma aplicação entre  $A$ -módulos que satisfaz:

1.  $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ ,  $m_1, m_2 \in M$ ;
2.  $f(am) = af(m)$ ,  $m \in M$  e  $a \in A$ .

Os homomorfismos de  $A$ -módulos também são por vezes designados de **aplicações  $A$ -lineares** ou, por abuso, simplesmente **transformações lineares**.

Note que os homomorfismos de  $\mathbb{Z}$ -módulos são os homomorfismos de grupos abelianos enquanto os homomorfismos  $f : V_1 \rightarrow V_2$  entre espaços vetoriais são precisamente as transformações lineares usuais.

**Definição 1.2.6** Sejam  $M, N$  e  $L$   $A$ -módulos. Uma **aplicação  $A$ -bilinear**  $f : M \times N \rightarrow L$  é uma aplicação que satisfaz:

1.  $f(am, n) = f(m, an) = af(m, n)$ ,  $m \in M$  e  $n \in N$ ;



$$2. f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n), m_1, m_2 \in M \text{ e } n \in N;$$

$$3. f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2), m \in M \text{ e } n_1, n_2 \in N.$$

Ou equivalentemente, uma aplicação  $A$ -bilinear é uma aplicação linear  $M \otimes_A N \rightarrow L$ , onde  $M \otimes_A N$  é o produto tensorial de  $M$  e  $N$  sobre  $A$ .

Considere  $M$  um  $A$ -módulo e  $\emptyset \neq S \subset M$ .

**Definição 1.2.7** Os elementos de  $S$  dizem-se **linearmente independentes** se, para toda a família finita  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de elementos de  $S$  e  $a_1, \dots, a_n \in A$ , se tem

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0.$$

Caso contrário, diz-se que os elementos de  $S$  são **linearmente dependentes**.

**Definição 1.2.8** Dizemos que  $S$  é **gerador** de  $M$  se qualquer elemento  $m \in M$  pode ser escrito como uma combinação linear (em geral, não única) de elementos de  $S$ :

$$m = \sum_{i=1}^k a_i v_i, a_i \in A, v_i \in S.$$

Neste caso denotamos  $M = \langle S \rangle$ .

Um  $A$ -módulo  $M$  é **cíclico** se é gerado por um único elemento, isto é,  $M = \langle m \rangle$ , para algum  $m \in M$  e é dito **finitamente gerado**, ou de **tipo finito**, se possui um conjunto gerador finito.

**Definição 1.2.9**  $S$  é uma **base** de  $M$  se é um conjunto gerador cujos elementos são linearmente independentes. Neste caso, qualquer elemento  $m \in M$  pode ser escrito de forma única como uma combinação linear de elementos de  $S$ :

$$m = \sum_{i=1}^k a_i v_i, a_i \in A, v_i \in S.$$

$M$  diz-se um  $A$ -**módulo livre** se possui uma base.

**Exemplo 1.2.10** (a) Qualquer espaço vetorial é um módulo livre.

(b) Qualquer anel  $A$  é um  $A$ -módulo livre com base  $\{1\}$ . Os submódulos coincidem com os ideais de  $A$ .

**Proposição 1.2.11** *Seja  $A$  um anel de integridade. Se um  $A$ -módulo livre  $M$  possui uma base, então todas as bases de  $M$  têm a mesma cardinalidade.*

A demonstração pode ser vista em [6, Proposição 6.2.5, p. 262]

Sejam  $f : M \times M \rightarrow L$  uma aplicação  $A$ -bilinear, com  $A$  um anel de integridade, e  $M$  e  $L$   $A$ -módulos livres finitamente gerados. Se  $\mathcal{B}_\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$  é uma base para  $M$ , podemos definir a matriz associada à aplicação  $f$  com relação a base  $\mathcal{B}$  como uma extensão natural do conceito de matrizes de formas bilineares sobre espaços vetoriais, como vemos a seguir.

**Definição 1.2.12** *Considere  $f : M \times M \rightarrow L$ ,  $M$  e  $L$  nas condições acima. A **matriz associada à aplicação  $f$**  com relação a base  $\mathcal{B}$  é a matriz  $C$  que tem elementos  $c_{ij} = f(\alpha_j, \alpha_i)$ . E se  $X$  e  $Y$  são as matrizes coordenadas (matriz formada pelos coeficientes) de  $x$  e  $y$ , onde  $x, y \in M$ , temos*

$$f(x, y) = X^t C Y.$$

**Observação 1.2.13** *A proposição anterior, nos garante que todas as bases possíveis para  $M \times N$  possuem a mesma cardinalidade, pode-se mostrar que todas as matrizes  $C_i$ , obtidas por uma base  $\mathcal{B}_i$ , são semelhantes. Assim, a matriz associada à aplicação  $f$  está bem definida.*

Os conceitos algébricos descritos até o momento são necessários no estudo de conjuntos especiais, os chamados conjuntos algébricos sobre o corpo  $\mathbb{L}$ , sendo  $\mathbb{L} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ . Denotamos por  $\mathbb{L}^m$  o espaço de coordenadas que consiste de todas as  $m$ -uplas  $x = (x_1, \dots, x_m)$  de elementos de  $\mathbb{L}$ .

**Definição 1.2.14** *Considere  $\mathbb{L}[x_1, \dots, x_m]$  o anel das funções polinomiais de  $\mathbb{L}^m$ . Dado  $f \in \mathbb{L}[x_1, \dots, x_m]$  definimos seu **conjunto de zeros** por*

$$V(f) = \{a \in \mathbb{L}^m; f(a) = 0\}.$$

**Definição 1.2.15** *Um subconjunto de  $\mathbb{L}^m$  é dito **conjunto algébrico** se é o lugar geométrico dos zeros comuns de alguma coleção  $S \subset \mathbb{L}[x_1, \dots, x_m]$  de funções polinomiais definidas em  $\mathbb{L}^m$ . Denotamos esse conjunto por  $V(S)$ . Assim,*

$$V(S) = \bigcap_{f \in S} V(f).$$

Quando não houver necessidade de explicitar o conjunto  $S$  escreveremos apenas  $V$ , em vez de  $V(S)$ .

**Definição 1.2.16** *Um conjunto algébrico da forma  $V(f)$  com  $f$  uma função polinomial não constante é chamado **hipersuperfície algébrica** associada a  $f$ .*

**Definição 1.2.17** *Considere  $V$  um conjunto algébrico. Denotamos por  $\mathcal{I}(V)$  o ideal de  $\mathbb{L}[x_1, \dots, x_m]$  que consiste de todos os polinômios que se anulam em todos os pontos de  $V$ .*

**Observação 1.2.18** (a) *Sejam  $S, S' \subset \mathbb{L}[x_1, \dots, x_m]$ . Se  $S \subset S'$  então  $V(S') \subset V(S)$ .*

*De fato, dado  $a \in V(S')$  temos que  $f(a) = 0$  para todo  $f \in S'$ . Como  $S \subset S'$  segue que, em particular,  $f(a) = 0$  para todo  $f \in S$ . Logo,  $V(S') \subset V(S)$ .*

(b) *Sejam  $V$  e  $W$  conjuntos algébricos. Se  $V \subset W$  então  $\mathcal{I}(W) \subset \mathcal{I}(V)$ .*

*De fato, dado  $f \in \mathcal{I}(W)$  temos que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in W$ . Como  $V \subset W$  segue que,  $f(x) = 0$  para todo  $x \in V$ . Logo,  $\mathcal{I}(W) \subset \mathcal{I}(V)$ .*

**Definição 1.2.19** *Dado  $S \subset \mathbb{L}[x_1, \dots, x_m]$  denotamos por  $\langle S \rangle$  o ideal gerado por  $S$ ,*

$$\langle S \rangle = \left\{ f \in \mathbb{L}[x_1, \dots, x_m]; f = \sum_{i=1}^r a_i f_i, f_i \in S, r \in \mathbb{N}^* \text{ e } a_i \in \mathbb{L}[x_1, \dots, x_m] \right\}.$$

**Propriedade 1.2.20** *Dado  $S \subset \mathbb{L}[x_1, \dots, x_m]$ ,  $V(S) = V(\langle S \rangle)$ .*

**Demonstração.** De  $S \subset \langle S \rangle$ , segue  $V(\langle S \rangle) \subset V(S)$ . Por outro lado, se  $x \in V(S)$  então todo  $f_i \in S$  se anula em  $x$  e, portanto, o mesmo acontece com todo  $f \in \langle S \rangle$ . Logo,  $V(S) \subset V(\langle S \rangle)$ . ■

Da propriedade acima segue que podemos nos restringir ao caso onde  $S$  é um ideal ou, alternativamente, ao caso onde  $S$  é o conjunto de geradores de um ideal.

Note que, como  $\mathbb{L}$  é Noetheriano então,  $\mathbb{L}[x_1, \dots, x_m]$  também é Noetheriano (consequência do Teorema da base de Hilbert). Além disso, todo ideal é gerado (como  $\mathbb{L}[x_1, \dots, x_m]$ -módulo) por uma coleção finita de polinômios. Disto resulta que todo conjunto algébrico  $V$  pode ser definido por uma coleção finita de equações polinomiais, pois

$$V(I) = V(f_1, \dots, f_r) = V(f_1) \cap \dots \cap V(f_r).$$

**Definição 1.2.21** *Um conjunto algébrico  $V$  é dito **irredutível** quando ele não pode ser expresso como união de dois subconjuntos algébricos próprios, ou seja,  $V$  não pode ser expresso como  $V_1 \cup V_2$  onde  $V_1, V_2 \subsetneq V$  são subconjuntos algébricos.*

**Definição 1.2.22** Um conjunto algébrico não vazio  $V$  é uma **variedade algébrica** quando é um conjunto algébrico irredutível.

**Definição 1.2.23** Dado  $V$  uma variedade algébrica, ou seja,  $V = V(I)$  para algum ideal  $I$ , e dado um ideal  $J$  contendo  $I$ , o conjunto  $W = V(J)$  (se não for vazio) é dito uma **subvariedade algébrica** de  $V$ .

**Proposição 1.2.24** Se  $A$  é um conjunto algébrico então  $A = V(\mathcal{I}(A))$ .

**Demonstração.** Note que todo elemento de  $A$  anula todos os polinômios de  $\mathcal{I}(A)$ , logo  $A \subset V(\mathcal{I}(A))$ . Por outro lado, como  $A$  é um conjunto algébrico,  $A = V(J)$  para algum ideal  $J$ . Logo,  $J \subset \mathcal{I}(V(J))$ . De fato, dado  $f \in J$ , todo elemento de  $V(J)$  é raiz de  $f$ , logo  $f$  se anula em  $V(J)$  e, conseqüentemente,  $f \in \mathcal{I}(V(J))$ .

Assim,  $A = V(J) \supset V(\mathcal{I}(V(J))) = V(\mathcal{I}(A))$ . Portanto,  $A = V(\mathcal{I}(A))$ . ■

**Observação 1.2.25** A aplicação  $V \mapsto \mathcal{I}(V)$ , que faz corresponder a um conjunto algébrico  $V$  o ideal  $\mathcal{I}(V)$ , é injetora. De fato, se  $\mathcal{I}(V) = \mathcal{I}(W)$  então  $V(\mathcal{I}(V)) = V(\mathcal{I}(W))$ . Pela proposição anterior segue que  $V = W$ .

**Proposição 1.2.26 (Condição de Cadeia Descendente)** Qualquer seqüência  $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \dots$  de conjuntos algébricos estaciona depois de um número finito de etapas (isto é, existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $V_i = V_{i+1} = V_{i+2} = \dots$ ).

**Demonstração.** Considere a seqüência de conjuntos algébricos  $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \dots$ , pelo item (b) da Observação 1.2.18 segue que

$$\mathcal{I}(V_1) \subset \mathcal{I}(V_2) \subset \mathcal{I}(V_3) \dots$$

Como  $\mathbb{L}[x_1, \dots, x_m]$  é Noetheriano, então esta seqüência estaciona, ou seja, existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{I}(V_i) = \mathcal{I}(V_{i+1}) = \mathcal{I}(V_{i+2}) = \dots$

Pelo item (a) da Observação 1.2.18 temos

$$V(\mathcal{I}(V_1)) \supset V(\mathcal{I}(V_2)) \supset V(\mathcal{I}(V_3)) \dots,$$

que portanto também estaciona.

Pela proposição anterior temos que  $V(\mathcal{I}(V_j)) = V_j$ . Assim,

$$V(\mathcal{I}(V_1)) \supset V(\mathcal{I}(V_2)) \supset V(\mathcal{I}(V_3)) \dots = V_1 \supset V_2 \supset V_3 \dots$$

e, portanto,  $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \dots$  estaciona. ■

**Definição 1.2.27** *Seja  $V \subset \mathbb{L}^m$  um conjunto algébrico não vazio. Escolha polinômios  $f_1, \dots, f_k$  que geram o ideal  $\mathcal{I}(V)$  e, para cada  $x \in V$ , considere a matriz  $(\partial f_i / \partial x_j)$  de ordem  $k \times m$  avaliada em  $x$ . Seja  $\rho$  o maior posto que esta matriz assume em qualquer ponto de  $V$ . Um ponto  $x \in V$  é chamado **regular** se a matriz  $(\partial f_i / \partial x_j)$  atinge posto  $\rho$  e **singular** (ou **crítico**) se*

$$\text{posto} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) < \rho.$$

Note que esta definição não depende da escolha de  $\{f_1, \dots, f_k\}$ , pois se adicionarmos um polinômio extra  $f_{k+1} = g_1 f_1 + \dots + g_k f_k$ , a nova linha resultante em nossa matriz será uma combinação linear das demais linhas.

**Proposição 1.2.28** *O conjunto  $\Sigma(V)$ , de todos os pontos singulares de  $V$ , é um subconjunto algébrico de  $V$ .*

**Demonstração.** Se  $x \in \Sigma(V)$  então  $(\partial f_i / \partial x_j)$  não assume posto máximo em  $x$ , logo o determinante de todo menor  $\rho \times \rho$  de  $(\partial f_i / \partial x_j)$  se anula em  $x$ . Note que o determinante de um menor  $\rho \times \rho$  é um polinômio pertencente a  $\mathbb{L}[x_1, \dots, x_m]$ .

Reciprocamente, se o determinante de todo menor  $\rho \times \rho$  se anula em  $x$ , então  $(\partial f_i / \partial x_j)$  não assume posto máximo em  $x$ , logo  $x \in \Sigma(V)$ . Assim,  $\Sigma(V)$  é o conjunto dos pontos que anulam os polinômios que são dados por cada menor determinante  $\rho \times \rho$ . Logo,  $\Sigma(V)$  é um conjunto algébrico e sendo cada  $x \in \Sigma(V)$  um elemento de  $V$ , segue que  $\Sigma(V)$  é um subconjunto de  $V$ . ■

### 1.2.1 Conjunto Singular de Variedades Algébricas

Neste momento vamos fazer um estudo sobre o conjunto singular de variedades algébricas, essencial para o trabalho, por isso apresentamos detalhes e algumas demonstrações, apesar de estar nas preliminares. A principal referência é [27].

Seja  $\rho$  como na Definição 1.2.27, temos os seguintes teoremas de Whitney:

**Teorema 1.2.29** *Se  $\mathbb{L}$  é o corpo dos números reais (ou complexos), então o conjunto  $V \setminus \Sigma(V)$  dos pontos regulares de  $V \subset \mathbb{L}^m$  forma uma variedade diferenciável não vazia. Além disso, ela é analítica real (ou complexa) e tem dimensão  $m - \rho$ .*

**Teorema 1.2.30** Para qualquer par  $V \supset W$  de conjuntos algébricos num espaço de coordenadas real ou complexo, a diferença  $V \setminus W$  tem, no máximo, um número finito de componentes conexas.

Para mais informações sobre os teoremas de Whitney veja, por exemplo, [27].

**Observação 1.2.31** A variedade diferenciável  $V \setminus \Sigma(V)$  tem um número finito de componentes conexas.

Cada um dos próximos dois exemplos será uma curva no plano real tendo a origem como único ponto singular.

**Exemplo 1.2.32** Seja  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 - x^2(1 - x^2) = 0\}$ . Esta variedade algébrica ilustra o tipo de ponto singular mais bem comportado e de fácil compreensão, um “ponto duplo” em que dois ramos analíticos reais ( $y = x\sqrt{1 - x^2}$  e  $y = -x\sqrt{1 - x^2}$ ) com tangentes distintas se cruzam.

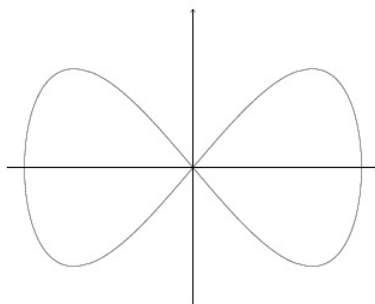


Figura 1.1:  $y = \pm x\sqrt{1 - x^2}$

Considerando a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = y^2 - x^2 + x^4$ , temos que o posto máximo da matriz

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} -2x + 4x^3 & 2y \end{array} \right)$$

é 1. Assim, os pontos singulares de  $V$  são aqueles que anulam a matriz, ou seja,  $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$ ,  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$  e  $(0, 0)$ . Como somente  $(0, 0)$  pertence a  $V$  temos que este é o único ponto singular de  $V$ .

**Proposição 1.2.33** Um conjunto algébrico real ou complexo  $V$  pode ser expresso como uma união finita disjunta

$$V = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p,$$

onde cada  $M_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , é uma variedade diferenciável com um número finito de componentes. Ainda, qualquer diferença  $V \setminus W$  de variedades algébricas pode ser expressa como uma união finita.

**Demonstração.** Sejam  $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$  o conjunto dos pontos regulares de  $V$ ,  $M_2 = \Sigma(V) \setminus \Sigma(\Sigma(V))$  o conjunto dos pontos regulares de  $\Sigma(V)$ , e assim por diante. Esta construção deve parar após um número finito de etapas, pois, pela condição de cadeia descendente, a sequência

$$V \supset \Sigma(V) \supset \Sigma(\Sigma(V)) \supset \dots$$

deve estacionar.

Pelo Teorema 1.2.29, cada  $M_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , é uma variedade diferenciável e pelo Teorema 1.2.30 cada uma destas tem um número finito de componentes conexas. Note que

$$\begin{aligned} V &= V \setminus \Sigma(V) \cup \Sigma(V) = V \setminus \Sigma(V) \cup \Sigma(V) \setminus \Sigma(\Sigma(V)) \cup \Sigma(\Sigma(V)) = \dots = \\ &= V \setminus \Sigma(V) \cup \Sigma(V) \setminus \Sigma(\Sigma(V)) \cup \Sigma(\Sigma(V)) \cup \dots \cup \Sigma(\dots(\Sigma(V)) \setminus \Sigma(\Sigma(\dots(\Sigma(V)))) \cup \Sigma(\Sigma(\dots(\Sigma(V)))). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$V = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p.$$

Semelhantemente,  $V \setminus W$  pode ser expressa como a união disjunta

$$M'_1 \cup M'_2 \cup \dots \cup M'_p,$$

com cada  $M'_i = M_i \setminus (W \cap M_i)$  uma variedade diferenciável tendo uma quantidade finita de componentes conexas. ■

**Teorema 1.2.34** *Sejam  $V \subset \mathbb{L}^m$  um conjunto algébrico,  $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$  e  $g : \mathbb{L}^m \rightarrow \mathbb{L}$  uma função polinomial. O conjunto dos pontos críticos da restrição  $g|_{M_1}$  é igual a intersecção de  $M_1$  com o conjunto algébrico  $W$  que consiste de todos pontos  $x \in V$  para os quais a matriz*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}$$

tem posto menor ou igual a  $\rho$ , onde  $\rho$  é como na Definição 1.2.27 e  $f_1, \dots, f_k$  denotam os polinômios que geram  $\mathcal{I}(V)$ , onde  $m \geq k$ .

**Demonstração.** Sejam  $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{L}[x_1, \dots, x_m]$  tais que  $f_1, \dots, f_k$  geram  $\mathcal{I}(V)$ ,  $F : \mathbb{L}^m \rightarrow \mathbb{L}^k$  dada por  $F(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_k(x_1, \dots, x_m))$  e  $a = (a_1, \dots, a_m) \in M_1$ . Então,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

tem posto máximo  $\rho = k$  em  $a$ . Pela Forma Local da Submersão existem vizinhanças  $Z$  e  $W$  de  $a$  em  $\mathbb{L}^m$  e um difeomorfismo (mudança de coordenada)  $h : Z \rightarrow W$  com  $h(x_1, \dots, x_m) = (u_1, \dots, u_m)$  tal que

$$(F \circ h)(x_1, \dots, x_\rho, x_{\rho+1}, \dots, x_m) = (u_1, \dots, u_\rho). \quad (1.1)$$

Note que se  $x \in M_1$  então  $F(x) = 0$ , pois  $x \in V$  e  $f_1, \dots, f_k$  geram  $\mathcal{I}(V)$ . Como  $h(x_1, \dots, x_m) \in M_1$  segue que  $F(h(x_1, \dots, x_m)) = 0$ . Logo,  $(u_1, \dots, u_\rho) = 0$ , ou seja,  $M_1$  corresponde ao lugar geométrico dos elementos tais que

$$u_1 = \dots = u_\rho = 0.$$

Assim,  $u_{\rho+1}, \dots, u_m$  podem ser tomadas como coordenadas locais em  $M_1$ .

Note que,  $\frac{\partial(f_i \circ h)}{\partial u_j}$  avaliada num ponto de  $M_1$  é zero para  $j \geq \rho + 1$  (por (1.1)). Pela regra da cadeia temos que  $(\partial(f_i \circ h)/\partial u_j) = (\partial f_i/\partial x_l) \cdot (\partial h/\partial u_j)$ . Segue por um resultado de Álgebra Linear (pode ser visto em [10, p. 26]) que a matriz  $(\partial(f_i \circ h)/\partial u_j)$  é coluna equivalente à matriz  $(\partial f_i/\partial x_l)$  e, portanto, tem posto  $\rho = k$ . Segue que as primeiras  $k$  colunas de  $(\partial f_i/\partial u_j)$  devem ser linearmente independentes. Então, a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial u_m} \\ \frac{\partial(f_1 \circ h)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial(f_1 \circ h)}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(f_k \circ h)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial(f_k \circ h)}{\partial u_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial u_\rho} & \frac{\partial g}{\partial u_{\rho+1}} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial u_m} \\ \frac{\partial(f_1 \circ h)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial(f_1 \circ h)}{\partial u_\rho} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial(f_k \circ h)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial(f_k \circ h)}{\partial u_\rho} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

terá posto  $\rho$  se, e somente se,  $(\frac{\partial g}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial u_m})$  é combinação linear dos vetores  $(\frac{\partial(f_1 \circ h)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial(f_k \circ h)}{\partial u_m})$  o que acontece se, e somente se,

$$\partial g/\partial u_{\rho+1} = \dots = \partial g/\partial u_m = 0$$



ou, em outras palavras, se e somente se, o ponto dado for um ponto crítico de  $g|_{M_1}$  (já que  $u_1 = \dots = u_\rho = 0$ ).

Uma vez que esta nova matriz é coluna equivalente à matriz dada no enunciado, temos o resultado. ■

**Corolário 1.2.35** *Uma função polinomial  $g$  em  $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$  pode ter, no máximo, um número finito de valores críticos.*

**Demonstração.** Lembremos que um valor crítico  $g(x) \in \mathbb{L}$  é a imagem por  $g$  de um ponto crítico  $x$ . O conjunto dos pontos críticos de  $g|_{M_1}$  pode ser expresso pela diferença  $W \setminus \Sigma(V)$  de conjuntos algébricos (pois, pelo teorema anterior,  $W \subset V$  e o conjunto dos pontos críticos de  $g|_{M_1}$  é igual a  $(V \setminus \Sigma(V)) \cap W$ ) e, portanto pode ser expresso como uma união finita de variedades diferenciáveis

$$W \setminus \Sigma(V) = M'_1 \cup \dots \cup M'_p,$$

onde cada  $M'_i$  tem um número finito de componentes.

Cada ponto  $x \in M'_i$  é um ponto crítico da função diferenciável  $g|_{M_1}$ , logo é um ponto crítico da restrição  $g|_{M'_i}$ . Já que todos os pontos de  $M'_i$  são críticos, então  $g'$  se anula em todos eles, logo  $g$  é constante em cada componente de  $M'_i$ . Portanto, a imagem  $g(M'_i)$  é um conjunto finito (já que a quantidade de componentes é finita). Assim,

$$g(W \setminus \Sigma(V)) = g(M'_1 \cup \dots \cup M'_p) = g(M'_1) \cup \dots \cup g(M'_p)$$

é um conjunto finito. Mas, este conjunto é precisamente o conjunto dos valores críticos de  $g|_{M_1}$ . ■

**Teorema 1.2.36** *Seja  $x^0$  um ponto regular de  $V$  (conjunto algébrico real ou complexo) ou um ponto isolado de  $\Sigma(V)$ . Toda esfera suficientemente pequena  $S_\varepsilon$  centrada em  $x^0$  intercepta  $V$  numa variedade diferenciável (possivelmente vazia).*

**Demonstração.** No caso real segue aplicando o corolário anterior ao polinômio

$$g(x) = \|x - x^0\|^2 = (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2.$$

De fato, pelo Corolário 1.2.35,  $g|_{(V \setminus \Sigma(V))}$  tem um número finito de pontos críticos, portanto podemos tomar  $\varepsilon^2$  menor do que qualquer valor crítico de  $g|_{(V \setminus \Sigma(V))}$ . Então, qualquer  $x \in V$ , que é ponto crítico de  $g$ , é tal que  $g(x) > \varepsilon^2$  ou 0. Logo se  $x \in V$  é ponto crítico de  $g$  então  $x \notin S_\varepsilon$ .

Portanto  $g^{-1}(\varepsilon^2) = \{x \in V \setminus \Sigma(V); g(x) = \varepsilon^2 \text{ e } x \text{ não é ponto crítico}\}$  e, conseqüentemente,  $\varepsilon^2$  é valor regular de  $g$ . Assim, pelo Teorema 1.1.16, sua imagem inversa

$$g^{-1}(\varepsilon^2) \cap (V \setminus \Sigma(V)) = S_\varepsilon \cap (V \setminus \Sigma(V))$$

é uma variedade diferenciável  $K = S_\varepsilon \cap (V \setminus \Sigma(V))$  (possivelmente vazia). Como  $x^0$  é ponto regular ou crítico isolado, podemos diminuir o valor de  $\varepsilon$ , se necessário, a fim de que  $S_\varepsilon$  não intercepte  $\Sigma(V)$ . Dessa forma,  $K = S_\varepsilon \cap V$ .

Para o caso complexo o resultado é imediato, pois toda variedade algébrica complexa em  $\mathbb{C}^m$  pode ser vista como variedade algébrica em  $\mathbb{R}^{2m}$ . ■

## 1.3 Homologia e Cohomologia

Nesta seção é feita uma breve apresentação dos conceitos e fatos básicos nos quais se fundamentam as diversas maneiras de desenvolver a teoria de homologia e de cohomologia. A principal referência desta seção é [14].

### 1.3.1 Homologia Formal

**Definição 1.3.1** *Seja  $A$  um anel comutativo com unidade. Um **complexo de cadeias com coeficientes em  $A$**  é uma sequência  $C = (C_p, \partial_p)$  de  $A$ -módulos  $C_p$ ,  $p \in \mathbb{Z}_+$ , e homomorfismos  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$  tais que  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ . Escreve-se*

$$C : \dots \rightarrow C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Cada elemento  $x \in C_p$  é chamado uma  **$p$ -cadeia** ou uma cadeia de dimensão  $p$ .

**Definição 1.3.2** *Um elemento  $x \in C_p$  é um  **$p$ -ciclo**, ou simplesmente um ciclo, se  $\partial_p x = 0$ . Chamamos de  $Z_p$  o **conjunto dos  $p$ -ciclos**, e este é um submódulo de  $C_p$ .*

Note que,  $Z_p$  é o núcleo do homomorfismo  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$ .

**Definição 1.3.3** *Se  $y = \partial_{p+1}x$ , diz-se que a  $p$ -cadeia  $y$  é o **bordo** da  $(p+1)$ -cadeia  $x$ . Chamamos de  $B_p$  o **conjunto das  $p$ -cadeias que são bordos de  $(p+1)$ -cadeias**, e este é um submódulo de  $C_p$ .*

Note que,  $B_p$  é a imagem do homomorfismo  $\partial_{p+1} : C_{p+1} \rightarrow C_p$ . Cada homomorfismo  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$  é chamado de **operador bordo**. A menos que seja necessário ser mais explícito, escreve-se  $\partial$  em vez de  $\partial_p$ , de modo que  $\partial\partial x = 0$  para toda cadeia  $x \in C_p$ .

**Observação 1.3.4** A relação fundamental  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$  significa que todo bordo é um ciclo, ou seja, que  $B_p \subset Z_p$ .

**Definição 1.3.5** O  $A$ -módulo quociente  $H_p = H_p(C) = Z_p/B_p$  chama-se o **grupo de homologia  $p$ -dimensional** do complexo  $C$  com coeficientes em  $A$ . Seus elementos são as classes de homologia

$$[z] = z + B_p = \{z + \partial x; x \in C_{p+1}\}, z \in Z_p.$$

**Definição 1.3.6** Dois ciclos  $z$  e  $z'$   $p$ -dimensionais, são chamados **ciclos homólogos**, se  $[z] = [z']$ , ou seja, a diferença formal entre  $z'$  e  $z$  for  $\partial x$ , para algum  $x \in C_{p+1}$ .

**Observação 1.3.7** Quando um  $p$ -ciclo  $z$  é homólogo ao ciclo nulo, isso nos garante que existe  $x \in C_{p+1}$  tal que  $z$  seja seu bordo.

**Definição 1.3.8** Um complexo de cadeias  $C' = (C'_p, \partial'_p)$  é chamado **subcomplexo** de  $C$  se, para cada  $p \geq 0$ , tivermos um submódulo  $C'_p \subset C_p$  tal que  $\partial C'_{p+1} \subset C'_p$ , e  $\partial'_p = \partial_p|_{C'_p}$ .

Considerando, para cada  $p \geq 0$ , o  $A$ -módulo quociente  $\bar{C}_p = C_p/C'_p$ , existe um único homomorfismo  $\bar{\partial}_p : \bar{C}_p \rightarrow \bar{C}_{p-1}$  que torna comutativo o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ \bar{C}_p & \xrightarrow{\bar{\partial}_p} & \bar{C}_{p-1}, \end{array}$$

onde  $j$  é a aplicação quociente. Por definição  $\bar{\partial}(j(x)) = j(\partial(x))$ . É claro que  $\bar{\partial}_p \circ \bar{\partial}_{p+1} = 0$ , logo a sequência  $\bar{C} = (\bar{C}_p, \bar{\partial}_p)$  é um complexo de cadeias, chamado o *quociente* de  $C$  por  $C'$ .

**Definição 1.3.9** Sejam  $\mathcal{X} = (X_p, \partial_p)$  e  $\mathcal{Y} = (Y_p, \partial_p)$  complexos de cadeias, cujos operadores-bordo indicamos com o mesmo símbolo  $\partial_p = \partial$ . Um **morfismo**  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  é uma sequência de homomorfismos  $f_p : X_p \rightarrow Y_p$  tais que  $f_p(\partial(x)) = \partial(f_{p+1}(x))$  para todo  $x \in X_p$ .

Isto significa que, no diagrama abaixo, todos os retângulos são comutativos

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \rightarrow & X_{p+1} & \xrightarrow{\partial} & X_p & \xrightarrow{\partial} & X_{p-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \\
& & \downarrow f_{p+1} & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} & & \downarrow f_0 \\
\cdots & \rightarrow & Y_{p+1} & \xrightarrow{\partial} & Y_p & \xrightarrow{\partial} & Y_{p-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Y_0
\end{array}$$

**Observação 1.3.10** *Segue das relações  $\partial f_p(x) = f_{p-1}(\partial x)$  e  $f_p(\partial x) = \partial f_{p+1}(x)$  que, para todo  $p \geq 0$ , o homomorfismo  $f_p : X_p \rightarrow Y_p$  transforma  $p$ -ciclos de  $\mathcal{X}$  em  $p$ -ciclos de  $\mathcal{Y}$  e  $p$ -bordos de  $\mathcal{X}$  em  $p$ -bordos de  $\mathcal{Y}$ . Isto é,  $f_p(Z_p(\mathcal{X})) \subset Z_p(\mathcal{Y})$  e  $f_p(B_p(\mathcal{X})) \subset B_p(\mathcal{Y})$ .*

Logo  $f_p$  induz, por passagem ao quociente, um homomorfismo  $(f_p)_* : H_p(\mathcal{X}) \rightarrow H_p(\mathcal{Y})$ , definido por  $(f_p)_*([z]) = [f_p(z)]$ , para toda classe  $[z] \in H_p(\mathcal{X})$  de um ciclo  $z \in Z_p(\mathcal{X})$ . Frequentemente se escreve apenas  $f_* : H_p(\mathcal{X}) \rightarrow H_p(\mathcal{Y})$ .

O homomorfismo induzido  $f_* : H_p(\mathcal{X}) \rightarrow H_p(\mathcal{Y})$  é natural no seguinte sentido: se  $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{W}$  é outro morfismo entre complexos de cadeias, induzindo, para cada  $p \geq 0$  o homomorfismo  $g_* : H_p(\mathcal{Y}) \rightarrow H_p(\mathcal{W})$  então o morfismo composto  $g \circ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{W}$  induz o homomorfismo  $(g \circ f)_* : H_p(\mathcal{X}) \rightarrow H_p(\mathcal{W})$  e tem-se  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ . Evidentemente, se  $id : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  é o morfismo identidade, então  $id_* : H_p(\mathcal{X}) \rightarrow H_p(\mathcal{X})$  é a aplicação identidade.

Segue-se imediatamente que se o morfismo  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  admite o morfismo inverso  $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  então  $f_* : H_p(\mathcal{X}) \rightarrow H_p(\mathcal{Y})$  é invertível para todo  $p \geq 0$  sendo  $(f_*)^{-1} = g_*$ .

Exemplos óbvios de morfismos entre complexos de cadeias se obtêm a partir de um subcomplexo  $C' \subset C$ . A aplicação de inclusão  $i : C' \rightarrow C$  e a projeção  $j : C \rightarrow C/C'$  são morfismos. É da maior relevância ressaltar que, embora  $i : C'_p \rightarrow C_p$  seja injetivo e  $j : C_p \rightarrow C_p/C'_p$  seja sobrejetivo, essas propriedades não são necessariamente herdadas pelos homomorfismos induzidos  $i_* : H_p(C') \rightarrow H_p(C)$  e  $j_* : H_p(C) \rightarrow H_p(C/C')$ .

**Exemplo 1.3.11** *Seja  $A = \mathbb{Z}$  dos inteiros. Consideremos o complexo  $C$  no qual  $C'$  é o grupo abeliano livre gerado pelos símbolos  $a, b, c$  (que podemos imaginar como os vértices do triângulo  $abc$ ),  $C_1$  é o grupo abeliano livre gerado pelos símbolos  $ab, bc, ca$  (lados do triângulo) e  $C_2$  é o grupo cíclico cujo gerador livre chamamos de  $abc$ . Os grupos  $C_p$  com  $p > 2$  são todos iguais a zero. Os operadores-bordo  $\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$ ,  $\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$  são definidos assim:*

$$\begin{aligned}
\partial(abc) &= ab + bc + ca \\
\partial(ab) &= b - a, \quad \partial(bc) = c - b \quad \text{e} \quad \partial(ca) = a - c.
\end{aligned}$$

Obviamente,  $\partial a = \partial b = \partial c = 0$ .

É possível ver sem dificuldade que  $\partial\partial = 0$  em todas as dimensões. Na verdade, basta verificar que  $\partial(\partial(abc)) = 0$ . É claro que, em dimensão 2, a cadeia nula é o único ciclo, de modo que  $H_2(C) = 0$ . Vejamos quais são os ciclos de dimensão 1.

Uma cadeia  $x \in C_1$  é da forma  $x = m.ab + n.bc + p.ca$ , onde  $m, n, p \in \mathbb{Z}$ . Tem-se  $\partial x = \partial(m.ab + n.bc + p.ca) = m.b - m.a + n.c - n.b + p.a - p.c = (p-m)a + (m-n)b + (n-p)c$ .

Portanto  $\partial x = 0 \Leftrightarrow m = n = p \Leftrightarrow x = m(ab + bc + ca)$ . Assim, o ciclo  $z = ab + bc + ca$  é o gerador de  $Z_1(C)$ . Como se tem  $z = \partial(abc)$ , segue-se que  $Z_1(C) = B_1(C)$ , portanto o grupo de homologia  $H_1(C) = Z_1(C) = B_1(C)$  é nulo.

Falta calcular  $H_0(C)$ . Toda 0-cadeia é, por definição, um ciclo. Portanto  $Z_0(C)$  é o grupo abeliano livre gerado por  $a, b$  e  $c$ . Já vimos que o bordo de uma 1-cadeia genérica  $x = m.ab + n.bc + p.ca$  tem a forma  $y = \partial x = (p-m)a + (m-n)b + (n-p)c$ . Como  $(p-m) + (m-n) + (n-p) = 0$ , concluímos que se uma 0-cadeia  $y = k_1.a + k_2.b + k_3.c$  é um bordo então  $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ . (A soma  $k_1 + k_2 + k_3$  chama-se o índice da cadeia  $y$ .) Ora, mudando bruscamente de notação, um exercício elementar mostra que o sistema de três equações lineares  $x - y = k_1, y - z = k_2, z - x = k_3$  tem solução se, e somente se,  $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ . Portanto uma 0-cadeia é um bordo se, e somente se, seu índice é zero. (Ou ainda: duas 0-cadeias são homólogas se, e somente se, têm o mesmo índice.) Assim, o homomorfismo  $I_n : C_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ , que associa a cada 0-cadeia seu índice, tem como núcleo o conjunto  $B_0$  das cadeias que são bordos. Passando ao quociente, obtemos o isomorfismo  $C_0/B_0 \approx \mathbb{Z}$ , ou seja,  $H_0(C) \approx \mathbb{Z}$ , pois  $C_0 = Z_0$ .

Em suma, os grupos de homologia do complexo  $C$  são  $H_0(C) = \mathbb{Z}, H_1(C) = H_2(C) = 0$ .

**Exemplo 1.3.12** Consideremos agora o subcomplexo  $C' \subset C$  no qual  $C'_2 = 0, C'_1 = C_1$  e  $C'_0 = C_0$ . Então  $H_2(C') = 0$  e  $H_0(C') = H_0(C) \approx \mathbb{Z}$  mas, como  $\partial'_2 = 0$ , tem-se  $B'_1 = 0$ , portanto  $H_1(C') = Z'_1 \approx \mathbb{Z}$ . Assim, os grupos de homologia do subcomplexo  $C' \subset C$  são isomorfos a  $\mathbb{Z}$  nas dimensões 0 e 1, e nulos nas demais dimensões. Isto nos dá um exemplo em que o homomorfismo  $i_* : H_1(C') \rightarrow H_1(C)$ , induzido pela inclusão  $i : C' \rightarrow C$ , não é injetivo.

Ainda neste exemplo, no complexo quociente  $\bar{C} = C/C'$  tem-se  $\bar{C}_2 = C_2, \bar{C}_1 = \bar{C}_0 = 0$ . Portanto  $H_1(\bar{C}) = H_0(\bar{C}) = 0$  e  $H_2(\bar{C})$  é o grupo cíclico infinito gerado pela classe de homologia do 2-ciclo  $j(abc) \in \bar{C}_2$ , onde  $j : C_2 \rightarrow \bar{C}_2 = C_2/C'_2$  é a aplicação quociente. Portanto o homomorfismo induzido  $j_* : H_2(C) \rightarrow H_2(\bar{C})$  não é sobrejetivo.

Muitas vezes é muito conveniente ter uma versão ligeiramente modificada da homologia

para qual um ponto tenha grupos de homologia triviais em todas as dimensões, incluindo zero. Para isso definimos os grupos de homologia reduzidos.

**Definição 1.3.13** Os *grupos de homologia reduzida*  $\tilde{H}_n(X; A)$  são os grupos de homologia do **complexo de cadeias aumentada**

$$C : \dots \rightarrow C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} A \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

onde,  $\epsilon(\sum a_i \sigma_i) = \sum a_i$ , com  $a_i \in A$  e  $\sigma_i$  os geradores de  $C_0$ .

Note que  $\tilde{H}_n(X; A) = H_n(X; A)$  para todo  $n \neq 0$ .

### 1.3.2 Cohomologia Formal

**Definição 1.3.14** Um **complexo de cocadeias com coeficientes em  $A$**  é uma sequência  $C = (C^p, \delta_p)$ ,  $p \geq 0$ , de  $A$ -módulos  $C^p$ , e homomorfismos  $\delta_p : C^p \rightarrow C^{p+1}$ , chamado **operador cobordo**, tais que  $\delta_{p+1} \circ \delta_p = 0$ . Frequentemente escreve-se simplesmente  $\delta$  em vez de  $\delta_p$ .

$$C^0 \xrightarrow{\delta_0} C^1 \xrightarrow{\delta_1} \dots \rightarrow C^{p-1} \xrightarrow{\delta_{p-1}} C^p \xrightarrow{\delta_p} C^{p+1} \rightarrow \dots$$

Cada elemento  $u \in C^p$  é chamado uma  **$p$ -cocadeia** ou uma cocadeia de dimensão  $p$ .

**Definição 1.3.15** Um elemento  $u \in C^p$  é um  **$p$ -cociclo** ou simplesmente um cociclo, se  $\delta_p u = 0$ . Chamamos de  $Z^p = Z^p(C)$  o **conjunto dos  $p$ -cociclos**, e este é um submódulo de  $C^p$ .

Note que,  $Z^p$  é o núcleo do homomorfismo  $\delta_p$ .

**Definição 1.3.16** Se  $y = \delta_{p-1} x$ , diz-se que a  $p$ -cocadeia  $y$  é o **bordo** da  $(p-1)$ -cocadeia  $x$ . Chamamos de  $B^p$  o **conjunto das  $p$ -cocadeias que são bordos de  $(p-1)$ -cocadeias**, e este é um submódulo de  $C^p$ .

**Observação 1.3.17** A imagem  $B^p$  do operador  $\delta_{p-1}$  também é um submódulo de  $C^p$  e a relação  $\delta \circ \delta = 0$  significa que  $B^p \subset Z^p$ .

**Definição 1.3.18** O  $A$ -módulo quociente  $H^p(C) = Z^p/B^p$  chama-se o **grupo de cohomologia  $p$ -dimensional** do complexo  $C$ . Seus elementos são as classes de cohomologia

$$[u] = \{u + \delta v; v \in C^{p-1}\}, u \in Z^p.$$

**Definição 1.3.19** Dois ciclos  $u$  e  $u'$   $p$ -dimensionais, são **ciclos cohomólogos** se  $[u] = [u']$ , ou seja, a diferença formal entre  $u$  e  $u'$  é  $\delta v$ , para algum  $v \in C^{p-1}$ .

**Observação 1.3.20** As noções e os fatos relativos a cohomologia são análogos àqueles já estabelecidos para a homologia, levando-se em conta apenas que o operador utilizado é o operador-cobordo. Isto causa pequenas mudanças. Por exemplo, se  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  são complexos de cocadeias, o homomorfismo induzido em cohomologia por um morfismo  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  entre complexos de cocadeias é designado por  $f^* : H^p(\mathcal{X}) \rightarrow H^p(\mathcal{Y})$  em vez de  $f_*$ .

**Exemplo 1.3.21** Obtemos um complexo de cocadeias a partir de um complexo de cadeias  $C = (C_p, \partial_p)$ , formado por  $A$ -módulos. Para cada  $p \geq 0$ , definimos  $C^p = \text{Hom}(C_p, A)$  (módulo dual de  $C_p$ ), cujos elementos são os homomorfismos  $u : C_p \rightarrow A$ . O operador  $\delta = \delta_p : C^p \rightarrow C^{p+1}$  é o adjunto de  $\partial : C_{p+1} \rightarrow C_p$ , ou seja, se  $u \in C^p$  então  $\delta u \in C^{p+1}$  é o homomorfismo definido por  $(\delta u)x = u(\partial x)$  para toda cadeia  $x \in C_{p+1}$ . Isto nos dá o complexo de cocadeias  $C^* = (C^p, \delta_p)$ , com grupos de cohomologia  $H^p(C)$ .

Quando for necessário destacar o anel comutativo com unidade  $A$ , denotaremos  $H_n(C; A)$  para o grupo de homologia e  $H^n(C; A)$  para o grupo de cohomologia.

## 1.4 Alguns Complexos de Cadeias Especiais

Neste capítulo desenvolvemos a teoria de alguns complexos de cadeias com coeficientes num anel comutativo com unidade  $A$ , que são importantes para a definição de linking number apresentada no Capítulo 2. A principal referência desta seção é [22].

### 1.4.1 Complexo Simplicial

**Definição 1.4.1** Dizemos que  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  são **pontos independentes** se os vetores  $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_n - a_0$  são linearmente independentes.

**Exemplo 1.4.2** Os pontos  $a_0 = (0, 0)$ ,  $a_1 = (2, 3)$  e  $a_2 = (5, 4)$ , com  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$  são pontos independentes, pois  $a_1 - a_0 = (2, 3)$  e  $a_2 - a_0 = (5, 4)$  são vetores linearmente independentes.

Note que esta definição não depende da ordem em que os pontos foram listados inicialmente.

**Observação 1.4.3** *Dois pontos distintos são sempre independentes. De fato, dados os pontos  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$  é um vetor não nulo, pois os pontos são distintos. Portanto é sempre linearmente independente.*

**Exemplo 1.4.4** *Três pontos são independentes quando são não-colineares. E quatro pontos independentes são pontos não-coplanares.*

Podemos notar que se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ , os pontos  $0, e_1, \dots, e_n$  são independentes. Além disso, o número máximo de pontos independentes em  $\mathbb{R}^n$  é  $n + 1$ .

**Definição 1.4.5** *Uma **combinação afim** dos pontos  $a_0, a_1, \dots, a_r$  em  $\mathbb{R}^n$  é uma expressão do tipo  $p = \alpha_0.a_0 + \alpha_1.a_1 + \dots + \alpha_r.a_r$  com  $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1$ .*

**Definição 1.4.6** *Uma **combinação convexa** dos pontos  $a_0, a_1, \dots, a_r$  em  $\mathbb{R}^n$  é uma combinação afim com  $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_r \geq 0$ .*

**Definição 1.4.7** *Seja  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $E$  é um **conjunto convexo** se*

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in E, \quad \forall x, y \in E \text{ e } \forall \alpha \in [0, 1].$$

**Observação 1.4.8** *Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é **convexo** se toda combinação convexa de  $X$  anida pertence a  $X$ .*

**Definição 1.4.9** *O conjunto de todas as combinações convexas de um conjunto arbitrário  $X \subset \mathbb{R}^n$  é convexo, e é chamado de **envoltório convexo** de  $X$ .*

O envoltório convexo de um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é o menor conjunto convexo que contém  $X$ , ou seja, é a interseção de todos os conjuntos convexas que contém  $X$ .

**Teorema 1.4.10** *Sejam  $\alpha_0, \dots, \alpha_r$  pontos de  $\mathbb{R}^n$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)  $\alpha_0, \dots, \alpha_r$  são pontos independentes.

(ii) Se as combinações afins  $p = \sum_{i=0}^r \alpha_i a_i$  e  $q = \sum_{i=0}^r \beta_i a_i$  são iguais então  $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_r = \beta_r$ .

**Demonstração.** Supondo (i), admitamos que  $p = q$ . Como as combinações são afins, então  $\alpha_0 = 1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_r)$  e  $\beta_0 = 1 - (\beta_1 + \dots + \beta_r)$ . Substituindo  $p = q$ , obtemos:

$$\alpha_0 + \sum_{i=0}^r \alpha_i (a_i - a_0) = \alpha_0 + \sum_{i=0}^r \beta_i (a_i - a_0),$$



portanto,  $\alpha_0 = \beta_0, \dots, \alpha_r = \beta_r$ , pois os vetores  $a_1 - a_0, \dots, a_r - a_0$  são linearmente independentes. Logo,  $(i) \Rightarrow (ii)$ .

Reciprocamente, supondo  $(ii)$  verdadeira, suponhamos por absurdo que um dos vetores  $a_i - a_0$  seja combinação linear dos demais, digamos, sem perda de generalidade, que se tenha:

$$a_1 - a_0 = \alpha_2(a_2 - a_0) + \dots + \alpha_r(a_r - a_0),$$

ou seja, que  $a_1 = (1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_r)a_0 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_r a_r$ . Os dois membros desta última igualdade nos dão duas combinações afins dos pontos  $a_0, a_1, \dots, a_r$ , as quais são iguais. Porém, podemos observar que o coeficiente de  $a_1$ , que é  $\alpha_1$ , é igual a 1 por um lado e 0 pelo outro, o que contraria a hipótese  $(ii)$ . Portanto,  $(ii) \Rightarrow (i)$ . ■

**Definição 1.4.11** *Sejam  $a_0, a_1, \dots, a_r$  pontos independentes de  $\mathbb{R}^n$ . O conjunto  $s = \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle$  de todas as combinações convexas  $p = \sum_{i=0}^r \alpha_i a_i$  é chamado de **simplexo  $r$ -dimensional** (ou  $r$ -simplexo) de vértices  $a_0, a_1, \dots, a_r$ .*

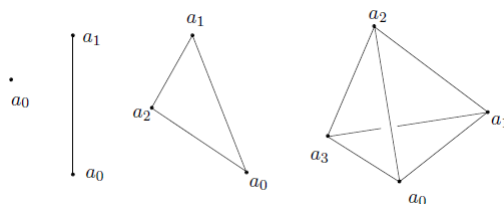


Figura 1.2: Simplexos de dimensões 0, 1, 2 e 3, respectivamente.

**Definição 1.4.12** *Seja  $p \in s$  uma combinação convexa dos pontos  $a_0, a_1, \dots, a_r$ . Chamamos de **coordenadas baricêntricas** do ponto  $p$  os coeficientes  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ .*

**Definição 1.4.13** *Se todas as coordenadas baricêntricas do ponto  $p \in s$  são maiores que zero, diz-se que  $p$  é **ponto interior** de  $s$ . O conjunto de todos os pontos interiores de  $s$  é convexo e constitui o que se chama um **simplexo aberto**.*

**Definição 1.4.14** *O **bordo** de  $s$  (visto como conjunto de pontos) é formado pelos pontos de  $s$  que não são interiores, ou seja, que possuem alguma coordenada baricêntrica nula.*

**Definição 1.4.15** *Definimos o **baricentro** (ou ponto médio) de um  $r$ -simplexo  $s = \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle$  como sendo o ponto  $b_s = \frac{(a_0 + \dots + a_r)}{r+1}$ .*

**Exemplo 1.4.16** *O baricentro de um 0-simplexo, que é um ponto, é o próprio 0-simplexo. O baricentro de um 1-simplexo, que é um segmento de reta, é o ponto médio deste segmento.*

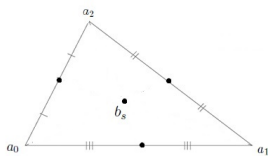


Figura 1.3: Baricentro de um 2-simplexo.

**Definição 1.4.17** Fixando um subconjunto  $\{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subset \{0, 1, \dots, r\}$ , o simplexo  $\langle a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k} \rangle$  é chamado uma **face** de  $s$ . Em particular, cada vértice de  $s$  é uma face (de dimensão zero). Para cada  $i = 0, 1, \dots, r$ , a face  $s_{(i)} = \langle a_0, a_1, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_r \rangle$  chama-se **face oposta ao vértice**  $a_i$ .

**Observação 1.4.18** Apesar das nomenclaturas, devemos ter certa cautela ao fazer relações sobre ponto interior, simplexo aberto, etc, pois estas têm significados referentes ao simplexo e não ao espaço euclidiano que o contém.

**Exemplo 1.4.19** Se  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}^3$  são pontos não-colineares,  $p = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$  é um ponto interior do simplexo  $s = \langle a, b, c \rangle$ . Mas, considerando  $s$  como um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , seu interior é vazio.

**Definição 1.4.20** O **diâmetro** de um  $r$ -simplexo  $s = \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle$  é definido por  $d = \max \{|a_i - a_j|; i, j = 0, \dots, r\}$ .

Existem  $(r+1)!$  maneiras de ordenar os vértices de um simplexo de dimensão  $r$ . Consideremos equivalentes duas dessas ordenações quando uma delas puder ser obtida da outra por meio de uma quantidade par de permutações dos  $r+1$  vértices. Dessa forma essa relação nos estabelece duas classe possíveis.

**Definição 1.4.21** Chama-se **orientação do simplexo** cada uma dessas duas classes de equivalência segundo esta relação.

Orientar um  $r$ -simplexo é dotá-lo de uma dessas duas orientações possíveis, isto pressupõe  $r > 0$ . Se  $r = 0$ , orientar um 0-simplexo, ou seja, um ponto, é apenas precedê-lo do sinal + (positivo) ou do sinal - (negativo).

Escrevemos  $s = [a_0, a_1, \dots, a_r]$  para indicar o simplexo  $s = \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle$  munido da orientação determinada pela ordem  $a_0 < a_1 < \dots < a_r$ . O mesmo simplexo, quando munido da outra orientação (chamada **orientação oposta**), será indicado com  $-s$ .

**Exemplo 1.4.22** Se tomarmos no triângulo  $s = \langle a, b, c \rangle$  a orientação  $s = [a, b, c]$ , a orientação oposta será  $-s = [b, a, c]$ . Note que  $[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b] = -[a, c, b] = -[b, a, c] = -[c, b, a]$ . Analogamente, as duas orientações possíveis do tetraedro  $s = \langle a, b, c, d \rangle$  são  $s = [a, b, c, d]$  e  $-s = [b, a, c, d]$ .

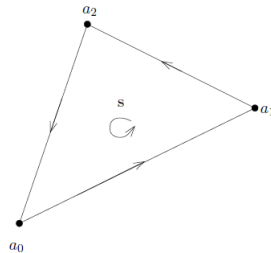


Figura 1.4:  $s = [a_0, a_1, a_2]$ ,  $s_{(0)} = [a_1, a_2]$ ,  $s_{(1)} = [a_2, a_0]$ ,  $s_{(2)} = [a_0, a_1]$ .

**Definição 1.4.23** Dado o simplexo  $s = [a_0, a_1, \dots, a_r]$ , a **orientação induzida** por  $s$  na face  $s_{(0)} = \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle$ , oposta ao vértice  $a_0$ , é  $s_{(0)} = [a_1, a_2, \dots, a_r]$ . Levando em conta que  $[a_i, a_0, a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_r] = [a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_r] = (-1)^i s$ , segue que a orientação induzida por  $s$  na  $i$ -ésima face  $s_{(i)} = \langle a_0, a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_r \rangle$  é  $s_{(i)} = [a_0, a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_r]$ .

Quando orientamos um simplexo  $r$ -dimensional, suas faces de dimensão  $r - 1$  herdam as orientações induzidas. O mesmo não se dá com as faces de dimensão  $r - 2$ , conforme esclarece o teorema seguinte.

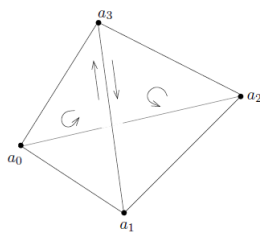


Figura 1.5:  $s = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ ,  $(s_{(0)})_{(2)} = [a_3, a_1]$ ,  $(s_{(2)})_{(0)} = [a_1, a_3]$ .

**Teorema 1.4.24** Num simplexo  $r$ -dimensional orientado  $s$ , toda face  $(r - 2)$ -dimensional  $t$  pertence a duas faces de dimensão  $r - 1$ , as quais, com as orientações nelas induzidas por  $s$ , induzem orientações opostas em  $t$ .

**Demonstração.** Sejam  $s = [a_0, a_1, \dots, a_r]$  e  $t = \langle a_0, \dots, \widehat{a_i}, \dots, \widehat{a_j}, \dots, a_r \rangle$ , com  $i < j$ . As faces  $(r - 1)$ -dimensionais de  $s$  (com as orientações induzidas) que contêm  $t$  são:

$$s_{(i)} = (-1)^i [a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_j, \dots, a_r] \text{ e}$$

$$s_{(j)} = (-1)^j [a_0, \dots, a_i, \dots, \widehat{a}_j, \dots, a_r].$$

As orientações que  $s_{(i)}$  e  $s_{(j)}$ , induzem em  $t$  são respectivamente,

$$(s_{(i)})_{(j)} = (-1)^{i+j-1} [a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, \widehat{a}_j, \dots, a_r] \text{ e}$$

$$(s_{(j)})_{(i)} = (-1)^{i+j} [a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, \widehat{a}_j, \dots, a_r],$$

as quais são opostas uma da outra. ■

Até agora, consideramos  $r$ -simplexos como um conjunto de pontos num espaço euclidiano, que podemos também chamar de  **$r$ -simplexos retilíneos**. Podemos ampliar nossa definição fazendo uso de homeomorfismos entre um espaço euclidiano e outros espaços topológicos arbitrários.

**Definição 1.4.25** Chamamos de  **$r$ -simplexo simplicial** (ou *simplexo  $r$ -dimensional topológico*) a imagem, via um homeomorfismo, de um  $r$ -simplexo retilíneo num espaço topológico arbitrário  $M$ .

**Observação 1.4.26** Todos os conceitos vistos até agora para *simplexos retilíneos* podem ser transportados para os *simplexos simpliciais* através dos seus homeomorfismos.

Sendo assim, os pontos internos, o bordo, o baricentro e as faces de um *simplexo simplicial* são a imagem destes conjuntos do *simplexo retilíneo*, através do homeomorfismo que define o *simplexo simplicial* no espaço  $M$ .

Definimos o *diâmetro* de um *simplexo simplicial* como sendo o *diâmetro* do *simplexo retilíneo* que é sua *pré-imagem*.

Como os vértices do *simplexo simplicial* são a imagem dos vértices de um *simplexo retilíneo*, então para orientar um *simplexo simplicial*, basta orientar o *simplexo retilíneo* que é sua *pré-imagem*. Desta forma, também fica bem definida a orientação induzida por um *simplexo simplicial* na sua face  $s_{(i)}$ .

Considere dois  $r$ -simplexos retilíneos distintos  $s$  e  $s'$  no espaço euclidiano. É possível que  $\phi_1(s)$  e  $\phi_2(s)$  sejam um mesmo  $r$ -simplexo simplicial, onde  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são homeomorfismos de  $s$  e  $s'$  num espaço topológico  $M$ , respectivamente. Dizemos que dois  $r$ -simplexos simpliciais são **idênticos** quando existe uma aplicação linear  $g : s \rightarrow s'$  de forma que  $\phi_1(x) = \phi_2(g(x))$ , para todo  $x \in s$ .

Com o intuito de tornar nossos resultados mais gerais possíveis, a partir de agora consideramos  $r$ -simplexos como sendo  $r$ -simplexos simpliciais, quando necessário deixaremos claro quando nos referirmos a simplexos retilíneos.

**Definição 1.4.27** *Seja  $p$  um ponto no espaço topológico  $M$  e  $U$  uma vizinhança aberta deste ponto. Se  $p$  pertence a um simplexo  $s \subset M$  chamamos o conjunto  $U_s = U \cap s$  de **vizinhança aberta** de  $p$  em  $s$ .*

**Definição 1.4.28** *Seja  $M$  um espaço topológico. Uma **decomposição simplicial** de  $M$  é um conjunto finito ou infinito enumerável de simplexos de dimensões 0 a  $n$ , que juntamente com suas faces (consideradas também como simplexos deste conjunto), satisfazem as seguintes condições:*

1. *Cada ponto de  $M$  pertence a pelo menos um simplexo.*
2. *Cada ponto de  $M$  pertence a uma quantidade finita de simplexos.*
3. *Dois simplexos são disjuntos, ou um é face do outro, ou eles tem uma face em comum que consiste na interseção deste simplexos.*
4. *Se  $p \in M$  e  $U_{s_1}, \dots, U_{s_r}$  são vizinhanças abertas de  $p$  nos simplexos  $s_1, \dots, s_r$ , então  $U_{s_1} \cup \dots \cup U_{s_r}$  é uma vizinhança aberta de  $p$  em  $M$ .*

**Definição 1.4.29** *Um espaço topológico  $M$  que admite uma decomposição simplicial é chamado de  **$n$ -complexo simplicial** e denotaremos por  $\mathcal{M}^n$ .*

**Definição 1.4.30** *Um  $n$ -complexo simplicial é dito ser **finito** (respectivamente, infinito) se possui uma quantidade finita (respectivamente, infinita) de simplexos.*

**Definição 1.4.31** *Dizemos que um  $n$ -complexo simplicial é **puro** se cada  $r$ -simplexo,  $r < n$ , é face de algum  $n$ -simplexo do complexo simplicial.*

Quando a decomposição simplicial de um espaço topológico  $N$  é feita apenas por meio de simplexos retilíneos, ou seja,  $N$  está num espaço euclidiano,  $\mathcal{N}^n$  é chamado de  $n$ -complexo simplicial retilíneo. Dado um espaço topológico  $M$  arbitrário, dizemos que ele admite uma **triangulação** se existe um homeomorfismo  $f : \mathcal{N}^n \rightarrow M$ , onde  $\mathcal{N}^n$  é um  $n$ -complexo simplicial retilíneo. Dessa forma, um espaço topológico que admite uma triangulação é um complexo simplicial  $\mathcal{M}^n$  onde todos os seus simplexos são imagens de um mesmo homeomorfismo  $f$ .

**Observação 1.4.32** Toda variedade diferenciável compacta admite triangulação, portanto toda variedade diferenciável pode ser vista como um complexo simplicial finito e puro (ver [28, p. 124]).

**Exemplo 1.4.33** O toro  $T^2$  pode ser pensado como o espaço quociente de um retângulo pela relação de equivalência que identifica cada lado com o lado oposto mantendo as orientações. Mais explicitamente, se o retângulo é  $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ , as identificações são  $(x, \gamma) \equiv (x, \delta)$  e  $(\alpha, y) \equiv (\beta, y)$ , para todo  $x \in [\alpha, \beta]$  e todo  $y \in [\gamma, \delta]$ . O esquema indicado na figura abaixo mostra uma triangulação do toro que o exhibe como um poliedro com nove 0-simplexos retilíneos, vinte e sete 1-simplexos retilíneos e dezoito 2-simplexos retilíneos.

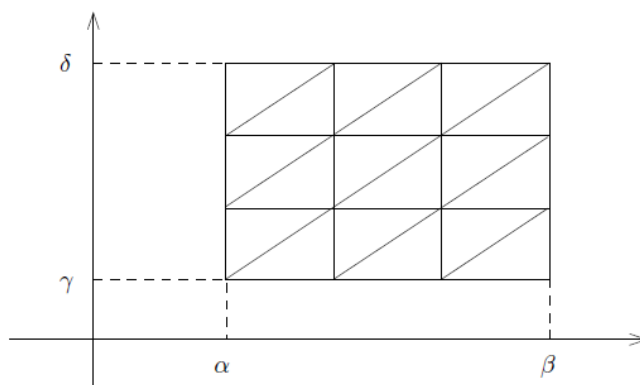


Figura 1.6: Triangulação do toro

Dada uma decomposição simplicial de um complexo simplicial é possível obter um novo complexo, mais refinado, a partir de uma subdivisão.

**Definição 1.4.34** Uma **subdivisão** de um complexo simplicial  $\mathcal{M}_1^n$  é um novo complexo simplicial  $\mathcal{M}_2^n$  que, como conjunto de pontos, é igual a  $\mathcal{M}_1^n$ . Porém, com uma quantidade maior de simplexos, os quais estão todos contidos nos simplexos de  $\mathcal{M}_1^n$ . Mais precisamente, todo simplexo de  $\mathcal{M}_1^n$  é a reunião dos simplexos de  $\mathcal{M}_2^n$  nele contidos.

O exemplo mais frequente de subdivisão é a subdivisão normal.

**Definição 1.4.35** Para cada simplexo  $s$  de um complexo simplicial  $\mathcal{M}_1^n$  consideremos o baricentro  $b_s$  deste simplexo. A **subdivisão normal** (ou **baricêntrica**) deste complexo é um novo complexo simplicial  $\mathcal{M}_2^n$  no qual seus simplexos são da forma  $s' = \langle b_{s_0}, b_{s_1}, \dots, b_{s_r} \rangle$ , onde  $s_i \in \mathcal{M}_1^n$  e  $s_0 \subset s_1 \subset \dots \subset s_r$ .

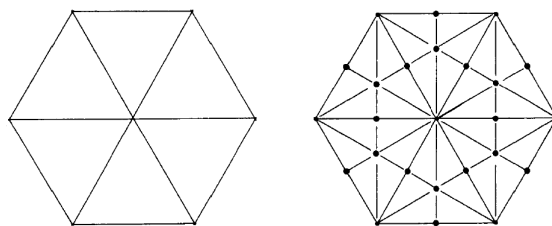


Figura 1.7: Subdivisão normal de um complexo simplicial 2-dimensional

Se, em vez do baricentro, tivéssemos escolhido um outro ponto  $p$  qualquer no interior de cada simplexo  $s$ , a definição indutiva dada acima ainda produziria uma subdivisão do complexo simplicial  $\mathcal{M}^n$ . A vantagem da subdivisão normal está na regularidade com que ela reduz o tamanho dos simplexos.

**Observação 1.4.36** Dado  $\epsilon > 0$  e um complexo simplicial  $\mathcal{M}^n$ , é possível obter um novo complexo simplicial cujo o diâmetro de cada  $n$ -simplexo seja menor que  $\epsilon$ , basta subdividir normalmente  $\mathcal{M}^n$  e repetir o processo quantas vezes forem necessárias.

### Pseudovariedades

Agora voltamos nossa atenção para uma classe especial de complexos, as pseudovariedades.

**Definição 1.4.37** Uma **pseudovarietade fechada**  $n$ -dimensional é um  $n$ -complexo simplicial  $\mathcal{M}^n$  que satisfaz as seguintes condições:

- (P1)  $\mathcal{M}^n$  é finito e puro;
- (P2) Cada  $(n - 1)$ -simplexo de  $\mathcal{M}^n$  é face de exatamente dois  $n$ -simplexos;
- (P3) Dois  $n$ -simplexos quaisquer  $s$  e  $\bar{s}$  em  $\mathcal{M}^n$  são encadeados, isto é, existem  $n$ -simplexos  $s_0, \dots, s_r$  em  $\mathcal{M}^n$  tais que  $s_0 = s$ ,  $s_r = \bar{s}$  e para cada  $i = 0, \dots, r - 1$ ,  $s_i \cap s_{i+1}$  é uma face de dimensão  $n-1$ .

Dois  $n$ -simplexos que têm uma face comum de dimensão  $n - 1$  são chamados **incidentes**.

**Definição 1.4.38** Uma **pseudovarietade com bordo**  $n$ -dimensional é um  $n$ -complexo simplicial  $\mathcal{M}^n$  que satisfaz as condições (P1) e (P3) da definição de pseudovarietade fechada, e ainda satisfaz:

- ( $\overline{P2}$ ) Cada  $(n - 1)$ -simplexo é face de no máximo dois  $n$ -simplexos e existe pelo menos um  $(n - 1)$ -simplexo que é face de apenas um  $n$ -simplexo.

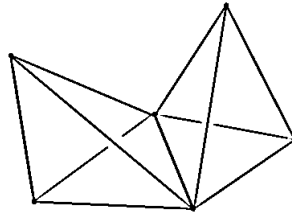


Figura 1.8: Pseudovarietade fechada 3-dimensional

**Definição 1.4.39** O **bordo** de uma  $n$ -pseudovarietade com bordo consiste de todos os  $(n-1)$ -simplexos que são face de apenas um  $n$ -simplexo. Os simplexos que não fazem parte do bordo são ditos **simplexos internos**.

**Definição 1.4.40** Dizemos que uma pseudovarietade fechada ou uma pseudovarietade com bordo  $n$ -dimensional é **orientável** se cada um de seus  $n$ -simplexos podem ser coerentemente orientados, isto é, dois  $n$ -simplexos incidentes induzem orientações opostas na sua face comum  $(n-1)$ -dimensional. Se não for possível atribuir orientação coerente, diz-se que a pseudovarietade é não orientável.

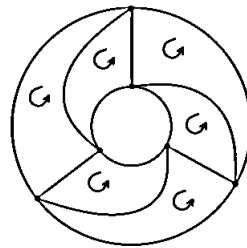


Figura 1.9: Pseudovarietade com bordo orientada 2-dimensional

### Complexo de cadeias simplicial

Nosso objetivo agora é definir o complexo de cadeias simplicial com coeficientes em  $A$ , onde  $A$  é um anel comutativo com unidade. Para isso precisamos definir quem são as  $p$ -cadeias simpliciais e o homomorfismo  $\partial_p$ .

Considere um complexo simplicial  $\mathcal{M}^n$  finito. Denotaremos por  $s_i^p$ ,  $i = 1, \dots, \alpha^p$ , todos os simplexos de dimensão  $p$  em  $\mathcal{M}^n$ . Neste contexto, segue a definição:

**Definição 1.4.41** Seja  $A$  um anel comutativo com unidade. Uma  **$p$ -cadeia simplicial** do complexo  $\mathcal{M}^n$  é da forma

$$z^p = u_1 s_1^p + u_2 s_2^p + \dots + u_{\alpha_p} s_{\alpha_p}^p,$$



onde  $u_i \in A$  e cada  $s_i^p$  está orientado,  $i = 1, \dots, \alpha_p$ . O conjunto de todas as  $p$ -cadeias formam o  $A$ -módulo  $C_p$ , gerado por  $\{s_1^p, s_2^p, \dots, s_{\alpha_p}^p\}$ .

**Observação 1.4.42** Note que uma  $p$ -cadeia simplicial  $z^p$  é unicamente determinada pelo vetor  $(u_1, \dots, u_{\alpha_p})$ . Além disso, dadas duas  $p$ -cadeias simpliciais  $x^p$  e  $y^p$ , determinadas pelos vetores  $(w_1, \dots, w_{\alpha_p})$  e  $(v_1, \dots, v_{\alpha_p})$ , respectivamente, podemos definir a  $p$ -cadeia  $z^p = x^p + y^p$  determinada pelo vetor  $(w_1 + v_1, \dots, w_{\alpha_p} + v_{\alpha_p})$ .

Para definirmos o operador bordo  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$ , precisamos definir o bordo de um  $p$ -simplexo orientado.

**Definição 1.4.43** O bordo de um  $p$ -simplexo orientado  $s^p$  é uma  $(p-1)$ -cadeia simplicial, formada pela soma de suas  $(p-1)$ -faces com orientação induzida e coeficientes 1, onde 1 representa a unidade do anel  $A$ . Denotamos por  $\partial_p(s^p)$ .

**Exemplo 1.4.44** Considere o  $p$ -simplexo orientado  $s^p = \varepsilon[a_0, a_1, \dots, a_p]$ , onde  $\varepsilon = \pm 1$  dependendo da orientação escolhida, e  $A = \mathbb{Z}$ . Então, o bordo de  $s^p$  será

$$\partial_p(s^p) = \varepsilon \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle a_0, a_1, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_p \rangle = \varepsilon \sum_{i=0}^p (-1)^i s_{(i)}.$$

Note que o conceito de bordo de um  $p$ -simplexo orientado é diferente do conceito de bordo apenas como um conjunto de pontos, anteriormente apresentado.

**Definição 1.4.45** Seja  $z^p = u_1 s_1^p + \dots + u_{\alpha_p} s_{\alpha_p}^p$  uma  $p$ -cadeia. Definimos a aplicação  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$ , que é chamada **operador bordo**, por

$$\partial_p(z^p) := \sum_{i=0}^{\alpha_p} u_i \partial_p(s_i^p).$$

Note que para a construção deste complexo de cadeias simplicial, fizemos o uso do conceito de simplexo topológico, ou seja, imagem de um simplexo retilíneo via um homeomorfismo. Uma forma de generalizar este conceito é trabalharmos com **simplexos singulares**, que são imagens de simplexos retilíneos via aplicações contínuas, não necessariamente homeomorfismos. Dessa forma, um simplexo simplicial é um caso particular de simplexo singular.

Assim como na Observação 1.4.26, todos os conceitos estudados aqui são estendidos para simplexos singulares. E, da mesma maneira, podemos definir o **complexo de cadeias singulares**. Logo, um complexo de cadeias simplicial, é um caso particular de um complexo de cadeias singulares.

### 1.4.2 Complexo de Estrelas

Dado um complexo simplicial  $(n - 1)$ -dimensional finito, podemos obter um complexo simplicial  $n$ -dimensional. Para obter este novo complexo basta escolhermos um ponto adicional  $a$  e tornar cada  $i$ -simplexo  $s^i = \langle a_0, a_1, \dots, a_i \rangle$  do  $(n - 1)$ -complexo em um  $(i + 1)$ -simplexo da forma  $s^{i+1} = \langle a, a_0, a_1, \dots, a_i \rangle$ .

**Definição 1.4.46** *Este complexo simplicial  $n$ -dimensional é chamado de  **$n$ -estrela simplicial**. O ponto  $a$  é chamado de **ponto central** e o complexo simplicial  $(n - 1)$ -dimensional inicial é chamado de **bordo externo** da  $n$ -estrela simplicial.*

A figura a seguir apresenta um exemplo de uma 2-estrela simplicial com bordo externo um  $(n - 1)$ -complexo simplicial finito formado por três 0-simplexos (pontos mais escuros) e quatro 1-simplexos (traços mais escuros).

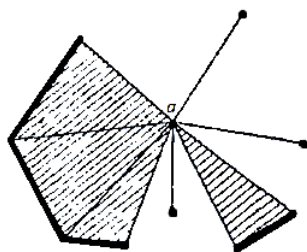


Figura 1.10: Estrela simplicial 2-dimensional

**Exemplo 1.4.47** *Todos os simplexos de um complexo simplicial que tem um vértice em comum formam uma estrela simplicial. Basta enxergarmos esse vértice comum como o ponto central da estrela.*

**Definição 1.4.48** *Um **complexo de estrelas  $n$ -dimensional**  $\mathcal{R}^n$  é um complexo simplicial  $n$ -dimensional finito cujos simplexos de dimensão 0 a  $n$  estão particionados em estrelas de tal forma que o bordo externo de uma  $i$ -estrela consiste inteiramente de  $(i - 1)$ -estrelas.*

A precisa definição é dada usando indução sobre a dimensão do complexo de estrelas da seguinte forma:

Um 0-complexo de estrelas  $\mathcal{R}^0$  consiste de uma quantidade finita de pontos,

$$e_1^0, e_2^0, \dots, e_{\alpha_0}^0,$$

que são as 0-estrelas simpliciais (ou estrelas nulas) de  $\mathcal{R}^0$ . A partir deste complexo obtemos um 1-complexo de estrelas  $\mathcal{R}^1$  adicionando uma quantidade finita de 1-estrelas

$$e_1^1, e_2^1, \dots, e_{\alpha_1}^1,$$

as quais tem como bordo externo certas 0-estrelas de  $\mathcal{R}^0$ . Seguindo este raciocínio, um  $(n-1)$ -complexo de estrelas  $\mathcal{R}^{n-1}$  possui as estrelas

$$e_1^k, e_2^k, \dots, e_{\alpha_k}^k,$$

de dimensão  $k$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ , então um  $n$ -complexo de estrelas  $\mathcal{R}^n$  é obtido adicionando uma quantidade finita de  $n$ -estrelas  $e_1^n, \dots, e_{\alpha_n}^n$ , as quais tem como bordo externo certas  $(n-1)$ -estrelas de  $\mathcal{R}^{n-1}$ .

**Observação 1.4.49** *O  $n$ -complexo de estrelas  $\mathcal{R}^n$  pode ser visto como um  $n$ -complexo simplicial. Quando quisermos nos referir ao complexo simplicial denotaremos por  $\mathcal{R}^n$ .*

**Exemplo 1.4.50** *Conseguimos obter um complexo de estrelas  $n$ -dimensional a partir de um complexo simplicial  $\mathcal{M}^n$  finito. Basta subdividirmos normalmente  $\mathcal{M}^n$  e considerarmos como as  $k$ -estrelas do complexo de estrela os  $k$ -simplexos simpliciais subdivididos normalmente.*

**Definição 1.4.51** *Num complexo de estrelas  $\mathcal{R}^n$ , se uma  $(k-1)$ -estrela  $e_i^{k-1}$  for o bordo externo de uma  $k$ -estrela  $e_j^k$ , dizemos que elas são **diretamente incidentes**. E se,  $e^i, e^{i+1}, \dots, e^{k-1}, e^k$  é uma sequencia de estrelas em dimensões crescentes tais que cada uma é o bordo externo da próxima, dizemos que  $e^i$  e  $e^k$  são **incidentes**.*

**Definição 1.4.52** *Um complexo de estrelas  $\mathcal{R}^n$  é dito **puro** se cada  $k$ -estrela é incidente a uma  $(k+1)$ -estrela.*

Note que um complexo de estrelas é puro de acordo com a definição acima se, e somente se,  $\mathcal{R}^n$  é puro de acordo com a Definição 1.4.31.

**Proposição 1.4.53** *Sejam  $e^i, e^k, \dots, e^l$  ( $i < k < \dots < l$ ) uma sequência de estrelas tais que cada uma é incidente com a próxima (não necessariamente diretamente incidente), então seus pontos centrais  $p^i, p^k, \dots, p^l$  são vértices de um simplexo simplicial de  $\mathcal{R}^n$ . Além disso, podemos escrever todos os simplexos de  $\mathcal{R}^n$  desta maneira, ou seja, seus vértices como pontos centrais de estrelas incidentes.*

Ver a demonstração em [22, Teorema II, p. 237].

A partir de agora, fazendo o uso do resultado acima, denotaremos todos os simplexes de  $\dot{\mathcal{R}}^n$  por  $\langle p^i, p^k, \dots, p^l \rangle$ , onde  $i < k < \dots < l$  e  $i, k, \dots, l$  são as dimensões das estrelas as quais pertencem estes pontos centrais.

**Proposição 1.4.54** *Se  $\langle p^i, p^k, \dots, p^l \rangle$  é um simplexo de  $\dot{\mathcal{R}}^n$  e  $\langle p^l, p^m, \dots, p^z \rangle$  é um segundo simplexo de  $\dot{\mathcal{R}}^n$  então  $\langle p^i, p^k, \dots, p^l, p^m, \dots, p^z \rangle$  é também um simplexo em  $\dot{\mathcal{R}}^n$ .*

Ver a demonstração em [22, Teorema III, p. 238].

Agora, vamos dar uma atenção especial aos complexos de estrelas puros.

**Definição 1.4.55** *Dado um complexo de estrelas puro  $\mathcal{R}_e^n$  chamamos de seu **complexo de estrelas dual**, o complexo de estrelas  $\mathcal{R}_f^n$  obtido por uma correspondência biunívoca entre cada  $k$ -estrela  $e^k$  de  $\mathcal{R}_e^n$  com uma  $(n - k)$ -estrela  $f^{n-k}$  de  $\mathcal{R}_f^n$ , respeitando as incidências (estrelas incidentes em  $\mathcal{R}_e^n$  correspondem a estrelas incidentes em  $\mathcal{R}_f^n$ ).*

**Teorema 1.4.56** *Todo complexo de estrelas puro possui seu complexo de estrelas dual, o qual é determinado por um isomorfismo.*

Ver a demonstração em [22, Teorema IV, p. 238].

Como existe uma correspondência biunívoca entre as  $k$ -estrelas de um complexo de estrelas  $\mathcal{R}_e^n$  e as  $(n - k)$ -estrelas de  $\mathcal{R}_f^n$ , então também temos uma correspondência bijetora entre seus respectivos pontos centrais  $p^k$  e  $q^{n-k}$ . Além disso, sabemos pela Proposição 1.4.53 que se  $\langle p^i, p^k, \dots, p^l \rangle$  é um simplexo de  $\dot{\mathcal{R}}_e^n$  então as estrelas  $e^i, e^k, \dots, e^l$  são incidentes.

Logo, pela dualidade, as estrelas  $f^{n-i}, f^{n-k}, \dots, f^{n-l}$  são incidentes em  $\mathcal{R}_f^n$ , consequentemente seus pontos centrais  $q^{n-i}, q^{n-k}, \dots, q^{n-l}$  são os vértices de um simplexo em  $\dot{\mathcal{R}}_f^n$ . Isto é, na correspondência entre os pontos centrais  $p^k$  e  $q^{n-k}$ , os simplexos de  $\dot{\mathcal{R}}_e^n$  podem ser vistos como simplexos de  $\dot{\mathcal{R}}_f^n$ .

Portanto, podemos considerar os complexos de estrelas duais  $\mathcal{R}_e^n$  e  $\mathcal{R}_f^n$  como sendo diferentes divisões estelares de um mesmo complexo simplicial  $\dot{\mathcal{R}}^n = \dot{\mathcal{R}}_e^n = \dot{\mathcal{R}}_f^n$ .

Com essas considerações, temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.4.57** *Considere  $\mathcal{R}_e^n$  e  $\mathcal{R}_f^n$  complexos de estrelas duais. Se a estrela  $e^k$  consiste de todos os  $k$ -simplexos de  $\dot{\mathcal{R}}^n$  que possuem como último vértice o ponto central  $p^k$  de  $e^k$ , então sua estrela dual  $f^{n-k}$  é a  $(n - k)$ -estrela que consiste de todos os  $(n - k)$ -simplexos de  $\dot{\mathcal{R}}^n$  que possuem como primeiro vértice o ponto  $p^k$ .*

Ver a demonstração em [22, Teorema V, p. 239].

Segue do teorema acima que estrelas duais possuem somente seu ponto central em comum.

### Complexo Celular

Vamos definir agora, uma caso especial de complexo de estrelas, o complexo celular.

**Definição 1.4.58** *Uma  $k$ -estrela é chamada de  **$k$ -célula** se seu bordo externo tem os mesmos grupos de homologia que uma  $(k - 1)$ -esfera, para  $k \geq 1$ . Se  $k > 1$  o bordo externo também deve satisfazer as condições para ser uma pseudovarietade fechada. No caso  $k = 0$ , uma 0-célula é simplesmente uma 0-estrela.*

**Exemplo 1.4.59** *Uma 0-célula é um ponto, as 1-células são homeomorfas a dois segmentos incidentes a um ponto, as 2-células são homeomorfas a um disco fechado, e as 3-células são homeomorfas a uma bola fechada tridimensional. A partir da dimensão 4 não é possível catalogar desta maneira as células, já que existem  $n$ -células que não são homeomorfas a uma bola fechada  $n$ -dimensional. Um exemplo disso é uma estrela simplicial quadridimensional cujo bordo externo é um espaço tridimensional de Poincaré.*

**Definição 1.4.60** *Um  **$n$ -complexo celular** é um  $n$ -complexo de estrelas no qual todas as estrelas são células.*

**Observação 1.4.61** *Note que um  $k$ -simplexo subdividido normalmente é uma  $k$ -célula. Dessa forma, o  $n$ -complexo de estrelas dado pela subdivisão normal de um  $n$ -complexo simplicial é também um  $n$ -complexo celular.*

**Exemplo 1.4.62** *Considere uma  $m$ -esfera  $S^m$  em  $\mathbb{R}^{m+1}$ . Podemos dividir  $S^m$  de uma maneira especial chamada de divisão octaédrica da  $m$ -esfera, para isso considere os vetores unitários  $b_1, b_2, \dots, b_{m+1}$  direcionados da origem de  $\mathbb{R}^{m+1}$  para os pontos  $(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$ . Os vetores  $\epsilon_1 b_1, \epsilon_2 b_2, \dots, \epsilon_{m+1} b_{m+1}$ , onde  $\epsilon_i = \pm 1$ ,  $i = 1, \dots, m + 1$ , formam o bordo de  $2^{m+1}$   $(m + 1)$ -simplexos retilíneos que satisfazem as condições de uma decomposição simplicial.*

*Considerando um homeomorfismo destes  $2^{m+1}$   $(m + 1)$ -simplexos retilíneos na  $S^m$ , podemos enxergar a  $m$ -esfera como um complexo simplicial. Ao subdividirmos normalmente esse complexo simplicial, obtemos um complexo celular  $\mathcal{S}^m$ .*

Uma  $k$ -célula  $e^k$  é uma pseudovarietade com bordo. Para  $k > 1$ , o bordo externo de  $e^k$  é uma pseudovarietade fechada orientável, já que ele tem os mesmos grupos de homologia de uma  $(k - 1)$ -esfera que são grupos cíclicos livres e por [22, p. 91] isso é equivalente a ser orientável. E assim, por um resultado que pode ser visto em [22, p. 94] temos que  $e^k$  é uma pseudovarietade com bordo orientável.

**Definição 1.4.63** *Nas condições acima, para **orientar uma  $k$ -célula**  $e^k$  basta atribuímos uma orientação para  $e^k$  como uma pseudovarietade com bordo. No caso em que  $k = 0$ , ou seja,  $e^k$  é um ponto, basta atribuímos um sinal  $+$  ou  $-$ , da mesma forma que se orienta um 0-simplexo. Se  $k=1$ , basta atribuímos uma orientação coerente para os dois 1-simplexos que formam  $e^k$ .*

Podemos considerar, a partir de agora, uma  $k$ -célula orientada como um conjunto de simplexos orientados, vistos como uma  $k$ -cadeia simplicial cujos coeficientes são todos 1. O bordo externo de  $e^k$  é o bordo dessa cadeia simplicial, a qual fornece uma orientação para as  $(k - 1)$ -células que compõe o bordo externo de  $e^k$ , o que chamamos de **orientação induzida** pela  $k$ -célula orientada.

**Definição 1.4.64** *Um  **$n$ -complexo celular orientado** é um complexo celular no qual para cada  $k$ -célula, com  $k = 0, \dots, n$ , foi atribuída uma orientação.*

### Complexo de cadeias celular

Consideremos agora um  $n$ -complexo celular  $\mathcal{R}^n$  orientado.

**Definição 1.4.65** *Uma  **$k$ -cadeia celular** de um  $n$ -complexo celular orientado  $\mathcal{R}^n$  é uma soma formal da forma*

$$u^k = q_1 e_1^k + q_2 e_2^k + \dots + q_{\alpha_k} e_{\alpha_k}^k$$

na qual  $e_1^k, \dots, e_{\alpha_k}^k$  são as  $k$ -células de  $\mathcal{R}^n$  e os coeficientes  $q_1, \dots, q_{\alpha_k}$  pertencem a um anel comutativo com unidade  $A$ .

As células  $e_i^k$  podem ser vistas como cadeias simpliciais em  $\mathcal{R}^n$ , logo uma cadeia celular é uma cadeia simplicial particular, onde cada célula pode ser vista como um agrupamento de simplexos simpliciais. Se este agrupamento é possível, ele pode ser feito de uma única maneira, ver [22, p. 242], então os coeficientes  $q_i$  são unicamente determinados pela cadeia. Dessa forma, dada uma  $k$ -cadeia celular  $u^k$ , se quisermos nos referir a ela como  $k$ -cadeia simplicial denotaremos por  $\dot{u}^k$ .

Para termos o complexo de cadeias bem definido precisamos entender o operador bordo desde complexo.

**Definição 1.4.66** Chamando de  $E_k$  o conjunto de todas as  $k$ -cadeias celulares de um complexo celular  $\mathcal{R}^n$ , definimos o **operador bordo**  $\partial_k : E_k \rightarrow E_{k-1}$  da seguinte maneira:

$$\partial_k(u^k) = \partial_k(\dot{u}^k),$$

onde  $u^k$  é uma  $k$ -cadeia celular de  $E_k$ .

Notemos então que, a cadeia celular  $u^k$  é um ciclo, ou homóloga ao ciclo nulo se, e somente se, a cadeia simplicial  $\dot{u}^k$  é ciclo ou homóloga ao ciclo nulo, respectivamente.

O bordo de uma  $(k + 1)$ -célula orientada de um complexo celular é um exemplo de cadeia celular cuja dimensão é  $k$ , como podemos ver pela definição abaixo.

**Definição 1.4.67** Dada uma  $(k + 1)$ -célula orientada  $e^{k+1}$  de um complexo celular  $\mathcal{R}^n$ , definimos seu **bordo**, formalmente, por:

$$\partial(e^{k+1}) = \sum_{i=1}^{i=\alpha_k} \varepsilon_i^k e_i^k,$$

onde  $\varepsilon_i^k = 1$  se a orientação de  $e_i^k$  é igual a orientação induzida por  $e^{k+1}$ ,  $\varepsilon_i^k = -1$  se a orientação de  $e_i^k$  é oposta a orientação induzida por  $e^{k+1}$  e  $\varepsilon_i^k = 0$  se  $e_i^k$  e  $e^{k+1}$  não são incidentes.

Como um  $m$ -complexo de cadeias celular  $\mathcal{R}^m$  pode ser visto como um complexo de cadeias simplicial  $\dot{\mathcal{R}}^m$ , então um  $m$ -complexo de cadeias celular é também um caso particular de um  $m$ -complexo de cadeias singular.

## Linking Number

Neste capítulo definimos o linking number entre dois ciclos celulares de uma  $m$ -dimensional variedade diferenciável, que satisfazem algumas condições. Para isso, precisamos definir primeiramente o conceito de número de interseção. A principal referência deste capítulo é [22].

### 2.1 Número de Interseção

Considere uma variedade diferenciável  $m$ -dimensional  $M^m$ . Pela Observação 1.4.32 podemos enxergá-la como um  $m$ -complexo simplicial  $\mathcal{M}^m$  e, subdividindo normalmente este complexo, obtemos um  $m$ -complexo celular  $\mathcal{R}^m$ , como visto na Observação 1.4.61. Considere também,  $\mathcal{R}_e^m$  e  $\mathcal{R}_f^m$  suas divisões celulares duais. Suponha que elas sejam orientáveis e tenham recebido orientações fixas, ou seja, os  $m$ -simplexos de  $\mathcal{R}^m$  foram coerentemente orientados com uma das duas orientações opostas possíveis. Podemos definir o número de interseção entre duas células duais orientadas  $e^k$  e  $f^{m-k}$ , denotado por  $S(e^k, f^{m-k})$ , da seguinte maneira:

Primeiramente, selecione um  $k$ -simplexo de  $e^k$ ,

$$s_e^k = \varepsilon[p^0, p^1, \dots, p^k],$$

onde  $\varepsilon = \pm 1$  de acordo com a orientação de  $s_e^k$ , que é dada por  $e^k$ . Em seguida, selecione um  $(m - k)$ -simplexo de  $f^{m-k}$ ,

$$s_f^{m-k} = \eta[p^k, p^{k+1}, \dots, p^m],$$



onde  $\eta = \pm 1$  de acordo com a orientação de  $s_f^{m-k}$ , que é dada por  $f^{m-k}$ .

Pelo Teorema 1.4.54, sabemos que

$$s^m = \zeta[p^0, p^1, \dots, p^k, \dots, p^m]$$

é um simplexo de  $\mathcal{R}^m$  e  $\zeta = \pm 1$  de acordo com a orientação de  $s^m$  em  $\mathcal{R}^m$ .

**Definição 2.1.1** Nas condições acima, o **número de interseção** entre  $e^k$  e  $f^{m-k}$  é

$$S(e^k, f^{m-k}) = \varepsilon\eta\zeta.$$

Note que este valor sempre será  $\pm 1$ . Para essa definição é extremamente importante que os simplexos de  $\mathcal{R}^m$  sejam apresentados da forma  $\pm[p^i, p^l, \dots, p^z]$  onde  $p^i, p^l, \dots, p^z$  são pontos centrais de células de dimensão  $i, l, \dots, z$ , respectivamente, com  $i < l < \dots < z$ . Além disso, o número de interseção não depende da escolha dos simplexos  $s_e^k$  e  $s_f^{m-k}$  de  $e^k$  e  $f^{m-k}$ , respectivamente, e isso pode ser visto em [22, p. 250].

**Observação 2.1.2** Para o caso  $k = 0$ , ao calcularmos o número de interseção entre  $e^0$  e  $f^m$ , como  $e^0$  é um ponto, supondo que o sinal dado a ele foi positivo, temos

$$S(e^0, f^m) = \eta\zeta = 1 \text{ ou } -1,$$

dependendo se  $f^m$  concorda ou não com a orientação de  $\mathcal{R}^m$ .

**Exemplo 2.1.3** Considere o 2-complexo celular orientado representado pela figura abaixo.

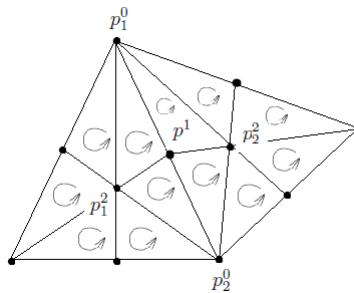


Figura 2.1: Complexo celular 2-dimensional orientado

Seja  $e^1$  a célula formada pelo simplexos  $\{ \langle p_1^0, p^1 \rangle, \langle p_2^0, p^1 \rangle \}$  e suponha que foi atribuída a seguinte orientação para  $e^1 = \{ +[p_1^0, p^1], -[p_2^0, p^1] \}$ . Seja  $f^1$  sua célula dual, formada pelos simplexos  $\{ \langle p^1, p_1^2 \rangle, \langle p^1, p_2^2 \rangle \}$  e suponha que foi atribuída a seguinte orientação para  $f^1 = \{ -[p^1, p_1^2], +[p^1, p_2^2] \}$ .

Para calcular o número de interseção  $S(e^1, f^1)$  precisamos selecionar um simplexo de  $e^1$  e um simplexo de  $f^1$ , tomemos  $+ [p_1^0, p^1]$  e  $- [p^1, p_1^2]$ , respectivamente.

O simplexo formado pelos vértices  $p_1^0, p^1, p_1^2$  está orientado no 2-complexo celular da seguinte maneira:  $- [p_1^0, p^1, p_1^2]$ .

Portanto,

$$S(e^1, f^1) = (+1)(-1)(-1) = 1.$$

**Propriedade 2.1.4** Dadas duas células duais  $e^k$  e  $f^{m-k}$  das divisões celulares  $\mathcal{R}_e^m$  e  $\mathcal{R}_f^m$ , respectivamente, então:

$$(i) S(e^k, f^{m-k}) = (-1)^{k(m-k)} S(f^{m-k}, e^k);$$

(ii) Se  $e^{k-1}$  e  $f^{m-k+1}$  são células duais incidentes a  $e^k$  e  $f^{m-k}$ , respectivamente, então  $S(e^{k-1}, f^{m-k+1}) = (-1)^k S(f^{m-k}, e^k)$ .

A demonstração pode ser vista em [22, p. 251].

**Definição 2.1.5** Considere duas cadeias celulares

$$u^k = q_1 e_1^k + q_2 e_2^k + \dots + q_{\alpha_k} e_{\alpha_k}^k \quad e$$

$$v^{m-k} = r_1 f_1^{m-k} + r_2 f_2^{m-k} + \dots + r_{\alpha_k} f_{\alpha_k}^{m-k}.$$

Dizemos que elas são **cadeias celulares duais** se  $e_i^k$  e  $f_i^{m-k}$  são células duais da divisão dual de um complexo celular  $\mathcal{R}^m$ , para  $i = 1, \dots, \alpha_k$ .

**Definição 2.1.6** Considere duas cadeias celulares duais  $u^k = q_1 e_1^k + q_2 e_2^k + \dots + q_{\alpha_k} e_{\alpha_k}^k$  e  $v^{m-k} = r_1 f_1^{m-k} + r_2 f_2^{m-k} + \dots + r_{\alpha_k} f_{\alpha_k}^{m-k}$ , com coeficientes inteiros. O **número de interseção** entre essas duas cadeias é definido por

$$S(u^k, v^{m-k}) = \sum_{i=1}^{\alpha_k} q_i r_i S(e_i^k, f_i^{m-k}),$$

onde  $S(e_i^k, f_i^{m-k})$  é o número de interseção entre as duas células duais  $e_i^k$  e  $f_i^{m-k}$ , como definido anteriormente.

**Propriedade 2.1.7** Dadas duas cadeias celulares duais  $u^k$  e  $v^{m-k}$ , com coeficientes inteiros, das divisões celulares duais  $\mathcal{R}_e^m$  e  $\mathcal{R}_f^m$ , respectivamente, então:

$$(i) S(u_1^k + u_2^k, v^{m-k}) = S(u_1^k, v^{m-k}) + S(u_2^k, v^{m-k});$$

$$(ii) S(u^k, v^{m-k}) = (-1)^{k(m-k)} S(v^{m-k}, u^k);$$

(iii) Se  $e^{k-1}$  e  $f^{m-k+1}$  são células duais incidentes a  $e^k$  e  $f^{m-k}$ , respectivamente, então  $S(e^{k-1}, f^{m-k+1}) = (-1)^k S(f^{m-k}, e^k)$ .

**Demonstração.** A demonstração dos itens (ii) e (iii) seguem diretamente da Propriedade 2.1.4. Para verificarmos o item (i), considere:

$$\begin{aligned} u_1^k &= q_1 e_1^k + q_2 e_2^k + \dots + q_{\alpha_k} e_{\alpha_k}^k, \\ u_2^k &= t_1 e_1^k + t_2 e_2^k + \dots + t_{\alpha_k} e_{\alpha_k}^k \quad \text{e} \\ v^{m-k} &= r_1 f_1^{m-k} + r_2 f_2^{m-k} + \dots + r_{\alpha_k} f_{\alpha_k}^{m-k}. \end{aligned}$$

Então,  $u_1^k + u_2^k = (q_1 + t_1)e_1^k + (q_2 + t_2)e_2^k + \dots + (q_{\alpha_k} + t_{\alpha_k})e_{\alpha_k}^k$  e, portanto,

$$\begin{aligned} S(u_1^k + u_2^k, v^{m-k}) &= \sum_{i=1}^{\alpha_k} (q_i + t_i) r_i S(e_i^k, f_i^{m-k}) = \sum_{i=1}^{\alpha_k} (q_i r_i + t_i r_i) S(e_i^k, f_i^{m-k}) \\ &= \sum_{i=1}^{\alpha_k} q_i r_i S(e_i^k, f_i^{m-k}) + \sum_{i=1}^{\alpha_k} t_i r_i S(e_i^k, f_i^{m-k}) \\ &= S(u_1^k, v^{m-k}) + S(u_2^k, v^{m-k}). \end{aligned}$$

■

**Proposição 2.1.8** *Uma  $(m - k)$ -cadeia celular homóloga ao ciclo nulo tem número de interseção zero com relação a qualquer  $k$ -ciclo celular dual.*

A demonstração pode ser vista em [22, p. 256].

**Observação 2.1.9** *Podemos definir o número de interseção para quaisquer duas cadeias singulares homólogas ao ciclo nulo  $u^k$  e  $v^{m-k}$  se elas satisfazem a seguinte restrição: o bordo  $u^{k-1}$  de  $u^k$  é disjunto de  $v^{m-k}$  e o bordo  $v^{m-k-1}$  de  $v^{m-k}$  é disjunto de  $u^k$ . Para isso basta utilizar o Teorema da Aproximação Celular, que pode ser visto em [22, Teorema II, p. 265]. Assim,*

$$S(u^k, v^{m-k}) = S(\text{Ap}(u^k), \text{Ap}(v^{m-k})).$$

*Para mais detalhes a respeito dessa generalização ver [22, p. 267].*

Como cadeias celulares homólogas ao ciclo nulo são um caso particular de cadeias singulares homólogas ao ciclo nulo, se garantirmos que essas cadeias são disjuntas, pela observação anterior, é possível calcular o número de interseção entre elas. Neste caso, a

aproximação celular das cadeias celulares serão as próprias cadeias se elas forem duais ou um deslocamento das mesmas, via homeomorfismo, no complexo celular  $\mathcal{R}^m$  obtido de  $M^m$ . Por este motivo, quando tratarmos de cadeias celulares, por abuso de notação, tomaremos  $Ap(u^k) = u^k$  e  $Ap(v^{m-k}) = v^{m-k}$ . Isto será importante para a definição de Linking Number, apresentada na próxima seção.

## 2.2 Linking Number

**Definição 2.2.1** *Sejam  $u^{k-1}$  e  $v^{m-k}$  cadeias celulares, com coeficientes inteiros, disjuntas e homólogas ao ciclo nulo. O **linking number** em  $M^m$  entre essas cadeias, denotado por  $lk(u^{k-1}, v^{m-k})$ , é definido por*

$$lk(u^{k-1}, v^{m-k}) = S(u^k, v^{m-k}),$$

onde  $\partial(u^k) = u^{k-1}$ .

Em algumas literaturas também é usado o termo número de enlaces em vez de linking number. Recordemos que, conforme Observação 1.3.7, a existência de  $u^k$  é garantida pois  $u^{k-1}$  é homólogo ao ciclo celular nulo.

Além disso, este número independe da escolha da cadeia  $u^k$ . De fato, considere  $u_1^k$  e  $u_2^k$  cadeias cujo bordo sejam a cadeia  $u^{k-1}$ . Note que  $u_1^k - u_2^k$  é também uma  $k$ -cadeia celular, e que  $\partial(u_1^k - u_2^k) = \partial(u_1^k) - \partial(u_2^k) = 0$ , ou seja  $u_1^k - u_2^k$  é ciclo. Assim, pela Proposição 2.1.8, temos

$$S(u_1^k - u_2^k, v^{m-k}) = 0$$

e por propriedade de número de interseção entre cadeias segue que

$$S(u_1^k, v^{m-k}) = S(u_2^k, v^{m-k}).$$

**Propriedade 2.2.2** *Seguem das propriedades de número de interseção que, dadas duas cadeias celulares  $u^{k-1}$  e  $v^{m-k}$ , com coeficientes inteiros, disjuntas e homólogas ao ciclo celular nulo, então:*

$$(i) \quad lk(u^{k-1}, v^{m-k}) = (-1)^{(k-1)(m-k)+1} lk(v^{m-k}, u^{k-1});$$

(ii) *E se,  $v_1^{m-k}$  e  $v_2^{m-k}$  também são cadeias celulares homólogas ao ciclo nulo e disjuntas de  $u^{k-1}$ , então  $lk(u^{k-1}, v_1^{m-k} + v_2^{m-k}) = lk(u^{k-1}, v_1^{m-k}) + lk(u^{k-1}, v_2^{m-k})$ .*

**Observação 2.2.3** Note que podemos enxergar o linking number como uma aplicação cujo domínio é o produto cartesiano dos complexos de cadeia celular, com coeficientes em  $\mathbb{Z}$ , de dimensões  $k - 1$  e  $m - k$ , respectivamente, e contradomínio  $\mathbb{Z}$ , ou seja,

$$lk : E_{k-1} \times E_{m-k} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Sabemos que  $E_{k-1}$ ,  $E_{m-k}$  e  $\mathbb{Z}$  são  $\mathbb{Z}$ -módulos, e, ainda pela definição de linking number e pela Propriedade 2.2.2, temos

$$lk(r \cdot u^{k-1}, v^{m-k}) = lk(u^{k-1}, r \cdot v^{m-k}) = r \cdot lk(u^{k-1}, v^{m-k}),$$

$$lk(u_1^{k-1} + u_2^{k-1}, v^{m-k}) = lk(u_1^{k-1}, v^{m-k}) + lk(u_2^{k-1}, v^{m-k}) \quad e$$

$$lk(u^{k-1}, v_1^{m-k} + v_2^{m-k}) = lk(u^{k-1}, v_1^{m-k}) + lk(u^{k-1}, v_2^{m-k}),$$

onde  $r \in \mathbb{Z}$ . Portanto,  $lk$  é uma aplicação  $\mathbb{Z}$ -bilinear.

**Observação 2.2.4** No caso em que a variedade diferenciável inicial  $M^m$  tem dimensão  $m = 2n + 1$ , note que estará bem definido o linking number entre duas  $n$ -cadeias disjuntas, já que  $k - 1 = n$  implica  $m - k = n$ . Neste caso, mostra-se que o linking number é um invariante topológico da variedade diferenciável (ver [22, p. 290]).

Note que o conceito de linking number pode ser estendido para quaisquer cadeias singulares com coeficientes inteiros, disjuntas e homólogas ao ciclo nulo  $u^{k-1}$  e  $v^{m-k}$ .

De fato, pela Observação 2.1.9, basta utilizarmos a aproximação celular de  $u^k$  e  $v^{m-k}$  para calcularmos o número de interseção, já que as cadeias em questão, por serem disjuntas, satisfazem a restrição necessária. Assim,

$$lk(u^{k-1}, v^{m-k}) = S(u^k, v^{m-k}) = S(Ap(u^k), Ap(v^{m-k})).$$

## Fibra de Milnor

Um objeto muito importante no estudo local (em um ponto  $p \in \mathbb{C}^{n+1}$ ) de funções analíticas  $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  é a fibra de Milnor de  $f$  em  $p$ . Por simplicidade, vamos considerar o ponto  $p$  como sendo a origem.

Neste capítulo, descrevemos como obter tal conceito, mostrando que é uma variedade diferenciável. No desenvolvimento da teoria, apresentamos uma aplicação importante, chamada de operador monodromia, essencial ao resultado principal do trabalho.

No caso em que  $f$  tem singularidade isolada na origem, Milnor em [17] descreve a topologia da fibra de Milnor de  $f$  através de uma homotopia com um buquê de  $n$ -esferas. Em nosso trabalho, descrevemos a topologia da fibra de Milnor de um polinômio de Brieskorn. A referência principal deste capítulo é [17].

### 3.1 Fibrção de Milnor

A partir deste momento utilizamos o termo variedade no decorrer do texto significando uma variedade diferenciável de classe  $C^k$ , para algum  $k \in \mathbb{N}$ .

Sejam  $E$ ,  $B$  e  $Q$  variedades e  $\pi : E \rightarrow B$  uma aplicação diferenciável sobrejetora.

**Definição 3.1.1** Dizemos que  $(E, B, Q, \pi)$  é um **fibrado diferenciável** se para todo  $b \in B$ , existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $b$  e um difeomorfismo  $\psi : U \times Q \rightarrow \pi^{-1}(U)$  tal que  $\pi \circ \psi = \pi_1$ , onde  $\pi_1$  é a projeção na primeira coordenada.

Nestas condições,  $E$  é chamado de **espaço total**,  $B$  é chamado de **espaço base**,  $\pi$  é chamada de **projeção** e  $Q$  é chamado de **fibra típica** do fibrado diferenciável  $(E, B, Q, \pi)$ .

Segue que se  $(E, B, Q, \pi)$  é um fibrado diferenciável, então  $\pi^{-1}(b)$  é difeomorfo a  $Q$ .

**Definição 3.1.2** Dizemos que  $(E, B, Q, \pi)$  é uma **fibração diferenciável** se para todo  $b \in B$ ,  $\pi^{-1}(b)$  tem o mesmo tipo de homotopia da variedade  $Q$ .

Também no caso de fibração diferenciável usamos as nomenclaturas de espaço total, espaço base, projeção e fibra típica da fibração diferenciável.

Daqui para frente utilizamos o termo suave, pois estamos considerando diferenciável em todas as ordens.

Considere  $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  um polinômio com singularidade isolada na origem e que se anula na origem. Seja  $K_f = V \cap S_\varepsilon^{2n+1}$ , onde  $S_\varepsilon^{2n+1}$  é a esfera em  $\mathbb{C}^{n+1}$  de raio  $\varepsilon$  centrada na origem e  $V = V(f) = f^{-1}(0)$  é a hipersuperfície algébrica associada a  $f$ . Como  $f$  é uma função contínua e  $\{0\}$  é fechado em  $\mathbb{C}$  temos que  $f^{-1}(0)$  é fechado em  $S_\varepsilon^{2n+1}$ , logo  $K_f = S_\varepsilon^{2n+1} \cap V = S_\varepsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(0)$  é fechado em  $S_\varepsilon^{2n+1}$ . Assim,  $S_\varepsilon^{2n+1} - K_f$  é um subconjunto aberto da variedade  $S_\varepsilon^{2n+1}$  e portanto, pela Proposição 1.1.15, é uma variedade.

Nosso objetivo no decorrer desta seção é demonstrar que existe  $\varepsilon_0 > 0$ , tal que  $(S_\varepsilon^{2n+1} - K_f, S^1, Q, \phi)$  é uma fibração suave, onde  $\phi : S_\varepsilon^{2n+1} - K_f \rightarrow S^1$  é dada por  $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$  e  $Q$  é uma variedade que tem o mesmo tipo de homotopia que um buquê de  $n$ -esferas, resultado conhecido como **Teorema da Fibração de Milnor**. Para isso primeiramente apresentamos algumas ferramentas e ao fim da seção a demonstração deste resultado.

**Proposição 3.1.3** Existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  a aplicação  $\phi : S_\varepsilon^{2n+1} - K_f \rightarrow S^1$  não tem pontos críticos.

A demonstração pode ser vista em [17, Corolário 4.5, p. 40].

**Definição 3.1.4** O número  $\varepsilon_0$  é chamado **raio de Milnor** de  $f$  (na origem).

Denotando por  $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$ , segue da proposição anterior que, cada  $e^{i\theta} \in S^1$  é valor regular de  $\phi$ . Assim, pela Proposição 1.1.16,  $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset S_\varepsilon^{2n+1} - K$  é uma variedade  $(2n)$ -dimensional.

Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno ( $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ),  $K_f = V \cap S_\varepsilon^{2n+1}$  é uma variedade  $(2n-1)$ -dimensional, isso segue da parte final desenvolvida na Seção 1.2, com o Teorema 1.2.36. O conjunto  $K_f$  é um conjunto importante, que chamamos de **link** (ou **nó algébrico**) de

$f$  (na origem). No entanto, não foi objetivo deste trabalho estudar este conjunto mais a fundo.

Nessas condições, obtemos alguns resultados sobre  $F_\theta$ .

**Teorema 3.1.5** *O conjunto  $F_\theta$  é homotopicamente equivalente a um buquê de  $\mu$   $n$ -esferas,  $S_\varepsilon^n \vee S_\varepsilon^n \vee \dots \vee S_\varepsilon^n$ .*

A demonstração pode ser vista em [17, Teorema 6.5, p. 57].

**Definição 3.1.6** *O numero  $\mu$  é chamado de **número de Milnor** de  $f$  (na origem) e  $F_\theta$  é chamada **fibra de Milnor** de  $f$  (na origem).*

**Lema 3.1.7** *Se  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , então existe um campo vetorial diferenciável  $v$  tangente à  $S_\varepsilon^{2n+1} - K_f$  tal que, para cada  $z \in S_\varepsilon^{2n+1} - K_f$ , o produto interno hermitiano  $\langle v(z), i \text{ grad } \log(f(z)) \rangle$  é não nulo e tem argumento principal menor do que  $\frac{\pi}{4}$  em valor absoluto.*

A demonstração pode ser vista em [17, Lema 4.6, p. 40].

Considere  $w$  o campo vetorial dado por  $w(z) = \frac{v(z)}{\text{Re}\langle v(z), i \text{ grad } \log(f(z)) \rangle}$ .

Assim, pelo lema anterior,  $w$  está bem definido e é um campo diferenciável pois  $v$  é um campo diferenciável. Além disso,  $v$  é tangente à  $S_\varepsilon^{2n+1} - K_f$  e, pela Observação 1.1.18 temos  $\text{Re}\langle v(z), u \rangle = 0, \forall z \in S_\varepsilon^{2n+1} - K_f$ .

Logo,  $w$  também é tangente à  $S_\varepsilon^{2n+1} - K_f$ , pois

$$\begin{aligned} \text{Re}\langle w(z), z \rangle &= \text{Re}\left\langle \frac{v(z)}{\text{Re}\langle v(z), i \text{ grad } \log(f(z)) \rangle}, z \right\rangle \\ &= \frac{1}{\text{Re}\langle v(z), i \text{ grad } \log(f(z)) \rangle} \text{Re}\langle v(z), z \rangle = 0. \end{aligned}$$

**Propriedade 3.1.8** *O campo vetorial diferenciável  $w(z)$  satisfaz:*

(a)  $\text{Re}\langle w(z), i \text{ grad } \log(f(z)) \rangle = 1;$

(b)  $|\text{Re}\langle w(z), \text{grad } \log(f(z)) \rangle| < 1.$

**Demonstração.** Claramente (a) é válida pois

$$\begin{aligned} \text{Re}\langle w(z), i \text{ grad } \log(f(z)) \rangle &= \text{Re}\left\langle \frac{v(z)}{\text{Re}\langle v(z), i \text{ grad } \log(f(z)) \rangle}, i \text{ grad } \log(f(z)) \right\rangle \\ &= \frac{\text{Re}\langle v(z), i \text{ grad } \log(f(z)) \rangle}{\text{Re}\langle v(z), i \text{ grad } \log(f(z)) \rangle} = 1. \end{aligned}$$



Além disso,

$$\begin{aligned} |Re\langle w(z), grad \log(f(z)) \rangle| &= |Re\langle \frac{v(z)}{Re\langle v(z), i grad \log(f(z)) \rangle}, grad \log(f(z)) \rangle| \\ &= \frac{|Re\langle v(z), grad \log(f(z)) \rangle|}{|Re\langle v(z), i grad \log(f(z)) \rangle|} = \frac{|Im\langle v(z), i grad \log(f(z)) \rangle|}{|Re\langle v(z), i grad \log(f(z)) \rangle|}, \end{aligned}$$

que é menor que 1, pois  $|Arg\langle v(z), i grad \log(f(z)) \rangle| < \frac{\pi}{4}$ . Portanto (b) é válida. ■

Consideremos agora as soluções da equação diferencial  $\frac{dz}{dt} = w(z)$ .

**Lema 3.1.9** *Dado  $z \in S_\varepsilon^{2n+1} - K_f$  existe um único caminho diferenciável  $p_z : \mathbb{R} \rightarrow S_\varepsilon^{2n+1} - K_f$  que satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{dp_z}{dt}(t) = w(p_z(t))$$

com a condição inicial  $p_z(0) = z$ .

**Demonstração.** Pelo Teorema da Existência e Unicidade das Equações Diferenciais, a solução  $z = p_z(t)$  existe e é única localmente, podendo ser estendida a um intervalo maximal de  $\mathbb{R}$  (ver [23, Proposição 1, p. 17]). Queremos estender  $p_z(t)$  para todo  $\mathbb{R}$ .

Temos que  $S_\varepsilon^{2n+1} - K_f$  é aberto em  $\mathbb{R}^{2n+2}$ , assim por um resultado que pode ser visto em [23, Teorema 3, p. 18], se  $z = p_z(t)$  é solução máxima única definida num intervalo maximal  $(w_-, w_+)$ , então a aplicação  $g(t) = (t, p_z(t))$  tende ao bordo de  $\mathbb{R} \times S_\varepsilon^{2n+1} - K_f$  quando  $t$  tende a  $w_+$  ou  $w_-$ .

Assim, para que seja possível estender  $p_z(t)$  por todo  $\mathbb{R}$  precisamos assegurar que  $\lim_{t \rightarrow t_0} p_z(t)$  não pertence a  $K_f$ , onde  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Isto é, como  $K_f = S_\varepsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(0)$  precisamos assegurar que  $f(p_z(t))$  não tende a zero, ou equivalentemente,  $Re(\log(f(p_z(t))))$  não tende a  $-\infty$  quando  $t$  tende a algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ , já que  $\log(f(p_z(t))) = \ln(|f(p_z(t))|) + i(Arg(f(p_z(t))) + 2k\pi)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Agora,

$$\frac{d}{dt}(Re(\log(f(p_z(t)))) = Re\langle \frac{dp_z}{dt}(t), grad \log(f(p_z(t))) \rangle = Re\langle w(p_z(t)), grad \log(f(p_z(t))) \rangle,$$

tem valor absoluto menor que 1, pelo item (b) da Propriedade 3.1.8. Portanto,  $Re(\log(f(p_z(t))))$  é limitado numa vizinhança de  $t_0$ . ■

**Observação 3.1.10** *Seja  $\theta$  tal que  $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} = e^{i\theta(z)}$ . Logo,  $i\theta(z) = \log(\phi(z)) = \log(\frac{f(z)}{|f(z)|}) = \log(f(z)) - \log(|f(z)|)$  e, com isso,*

$$Re(\theta(z)) = Re(-i \log(f(z)) + i \log(|f(z)|)) = Re(-i \log(f(z))).$$

Como  $\theta(z) \in \mathbb{R}$ , segue que

$$\theta(z) = \operatorname{Re}(-i \log(f(z))).$$

A derivada direcional de  $\theta$  na direção do vetor  $p'_z(t)$ , é dada por

$$\frac{d}{dt}(\theta \circ p_z)(t) = \frac{d}{dz}\theta(p_z(t)) \frac{dp_z}{dt}(t) = \left\langle \frac{dp_z}{dt}(t), \operatorname{grad} \theta(p_z(t)) \right\rangle.$$

Assim,  $\frac{d}{dt}(\theta \circ p_z)(t) = \operatorname{Re}\left\langle \frac{dp_z}{dt}(t), i \operatorname{grad} \log(f(p_z(t))) \right\rangle$ .

Agora, pelo item (a) da Propriedade 3.1.8, segue que

$$\frac{d}{dt}\theta(p_z(t)) = \operatorname{Re}\left\langle \frac{dp_z}{dt}(t), i \operatorname{grad} \log(f(p_z(t))) \right\rangle = 1.$$

Portanto,  $\theta(p_z(t)) = t + \text{constante}$  e, assim, para cada  $z \in S_\varepsilon^{2n+1} - K_f$ , podemos escrever

$$\theta(p_z(t)) = t + \theta(p_z(0)) = t + \theta(z). \quad (3.1)$$

Considerando para cada  $z \in S_\varepsilon^{2n+1} - K_f$  o único caminho diferenciável  $p_z(t)$  obtido no Lema 3.1.9, consideramos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} h : (S_\varepsilon^{2n+1} - K_f) \times \mathbb{R} &\rightarrow S_\varepsilon^{2n+1} - K_f \\ (z, t) &\mapsto p_z(t). \end{aligned}$$

Para cada  $t \in \mathbb{R}$ , podemos definir  $h_t : S_\varepsilon^{2n+1} - K_f \rightarrow S_\varepsilon^{2n+1} - K_f$  por  $h_t(z) = h(z, t) = p_z(t)$  que é uma aplicação diferenciável, já que  $p_z(t)$  é diferenciável. Além disso, para  $t_1$  e  $t_2$  em  $\mathbb{R}$ , temos

$$\begin{aligned} \phi(h_{t_1+t_2}(z)) &= e^{i\theta(h_{t_1+t_2}(z))} = e^{i\theta(p_z(t_1+t_2))} \stackrel{(3.1)}{=} e^{i(\theta(z)+t_1+t_2)} = e^{i((\theta(z)+t_2)+t_1)} \\ &\stackrel{(3.1)}{=} e^{i(\theta(p_z(t_2))+t_1)} \stackrel{(3.1)}{=} e^{i\theta(p_{p_z(t_2)}(t_1))} = e^{i\theta(h_{t_1}(p_z(t_2)))} = e^{i\theta(h_{t_1}(h_{t_2}(z)))} \\ &= e^{i\theta(h_{t_1} \circ h_{t_2}(z))} = \phi(h_{t_1} \circ h_{t_2}(z)) \end{aligned}$$

Então,  $h_{t_1+t_2}(z) = h_{t_1} \circ h_{t_2}(z)$ . Em particular,  $h_t^{-1}(z) = h_{-t}(z)$ , pois

$$z = p_z(0) = h_0(z) = h_{t-t}(z) = h_t \circ h_{-t}(z).$$

Logo,  $h_t$  admite inversa e, portanto, é um difeomorfismo.

**Definição 3.1.11** Nas condições acima, quando  $t = 2\pi$ , chamamos  $h_{2\pi}$  de **difeomorfismo característico**.

**Observação 3.1.12** *Note que*

$$\phi(h_t(z)) = \phi(p_z(t)) = e^{i\theta(p_z(t))} = e^{i(t+\theta(p_z(0)))} = e^{i(t+\theta(z))} = e^{i(t+\theta)}.$$

Logo,  $h_t$  leva cada fibra  $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$  na fibra  $F_{\theta+t} = \phi^{-1}(e^{i(\theta+t)})$ .

Com as ferramentas em mãos, podemos demonstrar o Teorema da Fibrção de Milnor.

**Teorema 3.1.13 (Fibrção de Milnor)**  $(S_\varepsilon^{2n+1} - K_f, S^1, Q, \phi)$  é uma fibrção suave onde  $\phi : S_\varepsilon^{2n+1} - K_f \rightarrow S^1$  é dada por  $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$  e  $Q$  é um buquê de  $n$ -esferas.

**Demonstração.** Dado  $z = e^{i\theta} \in S^1$ , basta provar que existe uma vizinhança  $U_\theta$  de  $z$  e um difeomorfismo  $\psi_\theta : U_\theta \times F_\theta \rightarrow \phi^{-1}(U_\theta)$ , tal que  $\phi \circ \psi_\theta = \pi_1$ , sendo  $\pi_1$  a projeção na primeira coordenada, pois assim garantimos que para todo  $z \in S^1$ ,  $\phi^{-1}(z)$  é difeomorfo a uma variedade que é homotopicamente equivalente a um buquê de  $n$ -esferas (Teorema 3.1.5).

Seja  $U_\theta = \{e^{it} \in S^1 \mid t \in (\theta - \delta, \theta + \delta), \delta \text{ constante}\}$  e consideremos a aplicao

$$\begin{aligned} \psi_\theta : U_\theta \times F_\theta &\rightarrow \phi^{-1}(U_\theta) \\ (e^{it}, z) &\mapsto h_{t-\theta}(z) \end{aligned}.$$

Temos  $(\phi \circ \psi_\theta)(e^{it}, z) = \phi(h_{t-\theta}(z)) = \phi(p_z(t - \theta)) = e^{i\theta(p_z(t - \theta))} \stackrel{(3.1)}{=} e^{i(t - \theta + \theta(z))} = e^{it}$ , pois  $z \in F_\theta$  o que implica  $\theta(z) = \theta$ . Logo,  $\phi \circ \psi_\theta = \pi_1$ . Resta mostrar que  $\psi_\theta$  é um difeomorfismo.

Considere as aplicoes diferenciáveis

$$\begin{aligned} \alpha : U_\theta \times F_\theta &\rightarrow (\theta - \delta, \theta + \delta) \times F_\theta \\ (e^{it}, z) &\mapsto (t, z), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \beta : (\theta - \delta, \theta + \delta) \times F_\theta &\rightarrow F_\theta \times (-\delta, \delta) \\ (t, z) &\mapsto (z, t - \theta). \end{aligned}$$

Como  $\psi_\theta = h \circ \beta \circ \alpha$  e vimos que  $h$  é diferenciável, então  $\psi_\theta$  é diferenciável.

Seja

$$\begin{aligned} g : \phi^{-1}(U_\theta) &\rightarrow U_\theta \times F_\theta \\ z &\mapsto (\phi(z), h_{\theta - \text{Arg } \phi(z)}(z)) = (e^{i\theta(z)}, h_{\theta - \theta(z)}(z)). \end{aligned}$$

Temos

$$\psi_\theta(g(z)) = \psi_\theta(e^{i\theta(z)}, h_{\theta-\theta(z)}(z)) = h_{\theta(z)-\theta}(h_{\theta-\theta(z)}(z)) = h_0(z) = p_z(0) = z \text{ e}$$

$$\begin{aligned} g(\psi_\theta(e^{it}, z)) &= g(h_{t-\theta}(z)) = (e^{i\theta(h_{t-\theta}(z))}, h_{\theta-\theta(h_{t-\theta}(z))}(h_{t-\theta}(z))) \\ &= (e^{i\theta(p_z(t-\theta))}, h_{\theta-\theta(p_z(t-\theta))}(h_{t-\theta}(z))) = (e^{it}, h_{\theta-t}(h_{t-\theta}(z))) \\ &= (e^{it}, h_0(z)) = (e^{it}, p_z(0)) = (e^{it}, z) \end{aligned}$$

Portanto,  $g = \psi_\theta^{-1}$ .

Considere, agora, as seguintes aplicações diferenciáveis

$$\begin{aligned} \lambda : \phi^{-1}(U_\theta) &\rightarrow \phi^{-1}(U_\theta) \times (\theta - \delta, \theta + \delta) \\ z &\mapsto (z, \text{Arg } \phi(z)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \xi : \phi^{-1}(U_\theta) \times (\theta - \delta, \theta + \delta) &\rightarrow \phi^{-1}(U_\theta) \times (-\delta, \delta) \\ (z, \text{Arg } \phi(z)) &\mapsto (z, \theta - \text{Arg } \phi(z)) \end{aligned}$$

Temos  $h_{\theta-\text{Arg } \phi(z)} = h \circ \xi \circ \lambda$ . Logo, a segunda função coordenada de  $g$  é diferenciável. Como as aplicações  $e^z$  e  $\theta(z)$  são diferenciáveis, segue que a primeira coordenada de  $g$  é diferenciável. Assim,  $g = \psi_\theta^{-1}$  é diferenciável e, portanto,  $\phi$  é um difeomorfismo. ■

## 3.2 Operador Monodromia

Consideremos a partir de agora o difeomorfismo característico  $h_{2\pi}$ . Sabemos, pela Observação 3.1.12, que  $h_{2\pi}|_{F_0}$  leva  $F_0$  em  $F_{2\pi}$ . Note que  $F_{2\pi} = F_0$ , pois  $F_{2\pi} = \phi^{-1}(e^{i2\pi}) = \phi^{-1}(e^{i\pi} \cdot e^{i\pi}) = \phi^{-1}(-1, -1) = \phi^{-1}(1) = \phi^{-1}(e^{i0}) = F_0$ .

A partir de agora, denotaremos  $F_0$  por  $F_f$ .

**Definição 3.2.1** *A induzida em homologia da aplicação  $h_{2\pi}|_{F_f}$ , com coeficientes em  $\mathbb{C}$ ,  $(h_{2\pi}|_{F_f})_* : H_n(F_f; \mathbb{C}) \rightarrow H_n(F_f; \mathbb{C})$ , é chamada de  $n$ -ésimo **operador monodromia homológico**. E, a inversa da induzida em cohomologia da aplicação  $h_{2\pi}|_{F_f}$ , com coeficientes em  $\mathbb{C}$ ,  $((h_{2\pi}|_{F_f})^*)^{-1} : H^n(F_f; \mathbb{C}) \rightarrow H^n(F_f; \mathbb{C})$ , é chamada de  $n$ -ésimo **operador monodromia cohomológico**.*

**Observação 3.2.2** *Embora a fibra  $F_f$  não seja compacta, ela tem o mesmo tipo de homotopia que em um buquê de  $n$ -esferas que é compacto. Assim, os grupos de homologia e*

cohomologia da fibra  $F_f$  são isomorfos aos grupos de homologia e cohomologia do buquê de  $n$ -esferas.

**Observação 3.2.3** *Os  $n$ -ésimos operadores monodromia homológico e cohomológico são operadores lineares.*

*De fato, note que  $H_n(F_f; \mathbb{C})$  e  $H^n(F_f; \mathbb{C})$  são  $\mathbb{C}$ -módulos e como  $\mathbb{C}$  é corpo, logo são espaços vetoriais, como visto na Seção 1.2. Além disso, esses operadores satisfazem a linearidade, pois são homomorfismos.*

Denotaremos uma matriz associada ao operador monodromia homológico  $(h_{2\pi}|_{F_f})_*$  por  $H_f$  e uma matriz associada ao operador monodromia cohomológico  $((h_{2\pi}|_{F_f})^*)^{-1}$  por  $T_f$ .

**Definição 3.2.4** *Um polinômio  $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  da forma*

$$f(z) = z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + \dots + z_{n+1}^{a_{n+1}},$$

*onde  $a_j \geq 2$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ , é chamado **polinômio de Brieskorn**.*

**Observação 3.2.5** *Todo polinômio de Brieskorn se anula na origem e tem singularidade isolada na origem, portanto podemos estudar a fibra de Milnor  $F_f$  associada a um polinômio deste tipo.*

**Teorema 3.2.6** *Considere  $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  um polinômio de Brieskorn, dado por  $f(z) = z_1^{a_1} + \dots + z_{n+1}^{a_{n+1}}$ . Então,  $H_n(F_f; \mathbb{C})$  tem dimensão*

$$\mu = (a_1 - 1)(a_2 - 1)\dots(a_{n+1} - 1).$$

*Além disso, as raízes do operador  $(h_{2\pi}|_{F_f})_* : H_n(F_f; \mathbb{C}) \rightarrow H_n(F_f; \mathbb{C})$  são os produtos  $\omega_1\omega_2\dots\omega_{n+1}$  onde  $\omega_j$  são as  $a_j$ -ésimas raízes da unidade diferentes de 1. Logo, o polinômio característico do operador  $(h_{2\pi}|_{F_f})_*$  é dado por*

$$\Delta_f(t) = \prod (t - \omega_1\omega_2\dots\omega_{n+1}).$$

**Demonstração.** Seja  $f$  de acordo com as hipóteses do teorema, e para facilitar a escrita tomemos  $m = n + 1$ . Consideremos  $\psi : \mathbb{C}^m - V \rightarrow S^1$ , a extensão trivial da fibração  $\phi : S_\varepsilon^{2n+1} - K_f \rightarrow S^1$ , dada por  $\psi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$ .

Seja  $v(z) = (i\frac{1}{a_1}z_1, \dots, i\frac{1}{a_m}z_m)$  um campo diferenciável em  $\mathbb{C}^m$ . Note que  $v(z)$  é um campo tangente em  $\mathbb{C}^m - V$ , pois

$$\operatorname{Re}(\langle v(z), z \rangle) = \operatorname{Re} \left( i \frac{z_1 \bar{z}_1}{a_1} + \dots + i \frac{z_m \bar{z}_m}{a_m} \right) = \operatorname{Re} \left( i \frac{|z_1|^2}{a_1} + \dots + i \frac{|z_m|^2}{a_m} \right) = 0.$$

Além disso, como

$$i \operatorname{grad} \log(f(z)) = \left( \frac{i}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{z_j^{a_j}}} a_1 z_1^{a_1-1}, \dots, \frac{i}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{z_j^{a_j}}} a_m z_m^{a_m-1} \right)$$

temos,

$$\begin{aligned} \langle v(z), i \operatorname{grad} \log(f(z)) \rangle &= i \frac{1}{a_1} \left( \frac{i}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{z_j^{a_j}}} a_1 z_1^{a_1-1} \right) + \dots + i \frac{1}{a_1} \left( \frac{i}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{z_j^{a_j}}} a_m z_m^{a_m-1} \right) = \\ &= \frac{i(-i)z_1^{a_1-1} + \dots + i(-i)z_m^{a_m-1}}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{z_j^{a_j}}} = 1, \end{aligned}$$

ou seja, é não nulo e tem argumento menor que  $\frac{\pi}{4}$  em valor absoluto. Assim,  $v(z)$  satisfaz as hipóteses do Lema 3.1.7 e, portanto,  $\mathbb{C}^m - V$  fica fibrado pelas variedades  $\widetilde{F}_\theta = \psi^{-1}(e^{i\theta})$ .

Pelo mesmo processo apresentado na Seção 3.1, obtemos

$$\begin{aligned} h : (\mathbb{C}^m - V) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C}^m - V \\ (z, t) &\mapsto (e^{\frac{it}{a_1}} z_1, \dots, e^{\frac{it}{a_m}} z_m). \end{aligned}$$

De fato, tomando  $p_z(t) = (e^{\frac{it}{a_1}} z_1, \dots, e^{\frac{it}{a_m}} z_m)$ , temos

$$\frac{dp_z}{dt}(t) = \left( \frac{i}{a_1} e^{\frac{it}{a_1}} z_1, \dots, \frac{i}{a_m} e^{\frac{it}{a_m}} z_m \right) = v(p_z(t)) \quad \text{e} \quad p_z(0) = z.$$

Assim, o difeomorfismo característico  $h_{2\pi}$  é dado por,  $h_{2\pi}(z) = (e^{\frac{2\pi i}{a_1}} z_1, \dots, e^{\frac{2\pi i}{a_m}} z_m)$  e o operador monodromia homológico é a aplicação  $(h_{2\pi}|_{\widetilde{F}_f})_*$ .

Sejam  $\Omega_{a_j} = \{\omega \in \mathbb{C} \mid \omega \text{ é } a_j\text{-ésima raiz da unidade}\}$ , e considere a junção (definição de junção pode ser vista em [9, p. 9])

$$J = \Omega_{a_1} * \Omega_{a_2} * \dots * \Omega_{a_m} = \{(t_1 \omega_1, \dots, t_m \omega_m) \mid \sum_{j=1}^m t_j = 1, t_j \geq 0 \text{ e } \omega_j \in \Omega_{a_j}\}.$$

Note que dado  $(t_1\omega_1, \dots, t_m\omega_m)$  um elemento qualquer de  $J$ , temos

$$\psi(t_1\omega_1, \dots, t_m\omega_m) = \frac{f(t_1\omega_1, \dots, t_m\omega_m)}{|f(t_1\omega_1, \dots, t_m\omega_m)|} = \frac{t_1^{a_1} + \dots + t_m^{a_m}}{\sqrt{t_1^{2a_1} + \dots + t_m^{2a_m}}},$$

que é real e positivo. Agora, observe que  $\widetilde{F}_f = \{z \in \mathbb{C}^m - V \mid \frac{f(z)}{|f(z)|} = 1\} = \{z \in \mathbb{C}^m - V \mid f(z) \text{ é real e positivo}\}$ . Assim,  $J \subset \widetilde{F}_f$ .

Observe também que  $h_{2\pi}(t_1\omega_1, \dots, t_m\omega_m) = (e^{\frac{2\pi i}{a_1}} t_1\omega_1, \dots, e^{\frac{2\pi i}{a_m}} t_m\omega_m) \in J$ , pois  $(e^{\frac{2\pi i}{a_j}} \omega_j)^{a_j} = 1$ , para todo  $j = 1, \dots, m$ , logo  $e^{\frac{2\pi i}{a_j}} \omega_j \in \Omega_{a_j}$ . Portanto,  $h_{2\pi}(J) \subseteq J$ .

A junção  $J$  é retrato por deformação de  $\widetilde{F}_f$  (para demonstração ver [17, Lema 9.2, p. 73]), então  $H_n(J; \mathbb{C})$  é isomorfo a  $H_n(\widetilde{F}_f; \mathbb{C})$ . Por conta disso, a partir de agora vamos buscar entender quem é o grupo  $H_n(J; \mathbb{C}) = H_n(\Omega_{a_1} * \Omega_{a_2} * \dots * \Omega_{a_m}; \mathbb{C})$ , que por um resultado (ver [16, Lema 2.1]), é isomorfo à  $\widetilde{H}_0(\Omega_{a_1}; \mathbb{C}) \otimes \widetilde{H}_0(\Omega_{a_2}; \mathbb{C}) \otimes \dots \otimes \widetilde{H}_0(\Omega_{a_m}; \mathbb{C})$ .

Note que,  $h_{2\pi}|_J : J \rightarrow J$  induz uma aplicação  $r_{a_j} : \Omega_{a_j} \rightarrow \Omega_{a_j}$ , dada por  $r_{a_j}(z_j) = e^{\frac{2\pi i}{a_j}} z_j$ , de modo que podemos escrever

$$h_{2\pi}|_J = r_{a_1} * r_{a_2} * \dots * r_{a_m} : J \rightarrow J,$$

onde  $r_{a_1} * r_{a_2} * \dots * r_{a_m}(z_1, \dots, z_m) = r_{a_1}(z_1) * r_{a_2}(z_2) * \dots * r_{a_m}(z_m)$ .

Consideremos o homomorfismo induzido

$$(r_{a_j})_* : \widetilde{H}_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C}) \rightarrow \widetilde{H}_0(\Omega_{a_j}, \mathbb{C})$$

do grupo de homologia reduzido. Assim,  $(h_{2\pi}|_J)_* : H_n(J; \mathbb{C}) \rightarrow H_n(J; \mathbb{C})$  pode ser descrita como

$$(h_{2\pi}|_J)_* = (r_{a_1})_* \otimes (r_{a_2})_* \otimes \dots \otimes (r_{a_m})_* : H_n(J; \mathbb{C}) \rightarrow H_n(J; \mathbb{C}).$$

Agora, note que, como  $\Omega_{a_j}$  é o conjunto discreto das  $a_j$ -ésimas raízes da unidade, então  $H_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C})$  é o espaço vetorial gerado pelas raízes

$$e_k = e^{\frac{2\pi i(k-1)}{a_j}}, \quad k = 1, \dots, a_j, \quad \text{de } z - e^{\frac{2\pi i(k-1)}{a_j}}.$$

Seja  $T_j : H_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C}) \rightarrow H_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C})$  a transformação linear obtida induzindo, em homologia, a aplicação  $e^{\frac{2\pi i}{a_j}} z_j$ , o que nos dá  $T_j(e_1) = e_2, \dots, T_j(e_j) = e_1$ . Desta forma,  $x^{a_j} - 1$  é o polinômio característico de  $T_j$ .

Agora, por definição, temos  $\widetilde{H}_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C}) = \frac{\ker(\epsilon)}{I_m \partial_1}$ , onde  $\epsilon : C_0(\Omega_{a_j}) \rightarrow \mathbb{C}$  é dada por  $\epsilon\left(\sum_{k=1}^{a_j} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{a_j} \lambda_k$  e  $C_0(\Omega_{a_j})$  é o conjunto das 0-cadeias de  $\Omega_{a_j}$ . Como  $\epsilon \circ \partial_1 = 0$ , então  $\epsilon$

induz uma aplicação  $H_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que seu núcleo é  $\tilde{H}_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C})$  e  $H_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C}) \simeq \tilde{H}_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$  (ver [9, p. 110]). Portanto,

$$\tilde{H}_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C}) = \left\{ v = \sum_{k=1}^{a_j} \lambda_k e_k \mid \sum_{k=1}^{a_j} \lambda_k = 0 \right\},$$

e como  $H_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C})$  tem dimensão  $a_j$ , então  $\dim_{\mathbb{C}}(\tilde{H}_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C})) = a_j - 1$ .

Sabemos que 1 é autovalor de  $T_j$ , então o autoespaço  $H_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C})_1$  associado a 1 é gerado por  $\sum_{k=1}^{a_j} e_k$ . De fato,

$$\begin{aligned} H_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C})_1 &= \left\{ v = \sum_{k=1}^{a_j} \lambda_k e_k \mid T_j(v) = v \right\} \\ &= \left\{ v = \sum_{k=1}^{a_j} \lambda_k e_k \mid T_j\left(\sum_{k=1}^{a_j} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{a_j} \lambda_k e_k \right\} \\ &= \left\{ v = \sum_{k=1}^{a_j} \lambda_k e_k \mid \lambda_1 e_2 + \dots + \lambda_{a_j} e_1 = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{a_j} e_{a_j} \right\} \\ &= \left\{ v = \sum_{k=1}^{a_j} \lambda_k e_k \mid \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{a_j} \right\} = \left\{ v = \lambda_1 \sum_{k=1}^{a_j} e_k \mid \lambda_1 \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

Além disso,  $T_j$  é diagonalizável, já que a quantidade de autovalores de  $T_j$  é igual a dimensão de  $H_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C})$  ver [10, p. 204]. Logo, por um resultado da Álgebra Linear (ver [10, p. 210]), podemos decompor  $H_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C})$  como soma direta de seus autoespaços, assim, segue que

$$H_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C}) \simeq \oplus_p H_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C})_{e_p} \oplus \mathbb{C} \left( \sum_{k=1}^{a_j} e_k \right), \quad p = 2, \dots, a_j,$$

onde  $H_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C})_{e_p}$  denota os autoespaços com relação a  $e_p$ .

Então,  $H_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C}) \simeq \tilde{H}_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \left( \sum_{k=1}^{a_j} e_k \right)$ , e assim, os autovalores de  $T_j$  restritos a  $\tilde{H}_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C})$  são as  $a_j$ -ésimas raízes da unidade diferentes de 1.

Além disso, dado  $v \in \tilde{H}_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C})$  temos

$$\begin{aligned} T_j(v) &= T_j \left( \sum_{k=1}^{a_j} \lambda_k e_k \right) = \lambda_1 T_j(e_1) + \dots + \lambda_{a_j-1} T_j(e_{a_j-1}) + \lambda_{a_j} T_j(e_{a_j}) = \\ &= \lambda_1 e_2 + \dots + \lambda_{a_j-1} e_{a_j} + \lambda_{a_j} e_1 \in \tilde{H}_0(\Omega_{a_j}). \end{aligned}$$

Portanto,  $T_j(\tilde{H}_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C})) \subset \tilde{H}_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C})$ . Assim,  $T_j|_{\tilde{H}_0(\Omega_{a_j}; \mathbb{C})} = (r_{a_j})_*$  e, por propriedade do produto tensorial, os autovalores de  $(h_{2p}|_J)_* = (r_{a_1})_* \otimes (r_{a_2})_* \otimes \dots \otimes (r_{a_m})_*$  são os produtos



$\omega_1\omega_2\dots\omega_m$ , onde cada  $\omega_j$  varia ao longo de todas as  $a_j$ -ésimas raízes da unidade diferentes de 1. Logo,

$$\Delta_f(t) = \prod (t - \omega_1\omega_2\dots\omega_m).$$

Além disso, como  $H_n(F_f; \mathbb{C}) \simeq H_n(J; \mathbb{C}) = H_n(\Omega_{a_1} * \Omega_{a_2} * \dots * \Omega_{a_m}; \mathbb{C}) \simeq \simeq \tilde{H}_0(\Omega_{a_1}; \mathbb{C}) \otimes \tilde{H}_0(\Omega_{a_2}; \mathbb{C}) \otimes \dots \otimes \tilde{H}_0(\Omega_{a_m}; \mathbb{C})$ , então a dimensão de  $H_n(F_f; \mathbb{C})$  é  $\mu = (a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_m - 1)$ . ■

**Exemplo 3.2.7** Considere o polinômio de Brieskorn  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ , dado por  $f(z_0, z_1, z_2) = z_0^2 + z_1^2 + z_2^3$ . Claramente a origem é o único ponto crítico de  $f$ . Então, pelo Teorema 3.2.6 temos que  $H_n(F_\theta; \mathbb{C})$  tem dimensão  $\mu = (2 - 1)(2 - 1)(3 - 1) = 2$ .

Além disso, o polinômio característico associado é  $\Delta_f(t) = t^2 + t + 1$  e os autovalores do operador monodromia homológico  $(h_{2\pi}|_{F_f})_* : H_n(F_f; \mathbb{C}) \rightarrow H_n(F_f; \mathbb{C})$  são  $\lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ . Como o operador monodromia  $(h_{2\pi}|_{F_f})_*$  é diagonalizável, a matriz diagonal associada  $[(h_{2\pi}|_{F_f})_*]_B = H_f$  é da forma

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

## Estudo de polinômios quase homogêneos

Este capítulo contém o principal resultado deste trabalho. Para obtê-lo, na primeira seção apresentamos as chamadas Formas de Seifert associada a um polinômio com singularidade isolada na origem. Na segunda seção utilizamos desta ferramenta para o estudo de polinômios quase homogêneos com singularidade isolada na origem. As principais referências deste capítulo são [5], [19] e [2]. Assumiremos alguns resultados conhecidos da Álgebra Linear, cuja referência é [10].

### 4.1 Formas de Seifert

Seja  $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  um polinômio com singularidade isolada na origem que se anula na origem. Considere a fibra de Milnor  $F_f = F_0 = \phi^{-1}(e^{i0}) = \phi^{-1}(1)$ .

Lembremos, das ferramentas utilizadas para a demonstração do Teorema da Fibração de Milnor, que para cada  $t \in \mathbb{R}$ , temos definido o difeomorfismo  $h_t : S_\varepsilon^{2n+1} - K_f \rightarrow S_\varepsilon^{2n+1} - K_f$  e que  $h_t|_{F_f}$  leva  $F_f$  em  $F_t$ , pela Observação 3.1.12. Para a definição da Forma de Seifert associada ao polinômio  $f$ , precisamos considerar a aplicação induzida em homologia  $(h_\pi|_{F_f})_*$ , com coeficientes em  $\mathbb{Z}$ .

Seja  $n > 0$ , consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} L_f : H_n(F_f; \mathbb{Z}) \times H_n(F_f; \mathbb{Z}) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ ([x], [y]) &\mapsto L_f([x], [y]) := lk((h_\pi|_{F_f})_*(x), y), \end{aligned}$$

onde  $lk((h_\pi|_{F_f})_*(x), y)$  é o linking number em  $S_\varepsilon^{2n+1}$  entre os representantes dos  $n$ -ciclos  $(h_\pi|_{F_f})_*([x])$  e  $[y]$ .

Para que esta aplicação esteja bem definida, como o linking number está definido para ciclos homólogos ao ciclo nulo e disjuntos, precisamos garantir que  $(h_\pi|_{F_f})_*(x)$  e  $y$  satisfaçam essas condições em  $S_\varepsilon^{2n+1}$ .

De acordo com o Teorema 3.1.5, sabemos que as fibras  $F_\theta$  tem o mesmo tipo de homotopia de um buquê de  $\mu$   $n$ -esferas. Assim, por um resultado, que pode ser visto em [9, Corolário 2.11, p. 111],  $H_n(F_\theta; \mathbb{Z})$  é isomorfo a  $H_n(S_\varepsilon^n \vee S_\varepsilon^n \vee \dots \vee S_\varepsilon^n; \mathbb{Z})$ .

Sabemos que os  $n$ -ciclos de  $H_n(S_\varepsilon^n \vee S_\varepsilon^n \vee \dots \vee S_\varepsilon^n; \mathbb{Z})$  são  $n$ -esferas. Logo,  $(h_\pi|_{F_f})_*(x)$  e  $y$ , representantes das classes dos  $n$ -ciclos de  $H^n(F_\pi; \mathbb{Z})$  e  $H^n(F_f; \mathbb{Z})$ , respectivamente, são deformações contínuas de  $n$ -esferas. Além disso,  $(h_\pi|_{F_f})_*(x)$  e  $y$  estão contidas em  $S_\varepsilon^{2n+1}$ , já que pertencem a  $F_\pi$  e  $F_f$ , respectivamente. Assim,  $(h_\pi|_{F_f})_*(x)$  e  $y$  são  $n$ -ciclos singulares em  $S_\varepsilon^{2n+1}$ .

Note que uma  $n$ -esfera em  $S_\varepsilon^{2n+1}$  é bordo de uma deformação de uma  $n$ -bola fechada em  $S_\varepsilon^{2n+1}$ , assim pela Observação 1.3.7 a  $n$ -esfera é homóloga ao ciclo nulo. Como  $(h_\pi|_{F_f})_*(x)$  e  $y$  são deformações contínuas de  $n$ -esfera, então elas são homólogas ao ciclo nulo, ou seja, existem  $a_1^{n+1}$  e  $a_2^{n+1}$   $(n+1)$ -cadeias em  $S_\varepsilon^{2n+1}$  tais que  $(h_\pi|_{F_f})_*(x) = \partial(a_1^{n+1})$  e  $y = \partial(a_2^{n+1})$ .

Sabemos que  $(h_\pi|_{F_f})_*(x) \in H_n(F_\theta; \mathbb{Z})$  e  $y \in H_n(F_f; \mathbb{Z})$ , como  $F_\pi = \phi^{-1}(e^{i\pi})$  e  $F_f = \phi^{-1}(e^{i0}) = \phi^{-1}(1)$ , então  $(h_\pi|_{F_f})_*(x)$  e  $y$  são  $n$ -ciclos disjuntos.

Dessa forma, para calcularmos o linking number entre  $(h_\pi|_{F_f})_*(x)$  e  $y$ , basta calcularmos o número de interseção entre  $a^{n+1}$  e  $y$ , onde  $(h_\pi|_{F_f})_*(x) = \partial(a^{n+1})$ . Para isso, podemos considerar uma decomposição simplicial de  $S_\varepsilon^{2n+1}$  e obter o complexo celular  $\mathcal{S}^{2n+1}$ , como no Exemplo 1.4.62. Então,

$$lk((h_\pi|_{F_f})_*(x), y) = S(a^{n+1}, y) = S(Ap(a^{n+1}), Ap(y)).$$

**Definição 4.1.1** A aplicação  $L_f$  é chamada **Forma de Seifert** associada a  $f$ .

Podemos definir a Forma de Seifert quando  $n = 0$ , para isso basta mudarmos o domínio de  $L_f$  para  $\tilde{H}_0(F_f; \mathbb{Z}) \times \tilde{H}_0(F_f; \mathbb{Z})$ .

**Observação 4.1.2** Como pela Observação 2.2.3, linking number é uma aplicação  $\mathbb{Z}$ -bilinear, segue que a Forma de Seifert associada a  $f$  é uma aplicação  $\mathbb{Z}$ -bilinear.

Como  $H_n(F_f; \mathbb{Z})$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre finitamente gerado, e portanto possui uma base,

então existe uma matriz  $\Gamma_{f,\mathbb{Z}}$  que representa essa aplicação  $\mathbb{Z}$ -bilinear. Chamaremos esta matriz de **matriz de Seifert** associada a  $f$ .

**Exemplo 4.1.3** *Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por  $f(z) = z^2$ . Então,  $\Gamma_{f,\mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} \pm 1 \end{pmatrix}$ .*

*Para demonstrarmos que isto é válido precisamos primeiramente entender quem é a fibra de Milnor  $F_f$  e quem são os geradores de  $H_0(F_f; \mathbb{Z})$ , já que neste caso temos  $n = 0$ .*

*Note que para qualquer  $\varepsilon > 0$ , a aplicação  $\phi : S_\varepsilon^1 - K_f \rightarrow S^1$  não possui pontos críticos diferentes da origem, já que*

$$d_z \phi = \frac{2\bar{z}}{z^2} = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

*Portanto, podemos considerar  $\varepsilon = 1$  e a fibra de Milnor  $F_f$  será*

$$\begin{aligned} F_f &= F_0 = \phi^{-1}(e^{i0}) = \phi^{-1}(1) = \{z \in S^1 - K_f \mid \frac{z^2}{|z|^2} = 1\} = \\ &= \{z \in S^1 - K_f \mid \left(\frac{z}{|z|}\right)^2 = 1\} = \{z \in S^1 - K_f \mid z^2 = 1\} = \{1, -1\}, \end{aligned}$$

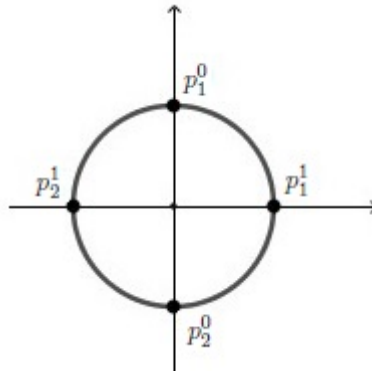
*já que  $f(1) = 1$  e  $f(-1) = 1$  e, portanto,  $1$  e  $-1$  não pertencem a  $K_f = S^1 \cap f^{-1}(0)$ .*

*Como  $F_f$  é um conjunto discreto, sabemos que as únicas funções contínuas possíveis neste espaço são as funções constantes  $\varphi_j : F_f \rightarrow (-1)^j$ , com  $j = 0, 1$ , e que a imagem destas funções vistas como simplexes são 0-ciclos, ou seja, pertencem a  $Z_0$ . Também sabemos que  $B_0$ , conjunto das 0-cadeias que são bordos de 1-cadeias, é o conjunto  $\{0\}$ , já que não existem 1-simplexes neste espaço. Assim, o grupo de homologia  $H_0(F_f; \mathbb{Z}) = Z_0(F_f)/B_0(F_f)$  é gerado por  $\{1, -1\}$ . Temos que  $H_0(F_f; \mathbb{Z})$  é isomorfo a  $\widetilde{H}_0(F_f; \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}$  (ver [9, p. 110]) e com isso,  $\{1\}$  é uma base para  $\widetilde{H}_0(F_f; \mathbb{Z})$ .*

*Dessa forma,*

$$\Gamma_{f,\mathbb{Z}} = \left( L_f([1], [1]) \right) = \left( lk((h_\pi|_{F_f})_*(1), 1) \right).$$

*Considere  $1 = (1, 0)$  em  $S^1$ , enxergando agora  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{R}^2$ . Como visto na demonstração do Teorema 3.2.6, segue que  $h_\pi(z) = e^{\frac{\pi}{2}}z$ , então temos  $(h_\pi|_{F_f})_*(1) = \{(0, 1), (0, -1)\}$ . Precisamos obter um complexo celular em  $S^1$  de maneira que os pontos  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$  sejam 0-células deste complexo. Para isso, basta fazermos o mesmo processo que foi apresentado no Exemplo 1.4.62, escolhendo a decomposição simplicial como sendo a decomposição octaédrica e depois subdividindo normalmente para obter o complexo celular  $\mathcal{S}^1$ , onde  $p_1^1 = (1, 0)$ ,  $p_2^1 = (-1, 0)$ ,  $p_1^0 = (0, 1)$  e  $p_2^0 = (0, -1)$ , como na figura a seguir.*

Figura 4.1: Complexo celular 1-dimensional  $\mathcal{S}^1$ 

Suponhamos que a orientação de  $S^1$  está fixada no sentido anti-horário. Para que o complexo  $\mathcal{S}^1$  esteja orientado basta orientarmos todas as suas 0-células. Considere então que todas as 0-células,  $p_1^0$ ,  $p_2^0$ ,  $p_1^1$  e  $p_2^1$  têm sinal positivo. As 1-células  $e_1^1$  e  $e_2^1$  estão orientadas (de acordo com a orientação fixa de  $S^1$ ) da seguinte maneira:

$$e_1^1 = \{-[p_1^0, p_1^1], +[p_2^0, p_1^1]\};$$

$$e_2^1 = \{+[p_1^0, p_2^1], -[p_2^0, p_2^1]\}.$$

Queremos calcular o linking number entre  $(h_\pi|_{F_f})_*(p_1^1)$  e  $p_1^1$ . Como  $\partial(e_1^1) = (h_\pi|_{F_f})_*(p_1^1)$  e  $e_1^1$  é a célula dual de  $p_1^1$ , então

$$lk((h_\pi|_{F_f})_*([p_1^1]), p_1^1) = S(e_1^1, p_1^1).$$

Para calcular este número de interseção escolhemos, por exemplo, o 1-simplexo  $-[p_1^0, p_1^1]$  de  $e_1^1$ , tomamos também o único 0-simplexo possível  $+p_1^1$ , e assim obtemos o 1-simplexo  $\zeta[p_1^0, p_1^1]$  em  $\mathcal{S}^1$ , onde  $\zeta = -1$  é dado pela orientação da variedade  $S^1$ . Logo,  $S(e_1^1, p_1^1) = (-1)(+1)(-1) = 1$ . Portanto,

$$\Gamma_{f, \mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Note que alterando a orientação de  $p_1^1$  obtemos o sinal oposto.

Para os nossos resultados, a matriz de Seifert será de grande importância. Por este motivo, apresentamos a seguir algumas definições e resultados a respeito dessas matrizes.

**Definição 4.1.4** Uma matriz quadrada com entradas inteiras  $A$  é chamada **unimodular**

se  $\det(A) = \pm 1$ . Uma matriz unimodular  $A$  é **congruente** a uma matriz unimodular  $B$  se existe uma matriz unimodular  $P$  tal que  $A = P^t \cdot B \cdot P$ . Denotamos  $A \equiv B$ .

**Proposição 4.1.5** *As matrizes de Seifert  $\Gamma_{f,\mathbb{Z}}$  são unimodulares.*

A demonstração pode ser vista em [11, p. 457].

**Teorema 4.1.6** *Seja  $h : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  polinômios com singularidade isolada na origem e que se anulam na origem. Seja  $f : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definido como  $f(x, y) = h(x) + g(y)$ . Então,*

$$\Gamma_{f,\mathbb{Z}} \equiv (-1)^{mn} \Gamma_{h,\mathbb{Z}} \otimes \Gamma_{g,\mathbb{Z}}.$$

A demonstração pode ser vista em [21, Teorema 2, p. 715]. Para a definição de produto tensorial de matrizes ver [4, p. 356].

Podemos estender o conceito de Forma de Seifert associada a  $f$  para os casos em que o grupo de homologia da fibra de Milnor possui como anel dos coeficientes  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Sabemos pelo Teorema dos Coeficientes Universais que  $H_n(F_f; \mathbb{R})$  é isomorfo a  $H_n(F_f; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$  e que  $H_n(F_f; \mathbb{C})$  é isomorfo a  $H_n(F_f; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ , já que  $H_n(F_f; \mathbb{R})$  e  $H_n(F_f; \mathbb{C})$  não tem torção pois  $F_f$  é homotopicamente equivalente a um buquê de esferas.

Com o intuito de definirmos as aplicações  $L_{f,\mathbb{R}} = L_f \otimes \mathbb{R}$  e  $L_{f,\mathbb{C}} = L_f \otimes \mathbb{C}$ , vamos entender a lei destas aplicações para os geradores. Considerando  $\{x_1, \dots, x_\mu\}$  gerador de  $H_n(F_f; \mathbb{Z})$  e  $\{1\}$  gerador de  $\mathbb{R}$  e de  $\mathbb{C}$ , então

$$\begin{aligned} L_{f,\mathbb{R}} : H_n(F_f; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} \times H_n(F_f; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ ([x_k \otimes 1], [x_j \otimes 1]) &\mapsto lk((h_\pi|_{F_f})_*(x_k), x_j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{f,\mathbb{C}} : H_n(F_f; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} \times H_n(F_f; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ ([x_k \otimes 1], [x_j \otimes 1]) &\mapsto lk((h_\pi|_{F_f})_*(x_k), x_j). \end{aligned}$$

**Definição 4.1.7** *As aplicações  $L_{f,\mathbb{R}}$  e  $L_{f,\mathbb{C}}$  são chamadas de **Forma de Seifert real** e **Forma de Seifert complexa**, respectivamente.*

**Observação 4.1.8** *Como  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  são corpos, então o  $\mathbb{R}$ -módulo  $H^n(F_f; \mathbb{R})$  e o  $\mathbb{C}$ -módulo  $H^n(F_f; \mathbb{C})$  possuem estrutura de espaços vetoriais e, assim,  $L_{f,\mathbb{R}}$  e  $L_{f,\mathbb{C}}$  realmente são formas de acordo com a definição de Álgebra Linear. Note ainda que  $L_{f,\mathbb{R}}$  é uma forma bilinear e  $L_{f,\mathbb{C}}$  é uma forma sesquilinear. Assim, existem matrizes associadas a essas aplicações, denotamos por  $\Gamma_{f,\mathbb{R}}$  a **matriz de Seifert real** associada a  $f$  e por  $\Gamma_{f,\mathbb{C}}$  a **matriz de Seifert complexa** associadas a  $f$ .*

**Definição 4.1.9** *Sejam  $f$  e  $g$  polinômios em  $\mathbb{C}^{n+1}$  com singularidade isolada na origem e que se anulam na origem. Dizemos que suas Formas de Seifert são **equivalentes sobre os números reais** se  $L_{f,\mathbb{R}}$  e  $L_{g,\mathbb{R}}$  são equivalentes como formas bilineares, ou seja, se existe um isomorfismo  $s : H_n(F_f; \mathbb{R}) \rightarrow H_n(F_g; \mathbb{R})$  tal que  $L_{f,\mathbb{R}}([x], [y]) = L_{g,\mathbb{R}}(s([x]), s([y]))$ , para todo  $[x], [y] \in H_n(F_f; \mathbb{R})$ .*

O resultado a seguir nos fornece determinadas relações entre as matrizes dos operadores monodromia e a matriz de Seifert complexa (para mais detalhes ver [5], [11] e [19, Lema 2.1, p. 413]).

**Proposição 4.1.10** *Seja  $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  um polinômio com singularidade isolada na origem e que se anula na origem. Então,*

1.  $H_f = (-1)^{n+1} \overline{\Gamma_{f,\mathbb{C}}^{-1}} \Gamma_{f,\mathbb{C}}^t$ ;
2.  $T_f = (-1)^{n+1} \Gamma_{f,\mathbb{C}} \overline{(\Gamma_{f,\mathbb{C}}^{-1})^t}$ ,

onde  $H_f$  e  $T_f$  representam as matrizes dos operadores monodromia homológico  $(h_{2\pi}|_{F_f})_*$  e cohomológico  $((h_{2\pi}|_{F_f})^*)^{-1}$ , respectivamente, e  $t$  sobrescrito representa a matriz transposta associada.

**Proposição 4.1.11** *O operador monodromia cohomológico  $((h_{2\pi}|_{F_f})^*)^{-1}$  é diagonalizável.*

**Demonstração.** Pela proposição anterior, temos que o operador monodromia cohomológico pode ser representado pela matriz  $T_f = (-1)^{n+1} \Gamma_{f,\mathbb{C}} \overline{(\Gamma_{f,\mathbb{C}}^{-1})^t}$ .

Considerando  $T_f^*$  como a transposta conjugada da matriz  $T_f$ , temos

$$T_f T_f^* = (-1)^{n+1} (-1)^{n+1} \Gamma_{f,\mathbb{C}} \overline{(\Gamma_{f,\mathbb{C}}^{-1})^t} \overline{(\Gamma_{f,\mathbb{C}})^t} \Gamma_{f,\mathbb{C}}^{-1} = (-1)^{2n+2} Id$$

$$T_f^* T_f = (-1)^{n+1} (-1)^{n+1} \overline{(\Gamma_{f,\mathbb{C}})^t} \Gamma_{f,\mathbb{C}}^{-1} \Gamma_{f,\mathbb{C}} \overline{(\Gamma_{f,\mathbb{C}}^{-1})^t} = (-1)^{n+2} Id,$$

onde  $Id$  é a matriz identidade. Logo,  $T_f T_f^* = T_f^* T_f$ . Portanto, o operador monodromia cohomológico é um operador normal e por um resultado, que pode ser visto em [10, Teorema 22, p. 317], temos que  $((h_{2\pi}|_{F_f})^*)^{-1} : H^n(F_f; \mathbb{C}) \rightarrow H^n(F_f; \mathbb{C})$  é diagonalizável. ■

**Definição 4.1.12** *Seja  $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  um polinômio com singularidade isolada na origem e que se anula na origem ( $n > 0$ ). Então definimos a **matriz da forma de interseção** da fibra  $F_f$  por*

$$I_f = \Gamma_{f,\mathbb{C}} + (-1)^n \overline{\Gamma_{f,\mathbb{C}}^t}.$$

Note que podemos enxergar  $I_f$  como a matriz que representa uma forma  $S_f : H^n(F_f; \mathbb{C}) \times H^n(F_f; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ , pois  $\Gamma_{f, \mathbb{C}}$  representa a forma  $L_{f, \mathbb{C}}$  e por um resultado que pode ser visto em [9, Corolário 3.3, p. 196], temos  $H_n(F_f; \mathbb{C})$  isomorfo a  $H^n(F_f; \mathbb{C})$ , já que a fibra  $F_f$  tem o mesmo tipo de homotopia que um buquê de esferas e portanto não tem torsão. Considerando  $I_f^*$  a matriz transposta conjugada de  $I_f$ , vemos que, quando  $n$  é par, temos

$$I_f^* = \overline{\Gamma_{f, \mathbb{C}}^t} + \overline{(\Gamma_{f, \mathbb{C}}^t)^t} = \overline{\Gamma_{f, \mathbb{C}}^t} + \Gamma_{f, \mathbb{C}} = I_f,$$

assim,  $S_f$  é uma forma hermitiana.

**Observação 4.1.13** *Pelo Teorema do Eixo Principal, que pode ser visto em [10, Teorema 4, p. 324], temos que existe uma base ortonormal de  $H^n(F_f; \mathbb{C})$  tal que  $S_f$  pode ser representada por uma matriz diagonal  $\tilde{I}_f$ , cujas entradas são reais, que é semelhante a  $I_f$ .*

*Neste caso em que  $n$  é par, temos que  $\tilde{I}_f$  representa uma transformação linear  $\widetilde{S}_f : H^n(F_f; \mathbb{C}) \rightarrow H^n(F_f; \mathbb{C})$  (veja [10, p. 322]). Como  $I_f$  é semelhante a  $\tilde{I}_f$ , então  $I_f$  também representa a transformação  $\widetilde{S}_f$ . Logo, os autovalores de  $I_f$  são reais.*

Seja  $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  um polinômio com singularidade isolada na origem e que se anula na origem, com  $n$  par. Sabemos que o operador monodromia cohomológico,  $((h_{2\pi}|_{F_f})^*)^{-1}$ , é diagonalizável, pela Proposição 4.1.11. Então, temos que

$$H^n(F_f; \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{\lambda} H^n(F_f; \mathbb{C})_{\lambda},$$

onde  $\lambda$  são os autovalores e  $H^n(F_f; \mathbb{C})_{\lambda}$  são os autoespaços do operador monodromia. Fazendo um abuso de notação temos  $\widetilde{S}_f : \bigoplus_{\lambda} H^n(F_f; \mathbb{C})_{\lambda} \rightarrow H^n(F_f; \mathbb{C})$  e então podemos considerar as restrições  $\widetilde{S}_{f, \lambda} = \widetilde{S}_f|_{H^n(F_f; \mathbb{C})_{\lambda}}$ , para cada  $\lambda$ .

**Definição 4.1.14** *Nas condições acima, definimos*

$$\mu^0(f) := \text{dimensão do Ker}(\widetilde{S}_f);$$

$$\mu_{\lambda}^+(f) := \text{quantidade de autovalores positivos de } \widetilde{S}_{f, \lambda};$$

$$\mu_{\lambda}^-(f) := \text{quantidade de autovalores negativos de } \widetilde{S}_{f, \lambda}.$$

**Observação 4.1.15** *A diferença  $\mu_{\lambda}^+(f) - \mu_{\lambda}^-(f)$  é chamada de **assinatura equivariante** de  $f$  com relação a  $\lambda$ .*



## 4.2 Aplicações em polinômios quase homogêneos

**Definição 4.2.1** Dizemos que  $f(x_1, \dots, x_m)$  é um **polinômio quase homogêneo** do tipo  $(w_1, w_2, \dots, w_m)$  em  $\mathbb{C}^m$  se para cada monômio  $cx_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$ ,  $c \neq 0$ , temos

$$\frac{i_1}{w_1} + \dots + \frac{i_m}{w_m} = 1,$$

onde  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , são números positivos racionais chamados de **pesos**.

**Exemplo 4.2.2** Todo polinômio de Brieskorn  $f(x_1, \dots, x_m) = x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + \dots + x_m^{a_m}$  é quase homogêneo do tipo  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ .

De fato, para cada  $j$ -ésimo monômio  $x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$  temos  $i_j = a_j$  e  $i_k = 0$  para todo  $k \neq j$ , com  $j = 1, \dots, m$ . Logo,  $\frac{i_1}{a_1} + \dots + \frac{i_m}{a_m} = \frac{0}{a_1} + \dots + \frac{a_j}{a_j} + \dots + \frac{0}{a_m} = 1$ .

Dado um polinômio  $f$  quase homogêneo com singularidade isolada na origem, note que temos bem definidas as fibras de Milnor  $F_\theta$  associadas a  $f$  e a Forma de Seifert associada a  $f$ .

Para cada polinômio quase homogêneo com singularidade isolada na origem  $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  do tipo  $(w_1, w_2, \dots, w_{n+1})$  com  $w_i \geq 2$ , vamos considerar o seguinte polinômio

$$P_f(t) = \prod_{j=1}^{n+1} \frac{t - t^{\frac{1}{w_j}}}{t^{\frac{1}{w_j}} - 1}.$$

$P_f(t)$  será um polinômio em  $\mathbb{Z}[t^{\frac{1}{m}}]$ , para algum  $m$  inteiro positivo.

**Exemplo 4.2.3** (a) Considere  $f(z_0, z_1) = z_0^2 - z_1^3$ , que é um polinômio quase homogêneo do tipo  $(2, 3)$  com singularidade isolada na origem. Temos que

$$P_f(t) = \frac{t - t^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}} - 1} \cdot \frac{t - t^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{1}{3}} - 1} = \frac{t^2 - t^{\frac{4}{3}} - t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{5}{6}}}{t^{\frac{5}{6}} - t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{3}} + 1} = t^{\frac{7}{6}} + t^{\frac{5}{6}}.$$

(b) Seja  $f(z_0, z_1, z_2) = z_0^2 + z_1^2 + z_2^3$  um polinômio quase homogêneo do tipo  $(2, 2, 3)$  com singularidade isolada na origem. Temos que

$$P_f(t) = \frac{t - t^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}} - 1} \cdot \frac{t - t^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}} - 1} \cdot \frac{t - t^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{1}{3}} - 1} = t^{\frac{5}{3}} + t^{\frac{4}{3}}.$$

**Observação 4.2.4** K. Saito, em [20, Teorema 4.1, p. 139], mostra que se  $f$  tem singularidade isolada na origem, existe uma mudança de coordenadas analítica de  $f$  tal que

seus pesos são maiores ou iguais a 2. Assim, dado qualquer polinômio quase homogêneo com singularidade isolada na origem  $f$ , podemos definir  $P_f(t)$ , considerando seus pesos se eles são maiores ou iguais a 2; caso contrário, consideramos os pesos da mudança de coordenadas analítica de  $f$ .

Considerando  $P_f(t)$  escrito da seguinte forma,

$$P_f(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} c_\alpha t^\alpha,$$

temos o importante resultado a seguir.

**Proposição 4.2.5** *Seja  $f$  um polinômio quase homogêneo em  $\mathbb{C}^{n+1}$  com singularidade isolada na origem. Se  $n$  é par, temos*

$$\mu_0(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} c_\alpha,$$

$$\mu_\lambda^+(f) = \sum_{\lambda=e^{-2\pi i\alpha}, [\alpha]:\text{par}} c_\alpha, \quad (\lambda \neq 1)$$

$$\mu_\lambda^-(f) = \sum_{\lambda=e^{-2\pi i\alpha}, [\alpha]:\text{ímpar}} c_\alpha, \quad (\lambda \neq 1)$$

onde  $[\alpha]$  denota o maior inteiro que não excede  $\alpha$ .

A demonstração pode ser vista em [24, p. 222].

**Observação 4.2.6** *Quando  $n$  é par, o resultado acima garante que escrevendo  $P_f(t) = \sum c_\alpha t^\alpha$ , os autovalores  $\lambda$  do operador monodromia homológico de  $f$  são da forma  $e^{-2\pi i\alpha}$ .*

**Exemplo 4.2.7** *Considere o polinômio  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ , dado por  $f(z_0, z_1, z_2) = z_0^2 + z_1^2 + z_2^3$ . Como visto no Exemplo 3.2.7 os autovalores do operador monodromia homológico de  $f$  são  $\lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ . Da Proposição 4.1.10 obtemos  $T_f = (H_f)^t$ , portanto*

$$T_f = (H_f)^t = \begin{pmatrix} \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Logo,  $\lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{-2\pi i \frac{5}{3}}$  e  $\lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-2\pi i \frac{4}{3}}$  são autovalores do operador monodromia cohomológico de  $f$ . Por outro lado, pelo item (b) do Exemplo 4.2.3,  $P_f(t) = t^{\frac{5}{3}} + t^{\frac{4}{3}}$ , o que condiz com a observação anterior.

**Definição 4.2.8** *Seja  $f$  um polinômio em  $\mathbb{C}^m$  com singularidade isolada na origem. Definimos a **suspensão** de  $f$  por*

$$\tilde{f}(z_1, \dots, z_m, z_{m+1}) = f(z_1, \dots, z_m) + z_{m+1}^2.$$

Note que, como  $f$  tem singularidade isolada na origem, ou seja, existe uma vizinhança  $U_1$  da origem no qual  $\text{grad } f(z_1, \dots, z_m) = (\frac{\partial f(z)}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f(z)}{\partial z_m})$  não se anula em  $U_1 - \{0\}$ , então  $\tilde{f}$  também tem singularidade isolada na origem, pois  $\text{grad } \tilde{f}(z_1, \dots, z_m, z_{m+1}) = (\frac{\partial f(z)}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f(z)}{\partial z_m}, 2z_{m+1})$  não se anula em  $\tilde{U} - \{0\}$ , com  $\tilde{U} = U_1 \times U_2$ , onde  $U_2$  é uma vizinhança da origem em  $\mathbb{C}$ .

**Lema 4.2.9** *Sejam  $f$  um polinômio em  $\mathbb{C}^{n+1}$  com singularidade isolada na origem e  $\tilde{f}$  sua suspensão. Então,*

$$\Gamma_{\tilde{f}, \mathbb{Z}} \equiv (-1)^{n+1} \Gamma_{f, \mathbb{Z}} \otimes (\pm 1).$$

**Demonstração.** Observe que a função  $g(z_{n+2}) = z_{n+2}^2$  é um polinômio de Brieskorn, então  $\tilde{f}$  é soma de polinômios com singularidade isolada na origem. Assim, pelo Teorema 4.1.6,  $\Gamma_{\tilde{f}, \mathbb{Z}} \equiv (-1)^{(n+1)n} \Gamma_{f, \mathbb{Z}} \otimes \Gamma_{g, \mathbb{Z}}$ .

Pelo Exemplo 4.1.3,  $\Gamma_{g, \mathbb{Z}} \equiv (\pm 1)$ . Assim, existe uma matriz unimodular  $P$  tal que,  $\Gamma_{g, \mathbb{Z}} = P^t((\pm 1))P$ .

Como  $P$  é uma matriz  $1 \times 1$  unimodular, ou seja,  $\det(P) = \pm 1$ , então  $P = (1)$  ou  $(-1)$ . Logo,  $\Gamma_{g, \mathbb{Z}} = (\pm 1)$ . Portanto,  $\Gamma_{\tilde{f}, \mathbb{Z}} \equiv (-1)^{n+1} \Gamma_{f, \mathbb{Z}} \otimes (\pm 1)$ . ■

**Observação 4.2.10** *Considere  $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  um polinômio quase homogêneo do tipo  $(w_1, w_2, \dots, w_{n+1})$  com singularidade isolada na origem. Assumindo que  $w_i \geq 2$ , fazendo uma mudança de coordenadas, se necessário, temos*

$$P_f(t) = \prod_{j=1}^{n+1} \frac{t - t^{\frac{1}{w_j}}}{t^{\frac{1}{w_j}} - 1}.$$

Note que a suspensão  $\tilde{f}$  de  $f$  é quase homogênea do tipo  $(w_1, w_2, \dots, w_{n+1}, 2)$  com sin-

gularidade isolada na origem. Assim,

$$P_{\tilde{f}}(t) = \left( \prod_{j=1}^{n+1} \frac{t - t^{\frac{1}{w_j}}}{t^{\frac{1}{w_j}} - 1} \right) \cdot \frac{t - t^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}} - 1},$$

e, portanto,  $P_{\tilde{f}}(t) = t^{\frac{1}{2}} P_f(t)$ .

Agora, temos ferramentas suficientes para provar o resultado a seguir, que é o objetivo principal do trabalho.

**Teorema 4.2.11** *Sejam  $f$  e  $g$  polinômios quase homogêneos em  $\mathbb{C}^{n+1}$  com singularidade isolada na origem. Se as Formas de Seifert associadas a  $f$  e  $g$  são equivalentes sobre os números reais, então  $P_f(t) \equiv P_g(t) \pmod{(t^2 - 1)}$ .*

**Demonstração.** Nosso primeiro passo é mostrar que os polinômios característicos,  $\Delta_f(t)$  e  $\Delta_g(t)$ , dos operadores monodromia cohomológicos,  $((h_{2\pi}|_{F_f})^*)^{-1}$  e  $((h_{2\pi}|_{F_g})^*)^{-1}$ , coincidem.

Como  $L_{f,\mathbb{R}}$  é equivalente a  $L_{g,\mathbb{R}}$ , então existe  $s : H_n(F_f; \mathbb{R}) \rightarrow H_n(F_g; \mathbb{R})$  isomorfismo, tal que

$$L_{f,\mathbb{R}}(u, v) = L_{g,\mathbb{R}}(su, sv), \quad \forall u, v \in H_n(F_f; \mathbb{R}). \quad (4.1)$$

Seja  $\mu$  o número de Milnor de  $f$  e considere  $B_{\mathbb{Z}} = \{[x_1], \dots, [x_\mu]\}$  uma base de  $H_n(F_f; \mathbb{Z})$ , então  $B_{\mathbb{R}} = \{[x_1] \otimes 1, \dots, [x_\mu] \otimes 1\}$  é uma base para  $H_n(F_f; \mathbb{R}) \simeq H_n(F_f; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ . Como a Forma de Seifert real é dada por

$$\begin{aligned} L_{f,\mathbb{R}} : H_n(F_f; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} \times H_n(F_f; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ ([x_k] \otimes 1, [x_j] \otimes 1) &\mapsto lk(i_* x_k, x_j), \end{aligned}$$

onde  $i = h_{2\pi}|_{F_f}$ , então temos

$$[L_f]_{B_{\mathbb{Z}}} = \begin{pmatrix} lk(i_* x_1, x_1) & lk(i_* x_2, x_1) & \cdots & lk(i_* x_\mu, x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ lk(i_* x_\mu, x_1) & lk(i_* x_\mu, x_2) & \cdots & lk(i_* x_\mu, x_\mu) \end{pmatrix} = [L_{f,\mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}}.$$

Agora, como a aplicação  $s$  é isomorfismo, temos que  $\tilde{B}_{\mathbb{R}} = \{s([x_1] \otimes 1), \dots, s([x_\mu] \otimes 1)\} = \{[\bar{s}x_1] \otimes 1, \dots, [\bar{s}x_\mu] \otimes 1\}$  é base de  $H_n(F_g; \mathbb{R})$ , onde  $\bar{s}$  é o isomorfismo natural obtido através de  $s$  e dos isomorfismos  $H_n(F_f; \mathbb{R}) \simeq H_n(F_f; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$  e  $H_n(F_g; \mathbb{R}) \simeq H_n(F_g; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ .

De (4.1) temos  $lk(i_*x_j, x_k) = lk(i_*\bar{s}x_j, \bar{s}x_k)$  e com isso

$$\begin{aligned} [L_{f,\mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}} &= \begin{pmatrix} lk(i_*x_1, x_1) & lk(i_*x_2, x_1) & \cdots & lk(i_*x_\mu, x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ lk(i_*x_1, x_\mu) & lk(i_*x_2, x_\mu) & \cdots & lk(i_*x_\mu, x_\mu) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} lk(i_*\bar{s}x_1, \bar{s}x_1) & lk(i_*\bar{s}x_2, \bar{s}x_1) & \cdots & lk(i_*\bar{s}x_\mu, \bar{s}x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ lk(i_*\bar{s}x_1, \bar{s}x_\mu) & lk(i_*\bar{s}x_2, \bar{s}x_\mu) & \cdots & lk(i_*\bar{s}x_\mu, \bar{s}x_\mu) \end{pmatrix} = [L_{g,\mathbb{R}}]_{\tilde{B}_{\mathbb{R}}}. \end{aligned}$$

Considerando  $B_{\mathbb{C}} = \{[x_1] \otimes 1, \dots, [x_\mu] \otimes 1\}$  uma base para  $H_n(F_f; \mathbb{C}) \simeq H_n(F_f; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$  e  $\tilde{B}_{\mathbb{C}} = \{[\bar{s}x_1] \otimes 1, \dots, [\bar{s}x_\mu] \otimes 1\}$  uma base de  $H_n(F_g; \mathbb{C}) \simeq H_n(F_g; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$  e como a Forma de Seifert complexa é dada por

$$\begin{aligned} L_{f,\mathbb{C}} : H_n(F_f; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} \times H_n(F_f; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x_k \otimes 1, x_j \otimes 1) &\mapsto lk(i_*x_k, x_j), \end{aligned}$$

então temos

$$\begin{aligned} [L_{f,\mathbb{C}}]_{B_{\mathbb{C}}} &= [L_{f,\mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} lk(i_*x_1, x_1) & \cdots & lk(i_*x_\mu, x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ lk(i_*x_1, x_\mu) & \cdots & lk(i_*x_\mu, x_\mu) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} lk(i_*\bar{s}x_1, \bar{s}x_1) & \cdots & lk(i_*\bar{s}x_\mu, \bar{s}x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ lk(i_*\bar{s}x_1, \bar{s}x_\mu) & \cdots & lk(i_*\bar{s}x_\mu, \bar{s}x_\mu) \end{pmatrix} = \\ &= [L_{g,\mathbb{R}}]_{\tilde{B}_{\mathbb{R}}} = [L_{g,\mathbb{C}}]_{\tilde{B}_{\mathbb{C}}}. \end{aligned}$$

A partir de agora, vamos calcular os polinômios característicos  $\Delta_f(t)$  e  $\Delta_g(t)$ . Por definição temos  $\Delta_f(t) = \det(tI - T_f)$  e  $\Delta_g(t) = \det(tI - T_g)$ , e ainda sabemos que o polinômio obtido independe das bases nas quais as matrizes  $T_f$  e  $T_g$  foram obtidas. Além disso, pela Proposição 4.1.10, temos  $T_f = (-1)^{n+1} \Gamma_{f,\mathbb{C}} \overline{(\Gamma_{f,\mathbb{C}}^{-1})^t}$  e  $T_g = (-1)^{n+1} \Gamma_{g,\mathbb{C}} \overline{(\Gamma_{g,\mathbb{C}}^{-1})^t}$ .

Como  $[L_{f,\mathbb{C}}]_{B_{\mathbb{C}}} = [L_{g,\mathbb{C}}]_{\tilde{B}_{\mathbb{C}}}$ , então

$$T_f = (-1)^{n+1} [L_{f,\mathbb{C}}]_{B_{\mathbb{C}}} \overline{([L_{f,\mathbb{C}}]_{B_{\mathbb{C}}}^{-1})^t} = (-1)^{n+1} [L_{g,\mathbb{C}}]_{\tilde{B}_{\mathbb{C}}} \overline{([L_{g,\mathbb{C}}]_{\tilde{B}_{\mathbb{C}}}^{-1})^t} = T_g.$$

Logo,

$$\Delta_f(t) = \det(tI - T_f) = \det(tI - T_g) = \Delta_g(t).$$

Portanto, os autovalores de  $((h_{2\pi|F_f})^*)^{-1}$  e  $((h_{2\pi|F_g})^*)^{-1}$  coincidem.

Considere agora o caso em que  $n$  é par. Note que  $\mu^0(f)$ ,  $\mu^0(g)$ ,  $\mu_\lambda^\pm(f)$  e  $\mu_\lambda^\pm(g)$  dependem das transformações  $\widetilde{S}_f$  e  $\widetilde{S}_g$ , vistas na Observação 4.1.13. Por esta observação também temos que  $I_f$  e  $I_g$ , as matrizes das formas de interseção de  $f$  e  $g$ , respectivamente, representam essas transformações lineares.

Como, por definição,  $I_f = [L_f, \mathbb{C}]_{B_{\mathbb{C}}} + (-1)^n [L_f, \mathbb{C}]_{B_{\mathbb{C}}}^t = [L_g, \mathbb{C}]_{\widetilde{B}_{\mathbb{C}}} + (-1)^n [L_g, \mathbb{C}]_{\widetilde{B}_{\mathbb{C}}}^t = I_g$ , então

$$\mu^0(f) = \mu^0(g) \quad \text{e} \quad \mu_\lambda^\pm(f) = \mu_\lambda^\pm(g).$$

Pela Proposição 4.2.5, temos

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} c_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} c'_\beta,$$

$$\sum_{\lambda=e^{-2\pi i\alpha}, [\alpha]:\text{par}} c_\alpha = \sum_{\lambda=e^{-2\pi i\beta}, [\beta]:\text{par}} c'_\beta, \quad (\lambda \neq 1)$$

$$\sum_{\lambda=e^{-2\pi i\alpha}, [\alpha]:\text{ímpar}} c_\alpha = \sum_{\lambda=e^{-2\pi i\beta}, [\beta]:\text{ímpar}} c'_\beta, \quad (\lambda \neq 1)$$

onde  $P_f(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} c_\alpha t^\alpha$  e  $P_g(t) = \sum_{\beta \in \mathbb{Q}} c'_\beta t^\beta$ .

Sendo  $\lambda$  um autovalor do operador monodromia cohomológico de  $f$ , vimos que  $\lambda = e^{-2\pi i\alpha}$ . Se  $\lambda = 1$ , então  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . Logo, para cada  $\lambda$  fixo temos

$$\sum_{\lambda=e^{-2\pi i\alpha}} c_\alpha = \sum_{\lambda=e^{-2\pi i\beta}} c'_\beta. \quad (4.2)$$

Mostremos que, para cada  $\lambda$ , a expressão

$$\sum_{\lambda=e^{-2\pi i\alpha}} c_\alpha t^\alpha - \sum_{\lambda=e^{-2\pi i\beta}} c'_\beta t^\beta \quad (4.3)$$

é divisível por  $t^2 - 1$ .

De fato, considere  $J$  o conjunto de todos os  $\alpha_j$  que satisfazem  $\lambda = e^{-2\pi i\alpha_j}$  e considere também  $L$  o conjunto de todos os  $\beta_l$  que satisfazem  $\lambda = e^{-2\pi i\beta_l}$ . Fixando um  $\alpha_0$  temos que  $\alpha_j = 2k_{\alpha_j}\pi + \alpha_0$  e  $\beta_l = 2k_{\beta_l}\pi + \alpha_0$ , para todo  $\alpha_j \in J$ ,  $\beta_l \in L$ , com  $k_{\alpha_j}, k_{\beta_l} \in \mathbb{Z}$ . Isolando

$c_{\alpha_0}$  em (4.2), onde  $\alpha_0$  está fixado, temos

$$c_{\alpha_0} = \sum_{\beta_l \in L} c'_{\beta_l} - \sum_{\alpha_j \in J, j \neq 0} c_{\alpha_j}.$$

Fazendo uso dessas informações em (4.3), obtemos

$$\begin{aligned} & c_{\alpha_0} t^{\alpha_0} + \sum_{\alpha_j \in J, j \neq 0} c_{\alpha_j} t^{\alpha_j} - \sum_{\beta_l \in L} c'_{\beta_l} t^{\beta_l} \\ &= \left( \sum_{\beta_l \in L} c'_{\beta_l} - \sum_{\alpha_j \in J, j \neq 0} c_{\alpha_j} \right) t^{\alpha_0} + \sum_{\alpha_j \in J, j \neq 0} c_{\alpha_j} t^{\alpha_j} - \sum_{\beta_l \in L} c'_{\beta_l} t^{\beta_l} \\ &= \sum_{\beta_l \in L} c'_{\beta_l} (t^{\alpha_0} - t^{\beta_l}) + \sum_{\alpha_j \in J, j \neq 0} -c_{\alpha_j} (t^{\alpha_0} - t^{\alpha_j}) \\ &= \sum_{\beta_l \in L} c'_{\beta_l} (t^{\alpha_0} - t^{2k_{\beta_l} \pi + \alpha_0}) + \sum_{\alpha_j \in J, j \neq 0} -c_{\alpha_j} (t^{\alpha_0} - t^{2k_{\alpha_j} \pi + \alpha_0}) \\ &= \sum_{\beta_l \in L} c'_{\beta_l} t^{\alpha_0} (1 - t^{2k_{\beta_l} \pi}) + \sum_{\alpha_j \in J, j \neq 0} -c_{\alpha_j} t^{\alpha_0} (1 - t^{2k_{\alpha_j} \pi}). \end{aligned}$$

Como 1 e  $-1$  são raízes desta expressão, segue que (4.3) é divisível por  $(t - 1)(t + 1) = (t^2 - 1)$ . Logo,  $P_f(t) - P_g(t)$  é divisível por  $(t^2 - 1)$ , portanto  $P_f(t) \equiv P_g(t) \pmod{(t^2 - 1)}$ .

Agora, considere o caso em que  $n$  é ímpar. Primeiro mostraremos que se  $L_{f, \mathbb{R}}$  é equivalente a  $L_{g, \mathbb{R}}$ , então  $L_{\tilde{f}, \mathbb{R}}$  é equivalente a  $L_{\tilde{g}, \mathbb{R}}$ , ou seja, existe  $\tilde{s} : H_{n+1}(F_{\tilde{f}}; \mathbb{R}) \rightarrow H_{n+1}(F_{\tilde{g}}; \mathbb{R})$  tal que  $L_{\tilde{f}, \mathbb{R}}(u, v) = L_{\tilde{g}, \mathbb{R}}(\tilde{s}u, \tilde{s}v)$ ,  $\forall u, v \in H_{n+1}(F_{\tilde{f}}; \mathbb{R})$ . Isto é equivalente a encontrar bases  $B_{\mathbb{R}}^1$  e  $B_{\mathbb{R}}^2$  para  $H_{n+1}(F_{\tilde{f}}; \mathbb{R})$  e  $H_{n+1}(F_{\tilde{g}}; \mathbb{R})$ , respectivamente, tal que  $[L_{\tilde{f}, \mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}^1} = [L_{\tilde{g}, \mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}^2}$ .

Como  $n$  é ímpar, pelo Lema 4.2.9 temos  $\Gamma_{\tilde{f}, \mathbb{Z}} \equiv \Gamma_{f, \mathbb{Z}} \otimes (\pm 1)$ . Suponha que fixando uma determinada orientação para calcular a matriz de Seifert associada a  $z_{n+2}^2$ , obtemos

$$\Gamma_{\tilde{f}, \mathbb{Z}} \equiv \Gamma_{f, \mathbb{Z}} \otimes (1).$$

O resultado seria análogo se tomássemos o sinal oposto.

Considere  $B$  a base de  $H_{n+1}(F_{\tilde{f}}; \mathbb{Z})$  tal que  $[L_{\tilde{f}}]_B \equiv [L_f]_{B_{\mathbb{Z}}} \otimes (1)$ . Seja  $B_{\mathbb{R}}^1$  a base de  $H_{n+1}(F_{\tilde{f}}; \mathbb{R})$  obtida de  $B$  tensorizando por 1. Com isso,  $[L_{\tilde{f}, \mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}^1} = [L_{\tilde{f}}]_B$ . Portanto,

$$[L_{\tilde{f}, \mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}^1} = [L_{\tilde{f}}]_B \equiv [L_f]_{B_{\mathbb{Z}}} \otimes (1) = [L_{f, \mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}} \otimes (1) = [L_{g, \mathbb{R}}]_{\tilde{B}_{\mathbb{R}}} \otimes (1). \quad (4.4)$$

Seja  $\tilde{C}$  uma base de  $H_n(F_g; \mathbb{Z})$  tal que  $\tilde{B}_{\mathbb{R}}$  é obtida de  $\tilde{C}$  tensorizando por 1. Com isso,  $[L_g]_{\tilde{C}} = [L_{g, \mathbb{R}}]_{\tilde{B}_{\mathbb{R}}}$ .

Pelo Lema 4.2.9 temos  $\Gamma_{\tilde{g}, \mathbb{Z}} \equiv \Gamma_{g, \mathbb{Z}} \otimes (\pm 1)$ . Considerando a orientação fixada para

calcular a matriz de Seifert associada a  $z_{n+2}^2$ , então temos  $\Gamma_{\tilde{g},\mathbb{Z}} \equiv \Gamma_{g,\mathbb{Z}} \otimes (1)$ . Logo, existe uma base  $\tilde{B}$  para  $H_{n+1}(F_{\tilde{g}}; \mathbb{Z})$  tal que  $[L_{\tilde{g}}]_{\tilde{B}} \equiv [L_g]_{\tilde{C}} \otimes (1) = [L_{g,\mathbb{R}}]_{\tilde{B}_{\mathbb{R}}} \otimes (1)$ , e por (4.4) temos

$$[L_{\tilde{g}}]_{\tilde{B}} \equiv [L_{\tilde{f},\mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}^1}. \quad (4.5)$$

Considere agora,  $B_{\mathbb{R}}^0$  a base de  $H_{n+1}(F_{\tilde{g}}; \mathbb{R})$  obtida de  $\tilde{B}$  tensorizando por 1. Novamente,  $[L_{\tilde{g},\mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}^0} = [L_{\tilde{g}}]_{\tilde{B}}$ . De (4.5) temos  $[L_{\tilde{f},\mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}^1} \equiv [L_{\tilde{g},\mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}^0}$ . Logo, existe uma matriz unimodular  $P$  tal que

$$[L_{\tilde{f},\mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}^1} = P^t \left( [L_{\tilde{g},\mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}^0} \right) P.$$

Então existe uma base  $B_{\mathbb{R}}^2$  tal que

$$[L_{\tilde{f},\mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}^1} = P^t \left( [L_{\tilde{g},\mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}^0} \right) P = [L_{\tilde{g},\mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}^2}.$$

Mostremos a obtenção de  $B_{\mathbb{R}}^2$  para o caso  $\mu = 2$ . Seja  $P$  da forma  $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $B_{\mathbb{R}}^0 = \{u_0, v_0\}$ . Assim, temos

$$P^t \left( [L_{\tilde{g},\mathbb{R}}]_{B_{\mathbb{R}}^0} \right) P = \begin{pmatrix} L_{\tilde{g},\mathbb{R}}(2au_0 + 2bv_0, 2au_0 + 2bv_0) & L_{\tilde{g},\mathbb{R}}(2cu_0 + 2dv_0, 2au_0 + 2bv_0) \\ L_{\tilde{g},\mathbb{R}}(2au_0 + 2bv_0, 2cu_0 + 2dv_0) & L_{\tilde{g},\mathbb{R}}(2cu_0 + 2dv_0, 2cu_0 + 2dv_0) \end{pmatrix}.$$

Então  $\tilde{u} = 2au_0 + 2bv_0$  e  $\tilde{v} = 2cu_0 + 2dv_0$  são os elementos da base  $B_{\mathbb{R}}^2$ .

Agora, mostrando que se  $L_{f,\mathbb{R}}$  é equivalente a  $L_{g,\mathbb{R}}$ , então  $L_{\tilde{f},\mathbb{R}}$  é equivalente a  $L_{\tilde{g},\mathbb{R}}$ , podemos aplicar o mesmo processo da demonstração considerando as suspensões  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$ , e concluímos  $P_{\tilde{f}}(t) - P_{\tilde{g}}(t)$  é divisível por  $(t^2 - 1)$ . Pela Observação 4.2.10, temos  $P_{\tilde{f}}(t) = t^{\frac{1}{2}}P_f(t)$  e  $P_{\tilde{g}}(t) = t^{\frac{1}{2}}P_g(t)$ . Logo,

$$P_f(t) - P_g(t) = \frac{P_{\tilde{f}}(t) - P_{\tilde{g}}(t)}{t^{\frac{1}{2}}} = t^{-\frac{1}{2}}(P_{\tilde{f}}(t) - P_{\tilde{g}}(t))$$

é divisível por  $(t^2 - 1)$  e, assim,  $P_f(t) \equiv P_g(t) \pmod{(t^2 - 1)}$ . ■



## Conclusão

É importante ressaltar que a recíproca deste resultado é válida, e pode ser vista em [19, Lema 2.3, p. 415]. Assim, existe uma condição necessária e suficiente para os polinômios quase homogêneos com singularidade isolada na origem tenham Formas de Seifert reais equivalentes em termos de seus pesos.

Este resultado é uma ferramenta utilizada para obter uma resposta afirmativa para o problema da multiplicidade de Zariski para polinômios como citados acima em  $n + 1$  variáveis. Existem outras maneiras de se chegar neste resultado, o interessante de se estudar via Formas de Seifert é que é possível estabelecer algumas conexões externas com equivalências já conhecidas, tais como:

- Considere  $K_f$  e  $K_g$  os nós algébricos associados a  $f$  e  $g$ , respectivamente. Então, para  $n \geq 3$ ,  $K_f$  é isotópico a  $K_g$  se, e somente se,  $L_f$  é equivalente a  $L_g$ .
- Se  $f$  e  $g$  são polinômios de Brieskorn, então são equivalentes:
  - (i)  $K_f$  é isotópico a  $K_g$ ;
  - (ii)  $f$  e  $g$  possuem pesos iguais;
  - (iii)  $\det(tL_f + (-1)^n L_f^t) = \det(tL_g + (-1)^n L_g^t)$ , que são conhecidos como polinômios de Alexander associados a  $f$  e  $g$ .
- $K_f$  é cobordante a  $K_g$  se, e somente se,  $L_f$  é algébricamente cobordante a  $L_g$ .
- Para  $n = 3$ ,  $f$  e  $g$  são conectados por uma deformação  $\mu$ -constante se, e somente se,  $L_f$  é equivalente a  $L_g$ .

Assim, o estudo das Formas de Seifert torna-se interessante por conectar resultados de diferentes teorias e que ainda possuem problemas em aberto.

## Referências Bibliográficas

- [1] ARNOLD, V. I.; GUSEIN-ZADE, S. M.; VARCHENKO, A. N. *Singularities of differentiable maps: monodromy and asymptotics of integrals*, volume II, Monographs in Math., v. 83, Boston: Birkhäuser, 1988.
- [2] BLANLCEIL, V.; SAEKI, O. *Cobordism of Algebraic Knots Defined by Brieskorn Polynomials*, Tokyo J. Math. v. 34, n. 2, 2011.
- [3] BLANLCEIL, V.; SAEKI, O. *Cobordism of fibered knots and related topics*, "Singularities in geometry and topology 2004", Advanced Studies in Pure Mathematics, v. 46, p. 1-47, Adv. Stud. Pure Math. 46, 2007.
- [4] BOURBAKI, N. *Elements of mathematics, Algebra I*, Paris: Hermann, 1974.
- [5] DURFEE, A. *Fibered knots and algebraic singularities*, Topology, v. 13, p. 47-59, 1974.
- [6] FERNANDES, R. L.; RICO, M. *Introdução à Álgebra*, Lisboa: IST Press, 2004.
- [7] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. *Elementos de Álgebra*, Coleção Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [8] GUNNING, R.C.; ROSSI, H. *Analytic Functions of Several Complex Variables*, American Mathematical Society, United States of America: AMS Chelsea Publishing, 1965.
- [9] HATCHER, A. *Algebraic topology*, Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [10] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear Algebra*, Edição 2, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1971.
- [11] KATO, M. *A classification of simple spinnable structures on a 1-connected Alexander manifold*, J. Math. Soc. Japan, v. 26, p. 454-463, 1974.

- [12] LANG, S. *Introduction to Algebraic Geometry*, United States of America: Addison-Wesley Publishing Company, 1973.
- [13] LEFSCHETZ, S. *Algebraic Geometry*, New York: Dover Publications, 2005.
- [14] LIMA, E. L. *Homologia Básica*, Coleção Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [15] LIMA, E. L. *Variedades diferenciáveis*, Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [16] MILNOR, J. *Construction of universal bundles II*, Annals of Mathematics, Second Series, v. 63, n. 3, p. 430-436, 1956.
- [17] MILNOR, J. *Singular points of complex hypersurfaces*, New Jersey: Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1968.
- [18] PERRIN, D. *Algebraic Geometry*, London: Springer, 2008.
- [19] SAEKI, O. *Real Seifert form determines the spectrum for semiquasihomogeneous hypersurface singularities in  $C^3$* , J. Math. Soc. Japan, v. 52, n. 2, p. 409-431, 2000.
- [20] SAITO, K. *Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen*, Inventiones Math., v. 14, p. 123-142, 1971.
- [21] SAKAMOTO, K. *The Seifert matrices of Milnor fiberings defined by holomorphic functions*, J. Math. Soc. Japan, v. 26, p. 714-721, 1974.
- [22] SEIFERT, H.; THRELFALL, W. *A Textbook of Topology*, Translated by Michael A. Goldman, London: Academic Press, 1980.
- [23] SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Coleção Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- [24] STEENBRINK, J. H. M. *Intersection form for quasihomogeneous singularities*, Compositio Mathematica, v. 34, n. 2, p. 211-223, 1977.
- [25] STEENBRINK, J. H. M. *Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology*, in ?Real and complex singularities (Oslo 1976, Ed. P. Holm)?, Alphen aan den Rijn: Sijthoff-Noordhoff, p. 525-563, 1977.
- [26] VICK, J. W. *Homology Theory*, Edição 2, New York: Springer, 1994.

- [27] WHITNEY, H. *Elementary Structure of Real Algebraic Varieties*, The Annals of Mathematics, Série 2, v. 66, n.3, p. 545-556, 1957.
- [28] WHITNEY, H. *Geometrie Integration Theory*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1957.