

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"**  
**CAMPUS DE GUARATINGUETÁ**

**PATRÍCIA BUZZATTO SIQUEIRA**

**Adaptação do integrador Rebound para o estudo de anéis planetários.**

Guaratinguetá

2019

**Patrícia Buzzatto Siqueira**

**Adaptação do integrador Rebound para o estudo de anéis planetários.**

Trabalho de Pós-Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Pós-Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Pós-Graduação em Física .

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Rafael Sfair

Guaratinguetá

2019



S618a	<p>Siqueira, Patrícia Buzzatto Adaptação do integrador Rebound para o estudo de anéis planetários / Patrícia Buzzatto Siqueira. – Guaratinguetá, 2019. 116 f : il. Bibliografia: f. 109-110</p> <p>Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2019. Orientador: Prof. Dr. Rafael Sfair</p> <p>1. Planetas - Órbitas. 2. Radiação solar. 3. Anéis de armazenamento. 4. Eletromagnetismo. 5. Gravitação. I. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU 521.3 (043)</p>
-------	---

Pâmella Benevides Gonçalves  
Bibliotecária/CRB-8/9203



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

*PATRÍCIA BUZZATTO SIQUEIRA*


ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
"MESTRE EM FÍSICA"

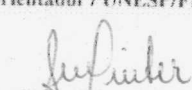
PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. Konstantin Georgiev Kostov  
Coordenador

*BANCA EXAMINADORA:*

  
Prof. Dr. RAFAEL SFAIR DE OLIVEIRA  
Orientador / UNESP/FEG

  
Prof. Dr. SILVIA MARIA GIULIATTI WINTER  
UNESP/FEG

  
Prof. Dr. FERNANDO VIRGILIO ROIG  
Observatório Nacional

*janeiro de 2019*

## **DADOS CURRICULARES**

### **PATRÍCIA BUZZATTO SIQUEIRA**

- NASCIMENTO** 30/03/1992 - Cachoeira Paulista / SP
- FILIAÇÃO** Fernando Antorio Rosa de Siqueira  
Alcineia Aparecida Buzzatto
- 2016 / 2019** Pós-Graduação em Física com ênfase em  
Astronomia  
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - UNESP
- 2011 / 2016** Graduação em bacharel em Física  
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - UNESP
- 2008 / 2010** Técnico em Informática Industrial  
Colégio Técnico Industrial de Guaratinguetá - UNESP

## AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos a todos os familiares, amigos, funcionários e professores da FEG-UNESP, que contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- A toda a minha família que sempre me incentivou e me deu suporte na minha carreira;
- A todos os meus amigos que sempre estiveram e estarão ao meu lado em todos os momentos e sempre me apoiam, acalmam e me fazem acreditar que sou capaz de realizar todas as minhas metas;
- Ao Prof. Dr. Rafael Sfair, por todo ensinamento, incentivo, confiança, paciência e orientação;
- A banca examinadora pelas sugestões e aprendizado;
- Aos meus amigos e colegas de classe que de forma direta ou indiretamente me ajudaram neste ciclo.

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s): CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior



*“Where focus goes, energy flows;”  
(Tony Robbins)*

## RESUMO

O estudo dos anéis planetários pode ser usado como laboratório para a compreensão do processo de formação e dinâmica planetária. Anéis planetários são formados por partículas pequenas que sofrem a ação de diversas forças, além da força gravitacional. O estudo da dinâmica dos anéis pode ser abordado através de simulações numéricas para o problema de N-corpos. Neste trabalho apresentamos a adaptação do pacote REBOUND (Rein & Liu, 2012) através da inclusão de forças perturbativas para estudar a dinâmica de anéis planetários.

Uma fonte de perturbação de origem gravitacional é devida ao formato não esférico do planeta, que pode ser representado com precisão até a expansão do potencial do termo  $J_6$ . Além dessa, as principais são a força eletromagnética e a pressão de radiação solar. Também atuam forças de arrasto, como o de Poynting-Robertson e, eventualmente, as forças devido a atmosfera e do plasma. Embora sejam mais fracas, essas forças alteram a energia orbital das partículas e dominam a dinâmica em longos períodos de tempo.

Abordamos essas forças através do REBOUND e verificamos os principais efeitos de cada uma das forças, cuja força devido ao formato não esférico do planeta causa uma precessão na longitude do pericentro, enquanto a força eletromagnética causa uma regressão e que ambas combinadas contribuem uma com a outra alterando a taxa de variação da longitude do pericentro. Já a força da pressão de radiação altera o formato da órbita e as forças de arrasto diminuem o semi-eixo maior da partícula. A combinação de todos estes efeitos dificulta a análise do movimento orbital, dessa forma comparamos nossos resultados com outros métodos numéricos para a evolução orbital das partículas.

Implementamos todas as forças citadas no REBOUND e para validar os métodos desenvolvidos analisamos a evolução orbital das partículas dos anéis em diversas ocasiões, comparando com resultados já publicados na literatura. Verificamos que os erros sistemáticos se mantiveram da ordem da precisão de máquina. Todos estes resultados estão de acordo com o que é apresentado na literatura e com a integração numérica das equações médias.

**PALAVRAS-CHAVE:** anéis planetários. forças perturbativas. achatamento. radiação solar. eletromagnética.

## ABSTRACT

The study of planetary rings can be used as a laboratory for understanding the formation process and planetary dynamics. Planetary rings are composed by circumplanetary dusts that are disturbed by the action of diverse forces, besides the gravitational force. The study of ring dynamics can be approached through numerical simulations for the N-body problem. In this work we present the adaptation of the REBOUND (Rein & Liu, 2012) package by including perturbative forces to study the dynamics of planetary rings.

A source of perturbation of gravitational origin is due to the non-spherical shape of the planet, which can be represented in relation to an expansion of the potential until the term  $J_6$ . In addition, the major are the electromagnetic force and the solar radiation pressure. In addition, there are also dragging forces, such as the Poynting-Robertson and eventually the forces due to atmosphere and plasma, however they are weaker, but they change the orbital energy of the particles, and dominate the dynamics in long periods of time.

We approach these forces through the REBOUND and verify that the planetary oblateness causes a precession of the longitude of the pericenter, while the electromagnetic force causes a regression, and that both combine to contribute with each other by changing the rate of variation of the pericenter. Already the force of the radiation pressure changes the shape of the orbit and the drag forces decrease the larger semi major axis of the particle. The combination of all these effects makes it difficult to analyze orbital motion, thus comparing our results with other numerical and analytical methods for the orbital evolution of the particles.

We implemented all the forces mentioned above in REBOUND and to validate the developed methods we analyzed the orbital evolution of the ring particles on several systems comparing with results already published in the literature. We verified that the systematic errors were kept well below machine precision. All these results are in accordance with what is presented in the literature and with the numerical integration of the average equations.

**KEYWORDS:** planetary rings. disturbing forces. oblateness. solar radiation. electromagnetic.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<p>Figura 2.1 Representação das coordenadas cartesianas e esféricas de um objeto em uma órbita em torno da massa <math>M_p</math>. O ponto <math>P</math> é a localização da partícula e <math>P'</math> do elemento de massa. As coordenadas esféricas são dadas por <math>P(r, \alpha, \varphi)</math> e <math>P'(r', \alpha', \varphi')</math>. <math>\Delta</math> é a distância entre os dois pontos <math>P</math> e <math>P'</math>. <math>(X_0, Y_0, Z_0)</math> são coordenadas do centro de massa (CM) de <math>M_p</math>; <math>(x, y, z)</math> são coordenadas da partícula em relação ao CM; <math>(r, \phi, \alpha)</math> são coordenadas esféricas de acordo com o centro do planeta, onde <math>r</math> é a distância radial, <math>\phi</math> é a longitude e <math>\alpha</math> é a latitude; <math>(\xi, \eta, \zeta)</math> são as coordenadas do elemento de massa <math>M_p</math> em relação ao CM. . . . .</p>	23
<p>Figura 2.2 Representação 3D em relevo dos polinômios até a ordem 6. As figuras foram geradas com o aplicativo POV (The Persistence of Vision Raytracer, 2008). . . .</p>	26
<p>Figura 5.1 Esboço de como a órbita é afetada sob quatro diferentes perturbações: achatamento planetário, força eletromagnética do dipolo, pressão de radiação e arrasto.</p>	47
<p>Figura 5.2 Gráfico dos parâmetros de força adimensional da Terra. Cada linha horizontal apresenta os valores numéricos dos quatro parâmetros de perturbação em função da distância. Assumimos densidade <math>\rho_g = 1 \text{ g cm}^{-3}</math> e carregada com <math>\Phi_g = -5\text{V}</math>. A linha vertical representa a localização de uma partícula estável lançada nesta região que será apresentada na seção 7.5. . . . .</p>	49
<p>Figura 5.3 Gráfico dos parâmetros de força adimensional de Marte. Cada linha horizontal apresenta os valores numéricos dos quatro parâmetros de perturbação em função da distância. Assumimos densidade <math>\rho_g = 2 \text{ g cm}^{-3}</math>. As linhas verticais representam a localização dos satélites Phobos e Deimos. Simularemos partículas nestas distâncias na seção 7.4. . . . .</p>	50
<p>Figura 5.4 Gráfico dos parâmetros de força adimensional de Júpiter. Cada linha horizontal apresenta os valores numéricos dos quatro parâmetros de perturbação em função da distância. Assumimos densidade <math>\rho_g = 1 \text{ g cm}^{-3}</math> e carregada com <math>\Phi_g = 5\text{V}</math>. A linha vertical representa a localização de uma partícula estável lançada nesta região que será apresentada na seção 7.5. . . . .</p>	51
<p>Figura 5.5 Gráfico dos parâmetros de força adimensional de Saturno. As linhas horizontais apresentam os valores numéricos dos quatro parâmetros de perturbação em função da distância. Assumimos densidade <math>\rho_g = 1 \text{ g cm}^{-3}</math> e carregada com <math>\Phi_g = 5\text{V}</math>. A linha vertical representa a localização do anel E, a o estudo de uma partícula sob a influência das forças eletromagnética, achatamento planetário e pressão de radiação está na seção 7.6. . . . .</p>	52

Figura 5.6 Gráfico dos parâmetros de força adimensional de Urano. Cada linha horizontal apresenta os valores numéricos dos quatro parâmetros de perturbação em função da distância. Assumimos densidade $\rho_g = 1 \text{ g cm}^{-3}$ e carregada com $\Phi_g = 200V$ . A linha vertical representa o pico do anel $\mu$ de Urano, de onde foram lançadas algumas partículas no capítulo 7. . . . .	53
Figura 7.1 Evolução temporal da longitude do nodo ascendente $\Omega$ (painel superior) e da longitude do pericentro $\omega$ (painel inferior) de uma partícula micrométrica do anel $\mu$ de Urano com inclinação zero e considerando a componente $J_2$ do achatamento planetário. São mostrados o resultado numérico e o valor teórico previsto pelas equações médias. . . . .	65
Figura 7.2 Evolução temporal da longitude do nodo ascendente $\Omega$ (painel superior) e da longitude do pericentro $\omega$ (painel inferior) de uma partícula micrométrica do anel $\mu$ de Urano com inclinação de $I = 63.4^\circ$ e considerando a componente $J_2$ do achatamento planetário. São mostrados o resultado numérico e o valor teórico previsto pelas equações médias. . . . .	65
Figura 7.3 Evolução temporal da longitude do nodo ascendente $\Omega$ (painel superior) e da longitude do pericentro $\omega$ (painel inferior) de uma partícula micrométrica do anel $\mu$ de Urano com inclinação de $I = 70^\circ$ e considerando a componente $J_2$ do achatamento planetário. São mostrados o resultado numérico e o valor teórico previsto pelas equações médias. . . . .	66
Figura 7.4 Simulação 1: Evolução dos elementos orbitais de uma partícula, com velocidade angular de $n = \Omega_p$ e sob a influência da força eletromagnética, através de uma integração numérica pelo REBOUND ("simulação") e o valor previsto pelas equações médias ("teoria"). . . . .	69
Figura 7.5 Simulação 2: Evolução dos elementos orbitais de uma partícula, com velocidade angular de $3n = \Omega_p$ e sob a influência da força eletromagnética, através de uma integração numérica pelo REBOUND ("simulação") e o valor previsto pelas equações médias ("teoria"). . . . .	69
Figura 7.6 Simulação 3: Evolução dos elementos orbitais de uma partícula, com distância inicial de $4.40111421R_p$ carregada com um potencial de $\Phi = -5 V$ e sob a influência da força eletromagnética, através de uma integração numérica pelo REBOUND ("simulação") e o valor previsto pelas equações médias ("teoria"). . . . .	70
Figura 7.7 Simulação 4: Evolução dos elementos orbitais de uma partícula, com distância inicial de $4.40111421R_p$ carregada com um potencial de $\Phi = 200 V$ e sob a influência da força eletromagnética. . . . .	71
Figura 7.8 Simulação 5: Evolução dos elementos orbitais de uma partícula, com distância inicial de $4.40111421R_p$ , carregada com um potencial de $\Phi = 200 V$ , com excentricidade e inclinação com valores consideráveis e sob a influência da força eletromagnética. . . . .	72

Figura 7.9	Evolução dos elementos orbitais de uma partícula carregada, sob a influência da força eletromagnética, com os mesmo parâmetros da Figura 7.8, através de uma integração numérica utilizando o integrador de Douglas P. Hamilton. . . . .	73
Figura 7.10	Evolução orbital de uma partícula sob a influência do achamento planetário e a força eletromagnética, lançada em uma distância no qual a variação da longitude pericentro devido a força é igual a zero. . . . .	76
Figura 7.11	Evolução orbital de uma partícula sob a influência do achamento planetário e da força eletromagnética, lançada a uma distância de $a = 2.27R_p$ no qual a variação da longitude pericentro devido as forças é positivo ( $\gamma_{\varpi} > 0$ ). . . . .	77
Figura 7.12	Evolução orbital de uma partícula sob a influência do achamento planetário e da força eletromagnética, lançada a uma distância de $a = 4.40111421R_p$ no qual a variação da longitude pericentro devido as forças é negativo ( $\gamma_{\varpi} < 0$ ). . . . .	78
Figura 7.13	Evolução orbital da excentricidade e inclinação para partículas de tamanhos de 20 e 40 $\mu m$ ejetadas de Phobos sob a influência da pressão de radiação. O achatamento planetário foi desconsiderado. . . . .	81
Figura 7.14	Evolução orbital da excentricidade e inclinação para partículas de tamanhos de 20 e 40 $\mu m$ ejetadas de Phobos sob a influência da pressão de radiação. O achatamento planetário foi desconsiderado. . . . .	81
Figura 7.15	Evolução orbital da excentricidade e inclinação para partículas de tamanhos de 20 e 40 $\mu m$ ejetadas de Deimos sob a influência da pressão de radiação. O achatamento planetário foi desconsiderado. . . . .	83
Figura 7.16	Evolução orbital da excentricidade e inclinação para partículas de tamanhos de 20 e 40 $\mu m$ ejetadas de Deimos sob a influência da pressão de radiação. O achatamento planetário foi desconsiderado. . . . .	83
Figura 7.17	Evolução orbital da excentricidade e inclinação para partículas de tamanhos de 20 e 40 $\mu m$ ejetadas de Deimos sob a influência da pressão de radiação e do achatamento planetário. . . . .	84
Figura 7.18	Evolução orbital da excentricidade e inclinação para partículas de tamanhos de 20 e 40 $\mu m$ ejetadas de Deimos sob a influência da pressão de radiação e do achatamento planetário. . . . .	84
Figura 7.19	Evolução orbital da excentricidade para partículas de diferentes tamanhos ejetados de Phobos sob a influencia da pressão de radiação e o achatamento planetário. . . . .	86
Figura 7.20	Evolução orbital da excentricidade para partículas de diferentes tamanhos ejetados de Phobos sob a influencia da pressão de radiação e o achatamento planetário. . . . .	86
Figura 7.21	Estabilidade dos grãos de poeira lançados com carga (a) (negativa) e (b) (positiva) em Júpiter. Os grãos de poeira nas regiões brancas e as áreas cinzentas mais claras sobrevivem ao longo de 0.1 anos, e podem alcançar latitudes de mais de 5°. Grãos nas áreas moderadamente cinza são instáveis e atingem o planeta em altas latitudes ( $\lambda > 5^\circ$ ). . . . .	89

Figura 7.22A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando Júpiter após o lançamento em $r_L = 1.74R_p$ , com $L = 3.04$ ( $a_d = 0.097\mu m$ ). . . . .	90
Figura 7.23A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando Júpiter, com os mesmo parâmetros da Figura 7.22 disponibilizada em Jontof-Hutter e Hamilton (2012a). . . . .	90
Figura 7.24A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando Júpiter após o lançamento em $r_L = 2.0R_p$ , com $L = 1.908$ ( $a_d = 0.122\mu m$ ). . . . .	91
Figura 7.25A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando Júpiter, com os mesmo parâmetros da Figura 7.24, disponibilizada em Jontof-Hutter e Hamilton (2012a). . . . .	91
Figura 7.26A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando Júpiter após o lançamento em $r_L = 1.74R_p$ , com $L = 31.31$ ( $a_d = 0.03\mu m$ ). . . . .	92
Figura 7.27A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando Júpiter com os mesmos parâmetros da Figura 7.26, disponibilizada em Jontof-Hutter e Hamilton (2012a). . . . .	92
Figura 7.28Estabilidade de grãos carregados em Saturno modelada com um campo de dipolo centrado e alinhado. . . . .	94
Figura 7.29Estabilidade de grãos carregados na Terra, modelada com um campo de dipolo centrado e antialinhado. Os círculos abertos em ( $r_L = R_{syn}, L = 2 + \sqrt{3}$ ) e ( $r_L = R_{syn}, L = 2 - \sqrt{3}$ ) e o círculo sólido, marcando a transição do limite analítico para o semi-analítico para os grãos maiores é em $L = 0.0248, r_L = 2.074R_p$ . Os dois quadrados sólidos em (a) são trajetórias de grãos individuais ilustradas nas Figs. 13 e 14. . . . .	95
Figura 7.30A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando a Terra após o lançamento em $r_L = 4.51R_p$ , com $L = 0.948$ ( $a_d = 0.0149\mu m$ ). . . . .	96
Figura 7.31A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando a Terra com os mesmos parâmetros da Figura 7.30, disponibilizada em Jontof-Hutter e Hamilton (2012a). . . . .	96
Figura 7.32A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando a Terra após o lançamento em $r_L = 4.51R_p$ , com $L = 0.419$ ( $a_d = 0.0224\mu m$ ). . . . .	97
Figura 7.33A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando a Terra com os mesmos parâmetros da Figura 7.32, disponibilizada em Jontof-Hutter e Hamilton (2012a). . . . .	97
Figura 7.34Evolução orbital de uma partícula no anel E de Saturno, sob a influencia do dipolo magnético, força de pressão de radiação e achatamento planetário, no tempo dos elementos $a$ (semieixo maior), $e$ (excentricidade), $I$ (inclinação), $\Omega$ (longitude do nodo), $\omega$ (argumento do pericentro) e $\Phi$ (ângulo solar). . . . .	101
Figura 7.35Evolução orbital do tempo dos elementos de uma partícula com anel E de Saturno, com as mesmas condições iniciais da Figura 7.34. . . . .	102

Figura 7.36 Evolução orbital de uma partícula no anel E de Saturno, sob a influência do dipolo e quadrupolo magnético, força de pressão de radiação e achatamento planetário, no tempo dos elementos  $a$  (semieixo maior),  $e$  (excentricidade),  $I$  (inclinação),  $\Omega$  (longitude do nodo),  $\omega$  (argumento do pericentro) e  $\Phi$  (ângulo solar). . . . . 103

Figura 7.37 Evolução no tempo dos elementos orbitais de uma partícula no anel E de Saturno sob a influência do quadrupolo e dipolo magnético, força de radiação solar e força devido ao achatamento planetário, com as mesmas condições iniciais e parâmetros físicos da Figura 7.36. . . . . 104

Figura 7.38 Evolução orbital do tempo dos elementos  $a$  (semieixo maior),  $e$  (excentricidade),  $I$  (inclinação),  $\Omega$  nodo,  $\omega$  pericentro e  $\Phi$  ângulo solar. . . . . 106

Figura 7.39 Evolução orbital do tempo dos elementos  $a$  (semieixo maior),  $e$  (excentricidade),  $I$  (inclinação),  $\Omega$  nodo,  $\omega$  pericentro e  $\Phi$  ângulo solar para dois valores de  $\beta$ . . . 107

Figura 7.40 Evolução orbital da excentricidade para uma partícula no anel E de Saturno. Foram alterados dos painéis o raio e o potencial das partículas no anel. O painel b possui exatamente os mesmos parâmetros iniciais utilizados na Figura 7.34. . 108

Figura 7.41 Evolução orbital da excentricidade para uma partícula no anel E de Saturno. Foram alterados dos painéis o raio e o potencial das partículas no anel. As partículas possuem os mesmos parâmetros dados na Figura 7.40. . . . . 108

Figura A.1 Estabelecendo conexão com o servidor do Bitbucket para clonagem do repositório. 112



## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Coeficiente Harmônico esférico do campo magnético. Nota: Os coeficientes estão em gauss. As taxas de rotação planetária são consideradas iguais às do campo magnético. . . . .	41
Tabela 7.1 – Condições iniciais da simulação para Urano: massa ( $M_p$ ), raio ( $R_P$ ), obliquidade ( $\gamma$ ) e o primeiro termo do potencial gravitacional harmônico par ( $J_2$ ). . . . .	63
Tabela 7.2 – Condições iniciais da simulação para uma partícula localizada no pico do anel $\mu$ de Urano perturbada pelo achatamento planetário ( $J_2$ ). Sendo $\rho$ a densidade, $r_g$ o raio, $a$ o semieixo maior e $e$ a excentricidade. . . . .	63
Tabela 7.3 – Valores em unidades de CGS. . . . .	68
Tabela 7.4 – Parâmetros iniciais das partículas para cada uma das simulações. Todos os ângulos são dados em graus. Os parâmetros da partícula são: $n$ velocidade angular, $a$ semieixo maior, $e$ excentricidade, $I$ inclinação, $\Omega$ longitude do nodo ascendente, $\omega$ argumento do pericentro e $\Phi$ potencial da carga. . . . .	68
Tabela 7.5 – Valores em unidades de CGS das constantes globais da integração e parâmetros físicos de Saturno utilizados nas simulações numéricas. Sendo $M_p$ massa do planeta, $R_P$ o raio, $g_{1,0}$ o coeficiente harmônico esférico do campo magnético, $\Omega_p$ a velocidade de rotação em radianos por segundos e $J_2$ o primeiro potencial gravitacional harmônico par. . . . .	75
Tabela 7.6 – Constantes utilizadas nas integrações numéricas, $GM_\odot$ é constante gravitacional do Sol, $\Phi_\odot$ fluxo de radiação solar à 1 UA e $c$ velocidade da luz. . . . .	79
Tabela 7.7 – Condições iniciais de Marte para as integrações numéricas utilizando o REBOUND. Todos os valores estão em unidades de SI. Sendo $GM_p$ constante gravitacional do planeta, $R_P$ o raio, $r_{sp}$ a distância do planeta ao Sol e $J_2$ o primeiro potencial gravitacional harmônico par. . . . .	80
Tabela 7.8 – Valores máximos de excentricidade e inclinação de partículas ejetadas de Phobos e Deimos de Marte para partículas de tamanhos $20\mu m$ e $40\mu m$ . . . . .	82
Tabela 7.9 – Valores máximos de excentricidade e inclinação de partículas ejetadas do satélite Phobos de Marte de diferente tamanhos, sob influência da força de radiação solar e achatamento planetário. . . . .	85
Tabela 7.10–Condições iniciais dos planetas nas simulações feitas com o REBOUND. Todos os valores estão em unidades de SI. Sendo $M_p$ massa do planeta, $R_P$ o raio, $g_{1,0}$ o coeficiente harmônico esférico do campo magnético e $\Omega_p$ a velocidade de rotação em radianos por segundos. . . . .	88
Tabela 7.11–Tabela com as condições iniciais da simulação numérica do anel E de Saturno: $\rho$ densidade, $r_g$ raio, $a$ semieixo maior, $e$ excentricidade e $I$ inclinação. . . . .	98

Tabela 7.12–Tabela com as condições iniciais de Saturno: $M_p$ massa do planeta, $R_P$ o raio, $r_{sp}$ a distancia do planeta ao Sol, $\gamma$ obliquidade, $J_2$ o primeiro potencial gravitacional harmônico par, $g_{1,0}$ o coeficiente harmônico esférico do campo magnético e $\Omega_p$ a velocidade de rotação. . . . .	98
Tabela 7.13–Os parâmetros globais utilizadas nas simulações: constante gravitacional ( $G$ ), velocidade da luz ( $c$ ) e massa do Sol ( $M_\odot$ ). . . . .	99

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>OS EFEITOS DA NÃO ESFERICIDADE DO PLANETA</b> . . . . .	<b>21</b>
2.1	Fundamentação Teórica . . . . .	22
2.2	Equações médias . . . . .	30
<b>3</b>	<b>FORÇA DE RADIAÇÃO SOLAR</b> . . . . .	<b>32</b>
3.1	Fundamentação Teórica . . . . .	33
3.2	Equações médias . . . . .	36
<b>4</b>	<b>FORÇA ELETROMAGNÉTICA</b> . . . . .	<b>38</b>
4.1	Fundamentação Teórica . . . . .	39
<b>4.1.1</b>	<b>O Dipolo Alinhado</b> . . . . .	<b>42</b>
4.1.1.1	Equações médias . . . . .	42
<b>4.1.2</b>	<b>O Quadrupolo Alinhado</b> . . . . .	<b>43</b>
4.1.2.1	Equações médias . . . . .	44
<b>4.1.3</b>	<b>Termos axissimétricos</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>5</b>	<b>SUMARIZAÇÃO DAS FORÇAS</b> . . . . .	<b>46</b>
<b>6</b>	<b>REBOUND</b> . . . . .	<b>54</b>
6.1	Estrutura do REBOUND . . . . .	54
6.2	Integradores . . . . .	55
<b>6.2.1</b>	<b>IAS15</b> . . . . .	<b>56</b>
6.3	Forças adicionais . . . . .	57
6.4	Biblioteca de ferramentas de forças perturbativas para o Rebound . . . . .	57
<b>6.4.1</b>	<b>Algoritmos da biblioteca</b> . . . . .	<b>58</b>
6.4.1.1	Algoritmo da força devido ao achatamento planetário . . . . .	58
6.4.1.2	Algoritmo da Força de Radiação Solar . . . . .	59
6.4.1.3	Algoritmo da Força eletromagnética . . . . .	61
<b>7</b>	<b>VALIDAÇÕES E APLICAÇÕES</b> . . . . .	<b>62</b>
7.1	Validação do Algoritmo da força do achatamento planetário . . . . .	62
7.2	Validação do Algoritmo da força eletromagnética . . . . .	67
7.3	Efeitos combinados das forças . . . . .	74
7.4	Dinâmica de partículas de poeira orbitando Marte . . . . .	79
7.5	Aplicação do estudo de estabilidade devido ao dipolo alinhado da Força de Lorentz . . . . .	87
7.6	Aplicação de forças perturbativas no anel E de Saturno . . . . .	98

7.6.1	Análise de como os parâmetros iniciais podem alterar a órbita da partícula no anel E. . . . .	105
8	CONCLUSÃO . . . . .	109
	REFERÊNCIAS . . . . .	110
	ANEXO A – TUTORIAL DE COMO UTILIZAR O GIT COM O BITBUCKET . . . . .	112
	ANEXO B – HEADERS DAS FUNÇÕES DA BIBLIOTECA FEG_TOOLS	113
B.1	Força devido a não esfericidade do planeta . . . . .	113
B.2	Força de radiação solar . . . . .	114

## 1 INTRODUÇÃO

No espaço há uma grande quantidade de partículas extremamente pequenas, da ordem de micrômetros. Essas pequenas partículas, consideradas como grãos de poeira, podem ser encontradas em diversos sistemas, como em cometas, asteroides e principalmente orbitando planetas e estrelas. Estes grãos podem ser originários dos corpos em que orbitam ou de satélites daquele sistema através de processos de colisões. Apesar de pequenas, essas partículas podem se aglutinar e se tornar maiores ao ponto de formarem satélites ou sistemas de anéis planetários complexos, como os que observamos em Saturno. Estudar a dinâmica destas pequenas partículas, entender sua origem e analisar a evolução dessas partículas no tempo é como conhecer o processo de formação planetária e o futuro do nosso Sistema Solar. Portanto analisar a dinâmica de partículas circumplanetárias e anéis planetários é um ótimo laboratório de estudo.

Quanto menores os tamanhos das partículas mais susceptíveis a forças perturbativas elas serão. Esse fato complica o movimento orbital, pois as forças podem ser capazes de alterar o tamanho, formato e inclinação da órbita de tal forma que essas partículas podem perder energia a ponto de colidir com o corpo que estão orbitando ou a força pode causar o efeito contrário, podendo aumentar o tamanho da órbita, causando colisão com satélites próximos ou até mesmo serem ejetadas do sistema planetário. Por isso, quando estudamos anéis planetários é importante entender quais forças irão agir e os efeitos distintos que cada uma causará na órbita.

Estamos especialmente interessados em entender as forças perturbativas que atuam em anéis planetários. Diversas motivações provocam o interesse por estas partículas circumplanetárias, pois o comportamento que estas forças causam na órbita das partículas muitas vezes é contraintuitivo, como o que ocorre quando tempo uma combinação de forças. Também é importante lembrar que os projetistas de missões espaciais estão justificadamente preocupados com os tamanhos e cargas das partículas nos anéis planetários, já que esses passam, geralmente em alta velocidade, através dos anéis fracos. As superfícies dessas sondas podem sofrer uma grande quantidade impactos desses pequenos grãos, enquanto colisões maiores podem destruir outros componentes ou até mesmo a espaçonave inteira (BURNS; HAMILTON; SHOWALTER, 2001).

As principais forças que estamos interessados em estudar é a força de radiação solar, a força gerada pelo formato não esférico do planeta e a força eletromagnética. Cada uma destas forças causam um efeito distinto, mas o acoplamento das forças pode fazer com que seus principais efeitos sejam reduzidos ou, o oposto, sejam acentuados.

A força devido à radiação solar tem como principal efeito a alteração da excentricidade da órbita que passa a variar periodicamente (BURNS; LAMY; SOTER, 1979). Essa força pode ser dividida em duas componentes: a pressão de radiação e o arrasto de Poynting-Robertson. A componente do arrasto é menor comparada a outra componente, entretanto em longos períodos ela pode ser especialmente importante, pois diminui o semieixo maior da partícula (MIGNARD, 1984).

O fato do planeta não ser perfeitamente esférico também gera uma perturbação na órbita da partícula. Considerando um planeta achatado nos polos, esta força causa uma taxa de variação constante no

tempo do argumento do pericentro e da longitude do nodo ascendente. Esta perturbação também causa uma variação de curto período no semi-eixo maior e da excentricidade (BROUWER; CLEMENCE, 1961). Ao combinar a força devido ao achatamento planetário com a força de radiação solar, que aumenta a excentricidade, ao final ocorrerá uma modulação da excentricidade e pode também ocasionar uma excitação ou redução da excentricidade e inclinação (SFAIR; GIULIATTI-WINTER, 2009).

Outra força perturbativa que age em pequenos grãos carregados é a força eletromagnética, ou força de Lorentz. Essa força depende da carga da partícula e do campo magnético do corpo que a partícula está orbitando. Desta forma, de um planeta para outro o movimento orbital pode ser alterado drasticamente para partículas com cargas idênticas (BURNS; HAMILTON; SHOWALTER, 2001). O mesmo ocorre com o movimento, considerando o mesmo sistema, mas com cargas distintas. Assim como a força do achatamento planetário, a força eletromagnética também gera uma taxa de variação na longitude do nodo e no argumento do pericentro, entretanto essas taxas de variações não são constantes no tempo e são dependentes dos valores da excentricidade e inclinação que também variam no tempo.

Combinando a taxa de variação da longitude do pericentro causada pela força eletromagnética com a gerada pelo achatamento planetário, o valor final será uma competição dos valores gerados por estas forças (HORANYI; BURNS; HAMILTON, 1992). Além disto, se adicionarmos as forças citadas anteriormente com a força de radiação solar o efeito causado na órbita originará um movimento orbital complexo, com uma excitação da excentricidade com o valor máximo e período de variação dependente do valor da longitude do nodo ascendente.

Quanto mais complexo o movimento mais difícil será sua análise. Ótimas ferramentas são os integradores de N-corpos. Um dos mais novos softwares para estes tipos de aplicações é o REBOUND, que é capaz de integrar o movimento dos corpos até mesmo extremamente excêntricos e sistemas com grande quantidade de colisões mantendo os erros sistemáticos abaixo da precisão de máquina (REIN; SPIEGEL, 2015). Ele dispõe de integradores simpléticos e não simpléticos e até mesmo híbridos. Em sua forma básica, o REBOUND realiza integrações dos corpos sob a influência apenas da força gravitacional, entretanto é facilmente adaptável, podendo incluir outras forças não gravitacionais, mesmo dissipativas, e ainda manter a precisão numérica.

Nosso objetivo neste trabalho foi entender e analisar o movimento de partículas circumplanetárias sob a influência de forças perturbativas. Para isto fizemos uma tradução das equações das forças em algoritmos que pudessem ser implementados no REBOUND. Para validar nossos algoritmos fizemos uma análise analítica e numérica com as equações médias de movimento para cada uma das forças perturbativas ao comparamos nossos resultados com outros resultados disponíveis na literatura.

Neste trabalho os primeiros capítulos apresentam um estudo das forças perturbativas devido ao achatamento planetário (cap. 2), radiação solar (cap. 3) e eletromagnética (cap. 4), mostrando as equações das forças em componentes cartesianas. Ao final de cada um destes capítulos apresentamos as equações médias que serão utilizadas nas análises. Em seguida faremos um estudo da intensidade de cada uma das forças em diferentes sistemas e os efeitos do acoplamento das forças (cap. 5). Com o estudo das forças, precisamos entender como aplicá-las utilizando integradores, por isto apresentamos o REBOUND no capítulo 6. O penúltimo capítulo do nosso trabalho (cap. 7) fizemos a aplicação das forças para diferentes sistemas. Por fim, algumas considerações finais (cap. 8).

## 2 OS EFEITOS DA NÃO ESFERICIDADE DO PLANETA

Corpos esféricos com distribuição de massa uniforme ou corpos que estão em uma distância grande comparado com suas dimensões físicas, atraem um ao outro como se toda massa estivesse concentrada em seus centros, sendo considerados como corpos pontuais. Esta aproximação é válida em muitos casos, mas existem casos de planetas muito achatados ou o caso da atração mútua entre asteroides, em que o fator da não esfericidade pode ser significativo.

Por este motivo iremos analisar como a força, gerada pelo formato não esférico, pode perturbar a órbita de um corpo em torno do planeta oblato (aquele que possui seu eixo de rotação mais curto que os demais eixos, tendo os polos achatados). Investigaremos como os elementos orbitais se modificam ao longo do tempo devido à esta força.

Como qualquer campo gravitacional pode ser derivado de uma função potencial a energia é conservada. Isto implica que o semi-eixo maior da partícula terá uma variação de curto período e a órbita praticamente mantém o seu tamanho, forma e inclinação em relação ao plano equatorial. No entanto, a longitude do nodo ascendente regressa e o argumento do pericentro pode precessionar. Logo, a solução média da órbita em torno de um planeta oblato será uma elipse em precessão (DANBY, 1988). Deste modo, o comportamento da partícula pode ser avaliado calculando estas taxas de variação dos elementos orbitais e usaremos estes valores para validar nossos algoritmos.

Neste capítulo iremos estudar como o efeito do achatamento planetário afeta as órbitas das partículas que orbitam o corpo oblato, para que possamos desenvolver um algoritmo no REBOUND que aplica esta força.

Iniciaremos nossa discussão na seção 2.1 seguindo o raciocínio desenvolvido em Kuga, Rao e Carrara (2000). Mostraremos como a força gravitacional devido à uma distribuição de massa não uniforme influencia uma massa pontual. Inicialmente desenvolveremos a expansão do potencial para o caso nos quais os planetas podem ser representados como tendo simetria com o eixo de rotação e com o plano equatorial. No REBOUND a aplicação da força se dá por meio da inclusão das componentes de aceleração para cada um dos corpos na simulação. Desta forma, desenvolveremos a força partindo da representação de um potencial simétrico, separando em cada uma das componentes cartesianas. Por fim, apresentaremos as equações de variação média elementos orbitais para que possamos encontrar as taxas de variação do argumento do pericentro e da longitude do nodo ascendente. Estas taxas serão utilizadas para validar nossos algoritmos.

## 2.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Seguindo o formalismo desenvolvido em Kuga, Rao e Carrara (2000), consideremos inicialmente uma partícula pontual de massa  $m$  orbitando um corpo de massa  $M_p$ , sendo a força de interação entre eles dada pela lei gravitacional de Newton:

$$\vec{F} = \frac{GmM_p}{r^2} \hat{r}, \quad (2.1)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional universal,  $r$  é a distância entre as duas massas e  $\hat{r}$  indica que essa força é no sentido radial. Também é possível escrever a força em função do potencial gravitacional  $V$  como:

$$\vec{F} = -m\nabla\vec{V}. \quad (2.2)$$

sendo o potencial correspondente criado pelo planeta dado por:

$$V = \frac{GM_p}{r} \quad (2.3)$$

Entretanto, quando se trata de uma distribuição não uniforme de massa atraindo uma partícula, neste caso é considerado potencial gerado por cada elemento de massa  $dM$ . Desta forma, considerando uma partícula orbitando o planeta no ponto  $P$  e a posição do elemento de massa como sendo  $P'$ , a distância entre estes pontos é dado por  $\Delta$ , como dado na Figura 2.1. Deste modo, o potencial total gerado pelo corpo será dado pela integral (KUGA; RAO; CARRARA, 2000):

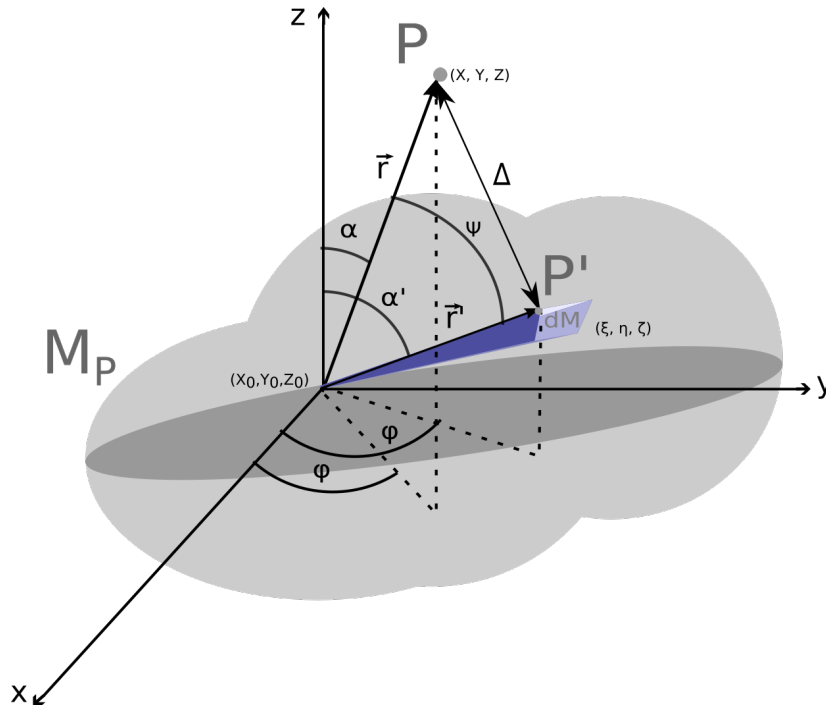
$$V = G \int_{M_p} \frac{dM}{\Delta}. \quad (2.4)$$

em que  $\Delta$  é a distância entre os pontos  $P$  e  $P'$ , cujas coordenadas esféricas são  $P(r, \alpha, \varphi)$  da partícula e  $P'(r', \alpha', \varphi')$  do elemento de massa  $dM$ , conforme mostrado na Figura 2.1. Para as coordenadas esféricas,  $\alpha$  é a latitude e  $\varphi$  a longitude. Assim, a distância  $\Delta$  é dada por:

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Psi. \quad (2.5)$$



Figura 2.1 – Representação das coordenadas cartesianas e esféricas de um objeto em uma órbita em torno da massa  $M_p$ . O ponto  $P$  é a localização da partícula e  $P'$  do elemento de massa. As coordenadas esféricas são dadas por  $P(r, \alpha, \varphi)$  e  $P'(r', \alpha', \varphi')$ .  $\Delta$  é a distância entre os dois pontos  $P$  e  $P'$ .  $(X_0, Y_0, Z_0)$  são coordenadas do centro de massa (CM) de  $M_p$ ;  $(x, y, z)$  são coordenadas da partícula em relação ao CM;  $(r, \phi, \alpha)$  são coordenadas esféricas de acordo com o centro do planeta, onde  $r$  é a distância radial,  $\phi$  é a longitude e  $\alpha$  é a latitude;  $(\xi, \eta, \zeta)$  são as coordenadas do elemento de massa  $M_p$  em relação ao CM.



Fonte: Produção do próprio autor

O ângulo  $\Psi$  é dado entre os vetores posição de  $P$  e  $P'$ , podendo ser obtido pelo produto escalar:

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' \cos \Psi. \quad (2.6)$$

resultando em

$$\cos \Psi = \cos \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha \sin \alpha' \cos (\varphi' - \varphi). \quad (2.7)$$

Podendo descrever a distância da partícula como:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Psi}}, \quad (2.8)$$

Supondo que a partícula sempre estará orbitando o planeta a uma distância  $r' \ll r$ , a distância pode ser desenvolvida em série de Taylor em torno do ponto  $r'/r = 0$ :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{r'}{r} \cos \Psi + \frac{3 \cos^2 \Psi - 1}{2} \left( \frac{r'}{r} \right)^2 + \frac{5 \cos^2 \Psi - 3}{2} \cos \Psi \left( \frac{r'}{r} \right)^3 + \mathcal{O} \left( \frac{r'}{r} \right)^4 \right], \quad (2.9)$$

que representa uma série convergente para  $r' < r$  e proporciona o inverso da distância em função do ângulo  $\Psi$ .

O termo  $\frac{1}{\Delta}$  pode também ser escrito em função dos polinômios de Legendre  $P_n(\cos \Psi)$ :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left[ P_0(\cos \Psi) + \frac{r'}{r} P_1(\cos \Psi) + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 P_2(\cos \Psi) + \left( \frac{r'}{r} \right)^3 P_3(\cos \Psi) + \dots \right] \quad (2.10)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \Psi). \quad (2.11)$$

Segundo o teorema da adição de Legendre (WEISSTEIN, 2008):

$$P_n(\cos \Psi) = P_n(\cos \alpha) P_n(\cos \alpha') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \alpha) P_n^m(\cos \alpha') \cos [m(\varphi' - \varphi)]. \quad (2.12)$$

que podemos rearranjar da seguinte maneira:

$$P_n(\cos \Psi) = \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \alpha) P_n^m(\cos \alpha') \cos [m(\varphi' - \varphi)] \quad (2.13)$$

sendo  $\delta_{nm}$  o delta de Kronecker e  $P_n^m$  os polinômios associados de Legendre.

Substituindo as equações (2.13) e (2.11) no potencial de um elemento de massa  $dM$  dado na equação (2.1) e calculando  $dV = \frac{GdM}{\Delta}$ :

$$\begin{aligned} dV &= \frac{GdM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \Psi). \\ &= \frac{GdM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \alpha) P_n^m(\cos \alpha') \cos [m(\varphi' - \varphi)]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Integrando o potencial em toda a distribuição de massa, obtém-se (KUGA; RAO; CARRARA, 2000):

$$V = \frac{GM_p}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R_p}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\varphi + \sin m\varphi) P_{nm}(\sin \alpha), \quad (2.15)$$

no qual:

$$\begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} = \frac{(2 - \delta_{m0})(n - m)!}{R_p^n (n + m)!} \int_{M_p} r'^m P_{nm}(\sin \alpha') \begin{bmatrix} \cos m\varphi' \\ \sin m\varphi' \end{bmatrix} dM \quad (2.16)$$

com  $R_p$  sendo o semi-eixo equatorial do elipsoide do planeta e  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  os coeficientes harmônicos esféricos. Cada termo de harmônicos esféricos representa uma distribuição sobre uma superfície esférica.

Uma das propriedades dos coeficientes harmônicos esféricos decorre do fato dos termos de ordem  $n = m = 0$  descreverem o potencial gravitacional de um corpo perfeitamente esférico, pois  $C_{00} = 1$  e  $S_{00} = 0$ . Além disso, para os planetas do sistema solar, temos que a origem do sistema de coordenadas coincide com o centro de massa dos planetas, isto leva a  $C_{10} = C_{11} = S_{11} = S_{00} = S_{n0} = 0$  (KUGA; RAO; CARRARA, 2000).

Os harmônicos com  $m = 0$  são polinômios de Legendre de grau  $n$  e assim possuem  $n$  zeros, que são reais e situados no intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Estes harmônicos mudam seu sinal  $n$  vezes neste intervalo e não dependem da longitude  $\varphi$ . Eles dividem a esfera em zonas e por isso são chamados harmônicos zonais. Neste trabalho estamos interessados em planetas que podem ser bem representados, considerando sua distribuição de massa simétrica em relação ao eixo rotação (simetria azimutal) e, portanto, não iremos considerar os termos  $m \neq 0$  para a representação do potencial. Por isto, não entraremos em detalhes sobre as propriedades dos termos sem esta simetria.

Os termos sem simetria axial do potencial gravitacional de um planeta (com  $m \neq 0$ ) são tipicamente pequenos, uma vez que o resultado primário da rotação planetária é uma protuberância equatorial axissimétrica (BURNS; HAMILTON; SHOWALTER, 2001). Portanto, é comum separar os coeficientes  $C$  dos harmônicos esféricos de grau 0 e chamá-los de coeficientes zonais  $J_n$ . Lembrando que os coeficientes  $S_n = 0$  são todos nulos, então:

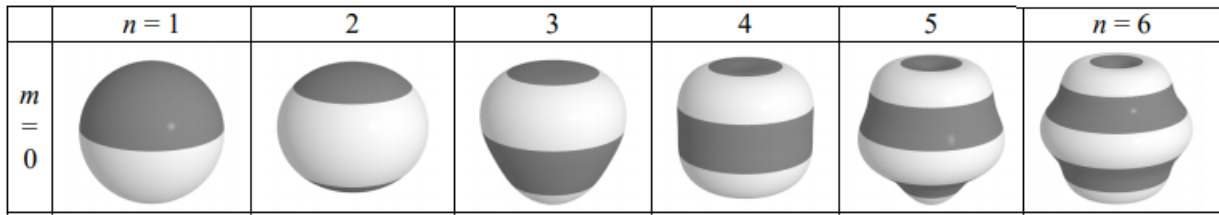
$$m = 0 \begin{cases} S_{n0} = 0 \\ C_{n0} = -J_n \end{cases} \quad (2.17)$$

O efeito da distribuição não uniforme de massa devido ao achatamento dos pólos é refletido no coeficiente zonal  $C_{20}$ . Porém, este coeficiente zonal possui valores positivos nos pólos e negativos no equador (equivalente a um achatamento equatorial), de modo que seu valor numérico resultante é negativo. Por este motivo, assume-se que  $C_{20} = -J_2$ , sendo  $J_2$  o coeficiente zonal devido ao achatamento ( $J_2 > 0$ ). Da mesma forma, o coeficiente zonal  $C_{30} = -J_3$  representa o efeito que atribui para o planeta uma forma de pera. A Figura 2.2 mostra a representação em 3D as deformações no planeta até a ordem 6.

Além da simetria em relação ao eixo de rotação do planeta, também estamos interessados nos coeficientes que também possuem simetria com o plano equatorial. Desta forma, o potencial gravitacional com esta simetria é representado somente com os coeficientes pares  $J_{2i}$ , que são os termos dominantes para os planetas gigantes gasosos.

O potencial de um esferoide, com simetria em torno do eixo de rotação e com plano equatorial, em

Figura 2.2 – Representação 3D em relevo dos polinômios até a ordem 6. As figuras foram geradas com o aplicativo POV (The Persistence of Vision Raytracer, 2008).



Adaptado de (KUGA; RAO; CARRARA, 2000)

uma expressão para o coeficiente até a 6ª ordem é dado por:

$$\begin{aligned}
 V_{GR} &= -\frac{GM_p}{r} \left[ 1 - \sum_{j=2}^6 J_j \left( \frac{R_p}{r} \right)^j P_j(\text{sen}\alpha) \right] \\
 &= -\frac{GM_p}{r} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{R_p}{r} \right)^2 P_2(\text{sen}\alpha) - J_4 \left( \frac{R_p}{r} \right)^4 P_4(\text{sen}\alpha) - J_6 \left( \frac{R_p}{r} \right)^6 P_6(\text{sen}\alpha) \right], \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

em que  $P_j(x)$  são os polinômios de Legendre e  $J_j$  os coeficientes adimensionais que caracterizam a intensidade das componentes do potencial de um corpo que não é perfeitamente esférico.

Os coeficientes são valores constantes, mas diferem para cada corpo. A consideração do potencial até a sexta ordem é uma aproximação razoável quando o planeta não é esférico. Para todos os planetas, exceto Mercúrio e Vênus com rotação lenta,  $J_j \ll J_2$  (com  $j > 2$ ), assim, podemos representar potenciais gravitacionais planetários razoavelmente precisos pelos três primeiros termos (monopolo, quadrupolo e octupolo) (BURNS; HAMILTON; SHOWALTER, 2001).

Com isso, a força perturbativa é obtida tomando o gradiente do potencial:

$$\vec{F}_{GR} = m \nabla V_{GR}. \quad (2.19)$$

no qual o subscrito  $GR$  serve para identificar o potencial e a força considerando as simetrias e a ordem citadas anteriormente.

Analogamente, a força que age sobre os diferentes elementos de  $M_p$  pode ser transferida para o centro de massa do planeta. A força resultante será igual e oposta à força que age sobre  $m$ . Então as componentes da força que agem no corpo central podem ser escritas como (BROUWER; CLEMENCE, 1961):

$$F^{(0)} = -M_p \nabla V_{GR} \quad (2.20)$$

onde  $^{(0)}$  identifica a força que age no centro de massa de  $M_p$ .

Calcularemos agora a componente da força aplicada na partícula para cada um dos coeficientes  $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$ . Para facilitar os cálculos, aplicaremos o gradiente para cada termo isoladamente, assim:

$$\vec{F}_{J_2} = -GM_p \nabla \left[ \frac{1}{r} \left( 1 - J_2 \left( \frac{R_p}{r} \right)^2 P_2(\text{sen}\alpha) \right) \right]. \quad (2.21)$$

considerando  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  e utilizando o fato de  $P_2(x) = 1/2(3x^2 - 1)$  e  $\text{sen}\alpha = z/r$ , para a componente  $x$  da força temos :

$$F_{x_{J_2}} = -GM_p \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{1}{2} J_2 \left( \frac{R_p}{r} \right)^2 - \frac{3}{2} J_2 \frac{R_p^2}{r^4} z^2 \right) \right]. \quad (2.22)$$

ou ainda:

$$F_{x_{J_2}} = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{R_p^2}{r^2} - \frac{15}{2} J_2 \frac{R_p^2}{r^4} z^2 \right] x \quad (2.23)$$

Analogamente, para a componente  $y$  da força:

$$F_{y_{J_2}} = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{R_p^2}{r^2} - \frac{15}{2} J_2 \frac{R_p^2}{r^4} z^2 \right] y \quad (2.24)$$

E para encontrar a componente em  $z$  apenas tomando cuidado com a derivada parcial em  $z$ , temos:

$$F_{z_{J_2}} = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ 1 + \frac{9}{2} J_2 \frac{R_p^2}{r^2} - \frac{15}{2} J_2 \frac{R_p^2}{r^4} z^2 \right] z \quad (2.25)$$

Para o termo proporcional a  $J_4$ , a força é dada por:

$$\vec{F}_{J_4} = -GM_p \nabla \left[ \frac{1}{r} \left( -J_4 \left( \frac{R_p}{r} \right)^4 P_4(\text{sen}\alpha) \right) \right] \quad (2.26)$$

Sendo o polinômio de Legendre  $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$ . Temos:

$$F_{x_{J_4}} = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ -\frac{15}{8} J_4 \left( \frac{R_p}{r} \right)^4 + \frac{210}{8} J_4 \frac{R_p^4}{r^6} z^2 - \frac{315}{8} J_4 \frac{R_p^4}{r^8} z^4 \right] x \quad (2.27)$$

$$F_{y_{J_4}} = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ -\frac{15}{8} J_4 \left( \frac{R_p}{r} \right)^4 + \frac{210}{8} J_4 \frac{R_p^4}{r^6} z^2 - \frac{315}{8} J_4 \frac{R_p^4}{r^8} z^4 \right] y \quad (2.28)$$

$$F_{zJ_4} = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ -\frac{75}{8} J_4 \left( \frac{R_p}{r} \right)^4 + \frac{350}{8} J_4 \frac{R_p^4}{r^6} z^2 - \frac{315}{8} J_4 \frac{R_p^4}{r^8} z^4 \right] z \quad (2.29)$$

Analogamente, a força para o termo de  $J_6$ .

$$\vec{F}_{xJ_6} = -GM_p \nabla \left[ \frac{1}{r} \left( -J_6 \left( \frac{R_p}{r} \right)^6 P_6(\text{sen}\alpha) \right) \right] \quad (2.30)$$

sendo  $P_6 = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$  e com isso

$$F_{xJ_6} = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ \frac{105}{16} J_6 \left( \frac{R_p}{r} \right)^6 \left( \frac{1}{3} + 9 \left( \frac{z}{r} \right)^2 - 33 \left( \frac{z}{r} \right)^4 + \frac{143}{5} \left( \frac{z}{r} \right)^6 \right) \right] x \quad (2.31)$$

$$F_{yJ_6} = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ \frac{105}{16} J_6 \left( \frac{R_p}{r} \right)^6 \left( \frac{1}{3} + 9 \left( \frac{z}{r} \right)^2 - 33 \left( \frac{z}{r} \right)^4 + \frac{143}{5} \left( \frac{z}{r} \right)^6 \right) \right] y \quad (2.32)$$

$$F_{zJ_6} = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ \frac{105}{16} J_6 \left( \frac{R_p}{r} \right)^6 \left( \frac{7}{3} + 21 \left( \frac{z}{r} \right)^2 - \frac{231}{5} \left( \frac{z}{r} \right)^4 + \frac{143}{5} \left( \frac{z}{r} \right)^6 \right) \right] z \quad (2.33)$$

Portando, as componentes da força total, experimentada por uma partícula ao orbitar um corpo oblato para termos até  $J_6$ , são dadas por:

$$F_x = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{R_p^2}{r^2} \left( 1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) - \frac{15}{8} J_4 \frac{R_p^4}{r^4} \left( 1 - 14 \frac{z^2}{r^2} + 21 \frac{z^4}{r^4} \right) + \frac{105}{16} J_6 \frac{R_p^6}{r^6} \left( \frac{1}{3} + 9 \frac{z^2}{r^2} - 33 \frac{z^4}{r^4} + \frac{143 z^6}{5 r^6} \right) \right] x \quad (2.34)$$

$$F_y = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{R_p^2}{r^2} \left( 1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) - \frac{15}{8} J_4 \frac{R_p^4}{r^4} \left( 1 - 14 \frac{z^2}{r^2} + 21 \frac{z^4}{r^4} \right) + \frac{105}{16} J_6 \frac{R_p^6}{r^6} \left( \frac{1}{3} + 9 \frac{z^2}{r^2} - 33 \frac{z^4}{r^4} + \frac{143 z^6}{5 r^6} \right) \right] y \quad (2.35)$$

$$F_z = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{R_p^2}{r^2} \left( 3 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) - \frac{5}{8} J_4 \frac{R_p^4}{r^4} \left( 25 - 70 \frac{z^2}{r^2} + 63 \frac{z^4}{r^4} \right) + \frac{105}{16} J_6 \frac{R_p^6}{r^6} \left( \frac{7}{3} + 21 \frac{z^2}{r^2} - \frac{231z^4}{5r^4} + \frac{143z^6}{5r^6} \right) \right] z \quad (2.36)$$

As equações 2.34-2.36 são as equações que foram incluídas no REBOUND. As forças perturbativas devem ser aplicadas alterando as componentes cartesianas da aceleração dos corpos. Este é o motivo pelo qual as forças foram desenvolvidas desta maneira.

Para o movimento da partícula sob a influência do potencial do corpo não esférico, podem ser associadas três frequências de movimento: a frequência angular  $n$ , a frequência radial  $k$ , e a frequência vertical  $\nu$ . Considerando baixas excentricidade ( $e$ ) e inclinação ( $I$ ), elas são dadas por (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$n^2 = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)_0, \quad (2.37)$$

$$k^2 = \frac{3}{a} \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)_0 + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_0, \quad (2.38)$$

$$\nu^2 = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)_0 + \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} \right)_0 \quad (2.39)$$

Queremos encontrar o valor destas frequências até o termo  $J_6$  do potencial e para isto faremos a expansão do potencial. Assim escrevemos o potencial como:

$$V_{GR} = -\frac{Gm_p}{r} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{R_p}{r} \right)^2 P_2(\text{sen}\alpha) - J_4 \left( \frac{R_p}{r} \right)^4 P_4(\text{sen}\alpha) - J_6 \left( \frac{R_p}{r} \right)^6 P_6(\text{sen}\alpha) \right], \quad (2.40)$$

Realizando as derivadas parciais necessárias e substituindo as derivadas parciais nas equações 2.37-2.39, temos:

$$n^2 = \frac{Gm_p}{a^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 - \frac{15}{8} J_4 \left( \frac{R_p}{a} \right)^4 + \frac{35}{16} J_6 \left( \frac{R_p}{a} \right)^6 \right] \quad (2.41)$$

$$k^2 = \frac{Gm_p}{a^3} \left[ 1 - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 + \frac{45}{8} J_4 \left( \frac{R_p}{a} \right)^4 - \frac{175}{16} J_6 \left( \frac{R_p}{a} \right)^6 \right] \quad (2.42)$$

$$\nu^2 = \frac{Gm_p}{a^3} \left[ 1 + \frac{9}{2} J_2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 - \frac{75}{8} J_4 \left( \frac{R_p}{a} \right)^4 + \frac{245}{16} J_6 \left( \frac{R_p}{a} \right)^6 \right] \quad (2.43)$$

Note que se  $J_2 = J_4 = J_6 = 0$  então  $n^2 = k^2 = v^2 = n_0^2$ , em que  $n_0 = (Gm_p/a^3)^{\frac{1}{2}}$  é o movimento médio da partícula, sendo a órbita em torno do planeta considerando-o como uma massa pontual. No caso da frequência angular  $n$ , a inclusão de termos adicionais significa que para um dado semi-eixo maior o corpo se movimenta mais rápido do que a taxa esperada naquela localização comparado a um problema de dois corpos. Portanto, uma vez que a quantidade observável para um corpo é geralmente  $n$ , o semi-eixo maior não é aquele determinado pela terceira lei de Kepler. Ao invés disto é necessário resolver a equação (2.41), que é uma equação não linear em  $a$ .

Estas três frequências fazem com que a órbita não seja mais fechada e que as longitudes do pericentro ( $\omega$ ) e do nodo ascendente ( $\Omega$ ) não serão fixas. As taxas de variação desses elementos, chamados de taxas de precessão e regressão, são dadas por (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$\dot{\omega} = n - k \quad (2.44)$$

$$\dot{\Omega} = n - \nu \quad (2.45)$$

portanto a taxa de variação do argumento do pericentro e da longitude do nodo em função dos coeficientes zonais e com simetria equatorial são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} = +n_0 \left[ \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 - \frac{15}{4} J_4 \left( \frac{R_p}{a} \right)^4 + \frac{105}{16} J_6 \left( \frac{R_p}{a} \right)^6 - \frac{45}{32} J_2 J_4 \left( \frac{R_p}{a} \right)^6 + \frac{105}{32} J_2 J_6 \left( \frac{R_p}{a} \right)^8 \right. \\ \left. + \frac{225}{64} J_4^2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^8 - \frac{3675}{256} J_4 J_6 \left( \frac{R_p}{a} \right)^{10} + \frac{3675}{256} J_6^2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^{12} \right] \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} = -n_0 \left[ \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 - \frac{9}{4} J_2^2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^4 - \frac{15}{4} J_4 \left( \frac{R_p}{a} \right)^4 + \frac{105}{16} J_6 \left( \frac{R_p}{a} \right)^6 + \frac{315}{32} J_2 J_4 \left( \frac{R_p}{a} \right)^6 \right. \\ \left. - \frac{675}{64} J_4^2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^8 - \frac{525}{32} J_2 J_6 \left( \frac{R_p}{a} \right)^8 + \frac{8925}{256} J_2 J_6 \left( \frac{R_p}{a} \right)^{10} - \frac{3675}{128} J_6^2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^{12} \right] \end{aligned} \quad (2.47)$$

As equações (2.46) e (2.47) podem ser usadas para validar a implementação desta perturbação.

## 2.2 EQUAÇÕES MÉDIAS

Quando o movimento de uma partícula é dominado pela atração gravitacional do corpo central, mas além dessa existe uma força perturbadora que causa pequenos desvios em sua órbita, essas pequenas derivações podem ser obtidas definindo e analisando a função perturbadora. As acelerações adicionais podem ser obtidas pelo gradiente da função perturbadora (MURRAY; DERMOTT, 1999).



A variação dos elementos orbitais devida à não esfericidade do corpo central pode ser obtida por meio das equações de Lagrange. Deste modo, inserindo a função perturbadora associada ao achatamento planetário (termo  $J_2$  da expansão do potencial) nas equações de Lagrange (Danby (1988), p. 336), é possível encontrar as equações para a variação média dos elementos orbitais (HAMILTON, 1993):

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle_{J_2} = 0 \quad (2.48a)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle_{J_2} = 0 \quad (2.48b)$$

$$\left\langle \frac{dI}{dt} \right\rangle_{J_2} = 0 \quad (2.48c)$$

$$\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle_{J_2} = -\frac{3nJ_2R_p^2}{2a^2(1-e^2)^2} \cos I \quad (2.48d)$$

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle_{J_2} = \frac{3nJ_2R_p^2}{2a^2(1-e^2)^2} \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 I\right) \quad (2.48e)$$

$$\left\langle \frac{dM}{dt} - n \right\rangle_{J_2} = \frac{3nJ_2R_p^2}{2a^2(1-e^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 I\right) \quad (2.48f)$$

(estas equações foram obtidas realizando uma média na longitude média ( $M$ ) para um período orbital de modo que os efeitos de curto período são anulados).

Estas equações médias são analiticamente integráveis. As três primeiras equações indicam que os elementos  $a$ ,  $e$  e  $I$  são constante no tempo, enquanto a taxa de variação das três últimas equações é constantes no tempo. Assim, os ângulos  $\omega$  e  $\Omega$  irão circular, tendo valores que mudam linearmente no tempo. Os tempos de circulação são  $\sim (a/R_p)^2/J_2$  vezes maior que o período orbital, o que resulta em uma elipse em rotação (HAMILTON, 1993).

A taxa de variação do pericentro difere ligeiramente do movimento médio porque a velocidade angular média da partícula é alterada e a posição do pericentro muda lentamente. Para órbitas equatoriais, a última equação (2.48f) tem um valor positivo e a partícula completa uma órbita ligeiramente mais rápido que a sua órbita kepleriana não perturbada.

A partir das equações de variação do argumento do pericentro e da longitude do nodo ascendente podemos calcular as taxas de variação, da mesma maneira que foi feito nas equações 2.46 e 2.47, porém estes cálculos foram realizados considerando baixas excentricidade e inclinação. Estes cálculos são mais simples de serem realizados, pois foram feitas diversas aproximações. Então para quais quer valores de excentricidade e inclinação, porém somente até o termo  $J_2$  do potencial, podemos calcular as taxas de variação utilizando as equações 2.48d e 2.48e.

Assim, para um planeta oblato, o nodo ascendente regressa. A linha de apsides avança ou regride, dependendo se  $I$  é menor ou maior que o valor crítico dado por  $\sin(I) = 2/\sqrt{5} = 63.4^\circ$ . A perturbação em  $M$  pode ser interpretada como uma perturbação do período orbital. Isto é possível usando um valor ligeiramente diferente ou perturbado de  $n$ .

### 3 FORÇA DE RADIAÇÃO SOLAR

Analisaremos agora como a radiação solar pode alterar o movimento orbital de pequenas partículas circumplanetárias. Devido ao fato de os fótons carregarem momento, ao colidirem com partículas ocorre uma troca de momento gerando pequenas forças quando são absorvidos, emitidos ou espalhados pela matéria (BURNS; HAMILTON; SHOWALTER, 2001). A reação das partículas em anéis planetários a essas forças gera uma perturbação em suas evoluções orbitais, geralmente significativa apenas para partículas de poeira (com raio de ordem de micrômetros). A força de radiação solar pode ser dividida em duas componentes: a pressão de radiação (do inglês radiation pressure, RP), que é devido ao instante inicial da radiação ao interagir com a partícula e o arrasto de Poynting-Robertson (PR drag), que surge como uma consequência da reemissão anisotrópica da radiação levando a ocorrência de uma força oposta à direção do movimento orbital do grão de poeira (BURNS; LAMY; SOTER, 1979).

Para grãos de poeira orbitando o Sol, a principal consequência da pressão de radiação é simples de calcular, pois a força aplicada a um grão de poeira é principalmente radial e a intensidade da radiação emanada do Sol cai quadraticamente com a distância, assim como a gravidade solar. Dessa forma, a gravidade efetiva sentida por um grão de poeira é reduzida e esses grãos levam um pouco mais de tempo para orbitar o Sol do que sob a gravidade apenas. Já um grão de poeira orbitando um planeta tem um movimento mais complexo, uma vez que a intensidade da força sentida por esse depende de sua posição em relação ao planeta e a posição desse em relação ao Sol. Nas proximidades do planeta, tem-se que a força de radiação solar é quase constante em magnitude, enquanto sua direção varia lentamente à medida que o planeta orbita o Sol. Como o período orbital do planeta é muito maior que de uma partícula nessas regiões, pode-se considerar a direção solar como constante sob uma órbita completa da partícula ao redor do planeta.

Neste capítulo começaremos mostrando a força devido à pressão de radiação solar. Inicialmente, mostraremos esta força como uma função do fluxo solar e da área da partícula. Então introduziremos um novo parâmetro responsável por medir a razão da força de pressão de radiação solar com a força gravitacional gerada pelo Sol e desta forma, apresentaremos a força de radiação solar como função deste novo parâmetro. Em seguida, faremos um estudo da origem da componente de PR drag e como esta age nas partículas. Também calculamos o tempo de decaimento devido ao arrasto de Poynting-Robertson, uma vez que essa componente diminui o semi-eixo maior da partícula, até que ocorra a colisão com o planeta. Então, apresentaremos uma equação geral da força de radiação solar com ambas as componentes e sua expressão geral para o caso de um planeta com obliquidade em relação ao Sol. Por fim, mostraremos as equações de movimento sobre a influência da força de radiação solar, analisando quais as variações dos elementos orbitais causadas pela força.

### 3.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para um grão de tamanho micrométrico orbitando um planeta, a força de radiação solar pode ser uma fonte de perturbação muito importante. Consideremos uma partícula cuja seção transversal geométrica é  $A$  e está localizada em uma região onde a densidade de fluxo de radiação é  $\Phi$ . A força sentida por esta será dada por (MIGNARD, 1984):

$$\vec{F}_{RP} = \frac{\Phi A}{c} Q_{pr} \hat{s}, \quad (3.1)$$

em que  $\hat{s}$  é o vetor unitário radial na direção da fonte de radiação,  $c$  é a velocidade da luz e  $Q_{pr}$  é uma constante dependente das propriedades ópticas do grão. A existência dessa surge do fato de que nenhum corpo ser um absorvedor perfeito, uma vez que a difração implica que a partícula pode interagir com uma onda eletromagnética em uma região muito maior que sua seção transversal. Neste trabalho, como focaremos em partículas de ordem de micrômetros que seguem a óptica geométrica (BURNS; LAMY; SOTER, 1979), consideraremos estas como sendo um absorvedores perfeitos ( $Q_{pr} = 1$ ).

Quando o valor do fluxo de radiação  $\Phi$  é conhecido em uma determinada região, a força de radiação solar pode ser calculada utilizando a equação 3.1. Entretanto, é conveniente definir um outro parâmetro responsável por avaliar a força de radiação em uma órbita que seja independentemente da sua distância ao Sol.

Seja  $F_G$  a força gravitacional do Sol. Para uma partícula de raio  $r_g$  e densidade  $\rho_g$ , localizada a uma distância  $R$  da fonte de radiação, temos

$$F_G = GM_{\odot} \frac{4}{3} \frac{\pi r_g^3 \rho_g}{R^2} \quad (3.2)$$

e

$$F_{RP} = \frac{\Phi \pi r_g^2}{c} Q_{pr} = \frac{L}{4\pi R^2} \frac{\pi r_g^2}{c} Q_{pr} \quad (3.3)$$

no qual  $M_{\odot}$  e  $L$  são a massa e luminosidade do Sol, respectivamente. Desta forma, podemos comparar a força de radiação solar com a gravitacional e definir a razão das forças através do parâmetro  $\beta$ , dado por:

$$\beta = \frac{F_{RP}}{F_G} = \frac{3L}{16\pi GM_{\odot} c} \frac{Q_{pr}}{\rho_g r_g} \quad (3.4)$$

Devido ao fato de ambas as forças diminuírem com o inverso do quadrado da distância ao Sol, tem-se que  $\beta$  depende somente das propriedades da partícula. Substituindo os valores das constantes na equação temos que:

$$\beta = 5.7 \times 10^{-5} \frac{Q_{pr}}{\rho_g r_g} \quad (3.5)$$

Portanto, a força aplicada pela pressão de radiação pode ser expressa como (BURNS; LAMY; SOTER, 1979):

$$\vec{F}_{RP} = -\beta \frac{GM_{\odot}}{R^2} \hat{s} \quad (3.6)$$

Além da expressão acima, existe outra componente da força de radiação solar, que é o arrasto de Poynting-Robertson. Outros efeitos da força de radiação solar são muito pequenos em comparação com a pressão de radiação e geralmente podem ser negligenciados em um curto período de tempo. Forças dissipativas, como o arrasto de Poynting-Robertson, apesar de serem fracas podem ser importantes em longos períodos, pois afetam o semieixo maior.

Em 1903 Poynting investigou as consequências da contínua absorção e reemissão de radiação solar pelas partículas e mostrou a existência de um arrasto tangencial em adição à força de radiação solar. A análise completa da força de radiação solar considera a reemissão da luz absorvida como sendo não isotrópica, ou seja, a emissão de radiação não é uniforme. Por consequência, a força total de radiação solar é dada pela soma das componentes de pressão de radiação e arrasto de Poynting-Robertson (MIGNARD, 1984):

$$\vec{F} = F_{RP} \left[ \left( 1 - \frac{\dot{r}}{c} \right) \hat{s} - \frac{\vec{V}}{c} \right] \quad (3.7)$$

sendo  $\dot{r}$  a derivada temporal do vetor posição e  $\vec{V}$  o vetor velocidade da partícula em relação ao Sol. Os valores dependentes  $\dot{r}$  e  $\vec{V}$  são referentes a componente do arrasto de Poynting-Robertson. Como pode ser observado pela equação, essa componente se opõe à velocidade da partícula, sendo, desta forma, uma força dissipativa que irá alterar a energia da partícula.

Para o caso de uma órbita planetocêntrica o PR drag causa uma perda de energia orbital quando medida a partir do próprio sistema planetário e não em relação ao Sol. Por estes fatores, para facilitar o tratamento matemático, iremos fazer algumas considerações, nos quais os movimentos planetocêntricos negligenciam as pequenas variações na distância entre o Sol e o planeta. Além disto, o planeta é considerado tendo uma órbita circular e as sombras planetárias são desconsideradas. Consequentemente o fluxo solar pode ser considerado constante sobre toda a órbita da partícula e igual ao seu valor em relação ao planeta.

Por estes motivos implementaremos a força de maneira geral. Para isto, partindo da expressão vetorial da força de radiação solar, dada na equação 3.1 e considerando as posições e velocidades do planeta e da partícula, temos (MIGNARD, 1984):

$$\vec{F} = \frac{\beta GM_s}{r_{sp}^2} Q_{pr} \left\{ \left[ 1 - \frac{r_{sp}}{r_{sp}} \left( \frac{\vec{V}_p}{c} + \frac{\vec{V}}{c} \right) \right] \frac{r_{sp}}{r_{sp}} - \frac{\vec{V}_p + \vec{V}}{c} \right\} \quad (3.8)$$

no qual  $\vec{V}_p$  é a velocidade orbital do planeta,  $\vec{V}$  a velocidade da partícula com respeito ao planeta e  $r_{sp}$  é o vetor Sol-planeta.

Outro fator que devemos considerar é que a maioria dos sistemas com anéis planetários pode ser considerada coplanar ao plano do equador do planeta, isto é, a inclinação  $I$  das partículas dos anéis é  $I \leq \gamma$ , sendo  $\gamma$  a obliquidade do planeta. Neste caso o problema pode ser tratado como bidimensional, no qual a partícula do anel está no plano equatorial do Sol. Já no caso do sistema de anéis em Urano, o problema deve ser tratado como tridimensional, uma vez que a obliquidade do planeta é  $\gamma = 97.8^\circ$ .

Para uma partícula que descreve uma órbita em torno de uma planeta com obliquidade  $\gamma$ , as componentes da força de radiação, em um sistema inercial cartesiano centrado no planeta, serão dadas por (SFAIR; GIULIATTI-WINTER, 2009):

$$F_x = \frac{\beta GM_s}{r_{sp}^2} Q_{pr} \left[ \cos(n_s t) - \left( \frac{x_s}{r_{sp}} \right)^2 \left( \frac{v_{xs}}{c} + \frac{v_x}{c} \right) - \left( \frac{v_{xs}}{c} + \frac{v_x}{c} \right) \right] \quad (3.9)$$

$$F_y = \frac{\beta GM_s}{r_{sp}^2} Q_{pr} \left[ \cos(\gamma) \text{sen}(n_s t) - \left( \frac{y_s}{r_{sp}} \right)^2 \left( \frac{v_{ys}}{c} + \frac{v_y}{c} \right) - \left( \frac{v_{ys}}{c} + \frac{v_y}{c} \right) \right] \quad (3.10)$$

$$F_z = \frac{\beta GM_s}{r_{sp}^2} Q_{pr} \left[ \text{sen}(\gamma) \text{sen}(n_s t) - \left( \frac{z_s}{r_{sp}} \right)^2 \left( \frac{v_{zs}}{c} + \frac{v_z}{c} \right) - \left( \frac{v_{zs}}{c} + \frac{v_z}{c} \right) \right] \quad (3.11)$$

sendo  $(x_s, y_s, z_s)$  as componentes de  $r_{sp}$ . As componentes da velocidade da partícula são  $(v_x, v_y, v_z)$  e  $(v_{xs}, v_{ys}, v_{zs})$  as componentes da velocidade do planeta em torno do Sol em uma órbita circular. Na expressão, os termos que não estão relacionados à velocidade correspondem à pressão de radiação solar e o outro termo corresponde ao arrasto de Poynting-Robertson, que é uma força contrária ao sentido de velocidade.

O arrasto PR causa uma diminuição contínua na energia da partícula, resultando em uma diminuição do semi-eixo maior da órbita, fazendo com que ela decaia em direção ao planeta. O tempo de decaimento  $\tau_{PR}$  de uma partícula em órbita planetocêntrica com  $I = 0^\circ$  pode ser estimado através da expressão (MIGNARD, 1984):

$$\tau_{PR} = \frac{Rc}{3\beta GM_\odot} \quad (3.12)$$

ou numericamente  $\tau_{PR} = 530R^2/\beta$  anos, sendo  $R$  a distância do planeta ao Sol (em UA).

O valor do coeficiente da equação 3.1 é dado para o caso em que as partículas orbitam o planeta, que é o nosso caso de interesse ao estudar anéis planetários. Entretanto para o caso heliocêntrico

o coeficiente da equação é diferente, porém o parâmetro  $\beta$  continua o mesmo. Fundamentalmente, isso ocorre porque o arrasto de Poynting-Robertson é devido à reemissão da energia absorvida, que é quase a mesma, independentemente se a partícula está orbitando o planeta ou o Sol. Mesmo que esse tempo de colapso possa ser curto, a remoção de partículas perturbadas dos sistemas planetários ocorre principalmente devido às variações de excentricidade induzidas pela pressão de radiação.

### 3.2 EQUAÇÕES MÉDIAS

Para avaliarmos analiticamente qual a perturbação na órbita das partículas devido a força de pressão de radiação, iremos analisar as taxas de variação dos elementos orbitais, dadas pelas soluções das equações médias de Lagrange.

Em Hamilton (1993) foi calculado o movimento médio de uma partícula ao longo de um período orbital, mantendo a posição do Sol constante, pois o Sol está praticamente imóvel durante o tempo que leva a partícula para completar uma única órbita. Considerando a posição do Sol no plano equatorial temos  $\hat{s} = s_x \hat{x} + s_y \hat{y} + s_z \hat{z}$ . Uma vez que a magnitude e direção da pressão de radiação mudam apenas ligeiramente em uma única órbita do grão de poeira, a equação 3.6 é considerada constante e desta forma o potencial é  $V_{RP} = F_{RP}(s_x x + s_y y + s_z z)$ . Inserindo a equação do potencial nas equações planetárias de Lagrange (DANBY, 1988), pode-se obter as seguintes expressões para a variação dos elementos orbitais:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle_{RP} = 0 \quad (3.13a)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle_{RP} = \alpha(1 - e^2)^{1/2} [s_x(\cos\Omega \operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\Omega \cos\omega \cos I) + s_y(\operatorname{sen}\Omega \operatorname{sen}\omega - \cos\Omega \cos\omega \cos I) - s_z(\cos\omega \operatorname{sen} I)] \quad (3.13b)$$

$$\left\langle \frac{dI}{dt} \right\rangle_{RP} = \frac{\alpha e}{(1 - e^2)^{1/2}} [s_x(\operatorname{sen}\Omega \cos\omega \operatorname{sen} I) + s_y(\cos\Omega \cos\omega \cos I) - s_z(\operatorname{sen}\omega \cot I)] \quad (3.13c)$$

$$\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle_{RP} = \frac{\alpha e}{(1 - e^2)^{1/2}} [s_x(\operatorname{sen}\Omega \operatorname{sen}\omega) - s_y(\cos\Omega \operatorname{sen}\omega) - s_z(\operatorname{sen}\omega \cot I)] \quad (3.13d)$$

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle_{RP} = \frac{\alpha(1 - e^2)^{1/2}}{e} [s_x(\cos\Omega \cos\omega - \operatorname{sen}\Omega \operatorname{sen}\omega \cos I) + s_y(\operatorname{sen}\Omega \cos\omega + \cos\Omega \cos\omega \cos I) + s_z(\operatorname{sen}\omega \operatorname{sen} I)] - \cos I \left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle \quad (3.13e)$$

$$\left\langle \frac{dM}{dt} - n \right\rangle_{RP} = \frac{\alpha(1 + e^2)}{e} [s_x(\cos\Omega \cos\omega - \operatorname{sen}\Omega \operatorname{sen}\omega \cos I) + s_y(\operatorname{sen}\Omega \cos\omega + \cos\Omega \cos\omega \cos I) + s_z(\operatorname{sen}\omega \operatorname{sen} I)] \quad (3.13f)$$

onde  $2\alpha/(3n) = \beta M_\odot a^2/(M_p R^2)$  e  $R$  é a distância do planeta ao Sol. As equações (3.13) são tridimensionais e válidas para qualquer valor de excentricidade e inclinação. Os coeficientes  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$  são:

$$s_x = \cos(n_{\odot}t + \delta) \quad (3.14)$$

$$s_y = \cos\gamma \operatorname{sen}(n_{\odot}t + \delta) \quad (3.15)$$

$$s_z = \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}(n_{\odot}t + \delta) \quad (3.16)$$

sendo  $\delta$  o ângulo de localização do Sol no tempo  $t = 0$  e  $n_{\odot}$  a velocidade angular do planeta ao redor do Sol.

A equação 3.13a mostra que o semi-eixo maior da partícula não sofre efeito da pressão de radiação. Isto ocorre porque o potencial assumido gera uma força conservativa e assim o tamanho da órbita permanece inalterado.

Podemos notar também que as mudanças na excentricidade são periódicas, tanto com o movimento orbital do planeta quanto com o movimento do pericentro em relação ao sistema inercial. Com isso, forças que alteram o pericentro da órbita, como as forças devido ao achatamento planetário e a força eletromagnética, podem levar ao surgimento de efeitos em que ocorrem um aumento ou uma diminuição na excentricidade.

Para os casos de sistemas planares, o movimento do pericentro de uma partícula é uma função apenas do movimento do planeta ao redor do Sol e, conseqüentemente, o período de variação da excentricidade será o período do planeta. O valor máximo da excentricidade ocorre quando a velocidade da partícula no pericentro é paralela a direção de incidência dos raios solares. Este fato pode ser mais facilmente observado pelas equações médias planares dada em Burns, Lamy e Soter (1979).

As mudanças que ocorrem na inclinação acontecem mais rapidamente quando a própria é maior. Isso, juntamente com a expectativa de que a maioria das fontes de poeira circumplanetárias estejam em baixas inclinações, implica que as inclinações são pequenas durante a maior parte da vida das partículas.

## 4 FORÇA ELETROMAGNÉTICA

Os anéis planetários se situam perto de ambientes caracterizados por uma grande quantidade de partículas carregadas eletricamente que estão presas por campos magnéticos fortes. Imerso neste mar de partículas, um grão de poeira nos anéis rapidamente adquire uma carga elétrica por vários mecanismos ao interagir com as partículas carregadas, sendo os mais importantes os carregamentos por elétrons e íons que ocorrem à medida que o grão varre essas regiões carregadas. Grãos descarregados irão adquirir carga negativas e conseqüentemente atrair cargas positivas até que o equilíbrio seja atingido. Para típicos parâmetros magnetosféricos e partículas micrométricas, o equilíbrio é estabelecido em uma fração de um período orbital (BURNS; HAMILTON; SHOWALTER, 2001).

Ainda que a carga atinja o equilíbrio haverá algumas variações que podem ocorrer gradativamente conforme o grão orbita regiões carregadas. Entretanto, as variações estocásticas da carga do grão, que são geralmente relativamente pequenas em relação à carga de equilíbrio, ocorrem rapidamente e geralmente é uma boa aproximação assumir que a carga de equilíbrio em um grão é constante (HORANYI; BURNS; HAMILTON, 1992). Em nosso estudo focaremos nos efeitos da força de Lorentz de primeira ordem, e por simplificação consideraremos apenas os grãos que já atingiram o equilíbrio e desta forma trabalharemos com grãos com cargas constantes.

O campo magnético planetário não é responsável apenas por aprisionar os elétrons e íons que carregam um grão de poeira, mas também por resultar em uma perturbação orbital sofrida por tais grãos. A força eletromagnética resultante do movimento de partículas carregadas em relação ao campo magnético planetário pode ser bastante forte. Em particular, com cargas elétricas, as partículas menores que uma fração de um micrometro de raio são mais fortemente afetadas pelo eletromagnetismo do que pela gravidade, causando variações na excentricidade e na inclinação das partículas (HAMILTON, 1993). A variação do argumento do pericentro e a longitude do nodo dependem da excentricidade, inclinação e também do semieixo maior. Diferente do achatamento planetário, a taxa de variação não é constante no tempo e irá mudar consideravelmente dependendo da inclinação, tamanho e formato da órbita.

Neste capítulo iniciaremos nossos estudos fazendo considerações para obter a força eletromagnética em função do campo magnético em um sistema com simetria, com o eixo de rotação e centrado no planeta. Em seguida, descreveremos o potencial magnético do planeta em uma região livre de correntes com a expressão dada pela expansão harmônica esférica. Desenvolveremos então a força devido aos dois primeiros coeficientes com simetria axial do campo magnético (o dipolo e quadrupolo) e faremos um estudo das equações médias devido à força de Lorentz para cada um destes coeficientes. Por fim, faremos uma breve discussão sobre os termos axissimétricos do potencial magnético.



#### 4.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Vamos considerar um grão carregado orbitando através do campo magnético de um planeta sob a perturbação devido à força de Lorentz. Perto do planeta, o campo magnético  $\vec{B}$  gira em taxa de rotação constante do planeta  $\vec{\Omega}_p$  e, em um sistema girando com essa taxa, a força de Lorentz é dada como:

$$\vec{F}_{EM} = q(\vec{v}_{rel}/c \times \vec{B}) \quad (4.1)$$

onde  $q$  é a carga do grão e  $c$  a velocidade da luz, e

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v} - (\vec{\Omega}_p \times \vec{r}) \quad (4.2)$$

sendo que para a partícula a velocidade relativa ao campo magnético  $\vec{v}_{rel}$ ,  $\vec{r}$  a posição relativa do grão ao planeta e  $\vec{v}$  a velocidade relativa ao sistema de coordenadas inercial.

Empregando a relatividade especial para transformar a força de volta ao sistema inercial, descobrimos que ela é inalterada para a primeira ordem em  $v/c$  e, portanto,

$$\vec{F}_{EM} = \frac{q}{c}([\vec{v} - (\vec{\Omega}_p \times \vec{r})] \times \vec{B}), \quad (4.3)$$

sendo a segunda componente da equação (4.3) é  $q\vec{E}$ , sendo  $\vec{E} = -\frac{1}{c}(\vec{\Omega}_p \times \vec{r}) \times \vec{B}$  o chamado campo elétrico corrotacional que atua para acelerar grãos carregados através de linhas de campo magnético.

Existem várias maneiras para expressar a razão carga-massa  $q/m_g$ , como em  $C/kg$  (NORTHROP; HILL, 1982a) ou em  $statCoulomb/g$  (MITCHELL; HORÁNYI; HOWARD, 2003). Entretanto escolhemos por expressar o potencial de grãos medido em Volts, por ser constante para grãos de poeira de tamanhos diferentes além de ser uma escolha mais comum (Schaffer e Burns (1992); Consolmagno (1983)). Neste caso consideramos  $\beta_L = q/m_g c$ , a carga dividida pela massa do grão e a velocidade da luz, para grãos esféricos de raio  $b$  e densidade  $\rho$  mantidos no potencial  $V$ , temos que  $\beta_L = 2,6 \times 10^{-14} V/(b^2 \rho)$  em unidades de  $cgs$  e  $V$  em volts.

O campo magnético de um planeta é responsável não somente por prender os elétrons e os íons que carregam os grãos, mas também por causar perturbações nas órbitas destas partículas. Ao descrever um campo magnético avaliado em uma região livre de corrente, que é a nossa região de interesse neste trabalho, a única restrição restante que deve ser satisfeita é a equação de Maxwell ( $\nabla \cdot \vec{B} = \vec{0}$ ), de forma que o campo magnético pode ser derivado do potencial escalar magnético  $\Phi$ , como  $\vec{B} = -\nabla\Phi$ , portanto fazendo  $\nabla \times \vec{B} = \vec{0}$  automaticamente obtemos a equação de Laplace  $\nabla^2\Phi = 0$  cuja solução dada nas componentes  $j$  e  $k$  do potencial escalar magnético no sistema girante com o planeta é dada pela expansão harmônica esférica:

$$\Phi_{j,k} = R_p \left( \frac{R_p}{r} \right)^{j+1} [g_{j,k} \cos(k\phi_R) + h_{j,k} \sin(k\phi_R)] P_j^k(\cos\theta), \quad (4.4)$$

onde  $j$  é um inteiro variando entre zero e infinito,  $k$  é um inteiro variando de zero até  $j$  e sendo ( $\phi_R = \phi - \Omega_p t$ ) no qual  $\Omega_p$  é a velocidade de rotação do planeta. As variáveis com o subscrito  $R$  denotam o sistema de coordenadas girantes, enquanto os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  são coordenadas esféricas dadas no sistema inercial. Os termos  $P_j^k(x)$  são as funções associadas de Legendre, definidas por:

$$P_j^k(x) = N_{j,k} (1-x^2)^{k/2} \frac{d^k}{dx^k} P_j(x), \quad (4.5)$$

e os termos  $P_j(x)$  são funções de Legendre dadas como:

$$P_j(x) = \frac{1}{j! 2^j} \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j. \quad (4.6)$$

As constantes de normalização na equação 4.5 são:

$$N_{j,k} = \begin{cases} 1, & k = 0. \\ \left[ 2 \frac{(j-k)!}{(j+k)!} \right]^{1/2}, & k \neq 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Os coeficientes  $g_{j,k}$  e  $h_{j,k}$  do campo magnético nas unidades de Gauss, podem ser determinados para cada um dos planetas, através de observações. Por conveniência, reproduzimos os coeficientes internos e as taxas de rotação planetárias, juntamente com uma lista de referências na tabela 4.1 extraída de Schaffer e Burns (1992) e a magnitude da força da Lorentz dependerá diretamente dos valores desses coeficientes.

As contribuições no campo magnético das componentes  $j$  e  $k$  do potencial são

$$B_{j,k} = -\nabla \Phi_{j,k}, \quad (4.8)$$

enquanto o campo total no sistema girante é obtido somando todas as componentes individuais de maneira que:

$$B = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^j B_{j,k}. \quad (4.9)$$

Podemos definir uma constante adimensional  $L$  que representa a razão da força de Lorentz pela força da gravidade do planeta, comparando assim a maior contribuição da força de Lorentz com a força

Tabela 4.1 – Coeficiente Harmônico esférico do campo magnético. Nota: Os coeficientes estão em gauss. As taxas de rotação planetária são consideradas iguais às do campo magnético.

Coeficiente	Jupiter	Saturno	Urano	Netuno
$g_{1,0}$	+4.092	+0.2154	+0.1189	+0.0973
$g_{1,1}$	-0.494		+0.1158	+0.0322
$g_{2,0}$	-0.033	+0.0164	-0.0603	+0.0745
$g_{2,1}$	-0.871		-0.1259	+0.0066
$g_{2,2}$	+0.323		+0.0020	+0.0450
$g_{3,0}$	-0.113	+0.0274	+0.0271	-0.0659
$g_{3,1}$	-0.718		+0.0119	+0.0410
$g_{3,2}$	+0.245		-0.048	-0.0358
$g_{3,3}$	-0.172		-0.0241	+0.0048
$h_{1,0}$	+0.000		+0.000	+0.000
$h_{1,1}$	+0.533		-0.1568	-0.0989
$h_{2,0}$	+0.000		+0.000	+0.000
$h_{2,1}$	-0.108		+0.0612	+0.1123
$h_{2,2}$	-0.448		+0.0476	-0.0007
$h_{3,0}$	+0.000		+0.000	+0.000
$h_{3,1}$	-0.072		-0.0710	-0.03367
$h_{3,2}$	-0.186		-0.0162	+0.0179
$h_{3,3}$	-0.066		-0.0261	-0.0077
$\Omega$ (rad/sec)	$1.7586 \times 10^{-4}$	$1.6375 \times 10^{-4}$	$1.0124 \times 10^{-4}$	$1.0834 \times 10^{-4}$

Fonte: (SCHAFFER; BURNS, 1992)

gravitacional na perturbação orbital de um grão. Considerando o termo assimétrico ( $k = 0$ ) mais forte ( $j = 1$ ) do campo magnético ( $g_{1,0}$ ), no plano equatorial ( $\theta = 90^\circ$ ) com  $\vec{v} = \vec{0}$ , temos

$$L = \frac{qg_{1,0}R_p^3\Omega_p}{c\mu m_g}, \quad (4.10)$$

onde  $\mu = GM_p$ . Como pode ser observado, a definição deste parâmetro é independente da distância ao planeta, mas depende das propriedades do grão ( massa e carga  $q/m_g$ ) e das propriedades do ambiente onde esta partícula está localizada (massa e velocidade de rotação do planeta e a força de dipolo).

O sinal de  $L$  depende do produto das duas quantidades  $q$  e  $g_{1,0}$ . Para todos os planetas gigantes, o polo norte magnético está no hemisfério norte e portanto,  $g_{1,0} > 0$ . No entanto, para a Terra na época atual,  $g_{1,0} < 0$  e os pólos magnéticos e geográficos estão em hemisférios opostos.

A força de Lorentz pode ser tratada como uma força perturbativa para grãos que satisfazem  $L \ll 1$ , de forma que a evolução orbital das partículas podem ser tratadas como uma órbita kepleriana perturbada. Este caso é aplicável para potenciais de grãos típicos de alguns volts e tamanhos de raios maiores que vários décimos de um micrón, que são os casos de anéis planetários. Por outro lado, quando  $L \gg 1$ , esses grãos altamente carregados são efetivamente partículas de plasma que giram junto ao campo magnético do planeta (BURNS; HAMILTON; SHOWALTER, 2001).

### 4.1.1 O Dipolo Alinhado

Primeiramente discutiremos os efeitos da força de Lorentz dada pelo termo assimétrico ( $k=0$ ) da expansão do campo magnético expressados pelas equações (4.4) e (4.8). Da expansão do potencial magnético, o termo  $j = 1$  é o mais forte e portanto focaremos nele de início de estudos e aplicações.

O campo magnético produzido pelo termo  $g_{1,0}$  é um dipolo alinhado com o eixo de rotação e é dado pelas seguintes componentes esféricas (HAMILTON, 1993):

$$B_r = 2g_{1,0} \left( \frac{R_p}{r} \right)^3 \cos\theta, \quad (4.11a)$$

$$B_\theta = g_{1,0} \left( \frac{R_p}{r} \right)^3 \sin\theta, \quad (4.11b)$$

$$B_\phi = 0. \quad (4.11c)$$

Como utilizamos o pacote Rebound é necessário convertê-las para as coordenadas cartesianas:

$$B_x = (\sin\theta \cos\phi)B_r + (\cos\theta \cos\phi)B_\theta, \quad (4.12a)$$

$$B_y = (\sin\theta \sin\phi)B_r + (\cos\theta \sin\phi)B_\theta, \quad (4.12b)$$

$$B_z = (\cos\theta)B_r - (\sin\theta)B_\theta, \quad (4.12c)$$

onde o ângulo polar é  $\theta = \arccos(z_g/r_p)$  e o ângulo azimutal  $\phi = \arctan(y_g/x_g)$ . As posições cartesianas da partícula são  $(x_g, y_g, z_g)$  e  $r_p$  é a posição relativa da partícula ao planeta.

Considerando a velocidade de rotação do planeta no eixo  $\hat{z}$  ( $\vec{\Omega}_p = \Omega_p \hat{z}$ ), a força de Lorentz (equação 4.1) que atua na partícula em coordenadas cartesianas é dada por:

$$F_x = (q/C) [ (\dot{y}_g - x_g \Omega_p) B_z - \dot{z}_g B_y ], \quad (4.13a)$$

$$F_y = (q/C) [ - (\dot{x}_g - y_g \Omega_p) B_z + \dot{z}_g B_x ], \quad (4.13b)$$

$$F_z = (q/C) [ (\dot{x}_g - y_g \Omega_p) B_y - (\dot{y}_g - x_g \Omega_p) B_x ]. \quad (4.13c)$$

em que  $\dot{x}_g$ ,  $\dot{y}_g$  e  $\dot{z}_g$  são as componentes da velocidade da partícula.

#### 4.1.1.1 Equações médias

Substituindo as equações 4.11a-c nas equações de Lagrange para a variação média dos elementos orbitais no tempo tem-se (HAMILTON, 1993):

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle_{g_{1,0}} = 0, \quad (4.14a)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle_{g_{1,0}} = -\frac{nL}{4}e(1-e^2)^{1/2}\text{sen}^2I \text{sen}2\omega, \quad (4.14b)$$

$$\left\langle \frac{dI}{dt} \right\rangle_{g_{1,0}} = \frac{nL}{4(1-e^2)^{1/2}}e^2\text{sen}^2I \cos I \text{sen}2\omega, \quad (4.14c)$$

$$\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle_{g_{1,0}} = \frac{nL}{(1-e^2)^{1/2}} \left[ \cos I - \frac{1}{(1-e^2)} \left( \frac{n}{\Omega_p} \right) \right], \quad (4.14d)$$

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle_{g_{1,0}} = \frac{nL}{(1-e^2)^{1/2}} \left[ -\cos^2 I + \frac{3\cos I}{(1-e^2)} \left( \frac{n}{\Omega_p} \right) \right], \quad (4.14e)$$

$$\left\langle \frac{dM}{dt} - n \right\rangle_{g_{1,0}} = -2nL, \quad (4.14f)$$

Quando consideramos uma órbita planar ( $I = 0^\circ$ ), as variações da excentricidade e inclinação devido a força eletromagnética será zero. Desta forma, a força eletromagnética gera uma taxa de variação constante no argumento do pericentro e na longitude do nodo, devido ao fato da excentricidade e inclinação serem constantes no tempo. Portando, para baixas inclinações e excentricidades, o efeito do campo magnético de dipolo do planeta não é diferente do campo gravitacional de quadrupolo ( $J_2$ ), pois ambas as forças causam precessões, de forma que as taxas de precessão são dependentes da inclinação, excentricidade e do semi-eixo maior. Diferente do caso gravitacional, as taxas da força eletromagnética variam consideravelmente em relação uma à outra para órbitas circulares de diferentes tamanhos próximas ao plano equatorial. Próximo à órbita síncrona ( $n = \Omega_p$ ) a taxa do nodo desaparece, da mesma maneira, mais longe do planeta perto de  $3n = \Omega_p$  a taxa de variação do argumento do pericentro é zero.

#### 4.1.2 O Quadrupolo Alinhado

Como no caso gravitacional, a inclusão dos termos de ordem superior com simetria axial ( $k = 0$ ) na expansão do campo magnético requer que os termos de ordem inferior sejam tratados com cautela. Por isso, iniciamos nossos cálculos com os termos de dipolo e quando os termos de ordem superior, como quadrupolo, forem incluídos eles serão uma adição aos termos daquele.

O termo de quadrupolo tem bastante influência na dinâmica orbital devido à sua simetria axial, sua importância se deve ao fato de que esta componente é primariamente radial e sua magnitude na verdade excede o campo dipolar radial para órbitas com pequena inclinação. Quando transversal à velocidade, o campo radial produz uma força normal forte que perturba a inclinação, nodo e pericentro (HAMILTON, 1993).

A componente radial  $B_r$  do campo dado pelo quadrupolo é:

$$B_r = \frac{3}{2}g_{2,0} \left( \frac{R_p}{r} \right)^4 (3\cos^2\theta - 1). \quad (4.15)$$

Da mesma forma que fizemos para o dipolo, introduzimos este campo produzido pelo quadrupolo na equação da força 4.1 e a força dada por cada uma das componentes cartesianas terá a mesma forma da equação 4.13, o que altera são as componentes cartesianas do campo magnético

$$B_x = (\sin\theta \cos\Phi)B_r, \quad (4.16a)$$

$$B_y = (\sin\theta \sin\Phi)B_r, \quad (4.16b)$$

$$B_z = (\cos\theta)B_r. \quad (4.16c)$$

#### 4.1.2.1 Equações médias

Inserindo a equação (4.15) nas equações de Lagrange da perturbação planetária tem-se o quadrupolo (HAMILTON, 1993):

$$\left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle_{g_{2,0}} \approx \frac{3}{2}nL \left( \frac{g_{2,0}}{g_{1,0}} \right) \left( \frac{R_p}{a} \right) \left( \frac{n}{\Omega_p} \right) \left( \frac{e \cos\omega}{(1-e^2)^{5/2}} \right), \quad (4.17a)$$

$$\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle_{g_{2,0}} \approx \frac{\tan\omega}{\sin I} \left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle_{g_{2,0}}, \quad (4.17b)$$

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle_{g_{2,0}} \approx -\cos I \left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle_{g_{2,0}}, \quad (4.17c)$$

onde o sinal  $\approx$  indica que estas equações representam apenas uma parte nas perturbações devidas ao quadrupolo. No limite de baixas inclinações orbitais as perturbações adicionais do quadrupolo são insignificantes quando comparadas aos efeitos do dipolo alinhado.

#### 4.1.3 Termos axissimétricos

Em nosso estudo não iremos aplicar os termos não simétricos axialmente, mas nesta seção faremos uma breve discussão de sua importância. Nas seções anteriores, foram ignorados os termos sem simetria axial ( $k \neq 0$ ) da expressão do campo magnético, o que é uma boa aproximação do potencial quando tratamos a força de Lorentz, principalmente no caso de Saturno que possui o campo magnético quase perfeitamente alinhado.

Os termos assimétricos são mais difíceis de serem tratados, isso porque a rotação do planeta faz com que a orientação do campo mude rapidamente. Tipicamente, o período de rotação do planeta é comparável com o período orbital para uma órbita interna; para esse tipo de órbita não há um intervalo único sobre o qual é possível fazer a média. Em contrapartida, órbitas distantes possuem períodos que são tão longos que é possível calcular a média do campo magnético primeiro sobre um único período de rotação e depois sobre o movimento orbital. Seguindo este procedimento, é possível encontrar que todos os termos assimétricos da equação 4.4 em média são zero, portanto não contribuem na evolução orbital do grão neste limite.

Finalmente, é possível que haja uma tendência em ignorar os termos de simetria não axial, mesmo nos casos de órbitas internas, mais próximas ao planeta, com o argumento de que esses termos

causam apenas pequenas oscilações periódicas. Para a maioria das órbitas, essa é de fato uma boa aproximação, mas algumas localizações orbitais específicas e frequências de rotação são proporcionais e o processo de média é inválido. Esse é o caso das "*ressonâncias de Lorentz*", que não iremos tratar e consideraremos que as equações médias não são válidas perto dos locais da ressonância.

## 5 SUMARIZAÇÃO DAS FORÇAS

Partículas de poeira em anéis planetários são afetadas por diversas forças, cujas magnitudes relativas variam significativamente de uma situação para outra. Em muitas aplicações, uma única força pode ser dominante sobre as demais e nestes casos o resultado da dinâmica orbital pode ser aproximado negligenciando as outras forças e ainda sim manter uma boa precisão dos resultados. Entretanto, em algumas situações, várias perturbações orbitais são similares em magnitude, o que complica bastante a dinâmica orbital resultante.

Sabemos, pelas seções anteriores, os efeitos que cada uma das forças causa na evolução orbital das partículas, como na Figura 5.1. Como analisado, o achatamento causa uma precessão do pericentro enquanto a força eletromagnética pode causar uma regressão. Já a força da pressão de radiação solar altera a excentricidade da órbita e as forças de arrasto, tal como a de Poynting-Robertson, e diminuem o semieixo maior da partícula. A combinação desses efeitos pode gerar efeitos interessantes, como no caso onde a força eletromagnética e a força devido ao achatamento são equiparáveis, a variação que ambas causam no pericentro podem gerar orbitais congeladas (mostraremos esses efeitos no capítulo de resultados). Além disto, essas variações no pericentro podem fazer com que a velocidade das partículas fique mais ou menos tempo paralelas à direção de incidência do Sol, ocasionando em uma diminuição ou uma maior excitação na excentricidade das partículas devido a força de radiação solar. Portanto além de entender em quais regiões certas forças podem ser negligenciadas, também é importante sabermos onde elas são comparáveis e capazes de juntas modificarem completamente a órbita.

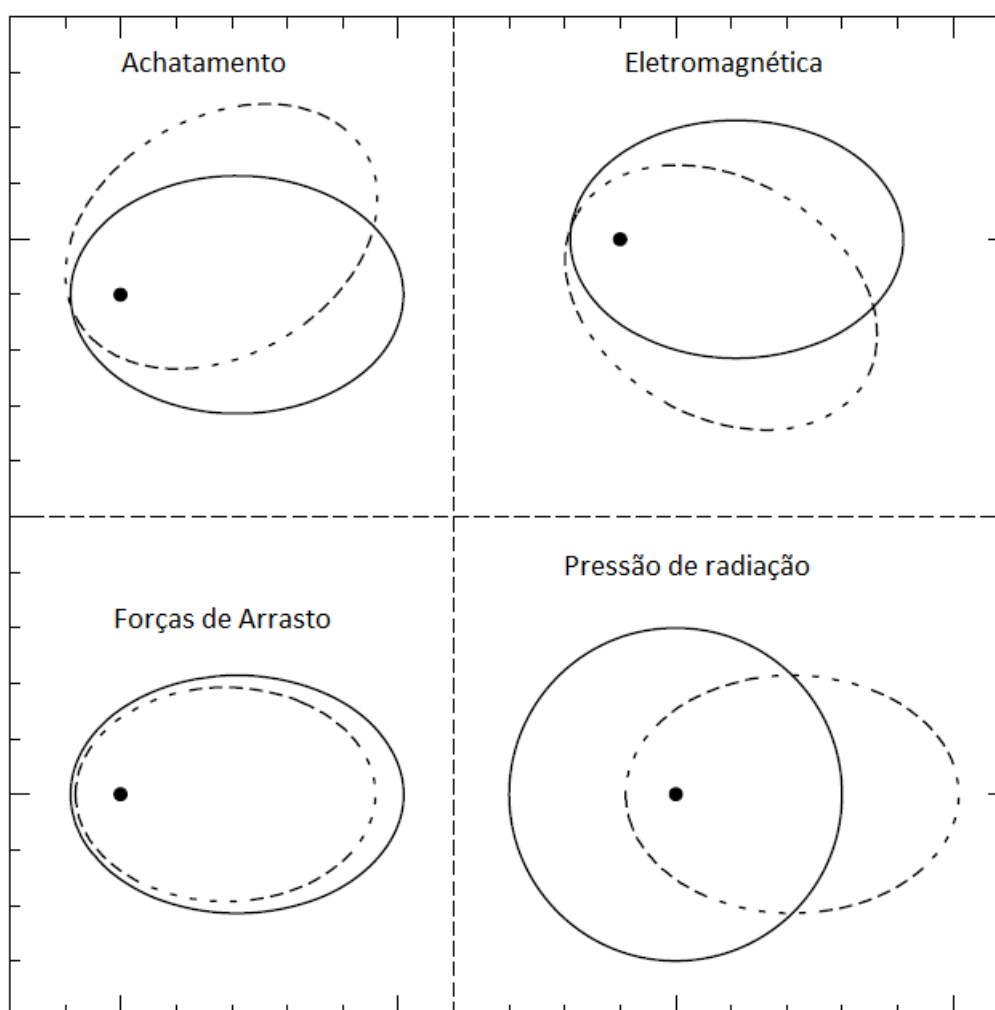
Quando aplicamos cada uma destas forças é interessante tentarmos entender quais serão as principais perturbações na órbita de uma partícula em uma determinada região. Muitas vezes os efeitos de uma força podem ser tão dominantes que as variações na órbita por outras perturbações podem nem ao menos ser evidentes. Para estes casos, certas forças poderiam ser negligenciadas e o esforço para realizar os cálculos ou, até mesmo, o processamento computacional poderia ter sido evitado. Outro caso é quando todas as forças são incluídas e é difícil analisar o porquê dessas forças separadas não causarem grandes perturbações, mas juntas alterarem muito a órbita. Para estas situações é interessante saber qual é a ordem de diferenças entre as forças ou se são iguais na região de interesse de um determinado sistema.

Nesta seção iremos definir alguns parâmetros em função da distância para cada uma das forças e então gerar um gráfico onde podemos facilmente comparar a magnitude de cada uma das forças. Para tornar o problema mais fácil de ser trabalhado, nos limitamos ao problema planar, isso é, assumimos que o movimento orbital está confinado a duas dimensões espaciais. Também assumimos que os planetas estão em órbita circular em torno do Sol e a média das perturbações para a órbita de um grão de poeira ao longo de uma órbita sobre o planeta.

Realizando a abordagem feita em Hamilton e Krivov (1996), realizaremos uma comparação das forças em função de suas distâncias do planeta. Para cada uma das forças perturbativas iremos introduzir um parâmetro adimensional que descreve a magnitude de cada uma das forças comparadas à força gravitacional do planeta.



Figura 5.1 – Esboço de como a órbita é afetada sob quatro diferentes perturbações: achatamento planetário, força eletromagnética do dipolo, pressão de radiação e arrasto.



Fonte: (BURNS; HAMILTON; SHOWALTER, 2001)

Inicialmente definiremos o parâmetro para uma força que não foi discutida nos capítulos anteriores, que é a força gravitacional do Sol. Faremos isto para que possamos comparar com a outras forças, já discutidas, e mostrar que, para os casos que aplicamos, essa força pode ser negligenciada. Portanto, para a força gravitacional solar, foi definido o *parâmetro A* como (HAMILTON; KRIVOV, 1996):

$$A \equiv \frac{3 n_{\odot}}{4 n} \quad (5.1)$$

onde  $n = (GM/a^3)^{1/2}$  é o movimento médio da partícula,  $n_{\odot}$  o movimento médio do planeta ao redor do Sol e  $GM$  é a constante gravitacional do planeta. A gravidade do Sol influencia o movimento dos grãos planetários ao transmitir acelerações desiguais ao planeta central e a uma partícula próxima. Essa força está diretamente relacionada com a distância do planeta ao Sol, portanto planetas mais distantes têm essa força cerca de  $\sim 1000$  vezes mais fracas. Este é um dos motivos pelo qual não abordamos mais profundamente neste trabalho, pois estamos particularmente interessados em sistemas de anéis próximos aos planetas gasosos. Nestes casos as partículas estão distantes do Sol e próximas ao

planeta, de forma que outras forças serão mais importantes e, portanto podemos negligenciar a força gravitacional solar.

Para a pressão de radiação, introduzimos o *parâmetro radiativo*  $C$ . Assumimos grãos esféricos com densidade uniforme e propriedades de espalhamento ideais. Com isso temos:

$$C \equiv \frac{3}{4} \frac{n_{\odot}}{n} \sigma \quad (5.2)$$

onde  $\sigma$  é a razão da força de pressão de radiação com a gravidade do planeta para uma órbita circular a uma distância  $a$ . Este parâmetro é equivalente a  $\alpha/n_{\odot}$  que é a notação utilizada em Hamilton (1993).

$$\sigma = \frac{F_{rp}}{F_{gr}} = \frac{3}{4} Q_{pr} \frac{\Phi a^2}{GMc\rho_g r_g} \quad (5.3)$$

sendo  $Q_{pr}$  o fator de eficiência da pressão de radiação,  $\Phi$  é o fluxo solar calculado na distância heliocêntrica do planeta,  $c$  é a velocidade da luz, e  $r_g$  e  $\rho_g$  são o raio e a densidade da partícula, respectivamente.

A perturbação dominante na expansão multipolar da distribuição de massa não esférica de um planeta é o termo de quadrupolo axissimétrico  $J_2$ . Negligenciamos todos os outros termos da expansão multipolar e definimos o *parâmetro de achatamento*  $W$ :

$$W \equiv \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R}{a} \right)^2 \frac{n}{n_{\odot}} \quad (5.4)$$

Já força eletromagnética em partículas surge da velocidade relativa entre um grão carregado de poeira e o campo magnético planetário girando. Definimos o *parâmetro de Lorentz*  $L_{\Omega}$  assumindo que o grão de poeira mantém uma carga constante e que o campo magnético é dipolar. Neste caso temos:

$$L_{\Omega} \equiv 2 \frac{n}{n_{\odot}} \frac{n}{\Omega_p} L, \quad (5.5)$$

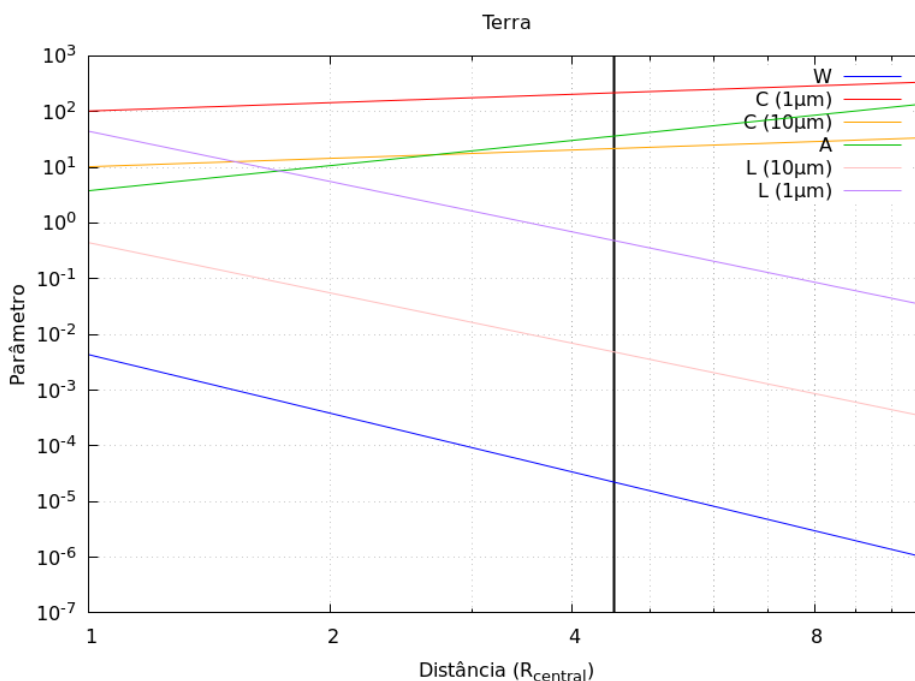
onde  $\Omega_p$  é a velocidade de rotação do planeta, e  $L$  é o parâmetro definido em Hamilton (1993) que definimos na equação 4.10 como:

$$L = \frac{qg_{1,0}R_p^3\Omega_p}{c\mu m_g}, \quad (5.6)$$

Fisicamente o parâmetro  $|L|$  é a razão da força de Lorentz com a força gravitacional, calculado para uma partícula localizada no plano equatorial sob a influência apenas do dipolo. Entretanto  $L$  é independente da distância da partícula com o planeta, por isto definimos o parâmetro  $L_{\Omega}$  porque ele depende da distância.

Então podemos utilizar os parâmetros das forças e fazer o gráfico como funções da distância à cada um dos planetas, que iremos estudar neste trabalho.

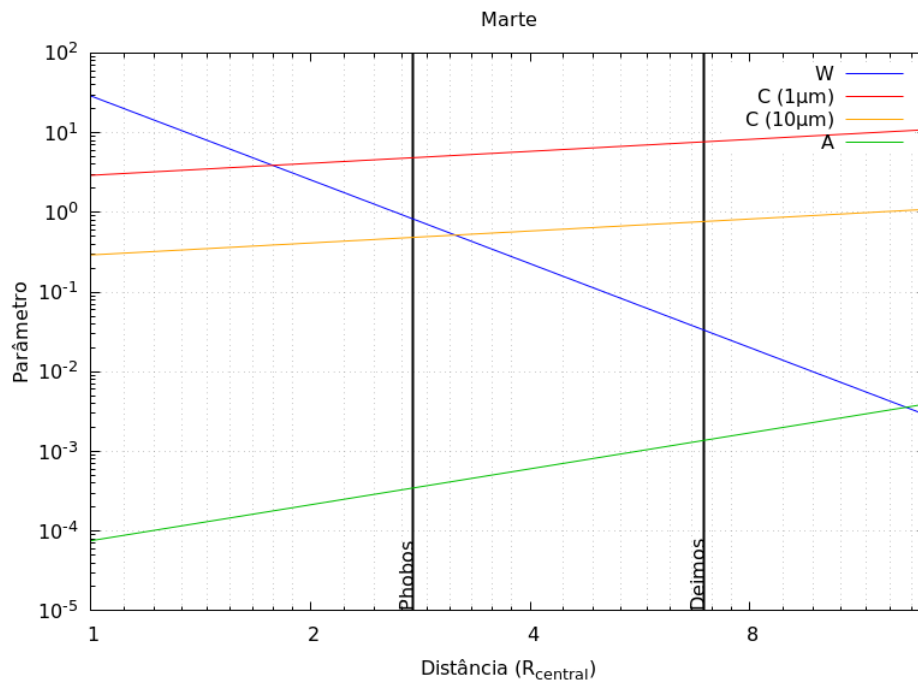
Figura 5.2 – Gráfico dos parâmetros de força adimensional da Terra. Cada linha horizontal apresenta os valores numéricos dos quatro parâmetros de perturbação em função da distância. Assumimos densidade  $\rho_g = 1\text{ g cm}^{-3}$  e carregada com  $\Phi_g = -5\text{ V}$ . A linha vertical representa a localização de uma partícula estável lançada nesta região que será apresentada na seção 7.5.



Fonte: Produção do próprio autor

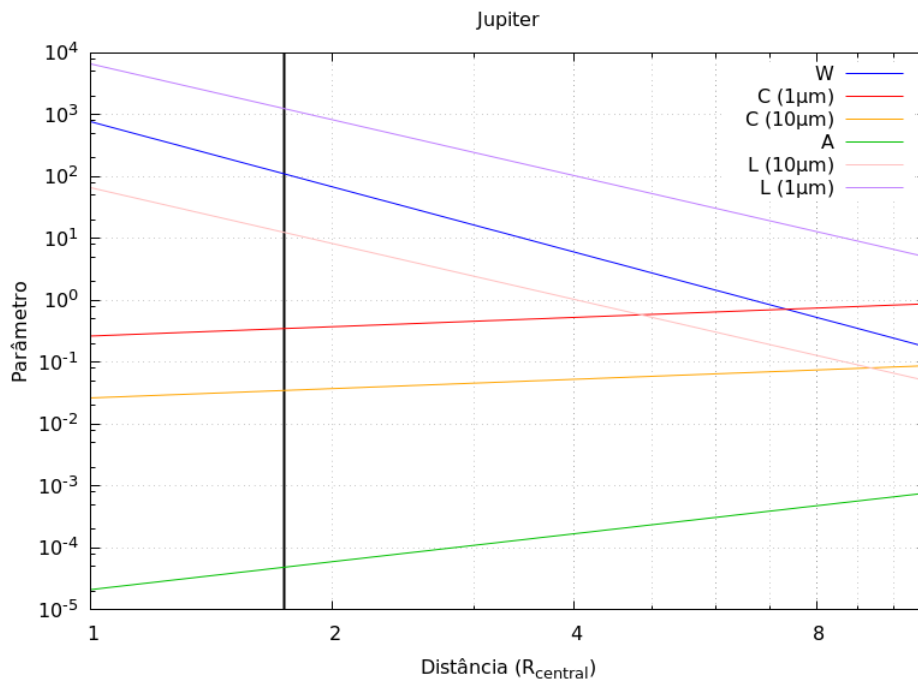
Para todos os planetas, tanto a força eletromagnética quanto a força do achatamento planetário decaem rapidamente com o aumento da distância. Em contraste, a pressão de radiação e a força gravitacional solar são perturbações mais fortes em regiões distantes do planeta. Esse comportamento evidencia quais são as forças causadas pelo Sol e quais são causadas pelo planeta. As forças causadas pelo planeta obviamente irão diminuir com a distância, que é o que acontece com a força eletromagnética e do achatamento planetário. Contrário às outras forças que passam a crescer com a distância ao planeta, pois quanto mais longe, menos o movimento orbital da partícula será influenciado pelo planeta.

Figura 5.3 – Gráfico dos parâmetros de força adimensional de Marte. Cada linha horizontal apresenta os valores numéricos dos quatro parâmetros de perturbação em função da distância. Assumimos densidade  $\rho_g = 2\text{g cm}^{-3}$ . As linhas verticais representam a localização dos satélites Phobos e Deimos. Simularemos partículas nestas distâncias na seção 7.4.



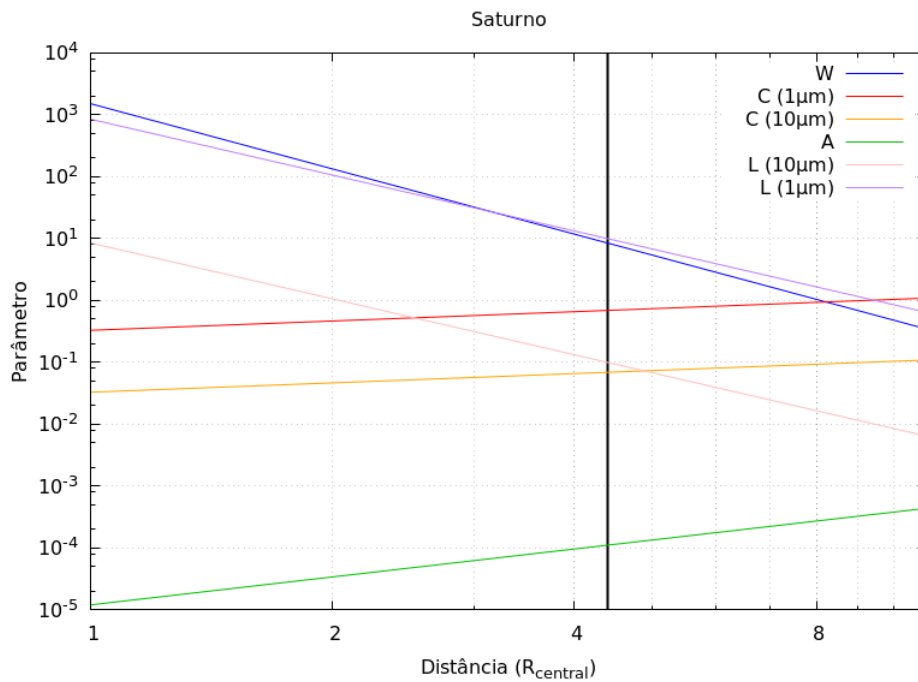
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 5.4 – Gráfico dos parâmetros de força adimensional de Júpiter. Cada linha horizontal apresenta os valores numéricos dos quatro parâmetros de perturbação em função da distância. Assumimos densidade  $\rho_g = 1 \text{ g cm}^{-3}$  e carregada com  $\Phi_g = 5 \text{ V}$ . A linha vertical representa a localização de uma partícula estável lançada nesta região que será apresentada na seção 7.5.



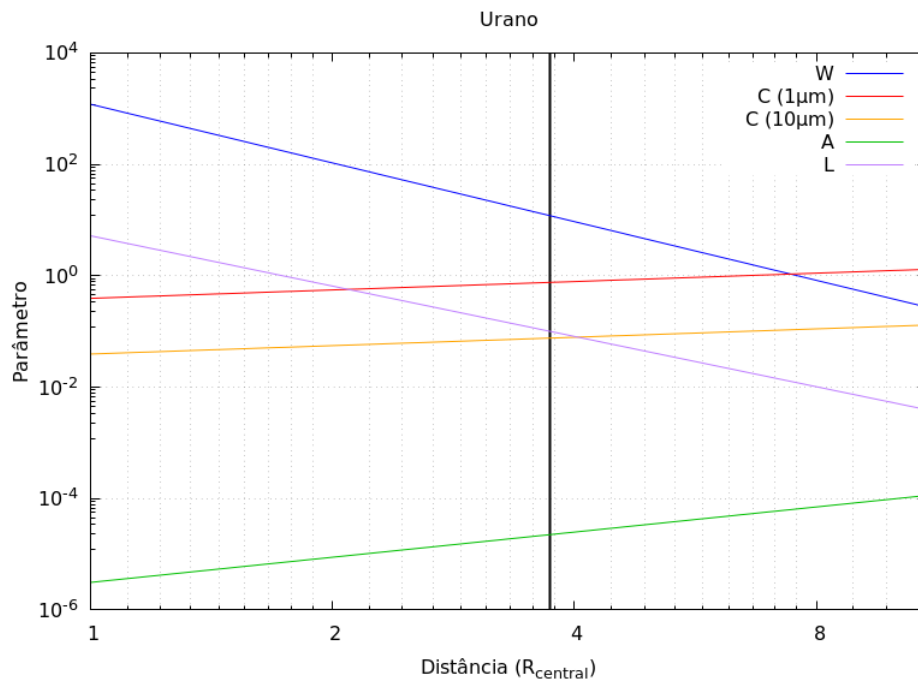
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 5.5 – Gráfico dos parâmetros de força adimensional de Saturno. As linhas horizontais apresentam os valores numéricos dos quatro parâmetros de perturbação em função da distância. Assumimos densidade  $\rho_g = 1 \text{ g cm}^{-3}$  e carregada com  $\Phi_g = 5 \text{ V}$ . A linha vertical representa a localização do anel E, a o estudo de uma partícula sob a influência das forças eletromagnética, achatamento planetário e pressão de radiação está na seção 7.6.



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 5.6 – Gráfico dos parâmetros de força adimensional de Urano. Cada linha horizontal apresenta os valores numéricos dos quatro parâmetros de perturbação em função da distância. Assumimos densidade  $\rho_g = 1\text{g cm}^{-3}$  e carregada com  $\Phi_g = 200\text{V}$ . A linha vertical representa o pico do anel  $\mu$  de Urano, de onde foram lançadas algumas partículas no capítulo 7.



Fonte: Produção do próprio autor

## 6 REBOUND

O REBOUND é um integrador N-corpos de código aberto e foi desenvolvido com o propósito inicial de analisar colisões, como as que ocorrem em anéis planetários (REIN; LIU, 2012). Com o contínuo desenvolvimento e novas implementações, o programa passou a ser uma poderosa ferramenta de estudos desde uma simples análise numérica até grandes ambientes para realização de experimentos virtuais complexos no âmbito da dinâmica orbital.

Esse software é capaz de integrar o movimento de partículas sob a influência da gravidade, podendo essas partículas representarem estrelas, planetas, satélites, cometas ou partículas de poeira. É uma ótima ferramenta no estudo de anéis planetários, pois pode lidar com forças conservativas e não conservativas, também com encontros próximos entre partículas e órbitas de alta excentricidade mantendo os erros sistemáticos abaixo da precisão de máquina (REIN; SPIEGEL, 2015).

O pacote é escrito em C e oferece diversos algoritmos de integração o que facilita a adaptação de condições iniciais e possui um bom desempenho, além de ser bastante flexível, podendo ser customizado para ser mais preciso e eficiente.

Para realizar este processo, primeiro é necessário entender a estrutura do REBOUND, como qual a linguagem ele é escrito, qual plataforma ele pode ser executado e quais as bibliotecas ele suporta. Então, para que possamos entender quais implicações poderão surgir ao adicionamos uma força externa (seção 6.2). Por fim, mostraremos onde implementamos a biblioteca, como o usuário poderá utilizá-la e quais as funções disponíveis (6.3).

### 6.1 ESTRUTURA DO REBOUND

O código fonte do REBOUND está hospedado na plataforma do github e está disponível gratuitamente sob a licença de código aberto GPLv3. O REBOUND é escrito inteiramente em C e está em conformidade com o padrão ISO C99. Ele compila e roda em qualquer plataforma de computador que suporte o padrão POSIX, como Linux, Unix e Mac OSX. O pacote também possui suporte ao OpenGL e o GLUT, que são bibliotecas que permitem visualizações 3D interativas e em tempo real. Também possui paralelização OpenMP em sistemas de memória compartilhada. O programa suporta a paralelização híbrida usando o OpenMP e o MPI simultaneamente (REIN; SPIEGEL, 2015).

Em sua forma mais simples, o REBOUND não requer bibliotecas externas para compilar. Entretanto o que faremos será criar uma que resolve forças perturbativas em anéis planetários, então precisamos realizar uma modificação no padrão de compilação do REBOUND.

O REBOUND é modular, possuindo diferentes algoritmos para resolver cada um dos problemas durante as integrações numéricas. Desta forma, o usuário tem a escolha entre diferentes módulos para os cálculos da gravidade, colisão, condições de contorno e método de integração, sendo possível também a implementação de novos módulos. Para realizar a compilação destes módulos é utilizado um arquivo chamado *makefile*, que é responsável por definir as regras de compilação do pacote de software. O texto contido no *makefile* é responsável por fazer uma ligação (*linking*) ou uma montagem dos arquivos de projeto, além de outras tarefas como limpeza de arquivos temporários e execução de



comandos. Os links simbólicos são definidos em cada problema. Da mesma forma introduziremos a nossa biblioteca, introduzindo nossas funções como links simbólicos na força externa do REBOUND e a biblioteca deverá ser introduzida no arquivo do *makefile*.

## 6.2 INTEGRADORES

Diversos integradores foram implementados no REBOUND, cada um com propósitos diferentes e precisões diversas, de forma que dependendo da aplicação deve-se analisar se o integrador suporta o problema e se os erros sistemáticos não irão afetar o resultado final. Nessa seção faremos uma discussão geral sobre todos os integradores disponíveis, mas focaremos em um dos principais para nossas aplicações, fazendo um estudo mais profundo.

### **REB\_INTEGRATOR\_IAS15:**

O IAS15 é um integrador de 15<sup>a</sup> ordem com controle adaptativo do tamanho de passo. É um integrador com ordem muito elevada e não simplético que pode trabalhar com forças arbitrárias (dependentes ou não da velocidade) e é na maioria dos casos com precisão abaixo da precisão da máquina. Além do IAS15 poder integrar equações variacionais (REIN; SPIEGEL, 2015).

### **REB\_INTEGRATOR\_WHFAST:**

O WHFast é o integrador de segunda ordem Wisdom Holman com corretores simpléticos de 11<sup>a</sup> ordem. É extremamente rápido e preciso, usa as funções de Gauss f e g para resolver movimento Kepleriano e pode integrar equações variacionais (REIN; TAMAYO, 2015).

### **REB\_INTEGRATOR\_MERCURIUS:**

Um integrador híbrido muito semelhante ao encontrado no MERCURY (CHAMBERS, 2012). Ele usa WHFast para integrações de longo prazo, mas alterna suavemente para o IAS15 para encontros próximos.

### **REB\_INTEGRATOR\_EULER:**

Método de Euler, primeira ordem.

### **REB\_INTEGRATOR\_SEI:**

Integrador de epíciclo simplético (SEI), integrador simplético variável misto para um plano compartilhado (shearing sheet), de segunda ordem (REIN; LIU, 2012).

### **REB\_INTEGRATOR\_JANUS:**

O Janus é um integrador simplético de alta ordem reversível no tempo, usando uma mistura de aritmética de ponto flutuante e inteiro. Esse integrador ainda está em fase experimental e o artigo está em fase de desenvolvimento.

Os integradores de segunda ordem ( *REB\_INTEGRATOR\_LEAPFROG*, *REB\_INTEGRATOR\_SEI* e o *REB\_INTEGRATOR\_WHFAST*) são simpléticos, havendo a dependência de que os sistemas que estão atuando sejam Hamiltonianos. Todos estes integradores seguem o esquema *Drift-Kick-Drift*

(DKD) comumente usado para estes tipos de integradores, mas implementam os três sub-passos de tempo de maneiras diferentes que dependem do integrador. A evolução das partículas são dadas em termos da soma de duas Hamiltonianas  $H = H_1 + H_2$ , em que  $H_1(p)$  é a parte cinética e  $H_2(q)$  como a parte do potencial, sendo  $p$  o momento canônico e  $q$  as coordenadas (REIN; LIU, 2012).

Para estes integradores, o REBOUND utiliza o mesmo passo de tempo, para todas as partículas que deve ser definido pelo usuário e que não se altera durante a simulação. Cabe ao usuário garantir que o intervalo de tempo seja pequeno o suficiente para não afetar os resultados. Isso é especialmente importante para sistemas com grandes quantidades de colisões, nos quais podem ocorrer várias colisões em um mesmo passo de tempo. A maneira mais fácil de garantir a convergência numérica é executar a mesma simulação com diferentes passos de tempo.

Para evitar esses tipos de problemas com a escolha correta do passo de tempo o REBOUND dispõe de um integrador (IAS15) que calcula o passo de tempo para cada simulação e o varia de acordo com a evolução do sistema. Porém os passos de tempo variáveis também quebram a natureza simplética de um integrador. Mas por outro lado, a não simplecticidade do integrador pode ser outro fator positivo, porque existem diversas complicações ao trabalhar com integradores simpléticos. Uma delas é trabalhar com forças não conservativas (que não podem ser descritas por um potencial), como é o de radiação solar que depende da velocidade da partícula e não somente de sua posição. Quando forças não conservativas são incluídas na equação do movimento, o conceito de integrador simplético, que depende do sistema ser Hamiltoniano, é perdida.

Contudo, um dos motivos principais que optamos por utilizar o REBOUND é que o pacote possui o integrador IAS15, sua capacidade em lidar com forças não conservativas e manter a precisão numérica é uma excelente opção para o foco do nosso trabalho, que é estudar como forças perturbativas alteram a órbita de anéis planetários. Por isto, nossas aplicações (cap. 7) serão utilizando o integrador IAS15. Além disto, alguns resultados dados em Rein e Spiegel (2015) mostram que este integrador em diversas aplicações pode manter a precisão numérica com um processamento mais rápido do que utilizando outros pacotes numéricos, como o Mercury, diminuindo o tempo das simulações numéricas.

### 6.2.1 IAS15

O integrador com controle de passo adaptativo que o Rebound disponibiliza é o chamado IAS15, que é de 15<sup>a</sup> ordem de precisão. Ele é baseado no integrador na quadratura de Gauss-Radau (EVERHART, 1985) que suporta forças conservativas e não conservativas, encontros próximos e órbitas de alta excentricidade, mantendo os erros sistemáticos abaixo da precisão de máquina. Testes feitos por Rein e Spiegel (2015) mostraram que este integrador é superior a outros integradores simpléticos em velocidade e precisão.

O principal objetivo do integrado IAS15 é ter um controle de passo adaptativo e atingir uma alta precisão. A principal equação que este integrador tenta resolver é da forma:

$$y'' = F[y', y, t] \quad (6.1)$$

onde  $y''$  é a aceleração da partícula e  $F$  é a função que descreve uma força específica, que pode depender da posição  $y$  da partícula, da velocidade  $y'$  e do tempo  $t$ . Essa equação é geral o suficiente para permitir a dependência de velocidades arbitrárias e de forças não conservativas. Assim, o sistema pode não corresponder a um sistema Hamiltoniano.

O IAS15 realiza uma expansão da equação (6.1) e algumas aproximações para poder estimar a posição e velocidade das partículas. O diferencial deste integrador para realizar aproximações extremamente precisas é que ele faz uso de sub-passos com espaçamentos do tipo Gauss-Radau (espaçamentos equidistantes). O espaçamento de Gauss-Radau está intimamente relacionado com a quadratura Gaussiana padrão que pode ser usada para aproximar uma integral (REIN; SPIEGEL, 2015).

Para obter o valor final das posições e velocidades através do IAS15 é realizada uma estimativa das forças durante o passo de integração, que pode ser considerado como sub-passo que realiza um esquema de previsão e correção da seguinte maneira: primeiro, realiza uma estimativa aproximada para as posições e velocidades para calcular as forças.

O mesmo ocorre quando são incluídas forças externas dependentes da velocidade. É necessário informar por um parâmetro se a força aplicada tem essa dependência, isto porque ela causará uma variação na velocidade do corpo e o integrador pode gerar um erro partindo desta variação. Portanto quando é informado qual o tipo da força, o IAS15 faz uma previsão dos valores de velocidade no intervalo de tempo baseado na variação causada pela força externa e desta forma mantém a precisão do integrador.

### 6.3 FORÇAS ADICIONAIS

O pacote do REBOUND não resolve forças não gravitacionais, mas ele vem preparado para receber uma função externa que introduza este tipo de perturbação na evolução das partículas. Na estrutura da simulação do REBOUND ( *struct reb\_simulation* ) é possível passar como parâmetro qual a função que adiciona uma força não gravitacional utilizando a variável:

```
1 void (*additional_forces)(struct reb_simulation *const r)
```

Essa função é chamada pelo integrador a cada passo de integração, sendo que cada integrador tratará dessa variação da aceleração adicional de uma maneira diferente, por isso também é necessário informar se esta força adicional é dependente da velocidade utilizando o parâmetro da estrutura da simulação:

```
1 unsigned int force_is_velocity_dependent
```

Caso a força adicional dependa da velocidade, como o caso da força de radiação solar e a eletromagnética, é necessário definir essa variável com o valor 1.

### 6.4 BIBLIOTECA DE FERRAMENTAS DE FORÇAS PERTURBATIVAS PARA O REBOUND

Neste trabalho o nosso foco foi desenvolver algoritmos criando funções que possam ser adicionadas ao *additional\_forces* no REBOUND. Para isto criamos uma biblioteca em C que contem um conjunto

de funções que aplicam a força causada pelo achatamento planetário, força de radiação solar e força eletromagnética. Nomeada de *FEG\_TOOLS*, esta biblioteca está disponível, mediante contato, no *Bitbucket* e como baixar a biblioteca é discutido no anexo A. As funções disponíveis na biblioteca para aplicação das forças devido ao achatamento planetário, força de radiação solar e a força eletromagnética e como utilizá-las serão descritas nas seções 6.4.1.1 à 6.4.1.3, respectivamente. Mais detalhes sobre os parâmetros de entrada e variáveis externas das funções estão disponíveis no anexo B.

### 6.4.1 Algoritmos da biblioteca

Todas as forças que foram estudadas nos capítulos anteriores foram traduzidas para a linguagem de programação em C, de forma que possam ser interpretadas pelo REBOUND e sejam aplicadas nas simulações numéricas devido ao achatamento planetário, força de radiação solar e força eletromagnética.

Quais as equações foram utilizadas e quais as funções que contém cada uma delas para todas as forças serão discutidas nas seções a seguir.

#### 6.4.1.1 Algoritmo da força devido ao achatamento planetário

Para implementarmos os algoritmos para o achatamento planetário foi desconsiderada a força gravitacional de um corpo perfeitamente esférico, pois o Rebound já efetua este cálculo por padrão. O termo independente de  $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$  nas equações (2.34) - (2.36) são referentes a força gravitacional de um corpo perfeitamente esférico, portanto nas equações a seguir, iremos desconsiderar os termos da força gravitacional de um corpo esférico. As equações da força para cada uma das componentes cartesianas ficam da seguinte forma:

$$F_x = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ \frac{3}{2} J_2 \frac{R_p^2}{r^2} \left( 1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) - \frac{15}{8} J_4 \frac{R_p^4}{r^4} \left( 1 - 14 \frac{z^2}{r^2} + 21 \frac{z^4}{r^4} \right) + \frac{105}{16} J_6 \frac{R_p^6}{r^6} \left( \frac{1}{3} + 9 \frac{z^2}{r^2} - 33 \frac{z^4}{r^4} + \frac{143z^6}{5r^6} \right) \right] x \quad (6.2)$$

$$F_y = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ \frac{3}{2} J_2 \frac{R_p^2}{r^2} \left( 1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) - \frac{15}{8} J_4 \frac{R_p^4}{r^4} \left( 1 - 14 \frac{z^2}{r^2} + 21 \frac{z^4}{r^4} \right) + \frac{105}{16} J_6 \frac{R_p^6}{r^6} \left( \frac{1}{3} + 9 \frac{z^2}{r^2} - 33 \frac{z^4}{r^4} + \frac{143z^6}{5r^6} \right) \right] y \quad (6.3)$$

$$F_z = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ \frac{3}{2} J_2 \frac{R_p^2}{r^2} \left( 3 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) - \frac{5}{8} J_4 \frac{R_p^4}{r^4} \left( 25 - 70 \frac{z^2}{r^2} + 63 \frac{z^4}{r^4} \right) + \frac{105}{16} J_6 \frac{R_p^6}{r^6} \left( \frac{7}{3} + 21 \frac{z^2}{r^2} - \frac{231z^4}{5r^4} + \frac{143z^6}{5r^6} \right) \right] z \quad (6.4)$$

O algoritmo foi implementado de tal forma que pode-se realizar as equações acima por partes, com o intuito de evitar contas e processamentos desnecessários. Portanto, o usuário pode atribuir

a força para cada um dos termos de  $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$  independentemente e sem a necessidade de gastar processamento, pois basta atribuir o valor zero a qualquer um dos termos e o cálculos não serão realizados.

Na biblioteca *FEG\_TOOLS* é possível encontrar o módulo que trata da perturbação causada pelo achatamento planetário. A função da força que deve ser direcionada pelo REBOUND através da flag "*additional\_forces*" é chamada de "*force\_oblateness*".

Para utilizar essa função, é necessário passar como parâmetro da função qual o planeta não esférico que está causando a perturbação e a estrutura da simulação do REBOUND. Outros parâmetros que devem ser especificados são os termos da expansão do potencial  $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$ , que devem ser inseridos como uma variável no programa principal.

A função da força:

```
1 void force_oblateness(struct reb_particle planet, struct reb_simulation*
  r);
```

Também adicionamos à biblioteca mais duas funções para calcular a taxa de variação do argumento do pericentro e da longitude do nodo ascendente (equações 2.46 e 2.47). Para  $\dot{\omega}$  a função foi escrita da seguinte maneira:

```
1 double feg_get_rate_pericentre_n ( struct reb_particle p, struct
  reb_particle planet , struct reb_simulation * r);
2 }
```

e para  $\dot{\Omega}$ :

```
1 double get_rate_nodo_n ( struct reb_particle p, struct reb_particle
  planet , struct reb_simulation * r);
```

A descrição das funções e parâmetros de entrada podem ser encontradas no anexo B.1.

#### 6.4.1.2 Algoritmo da Força de Radiação Solar

Na biblioteca *FEG\_TOOLS* é possível encontrar o módulo que trata da perturbação causada pela força de radiação solar. A função da força, que deve ser direcionada pelo REBOUND através da flag "*additional\_forces*", é chamada de "*force\_rp\_pr*".

Todas as forças aplicadas no Rebound devem ser decompostas em cada uma das coordenadas cartesianas, portanto para a força de radiação solar utilizamos as equações (3.9) - (3.11):

$$F_x = \frac{\beta GM_s}{r_{sp}^2} Q_{pr} \left[ \cos(n_s t) - \left( \frac{x_s}{r_{sp}} \right)^2 \left( \frac{v_{xs}}{c} + \frac{v_x}{c} \right) - \left( \frac{v_{xs}}{c} + \frac{v_x}{c} \right) \right] \quad (6.5)$$

$$F_y = \frac{\beta GM_s}{r_{sp}^2} Q_{pr} \left[ \cos(\gamma) \sin(n_s t) - \left( \frac{y_s}{r_{sp}} \right)^2 \left( \frac{v_{ys}}{c} + \frac{v_y}{c} \right) - \left( \frac{v_{ys}}{c} + \frac{v_y}{c} \right) \right] \quad (6.6)$$

$$F_z = \frac{\beta GM_s}{r_{sp}^2} Q_{pr} \left[ \sin(\gamma) \sin(n_s t) - \left( \frac{z_s}{r_{sp}} \right)^2 \left( \frac{v_{zs}}{c} + \frac{v_z}{c} \right) - \left( \frac{v_{zs}}{c} + \frac{v_z}{c} \right) \right] \quad (6.7)$$

Para a implementação, a força de radiação solar foi dividida na componente da pressão de radiação Solar (RP) e na componente de Poynting-Robertson (PR) de maneira que o usuário possa aplicar uma componente ou a outra. Isso é feito através das variáveis inteiras *valitate\_rp* e *validate\_pr\_drag*, que são parâmetros de entrada nas nossas funções e funcionam como variáveis booleanas onde 0 não considera a componente e 1 a componente é incluída na equação da força.

Para aplicar essa força foram desenvolvidas duas funções que irão depender da aplicação do usuário, em uma das funções pode-se aplicar a força da radiação solar incluindo a fonte de radiação como um corpo na simulação e na outra função é para ser utilizada no caso onde não é necessário incluir a fonte de radiação como um corpo na simulação. Nesse último caso serão incluídos somente os efeitos que a fonte causa devido a força de radiação solar.

Para ambas as funções é necessário passar como variável externa o parâmetro  $\beta$  da equação 3.4. Também é necessário informar a obliquidade do planeta e a velocidade da luz nas unidades da simulação.

Como parâmetro das próprias funções, é necessário informar a simulação do REBOUND e se está aplicando ou não a pressão de radiação e o arrasto de Poynting-Robertson como variáveis booleanas. Portanto a força com seus respectivos parâmetros foram implementados da seguinte forma:

```

1 void force_rp_prdrag_withoutSun(double m_source, double rsp, double
    sun_i_position, struct reb_simulation* r, int rp_hereafter, int pr_drag
    );
2
3 void force_rp_prdrag_withSun(struct reb_simulation* r, int rp_hereafter,
    int pr_drag);

```

Ambas as funções podem ser utilizadas pelo usuário para a aplicação da força na integração numérica, lembrando quando a fonte de radiação não for incluída como um corpo na integração deverão ser passados mais dois parâmetros como a massa e a distância radial do planeta à fonte de radiação pelas variáveis *m\_source* e *rsp*, respectivamente. Outra observação é que quando são utilizadas as nossas funções para aplicar a força de radiação solar, esta será aplicada apenas nas partículas de poeira (sem massa), portanto mesmo que o usuário adicione a estrutura do REBOUND partículas com massa, como planetas e satélites ao sistema, a força de radiação não será aplicada a esses corpos.

Entretanto ambas as funções servem mais como uma interface com o usuário, pois dentro dela são realizados somente os cálculos da posição relativa do planeta à fonte de radiação. A função que efetivamente realiza os cálculos e aplica a força é a função *force\_rp\_prdrag*.

```

1 void force_rp_prdrag(struct reb_particle planet, struct reb_particle
    rad_source, const double rsp, const double ns, struct reb_simulation* r,
    int rp_hereafter, int pr_drag);

```

Além disso também criamos uma função que realiza os cálculos para encontrar o valor do razão da radiação solar com a força da gravidade, exatamente da mesma maneira que é feita na equação 3.4 com as mesma variáveis como parâmetro de entrada.

```

1 double rp_calc_beta(const double G, const double c, const double
    source_mass, const double source_luminosity, const double radius,

```

```
const double density, const double Q_pr);
```

### 6.4.1.3 Algoritmo da Força eletromagnética

Na biblioteca de forças perturbativas em anéis planetários que criamos, chamada "*FEG\_TOOLS*", implementamos o algoritmo de força eletromagnética. A equação da força implementada é a equação 4.1 para o dipolo e quadrupolo magnético. Entretanto, como discutido anteriormente, no REBOUND, as forças são aplicadas através da aceleração da partícula que deve ser decomposta em suas componentes cartesianas. Portanto a força aplicada está na forma da equação (4.13):

$$F_x = (q/C)[ (\dot{y}_g - x_g\Omega_p)B_z - \dot{z}_gB_y], \quad (6.8a)$$

$$F_y = (q/C)[- (\dot{x}_g - y_g\Omega_p)B_z + \dot{z}_gB_x], \quad (6.8b)$$

$$F_z = (q/C)[ (\dot{x}_g - y_g\Omega_p)B_y - (\dot{y}_g - x_g\Omega_p)B_x]. \quad (6.8c)$$

A função que criamos para a força eletromagnética foi definida da seguinte maneira:

```
1 void force_electromagnetic(struct reb_particle planet, struct
   reb_simulation* r);
```

O usuário deve passar, como parâmetros da função, o planeta com o campo magnético que a partícula carregada está orbitando e também a simulação do REBOUND. Como parâmetros externos, o usuário deve definir exatamente com os mesmos nomes dados acima: a carga da partícula pela variável *q\_charge*, a velocidade de rotação do planeta *spin\_velocity\_planet*, o dipolo e quadrupolo magnético *g10* e *g20* e por fim a velocidade da luz *c* nas unidades da simulação.

Importante ressaltar que, em nosso algoritmo, limitamos o código a realizar o processamento das contas para a equação da força eletromagnética, apenas quando as variáveis *g10* e *g20* possuem um valor diferente de zero. Portanto, se o usuário, por exemplo, deseja calcular a força devido somente ao dipolo basta atribuir *g20* igual a zero.

## 7 VALIDAÇÕES E APLICAÇÕES

Neste capítulo iremos aplicar cada uma das forças estudadas nos capítulos anteriores em diversos sistemas e verificaremos como corpos orbitando um planeta se comportam sob a influência de força causada pelo achatamento planetário, a força de radiação solar e a força eletromagnética.

Faremos a validação dos algoritmos das forças comparando os resultados com a teoria, aplicando somente a força devido ao achatamento planetário em sistemas nos quais ele possui bastante influência. Em seguida analisaremos os efeitos da força eletromagnética em diferentes situações para um mesmo sistema, mas alterando as condições iniciais. E por fim, estudaremos sistemas com as forças acopladas. Para isso escolhemos sistemas com resultados confiáveis na literatura e assim compararmos nossos resultados com estes artigos como uma forma de validação dos algoritmos.

Os primeiros casos nos quais faremos as comparações somente analíticas, escolhemos dois sistemas dos quais a taxa de variação dos elementos orbitais é constante no tempo. Para isso, utilizamos partículas nos anéis de Urano sob a influência do achatamento planetário. O outro sistema é de partículas nos anéis de Saturno sob a influência da força eletromagnética.

Por fim, os resultados que obtivemos e comparamos com a literatura, analisaremos a evolução orbital de partículas ejetadas de Phobos e Deimos sob a influência do achatamento planetário de Marte e a radiação solar como no trabalho Krivov, Sokolov e Dikarev (1995). Também comparamos nossos resultados com o Jontof-Hutter e Hamilton (2012a) onde foi realizado um estudo da estabilidade de grãos carregados orbitando um planeta e sujeito a força gravitacional e a eletromagnética. Estudamos os casos estáveis de Júpiter, Saturno e da Terra e por fim discutiremos sobre a perturbação orbital em grãos de poeira no anel E de Saturno sujeito à forças gravitacional, eletromagnética e da radiação solar. Também faremos comparação com os resultados dados em Hamilton (1993) e Hamilton e Krivov (1996).

### 7.1 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO DA FORÇA DO ACHATAMENTO PLANETÁRIO

Para validar o algoritmo da força perturbativa causada pelo formato não esférico do planeta, foi incluído no pacote do REBOUND o módulo "*oblateness.c*" com as funções descritas no anexo B.1. Estudaremos nesta seção como os efeitos devido ao achatamento planetário ( $J_2$ ) podem variar as taxas de precessão e regressão do nodo e do pericentro ao alteramos a inclinação da partícula. A seção 2.1 mostrou que esta força causa uma taxa de variação constante no argumento do pericentro e na longitude do nodo ascendente (equações 2.46 e 2.47).

Analisaremos a evolução orbital de partícula de poeira sofrendo a perturbação devido ao achatamento planetário (componente  $J_2$  da expansão do potencial gravitacional do planeta), localizada distância radial correspondente ao pico do brilho do anel  $\mu$  de Urano. Para uma partícula localizada nesta região, a força predominante é devido ao achatamento planetário, sendo pelo menos duas ordens de grandeza maior do que qualquer outra força perturbativa (Figura 5.6). Desta maneira, simularemos este sistema considerando as condições iniciais listadas na tabelas 7.1 e 7.2, também utilizando a constante gravitacional  $G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .



Tabela 7.1 – Condições iniciais da simulação para Urano: massa ( $M_p$ ), raio ( $R_p$ ), obliquidade ( $\gamma$ ) e o primeiro termo do potencial gravitacional harmônico par ( $J_2$ ).

<b>Urano</b>	
$M_p$ (kg)	$86.832 \times 10^{24}$
$R_p$ (m)	$26200 \times 10^3$
$\gamma$ (°)	97.8
$J_2$	$3343. \times 10^{-6}$

Fonte: (SFAIR; GIULIATTI-WINTER, 2009)

Tabela 7.2 – Condições iniciais da simulação para uma partícula localizada no pico do anel  $\mu$  de Urano perturbada pelo achatamento planetário ( $J_2$ ). Sendo  $\rho$  a densidade,  $r_g$  o raio,  $a$  o semieixo maior e  $e$  a excentricidade.

<b>Partícula no anel <math>\mu</math></b>	
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$1.0 \times 10^3$
$r_g$ (m)	$1.0 \times 10^{-6}$
$a$ (m)	$97700 \times 10^3$
$e$	$1.0 \times 10^{-2}$

Fonte: (SFAIR; GIULIATTI-WINTER, 2009)

Consideramos uma partícula com órbita em baixa excentricidade, variando somente a inclinação para três casos. Inicialmente, aproximadamente no plano do equador do planeta  $I = 0.00573^\circ$ , em seguida com inclinação crítica de  $I \simeq 63.4^\circ$  e por fim com  $I = 70^\circ$ . Do primeiro ao último caso, a taxa de variação da longitude do nodo irá apenas diminuir de valor, enquanto a taxa de variação do argumento do pericentro terá uma inversão do sinal, o que significa para  $I = 0^\circ$  o ângulo irá precessar, em  $I \simeq 63.4^\circ$  não sofrerá variação e em  $I = 70^\circ$  irá regressar.

O comportamento destes ângulos é esperado pela teoria, como podemos observar nas equações médias 2.48e e 2.48d, que mostram as taxas de variação do argumento do pericentro e da longitude do nodo. Utilizaremos estas taxas para comparar se os resultados da simulação numérica seguem o mesmo comportamento.

As variações do argumento do pericentro e da longitude do nodo ascendente para uma partícula com excentricidade de 0.01 e inclinação 0.0001 rad, dada pela simulação numérica são apresentadas na Figura 7.1 nos pontos indicados como "simulação". Para comparar este resultado, utilizamos os valores das taxas de variação fornecidas pelas equações médias. Como as taxas de variação do argumento do pericentro e da longitude do nodo são constantes no tempo, traçamos a reta chamada de "teoria" na Figura 7.1. Os valores das taxas de variação para este caso são:

$$\dot{\omega} = 1.79460540879079144538 \text{ rad/ano} \quad (7.1)$$

$$\dot{\Omega} = -0.89730271112481974072 \text{ rad/ano} \quad (7.2)$$

O que resulta em períodos de 3.5011 e 7.0023 anos, respectivamente.

Para compararmos os períodos de oscilação da simulação numérica com o resultado analítico, utilizamos o método dado em Horne e Baliunas (1986) para detectar a presença e a importância de um período na evolução dos elementos orbitais. Utilizamos o software IDL com a biblioteca escrita

por Cosmetic CDS version by C D Pike, RAL, 16-Jan-95. Utilizando este método, que fornece um periodograma, encontramos os períodos de oscilação para o argumento do pericentro e a longitude do nodo de 3.501 e 6.987 anos, respectivamente. Portanto, possui uma diferença de 0.007% e 0.224% anos em relação aos valores calculados pelas equações médias.

Para verificarmos como a taxa do argumento pericentro pode variar para diferentes valores de inclinação, consideremos o caso crítico com o  $\sin I = 2/\sqrt{5}$ , ou seja  $I \simeq 63.4^\circ$ . A Figura 7.2 mostra a evolução do nodo e do pericentro para o mesmo sistema anterior, mudando apenas a inclinação inicial da partícula. Neste caso as taxas de variação são:  $\dot{\omega} = 0.0$  [rad/s] e  $\dot{\Omega} = -0.402054266010580807489$  [rad/ano]. A diferença de período entre a equação analítica e a simulação para a longitude do nodo é de 0.945%. Este resultado é razoável, pois estamos considerando uma pequena excentricidade e um valor alto para a inclinação. Nestas condições, as simplificações que assumimos para as equações médias podem apresentar problemas, pois são aproximadas a primeira ordem da expansão em função da excentricidade e inclinação. Em vista disto, a Figura 7.2 nos mostra se ambos os resultados seguem o mesmo comportamento, mas com menos precisão do que no caso com  $I = 0^\circ$  (Figura 7.1).

Para esta inclinação crítica, o argumento do pericentro não sofre nenhuma variação, enquanto o nodo continua regressando com um período um pouco maior que o caso anterior. Se observarmos a equação 2.48f neste caso é negativa, indicando que a partícula completa a sua oscilação radial de pericentro ao pericentro ligeiramente mais devagar do que a sua órbita sem perturbação. Também é diferente do caso anterior (Figura 7.1) em que era ligeiramente mais rápida.

Por fim, consideremos o caso em que o nodo e o pericentro regressam, ao alterar a inclinação da partícula para  $70^\circ$  (Figura 7.3). Deste modo, com ambos os ângulos regredindo, a partícula completa a sua órbita mais devagar do que nos casos anteriores. Neste caso as taxas de variação fornecidas pelas equações médias são:

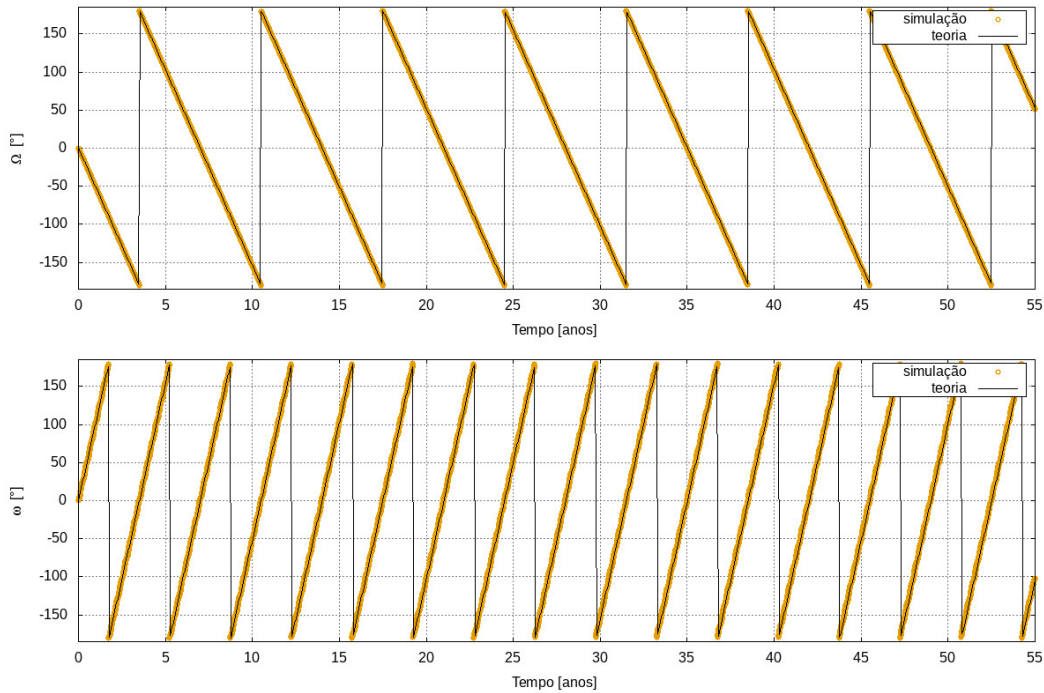
$$\dot{\omega} = -0.186454579881489113102 \text{ rad/ano} \quad (7.3)$$

$$\dot{\Omega} = -0.307572104184078820577 \text{ rad/ano} \quad (7.4)$$

que resulta em um período de oscilação de 33.6982 e 20.4283 anos. Utilizando o periodograma, encontramos uma diferença de 3.61% e 1.45% para o argumento do pericentro e a longitude do nodo.

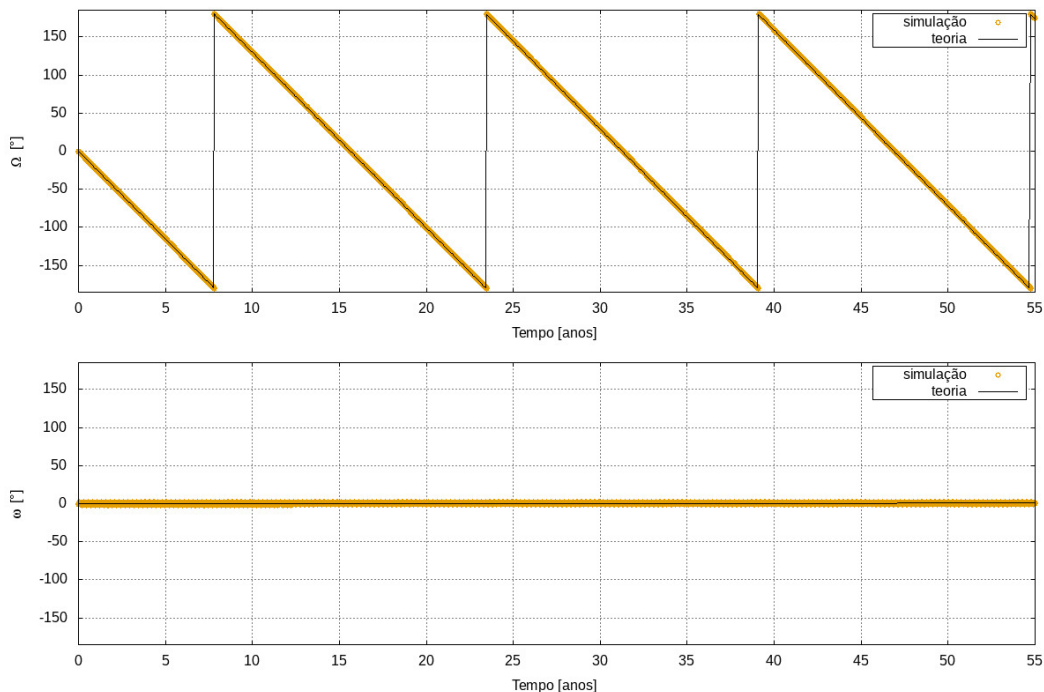
Podemos concluir através da comparação dos resultados obtidos utilizando nossos algoritmos com os fornecidos pelas equações médias, que a simulação numérica segue o comportamento esperado pela teoria e é capaz de lidar com quaisquer inclinações.

Figura 7.1 – Evolução temporal da longitude do nodo ascendente  $\Omega$  (painel superior) e da longitude do pericentro  $\omega$  (painel inferior) de uma partícula micrométrica do anel  $\mu$  de Urano com inclinação zero e considerando a componente  $J_2$  do achatamento planetário. São mostrados o resultado numérico e o valor teórico previsto pelas equações médias.



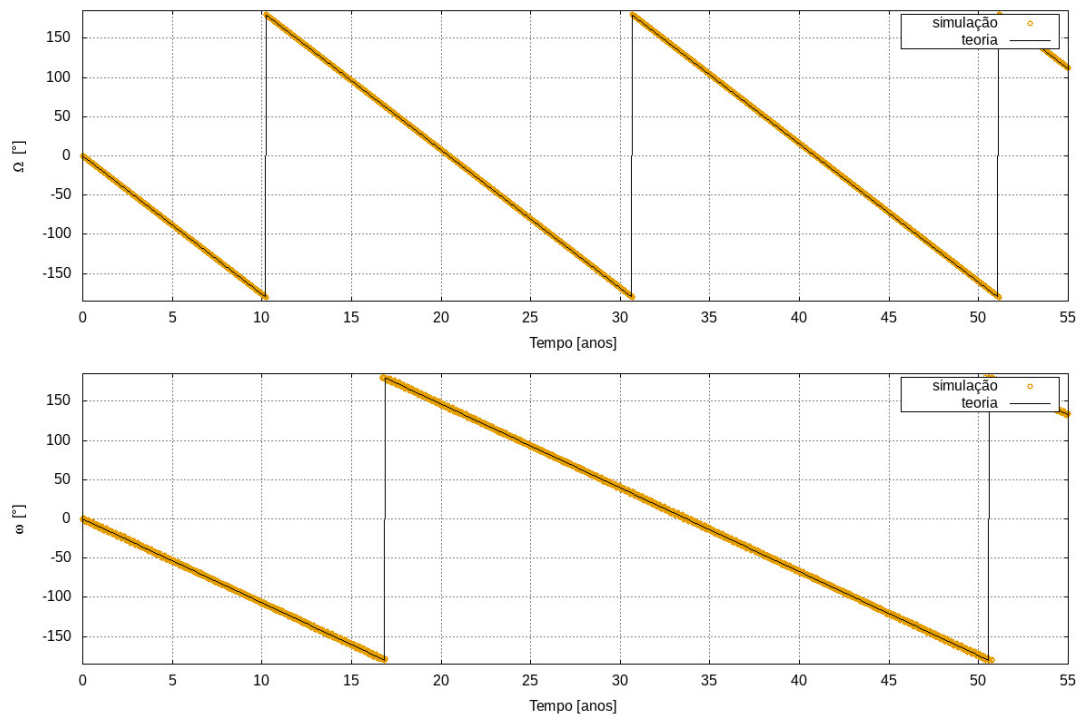
fonte: Tutorial: Próprio autor.

Figura 7.2 – Evolução temporal da longitude do nodo ascendente  $\Omega$  (painel superior) e da longitude do pericentro  $\omega$  (painel inferior) de uma partícula micrométrica do anel  $\mu$  de Urano com inclinação de  $I = 63.4^\circ$  e considerando a componente  $J_2$  do achatamento planetário. São mostrados o resultado numérico e o valor teórico previsto pelas equações médias.



fonte: Tutorial: Próprio autor.

Figura 7.3 – Evolução temporal da longitude do nodo ascendente  $\Omega$  (painel superior) e da longitude do pericentro  $\omega$  (painel inferior) de uma partícula micrométrica do anel  $\mu$  de Urano com inclinação de  $I = 70^\circ$  e considerando a componente  $J_2$  do achatamento planetário. São mostrados o resultado numérico e o valor teórico previsto pelas equações médias.



fonte: Tutorial: Próprio autor.

## 7.2 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO DA FORÇA ELETROMAGNÉTICA

Para analisar a perturbação causada pela força eletromagnética foi incluído na biblioteca *FEG\_TOOLS* um módulo para esta força. Este módulo é composto pelos arquivos "*lorentz\_force.c*" e "*lorentz\_force.h*" com as equações apresentadas na seção 7.2.

Para estudarmos e avaliarmos nosso algoritmo, iremos analisar o caso no qual a força eletromagnética, segundo as equações médias (4.14), não causa variação na excentricidade e na inclinação, o que ocasiona em uma taxa de variação constante no tempo para o argumento do pericentro e a longitude do nodo ascendente. Este é o caso de órbitas planares, com inclinação próxima a zero. Estudaremos este caso e utilizaremos para validar nosso algoritmo. Também consideraremos, por praticidade, órbitas quase circulares. Para as órbitas deste tipo, quando alteramos os valores do semieixo maior das partículas as taxas de variação do argumento do pericentro e longitude do nodo irão variar consideravelmente.

Começaremos estudando órbitas síncronas, isto é, quando o período da partícula é igual ao período de rotação do campo magnético do planeta. Também analisaremos o caso no qual a partícula faz três órbitas completas, enquanto o campo magnético completa apenas uma rotação, pois nesta localização está no limite no qual a força desvanece. Portanto, são boas escolhas para testarmos nossos algoritmos, se mesmo que no limite de sua validade continua causando os efeitos esperados na órbita da partícula.

Em seguida analisaremos a órbita de uma partícula em uma região fora das órbitas síncronas e onde a força eletromagnética é dominante sob todas as outras forças perturbativas. Consideraremos inicialmente valores de cargas típicas encontradas nesta região (HORANYI; BURNS; HAMILTON, 1992), que possui um valor baixo. Sob estas condições a força eletromagnética afeta somente o argumento do pericentro e a longitude do nodo.

Para analisarmos como a diferença potencial da partícula pode afetar sua órbita, alteramos somente a carga da partícula em relação ao caso anterior. Desta maneira, a força eletromagnética é capaz de excitar a inclinação e excentricidade da partícula e também causar variações consideráveis no semieixo maior. Por fim, além de considerar a partícula carregada com um potencial elevado, iremos verificar como uma alta inclinação e um valor significativo de excentricidade iniciais podem afetar a evolução orbital da partícula.

Apresentaremos agora as considerações feitas para realizar a simulação numérica. O sistema estudado será de Saturno orbitado por uma partícula que sofre a perturbação devido ao dipolo magnético alinhado da força de Lorentz. Faremos simulações que englobem todos os efeitos anteriormente citados, alterando os parâmetros iniciais da partícula e utilizando o integrador *IAS15* do *REBOUND* com a precisão padrão de  $1 \times 10^{-9}$  no período de 0.02 à 10 anos com dados de saída a cada  $1 \times 10^{-6}$  anos. Os valores das constantes globais do sistema e parâmetros iniciais do planeta utilizados nas simulações estão na tabela 7.3<sup>1</sup>. Os parâmetros iniciais das partículas serão alterados em cada uma das simulações e estão explicitados na tabela 7.4. Utilizamos a constante gravitacional como  $G = 6.672 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$  e a velocidade da luz  $c = 29979245800 \text{ cm/s}$ . Analisaremos os resultados das simulações numéricas comparando a evolução orbital da partícula com o esperado pela equações médias (4.14).

<sup>1</sup> A tabela 7.3 com os parâmetros físicos do planeta são as mesmas utilizadas na seção 7.6.

Tabela 7.3 – Valores em unidades de CGS.

<b>Saturno</b>	
$M_p$ (g)	$5.6851404074990123 \times 10^{29}$
$R_p$ (cm)	$6.02680 \times 10^9$
$g_{1,0}$ (Gauss)	0.2154
$\Omega_P$ (rad/s)	$1.635007 \times 10^{-4}$

Fonte: Douglas P. Hamilton (comunicação privada)

Tabela 7.4 – Parâmetros iniciais das partículas para cada uma das simulações. Todos os ângulos são dados em graus. Os parâmetros da partícula são:  $n$  velocidade angular,  $a$  semieixo maior,  $e$  excentricidade,  $I$  inclinação,  $\Omega$  longitude do nodo ascendente,  $\omega$  argumento do pericentro e  $\Phi$  potencial da carga.

<b>Partícula</b>	$n$	$a/R_p$	$e$	$I$ (°)	$\Omega$ (°)	$\omega$ (°)	$\Phi$ (V)
Simulação 1	$n = \Omega_P$	1.86451495	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-6}$	0.0	0.0	-5
Simulação 2	$3n = \Omega_P$	3.87834738	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-6}$	0.0	0.0	-5
Simulação 3	-	4.40111421	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-6}$	+90	-90	-5
Simulação 4	-	4.40111421	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-6}$	+90	-90	200
Simulação 5	-	4.40111421	0.1025	65	+90	-90	200

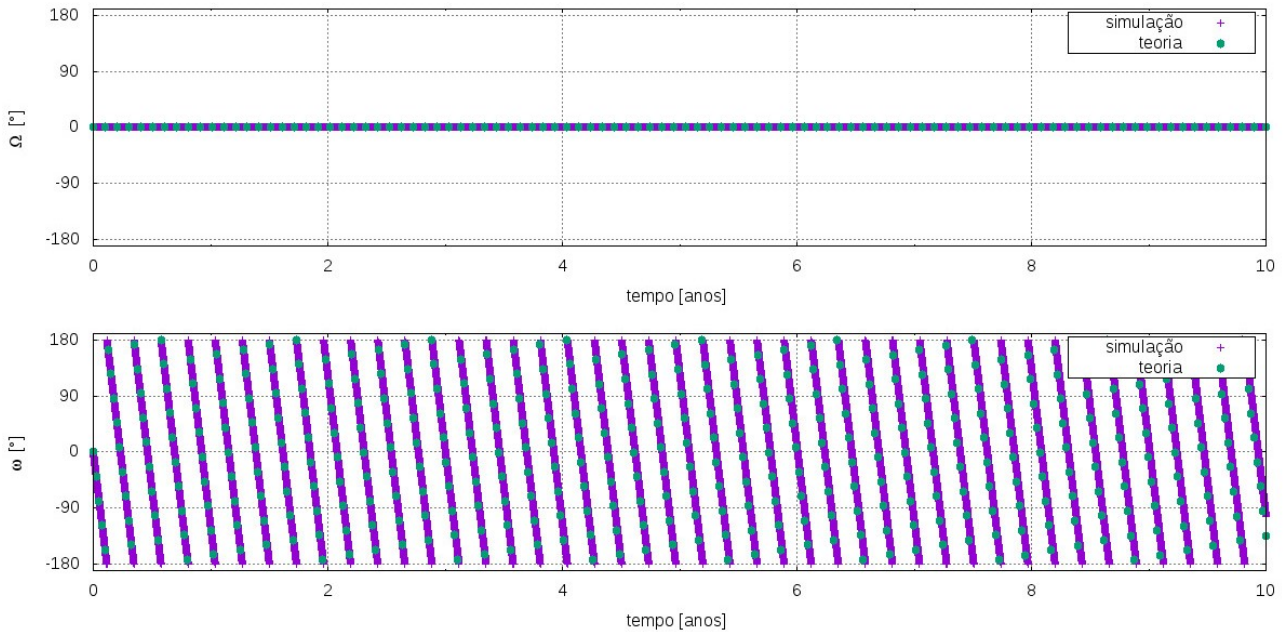
Fonte: Produção do próprio autor

O primeiro caso que analisaremos é de uma órbita síncrona ( $n \approx \Omega_p$ ,  $e \approx 0$ ,  $I \approx 0^\circ$ ) que pode ser visto na Figura 7.4. Nesta posição a velocidade relativa  $v_{rel}$  é zero e portanto a força de Lorentz desaparece, assim como a taxa de variação da longitude do nodo. A taxa de variação do pericentro pode ser calculada pela equação 4.14e, onde encontramos  $\dot{\omega} = -8.8149 \times 10^{-7}$  [rad/s] e com este valor geramos os gráficos dado por *teoria*, no qual é possível comparar os dados da integração numérica feita pelo REBOUND (*simulação*).

Seguindo o mesmo procedimento do sistema anterior, alteramos o valor da velocidade angular para o caso onde  $3n = \Omega_p$  e como podemos observar pela Figura 7.5, neste caso o pericentro não tem variação, mas o nodo varia com uma taxa de  $\dot{\Omega} = -9.6002 \times 10^{-8}$  [rad/s].

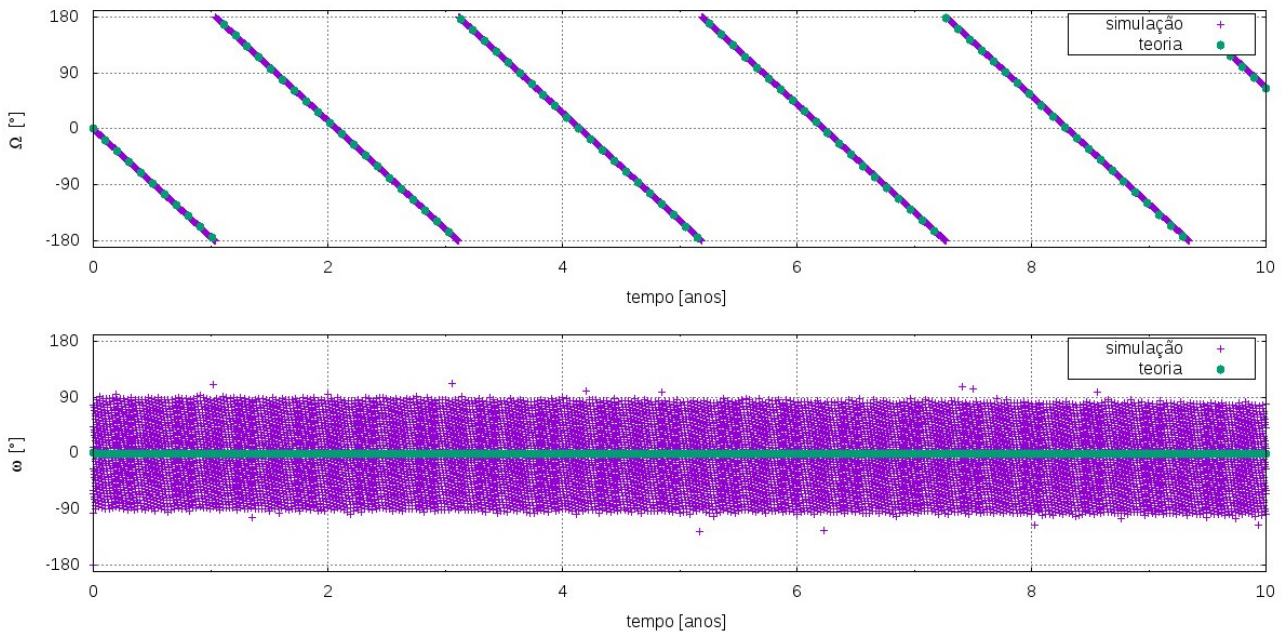
Na Figura 7.4 e Figura 7.5 as variações no argumento do pericentro e na longitude do nodo, nos primeiros períodos estão compatíveis com a teoria, entretanto em tempo mais longos, como em 9 à 10 anos da Figura 7.4 existe uma pequena diferença de resultados. Isto ocorre porque as taxas de variação destes ângulos não são constantes no tempo, diferente da força devido ao achatamento planetário. Portanto neste caso é esperado que ocorra esta diferença com a teoria e estes gráficos servem como uma indicação de que o modelo segue o comportamento esperado.

Figura 7.4 – Simulação 1: Evolução dos elementos orbitais de uma partícula, com velocidade angular de  $n = \Omega_p$  e sob a influência da força eletromagnética, através de uma integração numérica pelo REBOUND ("simulação") e o valor previsto pelas equações médias ("teoria").



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 7.5 – Simulação 2: Evolução dos elementos orbitais de uma partícula, com velocidade angular de  $3n = \Omega_p$  e sob a influência da força eletromagnética, através de uma integração numérica pelo REBOUND ("simulação") e o valor previsto pelas equações médias ("teoria").



Fonte: Produção do próprio autor

Agora iremos analisar a evolução orbital considerando o mesmo sistema anterior, mas considerando uma distância inicial de  $4.40111421R_p$  carregada com um potencial típico de  $\Phi = -5 V$ . Primeiramente analisaremos o caso planar, onde a inclinação  $I \approx 0^\circ$  e excentricidade  $e \approx 0$  (Figura 7.6). Como

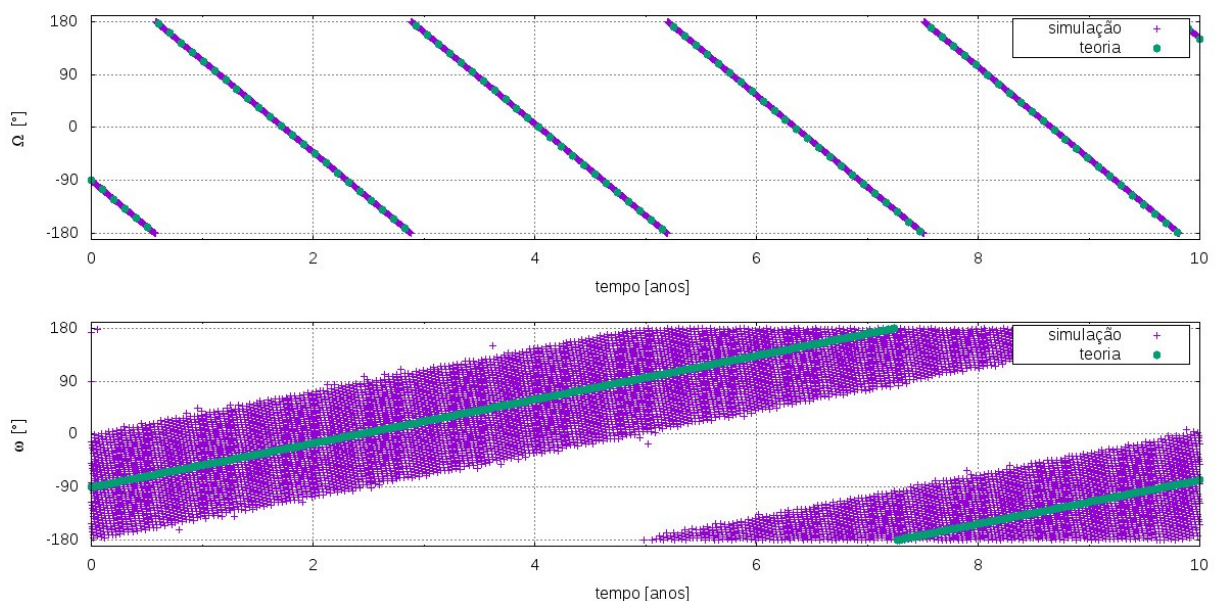
nos casos anteriores, a força eletromagnética não causa variações no semieixo maior, inclinação e nem da excentricidade. Mas provoca uma precessão do pericentro e regressão do nodo ascendente. Com auxílio das equações (4.14d) e (4.14d) as taxas de variação podem ser encontradas:  $\dot{\omega} = 2.099849 \times 10^{-8}$  [rad/s] e  $\dot{\Omega} = -8.802098 \times 10^{-8}$  [rad/s], respectivamente.

Podemos ainda avaliar o que ocorre quando alteramos a carga da partícula, considerando uma partícula com as mesmas condições iniciais do caso anterior da Figura 7.6 mas alterando o valor do seu potencial de  $-5V$  para  $200V$ . Como podemos observar na Figura 7.7 a partícula sofre uma excitação na excentricidade e também ocorre uma grande variação no semieixo maior que não foi observada nas simulações anteriores. Isto implica que as taxas de variação do pericentro e do nodo não serão mais constantes no tempo e os elementos orbitais possuem uma variação de curto período. Por isto neste gráfico não fazemos mais a comparação com a "teoria" e integramos por um tempo mais curto.

Por fim, vamos avaliar um caso mais difícil de ser estudado, considerando as mesmas condições iniciais e carga da partícula anterior, mas agora já iniciaremos em uma órbita com excentricidade  $e = 0.1025$ . Também iniciaremos a partícula com inclinação  $I = 65^\circ$ . Este não é um caso trivial pois todos os elementos orbitais sofrerão variações devido à força eletromagnética e as equações (4.14) estão acopladas, o que significa que as taxas de variação do pericentro e nodo possuem uma dependência explícita da excentricidade e da inclinação e portanto não serão fixas no tempo como nas primeiras simulações (Figura 7.8).

Como mencionado anteriormente existe uma dificuldade em compararmos nossos resultados com as equações médias sem que seja feito uma integração no tempo delas. Por isto, recorreremos a outra simulação numérica em colaboração Douglas P. Hamilton. Foi integrado o mesmo sistema com exatamente as mesmas condições iniciais da nossa *simulação 5* feita com o REBOUND. A evolução dos elementos orbitais feito com este novo integrador pode ser observada na Figura 7.9.

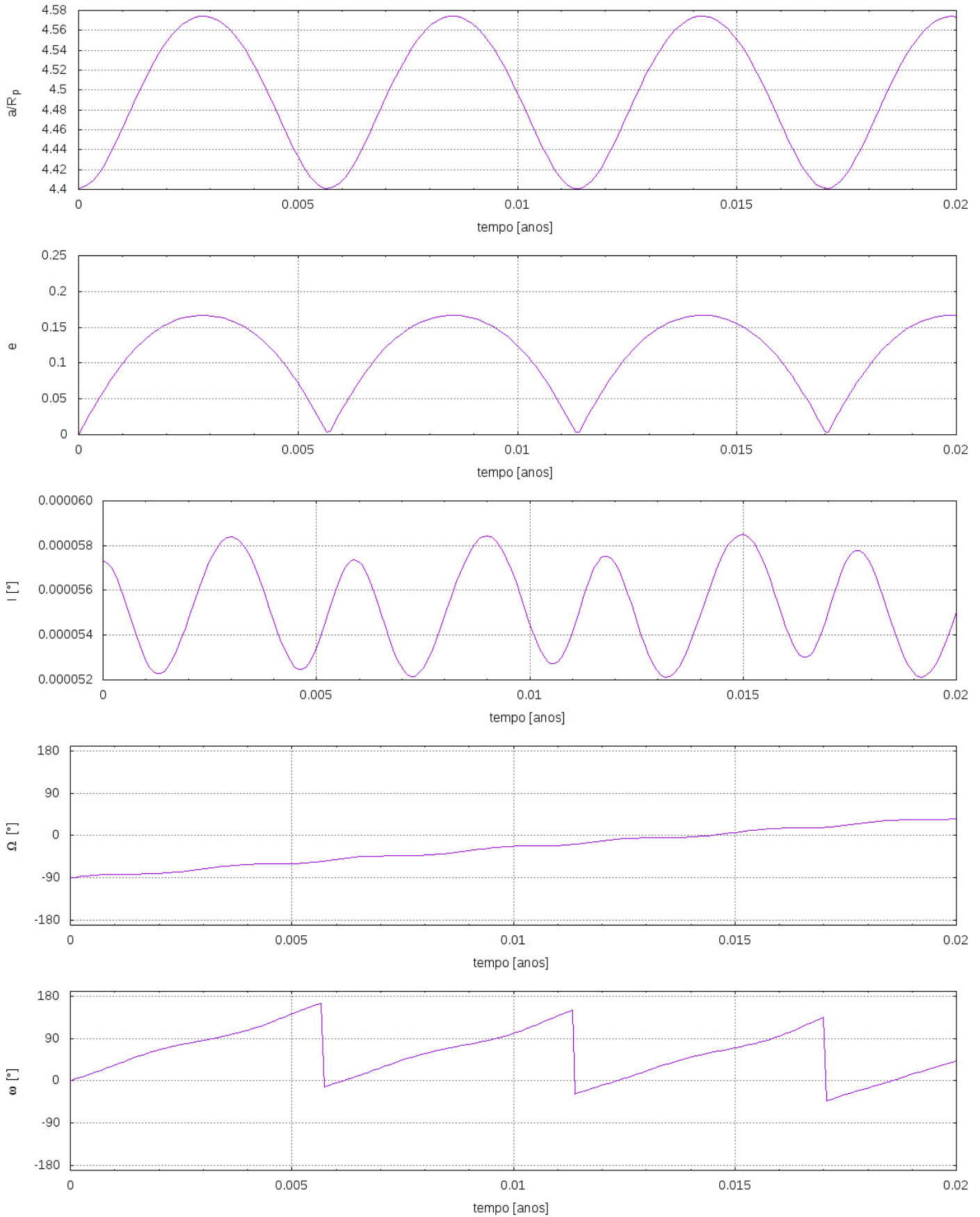
Figura 7.6 – Simulação 3: Evolução dos elementos orbitais de uma partícula, com distância inicial de  $4.40111421R_p$  carregada com um potencial de  $\Phi = -5 V$  e sob a influência da força eletromagnética, através de uma integração numérica pelo REBOUND ("simulação") e o valor previsto pelas equações médias ("teoria").



Fonte: Produção do próprio autor

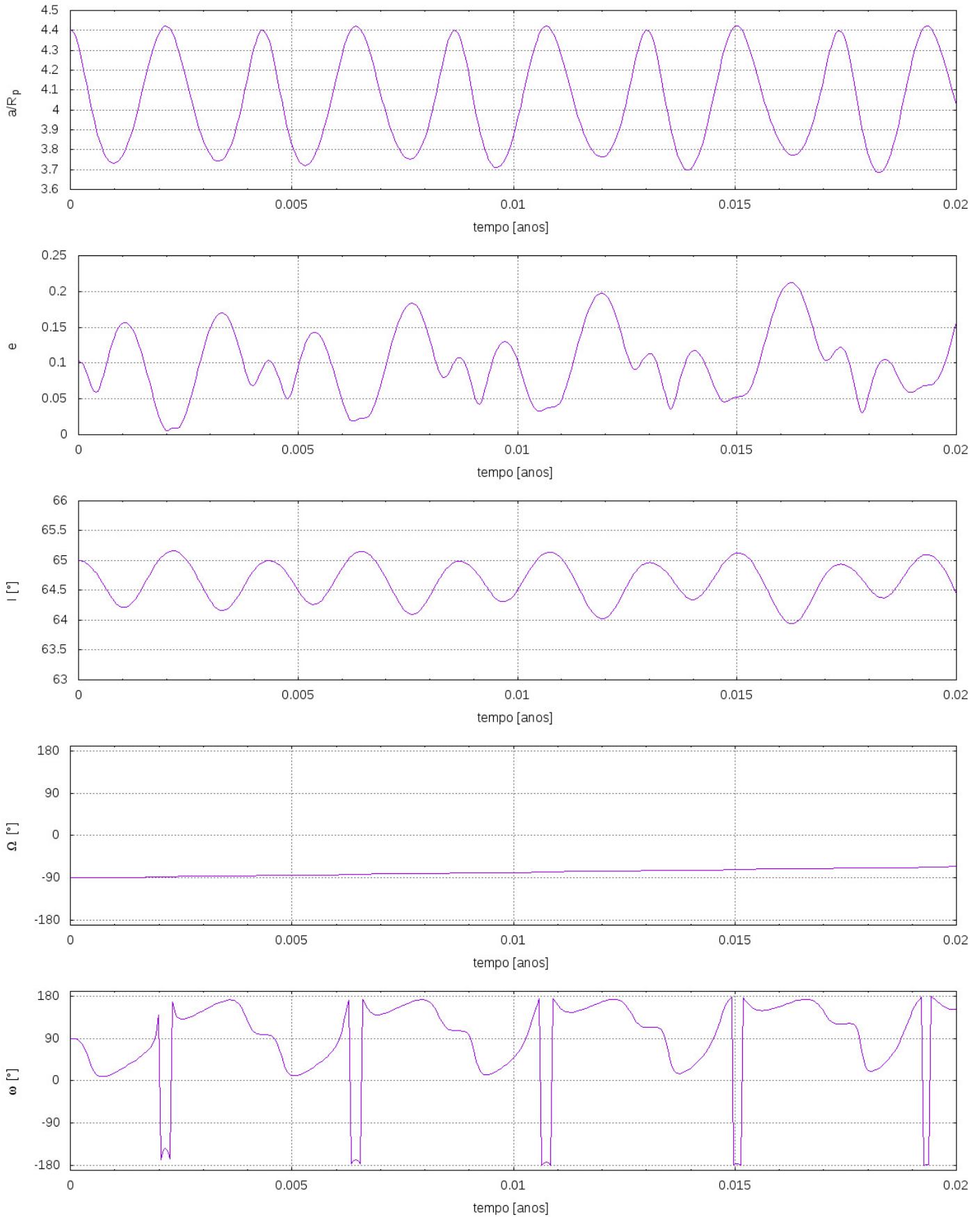


Figura 7.7 – Simulação 4: Evolução dos elementos orbitais de uma partícula, com distância inicial de  $4.40111421R_p$  carregada com um potencial de  $\Phi = 200 V$  e sob a influência da força eletromagnética.



Fonte: Produção do próprio autor

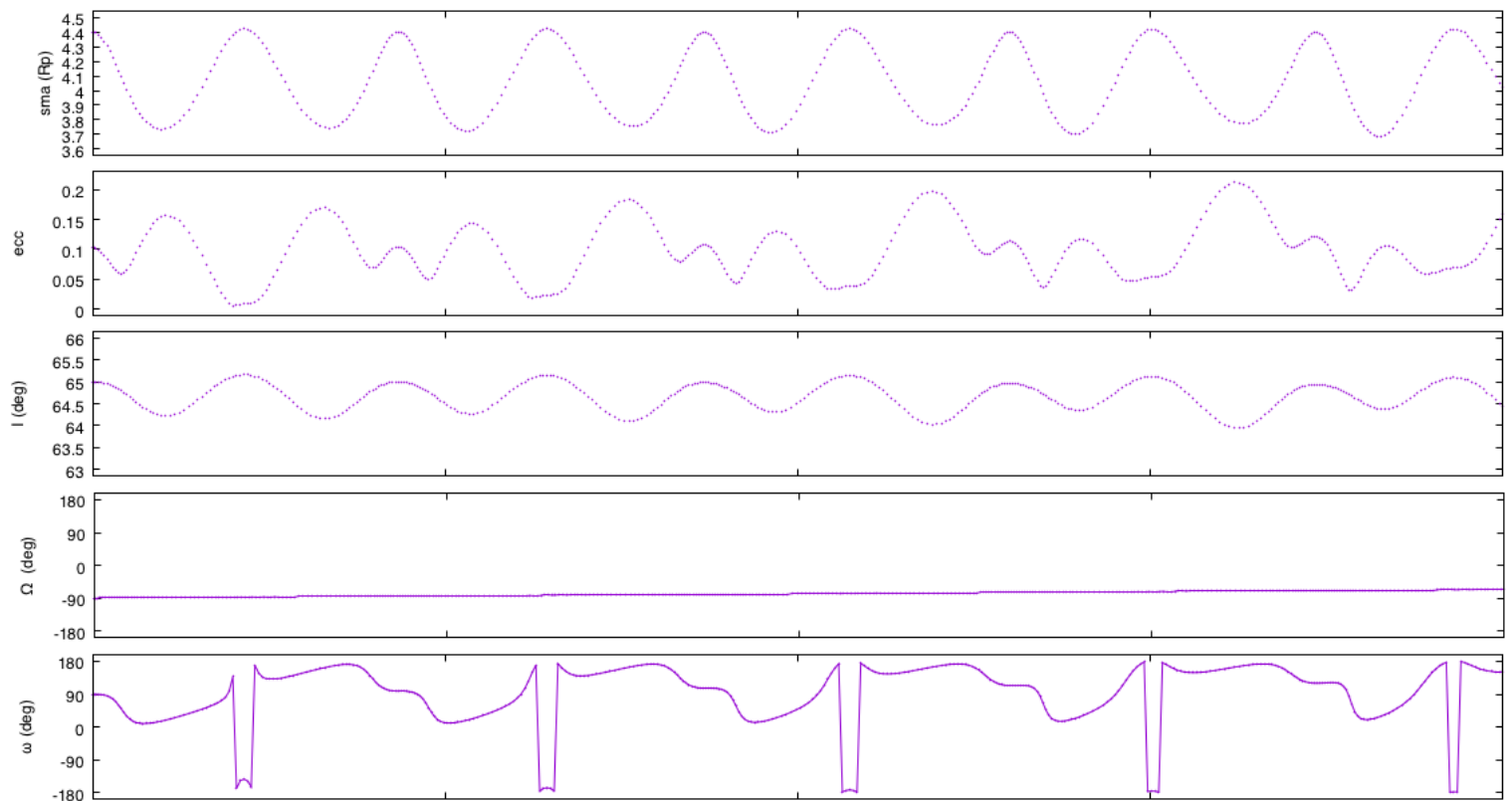
Figura 7.8 – Simulação 5: Evolução dos elementos orbitais de uma partícula, com distância inicial de  $4.40111421R_p$ , carregada com um potencial de  $\Phi = 200 V$ , com excentricidade e inclinação com valores consideráveis e sob a influência da força eletromagnética.



Fonte: Produção do próprio autor

Comparando os resultados da Figura 7.8 e Figura 7.9 a evolução orbital possuem o mesmo comportamento e podemos observar que os valores máximos e períodos dos elementos são praticamente iguais. Os integradores são diferentes e a implementação do algoritmo da força eletromagnética provavelmente também o são. Este resultado nos fornece uma garantia de que nossos algoritmos estão corretos e nossas implementações são precisas, pois o integrador dado por Douglas P. Hamilton foi utilizado em diversas aplicações da força eletromagnética, como no caso do anel E de Saturno (HAMILTON, 1993), das partículas de poeira ejetados dos satélites Phobos, Deimos, Elara e Encelados (HAMILTON; KRIVOV, 1996) e partículas carregadas se movimentando no campo magnético de Júpiter, Saturno, Netuno, Urano e a Terra (JONTOF-HUTTER; HAMILTON, 2012a) e (JONTOF-HUTTER; HAMILTON, 2012b).

Figura 7.9 – Evolução dos elementos orbitais de uma partícula carregada, sob a influência da força eletromagnética, com os mesmos parâmetros da Figura 7.8, através de uma integração numérica utilizando o integrador de Douglas P. Hamilton.



Cortesia de Douglas P. Hamilton

### 7.3 EFEITOS COMBINADOS DAS FORÇAS

Como discutido anteriormente, um sistema de anéis planetários pode sofrer a perturbação de diversas forças, sendo que cada uma delas afeta a evolução orbital das partículas de diferentes maneiras. Nesta seção analisaremos como uma força pode modificar a outra quando ambas, em uma determinada região, são comparáveis.

O achatamento planetário afeta a força de radiação, de forma que o achatamento pode causar um amortecimento na variação da excentricidade e a diminuição na amplitude de oscilação, sendo mais acentuada para partículas mais próximas ao planeta (SFAIR; GIULIATTI-WINTER, 2009). Além disto o período de oscilação da excentricidade também é modificado pela inclusão do achatamento, passando a ser menor. O comportamento da excentricidade passa a ser modulado pela combinação das frequências geradas pelo achatamento.

Primeiramente podemos lembrar que o achatamento causa uma precessão do pericentro e a força eletromagnética pode causar uma regressão, dependendo da carga da partícula. Para facilitar nossos estudos, iremos analisar o caso planar e verificar como estas taxas de variação se alteram. Definindo  $\dot{\omega}_{J_2}$  e  $\dot{\omega}_{\Phi}$  as taxas de variação da longitude do pericentro devido ao achatamento e a força eletromagnética, temos (HORANYI; BURNS; HAMILTON, 1992).

$$\dot{\omega}_{J_2} = \frac{3}{2} n J_2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 \quad (7.5)$$

$$\dot{\omega}_{\Phi} = \frac{2n^2 L}{\Omega_p} \quad (7.6)$$

Podemos ainda definir  $\gamma_{\omega} \equiv \dot{\omega}_{J_2} + \dot{\omega}_{\Phi}$  como a taxa total de precessão da longitude do pericentro. Como esperamos que o potencial da partícula seja negativo, as duas taxas de precessão irão competir uma com a outra, de forma que o movimento da longitude do pericentro pode sofrer uma regressão (com  $\gamma_{\omega} < 0$ ), ficar parado ( $\gamma_{\omega} = 0$ ) ou regredir ( $\gamma_{\omega} > 0$ ). Qualquer uma destas situações ocorrerá sob a dependência do tamanho da partícula, carga e sua posição na magnetosfera. Começaremos nossa discussão no caso onde as taxas de variação quase cancelam ( $\gamma_{\omega} \approx 0$ ).

Consideraremos uma partícula micrométrica carregada com potencial de  $-5$  V orbitando Saturno com as condições iniciais da tabela 7.5 e com a constante gravitacional  $G = 6.672 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$  e velocidade da luz  $c = 29979245800 \text{ cm/s}$ . A distância para o qual a taxa de variação da longitude do pericentro devido a ambas as perturbações seja zero é em  $a = 3.301794 R_p$ .

Como podemos observar na Figura 7.10 nem a força eletromagnética e nem o achatamento do planeta são capazes de gerar grandes excentricidades, diferente da força de radiação solar. Como esperado a variação do semieixo maior e da inclinação são relativamente pequenas e ocasionadas pela variação de curto período. O mesmo ocorre com a variação da longitude do pericentro, que sofre uma variação de curto período e oscila em torno em um valor constante.

Tabela 7.5 – Valores em unidades de CGS das constantes globais da integração e parâmetros físicos de Saturno utilizados nas simulações numéricas. Sendo  $M_p$  massa do planeta,  $R_p$  o raio,  $g_{1,0}$  o coeficiente harmônico esférico do campo magnético,  $\Omega_p$  a velocidade de rotação em radianos por segundos e  $J_2$  o primeiro potencial gravitacional harmônico par.

<b>Saturno</b>	
$M_p$ (g)	$5.6851404074990123 \times 10^{29}$
$R_p$ (cm)	$6.02680 \times 10^9$
$J_2$	0.016298
$g_{1,0}$ (Gauss)	0.2154
$\Omega_p$ (rad/s)	$1.635007 \times 10^{-4}$

Fonte: Produção do próprio autor

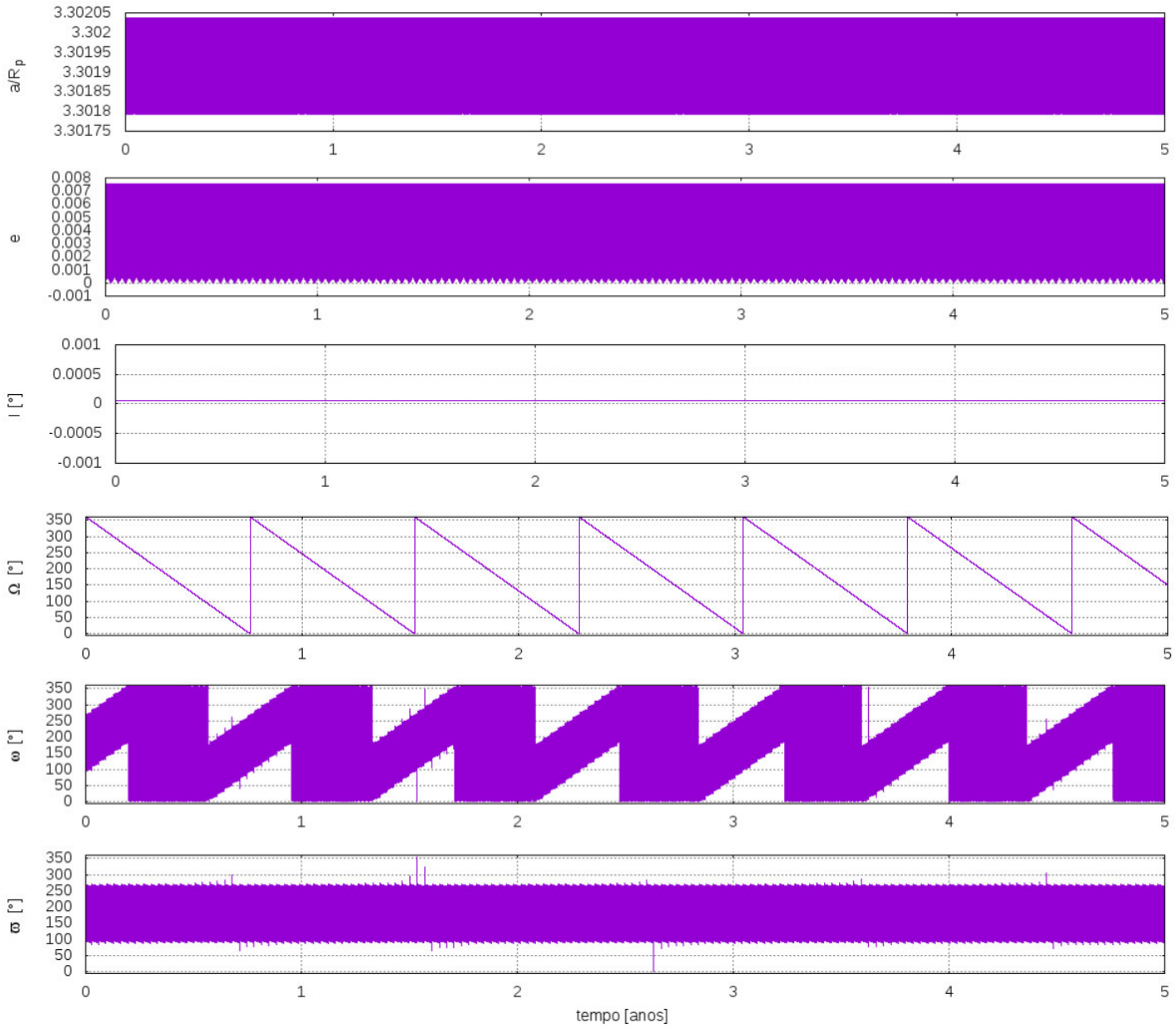
Agora avaliaremos os casos gerais no quais  $\gamma_\omega \neq 0$ . A competição entre as forças pode fazer com que a longitude do nodo regresse ou precesse. Sob as condições que estamos considerando para esta partícula, como uma órbita praticamente planar, a força devido somente ao achatamento planetário fará com que a longitude do nodo sempre regresse, independente da localização da partícula. Portanto, o fato da taxa de variação deste ângulo mudar de sinal será devido a força eletromagnética.

Uma partícula com semieixo maior de  $2.27R_p$  tem  $\gamma_\omega > 0$ , o que significa que o pericentro sofre uma precessão, como pode ser observado na Figura 7.11. A taxa de variação do pericentro neste caso é dada por  $\gamma_\omega = 9.865 \times 10^{-8}$  [rad/s]. Agora no caso, no qual a taxa de variação é negativa, sua localização é em  $4.401R_p$  que gera um  $\gamma_\omega = -8.793 \times 10^{-9}$  [rad/s] (Figura 7.12).

Se juntamente com a força eletromagnética e o achatamento planetário introduzirmos a força de radiação solar, que aumenta a excentricidade, uma excitação ou um amortecimento da excentricidade poderá ocorrer. Isto porque a força de radiação solar atua quando a longitude do pericentro da órbita da partícula está paralela à direção radial do Sol. Portanto, se diminuirmos ou aumentarmos a velocidade com que a longitude do pericentro varia, poderá ocorrer da partícula passar mais tempo tendo a atuação da força de radiação solar e gerar grandes valores de excentricidade.

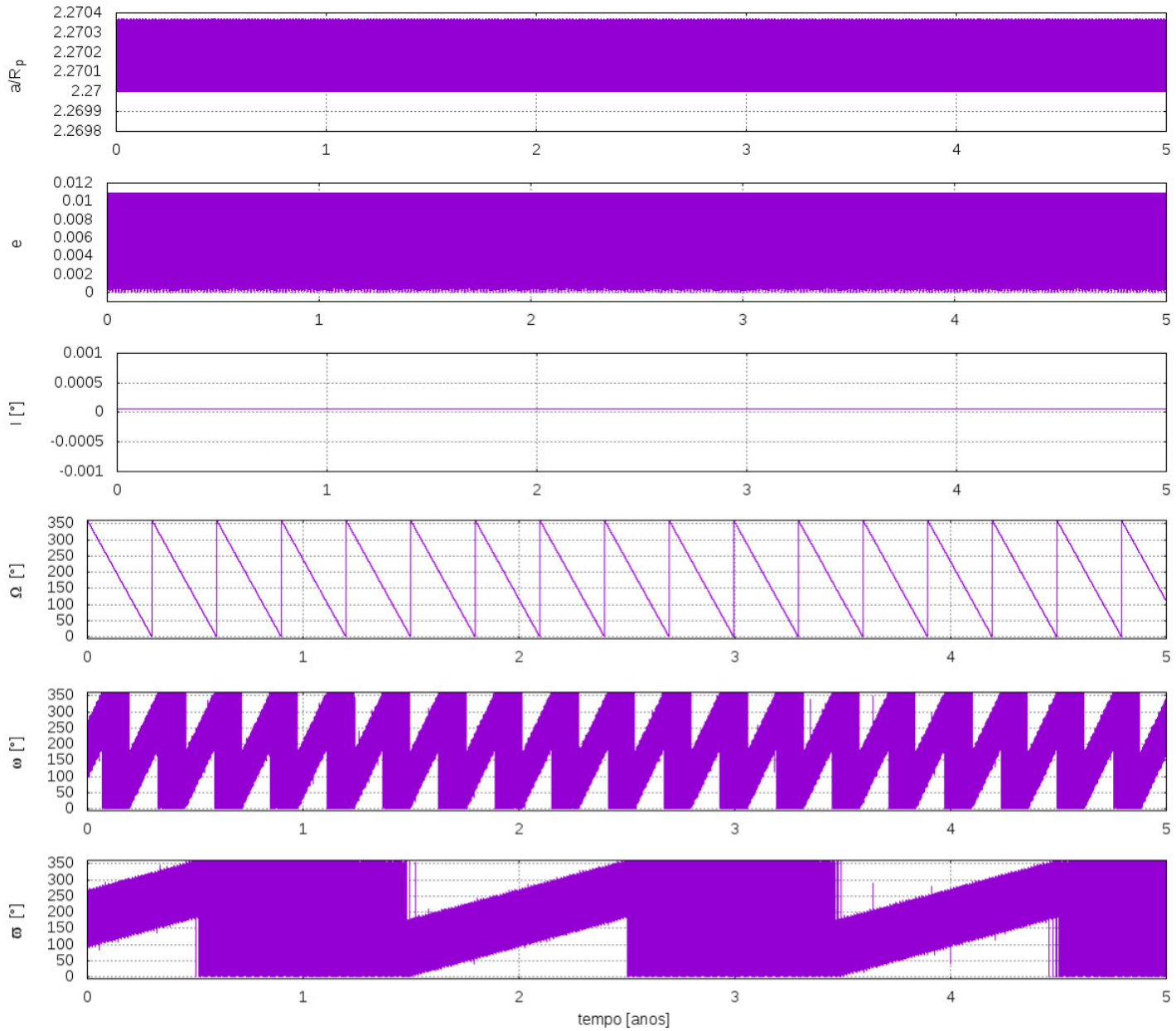
Quando existe um aumento no potencial da partícula a taxa de precessão do pericentro devida à força de Lorentz passa a ser dominante sobre a força devido ao achatamento do planeta, enquanto que, para potenciais menores, o inverso ocorre. Desta forma, nos casos para valores de  $\gamma_\omega \neq 0$ , quando introduzimos estas forças, a evolução orbital também é sensível ao tamanho do grão. Para um tamanho de partícula específico, pode-se calcular o intervalo de potenciais que produzirão taxas de precessão de tal forma que o valor da excentricidade seja grande o suficiente para colidir com satélites ou outros sistemas de anéis. Entretanto, para ambos os casos, a pressão de radiação solar tem a capacidade de produzir altas excentricidades fazendo com que partículas destes tamanhos e carregadas adequadamente não tenham um tempo longo de vida.

Figura 7.10 – Evolução orbital de uma partícula sob a influência do achamento planetário e a força eletromagnética, lançada em uma distância no qual a variação da longitude pericentro devido a força é igual a zero.



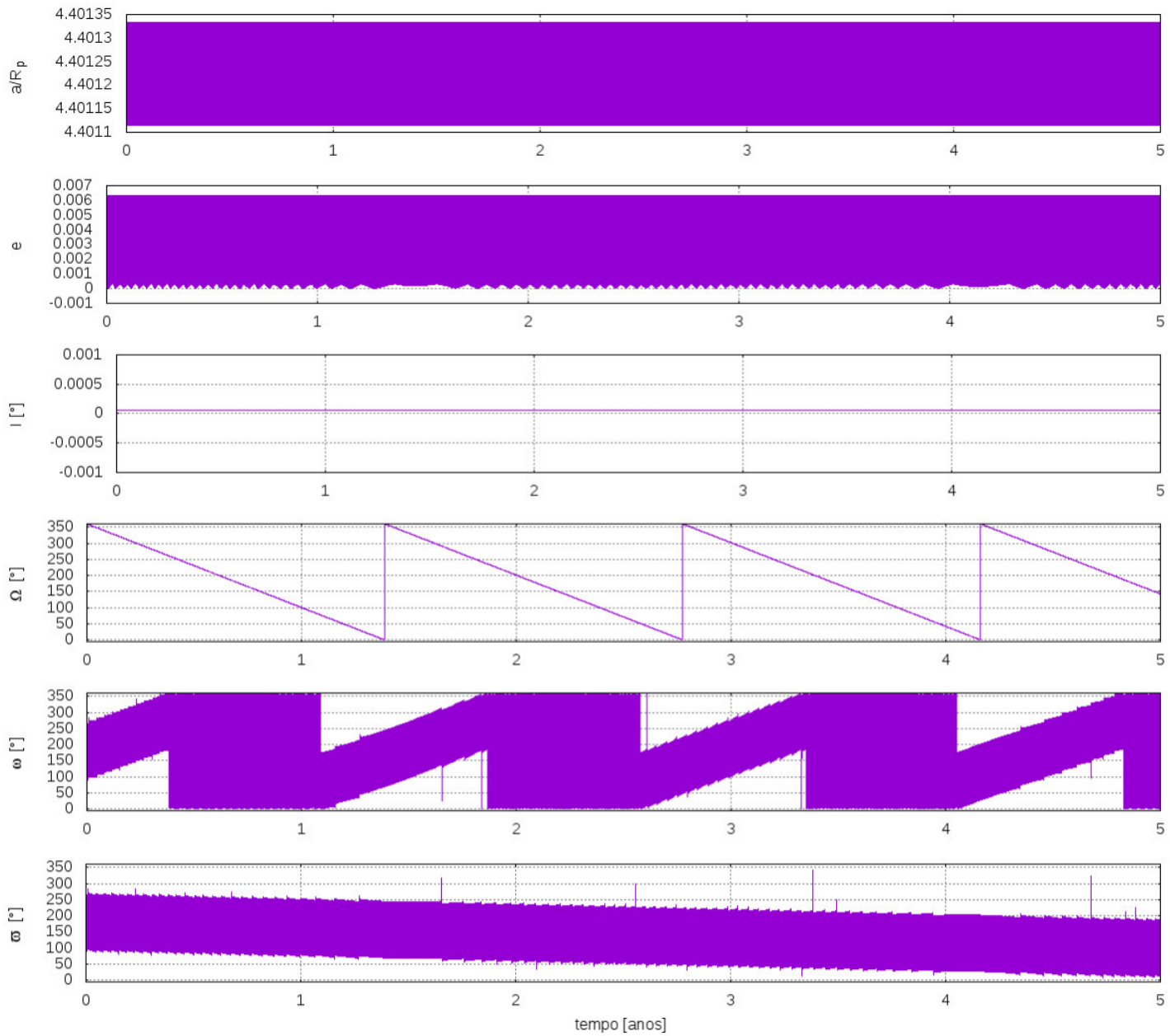
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 7.11 – Evolução orbital de uma partícula sob a influência do achamento planetário e da força eletromagnética, lançada a uma distância de  $a = 2.27R_p$  no qual a variação da longitude pericentro devido as forças é positivo ( $\gamma_{\varpi} > 0$ ).



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 7.12 – Evolução orbital de uma partícula sob a influência do achamento planetário e da força eletromagnética, lançada a uma distância de  $a = 4.40111421R_p$  no qual a variação da longitude pericentro devido as forças é negativo ( $\gamma_{\varpi} < 0$ ).



Fonte: Produção do próprio autor



#### 7.4 DINÂMICA DE PARTÍCULAS DE POEIRA ORBITANDO MARTE

Os capítulo 3 mostrou que a força de radiação solar é inversamente proporcional ao tamanho e densidade das partículas que sofrem esta perturbação. De fato, quanto menor os valores de raio e densidade, mais forte será a força, podendo resultar em altas excentricidades. Mas a força devido ao achatamento planetário, que causa uma variação na longitude do pericentro, pode ter uma diminuição ou aumento na amplitude de oscilação quando esta força está acoplada à força de radiação.

Para analisar estes efeitos escolhemos um sistema no qual as forças de radiação solar e achatamento planetário fossem predominantes, que é o caso de partículas de poeira ao redor de Marte. É possível observar no gráfico de parâmetros de força Figura 5.3 para partículas de poeira, com o raio da ordem de  $10 \mu\text{m}$ , ejetadas do satélite Phobos, que sofrem a ação destas forças com mesma ordem de grandeza, mas o achatamento planetário é ligeiramente mais forte. Já para partículas ejetadas de Deimos existe uma ordem de grandeza de diferença entre as forças, sendo a força de radiação solar predominante.

Quando estudamos as equações de movimento devido a força de radiação solar e a do achatamento planetário podemos notar que muitas vezes elas são aproximadas para os casos mais simples, como o circular planar e especialmente para partículas do tamanho de ordem micrométrica. Diferente destas equações, o modelo que abordamos para a implementação destas forças podem ser aplicadas de maneira mais ampla. Para verificar a validade das nossas equações apresentaremos nossos resultados para a dinâmica do sistema de Marte.

Para realizar a análise da evolução orbital de poeira ejetadas da região dos satélites Phobos e Deimos sob a influência da força de radiação solar e o achatamento planetário, realizamos simulações numéricas, utilizamos o integrador IAS15, com a precisão padrão de  $1 \times 10^{-9}$ , e assumimos que a densidade do material das partículas como  $\rho = 2.0 \text{ g cm}^{-3}$ . As constantes utilizadas no sistema estão na tabela 7.6 e os parâmetros do planeta estão apresentados na tabela 7.7. Consideramos partículas, de diferentes tamanhos, à distâncias dos satélites Phobos e Deimos, que possuem o semieixo maior de  $9.379 \times 10^6$  e  $2.346 \times 10^7$  metros, respectivamente.

Tabela 7.6 – Constantes utilizadas nas integrações numéricas,  $GM_{\odot}$  é constante gravitacional do Sol,  $\Phi_{\odot}$  fluxo de radiação solar à 1 UA e  $c$  velocidade da luz.

Constantes	
$GM_{\odot} (\text{cm}^3 \text{g}^{-1})$	$1.327 \times 10^{26}$
$\Phi_{\odot} (\text{ergs cm}^{-3} \text{s}^{-2})$	$1.3604 \times 10^6$
$c (\text{m/s}^2)$	299792458

Fonte: Krivov, Sokolov e Dikarev (1995)

Tabela 7.7 – Condições iniciais de Marte para as integrações numéricas utilizando o REBOUND. Todos os valores estão em unidades de SI. Sendo  $GM_p$  constante gravitacional do planeta,  $R_p$  o raio,  $r_{sp}$  a distância do planeta ao Sol e  $J_2$  o primeiro potencial gravitacional harmônico par.

<b>Marte</b>	
$GM_p$ ( $\text{cm}^3 \text{g}^{-1}$ )	$4.283 \times 10^{19}$
$R_p$ ( m )	$3394. \times 10^3$
$r_{sp}$ (UA)	1.524
$\gamma$ (°)	25.0
$J_2$	$1.96 \times 10^{-3}$

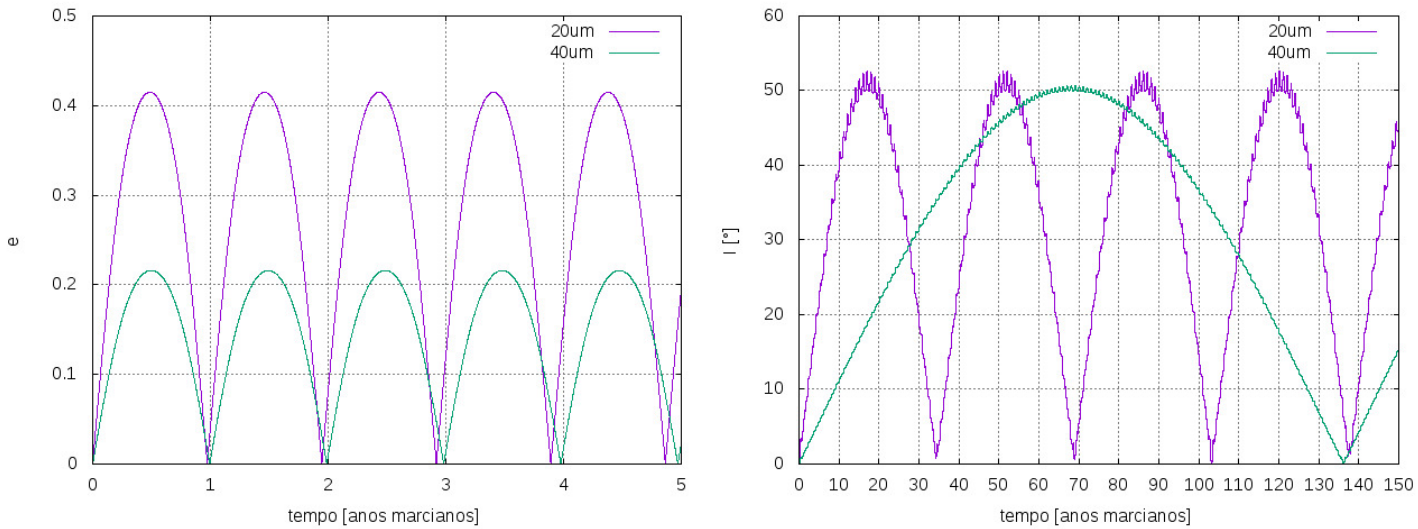
Fonte: Krivov, Sokolov e Dikarev (1995)

Inicialmente consideramos somente a força de radiação solar para partículas de tamanhos de 20 e 40  $\mu\text{m}$  ejetadas de Phobos e Deimos. A evolução orbital da excentricidade para grãos ejetados de Phobos pode ser observada na Figura 7.13. É possível notar uma grande excitação da excentricidade das partículas, que para partículas com raio de 20  $\mu\text{m}$  ultrapassa o valor de 0.4, enquanto as partículas com raio de 40  $\mu\text{m}$  alcança valores próximos de 0.2. O aumento da excentricidade é o principal efeito da força de radiação solar. Além disso, a força é mais acentuada para partículas menores, pois quando dobramos o tamanho das partículas os valores máximos atingidos pela excentricidade cai aproximadamente pela metade. Também podemos avaliar o período de variação da excentricidade, que para ambos os tamanhos é aproximado ao período orbital do planeta. Este resultado também está de acordo com o que é esperado pela teoria, uma vez que a variação da excentricidade no caso planar, como o que aplicamos, depende das propriedades físicas da partículas e somente do movimento orbital do planeta (BURNS; LAMY; SOTER, 1979).

Assim como na excentricidade, na inclinação também ocorre um aumento nos valores, que variam periodicamente Figura 7.13 quando aumentamos o raio da partícula ocorre um aumento no período de variação da inclinação, quando variamos o raio de 20  $\mu\text{m}$  para 40  $\mu\text{m}$ , o período é alterado cerca de quatro vezes.

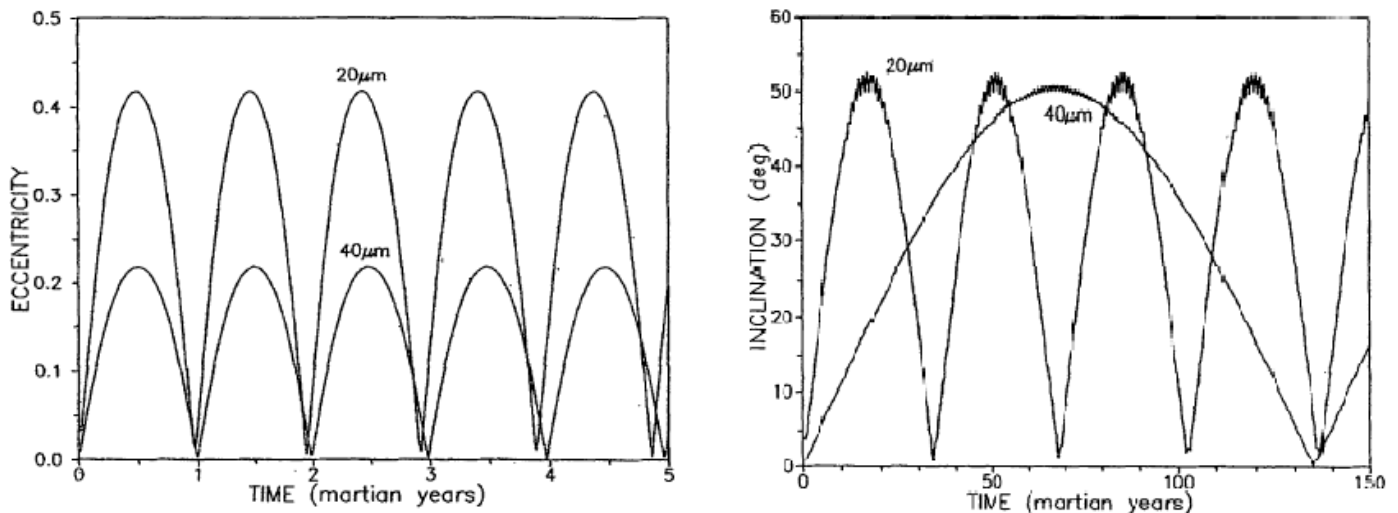
Ambos os resultados da Figura 7.13 podem ser comparados com o trabalho de Krivov, Sokolov e Dikarev (1995) (Figura 7.14). Nossos resultados estão de acordo com o artigo, que seguem o mesmo comportamento, os valores máximos atingidos e o período de oscilação. Para verificar a precisão de nossos resultados geramos a tabela 7.8 que compara os valores máximos da inclinação e da excentricidade com os resultados da literatura.

Figura 7.13 – Evolução orbital da excentricidade e inclinação para partículas de tamanhos de 20 e  $40\mu m$  ejetadas de Phobos sob a influência da pressão de radiação. O achatamento planetário foi desconsiderado.



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 7.14 – Evolução orbital da excentricidade e inclinação para partículas de tamanhos de 20 e  $40\mu m$  ejetadas de Phobos sob a influência da pressão de radiação. O achatamento planetário foi desconsiderado.



Fonte: Krivov, Sokolov e Dikarev (1995)

Da mesma maneira podemos avaliar a evolução orbital da excentricidade e inclinação de partículas ejetadas do satélite Deimos (Figura 7.15) que está mais afastado do planeta do que a do caso anterior, o que resulta em uma força de radiação solar mais intensa. Por isto ocorre um aumento nos valores de excentricidade máximas e uma diminuição no período de variação da inclinação. Ambos os resultados seguem o que é esperado pela teoria, assim como que discutimos para os casos de Phobos e podemos outra vez comparar com Krivov, Sokolov e Dikarev (1995) (Figura 7.16 e tabela 7.8).

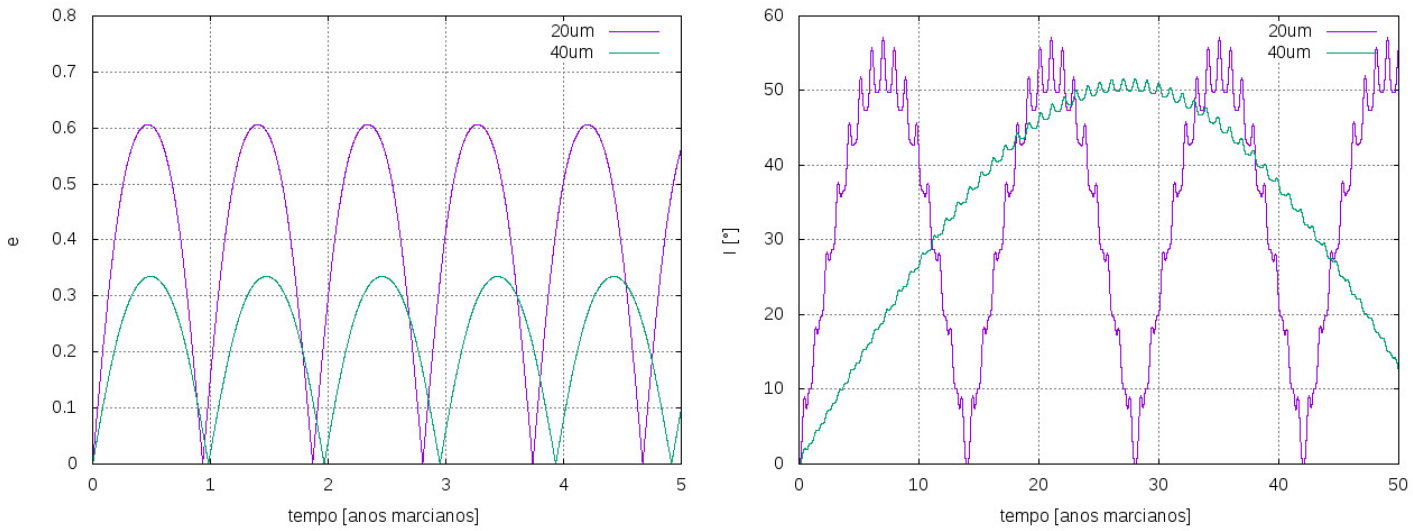
Tabela 7.8 – Valores máximos de excentricidade e inclinação de partículas ejetadas de Phobos e Deimos de Marte para partículas de tamanhos  $20\mu m$  e  $40\mu m$

		Raio da partícula [ $\mu m$ ]			
		Phobos		Deimos	
		20	40	20	40
$e_{max}$	REBOUND	0.41	0.22	0.60	0.34
	Krivov, Sokolov e Dikarev (1995)	0.42	0.22	0.61	0.34
$T_{e_{max}}$	REBOUND	0.97	0.99	0.94	0.98
	Krivov, Sokolov e Dikarev (1995)	0.97	1.00	0.93	0.98
$I_{max}$	REBOUND	53	51	57	52
	Krivov, Sokolov e Dikarev (1995)	53	51	57	52
$T_{I_{max}}$	REBOUND	35	138	14	54
	Krivov, Sokolov e Dikarev (1995)	34	140	14	54

Fonte: Produção do próprio autor

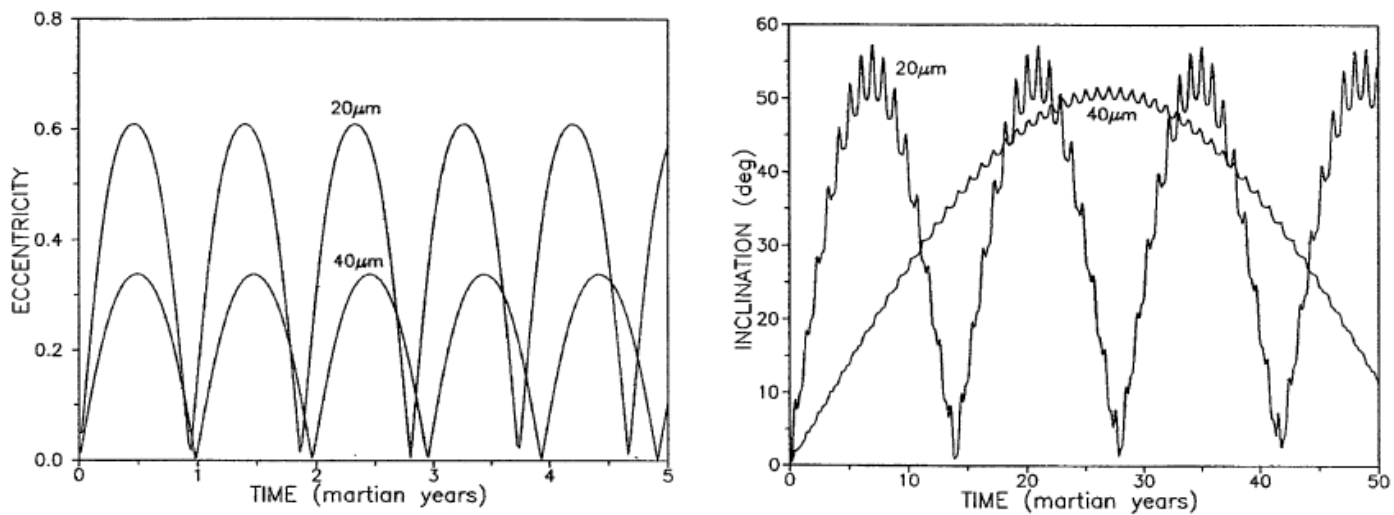
Agora analisaremos como a inclusão da força devido ao achatamento planetário ( $J_2$ ) pode alterar a força de radiação solar. Primeiramente para o caso de Deimos, que pode ser observado na Figura 7.17. Neste caso a inclusão de outra força não ocasionou em uma mudança perceptível na variação da excentricidade da partícula, como podemos observar na Figura 7.15 sem achatamento e na Figura 7.17 com achatamento. Isto ocorre porque a força devido ao achatamento planetário nesta região é uma ordem de grandeza menor quando comparada com a força de radiação solar. Desta forma, as variações que o achatamento causa no pericentro não alteram consideravelmente a variação na excentricidade, que é uma função do pericentro. Por outro lado, a inclinação sofre uma diminuição nos valores máximos atingidos e no período de oscilação, passando a ser mais curto. Já, para o caso da inclusão de ambas as forças, existe uma diferença nos valores máximos de inclinação quando alteramos o raio da partícula. A inclusão do achatamento faz com que diminuía pela metade a diferença entre os valores máximos de inclinação e a diferença no período de oscilação quando dobramos o raio da partícula. Este resultado também pode ser comparado ao apresentados em Krivov, Sokolov e Dikarev (1995) para o mesmo sistema sob as mesmas forças (Figura 7.18).

Figura 7.15 – Evolução orbital da excentricidade e inclinação para partículas de tamanhos de 20 e  $40\mu\text{m}$  ejetadas de Deimos sob a influência da pressão de radiação. O achatamento planetário foi desconsiderado.



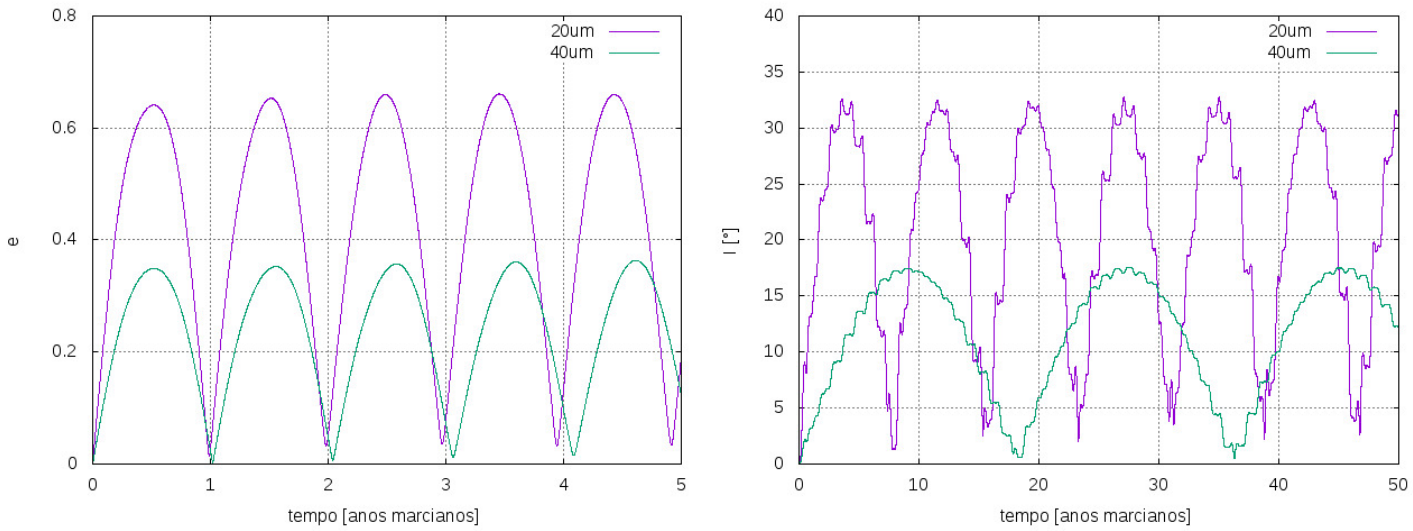
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 7.16 – Evolução orbital da excentricidade e inclinação para partículas de tamanhos de 20 e  $40\mu\text{m}$  ejetadas de Deimos sob a influência da pressão de radiação. O achatamento planetário foi desconsiderado.



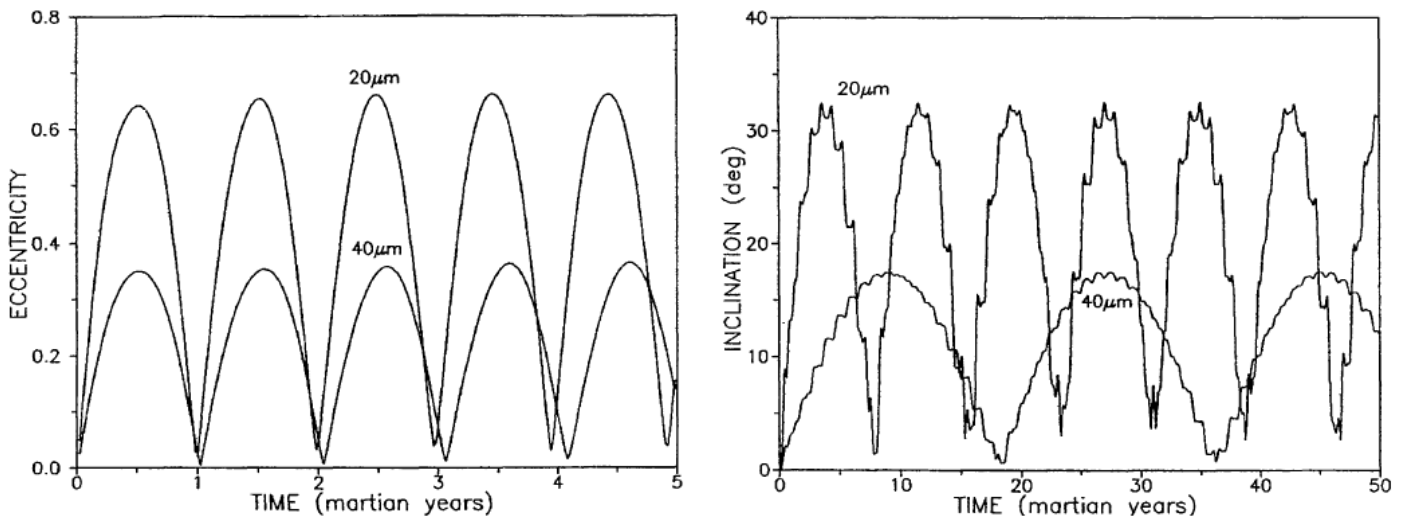
Fonte: Krivov, Sokolov e Dikarev (1995)

Figura 7.17 – Evolução orbital da excentricidade e inclinação para partículas de tamanhos de 20 e  $40\mu m$  ejetadas de Deimos sob a influência da pressão de radiação e do achatamento planetário.



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 7.18 – Evolução orbital da excentricidade e inclinação para partículas de tamanhos de 20 e  $40\mu m$  ejetadas de Deimos sob a influência da pressão de radiação e do achatamento planetário.



Fonte: Krivov, Sokolov e Dikarev (1995)

Tabela 7.9 – Valores máximos de excentricidade e inclinação de partículas ejetadas do satélite Phobos de Marte de diferentes tamanhos, sob influência da força de radiação solar e achatamento planetário.

		Raio das partículas [ $\mu m$ ]						
		30	100	200	315	316	318	500
$e_{max}$	REBOUND	0.64	0.53	0.48	0.46	0.46	0.25	0.12
	Krivov, Sokolov e Dikarev (1995)	0.64	0.53	0.49	0.46	0.24	-	0.15
$T_{e_{max}}$	REBOUND	1.13	4.3	8.3	27	25	18	6.5
	Krivov, Sokolov e Dikarev (1995)	1.6	4.3	8.3	27	14	-	6.5
$I_{max}$	REBOUND	3.64	0.33	0.15	0.091	0.091	0.071	0.025
	Krivov, Sokolov e Dikarev (1995)	3.4	0.31	0.14	0.087	0.068	-	0.023
$T_{I_{max}}$	REBOUND	1.6	4.3	8.3	26	25	17.35	6.5
	Krivov, Sokolov e Dikarev (1995)		4.3	8.3	27	14	-	6.5

Fonte: Produção do próprio autor

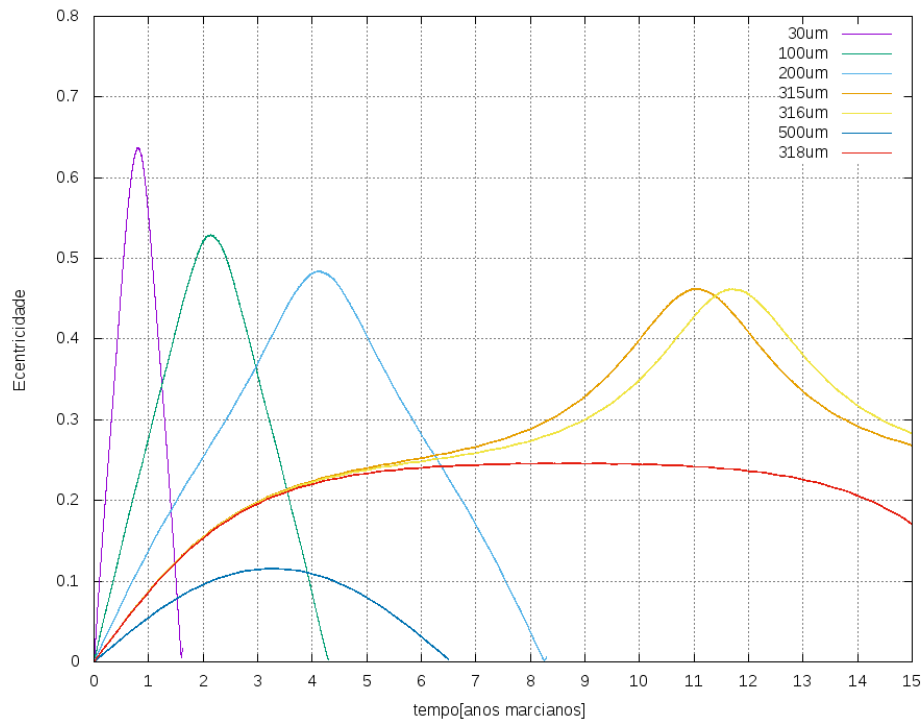
Com o intuito de analisar se a dinâmica das partículas é alterada quando variamos seus tamanhos, incluímos à simulação também a força devido ao achatamento planetário e verificamos o comportamento para diversos tamanhos (Figura 7.19).

Em Krivov, Sokolov e Dikarev (1995) foi verificado que para o raio  $\approx 315 \mu m$  surge uma mudança de comportamento na excentricidade, como pode ser observado na Figura 7.20. Conforme diminuimos o raio do grão, este valor passa perto do valor de transição de comportamento e a amplitude da excentricidade salta de 0.25 a 0.45. Podemos observar o mesmo efeito em nossas simulações, que também mostram o comportamento da súbita mudança na dinâmica, entretanto perto dos valores de raios entre  $317 \mu m$  e  $318 \mu m$ . Abaixo deste valor de raio, a dinâmica distingue-se nitidamente do movimento sem perturbações devido ao achatamento planetário. Essa diferença que ocorre entre os nossos resultados e dos encontrados em Krivov, Sokolov e Dikarev (1995) pode ser atribuída aos métodos de integração diferentes, que em nossos resultados foi utilizado o integrador IAS15 e do outro autor não foi especificado.

A comparação dos nossos resultados com os encontrados no artigo para todos os raios utilizados, pode ser observada na tabela 7.9 (similar a tabela 7.8).

Da mesma forma, podemos analisar ambas as forças aplicadas a partículas ejetadas de Deimos. Mas no artigo não foi encontrado nenhum fenômeno que cause esta mudança de comportamento na excentricidade, como ocorre em Phobos. Assim não faremos uma análise completa, como fizemos anteriormente. Nos restringiremos a análise feita apenas para partículas de tamanho de  $20 \mu m$  e  $40 \mu m$ , que foram ser observadas na Figura 7.17 e comparada com a Figura 7.18 do artigo.

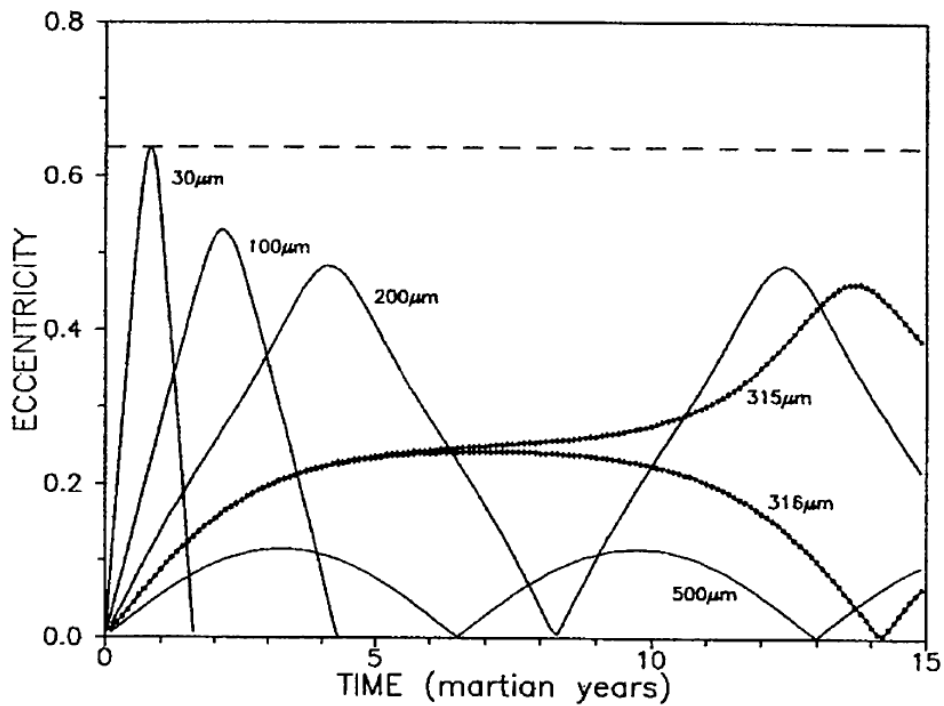
Figura 7.19 – Evolução orbital da excentricidade para partículas de diferentes tamanhos ejetados de Phobos sob a influência da pressão de radiação e o achatamento planetário.



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 7.20 – Evolução orbital da excentricidade para partículas de diferentes tamanhos ejetados de Phobos sob a influência da pressão de radiação e o achatamento planetário.

A.V. KRIVOV ET AL.



Fonte: Krivov, Sokolov e Dikarev (1995)



## 7.5 APLICAÇÃO DO ESTUDO DE ESTABILIDADE DEVIDO AO DIPOLO ALINHADO DA FORÇA DE LORENTZ

Partículas de poeira são afetadas por uma série de forças não gravitacionais, como a pressão de radiação solar e eletromagnetismo, que podem, de certa forma, esculpir o movimento orbital de maneiras interessantes. Como os planetas gigantes estão longe do Sol e os anéis de poeira estão normalmente próximos de seus planetas, a pressão de radiação geralmente é uma perturbação fraca perante a gravidade do planeta. Entretanto, a força eletromagnética agindo nos grãos de poeira carregados devido a interação com o campo magnético planetário, pode ser bastante forte. Em particular, os grãos de poeira carregados e menores que uma fração de um micrão de raio são mais fortemente afetados pelo eletromagnetismo do que a gravidade.

As partículas de poeira no espaço adquirem cargas elétricas de várias maneiras. O carregamento de um grão depende de suas propriedades físicas e também do seu histórico de carga. Diversos processos agem nestes sistemas, de forma que podem carregar os grãos positivamente e negativamente até que o grão atinja uma carga de equilíbrio. A carga em que o grão assume modifica a sua órbita conforme a força eletromagnética causada pelo planeta que atua nesta partícula carregada.

Entender qual carga de equilíbrio devemos assumir em cada sistema de anéis de poeira para que tenhamos uma orbital estável pode ser de certa forma complicado ou até mesmo trabalhoso. Para isto fizemos uso do artigo Jontof-Hutter e Hamilton (2012a) que explorou a estabilidade de grãos de poeira positivos e negativos lançados a partir de sistemas de anéis com velocidade locais Keplerianas. Foi gerado um mapa das regiões de instabilidade devido a força de Lorentz, registrado as regiões onde grãos de poeira são levados a escapar ou colidir com o planeta. Foi aplicado os modelos para Júpiter, Saturno e a Terra, cujos campos magnéticos são razoavelmente bem representados por dipolos alinhados.

Para gerar os mapas de instabilidade, o modelo trata a carga de grãos como constante e negligenciam  $J_2$ , outras componentes de ordem superior do campo gravitacional e a pressão de radiação. O planeta foi modelado com um campo gravitacional esfericamente simétrico, e um campo magnético dipolar centrado e alinhado. Para os grãos negativos e positivos, foram executados simulações para uma grade de 80 valores de  $L$  e 100 distâncias de lançamento (chamados de  $r_L$ ). São feitas integrações utilizando o Runge-Kutta de quarta ordem, onde os grãos são lançados a uma latitude inicial de  $\lambda = 0.01$  e são seguidos até 0.1 ano. Os raios de grão ( $a_d$ ) em micrômetro são calculados assumindo uma densidade de  $1g/cm^3$  e um potencial elétrico de  $\pm 5V$

Faremos uso das cargas de equilíbrio e regiões de estabilidade para gerarmos simulações no REBOUND aplicando a força de Lorentz devido ao dipolo magnético em partículas de poeira nos sistemas de Júpiter e da Terra. Em todas as simulações serão utilizadas o integrador IAS15 com a precisão padrão de  $1 \times 10^{-9}$  e para a aplicação da força será utilizando a biblioteca de forças que criamos. Todos os parâmetros das simulações são dados na tabela 7.10 com a constante gravitacional  $G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  e a velocidade da luz  $c = 299792458 \text{ m/s}$ , todos os valores estão em unidades do SI.

Tabela 7.10 – Condições iniciais dos planetas nas simulações feitas com o REBOUND. Todos os valores estão em unidades de SI. Sendo  $M_p$  massa do planeta,  $R_p$  o raio,  $g_{1,0}$  o coeficiente harmônico esférico do campo magnético e  $\Omega_p$  a velocidade de rotação em radianos por segundos.

	<b>Júpiter</b>	<b>Terra</b>
$M_p$ (kg)	$1898.6 \times 10^{24}$	$5.9736 \times 10^{24}$
$R_p$ (m)	$71398 \times 10^3$	$6378 \times 10^3$
$g_{1,0}$ (T)	$4.218 \times 10^{-4}$	$-0.3339 \times 10^{-4}$
$\Omega_p$ (rad/s)	$1.7586 \times 10^{-4}$	$7.3 \times 10^{-5}$

Fontes: Murray e Dermott (1999) e Jontof-Hutter e Hamilton (2012a)

Para Júpiter o mapa dado na Figura 7.21 mostra o destino de 8000 grãos de poeira negativos e 8000 positivos de diferentes raios ( $a_d$ ), no qual é possível encontrar regiões complexas de instabilidade. As áreas em branco são as regiões de estabilidade e as regiões em cinza determinam as regiões de instabilidade. Os grãos de poeira carregados negativamente na Figura 7.21a exibem apenas instabilidade para valores  $L$  moderadamente altos. Alguns grãos sentem forças de restauração de alta latitude (localmente instável, cinza claro), enquanto outros colidem com o planeta em alta latitude (localmente e globalmente instável, cinza mais escuro). Para separar esses grãos globalmente estáveis dos que estão localmente estáveis, foi escolhido um limite de latitude em  $\lambda_m = 5^\circ$ . Embora  $5^\circ$  seja uma latitude pequena, é muito maior que a latitude de lançamento de  $0.01^\circ$ . Quaisquer grãos excitados além do  $\lambda_m$  são localmente instáveis (JONTOF-HUTTER; HAMILTON, 2012a).

A linha tracejada horizontal em ambos os painéis indica a distância orbital síncrona em  $R_{syn} = 2.24R_p$  para Júpiter. As regiões mais escuras, vistas apenas no painel (b), são grãos instáveis que colidem com o planeta (aqueles com  $r_L < R_{syn}$ ), ou escapam para além de  $30R_p$  (de  $r_L > R_{syn}$ ) em latitudes menores que  $5^\circ$ . Para o mapa de Júpiter também foi ilustrado um limite derivado por Northrop e Hill (1982b) para o limiar entre trajetórias estáveis e instáveis para poeiras negativamente carregadas e foi descoberto que os grãos lançados dentro de uma certa distância deveriam deixar o plano equatorial (curva NH82 na Figura 7.21a). A linha tracejada horizontal nos mapas indica a distância orbital síncrona ( $R_{syn}$ ), onde o movimento médio da partícula no momento de lançamento  $n_L$  é igual a velocidade de rotação  $\Omega_p$  do planeta. Para as configurações de campo magnético dos planetas gigantes, um grão de poeira carregado negativamente gira em direção à órbita síncrona, enquanto quando carregado inicialmente com carga positiva se afasta deste local. De fato, alguns grãos positivamente carregados são instáveis e colidem com planeta se lançados dentro de órbita síncrona, ou são expelidos se lançados além dessa distância.

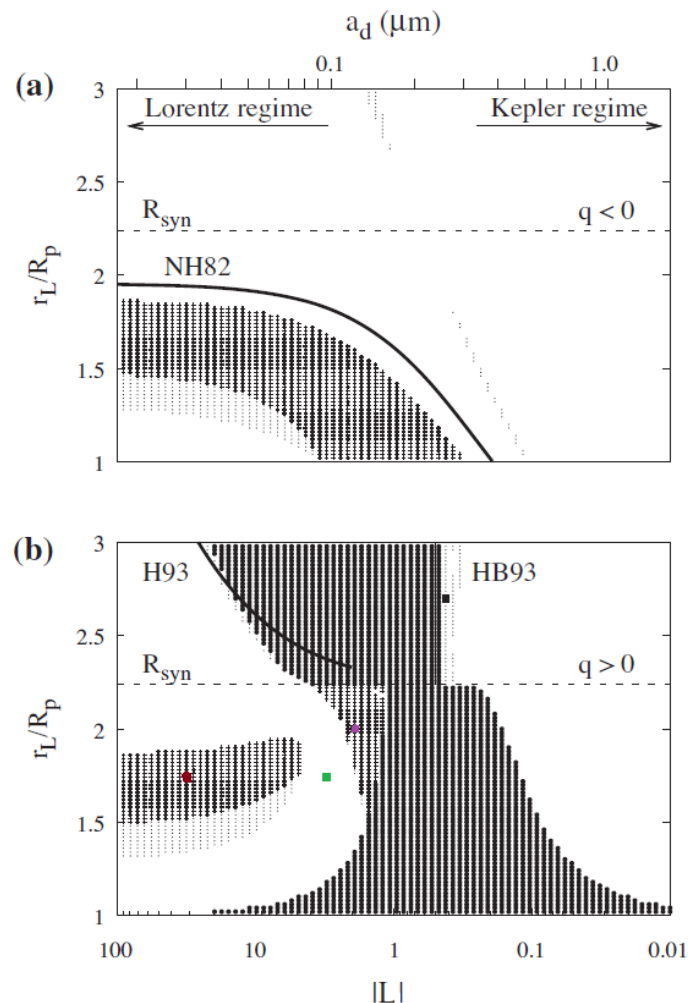
Para verificar a estabilidade, exploramos a trajetória de um grão carregado positivamente em uma órbita estável (ponto verde na Figura 7.21), no regime onde a força eletromagnética é dominante e que permanece estável em baixa latitude. Lançamos a partícula a uma distância de  $r_L = 1.74R_p$  com  $L = 3.04$  e  $a_d = 0.097\mu m$  e integramos com o REBOUND considerando o planeta com os parâmetros apresentados na tabela 7.10. Podemos observar na Figura 7.22 que a partícula sofre uma grande oscilação no semieixo maior, mas a variação da latitude é baixa de tal forma que o grão se mantém em uma órbita estável. Podemos comparar nossos resultados com a Figura 7.23 retirado do artigo Jontof-Hutter e Hamilton (2012a) para o mesmo sistema.

Para o caso de órbitas instáveis, para exemplificar o que ocorre quando alteramos o tamanho da partícula e que afeta diretamente o valor de do parâmetro  $L$ , integramos um grão localizado no ponto vermelho no mapa. A Figura 7.24 mostra a trajetória de um grão que se torna instável e colide com o planeta em alta latitude. Podemos comparar novamente nossos resultados com o dado na Figura 7.25 retirado de Jontof-Hutter e Hamilton (2012a).

Uma outra interação mais sutil é ilustrada na Figura 7.26. Este grão está fora da região de instabilidade na qual os grãos colidem com o planeta em baixa latitude (cinza mais escuro). Entretanto, as perturbações levam à instabilidade e, por fim, o grão atinge o planeta em alta latitude. O mesmo comportamento pode ser observado na Figura 7.27.

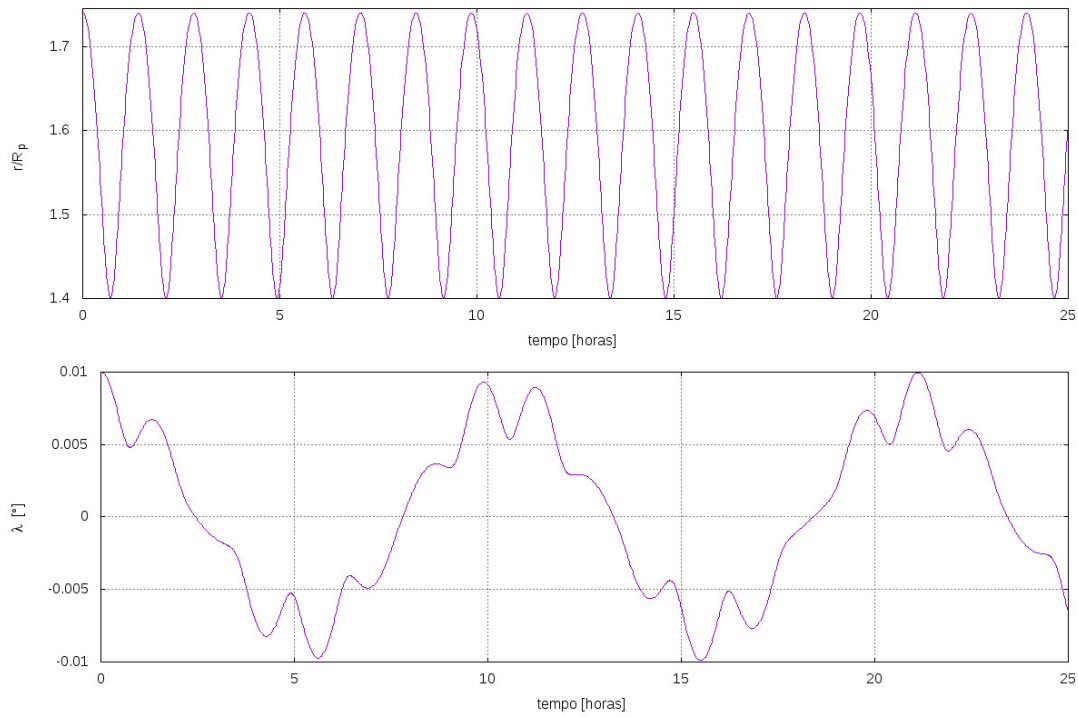
Ambos os comportamentos de instabilidade seguem exatamente o mesmo padrão do resultado em Jontof-Hutter e Hamilton (2012a), em que a trajetória do grão de poeira se torna instável e colide com o planeta em alta latitude. Estes pequenos grãos espiralam linhas de campo magnético, que para um dipolo são dadas por  $r/\cos\lambda^2 = r_L$  (PATER; LISSAUER, 2001). A colisão com o planeta ou a reflexão de um ponto de alta latitude ocorre tipicamente dentro de algumas dezenas de horas.

Figura 7.21 – Estabilidade dos grãos de poeira lançados com carga (a) (negativa) e (b) (positiva) em Júpiter. Os grãos de poeira nas regiões brancas e as áreas cinzentas mais claras sobrevivem ao longo de 0.1 anos, e podem alcançar latitudes de mais de  $5^\circ$ . Grãos nas áreas moderadamente cinza são instáveis e atingem o planeta em altas latitudes ( $\lambda > 5^\circ$ ).



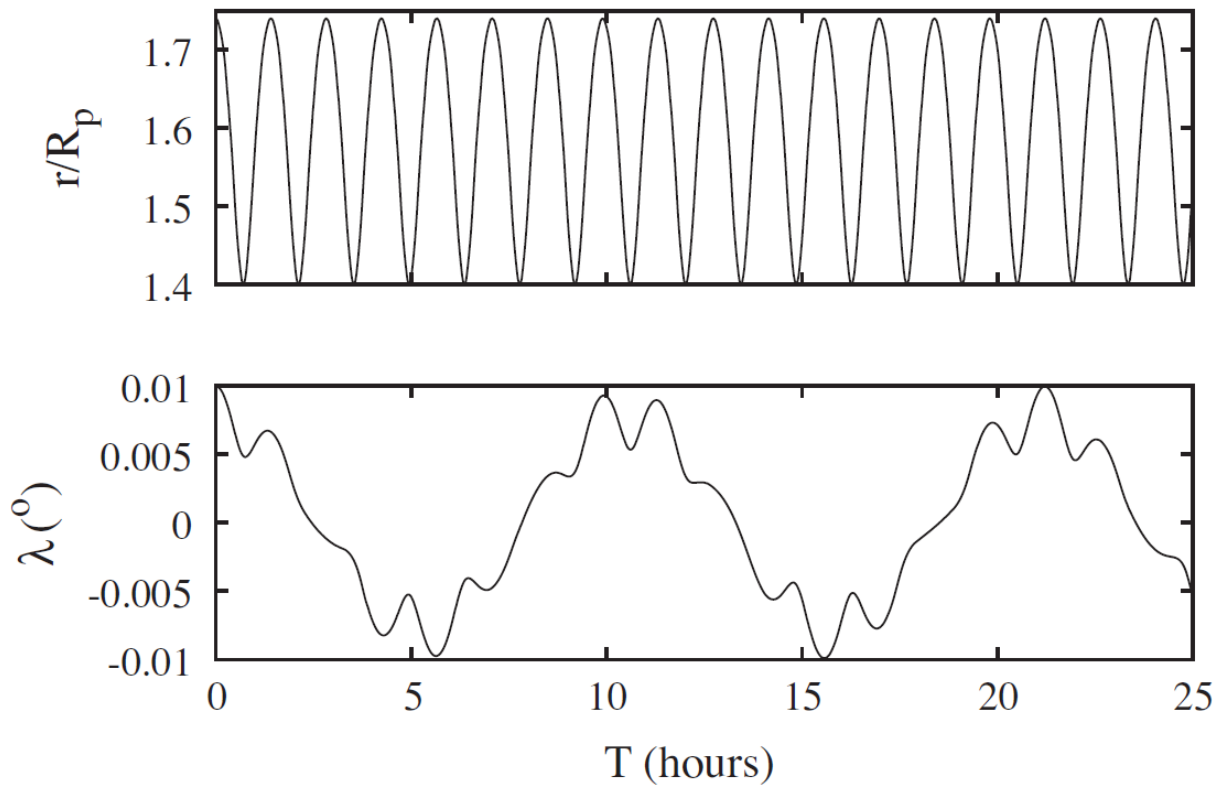
Fonte: Jontof-Hutter e Hamilton (2012a)

Figura 7.22 – A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando Júpiter após o lançamento em  $r_L = 1.74R_p$ , com  $L = 3.04$  ( $a_d = 0.097\mu m$ ).



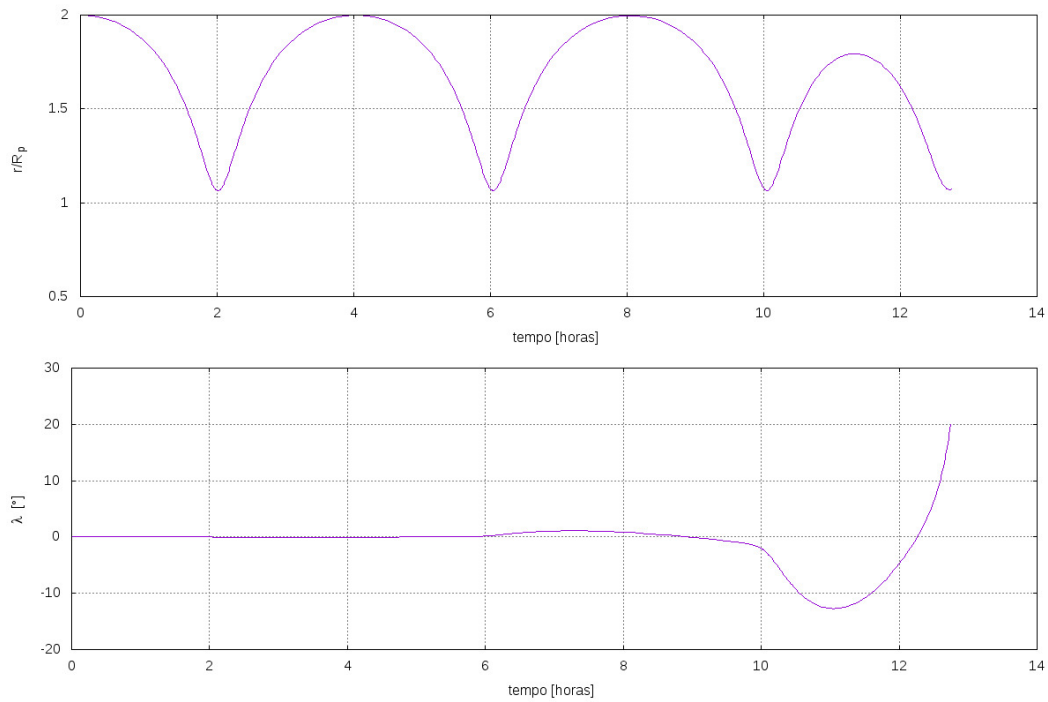
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 7.23 – A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando Júpiter, com os mesmos parâmetros da Figura 7.22 disponibilizada em Jontof-Hutter e Hamilton (2012a).



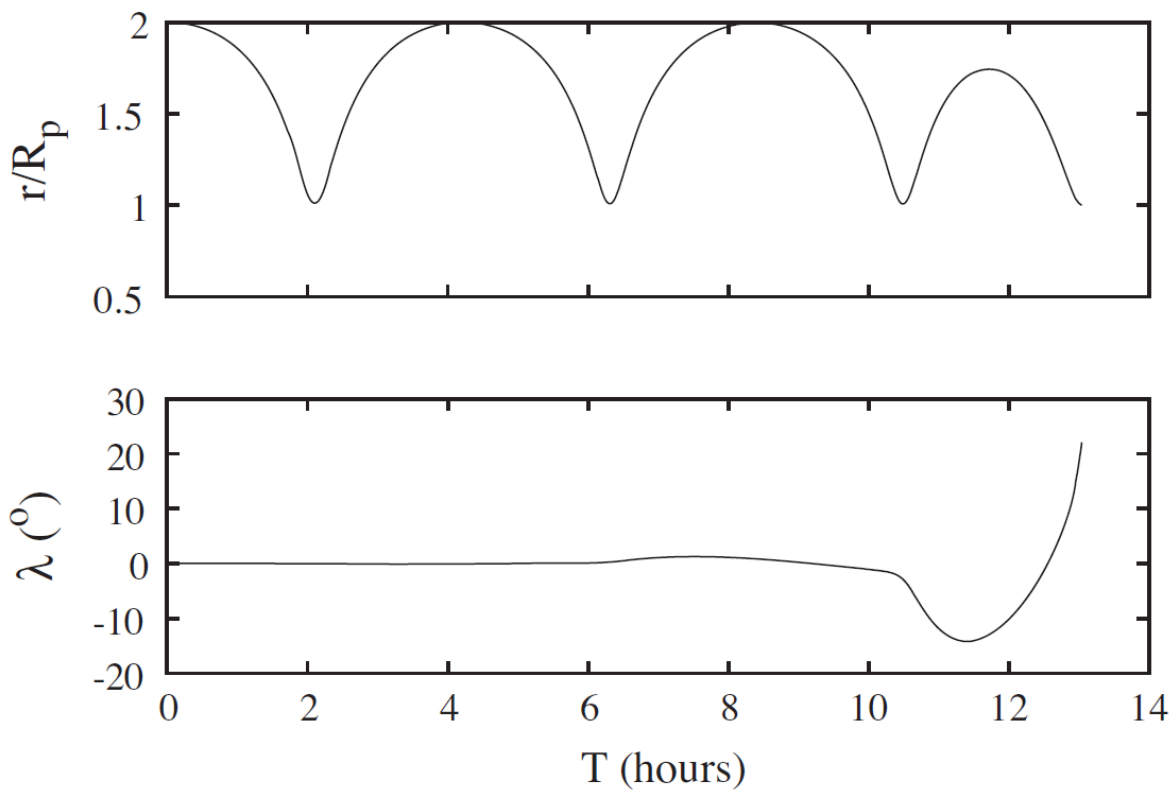
Fonte: Jontof-Hutter e Hamilton (2012a)

Figura 7.24 – A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando Júpiter após o lançamento em  $r_L = 2.0R_p$ , com  $L = 1.908$  ( $a_d = 0.122\mu m$ ).



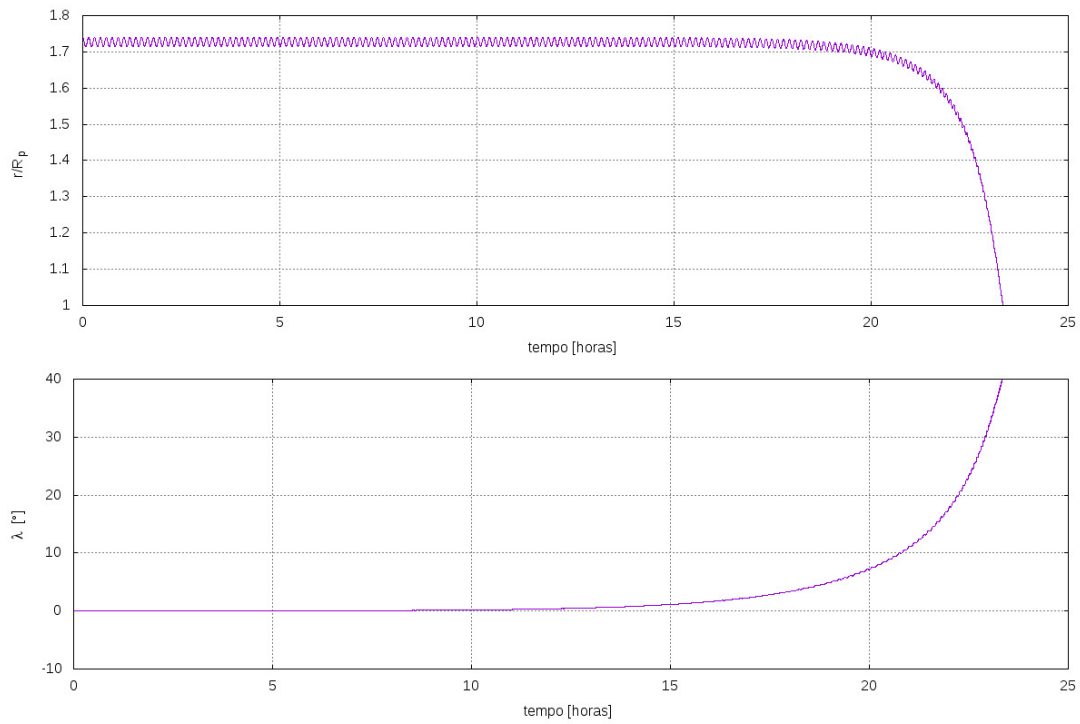
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 7.25 – A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando Júpiter, com os mesmos parâmetros da Figura 7.24, disponibilizada em Jontof-Hutter e Hamilton (2012a).



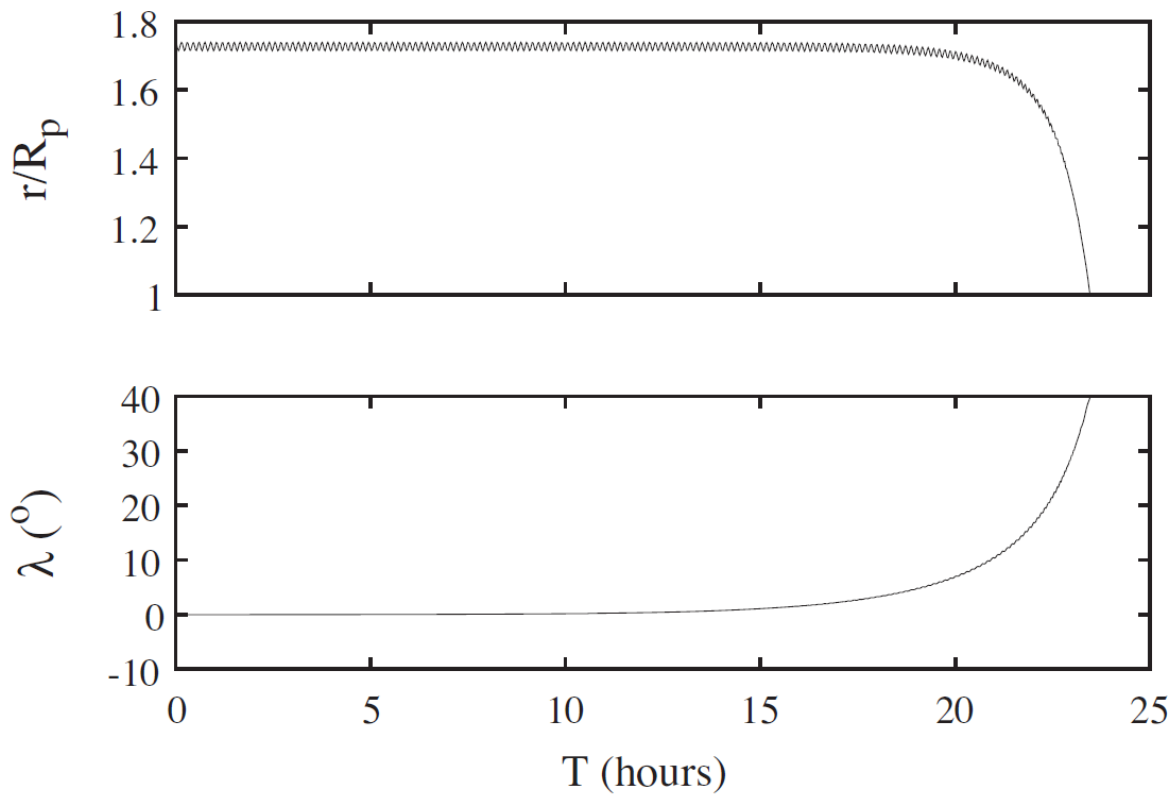
Fonte: Jontof-Hutter e Hamilton (2012a)

Figura 7.26 – A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando Júpiter após o lançamento em  $r_L = 1.74R_p$ , com  $L = 31.31$  ( $a_d = 0.03\mu m$ ).



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 7.27 – A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando Júpiter com os mesmos parâmetros da Figura 7.26, disponibilizada em Jontof-Hutter e Hamilton (2012a).



Fonte: Jontof-Hutter e Hamilton (2012a)

A análise feita pode ser aplicada a outros planetas, como Saturno e a Terra, em que seus campos magnéticos também são dominados pela componente do dipolo alinhado a  $g_{10}$ . A aparência do mapa de estabilidade para qualquer planeta depende dos parâmetros  $R_{syn}$  e  $R_p$ , e não das intensidades de campo magnético muito diferentes que, devido ao uso de  $L$ , afetam somente a conversão para raio de grão ( $a_d$ ). A distância orbital síncrona é um pouco mais próxima da superfície planetária em Saturno ( $R_{syn} = 1.86R_p$ ) do que em Júpiter ( $R_{syn} = 2.24R_p$ ), enquanto que na Terra ( $R_{syn} = 6.61R_p$ ) está muito mais distante. Isso leva a diferenças interessantes entre os planetas.

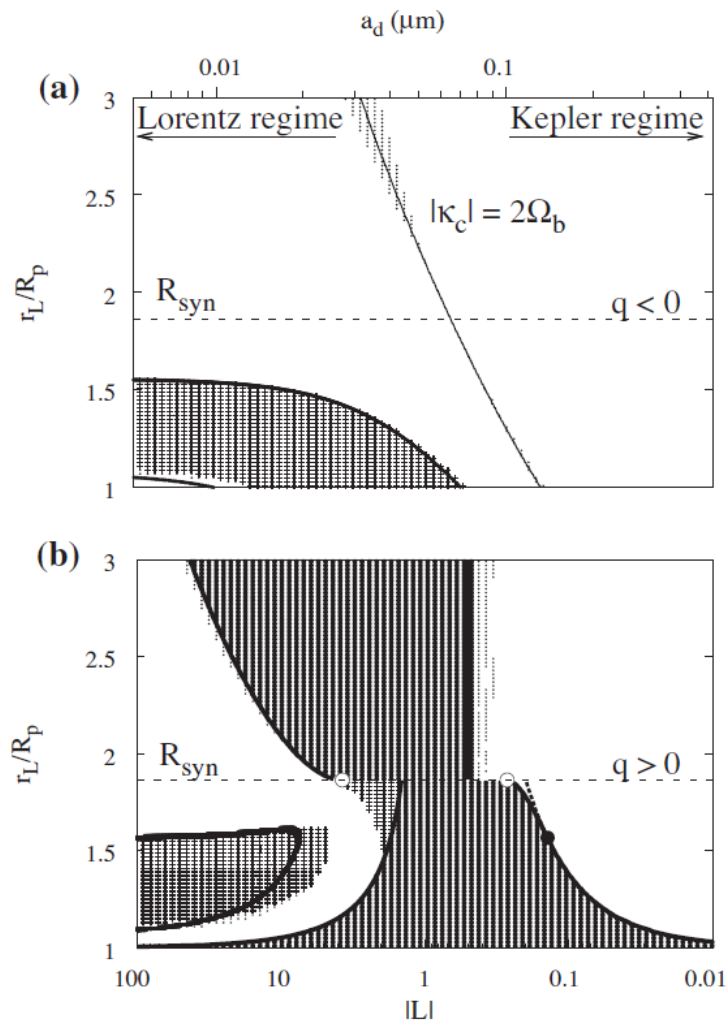
Um dipolo centrado e alinhado é uma excelente aproximação para o campo magnético de Saturno. Para gerar o mapa de instabilidade de Saturno, foi tomado  $g_{10} = 0.2154$  Gauss e traçado os limites analíticos de estabilidade na Figura 7.28. Todas as condições iniciais e curvas teóricas são como na Figura 7.21. Uma órbita síncrona mais baixa em Saturno empurra a instabilidade. Comparando a Figura 7.28 com Figura 7.21 vemos que a proximidade da superfície em Saturno faz com que todos os grãos localmente instáveis colidam fisicamente com o planeta. Isso acontece tanto para grãos negativos quanto para grãos positivos. Foi feito um sombreado mais escuro de cinza que significa a baixa latitude de colisão ou escape, a sombra intermediária indica colisões de alta latitude e o cinza mais claro significa grandes instabilidade. Para cargas negativas (a) existe apenas uma pequena região estável perto de ( $r_L = R_p, L = 50$ ) devido à  $R_{syn}$  menor de Saturno. Além disso, devido à proximidade com Saturno, quase todos os grãos que são localmente instáveis verticalmente de fato atingem o planeta. (b) cargas positivas. Tal como acontece com os grãos negativos, quase todos os grãos instáveis atingem Saturno. A região de instabilidade de Saturno (cinza mais escuro) se parece muito com a de Júpiter.

Comparado a Júpiter e Saturno, o campo magnético da Terra é "invertido" com o norte magnético perto do pólo sul geográfico ( $g_{10} = -0.3339$ ). Assim na Terra,  $L > 0$  para grãos negativos. Esta "inversão" no campo faz com que os grãos positivos sejam em grande maioria estáveis, girando entre a posição de lançamento e a órbita síncrona. Já os grãos carregados negativamente são mais instáveis. A Terra também é muito menor na escala de sua própria órbita síncrona do que os gigantes gasosos e, portanto, serve como um excelente teste da precisão longe da  $R_{syn}$ . Para a Terra, a Figura 7.29 mostra o mapa de instabilidades. Dentro da  $R_{syn}$ , os grãos são instáveis e todos os grãos colidem com o planeta em baixas latitudes. Como  $R_{syn}$  é muito maior do que para Júpiter e Saturno, foi estendido a faixa das integrações para  $r_L = 10R_p$  e o limiar distante significando escape para  $r_{es} = 100R_p$ .

A Terra tem uma classe muito maior de grãos que experimentam grandes instabilidade. A maioria desses grãos, das áreas cinza-médias no mapa de estabilidade da Figura 7.29a, que liga as regiões cinza-escuras da instabilidade, colidem com o planeta em altas latitudes. Para exemplificar uma trajetória nessa classe integramos utilizando o REBOUND o sistema da Terra com as condições iniciais dadas na 7.10 é mostrado na Figura 7.30 e comparado na Figura 7.31.

Diferente de Saturno, para a Terra todos os grãos dessa região colidiram com o planeta, mas na Terra vemos três faixas brancas de órbitas que nunca saem do plano equatorial e, portanto, são energeticamente impedido de atingir o planeta ( exemplo na Figura 7.32 e comparado na Figura 7.33).

Figura 7.28 – Estabilidade de grãos carregados em Saturno modelada com um campo de dipolo centrado e alinhado.



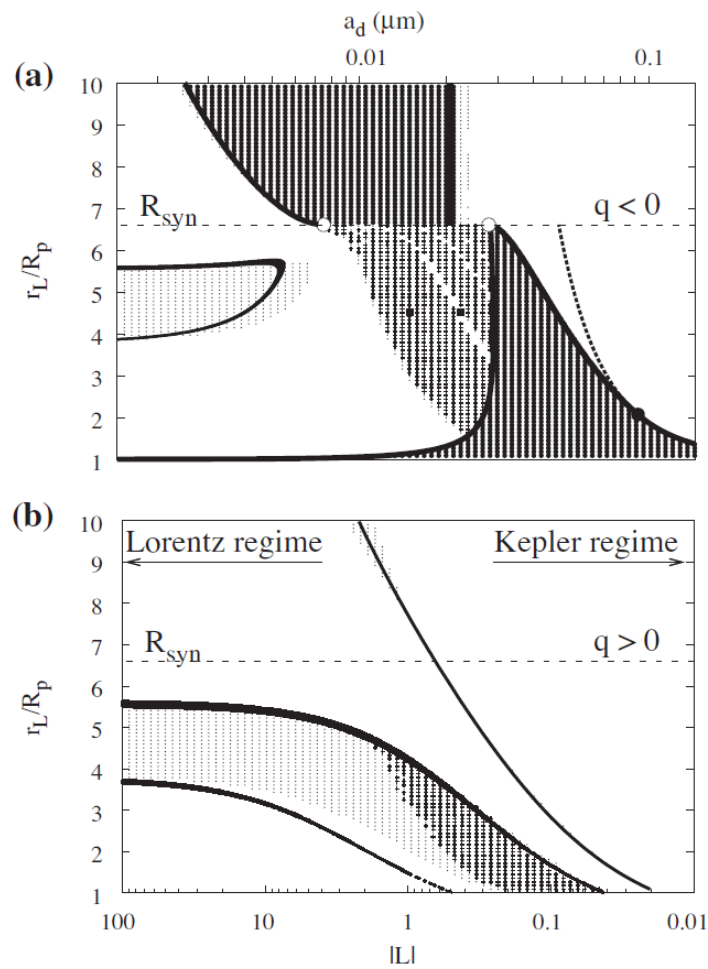
Fonte: Jontof-Hutter e Hamilton (2012a)

Embora os campos magnéticos de Júpiter, Saturno e a Terra sejam quase dipolares, cada planeta possui componentes adicionais que tornam o campo mais complicado. Saturno tem o campo mais simples e é bem representado por um dipolo deslocado para o norte por alguns milhares de quilômetros. Júpiter e a Terra têm inclinações dipolares não nulas que fazem com que o campo magnético visto por um grão orbital flutue. No entanto, como as inclinações e os deslocamentos são geralmente pequenos, esperamos que as forças radiais sejam apenas levemente afetadas, e a região de instabilidade radial permaneça praticamente a mesma. Movimentos verticais, em contraste, devem ser fortemente afetados, uma vez que uma órbita circular no plano equatorial não é mais um ponto de equilíbrio.

Portanto seguindo estes mapas de instabilidade com os nossos algoritmos e simulações no REBOUND podemos saber antes de começar uma simulação quando aplicamos a força eletromagnética se a órbita será estável ou não.

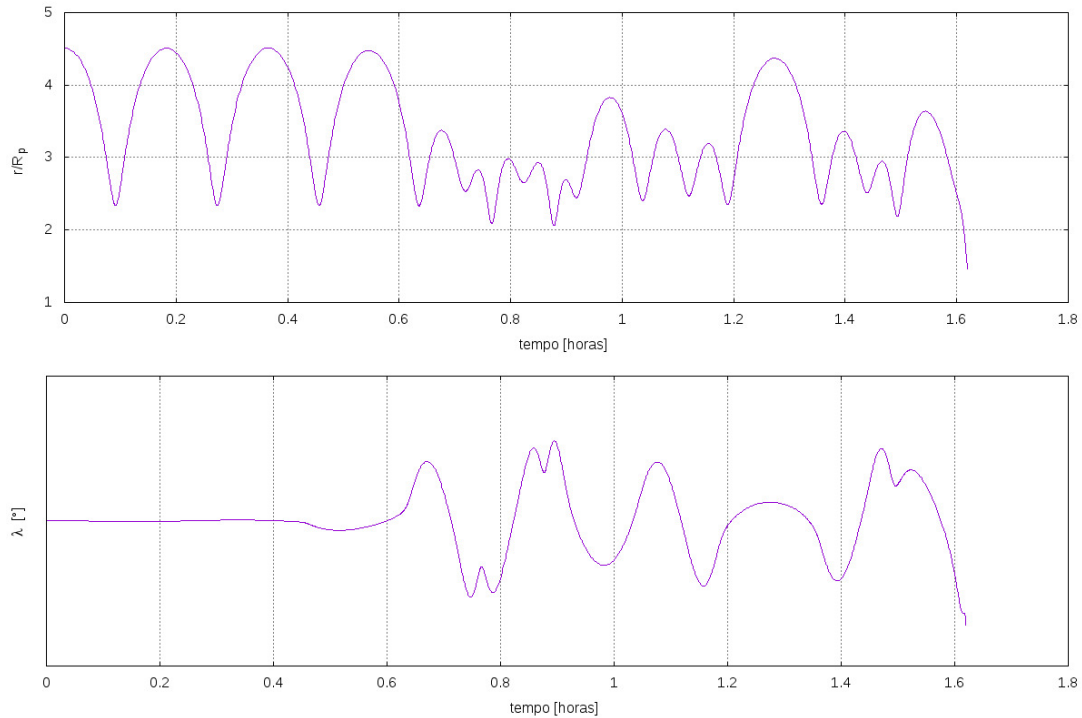


Figura 7.29 – Estabilidade de grãos carregados na Terra, modelada com um campo de dipolo centrado e antialinhado. Os círculos abertos em  $(r_L = R_{syn}, L = 2 + \sqrt{3})$  e  $(r_L = R_{syn}, L = 2 - \sqrt{3})$  e o círculo sólido, marcando a transição do limite analítico para o semi-analítico para os grãos maiores é em  $L = 0.0248, r_L = 2.074R_p$ . Os dois quadrados sólidos em (a) são trajetórias de grãos individuais ilustradas nas Figs. 13 e 14.



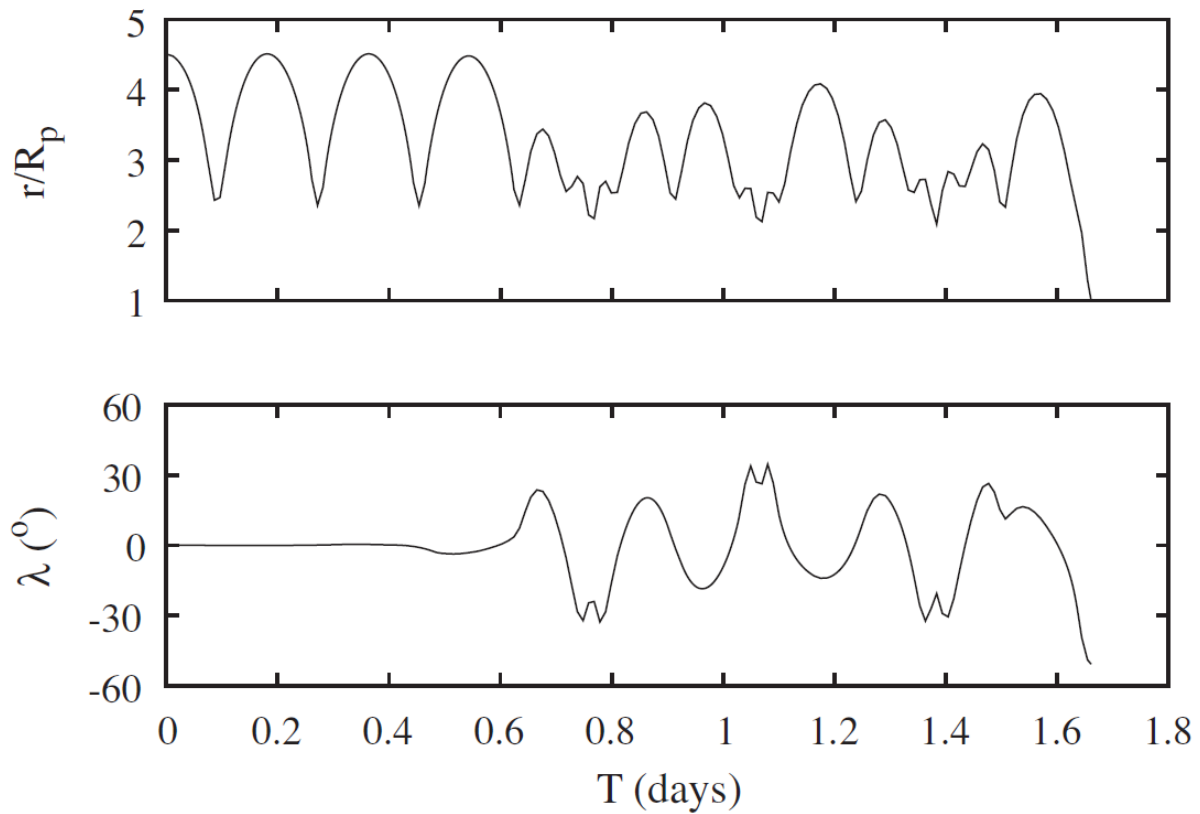
Fonte: Jontof-Hutter e Hamilton (2012a)

Figura 7.30 – A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando a Terra após o lançamento em  $r_L = 4.51R_p$ , com  $L = 0.948$  ( $a_d = 0.0149\mu m$ ).



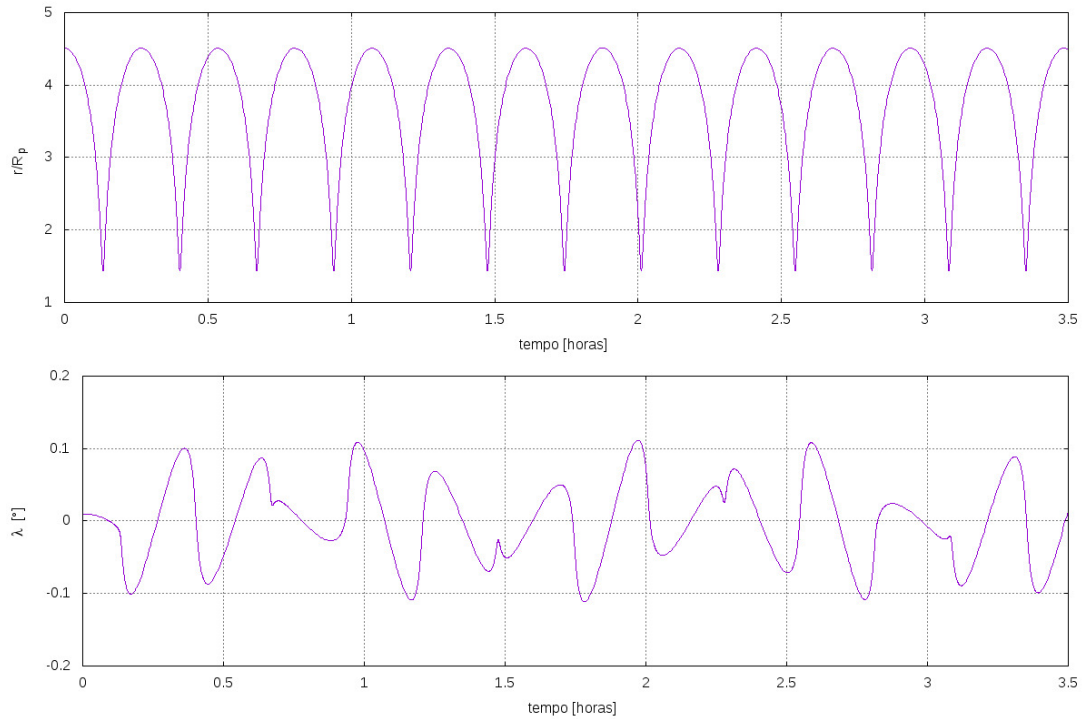
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 7.31 – A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando a Terra com os mesmos parâmetros da Figura 7.30, disponibilizada em Jontof-Hutter e Hamilton (2012a).



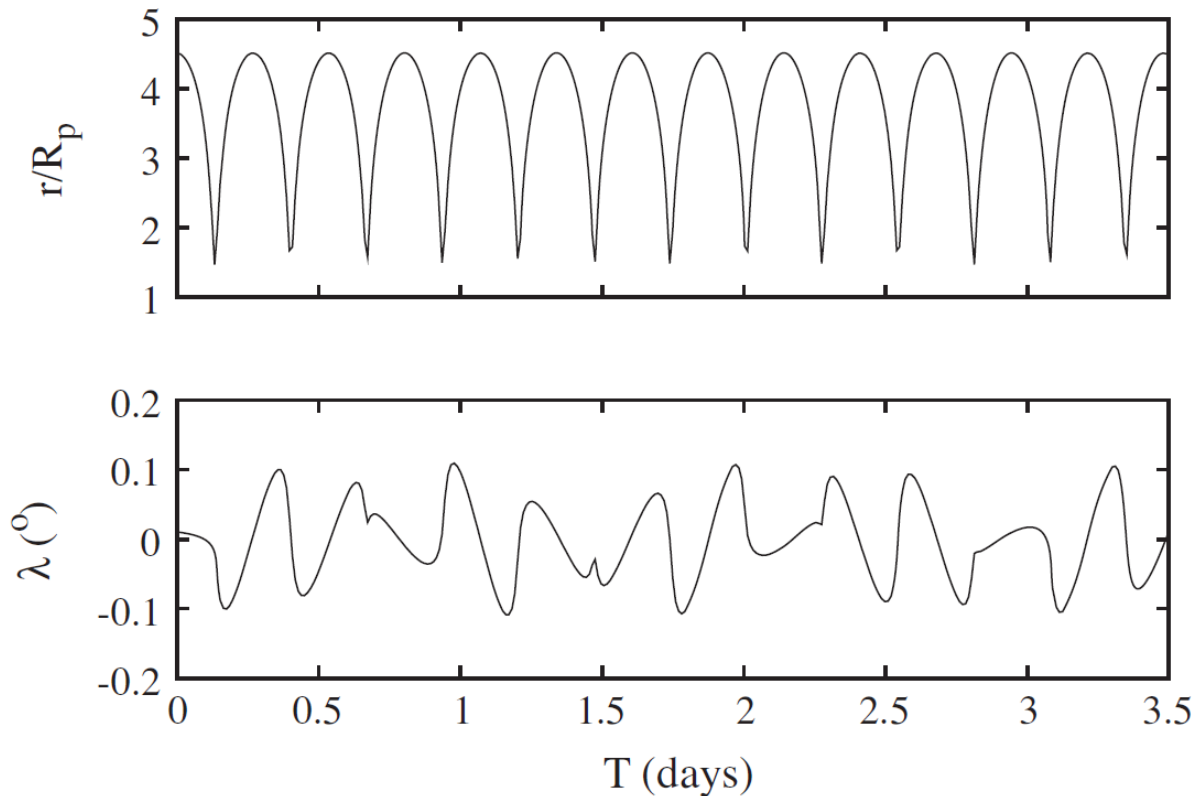
Fonte: Jontof-Hutter e Hamilton (2012a)

Figura 7.32 – A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando a Terra após o lançamento em  $r_L = 4.51R_p$ , com  $L = 0.419$  ( $a_d = 0.0224\mu m$ ).



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 7.33 – A trajetória de um grão estável positivamente carregado orbitando a Terra com os mesmos parâmetros da Figura 7.32, disponibilizada em Jontof-Hutter e Hamilton (2012a).



Fonte: Jontof-Hutter e Hamilton (2012a)

## 7.6 APLICAÇÃO DE FORÇAS PERTURBATIVAS NO ANEL E DE SATURNO

O anel E de Saturno está localizado entre 3 e 8 raios de Saturno ( $R_p$ ), com um brilho acentuado perto da órbita de Encelado ( $3.95R_p$ ) e é predominantemente composto de grãos com raio de ordem de micrometros. Devido à sua localização e tamanho dos grãos, este anel sofre fortemente perturbações, da radiação solar, da força eletromagnética e também do achatamento planetário.

Cada uma das forças causam uma perturbação distinta e a combinação delas resulta em um movimento orbital contra intuitivo da partícula perturbada. Sendo que as taxas de variação geradas pelo achatamento planetário e pela força eletromagnética em grãos de  $1\mu m$  de raio são aproximadamente iguais em magnitude, mas opostas em sinal na distância onde se encontra o anel E de Saturno. Este fato, em conjunto com a ação da força de radiação solar, faz com que as excentricidades sejam excitadas e cheguem a valores muito grandes.

Para estudar como as forças perturbativas alteram a órbita de uma partícula no anel E fizemos a integração numérica utilizando o sistema considerando Saturno localizado na origem do sistema e uma partícula de poeira localizado no anel E com as condições iniciais na tabela 7.11, parâmetros físico do planeta na 7.12 e constantes do sistema apresentados na tabela 7.13. Na integração numérica foi utilizada a biblioteca de forças perturbativas que desenvolvemos e o integrador IAS15 por um período de 55 anos, que é aproximadamente dois períodos orbitais de Saturno, desta forma é possível observar os efeitos periódicos de todas as forças.

Tabela 7.11 – Tabela com as condições iniciais da simulação numérica do anel E de Saturno:  $\rho$  densidade,  $r_g$  raio,  $a$  semieixo maior,  $e$  excentricidade e  $I$  inclinação.

<b>Partícula</b>	
$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	1.0
$r_g$ (cm)	$1.0 \times 10^{-4}$
$a$	$3.95R_p$
$e$	$1 \times 10^{-6}$
$I$ (rad)	$1 \times 10^{-6}$

Fonte: Hamilton (1993)

Tabela 7.12 – Tabela com as condições iniciais de Saturno:  $M_p$  massa do planeta,  $R_p$  o raio,  $r_{sp}$  a distância do planeta ao Sol,  $\gamma$  obliquidade,  $J_2$  o primeiro potencial gravitacional harmônico par,  $g_{1,0}$  o coeficiente harmônico esférico do campo magnético e  $\Omega_p$  a velocidade de rotação.

<b>Saturno</b>	
$M_p$ (g)	$5.68514 \times 10^{29}$
$R_p$ (cm)	$6.02680 \times 10^9$
$r_{sp}$ (UA)	9.53707
$J_2$	0.016298
$\gamma$ (°)	26.73
$g_{1,0}$ (Gauss)	0.2154
$\Omega_p$ (rad/s)	$1.63501 \times 10^{-4}$

Fonte: Produção do próprio autor

Tabela 7.13 – Os parâmetros globais utilizadas nas simulações: constante gravitacional ( $G$ ), velocidade da luz ( $c$ ) e massa do Sol ( $M_{\odot}$ ).

<b>Constantes</b>	
$G$ ( $\text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$ )	$6.6720 \times 10^{-8}$
$c$ (cm/s)	29979245800
$M_{\odot}$ (g)	$1.98911 \times 10^{33}$

Fonte: Produção do próprio autor

Para a componente devido à radiação solar consideramos os valores usuais para o Sistema Solar onde o fluxo de radiação à distância de 1 u.a. é  $\Phi = 1.360 \times 10^6 \text{ ergs cm}^{-3} \text{ s}^{-2}$  e calculamos o valor da razão da força para um grão com raio de  $1 \mu\text{m}$  e densidade de  $1 \text{ g cm}^{-3}$ , resultando em  $\beta = 0.573744663$ . Adotamos um dos potenciais típicos para uma partícula perto de Encelado que é  $-5.6 \text{ V}$  (HORANYI; BURNS; HAMILTON, 1992).

A evolução orbital de uma partícula pode ser observada na Figura 7.34. O resultado está de acordo com o esperado pela teoria, no qual a combinação das forças causam uma excitação na excentricidade sendo guiada principalmente pela força devido à pressão de radiação solar. Além disto, a combinação da força eletromagnética e do achatamento perturbam o pericentro da órbita com taxas de variação quase equivalentes em magnitude, mas não em sinal, o que fazem com que o comportamento do ângulo do argumento do pericentro seja atraído para um ponto de equilíbrio estável. É possível notar que há vários lugares em que o argumento do pericentro não está fortemente preso ao seu valor de equilíbrio; nesses locais, as oscilações em  $\omega$  são grandes e a circulação pode ocorrer. Estas circulações no argumento do pericentro ocorrem quando o Sol passa pelo plano equatorial (aproximadamente a cada 15 anos) e o argumento do pericentro começa sua transferência de um valor de equilíbrio para outro. Este comportamento também ocorre quando a excentricidade orbital é pequena, caso em que o pericentro é mal definido e pode circular rapidamente como previsto.

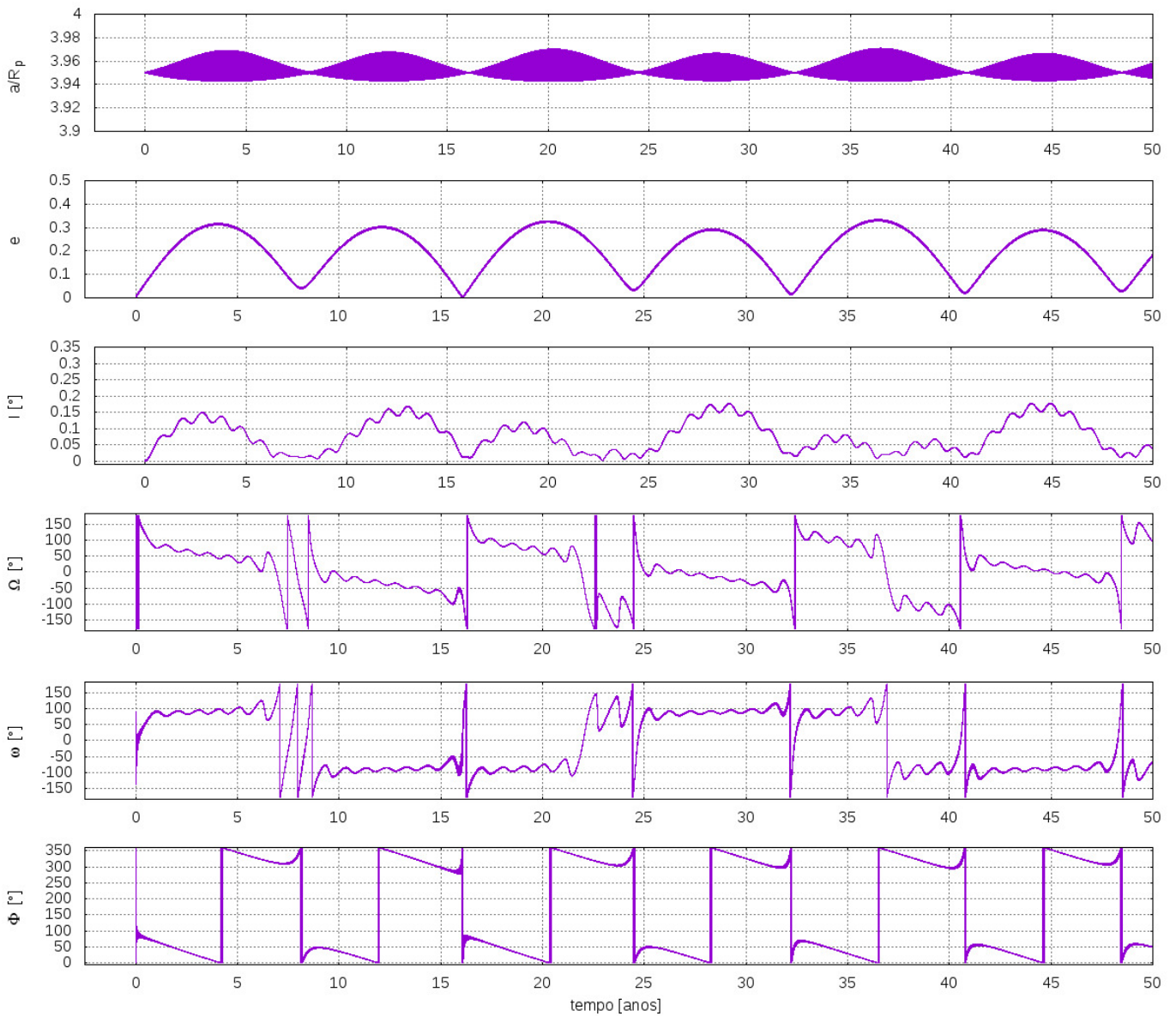
Para comparar a validade de nossos resultados, recorreremos ao trabalho de Hamilton (1993) que apresenta um estudo similar para partículas no anel E. Partindo das equações de Lorentz para as componentes do dipolo e quadrupolo foi fornecida uma estrutura para combinar todas as perturbações e demonstrar a validade das expressões resultantes comparando suas integrações numéricas às integrações das equações médias do movimento. O resultado da integração numérica pode ser verificado na Figura 7.35. Podemos observar que existe uma pequena discrepância comparado com os nossos resultados gerados pelo REBOUND (Figura 7.35).

A principal diferença entre os resultados ocorre nos valores máximos na excentricidade ( $e_{max}$ ). Em nossos resultados os valores estão em torno de  $e_{max} = 0.32$  enquanto que os de Hamilton (1993) quase chegam a  $e_{max} = 0.5$ , o que é uma diferença significativa. Este fato pode ser decorrente dos parâmetros iniciais que utilizamos, pois pode haver uma diferença entre o que é utilizado em Hamilton (1993), como os parâmetros físicos no planeta. Entretanto essas diferenças não causariam tal discordância na excentricidade, o que nos leva a questionar se existe uma diferença na magnitude das forças que estamos aplicando, principalmente no caso da força de radiação solar que é a maior responsável pela excitação da excentricidade. Quais fatores podem gerar uma diferença de resultados serão discutido na seção 7.6.1.

Para mostrar o aumento da excentricidade gerada pela força eletromagnética alteramos o valor da carga para  $-5.4 \text{ V}$  ( em oposição ao  $-5.6 \text{ V}$  da figura Figura 7.34) e também adicionamos o termo de quadrupolo alinhado do campo magnético. A Figura 7.36 mostra que houve um aumento de cerca de 0.1 na excentricidade máxima atingida quando comparado ao caso anterior. Isto ocorre devido a variação da carga, pois na seção 4.1.2 foi mostrado que o quadrupolo não gera variação na excentricidade. Já as variações de  $i$ ,  $\Omega$  e  $\omega$  foram substancialmente alterados. A inclinação dobrou de valor máximo, o que indica que o quadrupolo é certamente importante para o anel E de Saturno. Além disto, também podemos observar que os valores do argumento do pericentro fica praticamente travado em  $+90^\circ$  ou  $-90^\circ$ , que no caso anterior havia uma pequena variação em torno do ponto de equilíbrio.

Também comparamos o nosso resultado do quadrupolo do campo magnético Hamilton (1993) (Figura 7.37). Comparando com o nosso resultado da Figura 7.36, temos que existe agora uma grande discrepância dos resultados, não apenas nos valores máximos atingidos pelos elementos orbitais, mas como no próprio padrão do movimento orbital. Avaliando somente a diferença na excentricidade, que é regida pelo dipolo, a discrepância dos resultados não pode ser determinada pela pequena variação da carga da partícula, pois esta não altera a intensidade da força eletromagnética em relação as outras forças e somente esta alteração não é capaz excitar tão significavelmente a excentricidade. Por isso avaliaremos na seção a seguir quais parâmetros de entrada podem estar gerando esta diferença dos nossos resultados com Hamilton (1993), de tal maneira que resolva as divergências apresentadas nas Figura 7.34 e Figura 7.36.

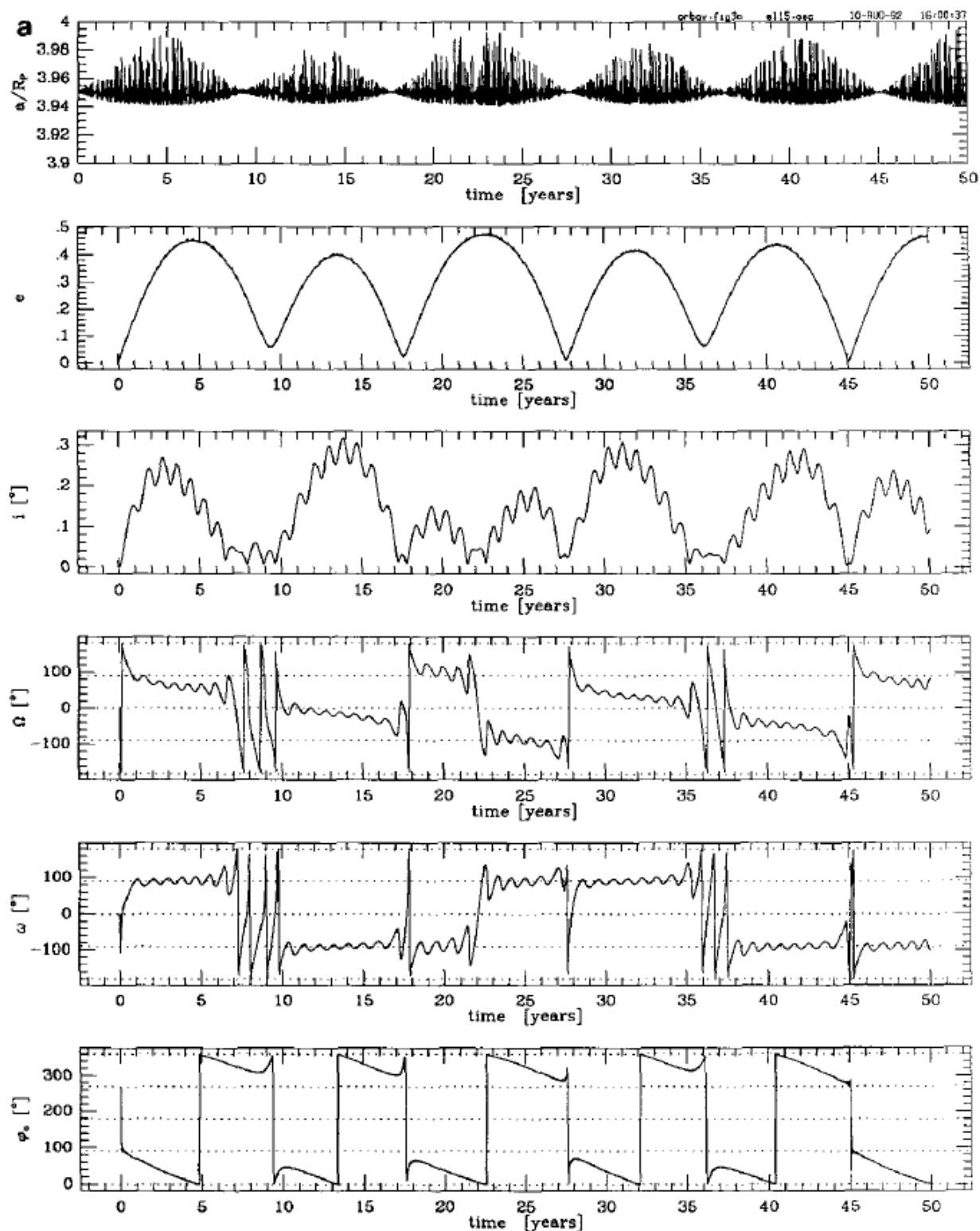
Figura 7.34 – Evolução orbital de uma partícula no anel E de Saturno, sob a influência do dipolo magnético, força de pressão de radiação e achatamento planetário, no tempo dos elementos  $a$  (semieixo maior),  $e$  (excentricidade),  $I$  (inclinação),  $\Omega$  (longitude do nodo),  $\omega$  (argumento do pericentro) e  $\Phi$  (ângulo solar).



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 7.35 – Evolução orbital do tempo dos elementos de uma partícula com anel E de Saturno, com as mesmas condições iniciais da Figura 7.34.

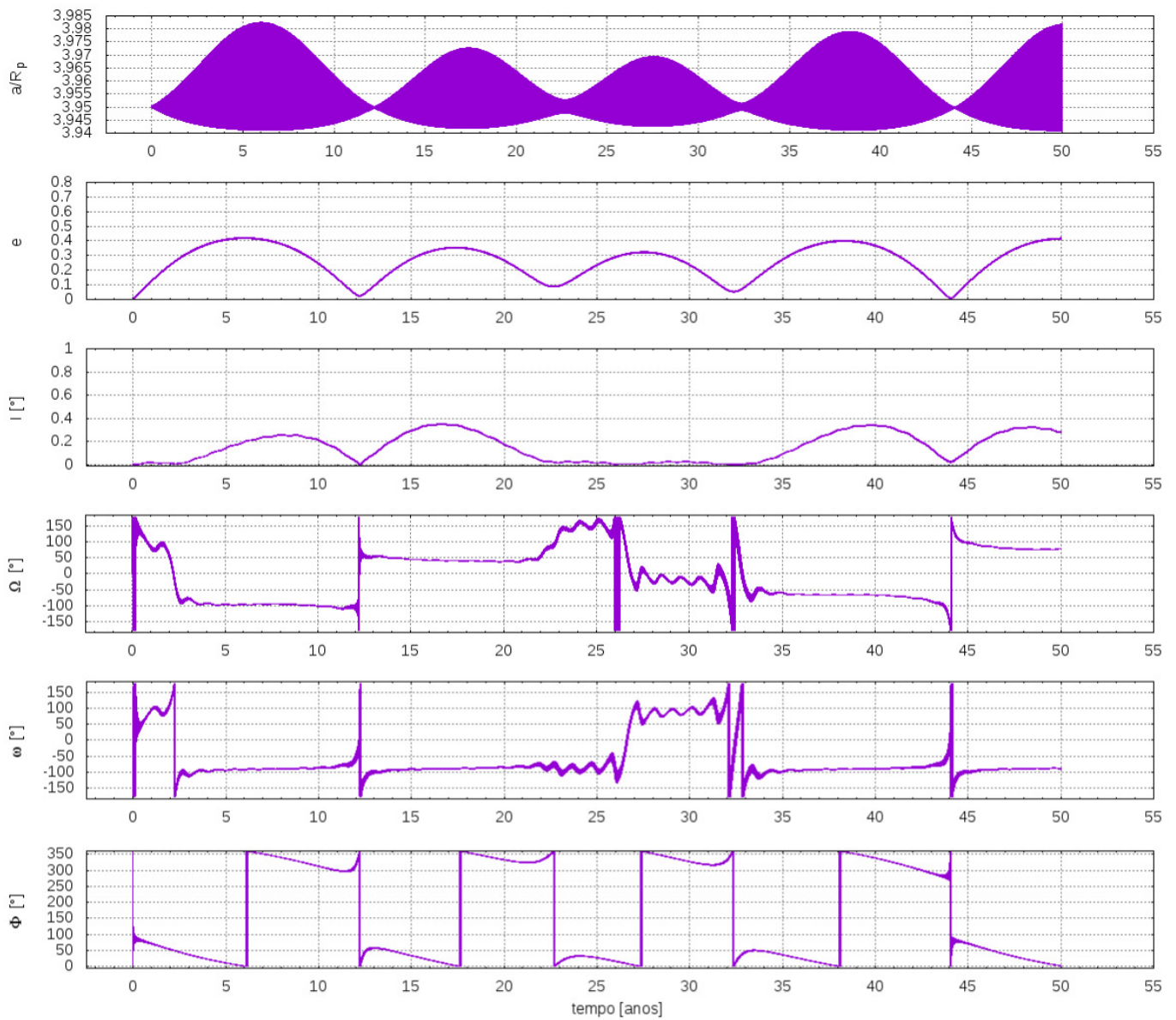
DOUGLAS P. HAMILTON



Fonte: (HAMILTON, 1993)

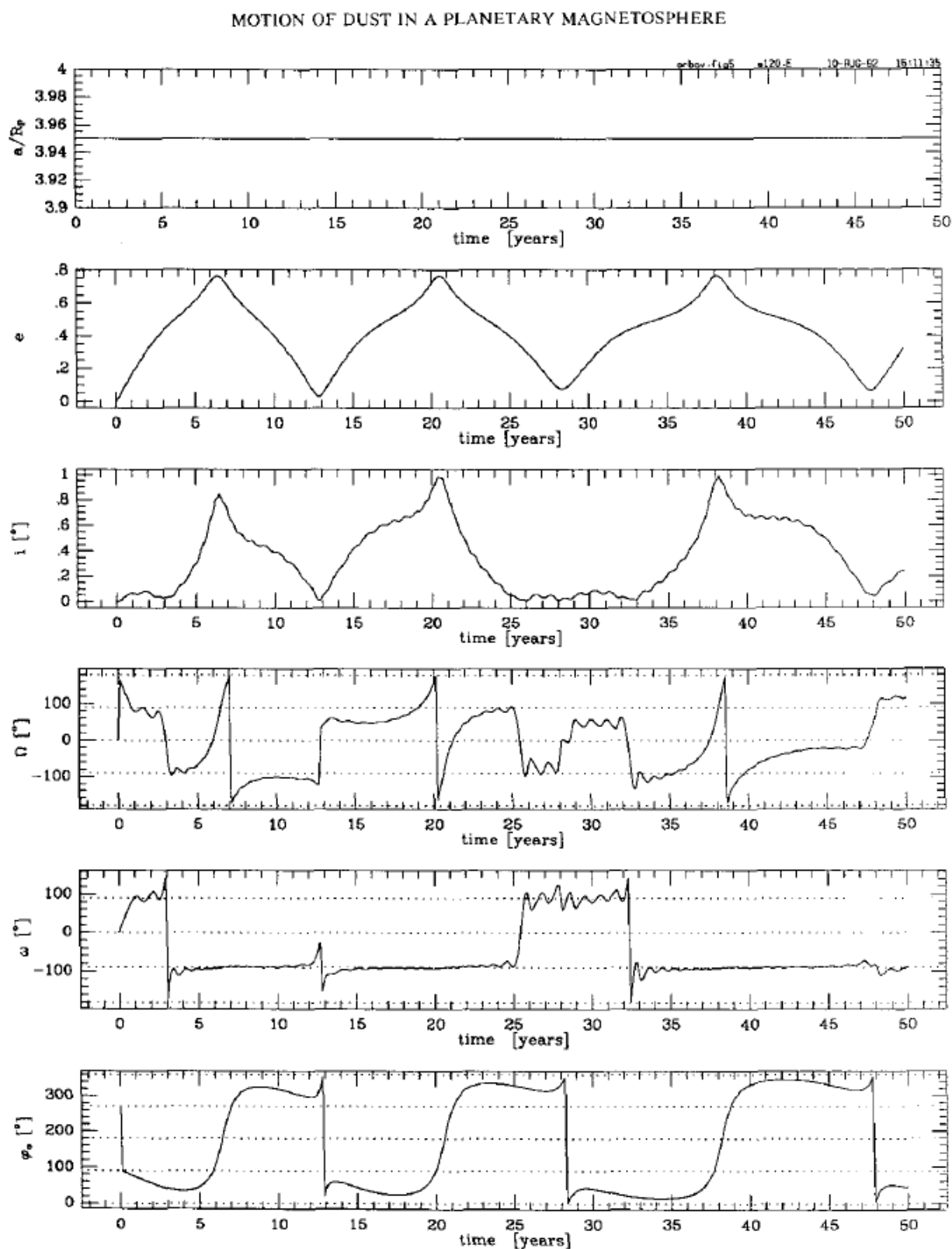


Figura 7.36 – Evolução orbital de uma partícula no anel E de Saturno, sob a influencia do dipolo e quadrupolo magnético, força de pressão de radiação e achatamento planetário, no tempo dos elementos  $a$  (semieixo maior),  $e$  (excentricidade),  $I$  (inclinação),  $\Omega$  (longitude do nodo),  $\omega$  (argumento do pericentro) e  $\Phi$  (ângulo solar).



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 7.37 – Evolução no tempo dos elementos orbitais de uma partícula no anel E de saturno sob a influencia do quadrupolo e dipolo magnético, força de radiação solar e força devido ao achatamento planetário, com as mesmas condições iniciais e parâmetros físicos da Figura 7.36.



Fonte: (HAMILTON, 1993)

### 7.6.1 Análise de como os parâmetros iniciais podem alterar a órbita da partícula no anel E.

Para entendermos melhor porque ocorre a diferença entre os nossos resultados (Figura 7.34 e Figura 7.36) e os encontrados em Hamilton (1993) (Figura 7.35 e Figura 7.37) iremos analisar quais parâmetros iniciais podemos alterar para que exista uma maior variação na excentricidade.

Em Hamilton (1993) não é feita referência se de fato foi utilizando o valor usual para a razão da força de radiação solar  $\beta$ . Isto nos leva a analisar um parâmetro que o autor define no trabalho que é  $\alpha/n = 0.00012$ , onde  $\alpha$  é a razão da força de radiação para um dado semieixo maior. A relação entre os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  é dada por:

$$\frac{2\alpha}{3n} = \frac{\beta M_{\odot} a^2}{M_p R^2} \quad (7.7)$$

onde  $R$  é a distância do planeta ao Sol. Utilizando o parâmetro dado  $\alpha/n = 0.00012$  com os dados na tabela 7.12, calculamos o valor de  $\beta = 0.82126$ .

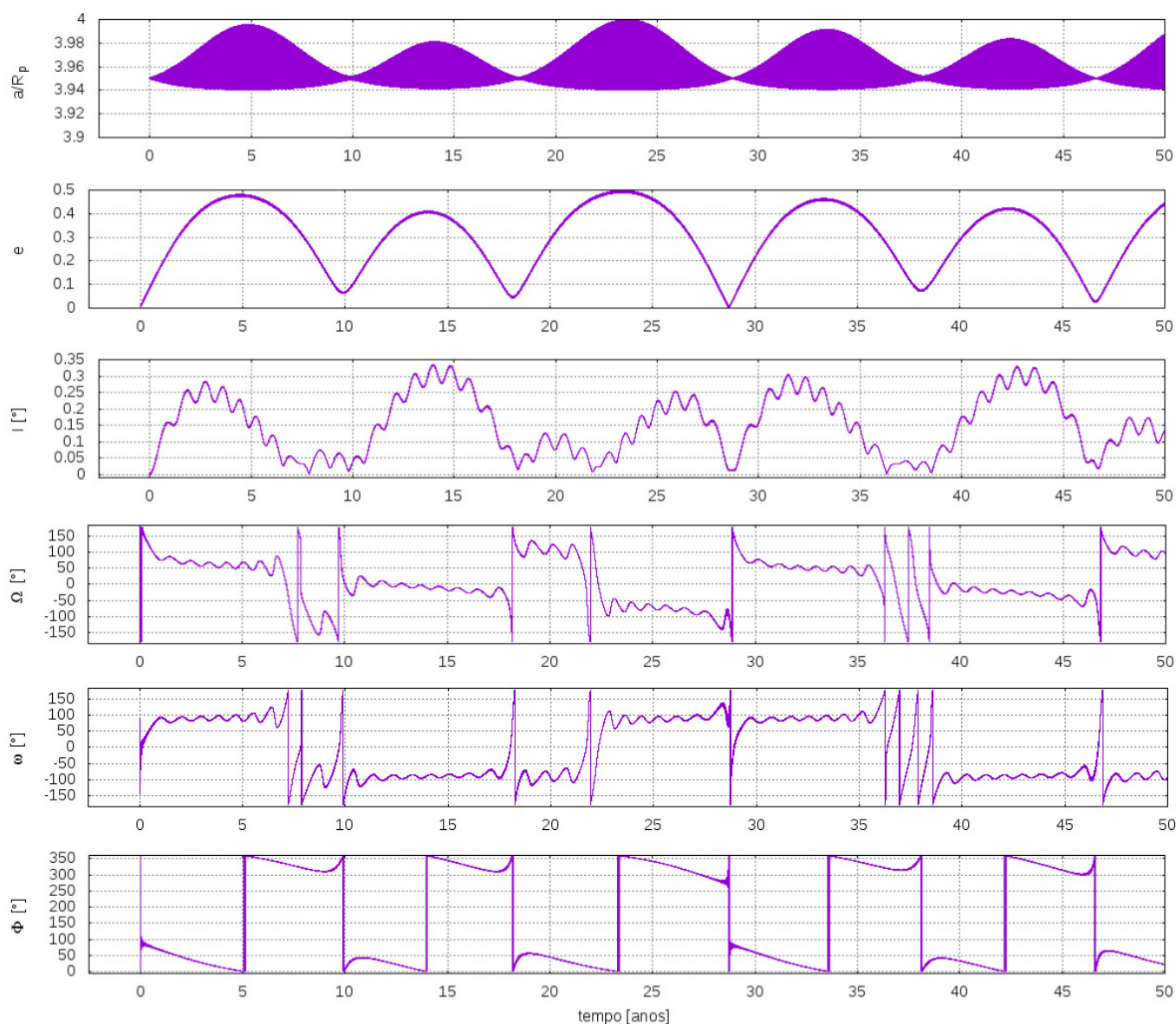
A diferença dos valores de  $\beta$  é de cerca de 40%, o que pode explicar a discrepância com os nossos resultados. Para verificar a validade desta afirmação simulamos o mesmo sistema mas alteramos o valor de  $\beta$  para o calculado. Podemos observar na Figura 7.38 que neste caso os resultados estão muito mais compatíveis com o resultado anterior (Figura 7.34). A excentricidade máxima neste caso é de 0.49 o que também gera uma excitação maior em alguns pontos específicos na inclinação, como o que ocorre em  $t = 25$  anos.

Também realizamos a simulação alterando o  $\beta$  para o caso da partícula com carga de  $-5.4$  V e sob a influência também do quadrupolo. O resultado comparando com o resultado anterior (Figura 7.36) pode ser observado na Figura 7.39. Pela figura é possível notar que houve uma maior excitação na excentricidade e na inclinação. No caso da excentricidade, o valor máximo dobrou e o da inclinação triplicou. Os períodos de variação também sofreram mudanças e conseqüentemente, os resultados utilizando o  $\beta \approx 0.82$  estão de acordo com os encontrados em Hamilton (1993).

Para tentar entender melhor esta discrepância, investigamos o artigo Hamilton e Krivov (1996) onde foi analisado o mesmo sistema, aplicando as mesmas forças para uma partícula de tamanho e potencial iguais. A evolução no tempo da excentricidade pode ser verificado na Figura 7.40b. Ainda que os artigos Horanyi (1996) e Hamilton (1993) trabalhem com o mesmo sistema eles não estão de acordo entre si. Contudo os resultados dados em Hamilton e Krivov (1996) possui um valor de excentricidade máxima mais coerente com os nossos resultados gerados com REBOUND (Figura 7.34) onde utilizamos um valor usualmente para  $\beta$ .

Como discutido anteriormente, nossos resultados para o anel E de Saturno estão mais próximos com o trabalho Hamilton e Krivov (1996). Desta forma, iremos reproduzir outros resultados deste trabalho com o intuito de verificar se nossos resultados continuarão de acordo. É importante notar uma afirmação dada no artigo que, limitando-se ao caso planar, foram encontradas várias classes de movimento que mostram que, perto de certas condições iniciais críticas, pequenas variações em parâmetros ( como o tamanho ou semieixo maior inicial das partículas), podem causar mudanças drásticas na órbita. Este efeito é importante no anel E de Saturno e de fato se não utilizarmos exatamente os mesmo parâmetros

Figura 7.38 – Evolução orbital do tempo dos elementos  $a$  (semieixo maior),  $e$  (excentricidade),  $I$  (inclinação),  $\Omega$  nodo,  $\omega$  pericentro e  $\Phi$  angulo solar.



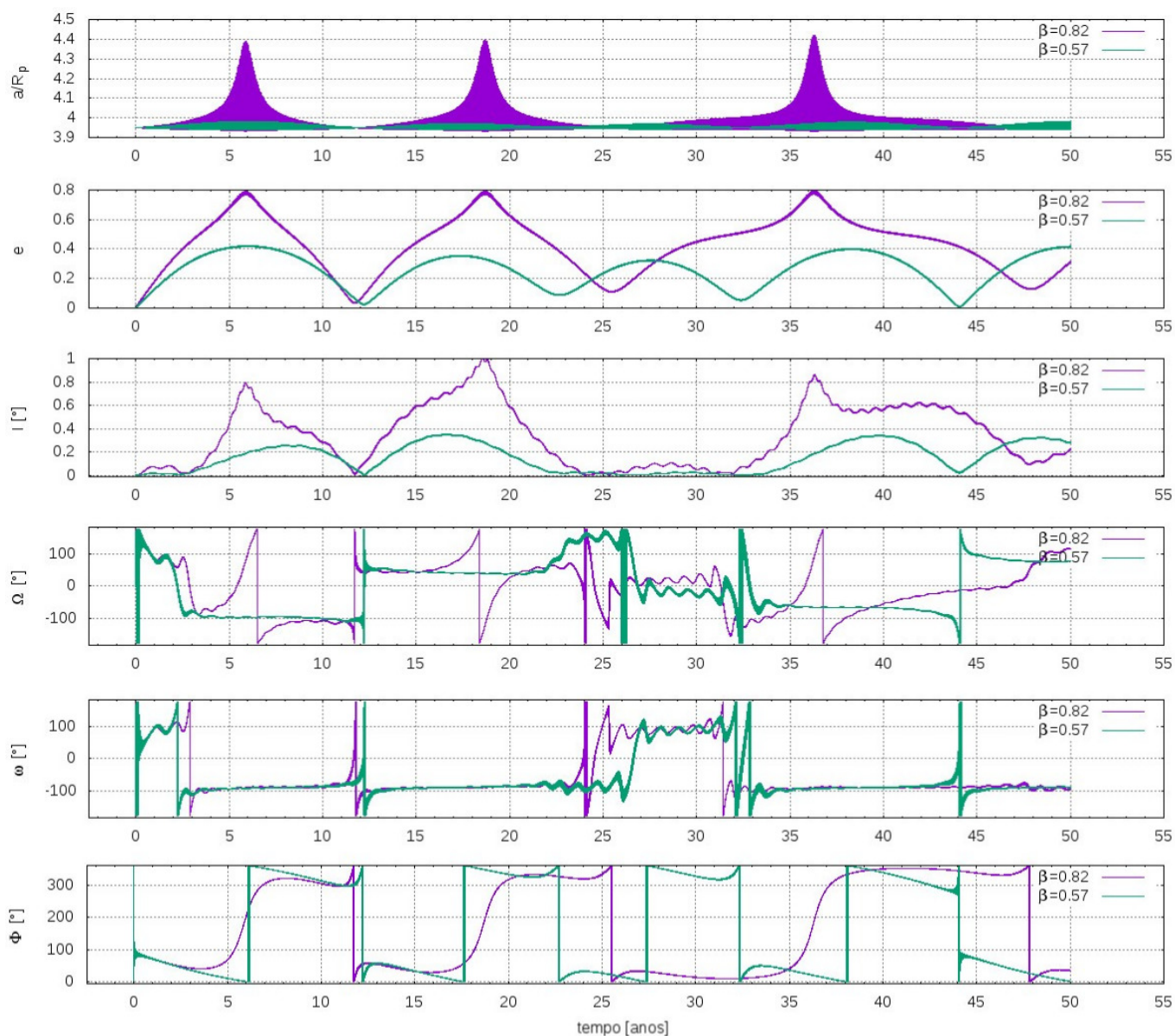
Fonte: Produção do próprio autor

iniciais o resultado final pode ter uma discrepância.

Realizando a mesma análise para partículas de diferentes tamanhos, integramos no REBOUND para verificar se os resultados seguem o mesmo comportamento. Podemos observar na Figura 7.41 que possui o mesmo padrão do resultado da Figura 7.40, mas ainda existe uma pequena discrepância, agora é bem menor, que, neste caso, podemos atribuir a uma pequena diferença nos valores das condições iniciais.

Algo que pode influenciar nesta discrepância é novamente o valor de  $\beta$ , pois é comum na literatura que seja feito um arredondamento deste valor (e. g. Mignard (1984)). Nós fizemos este teste e integramos no REBOUND com o valor de  $\beta$  arredondado e o resultado é mais próximo, pois causa uma leve excitação na excentricidade e não altera o período de variação. A diferença no período podemos atribuir ao fato de que os gráficos foram normalizados para períodos do planeta e não sabemos de fato

Figura 7.39 – Evolução orbital do tempo dos elementos  $a$  (semieixo maior),  $e$  (excentricidade),  $I$  (inclinação),  $\Omega$  nodo,  $\omega$  pericentro e  $\Phi$  angulo solar para dois valores de  $\beta$ .

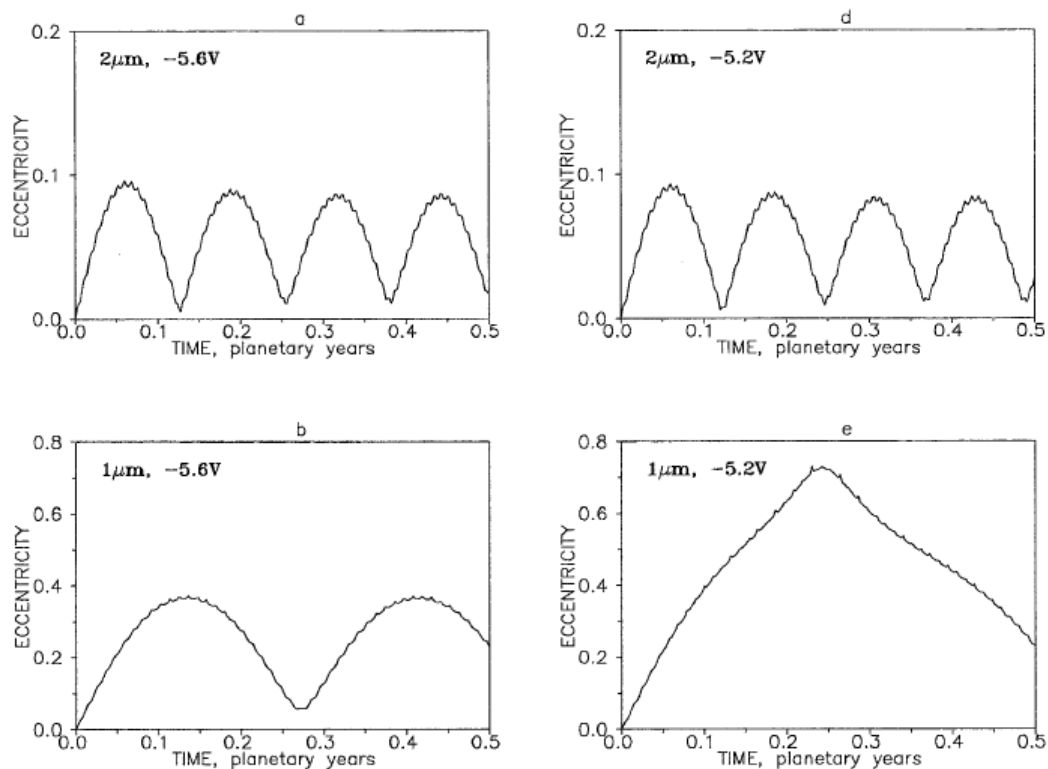


Fonte: Produção do próprio autor

quais os valores utilizados para fazer este cálculo no artigo.

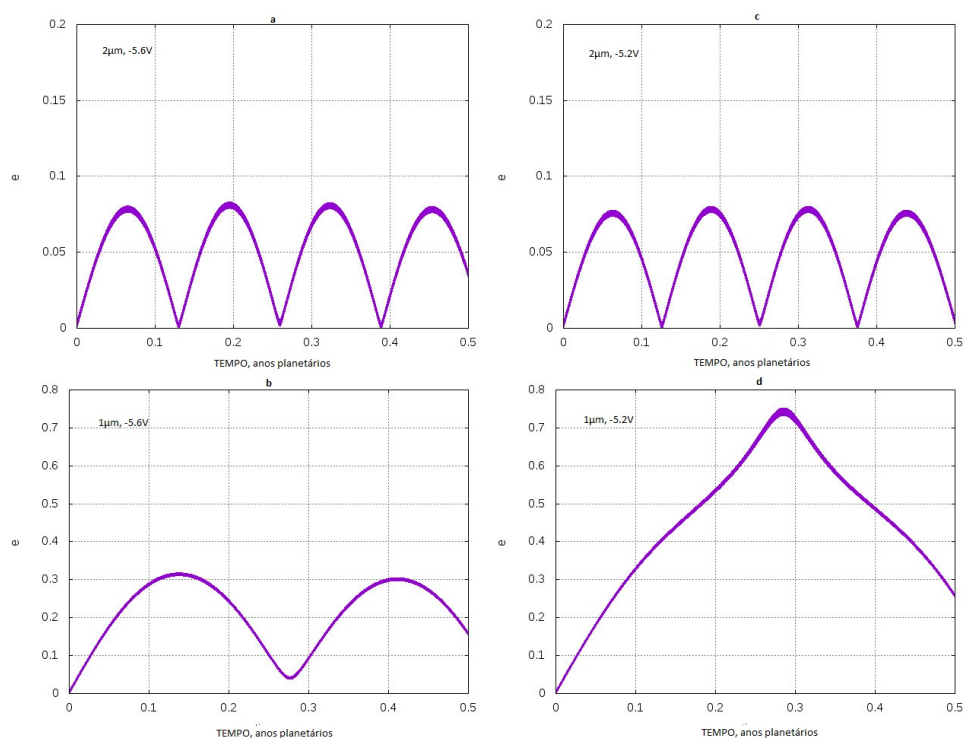
Podemos concluir que nossos resultados gerados com o REBOUND, são precisos e geram os comportamentos esperados, ainda que exista uma diferença com o que é encontrado em outros artigos para o mesmo sistema.

Figura 7.40 – Evolução orbital da excentricidade para uma partículas no anel E de saturno. Foram alterados dos painéis o raio e o potencial das partículas no anel. O painel b possui exatamente os mesmos parâmetros iniciais utilizados na Figura 7.34.



Fonte: Hamilton e Krivov (1996)

Figura 7.41 – Evolução orbital da excentricidade para uma partículas no anel E de saturno. Foram alterados dos painéis o raio e o potencial das partículas no anel. As partículas possuem os mesmos parâmetros dados na Figura 7.40.



Fonte: Produção do próprio autor

## 8 CONCLUSÃO

O estudo de anéis planetários é um ótimo laboratório para o entendimento do processo de formação planetária e a dinâmica de galáxias. O Rebound é uma ótima ferramenta de integração para sistemas de N-corpos que interagem gravitacionalmente, podendo lidar com forças conservativas e não conservativas, órbitas complexas com altas excentricidades e inclinações, sofrendo perturbações de curto e longo período mantendo os erros sistemáticos abaixo da precisão de máquina.

O Rebound mostrou-se eficiente para os tipos de estudos abordados, pois permite uma maneira rápida para calcular as forças e um método de integração suficientemente preciso para evoluir as partículas no tempo. Sua praticidade disponibilizando diversos módulos que podem ser alterados sem o mínimo de esforço para a aplicação desejada nos permitiu criar uma nova biblioteca de ferramentas para aplicação das forças perturbativas em anéis planetários, tais como a força devido ao achatamento planetário, a força de radiação Solar e a força eletromagnética.

Ao estudarmos as forças e criarmos os algoritmos para a aplicação delas, é necessário validar cada uma das integrações numéricas em que as forças foram aplicadas. Para isto fizemos uma comparação analítica e numérica com as equações médias de Lagrange para os casos onde as taxas de variação eram constantes no tempo. Para os casos mais complexos onde as taxas de variação se alteram no tempo e as equações eram acopladas, fizemos o uso de artigos e resultados já publicados para compararmos e validarmos nossos resultados.

Para a validação das equações e algoritmos desenvolvidos neste trabalho optamos pelo integrador IAS15 pelo fato de possibilitar integrações com forças não conservativas, sem perder a precisão sobre os erros sistemáticos. Este integrador mostrou um bom desempenho diante das forças perturbativas aplicadas ao comparar com a literatura. Por fim podemos afirmar que o acoplamento de forças não é simples de ser analisado e uma pequena diferença nas condições iniciais pode afetar consideravelmente os resultados. Também é importante analisar diversos sistemas de tal maneira que abordemos a maior parte dos efeitos que as forças causam. Podemos finalmente dizer que por todo estudo abordado e os resultados obtidos ao aplicarmos as forças comparando com outros estudos, nossos algoritmos são válidos e capazes de serem aplicados nos mais variáveis dos sistemas.

## REFERÊNCIAS

- BROUWER, D.; CLEMENCE, G. M. **Methods of celestial mechanics**. [S.l.: s.n.], 1961.
- BURNS, J. A.; HAMILTON, D. P.; SHOWALTER, M. R. Dusty rings and circumplanetary dust: observations and simple physics. In: \_\_\_\_\_. **Astronomy and Astrophysics Library**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2001. p. 641–725.
- BURNS, J. A.; LAMY, P. L.; SOTER, S. Radiation forces on small particles in the solar system. **Icarus**, v. 40, p. 1–48, oct 1979.
- CHAMBERS, J. E. Mercury: A software package for orbital dynamics. **Astrophysics Source Code Library**, jan. 2012. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2012ascl.soft01008C>>.
- CONSOLMAGNO, G. J. Lorentz forces on the dust in jupiter's ring. **Journal of Geophysical Research**, American Geophysical Union (AGU), v. 88, n. A7, p. 5607, 1983.
- DANBY, J. M. A. **Fundamentals of celestial mechanics**. [S.l.: s.n.], 1988.
- EVERHART, E. An efficient integrator that uses gauss-radau spacings. **International Astronomical Union Colloquium**, Cambridge University Press, v. 83, p. 185–202, 1985.
- HAMILTON, D. P. Motion of dust in a planetary magnetosphere - Orbit-averaged equations for oblateness, electromagnetic, and radiation forces with application to Saturn's E ring. **Icarus**, v. 101, p. 244–264, feb 1993.
- HAMILTON, D. P.; KRIVOV, A. V. Circumplanetary dust dynamics: effects of solar gravity, radiation pressure, planetary oblateness and electromagnetism. **Icarus**, v. 123, p. 503–523, oct 1996.
- HORANYI, M. Charged Dust Dynamics in the Solar System. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 34, p. 383–418, 1996.
- HORANYI, M.; BURNS, J. A.; HAMILTON, D. P. The dynamics of saturn's e ring particles. **Icarus**, Elsevier BV, v. 97, n. 2, p. 248–259, jun 1992.
- HORNE, J. H.; BALIUNAS, S. L. A prescription for period analysis of unevenly sampled time series. **NASA/STI**, v. 302, p. 757–763, mar. 1986.
- JONTOF-HUTTER, D.; HAMILTON, D. P. The fate of sub-micron circumplanetary dust grains I: Aligned dipolar magnetic fields. **Icarus**, Elsevier BV, v. 218, n. 1, p. 420–432, mar 2012.
- JONTOF-HUTTER, D.; HAMILTON, D. P. The fate of sub-micron circumplanetary dust grains II: Multipolar fields. **Icarus**, Elsevier BV, v. 220, n. 2, p. 487–502, aug 2012.
- KRIVOV, A. V.; SOKOLOV, L. L.; DIKAREV, V. V. Dynamics of mars-orbiting dust: effects of light pressure and planetary oblateness. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 63, n. 3, p. 313–339, Sep 1995. ISSN 1572-9478. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00692293>>.
- KUGA, H. K.; RAO, K. R.; CARRARA, V. **Satélites Artificiais–Movimento Orbital**. São José dos Campos: INPE, 2000. (Apostila).
- MIGNARD, F. Effects of radiation forces on dust particles in planetary rings. In: GREENBERG, R.; BRAHIC, A. (Ed.). **IAU Colloq. 75: Planetary Rings**. [S.l.: s.n.], 1984. p. 333–366.



MITCHELL, C. J.; HORÁNYI, M.; HOWARD, J. E. Accuracy of epicyclic description of dust grain orbits about saturn. **Journal of Geophysical Research: Space Physics**, American Geophysical Union (AGU), v. 108, n. A5, may 2003.

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

NORTHROP, T. G.; HILL, J. R. Stability of negatively charged dust grains in saturn's ring plane. **Journal of Geophysical Research**, American Geophysical Union (AGU), v. 87, n. A8, p. 6045, 1982.

NORTHROP, T. G.; HILL, J. R. Stability of negatively charged dust grains in saturn's ring plane. **Journal of Geophysical Research**, American Geophysical Union (AGU), v. 87, n. A8, p. 6045, 1982.

PATER, I. de; LISSAUER, J. J. **Planetary Sciences**. Cambridge University Press, 2001. ISBN 9780521482196. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Planetary-Sciences-Imke-Pater/dp/0521482194?SubscriptionId=AKIAIOBINVZYXZQZ2U3A&tag=chimbri05-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=0521482194>>. Acesso em: 21 dez. 2018.

REIN, H.; LIU, S.-F. REBOUND: an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 537, p. A128, jan 2012.

REIN, H.; SPIEGEL, D. S. IAS15: a fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 446, p. 1424–1437, jan 2015.

REIN, H.; TAMAYO, D. WHFAST: a fast and unbiased implementation of a symplectic Wisdom-Holman integrator for long-term gravitational simulations. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 452, p. 376–388, sep 2015.

SCHAFFER, L.; BURNS, J. A. Lorentz resonances and the vertical structure of dusty rings: Analytical and numerical results. **Icarus**, Elsevier BV, v. 96, n. 1, p. 65–84, mar 1992.

SFAIR, R.; GIULIATTI-WINTER, S. M. Orbital evolution of the  $\mu$  and  $\nu$  dust ring particles of uranus. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 505, n. 2, p. 845–852, aug 2009.

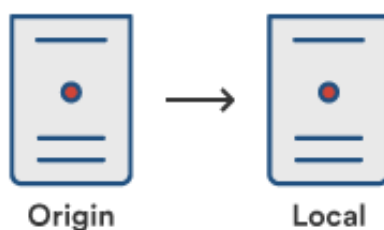
WEISSTEIN, E. W. "**Spherical Harmonic Addition Theorem.**" **From MathWorld—A Wolfram Web Resource**. 2008. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/SphericalHarmonicAdditionTheorem.html>>. Acesso em: 21 dez. 2018.

## ANEXO A – TUTORIAL DE COMO UTILIZAR O GIT COM O BITBUCKET

A biblioteca que criamos que contém os algoritmos das perturbações estudadas neste trabalho estão disponíveis em um repositório no Bitbucket. Para utilizar a biblioteca é necessário copiar os arquivos que estão no repositório, isso pode ser feito efetuando o download através do link: ou pode ser utilizado o *git* para *clonar* o repositório e utilizar o controle de versão para atualizar de maneira prática todas as mudanças e atualizações que ocorrem na biblioteca.

Para configurar o repositório do Bitbucket, é necessário copiar o repositório para o sistema do usuário. Git refere-se a copiar um repositório como "clonagem" dele. Quando for realizado a clonagem do repositório é necessário criar uma conexão entre o servidor Bitbucket (que Git conhece como origem) e o sistema local.

Figura A.1 – Estabelecendo conexão com o servidor do Bitbucket para clonagem do repositório.



fonte: Tutorial: Learn Git with Bitbucket Cloud.

Para isto é necessário abrir o terminal e navegar para o diretório principal ( ~ ) pelo comando:

```
1 $ cd ~
```

Conforme se vai utilizando mais o Bitbucket, provavelmente serão utilizados múltiplos repositórios. Por esta razão, é interessante criar um diretório contendo todos os repositórios.

Para criar o diretório contendo todos os repositórios:

```
1 $ mkdir repos
```

Pelo terminal, é necessário atualizar o diretório que se quer que trabalhe como o novo repositório.

```
1 $ cd ~/repos
```

Então utilize o git para clonar o repositório dentro da pasta:

```
1 $ git clone https://patbuzzatto@bitbucket.org/patbuzzatto/
   repository_feg_tools.git
```

Deverá retornar a seguinte mensagem:

```
1 Cloning into 'repository_feg_tools'...
2 Password
3 warning: You appear to have cloned an empty repository.
```

Listando o conteúdo de seu diretório *repos* e você deve ver o diretório *repository\_feg\_tools* nele.

```
1 $ ls
```

Se o repositório aparecer listado isto significa que ele já foi clonado.

## ANEXO B – HEADERS DAS FUNÇÕES DA BIBLIOTECA FEG\_TOOLS

### B.1 FORÇA DEVIDO A NÃO ESFERICIDADE DO PLANETA

A função, parâmetros de entrada e variáveis externas para aplicação da força:

```

1 extern const double J2planet;
2 extern const double J4planet;
3 extern const double J6planet;
4
5 /**
6  * @brief          Planetary Oblateness.
7  * @details        Application of planetary oblateness with potential
8                    expansion until J6. All the gravitation field's terms can be used
9                    separated.
10 *
11 * @param planet - The oblated body where the others bodies are orbiting.
12 * @param r      - REBOUND Simulation to consider
13 *
14 * @extern double variables      J2planet      - Monopole moment of the
15                                gravitation field
16 * @extern double variables      J4planet      - Quadrupole moment of
17                                the gravitation field
18 * @extern double variables      J6planet      - Third term of moment of
19                                the gravitation field
20 */
21 void force_oblateness(struct reb_particle planet, struct reb_simulation*
22                      r);

```

Para o cálculo de  $\dot{\omega}$  a função foi escrita da seguinte maneira:

```

1 /**
2  * @brief          Calculate the rate of the pericentre of the body orbiting
3                    an oblate planet.
4  * @details        Calculate the rate of the pericentre using the
5                    formulation in Murray.
6  *
7  * @param p        - The body orbiting an oblate planet.
8  * @param planet   - The oblated body where the others bodies are orbiting.
9  * @param r        - REBOUND Simulation to consider
10 *
11 * @extern double variables J2planet - Monopole of the gravitation field
12 * @extern double variables J4planet - Quadrupole of the gravitation field

```

```

11 * @extern double variables J6planet - Third term of the gravitation
    field
12 */
13 double feg_get_rate_pericentre_n ( struct reb_particle p, struct
    reb_particle planet , struct reb_simulation * r);
14 }

```

e para  $\dot{\Omega}$ :

```

1 /**
2 * @brief Calculate the rate of the node of the body orbiting an
    oblate planet.
3 * @details Calculate the rate of the node using the formulation in
    Murray.
4 *
5 * @param p - The body orbiting an oblate planet.
6 * @param planet - The oblated body where the others bodies are orbiting.
7 * @param r - REBOUND Simulation to consider
8 *
9 * @extern double variables J2planet - Monopole of the gravitation
    field
10 * @extern double variables J4planet - Quadrupole of the gravitation
    field
11 * @extern double variables J6planet - Third term of the gravitation
    field
12 */
13 double get_rate_nodo_n ( struct reb_particle p, struct reb_particle
    planet , struct reb_simulation * r);

```

## B.2 FORÇA DE RADIAÇÃO SOLAR

A função, parâmetros de entrada e variáveis externas para aplicação da força sem considerar o Sol como um corpo na simulação:

```

1 extern const double C;
2
3 extern double betaParticle;
4
5 extern const double ObliquityPlanet;
6
7 /**
8 * @brief Radiation force without the radiation source included in the
    simulation.
9 * @details This function does not apply the radiation force, it only
    makes the calculation of the positions and velocities relatives Sun-

```

Planet. In the case where the Sun is not included the components of the radiation force in a cartesian inertial frame centered on the planet can be found in Mignard 1984.

```

10 *
11 * @param m_source      - Mass of the radiation source(Sun).
12 * @param rsp          - Radial distance Sun-Planet
13 * @param r            - REBOUND Simulation to consider
14 * @param rp_hereafter - 1-Radiation Pressure is included, 0-Radiation
    Pressure is not included
15 * @param pr_drag      - 1-Poyting Robertson is applied, 0-Poyting
    Robertson is not applied
16 */
17 void force_rp_prdrag_withoutSun(double m_source, double rsp, double
    sun_i_position, struct reb_simulation* r,int rp_hereafter, int pr_drag
    );

```

Considerando o Sol como um corpo na simulação do REBOUND:

```

1 /**
2 * @brief      Radiation force with the Radiation Source included in the
    simulation.
3 * @details    This function does not apply the radiation force, it only
    makes the calculation of the positions and velocities relatives Sun-
    Planet. It uses the function provides by REBOUND "reb_particle_minus"
    to make the calculus.
4 *
5 * @param r    - REBOUND Simulation to consider
6 * @param rp_hereafter - 1-Radiation Pressure is included, 0-Radiation
    Pressure is not included
7 * @param pr_drag - 1-Poyting Robertson is applied, 0-Poyting
    Robertson is not applied
8 */
9 void force_rp_prdrag_withSun(struct reb_simulation* r, int rp_hereafter,
    int pr_drag);

```

A função que efetivamente realiza os cálculos e aplica a força é a função *force\_rp\_prdrag*.

```

1 /**
2 * @cond PRIVATE
3 * Internal data structures below. Nothing to be changed by the user.
    Should not be called by user.
4 *
5 * @brief      Apply the radiation force in massless particles.
6 * @details    This is the general function where is actually applied
    the radiation force in the massless particles, users should not use
    this function, should use "force_rp_prdrag_withoutSun" in simulations

```

that radiation source(Sun) is not include as a particle in the simulation or "force\_rp\_prdrag\_withSun" when the Radiation Source(Sun) is included. If the particle's mass!=0 the force will be not applied, also avoids the central body and the planet where the particles are orbiting.

```

7 *
8 * @param planet          - The body where the particles are orbiting.
9 * @param rad_source     - This structure contains the information of the
    Sun's mass, positions and velocities relatives Sun-Planet. In the case
    where the Sun is not included the components of the radiation force
    in a cartesial inertial frame centered on the planet can be found in
    Mignard 1984.
10 * @param rsp           - Radial distance Sun-Planet
11 * @param ns           - Planet's mean motion
12 * @param r            - REBOUND Simulation to consider
13 * @param rp_hereafter - 1-Radiation Pressure is included, 0-Radiation
    Pressure is not included
14 * @param pr_drag      - 1-Poyting Robertson is applied, 0-Poyting
    Robertson is not applied
15 *
16 * @extern double variables ObliquityPlanet - Planet's obliquity,
    inclination of the plane with the planet and the sun
17 * @extern double variables betaParticle - Ratio of the relative radiation
    pressure force
18 * @extern double variables C           - Speed of light
19 */
20 void force_rp_prdrag(struct reb_particle planet, struct reb_particle
    rad_source, const double rsp, const double ns, struct reb_simulation* r,
    int rp_hereafter, int pr_drag);

```

Função que realiza os cálculos para encontrar o valor do razão da radiação solar com a força da gravidade (equação 3.4):

```

1 /**
2 * @brief          Calculate beta parameter of the radiation force.
3 * @details        Calculate beta parameter of the eq. 19 in Burns 1979. It'
    s comparing between radiation force to the gravitational force,
    defining this ratio.
4 *
5 * @param G        - Gravitational constant
6 * @param c        - Light's velocity
7 * @param source_mass - Source's mass
8 * @param source_luminosity - Source's luminosity
9 * @param radius   - Particle's radius
10 * @param density  - Particle's density

```

```
11 * @param Q_pr          - Averaged over the solar spectrum
12 */
13 double rp_calc_beta(const double G, const double c, const double
    source_mass, const double source_luminosity, const double radius,
    const double density, const double Q_pr);
```