UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Junior Augusto Pereira

Fórmulas de quadratura associadas a polinômios que satisfazem uma relação de recorrência especial e fórmulas de quadratura no círculo unitário

Tese de Doutorado

Pós-Graduação em Matemática

São José do Rio Preto

2019

Junior Augusto Pereira

Fórmulas de quadratura associadas a polinômios que satisfazem uma relação de recorrência especial e fórmulas de quadratura no círculo unitário

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES
Orientadora: Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali.

São José do Rio Preto

2019

P436f

Pereira, Junior Augusto

Fórmulas de quadratura associadas a polinômios que satisfazem uma relação de recorrência especial e fórmulas de quadratura no círculo unitário / Junior Augusto Pereira. -- São José do Rio Preto, 2019

102 f. : tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Cleonice Fátima Bracciali

1. Matemática. 2. Análise matemática. 3. Polinômios ortogonais. 4. Fórmulas de quadratura. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Junior Augusto Pereira

Fórmulas de quadratura associadas a polinômios que satisfazem uma relação de recorrência especial e fórmulas de quadratura no círculo unitário

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Banca Examinadora

Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. Jorge Alberto Borrego Morell
UFRJ - Duque de Caxias

Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani
UNESP - Presidente Prudente

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 28 de Fevereiro de 2019.

Aos meus pais, Laide e Pedro,

dedico.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à orientadora, Profa. Cleonice Fátima Bracciali, por todos os ensinamentos, conselhos, incentivos, por sua paciência e pela amizade construída. Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UNESP, Campus de São José do Rio Preto, em especial ao Prof. Alagacone Sri Ranga, por todas as discussões matemáticas, ensinamentos, atenção e amizade. Agradeço também aos professores do Departamento de Matemática da UEM e da UNESP, Campus Presidente Prudente, por terem contribuído com minha formação acadêmica.

Um agradecimento especial à minha namorada e companheira Heloísa Lopes de Sousa, pelo carinho, compreensão e por ser a pessoa que compartilho todas as alegrias e que me conforta nos momentos difíceis.

Agradeço aos meus pais, Laide e Pedro, minha irmã Indiana, que são os pilares da minha vida, por estarem sempre me motivando e apoiando para que eu pudesse desenvolver este trabalho.

Aos amigos do Programa de Pós-Graduação de Matemática, Jairo, Daniel, Gino, Luana, Mariana, Gislaine, Yen, Eliel, Paula, Cheienne, Gustavo, Mateus, Paola, Fabiola, Jennifer, Lourenço, José Augusto, Wilian, Eduardo, Fabrício, Bruno, Carol, Ismael, Jéssica, Rodrigo, Valdir, Karina, Jarne, Luís Fernando, Rafael, Alisson, João, Ana Lívia, Otávio, Eliton, Yagor, Laura, Harison, André, Lucas e Anderson, por terem participado de bons diálogos em matemática e pelas histórias compartilhadas. Agradeço todas as amizades feitas em São José do Rio Preto, em especial, Nayara, Victor, Eusiene, Ana Laura, Thallis, Leandro, Caio, Sérgio, Débora, Letícia e Sarah por todas as conversas e por deixarem esta cidade parecer uma segunda casa para mim.

A todas as pessoas que, de forma direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

"A mente que se abre a uma nova idéia
jamais voltará ao seu tamanho original."

Albert Einstein

Resumo

A partir dos zeros dos polinômios que satisfazem uma relação de recorrência do tipo R_{II} especial, obtemos uma fórmula de quadratura na reta real com fórmulas simples para o cálculo de seus pesos. Alguns polinômios para-ortogonais no círculo unitário podem ser obtidos por uma relação de recorrência de três termos. As duas relações de recorrência mencionadas são conectadas por uma transformação que leva a reta real ao círculo unitário. Desta maneira, obtemos também fórmulas de quadratura no círculo unitário. Os nós e pesos das fórmulas de quadratura no círculo unitário são facilmente obtidos através dos nós e pesos da primeira fórmula. Foram feitas algumas adaptações em métodos numéricos muito bem conhecidos para obter os nós e pesos destas fórmulas de quadratura.

Palavras-chave: Polinômios ortogonais no círculo unitário. Polinômios para-ortogonais. Relação de recorrência de três termos. Fórmulas de quadratura. Zeros de polinômios.

Abstract

From polynomials that satisfy a special recurrence relation of type R_{II} we derive a quadrature formula in the real line with simple formulas to obtain the respective weights. Some para-orthogonal polynomials in the unit circle can be expressed by a three terms recurrence relation. The two mencioned recurrence relations are connected by a transformation that takes the real line onto the unit circle. Hence, we obtain also quadrature formula on the unit circle. The nodes and the weights of the quadratura on the unit circle are obteined easily from the nodes and the weights of the first quadrature formula. We have also made some adaptions in well known numerical methods to obtain the nodes and weights of these quadrature formulas.

Keywords: Orthogonal polynomial on the unite circle. Para-orthogonal polynomial. Three term recurrence relation. Quadrature formulas. Zeros of polynomial.

Lista de Símbolos

Alfabeto Grego

α_n	coeficientes de Verblunsky associados a uma medida no círculo unitário
$\alpha_n(\mu)$	coeficientes de Verblunsky associados a uma medida μ no círculo unitário
$\delta_{m,n}$	delta de Kronecker
Δ_n	determinante de Toeplitz
κ_n	constante de normalização $\kappa_n^{-2} = \|\phi_n\|^2$
$\Lambda_{n,j}$	pesos das fórmulas de quadratura no círculo unitário
$\lambda_{n,j}$	pesos das fórmulas de quadratura no círculo unitário associada a medida μ
$\widehat{\lambda}_{n+1,j}$	pesos das fórmulas de quadratura no círculo unitário associada a medida $\nu_{\underline{0}}$
μ_m	momentos de uma medida ψ
$\Xi_{n,j}$	zeros do polinômio para-ortogonal Ψ_n
$\xi_{n,j}$	zeros do polinômio associado Q_n
$\varrho_{n,j}$	nós das fórmulas de quadratura interpolatória
ϕ_n	polinômios ortogonais no círculo unitário
$\phi_n(\mu; z)$	polinômios ortogonais no círculo unitário com relação a uma medida μ
ϕ_n^*	polinômio recíproco de ϕ_n, $\phi_n^*(z) = z^n\overline{\phi_n(1/\bar{z})}$
φ_n	polinômios ortonormais no círculo unitário
$\chi_{n,j}$	zeros do polinômio ortogonal p_n
Ψ_n	polinômios para-ortogonais no círculo unitário
$\Psi_n(\mu; \rho, z)$	polinômios para-ortogonais no círculo unitário com relação a medida μ
$\omega_{n,j}$	pesos das fórmulas de quadratura associada ao polinômio P_n

Alfabeto Romano

$\{a_n\}_{n\geq 1}$	sequência encadeada positiva
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos

$\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$	sequência encadeada positiva
$\{g_n\}_{n\geq 0}$	sequência de parâmetros de uma sequência encadeada positiva
$\mathrm{Im}(z)$	parte imaginária de um número complexo z
$\{\iota_{n+1}\}_{n\geq 1}$	sequência minimal de parâmetros da sequência encadeada $\{d_{n+2}\}_{n\geq 1}$
$\{\ell_n\}_{n\geq 1}$	sequência minimal de parâmetros da sequência encadeada $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$
$\mathcal{L}$	funcional linear
$\{m_n\}_{n\geq 0}$	sequência minimal de parâmetros para uma sequência encadeada positiva
$\{M_n\}_{n\geq 0}$	sequência maximal de parâmetros para uma sequência encadeada positiva
P_n	polinômios que satisfazem uma relação de recorrência do tipo R_{II}
p_n	polinômios ortogonais com relação a uma medida ψ no intervalo (a,b)
$\mathfrak{p}_n$	coeficiente do termo de maior grau do polinômio P_n
Q_n	polinômios associados ao polinômio P_n
$\mathfrak{q}_n$	coeficiente do termo de maior grau do polinômio Q_n
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	conjunto das $n-$uplas ordenadas de números reais
$\mathrm{Re}(z)$	parte real de um número complexo z
$\mathrm{supp}(\psi)$	suporte da função ψ
T_n	matriz de Toeplitz
$\mathbb{T}$	círculo unitário, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : \|z\|= 1\}$
$W_{n,j}$	pesos das fórmulas de quadratura Gaussiana
$x_{n,j}$	zeros do polinômio P_n
$\mathfrak{y}_{n,j}$	zeros do polinômio q_n
$z_{n,j}$	zeros do polinômio R_n
$\|z\|$	módulo do número complexo z

Sumário

Introdução

Se ψ é uma função real, definida no intervalo (a,b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$, limitada, não decrescente, com infinitos pontos de aumento, então ψ representa uma distribuição ou medida positiva. No caso em que (a,b) não é finito, supõe-se também que a medida ψ é tal que as integrais de Stieltjes

$$\mu_k = \int_a^b x^k d\psi(x), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

existem. Uma sequência de polinômios $\{p_n\}_{n\geq 0}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida ψ no intervalo (a,b), se p_n é de grau exatamente n e

$$\langle p_m, p_n \rangle_\psi = \int_a^b p_m(x) p_n(x) d\psi(x) = \rho_n \delta_{m,n},$$

onde ρ_n é uma constante diferente de zero e $\delta_{m,n}$ é o delta de Kronecker, ou seja, $\delta_{m,n} = 1$ se $m = n$ e $\delta_{m,n} = 0$ caso contrário. São várias as propriedades que os polinômios ortogonais na reta satisfazem, (veja [12, 18, 33]), por exemplo, seus zeros são simples, reais e pertencem ao intervalo de ortogonalidade (a,b). Esses polinômios satisfazem uma relação de recorrência de três termos que, para o caso dos polinômios mônicos, é dada por

$$p_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1}) p_n(x) - \sigma_{n+1} p_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x - \beta_1$, $\beta_n \in \mathbb{R}$ e $\sigma_{n+1} > 0$, $n \geq 1$.

Podemos destacar ainda, como aplicação dos polinômios ortogonais, as Fórmulas de Quadratura Gaussianas dadas por

$$\int_a^b f(x) d\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} W_{n,k} f(\chi_{n,k}) + \tilde{E}_n(f)$$

onde os zeros $\chi_{n,k}$ $k = 1, 2, \ldots, n$, do polinômio ortogonal p_n são seus nós, e $\tilde{E}_n(f) = 0$ para $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

Uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é chamada de sequência encadeada positiva se existe uma outra sequência $\{g_n\}_{n\geq 0}$ tal que

$$0 \leq g_0 < 1, \quad 0 < g_n < 1, \quad \text{para } n \geq 1, \quad \text{e} \quad a_n = (1 - g_{n-1})g_n, \quad \text{para } n \geq 1.$$

A sequência $\{g_n\}_{n\geq 0}$ é chamada de sequência de parâmetros para a sequência encadeada positiva $\{a_n\}_{n\geq 1}$. Além disso, toda sequência encadeada positiva possui uma sequência de parâmetros minimal, denotada por $\{m_n\}_{n\geq 0}$, obtida com $m_0 = 0$ e uma sequência de parâmetros maximal, denotada por $\{M_n\}_{n\geq 0}$, quando, para qualquer outra sequência de parâmetros $\{g_n\}_{n\geq 1}$, satisfaz $M_n > g_n$, $n \geq 1$, mais detalhes em [12, 18, 34].

Os polinômios ortogonais no círculo unitário $\mathbb{T} = \{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ podem ser definidos por

$$\int_{\mathbb{T}} \phi_n(z)\overline{\phi_m(z)}d\mu(z) = \int_0^{2\pi} \phi_n(e^{i\theta})\overline{\phi_m(e^{i\theta})}d\mu(e^{i\theta}) = \kappa_n^{-2}\delta_{n,m},$$

onde ϕ_n é um polinômio de grau exatamente n e μ é uma medida positiva em $\mathbb{T}$. Observe que $\kappa_n^{-2} = \|\phi_n\|^2 = \int_{\mathbb{T}}|\phi_n(z)|^2 d\mu(z)$. Os polinômios ortogonais mônicos no círculo unitário satisfazem a relação

$$\phi_n(z) = z\phi_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1}\,\phi_{n-1}^*(z) \quad n \geq 1,$$

onde $\alpha_{n-1} = -\overline{\phi_n(0)}$ e $\phi_n^*(z) = z^n\overline{\phi_n(1/\bar{z})}$ denota o polinômio recíproco de ϕ_n. Os números complexos α_n são chamados de coeficientes de Verblunsky. Sabe-se que esses coeficientes são tais que $|\alpha_n| < 1$ $(n \geq 0)$. Além disso, os zeros destes polinômios estão dentro do círculo unitário, $\mathbb{T}$. Para mais detalhes sobre esses polinômios podemos citar [18, 30].

Pode-se definir uma sequência de polinômios para-ortogonais no círculo unitário, associada a uma sequência de polinômios ortogonais no círculo unitário $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ com relação a medida μ, da seguinte maneira

$$\phi_n(z) - w_n\phi_n^*(z), \quad n \geq 1,$$

e, pode-se, ainda, representá-los por

$$\Psi_n(\tau_n, z) = z\phi_{n-1}(z) - \tau_n\phi_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1,$$

onde $\{w_n\}_{n\geq 0}$ e $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ são quaisquer sequências de números complexos tais que $|w_n| = |\tau_n| = 1$. Os polinômios para-ortogonais têm todos os seus zeros no círculo unitário, isto possibilita a utilização destes zeros para construção de fórmulas de quadratura no círculo unitário, (veja [21]), dadas por

$$\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(z) d\mu(z) = \sum_{j=1}^{n} \Lambda_{n,j} \mathcal{F}(\Xi_{n,j}),$$

válidas para $\mathcal{F} \in span\{z^{-n+1}, z^{-n+2}, \ldots, z^{n-2}, z^{n-1}\}$ e $\Xi_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, são zeros do polinômio para-ortogonal $\Psi_n(\tau_n, z)$ e $span\{z^{-n+1}, z^{-n+2}, \ldots, z^{n-2}, z^{n-1}\}$ é o espaço gerado pelo conjunto $\{z^{-n+1}, z^{-n+2}, \ldots, z^{n-2}, z^{n-1}\}$ ou seja, o espaço dos polinômios de Laurent que tem a forma $L(z) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} c_k z^k$, $c_k \in \mathbb{C}$.

Aqui consideramos um caso especial de sequência de polinômios $\{P_n\}_{n\geq 0}$ que satisfaz uma relação de recorrência do tipo R_{II}, dada por

$$P_{n+1}(x) = (x - c_{n+1})P_n(x) - d_{n+1}(x^2 + 1)P_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x - c_1$, onde $\{c_n\}_{n\geq 0}$ é uma sequência de números reais e $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$ é uma sequência encadeada positiva. Esta sequência de polinômios não é uma sequência de polinômios ortogonais, mas foi mostrado em [20] que, sob certas condições, a sequência de polinômios $\{P_n\}_{n\geq 0}$, satisfaz a seguinte ortogonalidade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^j \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^n} d\varphi(x) = \gamma_n \delta_{n,j}, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

onde $\gamma_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(x) = 1$, $\gamma_n = (1 - M_n)\gamma_{n-1}$, $n \geq 1$, φ é uma medida positiva na reta real e $\{M_{n+1}\}_{n\geq 0}$ é a sequência de parâmetros maximal da sequência encadeada $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$.

Ainda em [20], foi demonstrado que os polinômios P_n possuem zeros simples, reais, que satisfazem a propriedade do entrelaçamento e são soluções de um problema de autovalor generalizado.

Como no caso dos polinômios ortogonais na reta real, para os polinômios P_n que satisfazem a relação de recorrência do tipo R_{II}, obtivemos uma fórmula de quadratura com grau de precisão algébrico $2n - 1$, mais precisamente, válida para $(1 + x^2)^n f(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \omega_{n,k} f(x_{n,k}),$$

onde os pesos $\omega_{n,k}$ são dados por

$$\omega_{n,k} = (1 + x_{n,k}^2)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{P_n'(x)(x - x_{n,k})(1 + x^2)^n} d\varphi(x),$$

os nós, $x_{n,k}$, são os zeros de P_n e φ é uma medida positiva na reta real. Fizemos uma conexão entre as fórmulas de quadratura associadas com os polinômios que satisfazem a relação de recorrência do tipo R_{II} e casos especiais de fórmulas de quadratura no círculo unitário. Usando a transformação $z = z(x) = (x+i)/(x-i)$, que leva a reta real no círculo unitário $\mathbb{T}$(que é conhecida como transformação de Cayley, veja [30]), foi mostrado em [20] que o polinômio $R_n(z) = 2^n P_n(x)/(x-i)^n$, $n \geq 0$, satisfaz a relação

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1} z R_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$. A relação entre os polinômios R_n e certos polinômios para-ortogonais encontramos em [8, 13]. Com esta relação, mostramos que as fórmulas de quadratura associadas aos polinômios que satisfazem a recorrência do tipo R_{II} estão relacionadas com dois casos especiais de fórmulas de quadratura no círculo unitário, a saber,

(i) uma fórmula de quadratura com n pontos, que também chamamos de fórmula de quadratura n-pontos

$$\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(z)\, d\mu(z) = \sum_{k=1}^{n} \Lambda_{n,k}\, \mathcal{F}(z_{n,k}),$$

que é válida para $\mathcal{F} \in span\{z^{-n+1}, z^{-n+2}, \ldots, z^{n-2}, z^{n-1}\}$ e $\Lambda_{n,k} = \frac{c_1^2+1}{M_1} \frac{\omega_{n,k}}{x_{n,k}^2+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$

(ii) uma fórmula de quadratura com $n+1$ pontos, ou fórmula de quadratura $(n+1)$-pontos

$$\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(z)\, d\nu(z) = \widehat{\lambda}_{n+1,n+1}\, \mathcal{F}(1) + \sum_{k=1}^{n} \omega_{n,k}\, \mathcal{F}(z_{n,k}),$$

que é válida para $\mathcal{F} \in span\{z^{-n}, z^{-n+1}, \ldots, z^{n-1}, z^{n}\}$,

$$\widehat{\lambda}_{n+1,n+1} = \frac{(1-M_1)(1-M_2)\cdots(1-M_n)}{(1-\ell_1)(1-\ell_2)\cdots(1-\ell_n)},$$

$\omega_{n,k}$ são os pesos da fórmula de quadratura associadas aos polinômios que satisfazem a recorrência do tipo R_{II}, $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ são os zeros dos polinômios P_n, $z_{n,k}$ são os zeros do polinômio R_n, $\{\ell_n\}_{n\geq 1}$ e $\{M_n\}_{n\geq 1}$ são sequências minimal e maximal de parâmetros respectivamente da sequência encadeada $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$.

Observamos que estas fórmulas de quadratura são válidas para espaços de dimensão $2k-1$, onde k é o respectivo número de nós, ou seja, são fórmulas de quadratura do tipo gaussiana.

Novamente, análogo ao caso dos polinômios ortogonais, definimos os polinômios associados aos polinômios que satisfazem a recorrência R_{II}, por

$$Q_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)^n P_n(t) - (1+t^2)^n P_n(x)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t), \quad n \geq 1.$$

Mostramos que os polinômios Q_n têm grau $n-1$, satisfazem a mesma relação de recorrência que os polinômios P_n, mas com condições iniciais diferentes e ainda que os zeros de Q_n são simples, reais e se entrelaçam com os zeros de P_n. Com o auxílio destes polinômios mostramos que os pesos, $\omega_{n,k}$, podem ser determinados de maneira mais simples, sem a necessidade de resolver uma integral, como a seguir

$$\omega_{n,k} = \frac{(1+x_{n,k}^2)^{n-1} d_2 d_3 \cdots d_n M_1}{P_n'(x_{n,k}) P_{n-1}(x_{n,k})}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Também estimamos intervalos que limitam todos os zeros do polinômio P_n. Além disso, consideramos algumas condições para obter, de maneira mais fácil, um dos extremos de um intervalo que contenha todos os zeros de P_n.

Adaptamos métodos numéricos conhecidos, como o método de Laguerre e o método da potência inversa com deslocamento, para determinar todos os zeros de P_n, que são necessários para utilizar as fórmulas de quadratura que obtivemos.

Organizamos esta tese em 4 capítulos, dispostos da seguinte maneira.

No Capítulo 1 apresentamos resultados básicos sobre polinômios ortogonais na reta real e no círculo unitário, resultados sobre sequências encadeadas, sobre o método de Laguerre e sobre o método das potências, que serão necessários nos capítulos seguintes.

O Capítulo 2 traz propriedades dos polinômios P_n que satisfazem uma relação de recorrência do tipo R_{II}, encontradas em [20] e também alguns resultados sobre a relação entre os polinômios para-ortogonais e os polinômios R_n, que são encontrados em [8, 13]. Os resultados deste capítulo são essenciais para o desenvolvimento do trabalho.

No Capítulo 3 são apresentados os resultados novos sobre as fórmulas de quadratura associadas aos polinômios P_n, as fórmulas especiais de quadratura no círculo unitário e resultados sobre os polinômios associados, Q_n. Tais resultados estão organizados no artigo submetido para publicação [5].

No Capítulo 4 abordamos alguns resultados sobre limitantes dos zeros do polinômio P_n, sendo que alguns destes resultados podem ser relacionados a resultados encontrados em [25] e alguns são resultados novos, porém não fizeram parte do artigo [5]. Também apresentamos a adaptação do método de Laguerre e do método da potência inversa com deslocamento para determinar os zeros do polinômio P_n e alguns exemplos numéricos. Estes métodos adaptados também se encontram no artigo submetido [5].

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo consiste de alguns assuntos básicos e importantes para o desenvolvimento deste trabalho. O conteúdo exposto é breve, sem demonstrações, e uma leitura mais profunda pode ser feita em [12, 18, 30, 33].

1.1 Polinômios ortogonais na reta real

Aqui relembramos e formalizamos alguns conceitos mencionados na Introdução.

Consideremos um intervalo (a, b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, ψ uma função real e não decrescente definida em (a, b) e f uma função definida em (a, b). A expressão

$$\int_a^b f(x) d\psi(x)$$

é chamada integral de Riemann-Stieltjes (ou simplesmente integral de Stieltjes) de f com respeito a ψ no intervalo (a, b).

Definição 1.1. *Chamamos de ponto de aumento de ψ qualquer ponto $\xi \in (a, b)$ tal que $\psi(\xi + \epsilon) - \psi(\xi - \epsilon) > 0$ para todo $\epsilon > 0$. Em particular, o conjunto de pontos*

$$supp(\psi) = \{\xi \in [a, b] \,|\, \psi(\xi + \epsilon) - \psi(\xi - \epsilon) > 0, \;\; para\ todo\ \ \epsilon > 0\}$$

é chamado de suporte de ψ.

A função ψ que é real e não decrescente, pode ser definida na reta real. No entanto, consideramos que os pontos de aumento de ψ estão todos contidos no intervalo (a, b). Para maiores detalhes sobre definições e propriedades da integral de Stieltjes citamos, por exemplo, [4, 15, 28].

Como mencionamos na introdução a definição de uma medida positiva pode ser dada por:

Definição 1.2. *Seja ψ uma função definida no intervalo (a, b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$, limitada, não decrescente e com infinitos pontos de aumento, no intervalo (a, b). Neste caso, ψ representa uma distribuição ou medida positiva.*

Nos casos em que o intervalo (a, b) não é finito, supõe-se também que a medida ψ é tal que as integrais de Stieltjes

$$\mu_k = \int_a^b x^k d\psi(x), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

existem, ver [12].

Os valores μ_k são chamados de momentos da medida ψ. Quando o intervalo (a, b) é limitado os momentos μ_k sempre existem, mas se (a, b) for infinito, os momentos μ_k nem sempre existem. Quando $\mu_0 = 1$, a medida ψ é chamada de medida de probabilidade. Se os momentos μ_k existem para $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, dizemos que ψ é uma medida forte em (a, b).

Se ψ é uma medida positiva em um intervalo $(-b, b)$, $b > 0$, tal que vale a propriedade $d\psi(x) = -d\psi(-x)$, $x \in (-b, b)$, dizemos que ψ é uma medida simétrica. Quando ψ é absolutamente contínua, podemos escrever $d\psi(x) = w(x)dx$, onde w é uma função não negativa e não identicamente nula, w é chamada de função peso.

O fato de que a medida ψ tem infinitos pontos de aumento, ou seja, seu suporte é um conjunto infinito, garante que ψ é tal que

$$\int_a^b p(x) d\psi(x) > 0,$$

para qualquer polinômio $p(x) \geq 0$, mas não identicamente nulo em (a, b). Assim, podemos definir o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$ da seguinte forma

$$\langle f, g \rangle_\psi = \int_a^b f(x) g(x) d\psi(x),$$

onde f e g são funções contínuas no intervalo (a, b). Se $\langle f, g \rangle_\psi = 0$, então dizemos que f é ortogonal a g. Se $f = g$, então $\| f \| = \sqrt{\langle f, f \rangle_\psi} = \left(\int_a^b f^2(x) d\psi(x) \right)^{1/2}$ é chamada de norma de f.

Diante destas considerações, podemos definir uma sequência de polinômios ortogonais com relação a uma medida definida em um intervalo (a, b). Sem perda de generalidade consideramos os polinômios na forma mônica, ou seja, quando o coeficiente do termo de maior grau é 1.

Definição 1.3. *Uma sequência de polinômios $\{p_n\}_{n\geq 0}$ é chamada de sequência de polinômios ortogonais com relação à medida ψ no intervalo (a,b), se p_n é de grau exatamente n e*

$$\langle p_m, p_n\rangle_\psi = \int_a^b p_m(x)p_n(x)d\psi(x) = \rho_n\delta_{n,m}, \tag{1.1}$$

onde $\rho_n \neq 0$ e $\delta_{n,m}$ é o delta de Kronecker.

Além disso, se $\rho_n = 1$, $n \geq 0$, a sequência $\{p_n\}_{n\geq 0}$ é chamada de sequência de polinômios ortonormais com relação a ψ.

Pela Definição 1.3, a sequência $\{p_k\}_{k=0}^m$ é um conjunto linearmente independente do espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a m, $\mathbb{P}_m$, consequentemente uma base para $\mathbb{P}_m$. Podemos definir polinômios ortogonais de outras formas, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 1.1. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *$\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida ψ em (a,b), ou seja, $\langle p_m, p_n\rangle_\psi = \delta_{mn}\rho_n$, onde $\rho_n \neq 0$.*

(b) *$\langle p_n, \pi\rangle_\psi = 0$, para todo polinômio π de grau $m < n$, e $\langle p_n, \pi\rangle_\psi \neq 0$ se $m = n$.*

(c) *$\langle x^m, p_n\rangle_\psi = \int_a^b x^m p_n(x)d\psi(x) = \tilde{\rho}_n\delta_{n,m}$, onde $\tilde{\rho}_n \neq 0$.*

Sejam $\{T_n\}_{n\geq 0}$ e $\{S_n\}_{n\geq 0}$ duas sequências de polinômios ortogonais com relação a medida ψ no intervalo (a,b). Seja $T_j \in \{T_n\}_{n\geq 0}$, como $S_0, S_1, \ldots, S_j$ formam uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq j$, podemos escrever T_j como uma combinação linear desses polinômios. Assim,

$$T_j(x) = \sum_{i=0}^{j} c_i S_i(x).$$

Pelo teorema anterior $\langle T_j, \pi\rangle_\psi = 0$ para todo polinômio π de grau $\leq j-1$.

Assim, para $k = 0, 1, \ldots, j-1$, segue que $\langle T_j, S_k\rangle_\psi = 0$ e para $k = j$ temos $\langle T_j, S_j\rangle_\psi = c_j\langle S_j, S_j\rangle_\psi \neq 0$ e isto implica que,

$$T_j(x) = c_j S_j(x), \quad j = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Portanto, a menos de fator constante, a sequência de polinômios ortogonais com relação a uma medida ψ em (a, b), se existir, é única.

Para garantir a existência dos polinômios ortogonais com relação a uma medida, basta mostrar que os determinantes de Hankel, H_n, de ordem $n+1$,

$$H_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0,$$

são todos diferentes de zero.

Um método recursivo de construção dos polinômios ortogonais na reta real conhecido como algoritmo de Stieltjes, veja [17], é dado no Teorema a seguir.

Teorema 1.2. (Algoritmo de Stieltjes) *Os polinômios ortogonais p_n satisfazem uma relação de recorrência de três termos. Quando mônicos, essa relação é dada por*

$$p_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})p_n(x) - \sigma_{n+1}p_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{1.2}$$

com $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x - \beta_1$ e os coeficientes σ_{n+1} e β_{n+1} tais que

$$\sigma_{n+1} = \frac{\langle p_n, p_n \rangle_\psi}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle_\psi}, \ \ n \geq 1, \qquad e \qquad \beta_{n+1} = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle_\psi}{\langle p_n, p_n \rangle_\psi}, \ \ n \geq 0.$$

Assim, pode-se observar que $\rho_n = \langle p_n, p_n \rangle_\psi = \sigma_{n+1}\sigma_n \cdots \sigma_2\mu_0, \quad n \geq 1.$

A recíproca da propriedade acima também é verdadeira a qual é conhecida como o Teorema de Favard.

Teorema 1.3. (Favard) *Sejam $\{\beta_n\}_{n\geq 1}$ e $\{\sigma_{n+1}\}_{n\geq 1}$ sequências de números reais arbitrários, com $\beta_n \in \mathbb{R}$ e $\sigma_{n+1} > 0$ para $n \geq 1$, e seja $\{p_n\}_{n\geq 0}$ uma sequência de polinômios mônicos satisfazendo a relação de recorrência de três termos*

$$p_n(x) = (x - \beta_n)p_{n-1}(x) - \sigma_n p_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \ldots,$$

com $p_0(x) = 1$ e $p_1(x) = x - \beta_1$. Então, existe uma medida ψ correspondente a sequência de polinômios $\{p_n\}_{n\geq 0}$, a qual é ortogonal.

Dentre outras propriedades importantes dos polinômios ortogonais, p_n, podemos citar: seus zeros são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b). Além disso, os zeros de p_n e p_{n+1} se entrelaçam, ou seja, considerando $\chi_{n,1}, \chi_{n,2}, \ldots, \chi_{n,n}$ os zeros de p_n, $n \geq 1$, em ordem crescente, temos

$$\chi_{n+1,1} < \chi_{n,1} < \chi_{n+1,2} < \chi_{n,2} < \cdots < \chi_{n+1,n} < \chi_{n,n} < \chi_{n+1,n+1}.$$

Isto significa que entre dois zeros consecutivos do polinômio p_{n+1} existe um único zero de p_n. Está propriedade é conhecida como propriedade de entrelaçamento.

Definição 1.4. *Dada uma sequência de polinômios ortogonais $\{p_n\}_{n\geq 0}$, definimos os polinômios associados, ou polinômios numeradores, de p_n por*

$$q_n(x) = \int_a^b \frac{p_n(t) - p_n(x)}{t - x} d\psi(t), \quad n \geq 0.$$

Os polinômios q_n são polinômios de grau exatamente $n-1$ para $n \geq 1$. Além disso, os polinômios associados, q_n, satisfazem a mesma relação de recorrência dos polinômios ortogonais mônicos p_n, com condições iniciais diferentes, isto é, $q_0(x) = 0$ e $q_1(x) = \mu_0$, e

$$q_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})q_n(x) - \sigma_{n+1}q_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Utilizando as relações de recorrência de $\{p_n\}_{n\geq 0}$ e $\{q_n\}_{n\geq 0}$, é possível verificar que

$$p_n(x)q_{n+1}(x) - p_{n+1}(x)q_n(x) = \sigma_{n+1}\sigma_n \cdots \sigma_3\sigma_2\mu_0 \neq 0. \tag{1.3}$$

Além disso, com esta propriedade pode-se mostrar que entre dois zeros consecutivos de p_n existe um único zero do polinômios q_n, (também conhecida por propriedade de entrelaçamento), ou seja,

$$\chi_{n,k} < y_{n,k} < \chi_{n,k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

lembrando que $\chi_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, são os zeros de p_n em ordem crescente e $y_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, os zeros de q_n, também em ordem crescente.

1.1.1 Fórmulas de quadratura

As fórmulas de quadratura têm como objetivo aproximar numericamente integrais do tipo $\int_a^b f(x)d\psi(x)$, onde ψ é uma medida em $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ e f é uma função real em (a, b), ou seja,

$$\int_a^b f(x)d\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} W_{n,k} f(\varrho_{n,k}) + \tilde{E}_n(f).$$

Os valores $W_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, são chamados pesos da fórmula de quadratura, ϱ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ os nós e $\tilde{E}_n(f)$ é o erro cometido na aproximação, ver [22].

As fórmulas de quadratura interpolatórias são bem conhecidas e são obtidas considerando o polinômio interpolador de f, nos pontos distintos $\varrho_{n,1}, \varrho_{n,2}, \ldots, \varrho_{n,n}$, mais precisamente, se $\pi(x) = (x - \varrho_{n,1})(x - \varrho_{n,2}) \cdots (x - \varrho_{n,n})$, então

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi(x)}{(x - x_j)\pi'(\varrho_{n,j})} f(\varrho_{n,j}) + \tilde{R}_n(x),$$

onde $\tilde{R}_n(x) = f^{(n)}(\xi_x)\frac{\pi(x)}{n!}$ com $\xi_x \in [a, b]$. Deste modo, se f é um polinômio de grau no máximo $n - 1$, então

$$\int_a^b f(x) d\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} W_{n,k} f(\varrho_{n,k}),$$

onde $W_{n,k} = \int_a^b \frac{\pi(x)}{(x-\varrho_{n,j})\pi'(\varrho_{n,j})} d\psi(x)$.

A forma como são escolhidos os nós da fórmula de quadratura está intimamente ligada à sua eficiência. Nas fórmulas de Newton-Côtes, por exemplo, os nós $\{\varrho_{n,i}\}_{i=1}^{n}$ são igualmente espaçados, (ver [22, 32]). Porém, nas fórmulas de Quadratura Gaussianas (ver [12]) os nós escolhidos são os zeros do polinômio $p_n(x)$, de grau n, que pertence a uma sequência de polinômios ortogonais $\{p_k\}_{k\geq 0}$ com relação a uma medida ψ no intervalo (a, b), ou seja, $\varrho_{n,k} = \chi_{n,k}$. Esta fórmula de quadratura tem grau de precisão algébrico $2n - 1$, isto é, elas são exatas se f for um polinômio de grau no máximo $2n - 1$.

Utilizando também os polinômios associados aos polinômios ortogonais p_n é possível mostrar que os pesos de quadratura gaussiana, $W_{n,k}$, podem ser obtidos por

$$W_{n,k} = \frac{q_n(\chi_{n,k})}{p'_n(\chi_{n,k})},$$

onde $\chi_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ são zeros do polinômio ortogonal p_n, ou ainda, reescrevendo a expressão acima utilizando (1.3), obtém-se

$$W_{n,k} = \frac{\sigma_n \sigma_{n-1} \ldots \sigma_2 \mu_0}{p'_n(\chi_{n,k}) p_{n-1}(\chi_{n,k})}.$$

1.2 Sequências encadeadas

Vamos agora reapresentar, já definido na Introdução, o conceito de sequências encadeadas, estudado primeiramente por Wall, (ver [34]) e que também pode ser encontrado em [12]. Este assunto tem uma grande relação com os polinômios ortogonais. Apresentamos também as propriedades básicas que serão utilizadas no decorrer deste trabalho.

Definição 1.5. *Uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência encadeada positiva se existe uma outra sequência $\{g_n\}_{n\geq 0}$ tal que*

(i) $0 \leq g_0 < 1\,, \quad 0 < g_n < 1 \quad n \geq 1,$

(ii) $a_n = (1 - g_{n-1})g_n \quad n \geq 1.$

A sequência $\{g_n\}_{n\geq 0}$ é chamada sequência de parâmetros para $\{a_n\}_{n\geq 1}$ e g_0 é dito o parâmetro inicial.

Definição 1.6. *Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência encadeada positiva. Uma sequência de parâmetros $\{m_n\}_{n\geq 0}$ é chamada sequência minimal de parâmetros para $\{a_n\}_{n\geq 1}$ se $m_0 = 0$.*

Teorema 1.4. ([12]) *Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência encadeada positiva e sejam $\{g_n\}_{n\geq 0}$ e $\{h_n\}_{n\geq 0}$ sequências de parâmetros para $\{a_n\}_{n\geq 1}$. Então, $g_n < h_n$ para $n \geq 1$ se, e somente se, $g_0 < h_0$.*

Teorema 1.5. ([12]) *Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência encadeada positiva. Se $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tem uma sequência de parâmetros $\{g_n\}_{n\geq 0}$ tal que $g_0 > 0$, então, para cada h_0 satisfazendo $0 \leq h_0 < g_0$, existe uma correspondente sequência de parâmetros $\{h_n\}_{n\geq 0}$.*

Definição 1.7. *Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência encadeada positiva. Uma sequência de parâmetros $\{M_n\}_{n\geq 0}$ é dita sequência maximal de parâmetros para $\{a_n\}_{n\geq 1}$ se, para qualquer outra sequência de parâmetros $\{g_n\}_{n\geq 0}$, vale $M_n > g_n,\ \ n \geq 0$.*

O critério de Wall estabelecido no teorema a seguir, é uma ferramenta muito utilizada para determinar se uma sequência de parâmetros é maximal.

Teorema 1.6. ([12, 34]) *Uma sequência de parâmetros $\{g_n\}_{n\geq 0}$ é a sequência maximal para uma sequência encadeada positiva $\{a_n\}_{n\geq 1}$ se, e somente se,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_n)} = \infty.$$

Quando a sequência minimal de parâmetros $\{m_n\}_{n\geq 0}$ de $\{a_n\}_{n\geq 1}$ coincidir com a sequência maximal de parâmetros $\{M_n\}_{n\geq 0}$ de $\{a_n\}_{n\geq 1}$ (ou, equivalentemente, $m_0 = M_0 = 0$), dizemos que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é determinada por seus parâmetros unicamente ou que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é unicamente determinada. Caso contrário, dizemos que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é não unicamente determinada.

Exemplo 1.1. *Considere a sequência constante* $\{a_n\}_{n\geq 1} = \{1/4\}$. *Observe que fazendo* $g_0 = 0$ *na Definição 1.5, encontramos os valores,* $g_1 = 1/4,\ g_2 = 2/6,\ g_3 = 3/8,\ g_4 = 4/10,\ g_5 = 5/12, \cdots$. *Isto nos leva a deduzir que a sequência* $\{g_n\}_{n\geq 0} = \{\frac{n}{2(n+1)}\}_{n\geq 0}$, *ou seja,* $\{\frac{n}{2(n+1)}\}_{n\geq 0}$ *é sequência minimal de parâmetros para a sequência encadeada* $\{1/4\}$. *Além disso,* $\{1/2\}$ *também é uma sequência de parâmetros para a sequência encadeada* $\{1/4\}$. *Usando o Teorema 1.6, podemos ver que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{(1/2)^n} = \infty.$$

Logo a sequência de parâmetros $\{1/2\}$ *é maximal.*

Portanto, a sequência encadeada $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *possui infinitas sequências de parâmetros.*

Teorema 1.7. *Seja* $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência encadeada positiva. Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *então* $0 \leq a \leq 1/4$.

Teorema 1.8. ([12])(Teste de Comparação) *Se* $\{a_n\}_{n\geq 1}$*é sequência encadeada e* $0 < c_n \leq a_n$ *para* $n \geq 1$, *então a sequência* $\{c_n\}_{n\geq 1}$ *é também sequência encadeada.*

Teorema 1.9. ([12]) *Seja* $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência encadeada positiva com sequência de parâmetros* $\{g_n\}_{n\geq 0}$. *Então,*

(i) $\{a_{n+1}\}_{n\geq 1}$ *é, também, uma sequência encadeada positiva com sequência de parâmetros* $\{g_{n+1}\}_{n\geq 0}$;

(ii) *se* $\{\hat{m}_n\}_{n\geq 0}$ *denota a sequência minimal de parâmetros para* $\{a_{n+1}\}_{n\geq 1}$, *então* $\hat{m}_n < m_{n+1}$, *para* $n \geq 0$, *onde* $\{m_n\}_{n\geq 0}$ *é sequência minimal de parâmetros para* $\{a_n\}_{n\geq 1}$;

(iii) $\{M_{n+1}\}_{n\geq 0}$ *é sequência maximal de parâmetros para* $\{a_{n+1}\}_{n\geq 1}$.

O Teorema 1.9 garante que se $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ é uma sequência encadeada positiva, então $\{a_2, a_3, a_4, \ldots\}$ também é sequência encadeada positiva, bem como $\{a_3, a_4, a_5, \ldots\}$, $\{a_4, a_5, a_6, \ldots\}$, etc.

Teorema 1.10. ([18]) *Uma sequência constante* $\{c\}_{n=1}^{N-1}$, *é uma sequência encadeada se, e somente se,*

$$0 < c \leq \frac{1}{4cos^2(\pi/(N+1))}.$$

Se $N = \infty$, *a condição se torna* $c \leq 1/4$, *ou seja, o mesmo resultado do Teorema 1.7.*

Um dos resutados sobre sequências encadeadas que tem conexão com a teoria de polinômios ortogonais diz respeito à limitação de zeros de um polinômio ortogonal p_n, $n \geq 1$, no seguinte teorema que pode se visto em [12, 18].

Teorema 1.11. *Seja* $\{p_n\}_{n\geq 0}$ *uma sequência de polinômios ortogonais com relação a* ψ *em* (a, b) *satisfazendo a relação de recorrência* (1.2)*. Então, os zeros de* p_n, $n \geq 1$, *estão em* (a, b) *se, e somente se,*

(i) $\beta_n \in (a, b), \quad n \geq 1,$

(ii) $\{\tilde{u}_n(x)\}_{n\geq 1}$ *é uma sequência encadeada para* $x = a$ *e* $x = b$*, onde*

$$\tilde{u}_n(x) = \frac{\sigma_{n+1}}{(x - \beta_n)(x - \beta_{n+1})},$$

para $n \geq 1$.

Teorema 1.12. ([18]) *Seja* $\{p_n\}_{n=0}^{N}$ *uma sequência de polinômios ortogonais que satisfaz a relação de recorrência* (1.2) *com* $\sigma_n > 0$*, para* $1 \leq n < N$ *e seja* $\{\tilde{u}_n\}_{n=1}^{N}$ *uma sequência encadeada. Sejam*

$$B = \max\{x_n; 0 < n < N\} \quad e \quad A = \min\{y_n; 0 < n < N\}$$

onde x_n *e* y_n, $x_n \geq y_n$ *são os zeros da equação* $(x - \beta_n)(x - \beta_{n-1})\tilde{u}_n = \sigma_n$*, então os zeros de* $p_N(x)$ *estão em* (A, B).

1.3 Polinômios ortogonais no círculo unitário

Os polinômios ortogonais no círculo unitário também são conhecidos como polinômios de Szegő, em homenagem a Gabor Szegő, que os introduziu na primeira metade do século XX. Apresentamos, agora, algumas definições e resultados bem conhecidos sobre esses polinômios e que podem ser encontrados em [18, 30, 33].

Considere μ uma medida positiva no círculo unitário

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\},$$

parametrizado por $z = e^{i\theta}$, ou seja, $\mu(e^{i\theta})$, definida em $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é uma função real, limitada e não decrescente, com infinitos pontos de aumento em $\mathbb{T}$, onde os momentos trigonométricos são dados por

$$\mu_m = \int_{\mathbb{T}} z^{-m}\, d\mu(z) = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta}\, d\mu(e^{i\theta}), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{1.4}$$

Observe, como μ é uma medida positiva temos a seguinte relação entre os momentos

$$\overline{\mu}_{-m} = \int_0^{2\pi} \overline{e^{im\theta}}\, d\mu(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta}\, d\mu(e^{i\theta}) = \mu_m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.5}$$

Definição 1.8. *Dizemos que $z_0 \in \mathbb{T}$ é um ponto puro (ou ponto de massa) de μ, se a medida nesse ponto é positiva, isto é, $\mu(\{z_0\}) > 0$. Um ponto puro, z_0, é chamado isolado ou discreto se, e somente se, existe um conjunto aberto, A, em torno de z_0, tal que $\mu(A \setminus \{z_0\}) = 0$.*

Utilizando a medida μ, podemos definir o funcional linear

$$\mathcal{L}\left[z^m\right] = \int_{\mathbb{T}} z^m\, d\mu(z) = \mu_{-m}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{1.6}$$

sobre o espaço dos polinômios de Laurent, isto é, funções definidas em $\mathbb{C}$ da forma

$$f(z) = \sum_{k=i}^{j} c_k z^k, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

onde i e j são números inteiros tais que $i \leq j$. Observe que

$$\mathcal{L}\left[f\right] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=i}^{j} c_k z^k\right] = \sum_{k=i}^{j} c_k \mu_{-k},$$

para qualquer polinômio de Laurent f.

Como a medida μ tem infinitos pontos de aumento no intervalo $[0, 2\pi]$, para qualquer $f(e^{i\theta}) \geq 0$, não identicamente nula e contínua no suporte de μ, temos

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, d\mu(e^{i\theta}) > 0.$$

Assim, utilizando $\mathcal{L}$, podemos definir o produto interno, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, por

$$\langle f, g \rangle = \mathcal{L}[f(z)\overline{g(z)}] = \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)}\, d\mu(z), \tag{1.7}$$

onde f e g são polinômios no circulo unitário.

Considerando a sequência de momentos $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, podemos definir, para $n \geq 0$, a matriz

$$T_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix}$$

conhecida como matriz de Toeplitz associada à sequência $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, cujo determinante, Δ_n é chamado de determinante de Toeplitz e é dado por

$$\Delta_{-1} = 1 \quad \text{e} \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, \quad n \geq 0. \tag{1.8}$$

Note que a matriz T_n é hermitiana, ou seja, $T_n = \overline{T_n^t}$, pois, de (1.5), $\mu_m = \overline{\mu}_{-m}$, $m = 0, 1, 2, \ldots,$.

Definição 1.9. *Dizemos que um funcional linear $\mathcal{L}$, onde $\mu_m = \mathcal{L}\left[z^{-m}\right]$, é positivo definido se $\Delta_n > 0$, $n \geq 0$, e quase definido se $\Delta_n \neq 0$, $n \geq 0$.*

Considerando o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e μ uma medida com infinitos pontos de aumento em $[0, 2\pi]$ vemos que para todo polinômio de grau n, $n \geq 0$, $\pi(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, com $c_k \in \mathbb{C}$ e $c_n \neq 0$,

$$0 < ||\pi||^2 = \langle \pi, \pi \rangle = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{n} c_k z^k \overline{\sum_{j=0}^{n} c_j z^j}\right] = \mathcal{L}\left[\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \overline{c}_j c_k z^{k-j}\right] = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \overline{c}_j c_k \mu_{j-k}.$$

Reescrevendo na forma matricial obtemos

$$||\pi||^2 = c^H T_n c > 0,$$

onde T_n é a matriz de Toeplitz e $c^H = (\overline{c}_0, \overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_n)$. Assim T_n é uma matriz positiva definida e consequentemente, $\Delta_n > 0$, $n \geq 0$, ou seja, o funcional $\mathcal{L}$ definido em (1.6) é positivo definido.

Definição 1.10. *Uma sequência $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ de números complexos é hermitiana se para $m = 0, 1, 2, \ldots$, $\mu_n = \overline{\mu}_{-n}$ e é hermitiana positiva definida se $\Delta_n > 0$, $n \geq 0$.*

Podemos agora, definir sequência de polinômios ortogonais com relação a uma medida μ com suporte em $\mathbb{T}$, ou seja, sequência de polinômios ortogonais no círculo unitário (polinômios de Szegő).

Definição 1.11. *Seja $\mathcal{L}$ um funcional linear positivo definido (ou quase definido). Uma sequência de polinômios $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$, onde ϕ_n é mônico de grau exatamente n, é chamada de sequência de polinômios ortogonais com relação a $\mathcal{L}$, se*

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \mathcal{L}\left[\phi_n(z)\overline{\phi_m(z)}\right] = \kappa_n^{-2}\delta_{m,n}, \tag{1.9}$$

onde $\kappa_n^{-2} \neq 0$.

Se μ é uma medida positiva com suporte em $\mathbb{T}$, podemos reescrever a definição acima de polinômios ortogonais no círculo unitário, da seguinte forma:

$$\int_{\mathbb{T}} \phi_n(z)\overline{\phi_m(z)}\, d\mu(z) = \int_0^{2\pi} \phi_n(e^{i\theta})\overline{\phi_m(e^{i\theta})}\, d\mu(e^{i\theta}) = \kappa_n^{-2}\delta_{m,n}. \tag{1.10}$$

Como $\kappa_n^{-2} = \int_{\mathbb{T}}|\phi_n(z)|^2 d\mu(z) = \|\phi_n\|^2$, então $\kappa_n > 0$ e os polinômios ortonormais no círculo unitário são dados por

$$\varphi_n(z) = \kappa_n\phi_n(z), \quad n \geq 0.$$

Como no caso dos polinômios ortogonais na reta real, (Teorema 1.1) para os polinômios ortogonais no círculo unitário pode-se mostrar a seguinte equivalência da definição usando (1.9):

$$\langle \phi_n, \pi_m\rangle = \mathcal{L}\left[\phi_n(z)\overline{\pi_m(z)}\right] = \hat{\kappa}_n\delta_{n,m} \tag{1.11}$$

onde $\hat{\kappa}_n \neq 0$ e π_m é qualquer polinômio de grau $m \leq n$. Além disso, para $n \geq 0$ escrevendo

$$\phi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad c_n = 1,$$

e usando (1.11) para $m = 0, 1, \ldots, n$, temos

$$\langle \phi_n, z^m\rangle = \mathcal{L}\left[\phi_n(z)z^{-m}\right] = \sum_{k=0}^{n} c_k\mu_{m-k} = \tilde{\kappa}_n\delta_{n,m}, \tag{1.12}$$

onde $\tilde{\kappa}_n \neq 0$. Note que as definições 1.11 e 1.12 para polinômios de Szegő são equivalentes.

Os polinômios de Szegő não satisfazem uma relação de recorrência de três termos como acontece com os polinômios ortogonais na reta real, no entanto os polinômios mônicos de Szegő satisfazem as seguintes relações, para $n \geq 1$

$$\phi_n^*(z) = \phi_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1}z\phi_{n-1}(z), \tag{1.13}$$

$$\phi_n(z) = (1 - |\alpha_{n-1}|^2)z\phi_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1}\phi_n^*(z), \tag{1.14}$$

com $\phi_0(z) = 1$ e $\phi_0^*(z) = 1$, onde $\alpha_{n-1} = -\overline{\phi_n(0)}$ e $\phi_n^*(z) = z^n\overline{\phi_n(1/\bar{z})}$ denota o polinômio recíproco de $\phi_n(z)$. Se substituirmos (1.13) em (1.14) obtemos

$$\phi_n(z) = z\phi_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1}\,\phi_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1. \tag{1.15}$$

Os números α_n, $n \geq 0$, são conhecidos como coeficientes de Verblunsky e, em alguns textos, são denominados coeficientes de reflexão, de Schur, de Szegő ou de Geronimus. É sabido que esses coeficentes satisfazem

$$|\alpha_n| < 1 \quad \text{e} \quad \mu_0\prod_{k=0}^{n-1}(1 - |\alpha_k|^2) = \kappa_n^{-2} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad n \geq 0. \tag{1.16}$$

Além disso, uma importante propriedade dos coeficientes de Verblunsky é que podem ser expressos em termos dos determinantes de Toeplitz, ou seja, em termos dos momentos

$$\overline{\alpha}_n = \frac{(-1)^n}{\Delta_n}\begin{vmatrix} \mu_{-1} & \mu_{-2} & \cdots & \mu_{-n} & \mu_{-n-1} \\ \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-2} & \mu_{n-3} & \cdots & \mu_{-1} & \mu_{-2} \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Assim, dada uma medida no círculo unitário é sempre possível associar a esta medida uma única sequência de números complexos $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ tais que $|\alpha_n|< 1$, $n \geq 0$. O próximo teorema fornece a recíproca deste resultado, conhecido como Teorema de Verblusnky (ou como Teorema tipo Favard para o círculo unitário).

Teorema 1.13. (Verblunsky) *Seja $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ uma sequência arbitrária de números complexos, onde $|\alpha_n|< 1$, $n \geq 0$. Então, associada a esta sequência, existe uma única medida de probabilidade μ, com suporte no círculo unitário, tal que os polinômios ϕ_n, $n \geq 0$, gerados por (1.15), são os respectivos polinômios de Szegő mônicos.*

Outra propriedade satisfeita pelos polinômios de Szegő é que todos os seus zeros estão no disco unitário aberto $|z|< 1$.

A seguir apresentamos um exemplo simples de polinômio ortogonais no círculo unitário

Exemplo 1.2. *Consideremos a medida de Lebesgue μ definida por*

$$d\mu(z) = \frac{1}{2\pi i z}dz, \quad z \in \mathbb{T}.$$

Observe que

$$\langle z^n, z^m\rangle = \int_{\mathbb{T}} z^n\overline{z^m}\frac{1}{2\pi i z}dz = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\frac{d\theta}{2\pi} = \delta_{n,m}. \tag{1.17}$$

Assim, os momentos trigonométricos definidos em (1.4)*, são $\mu_m = \delta_{0,m}$, $m \geq 0$, ou seja, $\mu_m = 0$, para $m > 0$.*

Assim, de (1.17) *vemos que os polinômios ortogonais no círculo unitário com respeito a medida de Lebesgue são $\phi_n(z) = z^n$, $n \geq 0$. Portanto, os coeficientes de Verblunsky associados à medida de Lebesgue são dados por*

$$\alpha_n = -\overline{\phi_{n+1}(0)} = 0, \quad n \geq 0.$$

Note, ainda, que os zeros, $z_{n,k}$, $1 \leq k \leq n$, dos polinômios $\phi_n(z) = z^n$, $n \geq 1$, são todos iguais a zero.

1.3.1 Polinômios para-ortogonais

Traremos agora um assunto bem conhecido que são os polinômios para-ortogonais, como referência usamos [21]. Estes polinômios possuem uma interessante propriedade sobre seus zeros, pois estão localizados no círculo unitário $\mathbb{T}$. Como aplicação, os zeros destes polinômios podem ser utilizados para construir fórmulas de quadratura no círculo unitário, como pode ser visto em [21].

Definição 1.12. *Uma sequência $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é denominada sequência de polinômios para-ortogonais com respeito a medida μ de suporte em $\mathbb{T}$ se para $n \geq 0$, X_n é um polinômio de grau n que satisfaz*

$$\begin{aligned} \langle X_n, 1 \rangle &\neq 0, \\ \langle X_n, z^m \rangle &= 0, \quad m = 1, 2, \ldots, n-1\,, \\ \langle X_n, z^n \rangle &\neq 0\,. \end{aligned}$$

Os polinômios X_n recebem tal nomenclatura, pois diferentemente dos polinômios ortogonais no círculo unitário ϕ_n, satisfazem $\langle X_n, 1 \rangle \neq 0$.

Considere os polinômios $\Psi_n(w_n, z) = \phi_n(z) - w_n \phi_n^*(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$, onde $w_n \in \mathbb{C}$ e $|w_n| = 1$. Primeiramente, observe que, usando a definição de polinômios recíprocos $\phi_n^*(z) = z^n \overline{\phi_n(1/\bar{z})}$, podemos mostrar que

$$\langle \phi_n^*, z^m \rangle = \int_{\mathbb{T}} \phi_n^*(z) \overline{z^m} d\mu(z) = \begin{cases} \widetilde{\kappa}_n \neq 0, & \text{se} \quad m = 0, \\ 0, & \text{se} \quad m = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{1.18}$$

Assim, usando as relações (1.12) e (1.18) pode-se verificar que a sequência de polinômios $\{\Psi_n(w_n, z)\}_{n\geq 0}$ é uma sequência de polinômios para-ortogonal com respeito a μ.

Uma outra representação para os polinômios para-ortogonais $\{\Psi_n(w_n, z)\}_{n\geq 0}$, pode ser obtida usando (1.13) e (1.15) , da seguinte forma

$$\Psi_n(\tau_n, z) = z\phi_{n-1}(z) - \tau_n \phi_{n-1}^*(z), \qquad |\tau_n| = 1, \quad n \geq 1. \tag{1.19}$$

Uma outra propriedade sobre os zeros dos polinômios para-ortogonais é que eles são autovalores de uma matriz pentadiagonal, veja em [11].

1.4 Métodos numéricos para o cálculo de autovalores de matrizes

No Capítulo 4, utilizamos o método de Laguerre e o método das potências para encontrar autovalores de um problema de autovalor generalizado e aqui faremos uma breve introdução destes métodos, que podem ser encontrados com maiores detalhes em [14, 23, 36].

1.4.1 Método de Laguerre

O método de Laguerre, veja [36], é utilizado para encontrar zeros de um polinômio $\mathcal{P}_n$ e traz grandes vantagens pela rapidez de sua convergência, que é cúbica quando os zeros são distintos. Suponhamos que $\mathrm{x}_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ sejam zeros reais distintos do polinômio $\mathcal{P}_n$, tais que $\mathrm{x}_{n,n} < \mathrm{x}_{n,n-1} < \cdots < \mathrm{x}_{n,2} < \mathrm{x}_{n,1}$.

O método de Laguerre gera duas sequências de aproximações que são dadas da seguinte forma.

Seja a aproximação inicial y_0 pertencente ao intervalo $(\mathrm{x}_{n,k+1}, \mathrm{x}_{n,k})$, então o processo iterativo

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= L_+(y_j) \\ &= y_j + \frac{n\mathcal{P}_n(y_j)}{-\mathcal{P}_n'(y_j) + sign(\mathcal{P}_n(y_j))\sqrt{[(n-1)\mathcal{P}_n'(y_j)]^2 - n(n-1)\mathcal{P}_n(y_j)\mathcal{P}_n''(y_j)}}, \end{aligned}$$

para $j = 0, 1, \ldots$, converge para $\mathrm{x}_{n,k}$. Do mesmo modo, o processo iterativo

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= L_-(y_j) \\ &= y_j + \frac{n\mathcal{P}_n(y_j)}{-\mathcal{P}_n'(y_j) - sign(\mathcal{P}_n(y_j))\sqrt{[(n-1)\mathcal{P}_n'(y_j)]^2 - n(n-1)\mathcal{P}_n(y_j)\mathcal{P}_n''(y_j)}}, \end{aligned}$$

para $j = 0, 1, \ldots$, converge para $\mathrm{x}_{n,k+1}$.

Aqui a função sinal de um número real x, é definida como

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad x < 0, \\ 0, & \text{se} \quad x = 0, \\ 1, & \text{se} \quad x > 0, \end{cases}$$

ou alternativamente, quando $x \neq 0$, podemos escrever

$$sign(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Além dos valores $\mathcal{P}_n(y_j)$ em cada iteração, o método também necessita dos valores $\mathcal{P}'_n(y_j)$ e $\mathcal{P}''_n(y_j)$. No Capítulo 4 utilizamos este método para encontrar zeros de um polinômio que satisfaz uma relação de recorrência, assim as derivadas de primeira e segunda ordem podem ser obtidas através da relação de recorrência.

Este método necessita de muita operação aritmética, mas que é compensado pela sua ordem de convergência que é cúbica. Além disso, ele possui convergência global, pois não depende da aproximação inicial atribuída na primeira iteração.

1.4.2 Método da potências

O método das potências consiste em determinar o autovalor de maior valor absoluto de uma matriz e seu correspondente autovetor.

Teorema 1.14. *Seja* $\mathbf{A}_n$ *uma matriz de ordem* n *e sejam* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, *seus autovalores e* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *os correspondentes autovetores. Suponhamos que os autovetores são linearmente independente e que*

$$|\lambda_n| \leq |\lambda_{n-1}| \leq \cdots |\lambda_2| < |\lambda_1|.$$

Sejam as sequências de vetores,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n[j] &= [w_{n,0}[j], w_{n,1}[j], \ldots, w_{n,n-1}[j]]^T \\ \mathbf{u}_n[j] &= [u_{n,0}[j], u_{n,1}[j], \ldots, u_{n,n-1}[j]]^T, \end{aligned}$$

definidas por

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n[j] &= \mathbf{A}_n \mathbf{u}_n[j], \\ \mathbf{u}_n[j+1] &= \gamma[j] \mathbf{w}_n[j] \end{aligned}$$

para $j = 0, 1, \ldots,$ *onde* $\gamma[j]$ *são constantes de normalização (em geral* $\gamma[j] = 1/\|\mathbf{w}_n[j]\|_\infty$, *onde* $\|\mathbf{w}_n[j]\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq n-1} w_{n,j}[j]$*) e* $\mathbf{u}_n[0]$ *é um vetor arbitrário que permite a expansão*

$$\mathbf{u}_n[0] = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{v}_j,$$

com escalares c_j *quaisquer e* $c_1 \neq 0$, *então*

$$\lim_{j \to \infty} \frac{w_{n,r}[j]}{u_{n,r}[j]} = \lambda_1 \quad r = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.20}$$

Além disso, $\lim_{j\to\infty} \mathbf{u}_n[j] = \mathbf{v}_1$.

Observe que se multiplicarmos a equação $\mathbf{A}_n\mathbf{v_i} = \lambda_i\mathbf{v}_i$ por $\mathbf{v}_i^H$ então

$$\lambda_i = \frac{\mathbf{v}_i^H\mathbf{A}_n\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i^H\mathbf{v}_i}.$$

Esta expressão é conhecida como razão Rayleigh-Ritz, veja por exemplo [16]. Ela fornece a opção de determinar o maior autovalor em módulo λ_1 no Teorema 1.14 através de

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\mathbf{u}_n[j]^H\mathbf{w}_n[j]}{\mathbf{u}_n[j]^H\mathbf{u}_n[j]} = \lambda_1. \tag{1.21}$$

De (1.20), todas as componentes $w_{n,r}[j]/u_{n,r}[j]$, tendem a λ_1. Entretanto, na prática, uma das componentes converge mais rapidamente do que as outras.

1.4.3 Método da potência inversa

O método da potência inversa é utilizado para determinar o autovalor de menor valor absoluto e seu correspondente autovetor de uma matriz $\mathbf{A}_n$. O método pode não funcionar caso a matriz $\mathbf{A}_n$ não possua autovetores linearmente independentes. O método da potência inversa é semelhante ao método das potências, com a diferença que assume-se,

$$|\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| \leq \cdots |\lambda_2| \leq |\lambda_1|$$

e determina-se λ_n.

É conhecido que, se λ é autovalor de $\mathbf{A}_n$ então λ^{-1} é autovalor de $\mathbf{A}_n^{-1}$. Além disso, se λ_n é o menor autovalor em módulo de $\mathbf{A}_n$ então λ_n^{-1} é o maior autovalor em módulo de $\mathbf{A}_n^{-1}$. Assim, o método da potência inversa consiste em calcular pelo método das potências o autovalor de maior valor absoluto de $\mathbf{A}_n^{-1}$, pois é o menor autovalor, em módulo, de $\mathbf{A}_n$. Considerando a mesma notação do Teorema 1.14 construímos os vetores $\mathbf{w}_n[j]$ e $\mathbf{u}_n[j]$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n[j] &= \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{u}_n[j], \\ \mathbf{u}_n[j+1] &= \gamma[j]\mathbf{w}_n[j] \end{aligned} \tag{1.22}$$

para $j = 0, 1, \dots,$ e, portanto,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{w_{n,r}[j]}{u_{n,r}[j]} = \lambda_n^{-1}.$$

Na prática não é necessário calcular A^{-1}, pois, de (1.22), obtemos

$$\mathbf{A}_n\mathbf{w}_n[j] = \mathbf{u}_n[j],$$

e assim, resolvemos o sistema linear usando o método LU (ver, por exemplo, [14]).

1.4.4 Método das potências com deslocamento

Usando a mesma notação do Teorema 1.14, suponhamos agora que $\mathbf{A}_n$ tem autovalores λ_i reais com

$$\lambda_n < \lambda_{n-1} \leq \cdots \leq \lambda_2 < \lambda_1.$$

Multiplicando a equação

$$\mathbf{A}_n \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v},$$

por um parâmetro real p e somando e subtraindo $p\mathbf{I}_n\mathbf{v}$, obtemos

$$(\mathbf{A}_n - p\mathbf{I}_n)\mathbf{v} = (\lambda - p)\mathbf{I}_n\mathbf{v},$$

onde $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n. A matriz $\mathbf{A}_n - p\mathbf{I}_n$ tem autovalores $\lambda - p$, isto é, os autovalores de $\mathbf{A}_n$ são deslocados p unidades na reta real. Os autovetores de $\mathbf{A}_n - p\mathbf{I}_n$ são os mesmos da matriz $\mathbf{A}_n$.

Assim, considere a sequência de vetores definidas por

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n[j] &= (\mathbf{A}_n - p\mathbf{I}_n)\mathbf{u}_n[j], \\ \mathbf{u}_n[j+1] &= \gamma[j]\mathbf{w}_n[j]. \end{aligned}$$

O Teorema 1.14, pode ser aplicado à matriz $\mathbf{A}_n - p\mathbf{I}_n$, e pode ser mostrado que $\mathbf{u}_n[j]$ converge para o autovetor correspondente ao autovalor que maximiza $|\lambda_i - p|$. Logo, se

$$\begin{aligned} p &< \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}, \quad \text{então} \quad \mathbf{u}_n[j] \to \mathbf{v}_1 \quad \text{e} \quad \lim_{j\to\infty} \frac{w_{n,r}[j]}{u_{n,r}[j]} = \lambda_1 - p, \\ p &> \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}, \quad \text{então} \quad \mathbf{u}_n[j] \to \mathbf{v}_n \quad \text{e} \quad \lim_{j\to\infty} \frac{w_{n,r}[j]}{u_{n,r}[j]} = \lambda_n - p. \end{aligned}$$

Na prática não é trivial encontrar o melhor valor para p, a não ser que alguns dos autovalores sejam conhecidos. O método das potências ou o método das potências com deslocamento devem ser utilizados se apenas um ou dois autovalores são desejados.

1.4.5 Método da potência inversa com deslocamento

Se o intuito é determinar mais autovalores, então o método da potência inversa com deslocamento pode ser usado. Novamente consideremos a notação do Teorema 1.14 e suponhamos que $\mathbf{A}_n$ tem autovalores λ_i reais com

$$\lambda_n < \lambda_{n-1} \leq \cdots \leq \lambda_2 < \lambda_1.$$

Construímos as sequências

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_n[j] &= (\mathbf{A}_n - p\mathbf{I}_n)^{-1}\mathbf{u}_n[j],\\ \mathbf{u}_n[j+1] &= \gamma[j]\mathbf{w}_n[j],\end{aligned}$$

para $j = 0, 1, \ldots$. Como no método da potência inversa, obtemos

$$(\mathbf{A}_n - p\mathbf{I}_n)\mathbf{w}_n[j] = \mathbf{u}_n[j]. \tag{1.23}$$

Utilizando o método LU para resolver o sistema (1.23) e o mesmo raciocínio como no método da potência inversa, encontramos que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{w_{n,r}[j]}{u_{n,r}[j]} = \frac{1}{\lambda_i - p}. \tag{1.24}$$

Novamente o Teorema 1.14 pode ser aplicado a $(\mathbf{A}_n - p\mathbf{I}_n)^{-1}$ e a sequência $\mathbf{u}_n[j]$ converge para o autovetor correspondente ao autovalor que maximiza $1/|\lambda_i - p|$. Portanto, o método da potência inversa com deslocamento determina o autovalor da matriz $\mathbf{A}_n$ mais próximo do valor p.

Veja também que por (1.21), temos

$$\lim_{j\to\infty} = \frac{\mathbf{u}_n[j]^H\mathbf{w}_n[j]}{\mathbf{u}_n[j]^H\mathbf{u}_n[j]} = \frac{1}{\lambda_i - p}.$$

Assim,

$$\lim_{j\to\infty} = \frac{\mathbf{u}_n[j]^H\mathbf{u}_n[j]}{\mathbf{u}_n[j]^H\mathbf{w}_n[j]} = \lambda_i - p.$$

Estas expressões serão úteis no Capítulo 4 para determinar os zeros dos polinômios que satisfazem uma relação de recorrência do tipo R_{II}.

Capítulo 2

Polinômios que satisfazem uma relação de recorrência do tipo R_{II}

Neste capítulo trazemos alguns resultados sobre polinômios que satisfazem uma relação de recorrência do tipo R_{II}, que primeiro foi estudado em [19], e recentemente, um caso especial foi estudado em [20]. Também apresentamos a relação destes polinômios com polinômios para-ortogonais que podem ser vistos, por exemplo em [8] e [13]. Tais resultados serão essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Propriedades dos polinômios, P_n, que satisfazem uma relação de recorrência do tipo R_{II}.

Ismail e Masson [19] estudaram duas diferentes relações de recorrência dadas por

$$\mathcal{R}_{n+1}(x) = \sigma_{n+1}(x - v_{n+1})\mathcal{R}_n(x) - u_{n+1}(x - a_n)\mathcal{R}_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{2.1}$$

com $\mathcal{R}_0(x) = 1$, $\mathcal{R}_1(x) = \sigma_1(x - v_1)$ e

$$P_{n+1}(x) = \sigma_{n+1}(x - v_{n+1})P_n(x) - u_{n+1}(x - a_n)(x - b_n)P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{2.2}$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = \sigma_1(x - v_1)$, onde $\{\sigma_n\}, \{v_n\}, \{u_n\}, \{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências de números complexos. Em [19] as relações de recorrências (2.1) e (2.2) foram denominadas por relações de recorrências associadas com frações contínuas do tipo R_I e R_{II} respectivamente. E, em [37], foi estudada a relação de recorrência (2.2) e simplesmente denominada por relação de recorrência do tipo R_{II}. Assim, por simplicidade, neste texto iremos chamar as relações de recorrência (2.1) e (2.2) como relações de recorrência do tipo R_I e R_{II}, respectivamente.

Observe que a sequência de polinômio $\{\mathcal{R}_n\}_{n\geq 0}$ que satisfaz a relação de recorrência do tipo R_I não é uma sequência de polinômios ortogonais na reta real como em (1.1), pois não satisfaz a relação de recorrência como no Teorema de Favard (Teorema 1.3), mas Ismail e Masson [19] mostraram que se $u_{n+1} \neq 0$ e $\mathcal{R}_n(a_k) \neq 0$, para todo n, k, então associada a esta relação de recorrência existe um funcional linear $\mathcal{L}$ tal que as funções racionais

$$T_n(x) = \mathcal{R}_n \prod_{j=1}^{n} (x - a_j)^{-1}, \quad n \geq 1,$$

satisfazem a ortogonalidade

$$\mathcal{L}[x^k T_n(x)] = 0, \quad 0 \leq k < n.$$

Por exemplo, em [7], [9] e [31] foi estudado um caso particular da relação de recorrência do tipo R_I, onde considerou-se $a_n = 0$ em (2.1). Sob algumas condições foi mostrado que estes polinômios satisfazem uma ortogonalidade, tanto na reta real como no círculo unitário. Quando $\sigma_n = 1$, $v_n > 0$, $a_n = 0$ e $u_{n+1} > 0$, $n \geq 1$ em (2.1) esses polinômios são chamados de polinômios L-ortogonais.

Agora, consideramos a sequência de polinômios que satisfazem a relação de recorrência do tipo R_{II}, (2.2). Novamente, estes polinômios não são ortogonais na reta real como em (1.1), pois não satisfazem a relação de recorrência como no Teorema 1.3, porém Ismail e Masson [19] mostraram que se $u_{n+1} \neq 0$, $P_n(a_k) \neq 0$ e $P_n(b_k) \neq 0$, para todo n, k, então associado à relação de recorrência (2.2) existe um funcional linear $\mathcal{L}$ tal que as funções racionais

$$S_n(x) = P_n(x) \prod_{k=1}^{n} [(x - a_k)^{-1}(x - b_k)^{-1}], \quad n \geq 1,$$

satisfazem a ortogonalidade

$$\mathcal{L}[x^k S_n(x)] = 0, \quad 0 \leq k < n.$$

Em [20] Ismail e Ranga estudaram uma sequência $\{P_n\}_{n\geq 0}$ que satisfaz um caso especial da relação de recorrência do tipo R_{II} dada por

$$P_{n+1}(x) = (x - c_{n+1})P_n(x) - d_{n+1}(x^2 + 1)P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{2.3}$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x - c_1$, onde, $\{c_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência real e $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$ é uma sequência encadeada. Foi mostrado em [20] que P_n tem grau exatamente n e que o coeficiente do termo de maior grau de P_n é positivo, dado por

$$\mathfrak{p}_n = \prod_{k=1}^{n}(1 - \ell_k), \tag{2.4}$$

onde $\{\ell_n\}_{n\geq 1}$ é a sequência minimal de parâmetros da sequência encadeada $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$.

Nesta tese consideramos o caso especial de polinômios que satisfazem a relação de recorrência do tipo R_{II} (2.3). Para comodidade, usaremos a notação de polinômios P_n para nos referir aos polinômios que satisfazem (2.3). Trazemos neste capítulo alguns resultados importantes obtidos em [20] que são úteis para o desenvolvimento do trabalho.

Como mencionamos, os polinômios $\{P_n\}_{n\geq 0}$ não são ortogonais na reta real como em (1.1). No entanto, em [20] mostrou-se que esses polinômios, sob algumas condições, satisfazem uma certa ortogonalidade com relação a uma medida como no Teorema 2.1.

Dado uma medida de probabilidade μ no circulo unitário, usamos a notação $\mu_{\underline{\epsilon}}$ para indicar o tamanho de massa ϵ no ponto $z = 1$. Assim, a notação $\mu_{\underline{0}}$ significa que μ não tem um ponto puro (veja a Definição 1.8) em $z = 1$.

Para evitar confusões, quando necessário, usaremos a notação $\alpha_n(\mu)$, que indica a conexão dos coeficientes de Verblunsky com a medida μ.

Teorema 2.1. *Consideramos os polinômios que satisfazem a relação de recorrência do tipo R_{II} (2.3), e seja μ a medida de probabilidade sobre o círculo unitário tal que os coeficientes de Verblunsky são*

$$\alpha_{n-1}(\mu) = -\frac{1}{\tau_n}\frac{1 - 2\ell_{n+1} - ic_{n+1}}{1 - ic_{n+1}}, \quad n \geq 1, \tag{2.5}$$

onde $\tau_0 = 1$,

$$\tau_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{1 - ic_k}{1 + ic_k}, \quad n \geq 1$$

e $\{\ell_{n+1}\}_{n\geq 0}$ é a sequência minimal de parâmetros da sequência encadeada $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$.

Se

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{\ell_k}{1 - \ell_k} = \mathcal{S} < \infty,$$

então a integral $\mathcal{A}(\mu) := \int_{\mathbb{T}}|z-1|^{-2}d\mu(z)$ existe e seu valor é dado por $\mathcal{A}(\mu) = (c_1^2+1)\mathcal{S}/4$. Neste caso, seja $\nu_{\underline{0}}$ uma medida de probabilidade no círculo unitário dada por

$$\nu_{\underline{0}}(e^{i\theta}) = \frac{1}{\mathcal{A}(\mu)}\int_0^{\theta}\frac{1}{|e^{i\Theta} - 1|^2}d\mu(e^{i\Theta}), \tag{2.6}$$

e seja a função não decrescente e limitada φ em $(-\infty, \infty)$ tal que $d\varphi(x) = -d\nu_{\underline{0}}((x+i)/(x-i))$. Então, para $n \geq 1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^j \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^n} \, d\varphi(x) = \gamma_n \delta_{n,j}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{2.7}$$

onde $\gamma_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(x) = \int_{\mathbb{T}} d\nu_{\underline{0}}(z) = 1$, $\gamma_n = (1 - M_n)\gamma_{n-1}$, $n \geq 1$, tal que $\{M_{n+1}\}_{n\geq 0}$ é a sequência maximal de parâmetros de $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$.

Observação 2.1. *O valor finito de $\mathcal{S}$ da série do Teorema 2.1 equivale afirmar pelo critério de Wall (Teorema 1.6), que a sequência encadeada positiva $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$ em (2.3) tem infinitas sequências de parâmetros. Podemos, ainda, identificar que*

$$\frac{1}{M_1} = \mathcal{S} = \frac{4\mathcal{A}(\mu)}{c_1^2 + 1}.$$

onde M_1 é o elemento inicial da sequência maximal de parâmetros da sequência encadeada $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$.

De fato,

$$1 - M_1 = \gamma_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x + c_1)P_1(x)}{x^2 + 1} \, d\varphi(x) = 1 - (1 + c_1^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} \, d\varphi(x), \tag{2.8}$$

com a transformação $x = i(z+1)/(z-1)$ e usando

$$d\nu_{\underline{0}}(z) = \frac{4}{(c_1^2+1)\mathcal{S}} \frac{1}{|z-1|^2} d\mu(z),$$

assim

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} \, d\varphi(x) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{T}} |z-1|^2 \, d\nu_{\underline{0}}(z) = \frac{1}{(c^2+1)S} \int_{\mathbb{T}} d\mu(z) = \frac{1}{(c^2+1)\mathcal{S}}. \tag{2.9}$$

Por (2.9) e (2.8) concluímos que $M_1 = 1/\mathcal{S}$.

O resultado acima já é conhecido e foi mostrado em [12] utilizando o conceito de sequências encadeadas.

Observação 2.2. *Se for conhecida a sequência de parâmetros maximal da sequência encadeada positiva $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$ no Teorema 2.1, então os coeficientes de Verblunsky associados com a medida $\nu_{\underline{0}}$ são*

$$\alpha_{n-1}(\nu_{\underline{0}}) = \frac{1}{\tau_{n-1}} \frac{1 - 2M_n - ic_n}{1 - ic_n}, \quad n \geq 1, \tag{2.10}$$

veja [20].

Em [20] mostrou-se que propriedades similares com as dos polinômios ortogonais na reta real também são satisfeitas pelos polinômios P_n, por exemplo, os zeros destes polinômios são reais, distintos e satisfazem a propriedade de entrelaçamento.

Foi também mostrado que os zeros destes polinômios são soluções de um problema de autovalor generalizado

$$\mathbf{A}_n\mathbf{u}_n = x\mathbf{B}_n\mathbf{u}_n, \quad n \geq 1, \tag{2.11}$$

onde $\mathbf{u}_n \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{A}_n$ e $\mathbf{B}_n$ são matrizes hermitianas tridiagonais, respectivamente dadas por

$$\begin{bmatrix} c_1 & i\sqrt{d_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -i\sqrt{d_2} & c_2 & i\sqrt{d_3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{d_3} & c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & i\sqrt{d_n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -i\sqrt{d_n} & c_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{d_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{d_2} & 1 & \sqrt{d_3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_3} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \sqrt{d_n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{d_n} & 1 \end{bmatrix}.$$

Mais precisamente, se $u_{n,0}(x) = P_0(x) = 1$,

$$u_{n,k}(x) = \frac{(-1)^k}{(x-i)^k \prod_{j=1}^{k} \sqrt{d_{j+1}}} P_k(x), \quad k \geq 1, \tag{2.12}$$

e $\mathbf{u}_n(x) = [u_{n,0}(x), u_{n,1}(x), \ldots, u_{n,n-1}(x)]^T$, então

$$\mathbf{A}_n\mathbf{u}_n(x_{n,j}) = x_{n,j}\mathbf{B}_n\mathbf{u}_n(x_{n,j}), \quad n \geq 1,$$

onde $x_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, são os zeros do polinômio P_n.

Além disso, foi mostrado em [20] que a matriz $\mathbf{B}_n$ é positiva definida, ou seja, para todo vetor $\mathbf{v}_n \in \mathbb{C}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{v}_n^H\mathbf{B}_n\mathbf{v}_n > 0$ e também que

$$\frac{P_n'(x)P_{n-1}(x) - P_{n-1}'(x)P_n(x)}{(x^2+1)^{n-1}d_2d_3\cdots d_n} = \mathbf{u}_n(x)^H\mathbf{B}_n\mathbf{u}_n(x) > 0, \quad n \geq 2. \tag{2.13}$$

2.2 Relação entre os polinômios P_n e os polinômios para-ortogonais

Foi mostrado em [20] que usando a transformação $z = z(x) = (x+i)/(x-i)$, da reta real $(-\infty, \infty)$ ao círculo unitário $\mathbb{T}$, os polinômios

$$R_n(z) = R_n\left(\frac{x+i}{x-i}\right) = \frac{2^n}{(x-i)^n}P_n(x), \quad n \geq 0, \tag{2.14}$$

satisfazem a relação

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \tag{2.15}$$

com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$.

O polinômio R_n tem grau exatamente n em z. Se $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ são zeros de P_n então, $z_{n,k} = (x_{n,k} + i)/(x_{n,k} - i)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ são zeros de R_n.

A partir de agora usaremos as notações $\{\phi_n(\mu; z)\}_{n\geq 1}$ e $\{\Psi_n(\mu; \tau_n, z)\}_{n\geq 0}$ para indicar as sequências de polinômios ortogonais e para-ortogonais respectivamente, no círculo unitário com relação a medida μ.

Dada uma medida μ tal que a integral $\int_{\mathbb{T}} |z-1|^{-2} d\mu(z)$ existe, como podemos obter as sequências $\{c_n\}_{n\geq 1}$ e $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$ a partir de $\{\alpha_n(\mu)\}_{n\geq 0}$, ou seja, qual a aplicação inversa de (2.5)? O próximo teorema responde esta pergunta.

Teorema 2.2. *Seja μ uma medida de probabilidade no círculo unitário tal que $\mathcal{A}(\mu) = \int_{\mathbb{T}} |z-1|^{-2} d\mu(z)$ existe. Sejam $I(\mu) := \int_{\mathbb{T}} z(z-1)^{-1} d\mu(z)$ e $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ uma sequência de polinômios ortogonais no círculo unitário com respeito a μ. Considere também a sequência $\{\tau_{n+1}\}_{n\geq 0}$ com a propriedade $|\tau_{n+1}| = 1$. Então, μ é a medida dada pelo Teorema 2.1 com $\mathcal{S} < \infty$, se, e somente se,*

$$\tau_1 = \frac{I(\mu)}{\overline{I(\mu)}}, \quad c_1 = i\frac{\tau_1 - 1}{\tau_1 + 1} = -\frac{2\,\mathrm{Im}(\tau_1)}{|\tau_1 + 1|^2},$$

$$c_{n+1} = \frac{\mathrm{Im}(\tau_n \alpha_{n-1}(\mu))}{\mathrm{Re}(1 + \tau_n \alpha_{n-1}(\mu))}, \quad \ell_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{|1 + \tau_n \alpha_{n-1}(\mu)|^2}{\mathrm{Re}(1 + \tau_n \alpha_{n-1}(\mu))}, \quad n \geq 1,$$

onde

$$\tau_{n+1} = \tau_n \frac{1 + \overline{\tau_n \alpha_{n-1}(\mu)}}{1 + \tau_n \alpha_{n-1}(\mu)}, \quad n \geq 1 \tag{2.16}$$

e $\alpha_{n-1}(\mu) = -\overline{\phi_n(\mu; 0)}$, $n \geq 0$, com $\alpha_{-1}(\mu) = -1$.

Além disso, a sequência $\{R_n\}_{n\geq 0}$ que satisfaz a relação de recorrência (2.15) pode ser escrita como

$$R_n(z) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - Re(\tau_k \alpha_{k-1}(\mu))}{1 - \overline{\tau}_k \overline{\alpha_{k-1}(\mu)}} = z\phi_{n-1}(\mu; z) + \tau_n \phi_{n-1}^*(\mu; z) = \Psi_n(\mu; -\tau_n, z), \quad n \geq 1, \tag{2.17}$$

e satisfaz as condições de ortogonalidade

$$\int_{\mathbb{T}} z^{-n+k} R_n(z) \frac{z}{z-1} d\mu(z) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.18}$$

A prova deste Teorema pode ser encontrada em [8, Teorema. 4.2].

Em [8, Teorema. 4.2] os resultados foram dados assumindo que a medida μ é tal que a integral de valor principal $I(\mu) = ⨍_{\mathbb{T}} z(z-1)^{-1} d\mu(z)$ precisa existir. Entretanto aqui, colocamos uma condição mais forte sobre μ, ou seja, que $\int_{\mathbb{T}} |z-1|^{-2} d\mu(z)$ existe e assim, $⨍_{\mathbb{T}} z(z-1)^{-1} d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} z(z-1)^{-1} d\mu(z)$.

Com a medida de probabilidade $\nu_{\underline{0}}$, podemos gerar uma família de medida de probabilidade $\nu_{\underline{\epsilon}}$, $0 \le \epsilon < 1$, pela transformação de Uvarov, ou seja,

$$\int_{\mathbb{T}} f(z)\, d\nu_{\underline{\epsilon}}(z) = (1-\epsilon) \int_{\mathbb{T}} f(z)\, d\nu_{\underline{0}}(z) + \epsilon f(1). \tag{2.19}$$

Seja ν uma medida de probabilidade no círculo unitário tal que

$$\mu(e^{i\theta}) = \frac{1}{\mathcal{B}(\nu)} \int_0^{\theta} |e^{i\Theta} - 1|^2\, d\nu(e^{i\Theta}), \tag{2.20}$$

onde $\mathcal{B}(\nu) := \int_{\mathbb{T}} |z-1|^2 d\nu(z)$.

Agora, observe

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\nu_{\epsilon}) &= (1-\epsilon) \int_0^{2\pi} |e^{i\Theta} - 1|^2\, d\nu_{\underline{0}}(e^{i\Theta}) + \epsilon |1-1|^2 \\ &= (1-\epsilon)\mathcal{B}(\nu_{\underline{0}}) \end{aligned}$$

e assim,

$$\mu(e^{i\theta}) = \frac{1}{\mathcal{B}(\nu_{\underline{\epsilon}})} \int_0^{\theta} |e^{i\Theta} - 1|^2\, d\nu_{\underline{\epsilon}}(e^{i\Theta}) = \frac{1}{\mathcal{B}(\nu_{\underline{0}})} \int_0^{\theta} |e^{i\Theta} - 1|^2\, d\nu_{\underline{0}}(e^{i\Theta}), \quad 0 < \epsilon < 1.$$

Vamos assumir também que ν tem um ponto puro (veja Definição 1.8) de tamanho δ, $0 \le \delta < 1$ em $z = 1$, isto é, podemos utilizar a notação $\nu_{\underline{\delta}}$ para ν.

Assim, usando (2.19), podemos gerar uma família de medidas de probabilidade $\nu_{\underline{\epsilon}}$ para $0 \le \epsilon < 1$. Considerando

$$\int_{\mathbb{T}} f(z)\, d\nu_{\underline{0}}(z) = \frac{1}{1-\epsilon} \int_{\mathbb{T}} f(z)\, d\nu_{\underline{\epsilon}}(z) - \frac{\epsilon}{1-\epsilon} f(1) \tag{2.21}$$

e

$$\int_{\mathbb{T}} f(z)\, d\nu_{\underline{0}}(z) = \frac{1}{1-\delta} \int_{\mathbb{T}} f(z)\, d\nu_{\underline{\delta}}(z) - \frac{\delta}{1-\delta} f(1). \tag{2.22}$$

Igualando (2.21) e (2.22), obtemos,

$$\int_{\mathbb{T}} f(z)\, d\nu_{\underline{\epsilon}}(z) = \frac{1-\epsilon}{1-\delta} \int_{\mathbb{T}} f(z)\, d\nu_{\underline{\delta}} + \frac{\epsilon-\delta}{1-\delta} f(1). \tag{2.23}$$

Observe que para todo ϵ tal que $0 \le \epsilon < 1$,

$$\mu(e^{i\theta}) = \frac{1}{\mathcal{B}(\nu_{\underline{\epsilon}})} \int_0^{\theta} |e^{i\Theta} - 1|^2\, d\nu_{\underline{\epsilon}}(e^{i\Theta}) \quad \text{e} \quad \nu_{\underline{0}}(e^{i\theta}) = \frac{1}{\mathcal{A}(\mu)} \int_0^{\theta} \frac{1}{|e^{i\Theta} - 1|^2} d\mu(e^{i\Theta}). \tag{2.24}$$

Dada uma medida de probabilidade $\nu = \nu_{\underline{\epsilon}}$, $0 \leq \epsilon < 1$, como podemos obter diretamente dos coeficientes de Verblunsky $\{\alpha_n(\nu)\}_{n\geq 0}$, as sequências $\{c_n\}_{n\geq 1}$ e $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$ que por (2.5) se obtém $\{\alpha_n(\mu)\}_{n\geq 0}$? Em outras palavras, qual é a aplicação inversa de (2.10)? O próximo teorema responde esta questão e tal resultado foi estabelecido em [13].

Teorema 2.3. *Dada uma medida de probabilidade ν no círculo unitário, sejam as medidas de probabilidade no círculo unitário μ e $\nu_{\underline{\epsilon}}$, como em* (2.20), (2.23) *e* (2.24). *Mais ainda, seja $\{\alpha_n(\nu_{\underline{\epsilon}})\}_{n\geq 0}$ a sequência dos coeficientes de Verblunsky associada à medida $\nu_{\underline{\epsilon}}$. Então, μ é a medida dada pelo Teorema 2.1 se, e somente se,*

$$d_{n+1} = [1 - g_n(\nu_{\underline{\epsilon}})]g_{n+1}(\nu_{\underline{\epsilon}}),$$

$$c_n = \frac{-\operatorname{Im}(\tau_{n-1}\alpha_{n-1}(\nu_{\underline{\epsilon}}))}{1 - \operatorname{Re}(\tau_{n-1}\alpha_{n-1}(\nu_{\underline{\epsilon}}))} \quad e \quad g_n(\nu_{\underline{\epsilon}}) = \frac{1}{2}\frac{|1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}(\nu_{\underline{\epsilon}})|^2}{1 - \operatorname{Re}(\tau_{n-1}\alpha_{n-1}(\nu_{\underline{\epsilon}}))},$$

para $n \geq 1$, onde $\tau_0 = 1$ e $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ é a mesma como nos Teoremas 2.1 e 2.2, mas pode também se dado alternativamente pela seguinte recorrência

$$\tau_n = \tau_{n-1}\frac{1 - \overline{\tau_{n-1}\alpha_{n-1}(\nu_{\underline{\epsilon}})}}{1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}(\nu_{\underline{\epsilon}})}, \quad n \geq 1. \tag{2.25}$$

Além disso, a sequência $\{R_n\}_{n\geq 0}$ que satisfaz a relação de recorrência (2.15) *pode ser escrita como*

$$R_n(z) = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}[1 - \tau_j\alpha_j(\nu_{\underline{\epsilon}})]}{\prod_{j=0}^{n-1}[1 - \mathcal{R}e(\tau_j\alpha_j(\nu_{\underline{\epsilon}}))]}\,\frac{\Psi_{n+1}(\nu_{\underline{\epsilon}};\tau_n,z)}{z-1}, \quad n \geq 1. \tag{2.26}$$

Na prova do Teorema 2.3 dada em [13], foi considerado o polinômio mônico para-ortogonal $\Psi_{n+1}(\nu_{\underline{\epsilon}};\tau_n,z)$, $n \geq 0$, $\tau_n = \phi_n(\nu_{\underline{\epsilon}};1)/\phi_n^*(\nu_{\underline{\epsilon}};1)$, $n \geq 0$. A sequência $\{R_n\}_{n\geq 0}$ satisfaz a propriedade de ortogonalidade (2.18).

Observação 2.3. *É importante observar que os valores das sequências $\{\tau_n\}_{n\geq 0}$, $\{c_n\}_{n\geq 1}$ e $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$ permanecem os mesmos para toda $\nu_{\underline{\epsilon}}$ tal que $0 \leq \epsilon < 1$. Novamente, estas sequências são as mesmas como escolhidas no Teorema 2.1 e 2.2. Consequentemente, o polinômio R_n dado por* (2.26) *é o mesmo para toda $\nu_{\underline{\epsilon}}$ tal que $0 \leq \epsilon < 1$. Também, como mostrado em [13], a sequência $\{g_{n+1}(\nu_{\underline{\epsilon}})\}_{n\geq 0}$, que varia com ϵ, é a sequência de parâmetro da sequência encadeada $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$. A sequência $\{g_{n+1}(\nu_{\underline{0}})\}_{n\geq 0} = \{M_{n+1}\}_{n\geq 0}$ é a sequência maximal de parâmetros de $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$.*

Capítulo 3

Fórmulas de quadratura na reta real e no círculo unitário

Neste capítulo apresentamos uma fórmula de quadratura na reta real associada aos polinômios que satisfazem uma relação de recorrência do tipo R_{II} (2.3) e fórmulas de quadratura no círculo unitário utilizando zeros de certos polinômios para-ortogonais. As fórmulas de quadratura na reta real e no círculo unitário que apresentamos estão relacionadas, o que veremos no decorrer deste capítulo.

Os resultados apresentados neste capítulo são inéditos e estão também organizados no artigo submetido [5].

3.1 Fórmulas de quadratura do tipo Gauss associadas aos polinômios P_n

Seja $F(x) = (1 + x^2)^n f(x)$ e considere n pontos distintos $\varrho_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Construindo o polinômio interpolador de Lagrange de F sobre os pontos dados, obtemos

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} l_n(x, \varrho_{n,j}) F(\varrho_{n,j}) + R_n(x), \tag{3.1}$$

onde

$$l_n(x, x_j) = \frac{P_n(x)}{(x - \varrho_{n,j}) P_n'(\varrho_{n,j})} \quad \text{e} \quad R_n(x) = \frac{P_n(x) F^{(n)}(\xi)}{n!},$$

para todo $x \in [\varrho_{n,1}, \varrho_{n,n}]$ e $\xi \in [\varrho_{n,1}, \varrho_{n,n}]$.

De (3.1) temos

$$(1+x^2)^n f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} l_n(x,\varrho_{n,k})(1+\varrho_{n,k}^2)^n f(\varrho_{n,k}) + R_n(x),$$

assim,

$$f(x) \;=\; (1+x^2)^{-n}\sum_{k=1}^{n} l_n(x,\varrho_{n,k})(1+\varrho_{n,k}^2)^n f(\varrho_{n,k}) + (1+x^2)^{-n}R_n(x).$$

Integrando ambos os lados com relação a φ no intervalo $(-\infty,+\infty)$ dada no Teorema 2.1 obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d\varphi(x) &= \sum_{k=1}^{n}(1+\varrho_{n,k}^2)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l_n(x,\varrho_{n,k})}{(1+x^2)^n}d\varphi(x) f(\varrho_{n,k}) + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R_n(x)}{(1+x^2)^n}d\varphi(x)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\omega_{n,k} f(\varrho_{n,k}) + E_n(f),\end{aligned}$$

onde

$$\omega_{n,k} = (1+\varrho_{n,k}^2)^n \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{l_n(x,\varrho_{n,k})}{(1+x^2)^n}d\varphi(x)$$

e

$$E_n(f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R_n(x)}{(1+x^2)^n}d\varphi(x) = \frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_n(x)F^{(n)}(\xi)}{(1+x^2)^n}d\varphi(x).$$

Assim, se $F \in \mathbb{P}_{n-1}$, então $F^{(n)}(x) \equiv 0$, logo $E_n(f) = 0$. Isto garante que a quadratura é exata para $F \in \mathbb{P}_{n-1}$.

Como na teoria de polinômios ortogonais, a escolha dos nós da fórmula de quadratura associada aos polinômio P_n trazem consigo uma boa precisão na aproximação. Para estabelecer tal fato fazemos o uso da ortogonalidade associada aos polinômios P_n dada pelo Teorema 2.1.

Teorema 3.1. *Considere a medida φ como no Teorema 2.1. A fórmula de quadratura*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n}\omega_{n,k} f(x_{n,k}) + E_n(f), \tag{3.2}$$

onde $x_{n,k}$, são os zeros de P_n e

$$\omega_{n,k} = (1+x_{n,k}^2)^n \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_n(x)}{(x-x_{n,k})P_n'(x_{n,k})(1+x^2)^n}d\varphi(x) \tag{3.3}$$

é exata para $(1+x^2)^n f(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$, ou seja, $E_n(f) = 0$.

Demonstração: Se $F \in \mathbb{P}_{2n-1}$ podemos escrever $F(x) = P_n(x)q(x) + r(x)$, onde q e r são polinômios de grau $n-1$. Observe que

$$F(x_{n,k}) = r(x_{n,k}), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Considerando $q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$, temos

$$(1+x^2)^n f(x) \;\; = \;\; P_n(x) \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + r(x),$$

logo,

$$f(x) \;\; = \;\; \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i x^i P_n(x)}{(1+x^2)^n} + \frac{r(x)}{(1+x^2)^n}.$$

Integrando ambos os lados no intervalo $(-\infty, +\infty)$ com relação a φ obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\varphi(x) \;\; = \;\; \sum_{i=0}^{n-1} a_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^i P_n(x)}{(1+x^2)^n} d\varphi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(x)}{(1+x^2)^n} d\varphi(x).$$

Pelo Teorema 2.1, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(x)}{(1+x^2)^n} d\varphi(x).$$

Definindo $g(x) = r(x)/(1+x^2)^n$ e como $r(x) = (1+x^2)^n g(x)$ é um polinômio de grau $n-1$, então a fórmula de quadratura é exata para polinômios de grau $n-1$ e obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(x)}{(1+x^2)^n} d\varphi(x) \;\; &= \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) d\varphi(x) \\ &= \;\; \sum_{k=1}^{n} \omega_{n,k} g(x_k) \\ &= \;\; \sum_{k=1}^{n} \omega_{n,k} (1+x^2)^{-n} r(x_{n,k}). \end{aligned}$$

Pela relação (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \omega_{n,k} (1+x^2)^{-n} r(x_{n,k}) \;\; &= \;\; \sum_{k=1}^{n} \omega_{n,k} (1+x^2)^{-n} F(x_{n,k}) \\ &= \;\; \sum_{k=1}^{n} \omega_{n,k} f(x_{n,k}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \omega_{n,k} f(x_{n,k}).$$

■

Proposição 3.1. *Os pesos, $\omega_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, na equação da fórmula de quadratura do Teorema 3.1, são positivos.*

Demonstração: Podemos observar que

$$l_n(x, x_{n,k}) = \frac{P_n(x)}{(x - x_{n,k})P_n'(x_{n,k})}$$

é um polinômio de grau $n-1$, assim $(l_n^2(x, x_{n,k}) - l_n(x, x_{n,k}))$ é um polinômio de grau $2n-2$ que se anula em $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Observe também que

$$\begin{aligned} l_n^2(x, x_{n,k}) - l_n(x, x_{n,k}) &= \frac{P_n^2(x)}{(x - x_{n,k})^2(P_n'(x_{n,k}))^2} - \frac{P_n(x)}{(x - x_{n,k})(P_n'(x_{n,k})} \\ &= P_n(x)S(x), \end{aligned}$$

onde

$$S(x) = \frac{P_n(x)}{(x - x_{n,k})^2(P_n'(x_{n,k}))^2} - \frac{1}{(x - x_{n,k})(P_n'(x_{n,k}))}.$$

Como $P_n(x)$ é um polinômio de grau n, segue que $S(x)$ é um polinômio de grau $n-2$, então podemos escrever $S(x) = \sum_{k=0}^{n-2} b_k x^k$. Utilizando o Teorema 2.1 seque que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(l_n^2(x, x_{n,k}) - l_n(x, x_{n,k}))}{(1 + x^2)^n} d\varphi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)S(x)}{(1 + x^2)^n} d\varphi(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} b_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k P_n(x)}{(1 + x^2)^n} d\varphi(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l_n(x, x_{n,k})}{(1 + x^2)^n} d\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l_n^2(x, x_{n,k})}{(1 + x^2)^n} d\varphi(x) > 0,$$

mais precisamente

$$\omega_{n,k} = (1 + x_{n,k}^2)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l_n(x, x_{n,k})}{(1 + x^2)^n} d\varphi(x) > 0.$$

■

3.2 Polinômios associados aos polinômios P_n

Como no caso dos polinômios ortogonais da reta real, podemos definir polinômios associados aos polinômios P_n, que são úteis para determinar os pesos, $\omega_{n,k}$, de maneira mais simples, sem a necessidade de resolver uma integral.

Definição 3.1. *Os polinômios Q_n associados aos polinômios P_n são definidos por*

$$Q_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)^n P_n(t) - (1+t^2)^n P_n(x)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t). \tag{3.5}$$

É natural perguntar qual o grau do polinômio Q_n. Pela Definição 3.1, seria razoável dizer que Q_n possui grau $2n-1$, pois $(1+x^2)^n P_n(t) - (1+t^2)^n P_n(x)$ é um polinômio em x que tem grau $2n$ e que é anulado em $x = t$. O que não é verdade de acordo com o próximo teorema.

Teorema 3.2. *O polinômio associado Q_n tem grau $n-1$, $n \geq 1$.*

Demonstração: Adicionando e subtraindo $(x-i)^n(t+i)^n P_n(t)$ no numerador do integrando (3.5), vemos que

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= (x-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[(x+i)^n - (t+i)^n]P_n(t)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t) \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[(x-i)^n P_n(t) - (t-i)^n P_n(x)](t+i)^n}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= (x-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[(x+i)^n - (t+i)^n]P_n(t)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t) \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-i)^n P_n(t) - (t-i)^n P_n(x)}{(t-x)(t-i)^n} d\varphi(t). \end{aligned}$$

Como $t = x$ é zero de $(x+i)^n - (t+i)^n$ então, $((x+i)^n - (t+i)^n)/(t-x)$ é polinômio de grau $n-1$ na variável t, então podemos escrever

$$\frac{(x+i)^n - (t+i)^n}{t-x} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) t^k,$$

onde $a_k(x)$ é um polinômio em x, assim reescrevendo Q_n acima e usando a propriedade de ortogonalidade (2.7), temos

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^k P_n(t)}{(1+t^2)^n} d\varphi(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-i)^n P_n(t) - (t-i)^n P_n(x)}{(t-x)(t-i)^n} d\varphi(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-i)^n P_n(t) - (t-i)^n P_n(x)}{(t-x)(t-i)^n} d\varphi(t). \end{aligned}$$

Como $x = t$ é zero de $S_n(x) = (x-i)^n P_n(t) - (t-i)^n P_n(x)$, então $S_n(x)/(x-t)$ é polinômio de grau $n-1$ em x.

Agora basta verificarmos que a integral acima existe.

Observe também que $t = x$ é zero do polinômio $S_n(t)$, então $S_n(t)/(t-x)$ é polinômio de grau $n-1$ na variável t.

Podemos escrever

$$\frac{S_n(t)}{t-x} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k(x) t^k,$$

onde $b_k(x)$ é um polinômio em x daí

$$Q_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-i)^n P_n(t) - (t-i)^n P_n(x)}{(t-x)(t-i)^n} d\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^k}{(t-i)^n} d\varphi(t).$$

Utilizando a transformação $z = (t+i)/(t-i)$ e sua inversa $t = (i(z+1))/(z-1)$ obtemos que $t - i = 2i/(z-1)$ e $d\varphi(t) = -d\nu_{\underline{0}}((t+i)/(t-i))$ (Teorema 2.1). Temos assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} b_j(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^k}{(t-i)^n} d\varphi(t) &= -\sum_{k=0}^{n-1} b_k(x) \int_{\mathbb{T}} \frac{(i)^k (z+1)^k (z-1)^n}{(z-1)^k (2i)^n} d\nu_{\underline{0}}(z) \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} b_k(x) \frac{(i)^k}{(2i)^n} \int_{\mathbb{T}} (z+1)^k (z-1)^{n-k} d\nu_{\underline{0}}(z). \end{aligned}$$

Como as integrais $\int_{\mathbb{T}} (z+1)^k (z-1)^{n-k} d\nu_{\underline{0}}(z)$ existem no círculo unitário, conclui-se que a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-i)^n P_n(x) - (x-i)^n P_n(t)}{(x-t)(x-i)^n} d\varphi(x)$$

existe.

Portanto, Q_n é polinômio de grau $n-1$ em x. ∎

Na busca da prova de que os polinômios Q_n satisfazem a relação de recorrência (2.3) com condições iniciais diferentes, encontramos uma propriedade interessante sobre estes polinômios Q_n.

Definição 3.2. *Considere os polinômios $Q_n^{(j)}$ definidos por*

$$Q_n^{(j)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r_j(t)(1+x^2)^n P_n(t) - r_j(x)(1+t^2)^n P_n(x)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t), \quad 0 \leq j \leq n,$$

onde r_j são polinômios de grau j.

Teorema 3.3. *Os polinômios Q_n e $Q_n^{(j)}$ satisfazem a seguinte relação*

$$Q_n^{(j)}(x) = r_j(x) Q_n(x), \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

onde r_j são os polinômios de grau j na definição de $Q_n^{(j)}$.

Demonstração: Seja $r_j(x) = \sum_{k=0}^{j} a_k x^k$.

- Para $j = 0$. Note que $r_0(t) = a_0 = r_0(x)$, assim

$$\begin{aligned}
Q_n^{(0)}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r_0(t)(1+x^2)^n P_n(t) - r_0(x)(1+t^2)^n P_n(x)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t) \\
&= r_0(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)^n P_n(t) - (1+t^2)^n P_n(x)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t) \\
&= r_0(x) Q_n(x).
\end{aligned}$$

- Para $1 \le j \le n$.

$$\begin{aligned}
Q_n^{(j)}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r_j(t)(1+x^2)^n P_n(t) - r_j(x)(1+t^2)^n P_n(x)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{j} a_k t^k (1+x^2)^n P_n(t) - \sum_{k=1}^{j} a_k x^k (1+t^2)^n P_n(x)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t) \\
&= \sum_{k=1}^{j} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^k (1+x^2)^n P_n(t) - x^k (1+x^2)^n P_n(x)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{j} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k (1+x^2)^n P_n(t) - x^k (1+t^2)^n P_n(x)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t) \\
&= \sum_{k=1}^{j} a_k (1+x^2)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t^k - x^k) P_n(t)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{j} a_k x^k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)^n P_n(t) - (1+t^2)^n P_n(x)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t),
\end{aligned}$$

como

$$\frac{t^k - x^k}{t - x} = \sum_{i=0}^{k-1} b_i(x) t^i$$

e utilizando o Teorema 2.1, segue que

$$\begin{aligned}
Q_n^{(j)}(x) &= \sum_{k=1}^{j} a_k (1+x^2)^n \sum_{i=0}^{k-1} b_i(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^i P_n(t)}{(1+t^2)^n} d\varphi(t) + r_j(x) Q_n(x) \\
&= r_j(x) Q_n(x).
\end{aligned}$$

Portanto, $Q_n^{(j)}(x) = r_j(x) Q_n(x), \quad 0 \le j \le n.$

■

Observe que o polinômio $Q_n^{(j)}$ é um polinômio de grau $j + n - 1$. Além disso, se $r_0(x) = 1$ o polinômio $Q_n^{(0)}(x) = Q_n(x)$.

Teorema 3.4. *Os polinômios $Q_n(x)$ satisfazem a seguinte relação de recorrência,*

$$Q_{n+1}(x) = (x - c_{n+1}) Q_n(x) - d_{n+1}(1+x^2) Q_{n-1}(x) \quad n \ge 1,$$

com $Q_0(x) = 0$ e $Q_1(x) = M_1$, onde M_1 pertence a sequência maximal de parâmetros $\{M_n\}_{n\ge1}$ da sequência encadeada $\{d_{n+1}\}_{n\ge1}$.

Demonstração: É fácil ver que $Q_0(x) = 0$. Agora, observe que

$$\begin{aligned}
Q_1(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)P_1(t) - (1+t^2)P_1(t)}{(t-x)(1+t^2)} d\varphi(t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)(t-c_1) - (1+t^2)(x-c_1)}{(t-x)(1+t^2)} d\varphi(t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-x)[1-tx+c_1(t+x)]}{(t-x)(1+t^2)} d\varphi(t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+c_1t}{1+t^2} d\varphi(t) - x\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t-c_1}{1+t^2} d\varphi(t),
\end{aligned}$$

do Teorema 2.1 segue que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+c_1t}{1+t^2} d\varphi(t) - x\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overbrace{t-c_1}^{P_1(t)}}{1+t^2} d\varphi(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+c_1t}{1+t^2} d\varphi(t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2-t^2+c_1t}{1+t^2} d\varphi(t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tP_1(t)}{1+t^2} d\varphi(t).
\end{aligned}$$

Novamente pelo Teorema 2.1 obtemos $Q_1(x) = \gamma_0 - \gamma_1 = 1 - \gamma_1 = M_1$. Isto mostra as condições iniciais.

Observe que

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)^n P_{n+1}(t) - (1+t^2)^n P_{n+1}(x)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t) = \\
&= \frac{1}{(1+x^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+t^2)(1+x^2)^{n+1} P_{n+1}(t) - (1+x^2)(1+t^2)^{n+1} P_{n+1}(x)}{(t-x)(1+t^2)^{n+1}} d\varphi(t) \\
&= \frac{1}{(1+x^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)^{n+1} P_{n+1}(t) - (1+t^2)^{n+1} P_{n+1}(x)}{(t-x)(1+t^2)^{n+1}} d\varphi(t) \\
&\quad + \frac{1}{(1+x^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2(1+x^2)^{n+1} P_{n+1}(t) - x^2(1+t^2)^{n+1} P_{n+1}(x)}{(t-x)(1+t^2)^{n+1}} d\varphi(t) \\
&= \frac{1}{(1+x^2)} [Q_{n+1}(x) + Q_{n+1}^{(2)}(x)],
\end{aligned}$$

do Teorema 3.3 obtemos

$$\frac{1}{(1+x^2)}[Q_{n+1}(x) + Q_{n+1}^{(2)}(x)] = \frac{1}{(1+x^2)}[Q_{n+1}(x) + x^2 Q_{n+1}(x)] = Q_{n+1}(x).$$

Agora, podemos mostrar a relação de recorrência de Q_n,

$$
\begin{aligned}
Q_{n+1}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)^n P_{n+1}(t) - (1+t^2)^n P_{n+1}(x)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)^n \overbrace{(t-c_{n+1})}^{r_1(t)} P_n(t) - (1+t^2)^n \overbrace{(x-c_{n+1})}^{r_1(x)} P_n(x)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t) \\
&\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)^n d_{n+1}(1+t^2) P_{n-1}(t) - (1+t^2)^n d_{n+1}(1+x^2) P_{n-1}(x)}{(t-x)(1+t^2)^n} d\varphi(t) \\
&= Q_n^{(1)}(x) - d_{n+1}(1+x^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)^{n-1} P_{n-1}(t) - (1+t^2)^{n-1} P_{n-1}(x)}{(t-x)(1+t^2)^{n-1}} d\varphi(t) \\
&= r_1(x) Q_n(x) - d_{n+1}(1+x^2) Q_{n-1}(x),
\end{aligned}
$$

onde a última igualdade segue do Teorema 3.3. Logo,

$$Q_{n+1}(x) = (x - c_{n+1}) Q_n(x) - d_{n+1}(1+x^2) Q_{n-1}(x).$$

Portanto, fica provado a relação de recorrrência para Q_n. ∎

Observação 3.1. *Como $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$ é sequência encadeada, então pelo Teorema 1.9 $\{d_{n+2}\}_{n\geq 1}$ é também sequência encadeada e usando a relação de recorrência de $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ podemos mostrar que, para $n \geq 2$, o coeficiente do termo de maior grau do polinômio Q_n é $M_1 \prod_{j=1}^{n-1}(1-\iota_{j+1})$, onde $\{\iota_{n+1}\}_{n\geq 1}$ é sequência minimal de parâmetro da sequência encadeada $\{d_{n+2}\}_{n\geq 1}$.*

De fato, de forma análoga ao que foi feito em [20], denotamos por $\mathfrak{q}_n$ o coeficiente do termo de maior grau do polinômio Q_n. Note que $\mathfrak{q}_1 = M_1$, $\mathfrak{q}_2 = M_1$ e ainda,

$$
\begin{aligned}
Q_3(x) &= (x-c_3)Q_2(x) - d_3(x^2+1)Q_1(x) \\
&= M_1(x-c_3)(x-c_2) - d_3(x^2+1)M_1.
\end{aligned}
$$

Assim, $\mathfrak{q}_3 = M_1(1-d_3) = M_1(1-\iota_3)$.

Suponhamos que o resultado seja válido para

$$\mathfrak{q}_k = M_1 \prod_{j=1}^{k-1}(1-\iota_{j+1}), \quad k = 2, 3, \ldots, n$$

e vamos mostrar que, para $k = n+1$, o resultado também é satisfeito.

Podemos reescrever a relação de recorrência de Q_{n+1}, da seguinte maneira

$$\frac{x^2+1}{(x-c_{n+1})(x-c_n)} d_{n+1} = \frac{Q_n(x)}{(x-c_n)Q_{n-1}(x)} \left(1 - \frac{Q_{n+1}(x)}{(x-c_{n+1})Q_n(x)}\right), \quad n \geq 2.$$

Tomando o limite de $x \to \infty$ *na equação acima e observando que* $\mathfrak{q}_n/\mathfrak{q}_{n-1} = (1-\iota_n)$, *obtemos*

$$d_{n+1} = (1-\iota_n)\lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{Q_{n+1}(x)}{(x-c_{n+1})Q_n(x)}\right).$$

Como $\{\iota_{n+1}\}_{n\geq 1}$ *é a sequência minimal de parâmetros da sequência encadeada* $\{d_{n+2}\}_{n\geq 1}$, *temos*

$$0 < \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{Q_{n+1}(x)}{(x-c_{n+1})Q_n(x)}\right) = \iota_{n+1} < 1.$$

Isto significa que $\iota_{n+1} \neq 0$ *e*

$$\begin{aligned} 1-\iota_{n+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{Q_{n+1}(x)}{(x-c_{n+1})Q_n(x)} \\ &= \frac{\mathfrak{q}_{n+1}}{\mathfrak{q}_n}. \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{q}_n = M_1\prod_{j=1}^{n-1}(1-\iota_{j+1})$, *isto implica em*

$$\mathfrak{q}_{n+1} = M_1\prod_{j=1}^{n}(1-\iota_{j+1}).$$

Teorema 3.5. *Os polinômios* P_n *e* Q_n *satisfazem a seguinte relação*

$$u_n(x) := Q_n(x)P_{n-1}(x) - Q_{n-1}(x)P_n(x) = (1+x^2)^{n-1}d_2d_3\cdots d_nM_1.$$

Demonstração: Para mostrar o resultado, basta utilizarmos as relações de recorrência de P_n e Q_n, pois

$$\begin{aligned} u_n(x) &= P_{n-1}(x)[(x-c_n)Q_{n-1}(x) - d_n(1+x^2)Q_{n-2}(x)] \\ &\quad -Q_{n-1}(x)[(x-c_n)P_{n-1}(x) - d_n(1+x^2)P_{n-2}(x)] \\ &= d_n(1+x^2)[Q_{n-1}(x)P_{n-2}(x) - Q_{n-2}(x)P_{n-1}(x)] \\ &= d_nd_{n-1}(1+x^2)^2[Q_{n-2}(x)P_{n-3}(x) - Q_{n-3}(x)P_{n-2}(x)] \\ &\vdots \\ &= (1+x^2)^{n-1}d_nd_{n-1}\cdots d_2[Q_1(x)P_0(x) - Q_0(x)P_1(x)] \\ &= (1+x^2)^{n-1}d_2d_3\cdots d_nM_1. \end{aligned}$$

■

Teorema 3.6. *Se* $x_{n,k}$, $k = 1,2,\ldots,n$, *são zeros de* P_n, $n \geq 1$, *então eles são diferentes dos zeros de* Q_n. *Além disso, os zeros de* Q_n *são simples e entre dois zeros consecutivos de* P_n *existe um zero de* Q_n.

Demonstração: Pelo Teorema 3.5 temos $u_n(x) > 0$, para todo x. Em particular,

$$\begin{aligned} u_n(x_{n,k}) &= Q_n(x_{n,k})P_{n-1}(x_{n,k}) - Q_{n-1}(x_{n,k})P_n(x_{n,k}) \\ &= Q_n(x_{n,k})P_{n-1}(x_{n,k}) \\ &= (1 + x_{n,k}^2)^{n-1} d_2 d_3 \cdots d_n M_1 > 0. \end{aligned}$$

Logo $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \cdots, n$, não são zeros de Q_n. Sabemos que os zeros de P_n e P_{n-1} se entrelaçam, ou seja, se $x_{n,k}$ e $x_{n-1,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ são zeros de P_n e P_{n-1} respectivamente, então

$$x_{n,1} < x_{n-1,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n-1} < x_{n-1,n-1} < x_{n,n}.$$

Foi mostrado também em [20] que o coeficiente de maior grau de P_n, $n \geq 1$, é positivo, logo $P_{n-1}(x_{n,n}) > 0$ e como $u_n(x_{n,n}) = Q_n(x_{n,n})P_{n-1}(x_{n,n}) > 0$ segue que $Q_n(x_{n,n}) > 0$.

Utilizando a propriedade do entrelaçamento dos zeros de P_n e P_{n-1} sabe-se que $P_{n-1}(x_{n,n-1}) < 0$ e novamente como $u_n(x_{n,n-1}) = Q_n(x_{n,n-1})P_{n-1}(x_{n,n-1}) > 0$ segue que $Q_n(x_{n,n-1}) < 0$. Pela continuidade de Q_n obtém-se

$$x_{n,n-1} < \xi_{n,n-1} < x_{n,n},$$

onde $\xi_{n,n-1}$ é um zero de Q_n.

Prosseguindo desta maneira, temos $sign(P_{n-1}(x_{n,k})) = (-1)^{n-k}$ e como $u_n(x_{n,k}) = Q_n(x_{n,k})P_{n-1}(x_{n,k}) > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ segue que $sign(Q_n(x_{n,k})) = (-1)^{n-k}$ e usando a continuidade de $Q_n(x)$ mostra-se que

$$x_{n,1} < \xi_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n-1} < \xi_{n,n-1} < x_{n,n},$$

onde $\xi_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ são zeros de Q_n. ∎

Por fim, enunciamos o resultado onde é dada uma expressão para os pesos da regra de quadratura de maneira mais simples, sendo uma consequência de resultados anteriores.

Teorema 3.7. *Os pesos da regra de quadratura associada aos polinômios P_n podem ser obtidos por*

$$\omega_{n,j} = \frac{(1 + x_{n,j}^2)^{n-1} d_2 d_3 \cdots d_n M_1}{P_n'(x_{n,j})P_{n-1}(x_{n,j})} = \frac{M_1}{\mathbf{u}_n(x_{n,j})^H \mathbf{B}_n \mathbf{u}_n(x_{n,j})}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.6}$$

onde $\{M_n\}_{n\geq 1}$, é a sequência maximal de parâmetros da sequência encadeada $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$, $x_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, são zeros do polinômio P_n, $\mathbf{u}_n(x_{n,j})$ é o autovetor e $\mathbf{B}_n$ é a matriz dada em (2.11).

Demonstração: Pelo Teorema 3.1, sabemos que os pesos da fórmula de quadratura são dados por

$$\omega_j^{(n)} = \frac{(1+x_{n,j}^2)^n}{P_n'(x_{n,j})}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_n(x)}{(x-x_{n,j})(1+x^2)^n}d\varphi(x). \tag{3.7}$$

Além disso,

$$Q_n(x_{n,j}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+x_{n,j}^2)^n P_n(x)}{(x-x_{n,j})(1+x^2)^n}d\varphi(x). \tag{3.8}$$

Assim, substituindo (3.8) em (3.7) temos

$$\omega_{n,j} = \frac{Q_n(x_{n,j})}{P_n'(x_{n,j})}.$$

Utilizando o Teorema 3.5 seque que

$$\begin{aligned}\omega_{n,j} &= \frac{Q_n(x_{n,j})P_{n-1}(x_{n,j})}{P_n'(x_{n,j})P_{n-1}(x_{n,j})}\\ &= \frac{(1+x_{n,j}^2)^{n-1}d_2d_3\cdots d_nM_1}{P_n'(x_{n,j})P_{n-1}(x_{n,j})}.\end{aligned}$$

A última igualdade de (3.6), pode ser obtida através da relação (2.13). ■

Observe que podemos decompor o polinômio P_n da seguinte forma,

$$P_n(x) = \mathfrak{p}_n(x-x_{n,1})(x-x_{n,2})\cdots(x-x_{n,n}),$$

onde $\mathfrak{p}_n$ é o coeficiente do termo de maior grau de P_n e $x_{n,k}$, $k=1,2,\ldots,n$, são os zeros de P_n.

Agora, utilizando decomposição em frações parciais, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} &= \frac{1}{\mathfrak{p}_n}\left[\frac{A_{n,1}}{(x-x_{n,1})}+\frac{A_{n,2}}{(x-x_{n,2})}+\cdots+\frac{A_{n,n}}{(x-x_{n,n})}\right]\\ &= \frac{1}{\mathfrak{p}_n}\left[\frac{A_{n,1}(x-x_{n,2})\ldots(x-x_{n,n})+\cdots+A_{n,n}(x-x_{n,1})\cdots(x-x_{n,n-1})}{(x-x_{n,1})\cdots(x-x_{n,n})}\right]\end{aligned} \tag{3.9}$$

Assim,

$$Q_n(x) = A_{n,1}(x-x_{n,2})\ldots(x-x_{n,n})+\cdots+A_{n,n}(x-x_{n,1})\cdots(x-x_{n,n-1})$$

Como

$$\begin{aligned}P_n'(x) &= \mathfrak{p}_n[(x-x_{n,2})\cdots(x-x_{n,n})+\cdots+(x-x_{n,1})\cdots(x-x_{n,j-1})\times\\ &\quad (x-x_{j+1})\cdots(x-x_{n,n})+\cdots+(x-x_{n,1})\cdots(x-x_{n,n-1})],\end{aligned}$$

temos, para $x = x_{n,k}$,

$$\begin{aligned}Q_n(x_{n,k}) &= A_{n,k}(x_{n,k}-x_{n,1})\cdots(x_{n,k}-x_{n,k-1})(x_{n,k}-x_{n,k+1})\cdots(x_{n,k}-x_{n,n})\\ &= \frac{1}{\mathfrak{p}_n}P_n'(x_{n,k})A_{n,k}.\end{aligned}$$

Logo,

$$A_{n,k} = \frac{\mathfrak{p}_n Q_n(x_{n,k})}{P_n'(x_{n,k})}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Portanto por (3.9) podemos escrever

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{Q_n(x_{n,j})/P_n'(x_{n,j})}{x - x_{n,j}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_{n,j}}{x - x_{n,j}}.$$

O Exemplo a seguir traz explicitamente os nós e pesos da quadratura (3.2) associada a um específico polinômio P_n.

Exemplo 3.1. *Considere os polinômios que satisfazem a relação de recorrência do tipo* R_{II}*,*

$$P_{n+1}(x) = (x - c_{n+1})P_n(x) - d_{n+1}(x^2 + 1)P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{3.10}$$

com $P_0(x) = 1$ *e* $P_1(x) = x - c_1$*.*

Se $c_{n+1} = 0$, $n \geq 0$ *e* $d_{n+1} = 1/4$, $n \geq 1$, *então os pesos da quadratura associados aos polinômios* P_n *são dados por*

$$\omega_{n,k} = \frac{1}{n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

De fato, como $c_{n+1} = 0,\ n \geq 0$ e $d_{n+1} = 1/4,\ n \geq 1$, a relação de recorrência (3.10) é dado por

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \frac{1}{4}(x^2 + 1)P_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \tag{3.11}$$

Utilizando a teoria de equações de diferenças, assim como foi feito em [20], podemos reescrever (3.11) como segue,

$$P_n(x) = i\left(\frac{x-i}{2}\right)^{n+1} - i\left(\frac{x+i}{2}\right)^{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Podemos encontrar explicitamente os zeros do polinômio P_n. Fazendo $P_n(x) = 0$, obtemos

$$i\left(\frac{x-i}{2}\right)^{n+1} = i\left(\frac{x+i}{2}\right)^{n+1}$$

assim,

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{n+1} = 1 = e^{i2k\pi}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

e consequentemente,

$$\frac{x+i}{x-i} = e^{\frac{i2k\pi}{n+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{3.12}$$

Utilizando a forma polar de um número complexo e algumas manipulações algébricas encontramos que

$$x = \frac{sen(\frac{2k\pi}{n+1})}{1 - cos(\frac{2k\pi}{n+1})}, \quad k = 1, 2 \ldots, n.$$

Como $2sen(\theta) = 1 - cos(2\theta)$ e $sen(2\theta) = 2sen(\theta)cos(\theta)$, segue que

$$\begin{aligned} x &= \frac{2sen(\frac{k\pi}{n+1})cos(\frac{k\pi}{n+1})}{2sen^2(\frac{k\pi}{n+1})} \\ &= \frac{cos(\frac{k\pi}{n+1})}{sen(\frac{k\pi}{n+1})} \\ &= cot(\frac{k\pi}{n+1}), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Portando, os zeros de P_n podem ser dados explicitamente por

$$x_{n,k} = cot\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \frac{(n+1)}{2}\left[\left(\frac{x-i}{2}\right)^n - i\left(\frac{x+i}{2}\right)^n\right] \\ &= \frac{(n+1)}{2}P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$P_n'(x)P_{n-1}(x) = \frac{(n+1)}{2}P_{n-1}^2(x). \tag{3.14}$$

Vamos agora avaliar o polinômio P_{n-1} nos zeros de P_n,

$$P_{n-1}(x_{n,k}) = i\left(\frac{x_{n,k}-i}{2}\right)^n - i\left(\frac{x_{n,k}+i}{2}\right)^n.$$

Usando (3.13) e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos

$$P_{n-1}(x_{n,k}) = \frac{(-1)^{n+1}sen(\frac{k\pi n}{n+1})}{2^{n-1}\left(sen(\frac{k\pi}{n+1})\right)^n}.$$

Assim,

$$P_{n-1}^2(x_{n,k}) = \frac{sen^2(\frac{k\pi n}{n+1})}{4^{n-1}\left(sen^2(\frac{k\pi}{n+1})\right)^n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.15}$$

Utilizando o Teorema 3.7 e as relações (3.14) e (3.15), observando ainda que a sequência de parâmetros maximal da sequência encadeada $d_{n+1} = 1/4$ é a sequência

$M_n = 1/2$, (veja Exemplo 1.1) podemos determinar os pesos da regra de quadratura deste exemplo da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\omega_{n,k} &= \frac{(1+x_{n,k}^2)^{n-1} d_2 d_3 \cdots d_n M_1}{P_n'(x_{n,k}) P_{n-1}(x_{n,k})} \\
&= \frac{(1+x_{n,k}^2)^{n-1} (1/4)^{n-1} (1/2)}{P_n'(x_{n,k}) P_{n-1}(x_{n,k})} \\
&= \left(\frac{sen^2(\frac{k\pi}{n+1}) + cos^2(\frac{k\pi}{n+1})}{sen^2(\frac{k\pi}{n+1})} \right)^{n-1} \left(\frac{\left(sen^2(\frac{k\pi}{n+1})\right)^n}{(n+1) sen^2(\frac{k\pi n}{n+1})} \right) \\
&= \frac{sen^2(\frac{k\pi}{n+1})}{(n+1) sen^2(\frac{k\pi n}{n+1})}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Por fim, basta observar que $sen(\frac{k\pi}{n+1}) = (-1)^{k-1} sen(\frac{k\pi n}{n+1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, e concluir que

$$\omega_{n,k} = \frac{1}{n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

■

3.3 Fórmulas de quadratura no círculo unitário

Nesta subseção apresentamos fórmulas de quadradura no círculo unitário baseadas nos zeros dos polinômios para-ortogonais dados nos Teoremas 2.2 e 2.3 e sua relação com as fórmulas de quadratura associada aos polinômios que satisfazem a relação de recorrência do tipo R_{II}.

As fórmulas de quadratura no círculo unitário foram estudadas primeiramente em [21]. Como mencionamos na Subseção 1.3.1 o polinômio para-ortogonal mônico $\Psi_n(\mu; \rho, z)$ tem zeros $\Xi_{n,j}(\mu; \rho)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, simples e estão no círculo unitário $|z| = 1$. Em [21] foi mostrado que a regra de quadratura

$$\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(z) d\mu(z) = \sum_{j=1}^{n} \Lambda_{n,j}(\mu; \rho) \mathcal{F}(\Xi_{n,j}(\mu; \rho)), \tag{3.16}$$

é válida para $\mathcal{F} \in span\{z^{-n+1}, z^{-n+2}, \ldots, z^{n-2}, z^{n-1}\}$ se

$$\Lambda_{n,j}(\mu; \rho) = \frac{1}{\Psi_n'(\mu; \rho, \Xi_{n,j}(\mu; \rho))} \int_{\mathbb{T}} \frac{\Psi_n(\mu; \rho, z)}{z - \Xi_{n,k}(\mu; \rho)} d\mu(z), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.17}$$

Para o próximo teorema, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.1. *O conjunto de elementos* $\left\{ \frac{(z+1)^j (z-1)^{2n-2-j}}{z^{n-1}} \right\}_{j=0}^{2n-2}$ *é uma base para* $span\{z^{-n+1}, z^{-n+2}, \ldots, z^{n-2}, z^{n-1}\}$.

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que o conjunto $\{(z+1)^j(z-1)^{2n-2-j}\}_{j=0}^{2n-2}$ é uma base para o espaço $\mathbb{P}_{2n-2}$. De fato, seja

$$h(z) = \sum_{j=0}^{2n-2} a_j(z+1)^j(z-1)^{2n-2-j}.$$

Considere $h(z) = 0$, para todo z. Em particular para $z = -1$, temos $h(-1) = a_0(-2)^{2n-2}$, logo $a_0 = 0$. Assim, podemos escrever

$$h(z) = \sum_{j=1}^{2n-2} a_j(z+1)^j(z-1)^{2n-2-j} = 0,$$

ou seja

$$\frac{h(z)}{z+1} = \sum_{j=1}^{2n-2} a_j(z+1)^{j-1}(z-1)^{2n-2-j} = 0, \quad z \neq -1.$$

Logo,

$$\lim_{z\to-1}\frac{h(z)}{z+1} \;=\; \sum_{j=1}^{2n-2} a_j \lim_{z\to-1}(z+1)^{j-1}(z-1)^{2n-2-j} = 0,$$

isto é, $h'(-1) = a_1(-2)^{2n-2-1} = 0$. Isto implica que $a_1 = 0$. Prosseguindo desta maneira, mostra-se que

$$\lim_{z\to-1}\frac{h^{(l-1)}(z)}{z+1} = \sum_{j=l}^{2n-2} a_j \lim_{z\to-1}(z+1)^{j-l}(z-1)^{2n-2-j} = 0, \quad l = 1,2,\ldots,2n-2,$$

logo, $a_l = 0, \quad l = 1,2,\ldots,2n-2$, o que implica, $h^{(l)}(-1) = a_l(-2)^{2n-2-l} = 0, \quad l = 1,2,\ldots,2n-2$. Isto mostra que $\{(z+1)^j(z-1)^{2n-2-j}\}_{j=0}^{2n-2}$ é um conjunto linearmente independente e como $(z+1)^j(z-1)^{2n-2-j}$ são polinômio de grau $2n-2$, $j = 0,1,\ldots,2n-2$, segue que $\{(z+1)^j(z-1)^{2n-2-j}\}_{j=0}^{2n-2}$ é uma base para $\mathbb{P}_{2n-2}$.

Portanto, $\{\frac{(z+1)^j(z-1)^{2n-2-j}}{z^{n-1}}\}_{j=0}^{2n-2}$ é base para $span\{z^{-n+1}, z^{-n+2}, \ldots, z^{n-2}, z^{n-1}\}$.

■

Antes de expor o próximo teorema, chamamos a atenção para os sentidos de integração das integrais no círculo unitário e na reta real dadas pela transformação $z = (x+i)/(x-i)$ e sua inversa $x = (i(z+1))/(z-1)$. Para $z \in \mathbb{T}$ temos $z = e^{i\theta}$. Observe que a transformação inversa $x = (i(z+1))/(z-1) = cot(\theta/2)$ que leva pontos do círculo unitário $\mathbb{T}$ na reta real $(-\infty, +\infty)$, mostra que quando θ percorre de 0 a 2π no sentido anti-horário, x decresce. Isto significa que os sentidos de integração no círculo unitário e na reta real são opostos com a transformação $x = cot(\theta/2)$. Assim, considerando φ uma medida na reta real e ν uma medida no círculo unitário, temos $d\varphi(x) = -d\nu((x+i)/(x-i))$. Mais especificamente,

$$\int_0^{2\pi} d\nu(e^{i\theta}) = \int_{+\infty}^{-\infty} d\nu\left(\frac{x+i}{x-i}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} -d\nu\left(\frac{x+i}{x-i}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(x).$$

Teorema 3.8. *Seja μ a medida de probabilidade no círculo unitário dada no Teorema 2.1 obtida sob a condição $\mathcal{S} < \infty$, e sejam $x_{n,k}$ os zeros do polinômio P_n, $z_{n,k}$ os zeros do polinômio para-ortogonal $\Psi_n(\mu; -\tau_n, z)$ dado por (2.17) e $\omega_{n,k}$ os pesos da fórmula de quadratura (3.1). Para $\mathcal{F} \in span\{z^{-n+1}, z^{-n+2}, \ldots, z^{n-2}, z^{n-1}\}$, a fórmula de quadratura n-pontos é exata*

$$\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(z)\, d\mu(z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k}\, \mathcal{F}(z_{n,k}), \tag{3.18}$$

então

$$z_{n,k} = \frac{x_{n,k}+i}{x_{n,k}-i} \quad e \quad \lambda_{n,k} = \frac{c_1^2+1}{M_1}\,\frac{\omega_{n,k}}{x_{n,k}^2+1} = \mathcal{A}(\mu)|z_{n,k}-1|^2\omega_{n,k},$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstração: Como $\mathcal{S} < \infty$, então pelo Teorema 2.1, $\mathcal{A}(\mu) = \int_{\mathbb{T}} |z-1|^2 d\mu(z) < \infty$, e consequentemente $I(\mu) = \int z(1-z)^{-1} d\mu(z)$ existe.

Pela relação (2.14), se $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ são zeros de P_n então $z_{n,k} = (x_{n,k}+i)/(x_{n,k}-i)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ são os zeros de R_n, ou equivalentemente, os zeros do polinômio mônico para-ortogonal $\Psi_n(\mu; -\tau_n, z)$ em (2.17).

Já sabemos por (3.16) que a fórmula de quadratura de n pontos dada por

$$\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(z) d\mu(z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k}\, \mathcal{F}(z_{n,k}),$$

sobre os zeros $z_{n,k} = \Xi_{n,k}(\mu; -\tau_n)$ de $\Psi_n(\mu; -\tau_n, z)$ é válida para

$$\mathcal{F}(z) \in span\{z^{-n+1}, z^{-n+2}, \ldots, z^{n-2}, z^{n-1}\}.$$

Pelo Lema 3.1

$$\frac{(z+1)^r(z-1)^{2n-2-r}}{z^{n-1}}, \quad r = 0, 1 \ldots, 2n-2,$$

é base para $span\{z^{-n+1}, z^{-n+2}, \ldots, z^{n-2}, z^{n-1}\}$, e os coeficientes $\lambda_{n,k} = \Lambda_{n,k}(\mu; -\tau_n)$ devem ser unicamente determinados por

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{(\zeta+1)^r(\zeta-1)^{2n-2-r}}{\zeta^{n-1}} d\mu(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k}\, \frac{(\xi_{n,k}+1)^r(\xi_{n,k}-1)^{2n-2-r}}{\xi_{n,k}^{n-1}}, \tag{3.19}$$

para $r = 0, 1, \ldots, 2n-2$.

Por outro lado, pelo Teorema 3.1, considerando $F(x) = \frac{(1+x^2)^n x^k}{(1+x^2)^n} \in \mathbb{P}_{2n-2}$, $0 \leq k \leq 2n-2$, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k}{(1+x^2)^n} d\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{n,j} \frac{x_{n,j}^k}{(1+x_{n,j}^2)^n},$$

onde $\omega_{n,j} = (1+x_{n,j}^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{(x-x_{n,j})P_n'(x_{n,j})} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, d\varphi(x)$.

Utilizando a transformação $z = (x+i)/(x-i)$, e sua inversa $x = (i(z+1))/(z-i)$, temos que $(1+x^2) = -4z/(z-1)^2$. Assim

$$-\int_{\mathbb{T}} \frac{i^k(z+1)^k}{(z-1)^k} \frac{(z-1)^{2n}}{(-4z)^n} d\varphi\left(i\frac{z+1}{z-i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{n,j} \left(\frac{i^k(z_{n,j}+1)^k}{(z_{n,j}-1)^k} \frac{(z_{n,j}-1)^{2n}}{(-4z_{n,j})^n}\right). \quad (3.20)$$

Observe que, pela Equação (2.24) com $\mathcal{A} = (c_1^2+1)\mathcal{S}/4$,

$$d\nu_{\underline{0}}(z) = \frac{4}{(c_1^2+1)\mathcal{S}} \frac{z}{(z-1)(1-z)} d\mu(z) = \frac{4}{(c_1^2+1)\mathcal{S}} \frac{1}{|z-1|^2} d\mu(z).$$

Como do Teorema 2.1 sabe-se que $d\varphi(x) = -d\nu((x+i)/(x-i))$, simplificando a Equação (3.20), obtemos:

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{(z+1)^k(z-1)^{2n-k}}{z^n} d\nu_{\underline{0}}(z) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{n,j} \left(\frac{(z_{n,j}+1)^k(z_{n,j}-1)^{2n-k}}{z_{n,j}^n}\right).$$

Assim,

$$\frac{4}{(c_1^2+1)\mathcal{S}} \int_{\mathbb{T}} \frac{(z+1)^k(z-1)^{2n-k}}{z^n} \frac{z}{(z-1)(1-z)} d\mu(z) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{n,j} \left(\frac{(z_{n,j}+1)^k(z_{n,j}-1)^{2n-k}}{z_{n,j}^n}\right),$$

equivalentemente,

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{(z+1)^k(z-1)^{2n-2-k}}{z^{n-1}} d\mu(z) = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}(\mu)|z_{n,k}-1|^2 \omega_{n,j} \left(\frac{(z_{n,j}+1)^k(z_{n,j}-1)^{2n-2-k}}{z_{n,j}^{n-1}}\right).$$

Assim, comparando a expressão acima com (3.19), temos

$$\lambda_{n,k} = \mathcal{A}(\mu)\omega_{n,k} \frac{(z_{n,k}-1)^2}{-z_{n,k}} = \mathcal{A}(\mu)\omega_{n,k}|z_{n,k}-1|^2, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Por fim, observando que $|z_{n,k}-1|^2 = 4/(x_{n,k}^2+1)$ e que $M_1 = 1/\mathcal{S}$, mostra-se também que

$$\lambda_{n,k} = \frac{c_1^2+1}{M_1} \frac{\omega_{n,k}}{x_{n,k}^2+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

$\blacksquare$

Teorema 3.9. *Seja μ a medida de probabilidade no círculo unitário dada no Teorema 2.1 obtida sob a condição $\mathcal{S} < \infty$, e sejam $x_{n,k}$, os zeros do polinômio P_n, $z_{n,k}$ os zeros do polinômio para-ortogonal $\Psi_{n+1}(\nu_{\underline{\epsilon}}; \tau_n, z)$, $0 \leq \epsilon < 1$, dado por (2.26) e $\omega_{n,k}$ os pesos da regra de quadratura (3.1). Para todo ϵ tal que $0 \leq \epsilon < 1$, se $\nu_{\underline{\epsilon}}$ é a medida de probabilidade dada pelo Teorema 2.1 e (2.19), então para $\mathcal{F} \in span\{z^{-n}, z^{-n+1}, \ldots, z^{n-1}, z^n\}$, é válida a fórmula de quadratura $(n+1)$-pontos*

$$\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(z)\, d\nu_{\underline{\epsilon}}(z) = [(1-\epsilon)\widehat{\lambda}_{n+1,n+1} + \epsilon]\, \mathcal{F}(1) + \sum_{k=1}^{n} (1-\epsilon)\omega_{n,k}\, \mathcal{F}(z_{n,k}), \tag{3.21}$$

onde $z_{n,k} = \dfrac{x_{n,k}+i}{x_{n,k}-i}$ *e*

$$\widehat{\lambda}_{n+1,n+1} = \frac{(1-M_1)(1-M_2)\cdots(1-M_n)}{(1-\ell_1)(1-\ell_2)\cdots(1-\ell_n)}, \tag{3.22}$$

Demonstração: Por (2.26) temos $\Psi_{n+1}(\nu_{\underline{0}}; \tau_n, z) = const(z-1)R_n(z)$. Observe que 1 é sempre zero de $\Psi_{n+1}(\nu_{\underline{0}}; \tau_n, z)$ e sem perda de generalidade, vamos denotar este zero por $\Xi_{n+1,n+1}(\nu_{\underline{0}}; \tau_n) = 1$.

Pela relação (2.14), se $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ são zeros de P_n então $z_{n,k} = (x_{n,k}+i)/(x_{n,k}-i)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ são os zeros de R_n, ou equivalentemente, os zeros do polinômio mônico para-ortogonal $\Psi_{n+1}(\nu_{\underline{0}}; \tau_n, z)$ em (2.17).

Sabemos por (3.16) que a fórmula de quadratura

$$\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(z) d\nu_{\underline{0}}(z) = \widehat{\lambda}_{n+1,n+1}\, \mathcal{F}(1) \;+\; \sum_{k=1}^{n} \widehat{\lambda}_{n+1,k}\, \mathcal{F}(z_{n,k}),$$

baseada nos zeros $\Xi_{n+1,k}(\nu_{\underline{0}}; \tau_n) = z_{n,k}$, $\Xi_{n+1,n+1}(\nu_{\underline{0}}; \tau_n) = 1$ de $\Psi_{n+1}(\nu_{\underline{0}}; \tau_n, z)$ é válida para toda $\mathcal{F}$ em $span\{z^{-n}, z^{-n+1}, \ldots, z^{n-1}, z^n\}$. Pelo Lema 3.1, temos que

$$\frac{(z+1)^r(z-1)^{2n-r}}{z^n}, \quad r = 0, 1 \ldots, 2n,$$

é base para $span\{z^{-n}, z^{-n+1}, \cdots, z^{n-1}, z^n\}$ e os coeficientes $\widehat{\lambda}_{n+1,k} = \Lambda_{n+1,k}(\nu_{\underline{0}}; \tau_n)$ devem ser unicamente determinados por

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{(z+1)^{2n}}{z^n} d\nu_{\underline{0}}(z) = 2^{2n}\widehat{\lambda}_{n+1,n+1} \;+\; \sum_{k=1}^{n} \widehat{\lambda}_{n+1,k}\, \frac{(z_{n,k}+1)^{2n}}{z_{n,k}^n}$$

e

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{(z+1)^r(z-1)^{2n-r}}{z^n} d\nu_{\underline{0}}(z) = \sum_{k=1}^{n} \widehat{\lambda}_{n+1,k}\, \frac{(z_{n,k}+1)^r(z_{n,k}-1)^{2n-r}}{z_{n,k}^n} \tag{3.23}$$

para $r = 0, 1, \ldots, 2n-1$.

Pelo Teorema 3.1, considerando $F(x) = \frac{(1+x^2)^n x^r}{(1+x^2)^n} \in \mathbb{P}_{2n-1}$, $0 \leq r \leq 2n-1$, e usando a relação $d\varphi(x) = -d\nu((x+i)/(x-i))$, como no Teorema 2.1, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^r}{(1+x^2)^n} d\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} w_{n,k} \frac{x_{n,k}^r}{(1+x_{n,k}^2)^n}. \tag{3.24}$$

Usando $x = (i(z+1))/(z-1)$, que transforma o círculo unitário $\mathbb{T}$ na reta real $(-\infty, +\infty)$, obtemos que $(1+x^2) = -4z/(z-1)^2$. Assim, fazendo as substituições em (3.24) segue que

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{(i)^r (z+1)^r}{(z-1)^r} \frac{(z-1)^{2n}}{(-4z)^n} d\nu_{\underline{0}}(z) = \sum_{k=1}^{n} w_{n,k} \left(\frac{(i)^r (z_{n,k}+1)^r}{(z_{n,k}-1)^r} \frac{(z_{n,k}-1)^{2n}}{(-4z_{n,k})^n} \right),$$

simplificando obtemos,

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{(z+1)^r (z-1)^{2n-r}}{z^n} d\nu_{\underline{0}}(z) = \sum_{k=1}^{n} w_{n,k} \left(\frac{(z_{n,k}+1)^r (z_{n,k}-1)^{2n-r}}{z_{n,k}^n} \right), \tag{3.25}$$

para $r = 0, 1, \ldots, 2n-1$.

Comparando (3.23) e (3.25), obtemos que $\widehat{\lambda}_{n+1,k} = \omega_{n,k},\ k = 1, 2, \ldots n$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(z) d\nu_{\underline{0}}(z) = \widehat{\lambda}_{n+1,n+1}\, \mathcal{F}(1) \ + \ \sum_{k=1}^{n} \omega_{n,k}\, \mathcal{F}(z_{n+1,k}), \tag{3.26}$$

para $\mathcal{F} \in span\{z^{-n}, z^{-n+1}, \ldots, z^{n-1}, z^n\}$.

Para obter a expressão explícita para $\widehat{\lambda}_{n+1,n+1}$ vemos que, por (3.17),

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_{n+1,n+1} &= \Lambda_{n+1,n+1}(\nu_{\underline{0}}; \tau_n) \\ &= \frac{1}{\Psi'_{n+1}(\nu_{\underline{0}}; \tau_n, 1)} \int_{\mathbb{T}} \frac{\Psi_{n+1}(\nu_{\underline{0}}; \tau_n, z)}{z-1}\, d\nu_{\underline{0}}(z). \end{aligned}$$

Observando novamente (2.26), temos $\Psi_{n+1}(\nu_{\underline{0}}; \tau_n, z) = const(z-1)R_n(z)$ e $\Psi'_{n+1}(\nu_{\underline{0}}; \tau_n, 1) = const R_n(1)$. Logo

$$\widehat{\lambda}_{n+1,n+1} = \frac{1}{R_n(1)} \int_{\mathbb{T}} R_n(z)\, d\nu_{\underline{0}}(z). \tag{3.27}$$

Usando (2.14) encontramos

$$R_n(1) = \lim_{x\to\infty} R_n\left(\frac{x+i}{x-i}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2^n P_n(x)}{(x-i)^n}.$$

Então, utilizando o coeficiente do termo de maior grau do polinômio P_n, dado em (2.4) obtemos

$$R_n(1) = 2^n (1-\ell_1)(1-\ell_2)\ldots(1-\ell_n). \tag{3.28}$$

Novamente, usando a relação $R_j(z) = \frac{2^j P_j(x)}{(x-i)^j}$, $j = 1, 2, \ldots$, onde $z = (x+i)/(x-i)$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} R_j(z) d\nu_{\underline{0}}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^j P_j(x)}{(x-i)^j} d\varphi(x) \\
&= 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_j(x)(x+i)^j}{(x^2+1)^j} d\varphi(x) \\
&= 2^j \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^j P_j(x)}{(x^2+1)^j} d\varphi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q_{j-1}(x) P_j(x)}{(x^2+1)^j} d\varphi(x) \right], \quad j = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

onde q_{j-1} é um polinômio de grau $j-1$. Pelo Teorema 2.1,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} R_j(z) d\nu_{\underline{0}}(z) &= 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^j P_j(x)}{(x^2+1)^j} d\varphi(x) \\
&= 2^j (1 - M_j)(1 - M_{j-1}) \cdots (1 - M_1), \; j = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{T}} R_n(z) d\nu_{\underline{0}}(z) = 2^n (1 - M_n)(1 - M_{n-1}) \cdots (1 - M_1). \tag{3.29}$$

Assim, substituindo (3.28) e (3.29) em (3.27), obtemos

$$\widehat{\lambda}_{n+1,n+1} = \frac{(1 - M_1)(1 - M_2) \cdots (1 - M_n)}{(1 - \ell_1)(1 - \ell_2) \cdots (1 - \ell_n)}. \tag{3.30}$$

Isto mostra o resultado para regra de quadratura associada à medida $\nu_{\underline{0}}$.

Por fim, o resultado para regra de quadratura associada a $\nu_{\underline{\epsilon}}$ segue combinando (3.26) e (2.19) para obter (3.21).

■

As fórmulas de quadratura no círculo unitário dadas nos Teoremas 3.8 e 3.9 são casos especiais de fórmulas de quadratura no círculo unitário, pois no caso da fórmula de quadratura n-pontos (3.18) o polinômio para-ortogonal envolvido é $\Psi_n(\mu; -\tau_n, z) = const_1 \times R_n(z)$. Similarmente, no caso da regra de quadratura $(n+1)$-pontos (3.21) o polinômio para-ortogonal envolvido é $\Psi_{n+1}(\nu_{\underline{\epsilon}}; \tau_n, z) = const_2 \times (z-1) R_n(z)$. Uma importante vantagem é que R_n satisfaz uma relação de recorrência de três termos (2.15), podendo ser facilmente obtido. Além disso, os polinômios R_n tem total relação com os polinômios P_n, (2.14), dados na reta real pela relação de recorrência (2.3).

No trabalho com fórmulas de quadratura é importante conhecer os seus nós e pesos. O Capítulo 4 é dedicado à determinação dos nós e pesos das fórmulas de quadradura apresentadas neste capítulo.

Para finalizar este capítulo vamos apresentamos um exemplo sobre fórmula de quadratura utilizando os nós e pesos dados no Exemplo 3.1.

Exemplo 3.2. *Consideramos o Exemplo 3.1. Pelo Exemplo 1.1, sabemos que $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$ é uma sequência encadeada positiva com sequência minimal $\{\ell_{n+1}\}_{n\geq 0}$ e maximal $\{M_{n+1}\}_{n\geq 0}$ de parâmetros dadas por*

$$\ell_{n+1} = \frac{n}{2n+2} \quad e \quad M_{n+1} = \frac{1}{2}, \quad n \geq 0.$$

Observe que

$$\mathcal{S} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{\ell_k}{1-\ell_k} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2,$$

ou podemos também verificar facilmente da Observação (2.1) que

$$\mathcal{S} = 1/M_1 = 2.$$

Logo, a medida de probabilidade μ associada aos coeficientes de Verblunsky dados por (2.5) é tal que $\mathcal{A}(\mu) = \int_{\mathbb{T}} |z-1|^{-2} d\mu(z)$ existe e seu valor é dado por

$$\mathcal{A}(\mu) = \frac{1}{4}(c_1^2+1)\mathcal{S} = \frac{1}{2}.$$

De (2.5), podemos ver que

$$\tau_n = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_{n-1} = \alpha_{n-1}(\mu) = -\frac{1}{n+1}, \quad n \geq 1. \tag{3.31}$$

É conhecido (ver, [6, Teorema 8]) que a medida de probabilidade associada aos coeficientes de Verblunsky (3.31) é tal que

$$d\mu(z) = \frac{1}{4\pi i} \frac{(1-z)(z-1)}{z^2} dz.$$

E, assim, o valor de $\mathcal{A}(\mu)$ é confirmado, pois

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} |z-1|^{-2} d\mu(z) &= \frac{1}{4\pi i} \int_{\mathbb{T}} |z-1|^{-2} \frac{(1-z)(z-1)}{z^2} dz \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Além disto, de (2.24) observamos que a medida de probabilidade $\nu_{\underline{0}}$ é a medida de Lebesgue dada por $d\nu_{\underline{0}}(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}dz$, e assim,

$$d\varphi(x) = -d\nu_{\underline{0}}\left(\frac{x+i}{x-i}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1}dx.$$

Vimos no Exemplo 3.1 que $\omega_{n,k} = 1/(n+1)$. Logo, de (3.2),

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k}), \tag{3.32}$$

que é válida quando $(x^2+1)^n f(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

Por (3.13) os zeros de P_n são dados por $x_{n,k} = \cot(k\pi/(n+1))$, $k = 1, 2, \ldots, n$ e assim,

$$x_{n,k}^2 + 1 = \frac{1}{\sin^2(k\pi/(n+1))}.$$

Finalmente, do Teorema 3.8, para $\mathcal{F} \in span\{z^{-n+1}, z^{-n+2}, \ldots, z^{n-2}, z^{n-1}\}$, segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(z)\, d\mu(z) &= \frac{1}{4\pi i}\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(z)\,\frac{(1-z)(z-1)}{z^2}dz \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathcal{A}(\mu)}{x_{n,k}^2+1}\omega_{n,k}\,\mathcal{F}(z_{n,k}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin^2(k\pi/(n+1))}{n+1}\,\mathcal{F}(z_{n,k}),\end{aligned}$$

onde $z_{n,k} = (x_{n,k}+i)/(x_{n,k}-i)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Além disso, por (2.19),

$$\int_{\mathbb{T}} \phi(z)\, d\nu_{\underline{\epsilon}}(z) = \frac{1-\epsilon}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \phi(z)\,\frac{1}{z}dz + \epsilon\,\phi(1).$$

Também podemos verificar de (3.22) que

$$\widehat{\lambda}_{n+1,n+1} = \frac{(1-M_1)(1-M_2)\cdots(1-M_n)}{(1-\ell_1)(1-\ell_2)\cdots(1-\ell_n)} = \frac{1}{n+1}.$$

Assim, do Teorema 3.9, para $\mathcal{F} \in span\{z^{-n}, z^{-n+1}, \ldots, z^{n-1}, z^n\}$, segue que

$$\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(z)\, d\nu_{\underline{\epsilon}}(z) = [(1-\epsilon)\frac{1}{n+1} + \epsilon]\,\mathcal{F}(1) + \sum_{k=1}^{n}(1-\epsilon)\frac{1}{n+1}\,\mathcal{F}(z_{n,k}).$$

Com $\epsilon = 0$ esta regra de quadratura é conhecida como regra de quadratura Gauss-Lebesgue no círculo unitário, ou seja,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(z)\,\frac{1}{z}dz = \frac{1}{n+1}\mathcal{F}(1) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\mathcal{F}(z_{n,k}),$$

válida para $\mathcal{F} \in span\{z^{-n}, z^{-n+1}, \ldots, z^{n-1}, z^n\}$. Por (3.12), que fornece a expressão explícita para $z_{n,k}$, segue que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(z)\,\frac{1}{z}dz = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\mathcal{F}(e^{i2k\pi/(n+1)}), \tag{3.33}$$

válida para $\mathcal{F} \in span\{z^{-n}, z^{-n+1}, \ldots, z^{n-1}, z^n\}$.

Capítulo 4

Localização e determinação dos zeros de P_n

Neste capítulo apresentamos alguns resultados sobre a localização e determinação dos zeros dos polinômios que satisfazem uma relação do tipo R_{II} e os respectivos pesos dados em (3.6), que são necessários na utilização das fórmulas de quadratura apresentadas no Capítulo 3. Como vimos, através da relação (2.14) e dos Teoremas 3.8 e 3.9 podemos determinar os zeros dos polinômios para-ortogonais $\Psi_n(\mu; -\tau_n, z)$ e $\Psi_{n+1}(\nu_{\underline{0}}; \tau_n, z)$ respectivamente, usando os zeros de P_n. Enquanto os métodos tradicionais utilizam aritimética complexa para encontrar os nós e pesos das fórmulas de quadratura no círculo unitário, veja por exemplo [1, 2, 3, 10, 35], apresentamos aqui dois métodos que necessitam apenas aritmética real. Não desenvolvemos um novo método, porém, utilizamos métodos conhecidos para encontrar os zeros de P_n e os respectivos pesos de forma inédita.

Os resultados descritos a partir da Seção 4.3 encontram-se reunidos no artigo submetido [5].

4.1 Limitantes para os zeros dos polinômios P_n

Os próximos dois teoremas tratam de limitantes para os zeros de P_n utilizando o conceito de sequências encadeadas. Não são resultados inéditos, pois em [25] foram estudados os limitantes dos zeros da sequência de funções $\{W_n\}_{n\geq 0}$ definidas por

$$\mathcal{W}_{n+1}(x) = (x - c_{n+1}\sqrt{1-x^2})\mathcal{W}_n(x) - d_{n+1}\mathcal{W}_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

com $\mathcal{W}_{-1}(x) = 0$ e $\mathcal{W}_0(x) = 1$ e onde $\{c_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência real e $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$ é uma sequência encadeada positiva. As funções W_n satisfazem

$$\mathcal{W}_n(x) = 2^{-n} e^{-in\theta/2} R_n(e^{i\theta}), \quad n \geq 0,$$

onde $x = \cos(\theta/2) = (e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})/2$ e o polinômio R_n satisfaz a relação de recorrência dada por (2.15). A transformação $x = \cos(\theta/2)$ é conhecida como transformação de Delsarte e Genin, veja por exemplo [38]. Observe que, por (2.14), podemos relacionar os polinômios $\mathcal{W}_n$ e P_n, utilizando a transformação

$$x = \cos(\theta/2) = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}},$$

onde $u = \cot(\theta/2)$.

Assim, de maneira análoga ao que foi feito em [25], obtivemos as demonstrações dos próximos dois teoremas.

Teorema 4.1. *Sejam P_n os polinômios dados pela relação de recorrência* (2.3)*, $\{c_n\}_{n=1}^{N}$ uma sequência de números reais e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ uma sequência encadeada positiva. Então para $N \geq 2$, todos os zeros de P_n, $1 \leq n \leq N$, pertencem ao intervalo $(A, B) \subset (-\infty, +\infty)$ se, e somente se,*

(i) $c_1 \in (A, B)$,

(ii) $\{d_{n+1}(x)\}_{n=1}^{N-1}$ *é uma sequência encadeada positiva para $x = A$ e $x = B$, onde* $d_{n+1}(x) = \dfrac{d_{n+1}(x^2+1)}{(x-c_n)(x-c_{n+1})}$.

Demonstração: Sabemos em [20] que os zeros de P_N são reais, distintos e que o coeficiente do termo de maior grau é positivo. Sejam $x_{N,1} < x_{N,2} < \cdots < x_{N,N-1} < x_{N,N}$ zeros do polinômio P_N. Suponha que $x_{N,i} \in (A, B)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Assim $P_n(B) > 0$ $n = 1, 2, \ldots, N$. Em particular, $P_1(B) = B - c_1 > 0$, segue que $B > c_1$. Disto também segue de (2.3) que $P_1(A) = A - c_1 < 0$, pois c_1 é zero de P_1 e assim $c_1 \in (A, B)$.

Note que, usando a relação de recorrência (2.3) com $x = B$, temos

$$B - c_{n+1} = \frac{P_{n+1}(B)}{P_n(B)} + d_{n+1}(B^2+1)\frac{P_{n-1}(B)}{P_n(B)} > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Logo $B > c_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$. Por outro lado, usando o fato de que os zeros de P_n e P_{n+1} são entrelaçados (ver [20]) é possível observar que $(-1)^n P_n(A) > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ e, novamente, usando (2.3) com $x = A$, obtemos

$$A - c_{n+1} = \frac{P_{n+1}(A)}{P_n(A)} + d_{n+1}(A^2+1)\frac{P_{n-1}(A)}{P_n(A)} < 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Logo $A < c_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$. Isto mostra que $c_{n+1} \in (A, B)$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$.

Mais uma vez pela relação de recorrência (2.3) segue que

$$\frac{d_{n+1}(x^2+1)}{(x-c_n)(x-c_{n+1})} = \frac{P_n(x)}{(x-c_n)P_{n-1}(x)}\left(1 - \frac{P_{n+1}(x)}{(x-c_{n+1})P_n(x)}\right), \quad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Como $P_n(B) > 0$, $n = 1, 2, \ldots, N$ e fazendo $m_{n+1} = 1 - \dfrac{P_{n+1}(B)}{(B-c_n)P_n(B)}$, observamos que $m_1 = 0$ e $0 < m_{n+1} < 1$. Podemos escrever também

$$\frac{d_{n+1}(B^2+1)}{(B-c_n)(B-c_{n+1})} = (1-m_n)m_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Assim, $\left\{d_{n+1}(B) = \dfrac{d_{n+1}(B^2+1)}{(B-c_n)(B-c_{n+1})}\right\}_{n=1}^{N-1}$ é uma sequência encadeada.

Similarmente vemos que

$$\frac{d_{n+1}(A^2+1)}{(A-c_n)(A-c_{n+1})} = \frac{P_n(A)}{(A-c_n)P_{n-1}(A)}\left(1 - \frac{P_{n+1}(A)}{(A-c_{n+1})P_n(A)}\right) \quad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Fazendo $\tilde{m}_{n+1} = 1 - \dfrac{P_{n+1}(A)}{(A-c_n)P_n(A)}$, podemos observar que $0 < \tilde{m}_{n+1} < 1$ e $m_1 = 0$. Portanto, $\left\{d_{n+1}(A) = \dfrac{d_{n+1}(A^2+1)}{(A-c_n)(A-c_{n+1})}\right\}_{n=1}^{N-1}$ é uma sequência encadeada.

Reciprocamente, suponha que (i) e (ii) valem. Se $\{d_{n+1}(B)\}_{n=1}^{N-1}$ é sequência encadeada, cujo o parâmetro minimal é $m_{n+1} = 1 - \dfrac{P_{n+1}(B)}{(B-c_n)P_n(B)}$ é tal que $0 < m_{n+1} < 1$, segue que

$0 < \dfrac{P_{n+1}(B)}{(B-c_n)P_n(B)} < 1$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$. Por hipótese, temos $c_1 \in (A, B)$ e por $\dfrac{d_2(B^2+1)}{(B-c_1)(B-c_2)} > 0$, segue que $B - c_2 > 0$ e, como $0 < \dfrac{P_2(B)}{(B-c_2)P_1(B)} < 1$, implica que $P_2(B) > 0$. Assim, pela propriedade do entrelaçamento $P_1(B) > 0$ e $P_2(B) > 0$. Isto mostra que $B > x_{2,2}$.

Suponhamos válido que $B > x_{N-1,N-1}$, isto implica que $P_n(B) > 0, n = 1, 2, \ldots, N-1$ e $B - c_n > 0$ $n = 1, 2, \ldots, N-1$. Vamos provar que vale também para N. Como $\dfrac{d_N(B^2+1)}{(B-c_{N-1})(B-c_N)} > 0$, então $B - C_N > 0$ e, de $0 < \dfrac{P_N(B)}{(B-c_{N-1})P_{N-1}(B)} < 1$, segue que $P_N(B) > 0$, e pela propriedade do entrelaçamento, $B > x_{N,N}$.

Portando, B é maior que todo os zeros de $P_N(x)$.

Por outro lado, como $\{d_{n+1}(A)\}_{n=1}^{N-1}$ é sequência encadeada cujo o parâmetro minimal é $\tilde{m}_{n+1} = 1 - \dfrac{P_{n+1}(A)}{(A-c_n)P_n(A)}$ tal que $0 < \tilde{m}_{n+1} < 1$, segue $0 < \dfrac{P_{n+1}(A)}{(A-c_n)P_n(A)} < 1$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$ e como $c_1 \in (A, B)$, resulta que $A - c_2 < 0$, pois $\dfrac{d_2(A^2+1)}{(A-c_1)(A-c_2)} > 0$ e de $0 < \dfrac{P_2(A)}{(A-c_2)P_1(A)} < 1$, implica que $P_2(A) > 0$ e pelo entrelaçamento dos zeros temos que $A < x_{2,1}$.

Suponhamos válido que $A > x_{N,1}$, isto implica que $(-1)^n P_n(A) > 0$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$ e $A - c_n < 0$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$. Vamos provar que vale para N. Como $\dfrac{d_N(A^2+1)}{(A-c_{N-1})(A-c_N)} > 0$, então $A - C_N < 0$ e de $0 < \dfrac{(-1)^{N-1}P_N(A)}{(A-c_{N-1})(-1)^{N-1}P_{N-1}(A)} < 1$, segue que $(-1)^{N-1}P_N(A) < 0$, logo $(-1)^N P_N(A) > 0$ e, pela propriedade do entrelaçamento, $A < x_{N,1}$.

Portanto, todos os zeros de P_N estão em (A, B) se as propriedades (i) e (ii) forem satisfeitas.

$\blacksquare$

O Teorema 4.1 fornece condições necessárias e suficientes para que o conjuntos dos zeros de P_N seja limitado, porém na prática não se conhece A e B. O Teorema 4.2 é importante, pois fornece uma forma prática de obter um limitante para todos os zeros do polinômio P_N.

Teorema 4.2. *Seja $N \geq 2$ e sejam $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ e $\{\widehat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ sequências encadeadas positivas e $\{c_n\}_{n=1}^{N}$ uma sequência de números reais.*

(i) *Se $d_{n+1} < \widehat{d}_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$, então os zeros de P_N estão em (A_N, B_N), onde*

$$A_N = \min_{1 \leq n \leq N-1}\{y_{1,n+1}\}, \qquad B_N = \max_{1 \leq n \leq N-1}\{y_{2,n+1}\} \tag{4.1}$$

e $y_{1,n+1}$ e $y_{2,n+1}$ são zeros da equação quadrática

$$h_{n+1}(y) = \left(1 - \frac{d_{n+1}}{\widehat{d}_{n+1}}\right) y^2 - (c_{n+1} + c_n)y + c_n c_{n+1} - \frac{d_{n+1}}{\widehat{d}_{n+1}} = 0.$$

(ii) *Se $d_{n+1} = \widehat{d}_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$, então os zeros de P_N estão em $(A_N, +\infty)$ se $(c_n + c_{n+1}) > 0$ e os zeros de P_N estão em $(-\infty, B_N)$ se $(c_n + c_{n+1}) < 0$.*

Demonstração: Considere $d_{n+1}(y) = \dfrac{d_{n+1}(y^2+1)}{(y-c_n)(y-c_{n+1})} \leq \widehat{d}_{n+1}$. Como $\{\widehat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ é sequência encadeada, então pelo teste de comparação (ver Teorema 1.8) temos que $\{d_{n+1}(y)\}$ é sequência encadeada.

(i) Se $d_{n+1} < \widehat{d}_{n+1}$ e de $d_{n+1}(y) < \widehat{d}_{n+1}$ temos

$$y^2(\widehat{d}_{n+1} - d_{n+1}) - y(c_{n+1} + c_n)\widehat{d}_{n+1} + c_n c_{n+1}\widehat{d}_{n+1} - d_{n+1} \geq 0,$$

ou seja,

$$h_{n+1}(y) = y^2\left(1 - \frac{d_{n+1}}{\widehat{d}_{n+1}}\right) - y(c_{n+1} + c_n) + c_n c_{n+1} - \frac{d_{n+1}}{\widehat{d}_{n+1}} \geq 0.$$

Considerando a equação quadrática $h_{n+1}(y) = 0$ observamos que o coeficiente dominante do polinômio quadrático h_{n+1} é positivo. Observe que o discriminante de h_{n+1} é dado por $\delta_{n+1}(q_{n+1}) = (c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1})$, onde $q_{n+1} = \frac{d_{n+1}}{\widehat{d}_{n+1}}$. Assim $\delta_{n+1}(q_{n+1})$ é uma equação quadrática com coeficiente dominante negativo e ainda, $\delta_{n+1}(0) = (c_n - c_{n+1})^2$ e $\delta_{n+1}(1) = (c_n + c_{n+1})^2$, isto mostra que $\delta_{n+1}(q_{n+1}) > 0$ para $0 < q_{n+1} < 1$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$ e garante que h_{n+1} possui dois zeros reais.

Como o coeficiente dominante de h_{n+1} é positivo então $h_{n+1}(y) \geq 0$ quando $y \leq y_{1,n+1}$ ou $y \geq y_{2,n+1}$.

Assim, $\{d_{n+1}(A_N)\}_{n=1}^{N-1}$ e $\{d_{n+1}(B_N)\}_{n=1}^{N-1}$ são sequências encadeadas positivas.

Observe que

$$(y_{2,n+1} - c_n)(c_n - y_{1,n+1}) = \frac{q_{n+1}(1 + c_n^2)}{1 - q_{n+1}}$$

e

$$(y_{2,n+1} - c_{n+1})(c_{n+1} - y_{1,n+1}) = \frac{q_{n+1}(1 + c_{n+1}^2)}{1 - q_{n+1}}.$$

Como $y_{2,n+1} > y_{1,n+1}$, segue, para $n = 1, 2, \ldots, N-1$, que

$$\begin{array}{ccc} y_{1,n+1} < c_n & \text{e} & y_{1,n+1} < c_{n+1}, \\ y_{2,n+1} > c_n & \text{e} & y_{2,n+1} > c_{n+1}, \end{array}$$

pois, caso contrário, teríamos um absurdo. Logo $A_N < c_n < B_N$, $n = 1, 2, \ldots, N$.

Portanto, isto satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema 4.1 e segue que os zeros de $P_N(x)$ estão em (A_N, B_N). O que mostra o item (i).

(ii) Suponha $d_{n+1} = \widehat{d}_{n+1}$. De $d_{n+1}(y) \leq \widehat{d}_{n+1}$ obtemos

$$y^2 + 1 \leq (y - c_n)(y - c_{n+1}),$$

ou seja,

$$h_{n+1}(y) = -y(c_n + c_{n+1}) + c_n c_{n+1} - 1 \geq 0. \tag{4.2}$$

Temos dois casos:

- Se, $c_n + c_{n+1} > 0$ temos que $h_{n+1}(y) \geq 0$ se $y \leq \dfrac{c_n c_{n+1} - 1}{c_n + c_{n+1}} = y_{1,n+1}$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$, logo $\{d_{n+1}(A_N)\}_{n=1}^{N-1}$ é sequência encadeada e por convenção $y_{2,n+1} = +\infty$. Temos, ainda,

$$\begin{aligned} y_{1,n+1} - c_n &= \frac{c_n c_{n+1} - 1}{c_n + c_{n+1}} - c_n \\ &= -\frac{1 + c_n^2}{c_n + c_{n+1}} < 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

Isto significa que $A_N < c_n < +\infty$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$. Portanto, pelo Teorema 4.1, os zeros de P_N estão em $(A_N, +\infty)$.

- Se $c_n + c_{n+1} < 0$ temos, de (4.2), que $h_{n+1}(y) \geq 0$ quando $y \geq \dfrac{1 - c_n c_{n+1}}{-(c_n + c_{n+1})} = y_{2,n+1}$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$, logo $\{d_{n+1}(B_N)\}_{n=1}^{N-1}$ é sequência encadeada e novamente por convenção $y_{1,n+1} = -\infty$. Como,

$$\begin{aligned} y_{2,n+1} - c_n &= \frac{1 - c_n c_{n+1}}{-(c_n + c_{n+1})} - c_n \\ &= -\frac{1 + c_n^2}{c_n + c_{n+1}} > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

Isto quer dizer que $-\infty < c_n < B_N$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$. Portanto, pelo Teorema 4.1 os zeros de P_N estão em $(-\infty, B_N)$.

■

Uma desvantagem do resultado do Teorema 4.2 é o cálculo de A_N e B_N em (4.1), ele exige a resolução de $N-1$ equações do tipo $h_j(y) = 0$, $j = 2, 3, \ldots, N$.

Nos próximos resultados desta seção, que são inéditos, obtemos um limitante para os zeros P_N resolvendo somente a última equação $h_N(y) = 0$, impondo algumas condições adicionais.

Lema 4.1. *Consideremos $N \geq 2$. Sejam $\{c_n\}_{n=1}^{N}$ uma sequência de números reais, $\{q_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ uma sequência real tal que $0 < q_{n+1} < 1$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$, e $h_{n+1}(y) = (1 - q_{n+1})y^2 - (c_n + c_{n+1})y + c_n c_{n+1} - q_{n+1}$, então*

$$c_n, c_{n+1} \in (y_{1,n+1}, y_{2,n+1}), \quad n = 1, 2, \ldots, N-1,$$

onde $y_{1,n+1}$ e $y_{2,n+1}$ são o menor e o maior zeros de h_{n+1}, respectivamente.

Demonstração: Lembramos da demonstração do Teorema 4.2, que o coeficiente do termo de maior grau do polinômio h_{n+1} é positivo, então a parábola tem concavidade voltada para cima e ainda, podemos reescrever

$$h_{n+1}(y) = -q_{n+1}(1 + y^2) + (y - c_n)(y - c_{n+1}).$$

Logo $h_{n+1}(y) \leq 0$ para $y \in (c_{n+1}, c_n)$ ou $y \in (c_n, c_{n+1})$. Como $\lim\limits_{y \to +\infty} h_{n+1}(y) = +\infty$ e $\lim\limits_{y \to -\infty} h_{n+1}(y) = +\infty$, então $c_n, c_{n+1} \in (y_{1,n+1}, y_{2,n+1})$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$. ■

Teorema 4.3. *Consideremos $N \geq 2$. Sejam $\{c_n\}_{n=1}^{N}$ uma sequência de números reais estritamente decrescente, $\{q_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ uma sequência real estritamente crescente tal que*

$0 < q_{n+1} < 1$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$ *e* $h_{n+1}(y) = (1-q_{n+1})y^2 - (c_n + c_{n+1})y + c_n c_{n+1} - q_{n+1}$, *então* $y_{1,N} = \min_{1\leq n\leq N-1} y_{1,n+1}$, *onde* $y_{1,n+1}$ *é o menor zero de* h_{n+1}.

Demonstração: Pelo Lema 4.1 $c_n, c_{n+1} \in (y_{1,n+1}, y_{2,n+1})$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$. Primeiramente observe que podemos escrever $h_{n+1}(y) = g_{n+1}(y) - f_{n+1}(y)$, onde $f_{n+1}(y) = q_{n+1}(1+y^2)$ e $g_{n+1}(y) = (y-c_n)(y-c_{n+1})$. Note, também, que $h_{n+1}(y) = 0$ se, e somente se, $g_{n+1}(y) = f_{n+1}(y)$. Como $\{q_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ é uma sequência crescente, segue que a sequência $\{f_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ é crescente, ou seja, $f_{n+1}(y) < f_{n+2}(y)$ e, ainda, como $\{c_n\}_{n=1}^{N}$ é decrescente, então $c_{n+2} < c_n$, isto é, $-c_{n+2} > -c_n$, assim,

$$(y - c_{n+2}) > (y - c_n), \quad \text{para } y < c_{n+1}.$$

Portanto, $(y - c_{n+1}) < 0$ logo $(y-c_{n+2})(y-c_{n+1}) < (y-c_{n+1})(y-c_n)$. Isto implica que $g_{n+2}(y) < g_{n+1}(y)$ para $y < c_{n+1}$.

Queremos mostrar que $y_{1,n+2} < y_{1,n+1}$. Suponhamos por absurdo que $y_{1,n+1} \leq y_{1,n+2}$.

- Se $y_{1,n+2} = y_{1,n+1}$, então

  $$g_{n+1}(y_{1,n+1}) > g_{n+2}(y_{1,n+1}) = f_{n+2}(y_{1,n+1}) > f_{n+1}(y_{1,n+1}).$$

  O que é um absurdo, pois $y_{1,n+1}$ é zero de h_{n+1}.

- Se $y_{1,n+1} < y_{1,n+2}$, observe que $h_{n+2}(y) > 0$ para todo $y < y_{1,n+2}$ e assim $h_{n+2}(y) = g_{n+2}(y) - f_{n+2}(y) > 0$. Logo $g_{n+2}(y) > f_{n+2}(y)$ para $y < y_{1,n+2}$. Disto segue

  $$g_{n+1}(y_{1,n+1}) > g_{n+2}(y_{1,n+1}) > f_{n+2}(y_{1,n+1}) > f_{n+1}(y_{1,n+1}).$$

  O que é um absurdo pois $y_{1,n+1}$ é zero de h_{n+1}.

Portanto $y_{1,n+2} < y_{1,n+1}$. ∎

Similarmente como no Teorema acima, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.4. *Considere* $N \geq 2$. *Sejam* $\{c_n\}_{n=1}^{N}$ *uma sequência de números reais estritamente crescente e* $\{q_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ *uma sequência real estritamente decrescente tal que* $0 < q_{n+1} < 1$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$ *e* $h_{n+1}(y) = (1-q_{n+1})y^2 - (c_n + c_{n+1})y + c_n c_{n+1} - q_{n+1}$ *então* $y_{2,N} = \max_{1\leq n\leq N-1} y_{2,n+1}$, *onde* $y_{2,n+1}$ *é o maior zero de* h_{n+1}.

A prova deste resultado é análoga à do teorema 4.3.

4.2 Sequência de Sturm

Exibimos agora um resultado que determina o número de zeros que um polinômio possui em um intervalo $(a, b) \subset (-\infty, +\infty)$ e que será posteriomente útil para o método de determinação dos zeros do polinômio P_n. Antes disso, precisamos da seguinte definição, que pode ser encontrada em [26, p. 336] e [29, p. 145].

Definição 4.1. *Seja $\{f_0, f_1, \cdots, f_{m-1}, f_m\}$ uma sequência de funções reais, com f_m diferenciável em $[a, b]$. Tal sequência é definida como sequência de Sturm se cumprir as seguintes condições no intervalo fechado $[a, b]$:*

(i) *As funções f_i são contínuas para $i = 0, 1, \ldots, m$.*

(ii) *$f_0(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$.*

(iii) *Duas funções sucessivas não possuem zero em comum, ou seja, se $\xi \in [a, b]$ é um zero para uma função f_i, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, então $f_{i-1}(\xi) \neq 0$ e $f_{i+1}(\xi) \neq 0$.*

(iv) *Se $\xi \in [a, b]$ é um zero de f_i e $1 \leq i \leq m-1$, então $f_{i-1}(\xi)f_{i+1}(\xi) < 0$.*

(v) *Se $\xi \in [a, b]$ é um zero de f_m, então $f'_m(\xi)f_{m-1}(\xi) > 0$.*

Observação 4.1. *Observemos que a sequência $\{P_n\}_{n=0}^{N}$ satisfaz as condições acima, logo $\{P_n\}_{n=0}^{N}$ é uma sequência de Sturm.*

Para $c \in \mathbb{R}$, $\{f_0(c), f_1(c), \cdots, f_{m-1}(c), f_m(c)\}$ é uma sequência numérica. Se, nesta sequência, substituirmos os termos positivos e negativos pelos seus respectivos sinais, obtemos uma sequência de sinais (desconsiderando os possíveis valores nulos). O número de variações de sinais nesta sequência é chamado de número de variações de sinais na sequência de Sturm e é denotado por $V(c)$.

Teorema 4.5. (Sturm) Seja $\{f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}, f_m\}$ uma sequência de Sturm em $[a, b]$ tal que $f_m(a) \neq 0$ e $f_m(b) \neq 0$. Então, o número de zeros reais distintos de f_m no intervalo $[a, b]$ é dado por $V(a) - V(b)$.

4.3 Determinação dos zeros dos polinômios P_n

Estamos interessados em determinar os zeros de P_n. Comentamos anteriormente que os zeros de P_n podem ser encontrados como solução do problema de autovalor generalizado (2.11). Um dos métodos conhecido na literatura para resolver esse tipo de problema é o método QZ (ver [14]). Porém, esse método não utiliza as vantagens das matrizes serem tridiagonais, o método transforma as matrizes tridiagonais em matrizes "cheias". Por esta razão, optamos por trabalhar com a relação de recorrência do tipo R_{II} para encontrar os zeros de P_n, utilizando dois métodos conhecidos, método de Laguerre, [23, 36] e o método da potência inversa com deslocamento, [14, 36], descritos na Seção 1.4.

Os nós da fórmula de quadratura dada no Teorema 3.1 são também zeros de P_n. Utilizamos sem perda de generalidade a ordenação decrescente para zeros de P_n, ou seja,

$$x_{n,k+1} < x_{n,k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

4.3.1 Método de Laguerre aplicado ao problema de autovalor generalizado

Como vimos na Subseção 1.4.1, o método de Laguerre (ML) consiste em determinar zeros de um polinômio. Em [23] este método foi utilizado para determinar autovalores de uma matriz tridiagonal simétrica, onde utilizou-se avaliações numérica do polinômio característico e de suas primeira e segunda derivadas, que podem ser obtidas da relação de recorrência satisfeita por esses polinômios. Aqui as matrizes envolvidas do problema de autovalor generalizado não são reais. Lembrando que

$$\mathbf{A}_n \mathbf{u}_n = x \mathbf{B}_n \mathbf{u}_n, \quad n \geq 1, \tag{4.3}$$

onde $\mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}_n$ e $\mathbf{B}_n$ são matrizes hermitianas tridiagonais, respectivamente dadas por

$$\begin{bmatrix} c_1 & i\sqrt{d_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -i\sqrt{d_2} & c_2 & i\sqrt{d_3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{d_3} & c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & i\sqrt{d_n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -i\sqrt{d_n} & c_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{d_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{d_2} & 1 & \sqrt{d_3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_3} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \sqrt{d_n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{d_n} & 1 \end{bmatrix}.$$

E o polinômio característico

$$P_n(x) = \det[x\mathbf{B}_n - \mathbf{A}_n]$$

é real, que é obtido pela relação de recorrência do tipo R_{II}, (2.3).

Lembrando que o método de Laguerre é dado da seguinte maneira.

Seja y_0 pertencente ao intervalo $(x_{n,k+1}, x_{n,k})$. Então, o processo iterativo

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= L_+(y_j) \\ &= y_j + \frac{nP_n(y_j)}{-P_n'(y_j) + sign(P_n(y_j))\sqrt{[(n-1)P_n'(y_j)]^2 - n(n-1)P_n(y_j)P_n''(y_j)}}, \end{aligned}$$

para $j = 0, 1, \ldots$, converge para $x_{n,k}$. Do mesmo modo, o processo iterativo

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= L_-(y_j) \\ &= y_j + \frac{nP_n(y_j)}{-P_n'(y_j) - sign(P_n(y_j))\sqrt{[(n-1)P_n'(y_j)]^2 - n(n-1)P_n(y_j)P_n''(y_j)}}, \end{aligned}$$

para $j = 0, 1, \ldots$, converge para $x_{n,k+1}$.

Os valores de $P_n(y_j)$, $P_n'(y_j)$ e $P_n''(y_j)$ podem ser avaliados pela relação de recorrência (2.3).

Para evitarmos alguns problemas de *underflow* ou *overflow*, iremos considerar as seguintes modificações

$$X_m(x) = \frac{P_m(x)}{(x^2+1)^{m/2}}, \quad Y_m(x) = \frac{P_m'(x)}{(x^2+1)^{(m-1)/2}} \quad \text{e} \quad Z_m(x) = \frac{P_m''(x)}{(x^2+1)^{(m-2)/2}}, \tag{4.4}$$

para $m = 1, 2, \ldots, n$. A relação de recorrência de X_{m+1} pode ser obtida multiplicando a relação de recorrência (2.3) por $(x^2+1)^{-(m+1)/2}$.

A relação de recorrência para P_m' é dada por

$$P_{m+1}'(x) = (x - c_{m+1})P_m'(x) + P_m(x) - d_{m+1}(x^2+1)P_{m-1}'(x) - 2d_{m+1}xP_{m-1}(x), \tag{4.5}$$

com $P_0'(x) = 0$ e $P_1'(x) = 1$. Multiplicando (4.5) por $(x^2+1)^{-m/2}$ obtemos a relação de recorrência de Y_{m+1}.

A relação de recorrência da derivada de segunda ordem de P_m e dada por

$$\begin{aligned} P_{m+1}''(x) &= (x - c_{m+1})P_m''(x) - d_{m+1}(x^2+1)P_{m-1}''(x) \\ &\quad +2P_m'(x) - 4d_{m+1}xP_{m-1}'(x) - 2d_{n+1}P_{n-1}(x), \end{aligned} \tag{4.6}$$

com $P_0''(x) = 0$ e $P_1''(x) = 0$. Multiplicando (4.6) por $(x^2+1)^{-(m-1)/2}$ obtemos a relação de recorrência de Z_{m+1}.

Portanto, as relações de recorrência de X_{m+1}, Y_{m+1} e Z_{m+1} são

$$
\begin{aligned}
X_{m+1}(x) &= \frac{x - c_{m+1}}{\sqrt{x^2+1}} X_m(x) - d_{m+1} X_{m-1}(x),\\
Y_{m+1}(x) &= \frac{x - c_{m+1}}{\sqrt{x^2+1}} Y_m(x) - d_{m+1} Y_{m-1}(x) + X_m(x) - \frac{2x d_{m+1}}{\sqrt{x^2+1}} X_{m-1}(x),\\
Z_{m+1}(x) &= \frac{x - c_{m+1}}{\sqrt{x^2+1}} Z_m(x) - d_{m+1} Z_{m-1}(x)\\
&\quad + 2Y_m(x) - \frac{4x d_{m+1}}{\sqrt{x^2+1}} Y_{m-1}(x) - 2 d_{m+1} X_{m-1}(x),
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

para $m = 1, 2, \ldots n-1$.

Utilizando as funções (4.4), os processos iterativos de Laguerre tornam-se

$$
y_{j+1} = y_j + \frac{n X_n(y_j)\sqrt{y_j^2+1}}{-Y_n(y_j) + sign(X_n(y_k))\sqrt{[(n-1)Y_n(y_j)]^2 - n(n-1)X_n(y_j)Z_n(y_j)}}, \tag{4.8}
$$

para $j = 0, 1, \ldots$, que converge para $x_{n,k}$ se y_0 é escolhido entre $x_{n,k+1}$ e $x_{n,k}$; e

$$
y_{j+1} = y_j + \frac{n X_n(y_j)\sqrt{y_j^2+1}}{-Y_n(y_j) - sign(X_n(y_k))\sqrt{[(n-1)Y_n(y_j)]^2 - n(n-1)X_n(y_j)Z_n(y_j)}}, \tag{4.9}
$$

para $j = 0, 1, \ldots$, que converge para $x_{n,k}$ se y_0 é escolhido entre $x_{n,k}$ e $x_{n,k-1}$.

Observação 4.2. *A sequência $\{X_m\}_{m=0}^{n}$ é uma sequência de Sturm, pois $\{P_m\}_{m=0}^{n}$ é uma sequência de Sturm.*

Pelo método de Laguerre podemos aproximar todos os zeros de P_n. O processo para isto é dado pelo seguinte:

- Utilizando a sequência de Sturm, determinamos o número de zeros positivos e o número de zeros negativos de P_n. Isto é feito escolhendo $c = 0$ e observando o número de variações de sinais da sequência $\{P_m(0)\}_{m=0}^{n}$, ou, equivalentemente, da a sequência $\{X_m(0)\}_{m=0}^{n}$. Observe que como os coeficientes dos termos de maior grau de P_m, $m = 0, 1, \ldots, n$ são positivos, então para $c_1 > x_{n,1}$, $V(c_1) = 0$, pois $\{P_0(c_1), P_1(c_1), \ldots, P_n(c_1)\}$ é uma sequência com todos os valores positivos. Assim, $V(0)$ é o número de zeros positivos de P_n e $n - V(0)$ é o número de zeros negativos.

- Utilizando (4.8), aproximamos os zeros positivos de forma crescente. Similarmente, por (4.9), aproximamos os zeros negativos de forma decrescente.

É importante a escolha do valor inicial y_0, para cada intervalo $(x_{n,k+1}, x_{n,k})$, para uma eficiente convergência dos algoritmos dados por (4.8) e (4.9). Considerando o caso (4.8), o caso (4.9) é análogo. Tendo determinado dois ou mais zeros próximos a origem e conhecidos $x_{n,k+1}$, $x_{n,k+2}$ para determinar o próximo zero, $x_{n,k}$, usamos o valor inicial

$$y_0 = x_{n,k+1} + (x_{n,k+1} - x_{n,k+2})\delta, \quad \text{tal que} \quad \delta > 0. \tag{4.10}$$

É importante uma boa escolha para o parâmetro δ de modo que y_0 fique entre $x_{n,k+1}$ e $x_{n,k}$, e que esteja mais próximo de $x_{n,k}$ do que $x_{n,k+1}$. Caso uma escolha para δ ultrapasse o valor $x_{n,k}$, o que pode ser constatado pelo Teorema de Sturm (Teorema 4.5), assumimos um novo valor para y_0, reduzindo o valor de δ.

Em geral, observamos que a distância entre dois zeros consecutivos longe da origem é maior que entre dois zeros consecutivos próximo da origem. Assim, na maioria dos exemplos consideramos $\delta = 1$.

Analogamente, para determinar os zeros negativos, $x_{n,k}$, utilizamos o valor inicial em (4.9) como

$$y_0 = x_{n,k-1} - (x_{n,k-2} - x_{n,k-1})\delta, \quad \delta > 0 \tag{4.11}$$

usando a mesma ideia.

Depois de encontrado o valor aproximado do zero $x_{n,k}$, a correspondente aproximação para o peso $\omega_{n,k}$, pode ser obtida usando (3.6), ou seja,

$$\omega_{n,k} = \frac{(1 + x_{n,k}^2)^{n-1} d_2 d_3 \cdots d_n M_1}{P_n'(x_{n,k}) P_{n-1}(x_{n,k})}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

ou, equivalentemente, usando (4.4),

$$\omega_{n,k} = \frac{d_2 d_3 \cdots d_n M_1}{Y_n(x_{n,k}) X_{n-1}(x_{n,k})}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.12}$$

Os valores de $Y_n(x_{n,k})$ e $X_{n-1}(x_{n,k})$ encontrados no método de Laguerre, são utilizados em (4.12) no final do estágio da convergência de $x_{n,k}$.

Para encontrar o valor de M_1, podemos ver por, (2.7), que

$$1 - M_1 = \gamma_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x + c_1)P_1(x)}{x^2 + 1}\, d\varphi(x) = 1 - (1 + c_1^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1}\, d\varphi(x).$$

Usando a transformação $z = (x + i)/(x - i)$ e sua inversa $x = i(z + 1)/(z - 1)$, temos $(x^2 + 1) = -4z/(z - 1)^2$. Assim

$$M_1 = (c_1^2 + 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1}\, d\varphi(x) = -\frac{1}{4}(c_1^2 + 1) \int_{\mathbb{T}} \frac{(z - 1)^2}{z}\, d\nu_{\underline{0}}(z),$$

onde $\nu_{\underline{0}}$ definida sobre o círculo unitário é tal que $d\nu_{\underline{0}}((x+i)/(x-i)) = -d\varphi(x)$. Se forem conhecidos os coeficientes de Verblunsky, $\alpha_0(\nu_{\underline{0}})$, associados a medida de probabilidade $\nu_{\underline{0}}$, então, do Teorema 2.3,

$$M_1 = -\frac{1}{4}(c_1^2+1)\left[\int_{\mathbb{T}} z\, d\nu_{\underline{0}}(z) - 2\int_{\mathbb{T}} d\nu_{\underline{0}}(z) + \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{z}\, d\nu_{\underline{0}}(z)\right].$$

Por (1.4), sabemos que

$$\overline{\int_{\mathbb{T}} z\, d\nu_{\underline{0}}(z)} = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{z}\, d\nu_{\underline{0}}(z), \quad z \in \mathbb{T}.$$

Assim, podemos simplificar a expressão de M_1

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{1}{2}(c_1^2+1)\,\mathrm{Re}\left[\int_{\mathbb{T}} z\, d\nu_{\underline{0}}(z) - 1\right] \\ &= -\frac{1}{2}(c_1^2+1)\,\mathrm{Re}\left[\int_{\mathbb{T}} (z - \overline{\alpha_0(\nu_{\underline{0}})} + \overline{\alpha_0(\nu_{\underline{0}})})\, d\nu_{\underline{0}}(z) - 1\right]. \end{aligned}$$

Como $\phi_1(\nu_{\underline{0}}; z) = z - \overline{\alpha_0(\nu_{\underline{0}})}$ pertence à sequência de polinômios ortogonais no círculo unitário $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ com relação a medida de probabilidade $\nu_{\underline{0}}$, segue que

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{1}{2}(c_1^2+1)\,\mathrm{Re}(\overline{\alpha_0(\nu_{\underline{0}})} - 1) \\ &= \frac{1}{2}(c_1^2+1)\,\mathrm{Re}(1 - \alpha_0(\nu_{\underline{0}})). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Por fim, do Teorema 2.3, temos

$$c_1 = -\frac{\mathrm{Im}(\alpha_0(\nu_{\underline{0}}))}{\mathrm{Re}(1-\alpha_0(\nu_{\underline{0}}))} = \frac{\mathrm{Im}(1-\alpha_0(\nu_{\underline{0}}))}{\mathrm{Re}(1-\alpha_0(\nu_{\underline{0}}))} \tag{4.14}$$

e substituindo (4.14) em (4.13) obtemos

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{Re}(1-\alpha_0(\nu_{\underline{0}})))^2 + (\mathrm{Im}(1-\alpha_0(\nu_{\underline{0}})))^2}{\mathrm{Re}(1-\alpha_0(\nu_{\underline{0}}))} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{|1-\alpha_0(\nu_{\underline{0}})|^2}{\mathrm{Re}\,(1-\alpha_0(\nu_{\underline{0}}))}. \end{aligned}$$

É conhecido que o método de Laguerre tem taxa de convergência cúbica quando os zeros são simples, [36], o que é uma grande vantagem. Talvez uma desvantagem do método seria avaliações de raiz quadrada. Para contornar essa desvantagem, fazemos o uso do método da potência inversa com deslocamento juntamente com o método de Laguerre.

4.3.2 Método da potência inversa com deslocamento aplicado ao prolema de autovalor generalizado

O método da potência inversa com deslocamento (MPID) discutido brevemente no Capítulo 1, precisamente na Subseção 1.4.5, é utilizado para determinar autovalores e autovetores de uma matriz sob as condições impostas pelo Teorema 1.14. Utilizamos este método para determinar os autovalores e correspondentes autovetores do problema generalizado (4.3), ou seja, os zeros do polinômio P_n. Como comentamos no Capítulo 1 este método determina o autovalor mais próximo ao deslocamento p.

Lembramos que (4.3) é $\mathbf{A}_n\mathbf{u}_n = x\mathbf{B}_n\mathbf{u}_n$, multiplicando por um parâmetro p e somando e subtraindo $p\mathbf{B}_n\mathbf{u}_n$, obtemos

$$(\mathbf{A}_n - p\mathbf{B}_n)\mathbf{u}_n = (x-p)\mathbf{B}_n\mathbf{u}_n.$$

Sabemos que a matriz $\mathbf{B}_n$ é definida positiva, então

$$\mathbf{B}_n^{-1}(\mathbf{A}_n - p\mathbf{B}_n)\mathbf{u}_n = (x-p)\mathbf{u}_n.$$

Assim, o método da potência inversa com deslocamento pode ser construído como

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}_n - p\mathbf{B}_n)\mathbf{w}_n[j] = \mathbf{B}_n\mathbf{u}_n[j], \\
&\epsilon[j] = \frac{\mathbf{u}_n[j]^H\mathbf{u}_n[j]}{\mathbf{u}_n[j]^H\mathbf{w}_n[j]}, \qquad\qquad j = 0, 1, \ldots, \\
&\mathbf{u}_n[j+1] = \gamma[j]\,\mathbf{w}_n[j],
\end{aligned}$$

onde $\gamma[j]$ são as constantes de normalização. Aqui, vale lembrar que o vetor $\mathbf{u}_n[0]$ é escolhido arbitrariamente. Se p é escolhido próximo suficiente de $x_{n,k}$, mas não igual, então pelas considerações vistas em (1.21), $\{\epsilon[j]\}_{j\geq 0}$, converge para $x_{n,k} - p$. De (2.12), o autovetores são dados por

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_n(x_{n,k}) = [u_{n,0}(x_{n,k}), u_{n,1}(x_{n,k}), \ldots, u_{n,n-1}(x_{n,k})]^T,$$

onde a coordenada $u_{n,0}(x_{n,k}) = P_0(x_{n,k}) = 1$. Vamos considerar

$$\mathbf{u}_n[j] = [u_{n,0}[j], u_{n,1}[j], \ldots, u_{n,n-1}[j]]^T,$$

tal que $u_{n,0}[j] = 1$. Para o vetor

$$\mathbf{w}_n[j] = [w_{n,0}[j], w_{n,1}[j], \ldots, w_{n,n-1}[j]]^T$$

escolhemos a constante de normalização $\gamma[j] = 1/w_{n,0}[j]$. Como mencionamos no Capítulo 1, a sequência $\{\mathbf{u}_n[j]\}_{j\geq 0}$ converge para o vetor $\mathbf{u}_n$. Vimos de (1.24), que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{w_{n,r}[j]}{u_{n,r}[j]} = \frac{1}{x_{n,k}-p},$$

$r = 0, 1, \ldots, n-1$. Em particular para $r = 0$, temos

$$x_{n,k} - p = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{w_{n,0}[j]} = \lim_{j\to\infty} \gamma[j].$$

Portanto, a sequência $\{\gamma[j]\}_{j\geq 0}$ converge para $x_{n,k} - p$.

Para determinar o valor de $\mathbf{w}_n[j]$, usamos o método LU. Observe que a matriz $\mathbf{A}_n$ e os vetores $\mathbf{u}_n(x_{n,k})$ são complexos, e se poderia esperar utilizar aritmética complexa. Mas, pelas fáceis estruturas da matriz $\mathbf{A}_n$, e $\mathbf{B}_n$ podemos operar somente com aritmética real.

Considere $\mathbf{A}_n - p\mathbf{B}_n = \mathbf{L}_n\mathbf{U}_n$, onde

$$\mathbf{L}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{n,0} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_{n,1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{n,n-2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_n = \begin{bmatrix} \mathfrak{r}_{n,0} & t_{n,0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{r}_{n,1} & t_{n,1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{r}_{n,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{r}_{n,n-2} & t_{n,n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{r}_{n,n-1} \end{bmatrix},$$

onde

$$l_{n,m} = l_{n,m}^{(1)} + i\, l_{n,m}^{(2)} \quad \text{e} \quad \mathfrak{t}_{n,m} = \mathfrak{t}_{n,m}^{(1)} + i\, \mathfrak{t}_{n,m}^{(2)},$$

são tais que os elementos $l_{n,m}$ e $t_{n,m}$ são complexos e os elementos $\mathfrak{r}_{n,m}$ são reais. Podemos afirmar o seguinte.

Teorema 4.6. *Os elementos das matrizes* $\mathbf{L}_n$ *e* $\mathbf{U}_n$ *satisfazem*

$$\mathfrak{r}_{n,m} = -\frac{P_{m+1}(p)}{P_m(p)}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\left.\begin{aligned} t_{n,m}^{(1)} &= -p\sqrt{d_{m+2}}, & t_{n,m}^{(2)} &= \sqrt{d_{m+2}}, \\ l_{n,m}^{(1)} &= \frac{t_{n,m}^{(1)}}{\mathfrak{r}_{n,m}}, & l_{n,m}^{(2)} &= \frac{t_{n,m}^{(2)}}{\mathfrak{r}_{n,m}}, \end{aligned}\right. \qquad m = 0, 1, \ldots, n-2.$$

Demonstração: Comparando os elementos de $\mathbf{L}_n\mathbf{U}_n = \mathbf{A}_n - p\mathbf{B}_n$, podemos verificar que $\mathfrak{r}_{n,0} = c_1 - p$,

$$\mathfrak{t}^{(1)}_{n,m} = -p\sqrt{d_{m+2}}, \qquad \mathfrak{t}^{(2)}_{n,m} = \sqrt{d_{m+2}},$$

$$l^{(1)}_{n,m} = -p\sqrt{d_{m+2}}/\mathfrak{r}_{n,m}, \quad l^{(2)}_{n,m} = -\sqrt{d_{m+2}}/\mathfrak{r}_{n,m},$$

$$\mathfrak{r}_{n,m+1} = c_{m+2} - p - (p^2+1)d_{m+2}/\mathfrak{r}_{n,m},$$

para $m = 0, 1, \ldots, n-2$. Pela, relação de recorrência (2.3) verifica-se que $-\mathfrak{r}_{n,m} = P_{m+1}(p)/P_m(p)$, $m \geq 0$.

■

Definimos

$$\widehat{\mathbf{u}}_n[j] = \mathbf{B}_n\mathbf{u}_n[j],\ \mathbf{L}_n\mathbf{v}_n[j] = \widehat{\mathbf{u}}_n[j] \quad \text{e} \quad \mathbf{U}_n\mathbf{w}_n[j] = \mathbf{v}_n[j],$$

onde

$$\mathbf{u}_n[j] = [u^{(1)}_{n,0}[j] + i\,u^{(2)}_{n,0}[j],\ u^{(1)}_{n,1}[j] + i\,u^{(2)}_{n,1}[j], \ldots,\ u^{(1)}_{n,n-1}[j] + i\,u^{(2)}_{n,n-1}[j]]^T,$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_n[j] = [\widehat{u}^{(1)}_{n,0}[j] + i\,\widehat{u}^{(2)}_{n,0}[j],\ \widehat{u}^{(1)}_{n,1}[j] + i\,\widehat{u}^{(2)}_{n,1}[j], \ldots,\ \widehat{u}^{(1)}_{n,n-1}[j] + i\,\widehat{u}^{(2)}_{n,n-1}[j]]^T,$$

$$\mathbf{v}_n[j] = [v^{(1)}_{n,0}[j] + i\,v^{(2)}_{n,0}[j],\ v^{(1)}_{n,1}[j] + i\,v^{(2)}_{n,1}[j], \ldots,\ v^{(1)}_{n,n-1}[j] + i\,v^{(2)}_{n,n-1}[j]]^T,$$

$$\mathbf{w}_n[j] = [w^{(1)}_{n,0}[j] + i\,w^{(2)}_{n,0}[j],\ w^{(1)}_{n,1}[j] + i\,w^{(2)}_{n,1}[j], \ldots,\ w^{(1)}_{n,n-1}[j] + i\,w^{(2)}_{n,n-1}[j]]^T.$$

Então encontramos

$$\widehat{u}^{(1)}_{n,0}[j] = u^{(1)}_{n,0}[j] + \sqrt{d_2}\,u^{(1)}_{n,1}[j], \quad \widehat{u}^{(2)}_{n,0}[j] = u^{(2)}_{n,0}[j] + \sqrt{d_2}\,u^{(2)}_{n,1}[j],$$

$$\left.\begin{aligned} \widehat{u}^{(1)}_{n,m}[j] &= \sqrt{d_{m+1}}\,u^{(1)}_{n,m-1}[j] + u^{(1)}_{n,m}[j] + \sqrt{d_{m+2}}\,u^{(1)}_{n,m+1}[j], \\ \widehat{u}^{(2)}_{n,m}[j] &= \sqrt{d_{m+1}}\,u^{(2)}_{n,m-1}[j] + u^{(2)}_{n,m}[j] + \sqrt{d_{m+2}}\,u^{(2)}_{n,m+1}[j], \end{aligned}\right\} \quad m = 1, 2, \ldots, n-2,$$

$$\widehat{u}^{(1)}_{n,n-1}[j] = \sqrt{d_n}\,u^{(1)}_{n,n-2}[j] + u^{(1)}_{n,n-1}[j], \quad \widehat{u}^{(2)}_{n,n-1}[j] = \sqrt{d_n}\,u^{(2)}_{n,n-2}[j] + u^{(2)}_{n,n-1}[j];$$

$$v^{(1)}_{n,0}[j] = \widehat{u}^{(1)}_{n,0}[j], \quad v^{(2)}_{n,0}[j] = \widehat{u}^{(2)}_{n,0}[j],$$

$$\left.\begin{aligned} v^{(1)}_{n,m}[j] &= \widehat{u}^{(1)}_{n,m}[j] - l^{(1)}_{n,m-1}v^{(1)}_{n,m-1}[j] + l^{(2)}_{n,m-1}v^{(2)}_{n,m-1}[j], \\ v^{(2)}_{n,m}[j] &= \widehat{u}^{(2)}_{n,m}[j] - l^{(2)}_{n,m-1}v^{(1)}_{n,m-1}[j] - l^{(1)}_{n,m-1}v^{(2)}_{n,m-1}[j], \end{aligned}\right\} \quad m = 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$w^{(1)}_{n,n-1}[j] = v^{(1)}_{n,n-1}[j]/\mathfrak{r}_{n,n-1}, \quad w^{(2)}_{n,n-1}[j] = v^{(2)}_{n,n-1}[j]/\mathfrak{r}_{n,n-1},$$

$$\begin{aligned} w^{(1)}_{n,m}[j] &= (v^{(1)}_{n,m}[j] - \mathfrak{t}^{(1)}_{n,m} w^{(1)}_{n,m+1}[j] + \mathfrak{t}^{(2)}_{n,m} w^{(2)}_{n,m+1}[j])/\mathfrak{r}_{n,m}, \\ w^{(2)}_{n,m}[j] &= (v^{(2)}_{n,m}[j] - \mathfrak{t}^{(2)}_{n,m} w^{(1)}_{n,m+1}[j] - \mathfrak{t}^{(1)}_{n,m} w^{(2)}_{n,m+1}[j])/\mathfrak{r}_{n,m}, \end{aligned} \quad m = n-2, n-3, \ldots, 0.$$

Finalmente, $u^{(1)}_{n,0}[j+1] = 1$, $u^{(2)}_{n,0}[j+1] = 0$ e

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\gamma[j]) &= (w^{(1)}_{n,0}[j])/((w^{(1)}_{n,0}[j])^2 + (w^{(2)}_{n,0}[j])^2), \\ u^{(1)}_{n,m}[j+1] &= (w^{(1)}_{n,m}[j] w^{(1)}_{n,0}[j] + w^{(2)}_{n,m}[j] w^{(2)}_{n,0}[j])/((w^{(1)}_{n,0}[j])^2 + (w^{(2)}_{n,0}[j])^2), \\ u^{(2)}_{n,m}[j+1] &= (w^{(2)}_{n,m}[j] w^{(1)}_{n,0}[j] - w^{(1)}_{n,m}[j] w^{(2)}_{n,0}[j])/((w^{(1)}_{n,0}[j])^2 + (w^{(2)}_{n,0}[j])^2), \end{aligned}$$

para $m = 1, 2, \ldots, n-1$.

Como os autovalores são reais e distintos, do Teorema 3.7, temos

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{Re}(\gamma[j]) = x_{n,k} - p \quad \text{e} \quad \lim_{j\to\infty} \frac{M_1}{\mathbf{u}_n[j]^H \widehat{\mathbf{u}}_n[j]} = \omega_{n,k}.$$

A convergência deste método é linear, diferentemente do método de Laguerre que tem convergência cúbica. Assim, quanto mais próximo o valor de p ao zero $x_{n,k}$ mais rápida será a convergência. No entanto, p não pode ser muito próximo de $x_{n,k}$, pois neste caso o sistema linear cuja matriz é $\mathbf{A}_n - p\mathbf{B}_n$ torna-se mal condicionado.

4.4 Exemplo numérico

Os exemplos numéricos que apresentamos aqui, foram obtidos utilizando-se linguagem de programação *Python* e considerando precisão dupla.

Exemplo 4.1. *Consideramos a avaliação numérica dos nós e pesos das fórmulas de quadratura dadas no Capítulo 3 com a sequência real* $\{c_n\}_{n\geq 1}$ *e a sequência encadeada* $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$, *tais que* $c_n = 0$, $n \geq 1$ *e* $d_{n+1} = 1/4$, $n \geq 1$.

Vimos pelo Exemplo 3.2, que a medida de probabilidade ν_0, associada ao par de sequência $\{c_n\}_{n\geq 1}$ e $\{d_{n+1}\}_{n\geq 1}$ deste exemplo, é a medida de Lebesgue. Temos

$$d\varphi(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(x) = 1.$$

Este é um exemplo interessante, pois os nós $x_{n,k}$ e os pesos $\omega_{n,k}$ são dados explicitamente no Exemplo 3.1 e assim podemos fazer a comparação com as aproximações obtidas pelos métodos numéricos.

Apresentamos, na Tabela 4.1 avaliações numéricas de 15 nós da fórmula de quadratura do Teorema 3.1, ou seja, os zeros de P_{15}, utilizando o método de Laguerre, com precisão 10^{-10}, ou seja, $|y_j - y_{j-1}| < 10^{-10}$. Neste caso os zeros são simétricos com relação a origem, por isso os resultados apresentados na Tabela 4.1 são apenas os zeros positivos. Sabemos ainda que $x_{15,8} = 0$, então o primeiro zero positivo é $x_{15,7}$. Assim, a aproximação inicial que utilizamos foi $y_0 = 0.1$. Para determinar os demais zeros, $x_{15,k}$, $k = 6, 5, 4, \ldots, 1$ a aproximação inicial foi a equação (4.10), com $\delta = 1$, ou seja,

$$y_0 = x_{n,k+1} + (x_{n,k+1} - x_{n,k+2}), \quad k = 6, 5, \ldots, 1. \tag{4.15}$$

	y_0	j	y_j	zeros com 14 c.d.
$x_{15,7}$	0.10000	5	0.1989123673	0.19891236737966
$x_{15,6}$	0.39782	3	0.4142135623	0.41421356237310
$x_{15,5}$	0.62951	4	0.6681786379	0.66817863791930
$x_{15,4}$	0.92214	4	1.0000000000	1.00000000000000
$x_{15,3}$	1.33182	4	1.4966057626	1.49660576266549
$x_{15,2}$	1.99321	4	2.4142135623	2.41421356237309
$x_{15,1}$	3.33182	5	5.0273394921	5.02733949212585

Tabela 4.1: Zeros positivos usando o ML para o Exemplo 4.1, com $n = 15$, onde j é o número de iterações para a precisão 10^{-10}.

Na coluna 4 da Tabela 4.1 estão os valores aproximados dos zeros obtidos pelo método de Laguerre, que podem ser comparados com os valores exatos com 14 casas decimais na coluna 5.

A Tabela 4.2, traz resultados sobre aproximações ainda para o Exemplo 4.1, mas utilizando a combinação de ML com MPID. Primeiramente utilizamos o ML para aproximar um zero $x_{n,k}$ com precisão de 10^{-2} e consideramos o valor p sendo esta aproximação para utilizar no MPID. Usamos a notação ML-MPID, quando nos referirmos a esta combinação dos dois métodos. As aproximações iniciais, y_0, para o ML são como em (4.15). No caso da aproximação inicial para MPID, tomamos $\mathbf{u}_n[0] = (1, 0, \ldots, 0)^T$.

	y_0	j	k	y_k	zeros com 14 c.d
$x_{15,7}$	0.10000	3	3	0.1989123673	0.19891236737966
$x_{15,6}$	0.39782	2	3	0.4142135623	0.41421356237310
$x_{15,5}$	0.62951	2	3	0.6681786379	0.66817863791930
$x_{15,4}$	0.92214	2	3	1.0000000000	1.00000000000000
$x_{15,3}$	1.33182	3	1	1.4966057626	1.49660576266549
$x_{15,2}$	1.99321	3	3	2.4142135623	2.41421356237309
$x_{15,1}$	3.33182	4	1	5.0273394921	5.02733949212585

Tabela 4.2: Zeros positivos usando ML-MPID para o Exemplo 4.1 com $n = 15$, onde j é o número de iterações de ML com precisão 10^{-2} e k é o número de iterações de MPID com precisão de 10^{-10} e $\mathbf{u}_n[0] = (1, 0, \ldots, 0)^T$.

Para o mesmo exemplo, se utilizarmos o vetor inicial no MPID da forma $\mathbf{u}_n[0] = (1, u_{n,1}(p), \ldots, u_{n,n-1}(p))$, onde

$$u_{n,k}(p) = \frac{(-1)^k P_k(p)}{(p-i)^k \prod_{j=1}^{k} \sqrt{d_{j+1}}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{4.16}$$

podemos ver algumas melhorias na convergência de MPID.

	y_0	j	k	y_k	zeros com 14 c.d.
$x_{15,7}$	0.10000	3	2	0.1989123674	0.19891236737966
$x_{15,6}$	0.39782	2	1	0.4142135624	0.41421356237310
$x_{15,5}$	0.62951	2	2	0.6681786379	0.66817863791930
$x_{15,4}$	0.92214	2	3	1.0000000000	1.00000000000000
$x_{15,3}$	1.33182	3	1	1.4966057627	1.49660576266549
$x_{15,2}$	1.99321	3	1	2.4142135624	2.41421356237309
$x_{15,1}$	3.33182	4	1	5.0273394921	5.02733949212585

Tabela 4.3: Zeros positivos usando ML-MPID para o Exemplo 4.1 com $n = 15$, onde j é o número de iterações de ML com precisão 10^{-2} e k é o número de iterações de MPID com precisão de 10^{-10} e $\mathbf{u}_n[0]$ dado em (4.16).

Exemplo 4.2. *Consideramos os nós e os pesos da regra de quadratura dada pelo Teorema 3.1, onde o polinômio envolvido satisfaz a relação de recorrência* (2.3)*, com*

$$c_n = c_n^{(b)} = \frac{\eta}{\lambda + n}, \quad d_{n+1} = d_{n+1}^{(b)} = \frac{1}{4}\frac{n(n+2\lambda+1)}{(n+\lambda)(n+\lambda+1)}, \quad n \geq 1,$$

e $\eta \in \mathbb{R}$ e $\lambda > -1/2$.

Os polinômios $\{P_n\}_{n\geq 0} = \{P_n^{(b)}\}_{n\geq 0}$ são conhecidos como Polinômios de Romanovski-Routh, veja por exemplo, [24]. Eles satisfazem a ortogonalidade dada por (2.7), com

$$d\varphi(x) = d\varphi^{(b)}(x) = \frac{e^{\pi\,\mathrm{Im}(b)}}{2\pi}\frac{2^{b+\bar{b}+1}|\Gamma(b+1)|^2}{\Gamma(b+\bar{b}+1)}\frac{(e^{-\operatorname{arccot} x})^{2\,\mathrm{Im}(b)}}{(x^2+1)^{\mathrm{Re}(b)+1}}dx, \tag{4.17}$$

onde $b = \lambda + i\eta$. As medidas de probabilidade no círculo unitário obtidas como no Teorema 2.1 são

$$d\nu_{\underline{0}}(e^{i\theta}) = d\nu^{(b)}(e^{i\theta}) = \tfrac{2^{b+\bar{b}}|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)}e^{(\pi-\theta)\,\mathrm{Im}(b)}[sin^2(\theta/2)]^{\mathrm{Re}(b)}d\theta,$$

$$d\mu(e^{i\theta}) = d\nu^{(b+1)}(e^{i\theta}).$$

Neste caso, podemos escrever de formas equivalentes, como foi feito em [27]

$$d\nu_{\underline{0}}(z) = d\nu^{(b)}(z) = \tau(b)z^{-(\bar{b}+1)}(z-1)^{2\,\mathrm{Re}(b)}dz \quad \text{e} \quad d\mu(z) = d\nu^{(b+1)}(z), \tag{4.18}$$

onde

$$\tau(b) = \frac{|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi i\Gamma(b+\bar{b}+1)}\frac{e^{\pi\,\mathrm{Im}(b)}}{(-1)^{\mathrm{Re}(b)}}. \tag{4.19}$$

As sequências $\{\ell_{n+1}^{(b)}\}_{n\geq 0}$ e $\{M_{n+1}^{(b)}\}_{n\geq 0}$ minimal e maximal de parâmetros, respectivamente, da sequência encadeada $\{d_{n+1}^{(b)}\}_{n\geq 1}$ são tais que

$$\ell_{n+1}^{(b)} = \frac{n}{2(n+\lambda+1)} \quad \text{e} \quad M_{n+1}^{(b)} = \frac{n+2\lambda+1}{2(n+\lambda+1)}, \quad n \geq 0.$$

Para a medida $\nu_{\underline{0}} = \nu^{(b)}$, se considerarmos a fórmula de quadratura no círculo unitário $(n+1)$-pontos (3.9), temos para $\mathcal{F} \in span\{z^{-n}, z^{-n+1}, \ldots, z^{n-1}, z^n\}$,

$$\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(z)\, d\nu^{(b)}(z) = \widehat{\lambda}_{n+1,n+1}^{(b)}\,\mathcal{F}(1) + \sum_{k=1}^{n}\omega_{n,k}^{(b)}\,\mathcal{F}(z_{n,k}^{(b)}), \tag{4.20}$$

onde $z_{n,k}^{(b)} = (x_{n,k}+i)/(x_{n,k}-i)$ e

$$\widehat{\lambda}_{n+1,n+1}^{(b)} = \frac{(1-M_1^{(b)})(1-M_2^{(b)})\cdots(1-M_n^{(b)})}{(1-\ell_1^{(b)})(1-\ell_2^{(b)})\cdots(1-\ell_n^{(b)})}. \tag{4.21}$$

Como

$$\frac{1-M_k}{1-\ell_k} = \frac{n}{n+2\lambda+1},$$

então (4.21) torna-se

$$\widehat{\lambda}_{n+1,n+1}^{(b)} = \frac{n!}{(2\lambda+2)_n},$$

onde $(2\lambda+2)_n = (2\lambda+2)(2\lambda+3)\cdots(2\lambda+n+1)$. Denotamos aqui por $x_{n,k}^{(b)}$ os zeros de $P_n^{(b)}$ e $\omega_{n,k}^{(b)}$ os nós e pesos da regra de quadratura dada pelo Teorema 3.1 com $\varphi = \varphi^{(b)}$ dado por (4.17).

Nas Tabelas 4.4 e 4.5 são apresentadas as aproximações para os nós e pesos deste exemplo. Na Tabela 4.4 é usado o ML e na Tabela 4.5 usamos ML-MPID. Em ambas as tabelas consideramos $n = 8$ e $b = 2.5 + i2.0$ e pelo Teorema de Sturm (Teorema 4.5) foi constado 3 zeros negativos e 5 positivos. Para ambas as tabelas a aproximação inicial em ML para determinar o zero positivo $x_{n,5}$ e o zero negativo $x_{n,6}$ foi $y_0 = 0.0$, para $x_{n,4}$, foi $y_0 = 0.3$ e para $x_{n,7}$ utilizamos $y_0 = -0.2$ (tais escolhas foram intuitivas e asseguradas pelo Teorema de Sturm que nenhum zero foi "perdido"). Nas aproximações iniciais para os demais zeros utilizamos (4.10) e (4.11), com $\delta = 1$. O vetor inicial, utilizado no MPID, foi $\mathbf{u}_n[0] = (1, u_{n,1}(p), \ldots, u_{n,n-1}(p))$, onde $u_{n,k}(p)$ é como em (4.16).

k	y_0	j	$x_{8,k}^{(b)}$	$\omega_{8,k}^{(b)}$
8	-0.71588	4	-0.860951902	0.001435559
7	-0.20000	4	-0.395455713	0.013120781
6	0.00000	4	-0.075029910	0.057779655
5	0.00000	6	0.211994598	0.155038062
4	0.30000	3	0.519849212	0.268406695
3	0.82770	4	0.909786866	0.291154810
2	1.29972	4	1.509028782	0.173690345
1	2.10827	4	2.752206638	0.039041093

Tabela 4.4: Nós e pesos com $n = 8$ e $b = 2.5 + i2.0$, onde y_0 é a aproximação inicial para os respectivos zeros e j é o número de iterações de ML com precisão 10^{-10}.

k	y_0	j	r	$x_{8,k}^{(b)}$	$\omega_{8,k}^{(b)}$
8	-0.71588	2	3	-0.860951902	0.001435559
7	-0.20000	3	1	-0.395455713	0.013120781
6	0.00000	2	3	-0.075029910	0.057779655
5	0.00000	4	2	0.211994598	0.155038062
4	0.30000	1	3	0.519849212	0.268406695
3	0.82770	2	3	0.909786866	0.291154810
2	1.29972	3	1	1.509028782	0.173690345
1	2.10827	3	1	2.752206638	0.039041093

Tabela 4.5: Nós e pesos com $n = 8$ e $b = 2.5 + i2.0$, onde y_0 é a aproximação inicial para os respectivos zeros utilizando ML-MPID, onde j é o número de iterações de ML com precisão 10^{-2} e r é o número de iterações de MPID com precisão de 10^{-10} e $\mathbf{u}_n[0]$ como em (4.16).

Embora o MPID seja um método interessante e simples, podemos comparar o número de iterações obtidas com a mesma precisão nas tabelas que utiliza o ML com os das tabelas que utiliza o ML-MPID. Não se observa vantagens significativas em utilizar ML-MPID em termos da convergência sobre o ML. Por isso, nas próximas aproximações faremos somente o uso do Método de Laguerre.

Na Tabela 4.6 é mostrada as aproximações para os nós e pesos deste exemplo usando somente o ML para $n = 15$ e $b = 2.5 + i2.0$. Pelo Teorema de Sturm é garantido que $P_n^{(b)}$ possui 9 zeros positivos e 6 zeros negativos. A aproximação inicial no ML para determinar o zero positivo $x_{n,9}$ e o zero negativo $x_{n,10}$ foi $y_0 = 0.0$, para $x_{n,8}$, foi $y_0 = 0.15$ e para $x_{n,11}$ utilizamos $y_0 = -0.15$ (novamente, tais escolhas foram intuitivas e asseguradas pelo Teorema de Sturm que nenhum zero foi "perdido"). Nas aproximações iniciais para os demais zeros utilizamos (4.10) e (4.11), com $\delta = 1$.

k	y_0	j	$x_{15,k}^{(b)}$	$\omega_{15,k}^{(b)}$
15	-1.41686	4	-1.672044257	0.000036057
14	-0.96894	4	-1.066959532	0.000311365
13	-0.67016	4	-0.717060414	0.001519919
12	-0.44218	4	-0.465177200	0.005341485
11	-0.15000	4	-0.260191665	0.014845009
10	0.00000	5	-0.078205917	0.034128298
9	0.00000	5	0.095146340	0.066361078
8	0.15000	4	0.270925228	0.110088169
7	0.44670	3	0.460151608	0.155554797
6	0.64938	4	0.676720369	0.185015149
5	0.89329	4	0.941766842	0.180719442
4	1.20681	4	1.292753697	0.138672540
3	1.64374	4	1.807020312	0.077127555
2	2.32129	4	2.679413438	0.026491638
1	3.55181	4	4.607169720	0.003769069

Tabela 4.6: Nós e pesos com $n = 15$ e $b = 2.5 + i2.0$, onde y_0 é a aproximação inicial para o respectivo zero e j é o número de iterações do ML com precisão 10^{-10}.

k	y_0	j	$x_{8,k}^{(b)}$	$\omega_{8,k}^{(b)}$
8	-0.71475	4	-0.866362671	0.001409047
7	-0.20000	4	-0.385089950	0.011285827
6	0.00000	4	-0.055426036	0.047818577
5	0.00000	6	0.242186897	0.131133033
4	0.30000	3	0.567035907	0.243675010
3	0.89188	4	0.990130503	0.296947815
2	1.41323	4	1.668212121	0.208595193
1	2.34629	4	3.172646563	0.058358497

Tabela 4.7: Nós e pesos $n = 8$ e $b = 2.0 + i2.0$, onde y_0 é a aproximação inicial para o respectivo zero e j é o número de iterações do ML com precisão 10^{-10}.

De maneira análoga nas Tabelas 4.7 e 4.8 obtemos as aproximações para os nós e pesos com $n = 8$, $n = 15$ e $b = 2.0 + i2.0$. Pelo Teorema de Sturm $P_8^{(b)}$ possuí 5 zeros positivos e 3 zeros negativos e $P_{15}^{(b)}$ possuí 9 zeros positivos e 6 zeros negativos.

k	y_0	j	$x_{15,k}^{(b)}$	$\omega_{15,k}^{(b)}$
15	−1.43682	4	−1.709139557	0.000047582
14	−0.97423	4	−1.076874551	0.000329605
13	−0.66851	4	−0.716927042	0.001407835
12	−0.43632	4	−0.459623282	0.004551300
11	−0.15000	4	−0.250739572	0.012058883
10	0.00000	4	−0.065156395	0.027196733
9	0.00000	5	0.112221377	0.053180697
8	0.15000	4	0.293142015	0.090767684
7	0.47406	3	0.489563410	0.134906482
6	0.68598	4	0.716961300	0.172611607
5	0.94436	4	0.999518459	0.185747261
4	1.28208	4	1.381314327	0.161215301
3	1.76311	4	1.956293085	0.104560922
2	2.53127	4	2.970861856	0.043473255
1	3.98543	4	5.358584571	0.007880354

Tabela 4.8: Nós e pesos para $n = 15$ e $b = 2.0 + i2.0$, onde y_0 é a aproximação inicial para o respectivo zero e j é o número de iterações do ML com precisão 10^{-10}.

Os resultados encontrados nestas tabelas são usados na Subseção 4.4.1 para aproximar os valores de algumas integrais.

4.4.1 Aplicações das fórmulas de quadratura

Apresentamos agora algumas aplicações das fórmulas de quadratura, utilizando os valores dados na seção anterior. Nas aproximações apresentadas aqui, também utilizamos a linguagem de programação *Python*. Para comparação obtivemos valores exatos das integrais, com 13 dígitos significativos utilizando o *software Maple*.

Exemplo 4.3. *Considere a integral* $I = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + 1)^{-8} e^{-x^2} dx$.

Neste caso vamos considerar a fórmula de quadratura do Exemplo 4.1, onde os pesos são $\omega_{n,k} = 1/(n+1)$.

O valor exato desta integral para 13 dígitos significativos é 0.6133229495946.

Consideramos também a fórmula de quadratura de Hermite, que para a aproximação de I é dada por

$$GH_n = \sum_{k=1}^{n} \hat{\omega}_{n,k} \frac{1}{(\hat{x}_{n,k}^2 + 1)^8}.$$

Os nós e pesos da fórmula de quadratura de Hermite, são muito bem conhecidos e encontram-se tabelados em [22]. É razoável esperar que GH_n convirja rapidamente para I, mas os resultados obtidos nas colunas 4 e 5 da Tabela 4.9 não são satisfatórios.

A fórmula de quadratura do Teorema 3.1, pode também ser considerada fazendo a seguinte adequação

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(x^2+1)^{-7} e^{-x^2} \frac{1}{\pi(x^2+1)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(x^2+1)^{-7} e^{-x^2} d\varphi(x)$$

com $d\varphi(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}dx$ e, então, utilizamos a soma

$$I_n = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (x_{n,k}^2 + 1)^{-7} e^{-x_{n,k}^2}$$

para estimar o valor da integral I. Os valores de $x_{n,k}$ são dados no Exemplo 3.1 e os resultados encontrados para a aproximação de I são dados na coluna 2, da Tabela 4.9 e na coluna 3 podemos encontrar o erro apresentado na aproximação.

Observe que $(x^2+1)^n f(x) = \pi(x^2+1)^{n-7} e^{-x^2} \notin \mathbb{P}_{2n-1}$, porém a soma da quadratura I_n converge rapidamente para I.

n	I_n	$\lvert I - I_n \rvert$	GH_n	$\lvert I - GH_n \rvert$
6	0.61228678065306	$1.0e-03$	0.36007906855948	$2.5e-01$
10	0.61332311526782	$1.6e-07$	0.50344321854055	$1.0e-01$
12	0.61332296550298	$1.5e-08$	0.53991060640781	$7.3e-02$
15	0.61332294881837	$7.7e-10$	0.65430343845086	$4.0e-02$

Tabela 4.9: Aplicação das fórmulas de quadratura de Gauss-Hemite e das fórmulas de quadratura (3.2) consideradas no Exemplo 4.3.

Exemplo 4.4. *Considere as integrais* $\int_{\mathbb{T}} g_1(z)dz$ *e* $\int_{\mathbb{T}} g_2(z)dz$*, onde*

$$g_1(z) = \sin(z)\, z^{-2.5+i2.0} \frac{(z-1)^5}{4-z} \quad e \quad g_2(z) = \sin(z)\, z^{-2.0+i2.0} \frac{(z-1)^5}{4-z}.$$

Os valores exatos com 14 casas decimais das integrais acima são dados por

$$S_1 = \int_{\mathbb{T}} g_1(z)dz \approx (3.52677323641868 + i\,2.86020606590488) \times 10^{-2}$$

e

$$S_2 = \int_{\mathbb{T}} g_2(z)dz \approx (0.33606707423377 + i\,2.80064202619193) \times 10^{-2}.$$

Agora, consideramos as avaliações numéricas das integrais acima com o uso da fórmula de quadratura $(n+1)$-pontos (3.21). Veja que

$$S_1 = \int_{\mathbb{T}} g_1(z)dz = \frac{1}{\tau(2.5+i2.0)} \int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}_1(z)\, d\nu^{(2.5+i2.0)}(z)$$

e

$$S_2 = \int_{\mathbb{T}} g_2(z)dz = \frac{1}{\tau(2.5+i2.0)} \int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}_2(z)\, d\nu^{(2.5+i2.0)}(z),$$

onde $\nu^{(2.5+i2.0)}$ e $\tau(2.5+i2.0)$ são como em (4.18) e (4.19), respectivamente, e

$$\mathcal{F}_1(z) = \frac{z\sin(z)}{4-z} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_2(z) = \frac{z^{1.5}\sin(z)}{4-z}.$$

Assim, podemos estimar as integrais $\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}_1(z)\, d\nu^{(2.5+i2.0)}(z)$ e $\int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}_2(z)\, d\nu^{(2.5+i2.0)}(z)$, usando os nós e pesos obtidos nas Tabelas 4.4 e 4.6. Obtemos, pelo *software Maple*, o valor exato com 14 casas decimais de

$$\tau(2.5+i2.0) \approx -2.26887229599887.$$

Os resultados obtidos com a fórmula de quadratura $(8+1)$-pontos e $(15+1)$-pontos, dados por (4.20), estão nas Tabelas 4.10 e 4.11.

$(n+1)$	aproximação para S_1	erro absoluto
$(8+1)$	$3.52677470437557e-02 + i2.86021897172897e-02$	$1.3e-07$
$(15+1)$	$3.52677323654955e-02 + i2.86020606599670e-02$	$1.6e-12$

Tabela 4.10: Aplicação das fórmulas de quadratura $(n+1)$-pontos em $\frac{1}{\tau(2.5+i2.0)} \int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}_1(z)\, d\nu^{(2.5+i2.0)}(z)$.

$(n+1)$	aproximação para S_2	erro absoluto
$(8+1)$	$3.36088971644750e-03 + i2.80129450967408e-02$	$6.5e-06$
$(15+1)$	$3.36059488687229e-03 + i2.80065722184178e-02$	$1.7e-07$

Tabela 4.11: Aplicação das fórmulas de quadratura $(n+1)$-pontos em $\frac{1}{\tau(2.5+i2.0)} \int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}_2(z)\, d\nu^{(2.5+i2.0)}(z)$.

Observamos que resultados obtidos para S_2 não são muito satisfatórios. Acreditamos que isto é devido à componente $z^{1/2}$ em $\mathcal{F}_2$. Podemos contornar este caso considerando

$$S_2 = \int_{\mathbb{T}} g_2(z)dz = \frac{1}{\tau(2.0+i2.0)} \int_{\mathbb{T}} \hat{\mathcal{F}}_2(z)\, d\nu^{(2.0+i2.0)}(z),$$

onde

$$\hat{\mathcal{F}}_2(z) = (z-1)\frac{z\sin(z)}{4-z}.$$

Assim, podemos estimar o valor da integral $\frac{1}{\tau(2.0+i2.0)} \int_{\mathbb{T}} \hat{\mathcal{F}}_2(z)\, d\nu^{(2.0+i2.0)}(z)$, dado na Tabela 4.12, usando os nós e pesos obtidos nas Tabelas 4.7 e 4.8. A convergência é muito interessante.

$(n+1)$	aproximação para S_2	erro absoluto
$(8+1)$	$3.36106005666877e-03 + i2.80065917218239e-02$	$4.3e-07$
$(15+1)$	$3.36067074166006e-03 + i2.80064202570487e-02$	$4.9e-12$

Tabela 4.12: Aplicação das fórmulas de quadratura $(n+1)$-pontos em $\frac{1}{\tau(2.0+i2.0)} \int_{\mathbb{T}} \hat{\mathcal{F}}_2(z)\, d\nu^{(2.0+i2.0)}(z)$.

Considerações Finais

Como mencionamos, as fórmulas de quadratura no círculo unitário foram primeiro estudadas em [21]. No Capítulo 3, apresentamos as fórmulas de quadratura associadas aos polinômios que satisfazem uma relação do tipo R_{II}, e fizemos o estudo dos polinômios associados, Q_n, que foram importantes para a determinação de forma fácil, dos pesos, $\omega_{n,k}$, dados no Teorema 3.7. Os resultados dos Teoremas 2.2 e 2.3 foram essênciais para obter as fórmulas especiais de quadratura no círculo unitário. São casos especiais de fórmulas de quadraturas no círculo unitário, pois as fórmulas de quadratura $n-$pontos, (3.18), estão associadas aos polinômios para-ortogonal

$$\Psi_n(\mu; -\tau_n, z) = const_1 \times R_n(z), \quad n \geq 1$$

e no caso das fórmulas de quadratura $(n+1)$-pontos, (3.21), os polinômios para-ortogonal associados são

$$\Psi_{n+1}(\nu_{\underline{\epsilon}}; \tau_n, z) = const_2 \times (z-1)R_n(z), \quad n \geq 1.$$

Para o cálculo aproximado de integrais utilizando fórmulas de quadratura é necessário conhecer seus nós e seus pesos explicitamente. No caso da quadratura associada aos polinômios P_n, os nós são os zeros deste polinômio e com uma simples transformação $z = (x+i)/(x-i)$ obtemos os zeros dos polinômios R_n, que são os nós das fórmulas de quadratura no círculo unitário. No caso da fórmula de quadratura n-pontos (3.18), os pesos são facilmente obtidos, devido a sua simples relação com os pesos $\omega_{n,j}$. Já para a fórmula de quadratura $(n+1)$-pontos (3.21) não há necessidade do cálculo dos pesos, se forem conhecidos $\omega_{n,j}$, pois eles são os mesmos a menos de um peso.

Para determinação dos nós e pesos destas fórmulas de quadraturas, adaptamos métodos numéricos, tais como, o método de Laguerre(ML) e o método da potência inversa com deslocamento(MPID) para encontrar os zeros de P_n. Utilizando apenas o ML é possível determinar todos os nós de (3.2) com a precisão pedida e com taxa de convergência cúbica, pois os zeros são simples, mas uma desvantagem do método é a necessidade de avaliações de raízes quadradas. Assim, pela simplicidade do método da potência inversa com deslocamento e por sua elegância também adaptamos uma forma de encontrar $x_{n,j}$ e $\omega_{n,j}$. E também, fizemos uma combinação de ML e MPID.

Comparando o número de iterações dos resultados obtidos utilizando o ML com os resultados obtidos com ML-MPID, não foi observado vantagens significativas em termo da convergência sobre o método ML.

Há muito para investigar ainda sobre os polinômios que satisfazem uma relação de recorrência do tipo R_{II}. Por exemplo, defini-los a partir de momentos e determinantes tipo Hankel, como no caso dos polinômios ortogonais na reta.

Outra questão interessante sobre os polinômios P_n : é possível construir medidas na reta real a partir dos zeros do polinômio P_n, análogo ao que é feito para polinômios ortogonais na reta real? Isto requer determinar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n(x)}{P_n(x)}.$$

Uma última questão: no Exemplo 3.2 temos $\omega_{n,j} = 1/(n+1)$, e por (3.33) considerando $\mathcal{F}(z) = 1$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \omega_{n,j} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

No Exemplo 4.2, pode-se observar este fato novamente, pois pela fórmula de quadratura (4.20) considerando $\mathcal{F}(z) = 1$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \omega_{n,j}^{(b)} = 1,$$

onde $\omega_{n,j}^{(b)} = \omega_{n,j}$. Isto nos leva a perguntar, se no caso geral, é possível afirmar que o limite da soma dos pesos $\omega_{n,j}$ é igual um quando $n \to \infty$. Este resultado também é equivalente a mostrar que $\widehat{\lambda}_{n+1,n+1}$ em (3.30) satisfaz $\lim_{n\to\infty} \widehat{\lambda}_{n+1,n+1} = 0$.

Esses são alguns dos questionamentos que foram levantados e que ficaram para estudos futuros.

Referências Bibliográficas

[1] G.S. Ammar, D. Calvetti, L. Reichel, Continuation methods for the computation of zeros of Szegő polynomials, *Linear Algebra Appl.*, 249 (1996), 125-155.

[2] G.S. Ammar, W. Gragg, L. Reichel, Constructing a unitary Hessenberg matrix from spectral data, *Numerical Linear Algebra, Digital Signal Processing and Parallel Algorithms*, 70 (1988), 385-395.

[3] A. Bultheel, M.J. Cantero, R. Cruz-Barroso, Matrix methods for quadrature formulas on the unit circle. A survey, *J. Comput. Appl. Math.*, 284 (2015), 78-100.

[4] R.G. Bartle, *Elementos de Análise Real*, Ed. Campus, Rio de Janeiro, 1983.

[5] C. F. Bracciali, J. A. Pereira, A. Sri Ranga, Quadrature rules from a R_{II} type recurrence relation and associated quadrature rules on the unit circle, *arxiv: 1811.10985v1.*, submetido.

[6] C.F. Bracciali, J.S. Silva, A. Sri Ranga, Explicit formulas for OPUC and POPUC associated with measures which are simple modifications of the Lebesgue measure, *Appl. Math. Comput.*, 271 (2015), 820-831.

[7] C. F. Bracciali, A. P. Silva, A. Sri Ranga, Szegő polynomials: some relations to L-orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.*, 153 (2003), 79-88.

[8] C. F. Bracciali, A. Sri Ranga, A. Swaminathan, Para-orthogonal polynomials on the unit circle satisfying three term recurrence formulas, *Appl. Numer. Math.*, 109 (2016), 19-40.

[9] R. Bressan, S. F. Menegasso, A. Sri Ranga, Szegő polynomials: quadrature rules on the unit circle and on [-1,1], *Rocky Mountain J. Math.*, 33 (2003), 567-584.

[10] M.J. Cantero, R. Cruz-Barroso, P. González-Vera, A matrix approach to the computation of quadrature formulas on the unit circle, *Appl. Numer. Math.*, 58 (2008), 296-318.

[11] M.J. Cantero, L. Moral, L. Velázquez, Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials on the unit unit circle, *Linear Algebra Appl.*, 362 (2003), 29-56.

[12] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Application Series, Gordon and Breach, New York, 1978.

[13] M.S. Costa, H.M. Felix, A. Sri Ranga, Orthogonal polynomials on the unit circle and chain sequences. *J. Approx. Theory*, 173 (2013), 14-32.

[14] G.H. Golub, C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, Vol. 3, JHU Press, Baltimore, 2012.

[15] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis, Rev.*, Vol. 2, John Wiley & Sons, New York, 1977.

[16] R.A. Horn, C.A. Johnson *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

[17] W. Gautschi, On generating orthogonal polynomials, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 3 (1982), 289-317.

[18] M.E.H. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in one Variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge Univ. Press, vol. 98, Cambridge, 2005.

[19] M.E.H. Ismail, D.R. Masson, Generalized orthogonality and continued fractions, *J. Approx. Theory*, 83 (1995), 1-40.

[20] M.E.H. Ismail, A. Sri Ranga, R_{II} type recurrence, generalized eigenvalue problem and orthogonal polynomials on the unit circle, *Linear Algebra Appl.*, 562 (2019), 63-90.

[21] W.B. Jones, O. Njastad, W.J. Thron, Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature and continued fractions associated with the unit circle, *Bull. London Math. Soc.*, 21 (1989), 113-152.

[22] V.I. Krylov, *Approximate Calculation of Integrals*, MacMillan, New York, 1962.

[23] K. Li, T.Y. Li, Z. Zeng, An algorithm for the generalized symmetric tridiagonal eigenvalue problem, *Numer. Algorithms*, 8 (1994), 269-291.

[24] A. Martínez-Finkelshtein, L.L. Silva Ribeiro, A. Sri Ranga, M. Tyaglov, Complementary Romanovski-Routh polynomials: From orthogonal polynomials on the unit circle to Coulomb wave functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, aceito, https://doi.org/10.1090/proc/14423.

[25] A. Martínez-Finkelshtein, A. Sri Ranga, D.O. Veronese, Extreme zeros in a sequence of para-orthogonal polynomials and bounds for the support of the measure, *Math. Comp.*, 87 (2018), 46-73.

[26] Q.I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic Theory of Polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 2002.

[27] A. Sri Ranga, Szegő polynomials from hypergeometric functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138 (2010), 4259-4270.

[28] W. Rudin, *Princípios de Análise Matemática*, Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1971.

[29] H.R. Schwarz, E. Stiefel, H. Rutishauser,*Numerical Analysis of Symmetric Matrices*, Prentice-Hall Press, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.

[30] B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 1, Classical Theory*, In: American Mathematical Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, vol. 54, Providence 2005.

[31] A. Sri Ranga, *Continued Fractions which Correspond to Series Expansions, and the Strong Hamburguer Moment Problem*, Tese de Doutorado, University of St. Andrews, St. Andrews, Scotland, UK, 1983.

[32] A.H. Stroud, D. Secrest, *Gaussian Quadrature Formulas*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1992.

[33] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, 4ª ed., American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 23, Providence, 1975.

[34] H.S. Wall, *Analytic Theory of Continued Fractions*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1948.

[35] D.S. Watkins, Some perspectives on the eigenvalue problem, *SIAM Rev.*, 35 (1993), 430-471.

[36] J.H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford University Press, Oxford, 1965.

[37] A. Zhedanov, Biorthogonal rational functions and generalized eigenvalue problem, *J. Approx. Theory*, 101 (2017), 303-329.

[38] A. Zhedanov, On some classes of polynomials orthogonal on arcs of the unit circle connected with symmetric orthogonal polynomials on an interval, *J. Approx. Theory*, 94 (1998), 73-106.