



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Campus de São José do Rio Preto

Luana de Lima Silva Ribeiro

**Polinômios Complementares de  
Romanovski-Routh e Funções com  
Ortogonalidade Híbrida**

São José do Rio Preto  
2019

Luana de Lima Silva Ribeiro

# **Polinômios Complementares de Romanovski-Routh e Funções com Ortogonalidade Híbrida**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadoras: CAPES e FAPESP proc.: 2017/04358-8.

Orientador: Prof. Dr. A. Sri Ranga

São José do Rio Preto

2019

R484p

Ribeiro, Luana de Lima Silva

Polinômios complementares de Romanovski-Routh e funções com ortogonalidade híbrida / Luana de Lima Silva Ribeiro. -- São José do Rio Preto, 2019

87 f. : il., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Alagacone Sri Ranga

1. Método dos mínimos quadrados modificado. 2. Função geradora.  
3. Polinômios de Romanovski-Routh. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Luana de Lima Silva Ribeiro

Polinômios Complementares de Romanovski-Routh e Funções  
com Ortogonalidade Híbrida

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadoras: CAPES e FAPESP proc.: 2017/04358-8.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. A. Sri Ranga  
UNESP – Campus São José do Rio Preto  
Orientador

Prof. Dr. Valdir Antonio Menegato  
USP – Campus São Carlos

Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva  
USP – Campus São Carlos

Prof. Dr. Ali Messaoudi  
UNESP – Campus São José do Rio Preto

Prof. Dr. Jorge Alberto Borrego Morell  
UFRJ – Campus Duque de Caxias

São José do Rio Preto  
01 de março de 2019

# Agradecimentos

Agradeço ao meu professor e orientador Alagacone Sri Ranga pelo incentivo, desafios, e ensinamentos que muito contribuíram para minha formação profissional e pessoal. Agradeço a todos os meus professores da graduação, mestrado e doutorado. Em especial, a professora Cleonice Fátima Bracciali pela atenção, disponibilidade e dedicação. Agradeço à minha família, Maria José, Luiz Carlos e Matheus, que sempre me apoiaram, e ao meu marido Caio Cesar, pelo incentivo, companheirismo e paciência. Agradeço também aos meus amigos do programa de pós-graduação em Matemática Mariana, Yen, Gislaine, Junior, Gustavo, Jéssica, Paola, Fabiola e Rodrigo pelas discussões matemáticas produtivas e pelos cafés diários.

O presente trabalho foi realizado com o apoio parcial da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, à qual agradeço. Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pela concessão da bolsa de pesquisa, sob o processo n° 2017/04358-8.

*Mathematics knows no races or geographic boundaries;  
for mathematics, the cultural world is one country.*

David Hilbert

# Resumo

Consideramos propriedades e aplicações dos polinômios complementares de Romanovski-Routh e de funções definidas em  $[-1, 1]$  que satisfazem uma ortogonalidade híbrida. Estas funções estão relacionadas com uma certa classe de polinômios para-ortogonais na circunferência unitária através das transformações de Cayley e de Delsarte e Genin, respectivamente. Os polinômios complementares de Romanovski-Routh estão relacionados com as funções especiais de onda Coulomb e de Bessel regulares, e além disso, seus zeros coincidem com as coordenadas do ponto de equilíbrio de uma função energia. Também exploramos a expansão de funções em termos de uma série de funções com ortogonalidade híbrida, onde obtemos resultados sobre a convergência e desigualdade tipo Bessel. Além disso, esta expansão é obtida via um método dos mínimos quadrados modificado.

**Palavras-chave:** Polinômios de Romanovski-Routh. Função de onda Coulomb. Funções de ortogonalidade híbrida. Polinômios para-ortogonais. Método dos mínimos quadrados modificado.

# Abstract

We consider properties and applications of the complementary Romanovski-Routh polynomials and functions defined in  $[-1, 1]$  that satisfy a hybrid orthogonality. These functions are related with a class of para-orthogonal polynomials in the unit circle through the Cayley transform and through Delsarte and Genin transform, respectively. The complementary Romanovski-Routh polynomials are related to the regular Coulomb wave functions and also to the regular Bessel functions. Furthermore, their zeros coincide with the coordinates of the equilibrium point of an energy function. We also explore the expansion of functions in series of functions of hybrid orthogonality and results concerning convergence and Bessel-type inequality were obtained. Moreover, this expansion is given by a modified least square method.

**Keywords:** Romanovski-Routh polynomials. Coulomb wave function. Hybrid orthogonal functions. Para-orthogonal polynomials. Modified least square method.



# Lista de Símbolos

$\{d_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$	Sequência encadeada	3
$\ell_n^{(\lambda)}$	Sequência de parâmetros minimal para $\{d_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$	4
$\mathcal{L}_n^{(\lambda)}$	Sequência de parâmetros maximal para $\{d_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$	4
$(a)_n$	Símbolo de Pochhammer	5
$\Gamma$	Função gama	5
${}_2F_1(a, b; c; \cdot)$	Função hipergeométrica de Gauss	6
${}_1F_1(a; b; \cdot)$	Função de Kummer confluyente de primeiro tipo	6
$M_{k,m}$	Função de Whittaker	7
$J_\alpha$	Função de Bessel do primeiro tipo de ordem $\alpha$	7
$P_n^{(\alpha, \beta)}$	Polinômio de Jacobi de grau $n$	7
$\text{supp}(\psi)$	Suporte da medida $\psi$	8
$T_n$	Polinômios Chebyshev de primeiro tipo	9
$C_n^{(\lambda)}$	Polinômios de Gegenbauer	9
$L_n^{(\alpha)}$	Polinômios de Laguerre	9
$H_n$	Polinômios de Hermite	9
$K_n(z, \zeta)$	Núcleo de Christoffel-Darboux	12
$\Phi_n(b; \cdot)$	Polinômios de Szegő associados a medida de probabilidade $\mu^{(b)}$	13
$\mathcal{R}_n(b; \cdot)$	Polinômios para-ortogonais	14
$R_n^{(\alpha, \beta)}$	Polinômios de Romanovski-Routh	17
$\omega^{(\alpha, \beta)}$	Função peso dos polinômios de Romanovski-Routh	17
$\mathcal{Q}_n^{(\alpha, \beta)}$	Polinômios complementares de Romanovski-Routh	18

$\mathcal{P}_n(b; \cdot)$	Polinômios complementares de Romanovski-Routh .....	19
$\widehat{\mathcal{P}}_n(b; \cdot)$	Polinômios complementares de Romanovski-Routh mônicos .....	29
$\mathcal{X}(b; \cdot)$	Compõe a função geradora dos polinômios complementares de Romanovski-Routh .....	30
$F_L(\eta, \cdot)$	Função de onda Coulomb regular .....	31
$\mathcal{M}(b; \cdot)$	Função de onda Coulomb estendida .....	31
$\mathbb{P}_n$	Espaço vetorial dos polinômios reais de grau no máximo $n$ .....	51
$\Omega_n$	Espaço vetorial das funções reais em $[-1, 1]$ .....	51
$\mathcal{W}_n$	Função de ortogonalidade híbrida .....	53
$\widehat{\mathcal{W}}_n$	Função de ortogonalidade híbrida reescalada .....	53
$\ \cdot\ _A$	Norma definida com respeito a medida $\psi_A$ .....	58
$\ \cdot\ _B$	Norma definida com respeito a medida $\psi_B$ .....	58
$G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)$	Aproximação pelo MMQ modificado .....	60
$G(f; \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m; \tilde{\boldsymbol{\beta}}_m; \cdot)$	Aproximação pelo MMQ com respeito a norma $\ \cdot\ _B$ .....	67
$\delta_{n,m}$	Delta de Kronecker .....	8
$\lfloor x \rfloor$	Função maior inteiro de $x$ .....	36
$\mathbb{T}$	Circunferência unitária .....	11
$\Phi_n^*$	Polinômio Recíproco .....	12
$B_n(\rho_n; \cdot)$	Polinômio para-ortogonal de grau $n$ .....	13
$L_\psi^1$	Espaço das funções reais módulo integráveis .....	56
$L_\psi^2$	Espaço das funções reais quadrado integráveis .....	56

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Sequência Encadeada . . . . .	3
1.2 Funções Especiais . . . . .	4
1.3 Polinômios Ortogonais . . . . .	7
1.3.1 Polinômios Ortogonais na Reta Real . . . . .	8
1.3.2 Polinômios Ortogonais na Circunferência Unitária . . . . .	11
<b>2 Polinômios Complementares de Romanovski-Routh</b>	<b>17</b>
2.1 Definições e Propriedades . . . . .	17
2.2 Polinômios CRR e Polinômios Ortogonais na Circunferência Unitária .	19
2.3 Modelo Eletrostático para Polinômios CRR . . . . .	24
2.4 Funções Geradoras para os Polinômios CRR . . . . .	28
2.5 Zeros dos Polinômios $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$ . . . . .	34
<b>3 Estudo das Funções <math>\mathcal{N}(b; \cdot)</math> e <math>\mathcal{M}(b; \cdot)</math></b>	<b>37</b>
<b>4 Aproximações por Funções com Ortogonalidade Híbrida</b>	<b>51</b>
4.1 Definições e Propriedades . . . . .	51
4.2 Aproximação em $\Omega_n$ . . . . .	56
4.2.1 Método dos Mínimos Quadrados Modificado . . . . .	60
4.2.2 Convergências com o MMQ Modificado . . . . .	66
4.2.3 Aplicações: Estimativas no Espaço $\Omega_n$ . . . . .	74
<b>Considerações Finais</b>	<b>81</b>
<b>Referências</b>	<b>83</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>87</b>

# Introdução

O estudo dos polinômios ortogonais é uma área muito ativa na matemática e isso se deve a sua relação com a física matemática, estatística, mecânica, e com importantes ramos da análise, por exemplo: teoria da aproximação, frações contínuas e equações diferenciais e integrais. Podemos mencionar ainda que os polinômios ortogonais estão relacionados com problemas de expansão de funções em séries ortogonais e avaliação e aproximação de integrais definidas, através das fórmulas de quadratura e de interpolação. Ademais, a investigação sobre o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais possibilita também a investigação de pontos equilíbrio de funções potenciais [45, 49].

O presente trabalho é uma coleção de resultados referentes a alguns dos aspectos acima mencionados, e está dividido em três partes. A primeira parte consiste no estudo de uma classe de polinômios conhecida como *polinômios complementares de Romanovski-Routh*, que denotamos por  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  com  $b = \lambda + i\eta$  e  $\lambda > 0$ . Estes polinômios podem ser expressos pela relação de recorrência de três termos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_0(b; x) &= 1, & \mathcal{P}_1(b; x) &= x - c_1^{(b)}, \\ \mathcal{P}_{n+1}(b; x) &= (x - c_{n+1}^{(b)})\mathcal{P}_n(b; x) - d_{n+1}^{(b)}(x^2 + 1)\mathcal{P}_{n-1}(b; x), & \text{para } n \geq 1,\end{aligned}$$

cujos parâmetros são dados explicitamente por

$$c_n^{(b)} = \frac{\eta}{\lambda + n - 1} \quad \text{e} \quad d_{n+1}^{(b)} = \frac{1}{4} \frac{n(n + 2\lambda - 1)}{(n + \lambda - 1)(n + \lambda)}.$$

Estes polinômios são uma modificação dos polinômios de Romanovski-Routh que foram introduzidos por Routh em 1884, [43], e redescobertos por Romanovski, [42], no contexto de teoria de probabilidade e estatística. Além disso, esta classe de polinômios está relacionada com problemas de física de quarks, teoria de matrizes aleatórias e tem recebido bastante atenção na literatura [26, 28, 41, 42]

A segunda parte consiste no estudo dos zeros da função geradora associada aos polinômios complementares de Romanovski-Routh, ou seja, estudar os zeros da função

$F$  definida por

$$F(x, w) = \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{P}}_n(b; x) \frac{w^n}{n!},$$

onde  $\widehat{\mathcal{P}}_n(b; \cdot)$  é o polinômio complementar de Romanovski-Routh mônico. A função geradora que apresentamos, em contraste com a função geradora apresentada em [41], é uma função inteira que está relacionada com a função de onda Coulomb, com a função de Whittaker e com a função de Bessel.

A terceira parte desta tese consiste na investigação das propriedades de aproximação da sequência de funções  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$ , que foram definidas em [9], e satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0(x) &= 1, & \mathcal{W}_1(x) &= (x - c_1 \sqrt{1 - x^2}) \mathcal{W}_0(x), \\ \mathcal{W}_{n+1}(x) &= (x - c_{n+1} \sqrt{1 - x^2}) \mathcal{W}_n(x) - d_{n+1} \mathcal{W}_{n-1}(x), & \text{para } n &\geq 1, \end{aligned}$$

e uma propriedade de ortogonalidade híbrida. As funções  $\mathcal{W}_n$  estão conectadas, através da transformação de Delsarte e Genin, com polinômios ortogonais na circunferência unitária e têm sido objeto de estudo para investigar polinômios para-ortogonais no que diz respeito aos seus zeros e suas propriedades monotônicas, e a existência de *gaps* no suporte das medidas [14, 17, 18, 31].

O trabalho está organizado da seguinte forma. O Capítulo 1 contém um resumo de alguns dos principais resultados sobre sequências encadeadas, funções especiais e sobre a teoria de polinômios ortogonais que serão utilizados nos capítulos seguintes.

O Capítulo 2 apresenta os resultados sobre a sequência de polinômios  $\{\mathcal{P}_n(b; \cdot)\}_{n \geq 0}$ . Na primeira seção descrevemos os principais resultados conhecidos na literatura sobre  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$ . Posteriormente, apresentamos a relação entre os polinômios  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  e os polinômios ortogonais na circunferência unitária, o modelo eletrostático para os zeros de  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$ , e sua função geradora. Estes resultados foram organizados no trabalho [32], que foi aceito para publicação. Finalizamos o capítulo com uma breve discussão sobre resultados assintóticos dos zeros de  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  e perspectivas.

O Capítulo 3 contém resultados sobre o estudo dos zeros da função geradora dos polinômios complementares mônicos e simulações numéricas para estimativa da mesma. Estes resultados compõem parte do trabalho [33] que está em fase final de preparação.

No Capítulo 4 apresentamos um método de aproximação por mínimos quadrados modificado utilizando as funções  $\mathcal{W}_n$  que satisfazem a relação de recorrência de três termos descrita acima e uma ortogonalidade modificada. Além disso, provamos algumas condições de convergência e resultados sobre limitantes uniformes.

# 1 Preliminares

Neste capítulo apresentamos um resumo de resultados conhecidos na literatura sobre sequência encadeada, sobre as funções especiais: hipergeométricas, Whittaker e Bessel, e sobre os polinômios ortogonais na reta real e na circunferência unitária. Este capítulo tem por objetivo apresentar os fundamentos necessários para o desenvolvimento do trabalho, e também fixar a notação e linguagem que foram utilizadas nas próximas seções.

## 1.1 Sequência Encadeada

O conceito de sequência encadeada foi introduzido por Wall em sua monografia sobre frações contínuas [51]. Nesta seção apresentamos brevemente os principais resultados sobre sequências encadeadas que serão utilizadas nos capítulos posteriores. Para mais detalhes, ver [13, 51].

**Definição 1.1.** *Uma sequência  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  é uma sequência encadeada positiva se existe uma sequência  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  tal que*

$$(i) \quad 0 \leq g_0 < 1, \quad 0 < g_n < 1, \quad n \geq 1,$$

$$(ii) \quad a_n = (1 - g_{n-1})g_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$\{g_n\}_{n \geq 0}$  é chamada de sequência de parâmetros para  $\{a_n\}_{n \geq 1}$ .  $g_0$  é chamado de parâmetro inicial.

**Exemplo 1.2.** *A sequência constante com  $a_n = 1/4$ ,  $n \geq 1$ , é uma sequência encadeada. A sequência  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  com  $g_n = n/[2(n+1)]$  é uma sequência de parâmetros para  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  com parâmetro inicial  $g_0 = 0$ . Outra sequência de parâmetros para  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  é a sequência constante com  $g_n = 1/2$ , para todo  $n \geq 0$ .*

**Exemplo 1.3.** *Seja  $\lambda > 0$ . A sequência  $\{d_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$  definida por*

$$d_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{1}{4} \frac{n(n+2\lambda-1)}{(n+\lambda-1)(n+\lambda)}, \quad (1.1)$$

é uma sequência encadeada e  $\{\ell_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$  com

$$\ell_n^{(\lambda)} = \frac{n-1}{2(\lambda+n-1)} \quad (1.2)$$

é a sequência de parâmetros com parâmetro inicial nulo. Se  $\lambda > 1/2$ ,  $\{\mathcal{L}_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$ , com

$$\mathcal{L}_n^{(\lambda)} = \frac{1}{2} \frac{2\lambda+n-2}{\lambda+n-1} \quad (1.3)$$

é uma outra sequência de parâmetros para  $\{d_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$ .

Na referência [13] há uma seção contendo vários resultados importantes sobre sequências encadeadas. Um deles é que toda sequência encadeada  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  possui uma sequência de parâmetros  $\{m_n\}_{n \geq 0}$  tal que  $m_0 = 0$ . Esta sequência de parâmetros é chamada de *sequência de parâmetros minimal*. Ademais, se  $\{M_n\}_{n \geq 1}$  é uma sequência de parâmetros para  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  e  $M_n \geq g_n$  para qualquer outra sequência  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  de parâmetros, então diremos que  $\{M_n\}_{n \geq 0}$  é a *sequência de parâmetros maximal*.

É conhecido que toda sequência encadeada possui sequências de parâmetros minimal e maximal. Além disso, dada uma sequência encadeada, ou ela possui uma única sequência de parâmetros ou possui infinitas. No caso em que a sequência encadeada é unicamente determinada, as sequências de parâmetros maximal e minimal coincidem. O próximo resultado nos auxilia a determinar quando uma sequência de parâmetros é maximal, mais detalhes em [13].

**Teorema 1.4** (Critério de Wall). *Seja  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  uma sequência encadeada. A sequência  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  é a sequência de parâmetros maximal para  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  se, e somente se,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1-g_1)(1-g_2) \cdots (1-g_n)} = \infty.$$

Usando o critério de Wall, segue que  $\{\mathcal{L}_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$  definida em (1.3) é a sequência de parâmetros maximal para  $\{d_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$  no Exemplo 1.3. A sequência  $\{d_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$  é exatamente a mesma que aparece na relação de recorrência dos polinômios mônicos de Gegenbauer [49]. No capítulo seguinte, veremos que a mesma sequência aparece na relação de recorrência dos polinômios complementares de Romanovski-Routh.

## 1.2 Funções Especiais

Esta seção contém alguns dos principais resultados relacionados com o estudo de funções especiais. Para mais detalhes, ver [4, 48].

O símbolo de Pochhammer, também conhecido por fatorial deslocado, denotado

pelo símbolo  $(a)_n$  sendo  $n$  um inteiro não negativo e  $a \in \mathbb{C}$  é definido por

$$\begin{aligned} (a)_0 &= 1, \\ (a)_n &= a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Observe que  $(1)_n = n!$  e se  $n > m$  são inteiros positivos, temos que  $(-m)_n = 0$ .

**Definição 1.5.** Para todo número complexo  $z \neq -1, -2, -3, \dots$ , a função gama  $\Gamma$  é definida por

$$\Gamma(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!k^{z-1}}{(z)_k}. \tag{1.5}$$

A função  $\Gamma$  satisfaz a propriedade  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ . E, ainda, se  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $\Gamma(n+1) = n!$  e  $\Gamma(a+n) = \Gamma(a)(a)_n$ . A função  $\Gamma(z)$  satisfaz várias fórmulas interessantes. Dentre elas, vamos citar a *fórmula da reflexão de Euler* dada por

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}, \quad z \notin \mathbb{Z}. \tag{1.6}$$

A função gama apareceu primeiramente nos trabalhos de Euler durante a tentativa de estender o domínio da função fatorial e possui várias representações, dentre elas temos o produtório infinito e a representação integral. Para mais detalhes veja [4].

Uma das razões do estudo das funções hipergeométricas é o fato de que as funções elementares, assim como várias outras importantes funções na matemática, são expressas como funções hipergeométricas ou razão de funções hipergeométricas. A seguir apresentamos as definições e algumas propriedades das funções hipergeométricas.

A *série hipergeométrica* é uma série  $\sum_n c_n$  tal que  $c_{n+1}/c_n$  é uma função racional de  $n$ , ou seja, usando a fatoração polinomial, temos

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{z(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_p)}{(n+b_1)(n+b_2)\cdots(n+b_q)(n+1)}. \tag{1.7}$$

O fator  $z$  aparece pois o polinômio pode não ser mônico, e o termo  $n+1$  sempre pode ser obtido pela multiplicação do numerador e denominador por  $n+1$ . Desta forma, fazendo uma manipulação em (1.7), segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdots (a_p)_n z^n}{(b_1)_n (a_2)_n \cdots (b_q)_n n!} := {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z). \tag{1.8}$$

Aqui  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, q$  não podem ser inteiros negativos, visto que isso faria com que o denominador do termo geral da série fosse zero para algum  $n$ . Se o termo geral estiver claro no contexto podemos simplificar a notação  ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$  por  ${}_pF_q$ .

Uma pergunta natural que surge sobre a série hipergeométrica diz respeito ao raio de convergência da mesma. É conhecido que a série converge absolutamente para todo  $z \in \mathbb{C}$  se  $p \leq q$  e para  $|z| < 1$  se  $p = q + 1$ . Se  $p > q + 1$  a série diverge para todo



$z \neq 0$ . Mais detalhes no Teorema 2.2.1 em [4].

**Definição 1.6.** A função hipergeométrica de Gauss é definida pela série

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (1.9)$$

para  $|z| < 1$  e por sua continuação analítica para  $|z| \geq 1$ .

Desta forma, temos que  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  converge para todo  $|z| < 1$ , e além disso a série também converge absolutamente para  $|z| = 1$  desde que  $\text{Re}(c-a-b) > 0$ . Mais detalhes no Teorema 2.1.2 em [4]. A função hipergeométrica de Gauss  $y(z) = {}_2F_1(a, b; c; z)$  satisfaz

$$\frac{dy(z)}{dz} = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1; c+1; z) \quad (1.10)$$

e a equação diferencial

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{dy}{dz} - aby = 0. \quad (1.11)$$

Note que se  $m \in \mathbb{N}$ ,

$${}_2F_1(-m, b; c; z) = \sum_{n=0}^m \frac{(-m)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (1.12)$$

é um polinômio, e também, pelo processo de confluência

$$\lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1(a, b; c; z/b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{b^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = {}_1F_1(a; c; z). \quad (1.13)$$

A função  ${}_1F_1(a; c; \cdot)$  é chamada de função *hipergeométrica confluyente* ou de *função de Kummer confluyente de primeiro tipo*. Pelas considerações feitas anteriormente sobre o raio de convergência da série hipergeométrica, segue que  ${}_1F_1$  é um função inteira, ou seja, é uma função complexa holomorfa em  $\mathbb{C}$ . A função hipergeométrica confluyente  $y(z) = {}_1F_1(a; c; z)$  satisfaz a equação diferencial

$$z\frac{d^2y}{dz^2} + (c-z)\frac{dy}{dz} - ay = 0. \quad (1.14)$$

Outros exemplos de funções especiais que irão aparecer no decorrer deste trabalho são as funções de Bessel, as funções de Whittaker e os polinômios ortogonais. Para os polinômios ortogonais dedicaremos a próxima seção visto que suas propriedades são de demasiada importância para o desenvolvimento desta tese.

A função de Whittaker é dada explicitamente por, ver [4, p. 195], [48]

$$M_{k,m}(z) = e^{-z/2} z^{1/2+m} {}_1F_1(1/2 + m - k; 1 + 2m; z) \quad (1.15)$$

e satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{1/4 - m^2}{z^2} \right) y = 0. \quad (1.16)$$

A função de Bessel do primeiro tipo de ordem  $\alpha$  pode ser representada por

$$J_\alpha(z) = \frac{(z/2)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} e^{-iz} {}_1F_1(\alpha + 1/2; 2\alpha + 1; 2iz) \quad (1.17)$$

e satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \left( 1 - \frac{\alpha^2}{z^2} \right) y = 0. \quad (1.18)$$

Observe que a equação diferencial (1.18) é invariante pela troca de  $\alpha$  por  $-\alpha$ . Isso significa que  $J_\alpha(z)$  e  $J_{-\alpha}(z)$  satisfazem a mesma equação diferencial. É bem conhecido que se  $\alpha$  não é um inteiro, então  $J_\alpha$  e  $J_{-\alpha}$  são soluções linearmente independentes e quando  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  elas são linearmente dependentes e vale a igualdade  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ .

O polinômio de Jacobi de grau  $n$  é definido por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1 \left( -n, 1 + \alpha + \beta + n; \alpha + 1; \frac{1 - z}{2} \right) \quad (1.19)$$

e satisfaz a equação diferencial

$$(1 - z^2) \frac{d^2 y}{dz^2} + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)z] \frac{dy}{dz} + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0. \quad (1.20)$$

Se os parâmetros  $\alpha > -1$  e  $\beta > -1$  os polinômios de Jacobi são ortogonais, e mais detalhes serão discutidos na próxima seção.

### 1.3 Polinômios Ortogonais

Nesta seção, apresentamos algumas definições e resultados referentes às sequências de polinômios ortogonais na reta real e na circunferência unitária. Os resultados apresentados nesta seção serão usados frequentemente durante os próximos capítulos e constituem o alicerce desta tese.

**Definição 1.7** ([13]). *Seja  $\psi$  uma função real não decrescente definida em  $[a, b]$  com  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . Um ponto  $\zeta \in [a, b]$  é chamado de ponto de aumento de  $\psi$  se para todo  $\epsilon > 0$ ,*

$$\psi(\zeta + \epsilon) - \psi(\zeta - \epsilon) > 0.$$

*Dizemos que  $\psi$  é uma medida positiva em  $[a, b]$  se  $\psi$  é uma função definida em  $[a, b]$ ,*

não decrescente, limitada e com infinitos pontos de aumento.

O suporte da medida  $\psi$  é o conjunto de todos os pontos de aumento da medida  $\psi$ , e será denotado por  $\text{supp}(\psi)$ . Diremos que  $\psi$  é uma *medida de probabilidade* se a integral de Riemann-Stieltjes  $\int_a^b d\psi(x) = 1$ . No decorrer deste trabalho definiremos funções/polinômios ortogonais em termos da integral de Riemann-Stieltjes com relação a uma medida  $\psi$ . Se a medida é dada por  $d\psi(x) = w(x)dx$ , chamaremos  $w(x)$  de *função peso*.

### 1.3.1 Polinômios Ortogonais na Reta Real

As referências utilizadas para esta seção foram [13, 29] e [49]. Seja  $\psi$  uma medida positiva tal que as integrais de Stieltjes

$$\mu_k = \int_a^b x^k d\psi(x)$$

existem para todo  $k \geq 0$ . Os valores  $\mu_k$  são chamadas de *momentos* da medida  $\psi$ .

Uma sequência de polinômios  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  é uma *sequência de polinômios ortogonais* com relação a medida positiva  $\psi$  definida em  $[a, b]$  ( $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ) se  $p_n$  tem grau  $n$  e

$$\langle p_n, p_m \rangle := \int_a^b p_n(x)p_m(x)d\psi(x) = \rho_n^2 \delta_{n,m}, \quad (1.21)$$

onde  $\delta_{n,m}$  é o Delta de Kronecker, que vale um se  $n = m$ , e zero caso contrário e  $\rho_n^2 > 0$ . Dada uma sequência de polinômios ortogonais, então seus termos satisfazem uma relação de recorrência de três termos

$$p_{n+1}(x) = (A_{n+1}x - B_{n+1})p_n(x) - C_{n+1}p_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (1.22)$$

com  $p_0(x) = 1$ ,  $p_{-1}(x) = 0$ ,  $A_n, B_n, C_n \in \mathbb{R}$ . Se o coeficiente do termo de maior grau de  $p_n(x)$  é denotado por  $a_{n,n}$  temos

$$A_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}, \quad B_{n+1} = A_{n+1} \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\rho_n^2}, \quad C_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{A_n} \frac{\rho_n^2}{\rho_{n-1}^2}.$$

Se  $a_{n,n} = 1$  para todo  $n \geq 0$ , então a sequência é chamada de sequência de polinômios ortogonais mônicos. Neste caso os coeficientes da relação de recorrência são  $A_{n+1}=1$  e  $C_{n+1} = \rho_n^2/\rho_{n-1}^2 > 0$ . Se  $\rho_n = 1$  para todo  $n \geq 0$ , a sequência é chamada de sequência de polinômios ortonormais.

**Exemplo 1.8.** Para  $d\psi(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$  com  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$  definida no intervalo  $[-1, 1]$ , os polinômios ortogonais correspondentes são chamados de polinômios de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}$ ; os casos particulares em que  $\alpha = \beta = 0$ ,  $\alpha = \beta = -1/2$ ,  $\alpha = \beta =$

$1/2$ ,  $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$  são conhecidos como polinômios de Legendre  $P_n$ , polinômios Chebyshev de primeiro tipo  $T_n$ , polinômios Chebyshev de segundo tipo  $U_n$ , e polinômios de Gegenbauer  $C_n^{(\lambda)}$ , respectivamente.

Para  $d\psi(x) = x^\alpha e^{-x} dx$  com  $\alpha > -1$  definida no intervalo  $[0, \infty)$ , os polinômios ortogonais obtidos são chamados de polinômios de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}$ .

Para  $d\psi(x) = e^{-x^2} dx$  definida no intervalo  $(-\infty, \infty)$ , os polinômios ortogonais obtidos são chamados de polinômios de Hermite  $H_n$ .

Dizemos que  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  é uma sequência de polinômios ortogonais simétricos se o intervalo de ortogonalidade é simétrico, ou seja,  $I = (-b, b)$  e a função peso é par. Por exemplo, os polinômios de Chebyshev de primeiro e segundo tipo são ortogonais e simétricos.

Uma importante consequência da relação de recorrência de três termos (1.22) é dada no próximo resultado.

**Teorema 1.9** (Identidade de Christoffel-Darboux). *Seja  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  uma sequência de polinômios ortonormais. Então  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  satisfaz a seguinte propriedade*

$$\sum_{k=0}^n p_k(x)p_k(y) = \frac{1}{A_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x)}{x - y}. \quad (1.23)$$

Em particular,

$$\sum_{k=0}^n [p_k(x)]^2 = \frac{1}{A_{n+1}} [p_n(x)p'_{n+1}(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)]. \quad (1.24)$$

Em certas aplicações é preciso ter conhecimento sobre os zeros do polinômio  $p_n$ . Sabemos que seus zeros são reais, distintos e pertencem ao intervalo de ortogonalidade  $(a, b)$ . Ademais, os zeros de  $p_n$  satisfazem a propriedade do entrelaçamento, isto é, entre dois zeros consecutivos do polinômio  $p_{n+1}$  existe um único zero de  $p_n$ . Para o estudo dos zeros destes polinômios podemos considerar tanto a sequência de polinômios ortogonais mônicos quanto a sequência de polinômios ortonormais. Considerando a sequência de polinômios ortonormais, é bem conhecido que os zeros de  $p_n$  são autovalores da matriz tridiagonal simétrica conhecida como *matriz de Jacobi*, dada em termos dos coeficientes da relação de recorrência (1.22)

$$\begin{bmatrix} B_1 & \sqrt{C_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{C_2} & B_2 & \sqrt{C_3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{C_{n-1}} & B_{n-1} & \sqrt{C_n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{C_n} & B_n \end{bmatrix}.$$

Segundo Chihara [13], os sistemas de polinômios ortogonais de Hermite, Laguerre, e Jacobi (incluindo os casos especiais nomeados por Chebyshev, Legendre e Gegenbauer)

são sem dúvidas os sistemas ortogonais mais estudados e amplamente aplicados. Estes sistemas são coletivamente chamados de *polinômios ortogonais clássicos*. A seguir apresentaremos uma síntese de propriedades satisfeitas por eles.

(i) A função peso dos polinômios ortogonais clássicos satisfaz a equação diferencial de Pearson, a saber,

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{A(x)}{B(x)}, \quad \text{para } x \in (a, b), \quad \text{com } A \in \mathbb{P}_1, B \in \mathbb{P}_2,$$

e  $\mathbb{P}_i$  denota o espaço dos polinômios de grau  $i$ .

(ii) O polinômio  $y = p_n$  de grau  $n$  é solução de uma equação diferencial do tipo

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \quad \text{onde } a_i \in \mathbb{P}_i.$$

(iii)  $p_n$  pode ser expresso através da fórmula de Rodrigues, isto é,  $p_n$  é proporcional a

$$\frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [w(x)B^n(x)], \quad \text{com } B \in \mathbb{P}_2.$$

(iv) A sequência de polinômios obtida pela derivação dos polinômios ortogonais clássicos é também uma sequência de polinômios ortogonais clássicos sobre o mesmo intervalo de ortogonalidade.

(v) Possuem função geradora, isto é, existe uma função  $F$  tal que

$$F(x, w) = \sum_{i=0}^{\infty} a_n(x)w^n, \quad \text{onde } a_n \text{ é um múltiplo do polinômio ortogonal } p_n.$$

(vi) Os zeros dos polinômios são pontos de equilíbrio de uma função potencial.

A seguir, exemplificamos alguns destes fatos. Os polinômios de Jacobi podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^n]. \quad (1.25)$$

Os polinômios de Laguerre e Hermite podem ser dados através das funções geradoras

$$\frac{1}{(1-w)^{\alpha+1}} e^{-\frac{wx}{1-w}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) w^n, \quad e^{2xw-w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{w^n}{n!}, \quad (1.26)$$

e além disso, satisfazem

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x), \quad \frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

Stieltjes observou que é possível dar uma interpretação física para a localização dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos em termos dos pontos de equilíbrio de uma função potencial, o que é conhecido como *modelo eletrostático* [30]. Vamos mostrar um exemplo para o caso dos polinômios de Laguerre. Sejam  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  as posições de  $n$  cargas positivas unitárias que se movem livremente em  $(0, \infty)$  e interagem entre si pela lei do potencial logarítmico. Além disso, se o sistema está sujeito a um campo externo gerado por uma carga  $(\alpha + 1)/2$  na origem, que também obedece a lei do potencial logarítmico, mais um termo igual a  $x/2$ , ou seja, se a energia total do sistema é

$$E(x_1, x_2, \dots, x_n) = - \sum_{1 \leq k < j \leq n} \ln |x_k - x_j| - \frac{\alpha + 1}{2} \ln |x - 0| + \frac{x}{2},$$

então existe uma única configuração  $X^* \in \Lambda = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty\}$  que corresponde à posição de equilíbrio das cargas livres. Em outras palavras,  $X^*$  é o único ponto de mínimo global de  $E$  em  $\Lambda$  e ocorre quando as coordenadas são precisamente os zeros do polinômio de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}$ . Além disso, em [49] a energia total do sistema referente aos polinômios de Laguerre é descrita de outra maneira. O termo  $x/2$  na energia é substituído por um vínculo entre as cargas livres, a saber,

$$n^{-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \leq K,$$

onde  $K$  é uma constante positiva pré-fixada. Os polinômios de Hermite e Jacobi também possuem um modelo eletrostático desse tipo.

### 1.3.2 Polinômios Ortogonais na Circunferência Unitária

Nesta seção faremos uma breve introdução sobre os polinômios ortogonais e para-ortogonais na circunferência unitária baseada em [46, 47] e [40].

Considere  $\mu$  uma medida positiva na circunferência unitária  $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ , ou seja, se escolhermos a parametrização  $z = e^{i\theta}$ , a medida  $\mu(e^{i\theta})$  é uma medida positiva definida em  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Além disso, vamos assumir que  $\mu$  é uma medida de probabilidade. Uma sequência de polinômios  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\Phi_n$  mônico de grau  $n$ , é chamada de sequência de polinômios mônicos de Szegő, ou *sequência de polinômios ortogonais na circunferência unitária* com relação a  $\mu$ , se satisfaz

$$\int_{\mathbb{T}} \bar{z}^j \Phi_n(z) d\mu(z) = \int_0^{2\pi} e^{-ij\theta} \Phi_n(e^{i\theta}) d\mu(e^{i\theta}) = \frac{1}{k_n^2} \delta_{n,j}, \quad 0 \leq j \leq n, \quad (1.27)$$

onde  $k_n^{-2} = \|\Phi_n\|^2 = \int_{\mathbb{T}} |\Phi_n(z)|^2 d\mu(z)$ . Visto que a integral é sobre a circunferência

unitária, temos  $\bar{z} = z^{-1}$ , de onde

$$\int_{\mathbb{T}} \bar{z}^j \Phi_n(z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} z^{-j} \Phi_n(z) d\mu(z).$$

Os polinômios mônicos de Szegő satisfazem as seguintes relações, ver [47],

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}^*(z) &= \Phi_n^*(z) - \alpha_n z \Phi_n(z), \\ \Phi_{n+1}(z) &= (1 - |\alpha_n|^2) z \Phi_n(z) - \bar{\alpha}_n \Phi_{n+1}^*(z). \end{aligned} \quad n \geq 0 \quad (1.28)$$

onde  $\Phi_0(z) = 1$ ,  $\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi_n(1/\bar{z})}$  e  $\bar{\alpha}_n = -\Phi_{n+1}(0)$ . Utilizando as equações (1.28) obtemos

$$\Phi_{n+1}(z) = z \Phi_n(z) - \bar{\alpha}_n \Phi_n^*(z), \quad n \geq 0. \quad (1.29)$$

Além disso,  $\Phi_n$  possui os zeros no disco  $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ . Os coeficientes  $\alpha_n$ ,  $n \geq 0$ , chamados de *coeficientes de Verblunsky*, satisfazem

$$|\alpha_n| < 1 \quad \text{e} \quad \prod_{m=0}^{n-1} (1 - |\alpha_m|^2) = k_n^{-2} = \frac{D_n}{D_{n-1}} \quad \text{para} \quad n \geq 0, \quad (1.30)$$

onde  $D_n$  são os determinantes de Toeplitz, a saber,

$$D_0 = \mu_0 \quad \text{e} \quad D_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, \quad n \geq 1, \quad (1.31)$$

sendo  $\mu_n$  os momentos associados à medida  $\mu$ , definidos por  $\mu_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\mu(e^{i\theta})$ , e satisfazem  $\mu_{-n} = \bar{\mu}_n$ .

De forma análoga aos polinômios ortogonais na reta, da relação de recorrência é possível obter o seguinte fato.

**Teorema 1.10** (Identidade de Christoffel-Darboux). *Para qualquer  $n \geq 0$  e  $z, \zeta \in \mathbb{C}$  com  $z\bar{\zeta} \neq 1$  e  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  uma sequência de polinômios de Szegő ortonormal (i.e.  $\|\varphi_n\| = 1$ ) vale a identidade*

$$K_n(z, \zeta) = \sum_{k=0}^n \overline{\varphi_k(\zeta)} \varphi_k(z) = \frac{\overline{\varphi_{n+1}(\zeta)} \varphi_{n+1}(z) - \overline{\varphi_{n+1}^*(\zeta)} \varphi_{n+1}^*(z)}{\bar{\zeta}z - 1}. \quad (1.32)$$

A função  $K_n$  é chamada de *núcleo de Christoffel-Darboux* ou núcleos CD [46]. Fixado qualquer  $\zeta$  o núcleo  $K_n(z, \zeta)$  é um polinômio em  $z$  de grau menor ou igual a  $n$  e, em particular, se  $|\zeta| \geq 1$ , é um polinômio em  $z$  de grau  $n$ .

**Exemplo 1.11.** *Os polinômios ortogonais associados a medida de probabilidade  $\mu$  dada*

por  $d\mu(z) = (1/2\pi iz)dz$  são  $\Phi_n(z) = z^n$ ,  $n \geq 0$ .

O próximo exemplo pode ser encontrado com detalhes no Teorema 3.1 em [40].

**Exemplo 1.12.** *Sejam  $b = \lambda + i\eta$ ,  $\lambda > -1/2$ ,  $z = e^{i\theta}$  com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e a medida de probabilidade  $\mu^{(b)}$  dada por*

$$d\mu^{(b)}(e^{i\theta}) = \frac{4^{\operatorname{Re}(b)}|\Gamma(b+1)|^2}{\Gamma(b+\bar{b}+1)} \frac{1}{2\pi} [e^{\pi-\theta}]^{\operatorname{Im}(b)} [\operatorname{sen}(\theta/2)^2]^{\operatorname{Re}(b)} d\theta, \quad (1.33)$$

*i.e.*,  $\mu_0^{(b)} = 1$ . Os momentos e os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária  $\Phi_n(b; \cdot)$ , com respeito a medida de probabilidade  $\mu^{(b)}$ , são dados explicitamente por

$$\begin{aligned} \mu_n^{(b)} &= \bar{\mu}_{-n}^{(b)} = \frac{(-b)_n}{(\bar{b}+1)_n}, \\ \Phi_n(b; z) &= \frac{(b+\bar{b}+1)_n}{(b+1)_n} {}_2F_1(-n, b+1; b+\bar{b}+1; 1-z), \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Definido por Jones, Njåstad e Thron [27] (detalhes também em [47]) para qualquer  $\rho_n \in \mathbb{C}$  com  $|\rho_n| = 1$

$$B_n(\rho_n; z) = \Phi_n(z) + \rho_n \Phi_n^*(z) \quad (1.35)$$

é um *polinômio para-ortogonal* de grau  $n$ . Podemos também representá-lo de outra forma usando as relações de recorrência (1.28) e (1.29),

$$B_n(\rho_n; z) = (1 - \rho_n \alpha_{n-1}) \left[ z\Phi_{n-1}(z) + \frac{\rho_n - \bar{\alpha}_{n-1}}{1 - \rho_n \alpha_{n-1}} \Phi_{n-1}^*(z) \right]. \quad (1.36)$$

Denotando por  $\tau_n = [\rho_n - \bar{\alpha}_{n-1}]/[1 - \rho_n \alpha_{n-1}]$  observamos que, como  $|\rho_n| = 1$ ,

$$\tau_n = \frac{\rho_n(1 - \bar{\rho}_n \bar{\alpha}_{n-1})}{1 - \rho_n \alpha_{n-1}}, \quad (1.37)$$

e então  $|\tau_n| = 1$ . Assim, o polinômio  $B_n(\rho_n; \cdot)$  em (1.36) na forma mônica pode ser dado por

$$z\Phi_{n-1}(z) + \tau_n \Phi_{n-1}^*(z). \quad (1.38)$$

Uma propriedade importante destes polinômios é que eles possuem  $n$  zeros simples localizados na circunferência unitária  $\mathbb{T}$  e satisfazem

$$\int_{\mathbb{T}} z^{-k} B_n(\rho_n; z) d\mu(z) = 0, \quad \text{para } k = 1, \dots, n-1, \quad (1.39)$$

e

$$\int_{\mathbb{T}} z^{-k} B_n(\rho_n; z) d\mu(z) \neq 0, \quad \text{para } k = 0, n. \quad (1.40)$$



Este fato segue da ortogonalidade de  $\Phi_n$  e da definição de  $\Phi_n^*$  visto que

$$\int_{\mathbb{T}} z^{-k} \Phi_n^*(z) d\mu(z) = 0, \quad \text{para } k = 1, \dots, n. \quad (1.41)$$

**Exemplo 1.13.** Se  $\Phi_n(z) = z^n$  e  $|\rho| = 1$ , então  $B_n(\rho; z) = z^n + \rho$  claramente tem  $n$  zeros distintos na circunferência unitária.

**Exemplo 1.14.** Se  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  é uma sequência de polinômios ortonormais na circunferência unitária associados à medida  $\mu$ , então, se  $|\zeta| \geq 1$ , da identidade (1.32) segue que

$$K_n(z, \zeta)(\bar{\zeta}z - 1), \quad n \geq 0 \quad (1.42)$$

forma uma sequência de polinômios para-ortogonais em  $z$  de grau  $n + 1$ .

Mais detalhes do próximo exemplo podem ser encontrados no Teorema 5.1 em [40].

**Exemplo 1.15.** Sejam  $b = \lambda + i\eta$ ,  $\lambda > 0$  e  $\rho_n = \bar{(b)}_{n+1}/(b)_{n+1}$ . Se  $\Phi_n(b, \cdot)$  for como no Exemplo 1.12, então

$$\mathcal{R}_n(b; z) = \frac{(b)_n}{(\lambda)_n} \left[ z\Phi_{n-1}(b; z) + \frac{\bar{(b)}_n}{(b)_n} \Phi_{n-1}^*(b; z) \right], \quad n \geq 0, \quad (1.43)$$

é um polinômio para-ortogonal de grau  $n$ , que também pode ser expresso por

$$\mathcal{R}_n(b; z) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda)_n} {}_2F_1(-n, b; b + \bar{b}; 1 - z), \quad n \geq 0. \quad (1.44)$$

Além disso, estes polinômios satisfazem

$$\mathcal{R}_{n+1}(b; z) = \left[ (1 + i c_{n+1}^{(b)})z + (1 - i c_{n+1}^{(b)}) \right] \mathcal{R}_n(b; z) - 4d_{n+1}^{(b)} z \mathcal{R}_{n-1}(b; z), \quad (1.45)$$

para  $n \geq 1$ , com  $\mathcal{R}_0(b; z) = 1$  e  $\mathcal{R}_1(b; z) = (1 + i c_1^{(b)})z + (1 - i c_1^{(b)})$  e

$$c_n^{(b)} = \frac{\eta}{\lambda + n - 1} \quad e \quad d_{n+1}^{(b)} = d_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{1}{4} \frac{n(n + 2\lambda - 1)}{(n + \lambda - 1)(n + \lambda)}, \quad n \geq 1. \quad (1.46)$$

Mais ainda,  $d_{n+1}^{(b)}$  é a sequência encadeada positiva vista no Exemplo 1.3.

Os polinômios para-ortogonais também estão relacionados com polinômios núcleos CD. Esta relação foi estudada, por exemplo, em [11] e [14].

**Observação 1.16.** Seja  $b = \lambda + i\eta$ , com  $\lambda > 1/2$ . Considere o núcleo  $K_n(z; 1)$ , definido em (1.32), associado aos polinômios ortogonais na circunferência unitária com respeito a medida  $\mu^{(b-1)}$ . Note que se  $z \in \mathbb{T}$  então

$$\frac{z}{1-z} d\mu^{(b)}(z) = \text{const.} (z-1) d\mu^{(b-1)}(z).$$

Disto segue que  $\mathcal{R}_n(b; z) = \text{const. } K_n(z; 1)$ . Vamos também denotar este núcleo por  $K_n(b-1; z; 1)$  [10].

Como consequência desta observação, dado que  $K_n(b-1; z; 1)$  satisfaz

$$\int_{\mathbb{T}} z^{-k} K_n(b-1; z; 1)(z-1) d\mu^{(b-1)}(z) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

segue que  $\mathcal{R}_n(b; \cdot)$  satisfaz

$$\int_{\mathbb{T}} z^{-k} \mathcal{R}_n(b; z)(1-z^{-1}) d\mu^{(b-1)}(z) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (1.47)$$

Como vimos anteriormente, dada uma sequência de polinômios ortogonais na circunferência unitária, podemos construir sequências de polinômios para-ortogonais. Em [10] é feito um estudo de várias propriedades dos polinômios para-ortogonais que satisfazem uma relação de recorrência de três termos. Dentre os resultados apresentados, um deles trata de como recuperar os polinômios ortogonais a partir dos polinômios para-ortogonais. A seguir descrevemos tal resultado em sua forma simplificada considerando o polinômio para-ortogonal do Exemplo 1.15. O caso geral deste resultado é dado no Teorema 3.1 em [10].

Consideremos  $b = \lambda + i\eta$ ,  $\lambda > 0$ ,  $z = e^{i\theta}$  com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , a medida de probabilidade  $\mu^{(b)}(e^{i\theta})$ , definida em (1.33), e a sequência de polinômios para-ortogonais  $\{\mathcal{R}_n(b; \cdot)\}_{n \geq 0}$  dada em (1.45). Usando (1.47) e a Observação 1.16 temos que o polinômio  $\mathcal{R}_{n+1}(b; \cdot)$  satisfaz

$$\int_{\mathbb{T}} z^{-n-1+k} \mathcal{R}_{n+1}(b; z) \frac{z}{z-1} d\mu^{(b)}(z) = 0, \quad \text{para } k = 0, \dots, n. \quad (1.48)$$

Queremos mostrar que a sequência de polinômios ortogonais  $\{\Phi_n(b; \cdot)\}_{n \geq 0}$  associada a medida  $\mu^{(b)}$  pode ser expressa por

$$\Phi_n(b; z) = \frac{\mathcal{R}_{n+1}(b; z) - 2(1 - \ell_n^{(\lambda)})\mathcal{R}_n(b; z)}{(z-1) \prod_{k=1}^{n+1} (1 + ic_k)}, \quad (1.49)$$

onde  $\{\ell_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$ , com

$$\ell_n^{(\lambda)} = \frac{n-1}{2(\lambda+n-1)}, \quad n \geq 1,$$

é a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada  $\{d_{n+1}^{(b)}\}_{n \geq 1}$ .

Primeiramente, considere

$$f_n(b; z) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n+1} (1 + ic_k)} \frac{[\mathcal{R}_{n+1}(b; z) - \frac{\mathcal{R}_{n+1}(b; 1)}{\mathcal{R}_n(b; 1)} \mathcal{R}_n(b; z)]}{z-1}.$$

Note que  $f_n(b; \cdot)$  é um polinômio de grau  $n$ , pois  $z = 1$  é um zero do numerador de

$f_n(b; \cdot)$ . Desta forma, usando (1.48) temos

$$\int_{\mathbb{T}} z^{-k} f_n(b; z) d\mu^{(b)}(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{z^{-k-1}}{\prod_{k=1}^{n+1} (1 + ic_k)} \left[ \mathcal{R}_{n+1}(b; z) - \frac{\mathcal{R}_{n+1}(b; 1)}{\mathcal{R}_n(b; 1)} \mathcal{R}_n(b; z) \right] \frac{z}{(z-1)} d\mu^{(b)}(z) = 0$$

para  $k = 0, \dots, n-1$  e concluímos que  $\{f_n(b; \cdot)\}_{n \geq 0}$  é a sequência de polinômios ortogonais em  $\mathbb{T}$  com respeito a medida  $\mu^{(b)}$ . Para finalizar, usamos a relação de recorrência de três termos para  $\mathcal{R}_n(b; z)$  em  $z = 1$  de onde segue que  $\{\ell_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$ , com

$$\ell_n^{(\lambda)} = 1 - \frac{\mathcal{R}_n(b; 1)}{2 \mathcal{R}_{n-1}(b; 1)}, \quad (1.50)$$

é a sequência de parâmetros minimal para a sequência encadeada  $\{d_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$ .

# 2 Polinômios Complementares de Romanovski-Routh

Este capítulo está dividido em cinco seções. Na primeira seção apresentamos os resultados conhecidos na literatura sobre os polinômios complementares de Romanovski-Routh. Nas seções 2.2 e 2.3 apresentamos as relações dos polinômios complementares de Romanovski-Routh com polinômios ortogonais na circunferência unitária, e a interpretação física para a localização dos zeros em termos de uma função potencial. A Seção 2.4 apresenta uma função geradora para estes polinômios e sua relação com a função de onda Coulomb e a função de Bessel. Os resultados destas seções compõem o trabalho [32] que foi aceito para publicação. Finalizamos o capítulo com a Seção 2.5 sobre problemas em aberto e expectativas em relação as propriedades assintóticas dos zeros dos polinômios complementares de Romanovski-Routh.

## 2.1 Definições e Propriedades

Os polinômios de *Romanovski-Routh* podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues, ver [39],

$$R_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{\omega^{(\alpha, \beta)}(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\omega^{(\alpha, \beta)}(x)(1+x^2)^n], \quad (2.1)$$

onde  $\omega^{(\alpha, \beta)}(x) = (1+x^2)^{\beta-1} e^{-\alpha \operatorname{arccot}(x)}$ .

Estes polinômios foram introduzidos por Routh em 1884, [43], e redescobertos por Romanovski, [42], no contexto de teoria de probabilidade e estatística. Eles também são conhecidos como polinômios Pseudo-Jacobi, [39], ou polinômios de Jacobi complexificados e podem ser expressos em termos dos polinômios de Jacobi com parâmetros complexos, a saber,

$$R_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-2i)^n n! P_n^{(\beta-1+i\alpha/2, \beta-1-i\alpha/2)}(ix), \quad n \geq 0. \quad (2.2)$$

Ademais,  $y(x) = R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  satisfaz a equação diferencial

$$(1+x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + (2\beta x + \alpha) \frac{dy}{dx} - n(2\beta + n - 1)y = 0, \quad (2.3)$$

com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e a propriedade de ortogonalidade finita, i.e., para  $m \neq n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_n^{(\alpha, \beta)}(x) R_m^{(\alpha, \beta)}(x) \omega^{(\alpha, \beta)}(x) dx = 0 \quad (2.4)$$

se, e somente se,  $m + n < 1 - 2\beta$ .

Estamos interessados em estudar uma modificação dos polinômios de Romanovski-Routh também conhecida como *polinômios complementares de Romanovski-Routh* (CRR). Essa classe de polinômios apareceu nos trabalhos de Weber [52, 53], que considerou uma variação da fórmula de Rodrigues (2.1). Os polinômios CRR são definidos por

$$\mathcal{Q}_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(1+x^2)^n}{\omega^{(\alpha, \beta)}(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\omega^{(\alpha, \beta)}(x)]. \quad (2.5)$$

Como observado em [41] e [52], os polinômios CRR satisfazem

$$\mathcal{Q}_n^{(\alpha, \beta)}(x) = R_n^{(\alpha, \beta-n)}(x), \quad n \geq 1, \quad (2.6)$$

de onde, usando (1.19) e (2.2), segue que

$$\mathcal{Q}_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-2i)^n \left( \beta - n + i \frac{\alpha}{2} \right)_n {}_2F_1 \left( -n, 2\beta - 1 - n; \beta - n + i \frac{\alpha}{2}; \frac{1-ix}{2} \right). \quad (2.7)$$

Com esta representação, temos que

$$\frac{d\mathcal{Q}_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{dx} = n(2\beta + n - 1) \mathcal{Q}_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x). \quad (2.8)$$

Então, usando a equação diferencial (2.3), (2.6) e (2.8) segue a relação de recorrência de três termos

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0^{(\alpha, \beta)}(x) &= 1, \quad \mathcal{Q}_1^{(\alpha, \beta)}(x) = 2(\beta - 1)x + \alpha, \\ \mathcal{Q}_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) &= [\alpha + 2(\beta - n - 1)x] \mathcal{Q}_n^{(\alpha, \beta)}(x) - n(-2\beta + n + 1)(1 + x^2) \mathcal{Q}_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Também em [41] foi apresentado uma função geradora para os polinômios  $\mathcal{Q}_n^{(\alpha, \beta)}$  obtida a partir da fórmula tipo Rodrigues (2.5). Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{n!} w^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+x^2)^n}{\omega^{(\alpha,\beta)}(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\omega^{(\alpha,\beta)}(x)] \frac{w^n}{n!} \\
 &= \frac{1}{\omega^{(\alpha,\beta)}(x)} \sum_{n=0}^{\infty} (1+x^2)^n \frac{d^n}{dx^n} [\omega^{(\alpha,\beta)}(x)] \frac{w^n}{n!} \\
 &= \frac{1}{\omega^{(\alpha,\beta)}(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dw^n} [\omega^{(\alpha,\beta)}(x + w(1+x^2))] \Big|_{w=0} \frac{w^n}{n!} \\
 &= \frac{\omega^{(\alpha,\beta)}(x + w(x^2 + 1))}{\omega^{(\alpha,\beta)}(x)}.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Para o desenvolvimento das próximas seções deste trabalho sobre os polinômios CRR utilizamos a notação modificada

$$\mathcal{P}_n(b; x) = \frac{(-1)^n}{2^n (\lambda)_n} Q_n^{(2\eta, -\lambda+1)}(x), \quad n \geq 1, \tag{2.11}$$

onde  $b = \lambda + i\eta$  e  $\lambda > 0$ . Esta notação é baseada na notação utilizada no recente trabalho de Ismail e Ranga [26]. Vale observar também que, usando (2.11), (2.6) e (2.3), segue que  $y(x) = \mathcal{P}_n(b; x)$  satisfaz a equação diferencial

$$(x^2 + 1) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2[(\lambda + n - 1)x - \eta] \frac{dy}{dx} + n(n - 1 + 2\lambda)y = 0. \tag{2.12}$$

Além disso, de (2.8) e (2.11), temos

$$\frac{d\mathcal{P}_n(b; x)}{dx} = n(1 - \ell_n^{(\lambda)}) \mathcal{P}_{n-1}(b; x), \tag{2.13}$$

onde

$$\ell_n^{(\lambda)} = \frac{n - 1}{2(\lambda + n - 1)}, \quad n \geq 1. \tag{2.14}$$

Note que  $\{\ell_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$  é a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada  $\{d_{n+1}\}_{n \geq 1}$  definida no Exemplo 1.3.

## 2.2 Polinômios CRR e Polinômios Ortogonais na Circunferência Unitária

Como mencionamos anteriormente a partir desta seção usaremos a notação modificada

$$\mathcal{P}_n(b; x) = \frac{(-1)^n}{2^n (\lambda)_n} Q_n^{(2\eta, -\lambda+1)}(x), \quad n \geq 1, \tag{2.15}$$

onde  $b = \lambda + i\eta$  e  $\lambda > 0$ . Apresentamos aqui os novos resultados obtidos sobre os polinômios CRR. Mostramos que os polinômios CRR estão relacionados com uma classe de polinômios ortogonais na circunferência unitária e apresentamos algumas

consequências desta relação. Em particular, parte do próximo teorema, que caracteriza os polinômios  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$ , segue de resultados da seção anterior. Entretanto, apresentamos uma demonstração utilizando a relação dos polinômios  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  com os polinômios para-ortogonais.

**Teorema 2.1.** *Os polinômios  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  podem ser dados através da expressão hipergeométrica*

$$\mathcal{P}_n(b; x) = \frac{(x-i)^n (2\lambda)_n}{2^n (\lambda)_n} {}_2F_1\left(-n, b; b + \bar{b}; \frac{-2i}{x-i}\right), \quad n \geq 1,$$

e satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$\mathcal{P}_{n+1}(b; x) = (x - c_{n+1}^{(b)})\mathcal{P}_n(b; x) - d_{n+1}^{(b)}(x^2 + 1)\mathcal{P}_{n-1}(b; x), \quad n \geq 1, \quad (2.16)$$

com  $\mathcal{P}_0(b; x) = 1$  e  $\mathcal{P}_1(b; x) = x - c_1^{(b)}$ , onde

$$c_n^{(b)} = \frac{\eta}{\lambda + n - 1} \quad e \quad d_{n+1}^{(b)} = d_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{1}{4} \frac{n(n + 2\lambda - 1)}{(n + \lambda - 1)(n + \lambda)}, \quad n \geq 1. \quad (2.17)$$

Além disso, se  $\lambda > 1/2$ , então

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \frac{\mathcal{P}_n(b; x)}{(1+x^2)^n} \nu^{(\lambda, \eta)}(x) dx = \gamma_n^{(\lambda)} \delta_{m,n}, \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

onde

$$\nu^{(\lambda, \eta)}(x) = \frac{2^{2\lambda-1} |\Gamma(b)|^2 e^{\eta\pi}}{\Gamma(2\lambda-1) 2\pi} \omega^{(2\eta, -\lambda+1)}(x) = \frac{2^{2\lambda-1} |\Gamma(b)|^2 e^{\eta\pi}}{\Gamma(2\lambda-1) 2\pi} \frac{[e^{-\operatorname{arccot}(x)}]^{2\eta}}{(1+x^2)^\lambda}.$$

Aqui,  $\gamma_0^{(\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} \nu^{(\lambda, \eta)}(x) dx = 1$  e  $\gamma_n^{(\lambda)} = (1 - \mathcal{L}_n^{(\lambda)})\gamma_{n-1}^{(\lambda)}$ ,  $n \geq 1$ , com

$$\mathcal{L}_n^{(\lambda)} = \frac{1}{2} \frac{2\lambda + n - 2}{\lambda + n - 1}, \quad n \geq 1. \quad (2.18)$$

*Demonstração.* Seja  $b = \lambda + i\eta$ ,  $\lambda > 0$  e  $\{\Phi_n(b; \cdot)\}_{n \geq 0}$  a sequência de polinômios ortogonais de Szegő associados a medida  $\mu^{(b)}$  definidos no Exemplo 1.12.

Seja  $\{\mathcal{R}_n(b; \cdot)\}_{n \geq 0}$  a sequência de polinômios dada por

$$\mathcal{R}_n(b; z) = \frac{2^n}{(x-i)^n} \mathcal{P}_n(b; x), \quad n \geq 0, \quad (2.19)$$

onde  $z = (x+i)/(x-i)$  ou, equivalentemente,  $x = i(z+1)/(z-1)$ . Esta mudança de variável é também conhecida por *transformação de Cayley* e leva a reta estendida  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  na circunferência unitária  $\mathbb{T} := \{z = e^{i\theta}: 0 \leq \theta < 2\pi\}$  [46, p. 42].

Utilizando (2.12) e (2.19), segue que

$$z(1-z)\frac{d^2\mathcal{R}_n(b; z)}{dz^2} - [b + \bar{b} - (-n + b + 1)(1-z)]\frac{d\mathcal{R}_n(b; z)}{dz} + nb\mathcal{R}_n(b; z) = 0, \quad (2.20)$$

para  $n \geq 1$ . Comparando (2.20) com a equação diferencial da hipergeométrica de Gauss (1.11), segue que

$$\mathcal{R}_n(b; z) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda)_n} {}_2F_1(-n, b; b + \bar{b}; 1 - z), \quad n \geq 0, \quad (2.21)$$

e com isso obtemos a representação hipergeométrica para  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$ .

Observe que  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  satisfaz a relação de recorrência (2.16) se, e somente se,  $\mathcal{R}_n(b; \cdot)$  satisfaz a relação de recorrência

$$\mathcal{R}_{n+1}(b; z) = \left[ (1 + i c_{n+1}^{(b)})z + (1 - i c_{n+1}^{(b)}) \right] \mathcal{R}_n(b; z) - 4d_{n+1}^{(b)}z\mathcal{R}_{n-1}(b; z), \quad (2.22)$$

para  $n \geq 1$ , com  $\mathcal{R}_0(b; z) = 1$  e  $\mathcal{R}_1(b; z) = (1 + i c_1^{(b)})z + (1 - i c_1^{(b)})$ , onde os coeficientes  $c_n^{(b)}$  e  $d_{n+1}^{(b)}$  são como em (2.17). Este fato foi apresentado no Exemplo 1.15. Note que esta relação de recorrência também pode ser obtida diretamente de (2.9) e (2.15).

Além disso, usando as representação (1.34) e (2.21) e a propriedade de derivação da função hipergeométrica, ver (1.10), temos

$$\Phi_n(b; z) = \frac{(\lambda)_{n+1}}{(b)_{n+1}} \frac{1}{n+1} \mathcal{R}'_{n+1}(b; z), \quad n \geq 0. \quad (2.23)$$

Sejam

$$\varphi_n(b; z) = \frac{|(b+1)_n|}{\sqrt{(2\lambda+1)_n} n!} \Phi_n(b; z), \quad n \geq 0, \quad (2.24)$$

os polinômios ortonormais associados a medida  $\mu^{(b)}$  e os núcleos associados

$$K_n(b; z, \zeta) = \sum_{j=0}^n \overline{\varphi_j(b; \zeta)} \varphi_j(b; z), \quad n \geq 0. \quad (2.25)$$

Como vimos na Observação 1.16, quando  $\lambda > 1/2$ , os polinômios  $\mathcal{R}_n(b; \cdot)$  são também polinômios núcleos dados em termos dos polinômios ortogonais  $\Phi_n(b-1; \cdot)$  quando  $\zeta = 1$ . A saber,

$$\mathcal{R}_n(b; z) = \xi_n^{(b-1)} K_n(b-1; z, 1), \quad n \geq 0,$$

onde

$$\xi_0^{(b-1)} = \int_{\mathbb{T}} d\mu^{(b-1)}(\zeta), \quad \xi_n^{(b-1)} = \xi_0^{(b-1)} \prod_{j=1}^n (1 - \mathcal{L}_j^{(\lambda)}), \quad n \geq 1.$$

Aqui,  $\{\mathcal{L}_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$  é a sequência dada em (1.3) e, visto que a medida  $\mu^{(b-1)}$  é uma medida



de probabilidade,  $\xi_0^{(b-1)} = 1$ . Vimos em (1.47) que

$$\int_{\mathbb{T}} z^{-k} \mathcal{R}_n(b; z) (1 - z^{-1}) d\mu^{(b-1)}(z) = 0, \quad 0 \leq k \leq n - 1. \quad (2.26)$$

Fazendo a transformação de Cayley na integral (2.26) obtemos

$$\int_{-\infty}^{-\infty} \left( \frac{x-i}{x+i} \right)^k \mathcal{R}_n \left( b; \frac{x-i}{x+i} \right) \frac{x-i}{x+i} \left( \frac{x-i}{x+i} - 1 \right) d\mu^{(b-1)} \left( \frac{x-i}{x+i} \right) = 0,$$

para  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ . Usando relação (2.19) segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-i)^k (x+i)^{n-k-1} \frac{\mathcal{P}_n(b; x)}{(x^2+1)^n} \left[ -d\mu^{(b-1)} \left( \frac{x-i}{x+i} \right) \right] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Para concluir a ortogonalidade, basta observar que o conjunto  $\{(x-i)^k (x+i)^{n-k-1} : k = 0, \dots, n - 1\}$  gera o espaço dos polinômios de grau no máximo  $n - 1$ , denotado por  $\mathbb{P}_{n-1}$ . Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{\mathcal{P}_n(b; x)}{(1+x^2)^n} \nu^{(\lambda, \eta)}(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

onde

$$\nu^{(\lambda, \eta)}(x) dx = \frac{2^{2\lambda-1} |\Gamma(b)|^2 e^{\eta\pi}}{\Gamma(2\lambda - 1)} \frac{1}{2\pi} \omega^{(2\eta, -\lambda+1)}(x) dx = -d\mu^{(b-1)} \left( \frac{x-i}{x+i} \right).$$

Finalmente, para obter as fórmulas para  $\gamma_n^{(\lambda)}$ , segue da relação de recorrência (2.16),

$$\frac{(x^2+1)}{(x^2+1)} \frac{x^{n-1}}{(x^2+1)^n} \mathcal{P}_{n+1}(b; x) = (x - c_{n+1}^{(b)}) \frac{x^{n-1}}{(x^2+1)^n} \mathcal{P}_n(b; x) - d_{n+1}^{(b)} \frac{x^{n-1}}{(x^2+1)^{n-1}} \mathcal{P}_{n-1}(b; x),$$

para  $n \geq 1$ . Assim, integrando com respeito a  $\nu^{(\lambda, \eta)}(x) dx$  obtemos

$$\gamma_{n+1}^{(\lambda)} = \gamma_n^{(\lambda)} - d_{n+1}^{(\lambda)} \gamma_{n-1}^{(\lambda)}, \quad n \geq 1,$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\gamma_n^{(\lambda)}}{\gamma_{n-1}^{(\lambda)}} \left( 1 - \frac{\gamma_{n+1}^{(\lambda)}}{\gamma_n^{(\lambda)}} \right) = d_{n+1}^{(\lambda)}, \quad n \geq 1.$$

Usando a sequência de parâmetros maximal para  $\{d_n\}_{n \geq 1}$  (1.3), o que precisamos verificar é que

$$\gamma_1^{(\lambda)} / \gamma_0^{(\lambda)} = (1 - \mathcal{L}_1^{(\lambda)}) = (2\lambda)^{-1}.$$

É fácil ver que,

$$\gamma_0^{(\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} \nu^{(\lambda, \eta)}(x) dx = \int_{\mathbb{T}} d\mu^{(b-1)}(\zeta) = 1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\gamma_1^{(\lambda)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\mathcal{P}_1(b; x)}{(1+x^2)} \nu^{(\lambda, \eta)}(x) dx = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{T}} \frac{z+1}{z} \mathcal{R}_1(b; z) d\mu^{(b-1)}(z) \\ &= \frac{1}{4} [(1 + ic_1^{(b)})\mu_{-1}^{(b-1)} + 2 + (1 - ic_1^{(b)})\mu_1^{(b-1)}].\end{aligned}$$

Assim, usando a expressão para  $c_1^{(b)}$  juntamente com  $\mu_1^{(b-1)} = \bar{\mu}_{-1}^{(b-1)} = (-b+1)/\bar{b}$ , obtemos  $\gamma_1^{(\lambda)} = (2\lambda)^{-1}$ . Isto completa a prova do teorema.  $\square$

Utilizando a relação entre os polinômios CRR e os polinômios para-ortogonais é possível deduzir outras propriedades como descrevemos nos próximos teoremas. Se  $\lambda > 0$ , de forma semelhante a (1.49), os polinômios ortogonais  $\Phi_n(b; \cdot)$  também podem ser obtidos através dos polinômios  $\mathcal{R}_n(b+1; \cdot)$  por

$$\Phi_n(b; z) = \frac{(\lambda+1)_n}{(b+1)_n} [\mathcal{R}_n(b+1; z) - 2(1 - \mathcal{L}_n^{(\lambda+1)})\mathcal{R}_{n-1}(b+1; z)], \quad n \geq 1, \quad (2.27)$$

onde  $\{\mathcal{L}_n^{(\lambda+1)}\}_{n \geq 1}$  é a sequência de parâmetros maximal de  $\{d_{n+1}^{(\lambda+1)}\}_{n \geq 1}$  dado em (1.3). Para mais detalhes ver [10] e as referências lá contidas.

Desta forma, combinando (2.19) com as duas diferentes expressões descritas por (1.49) e (2.27) para  $\Phi_n(b; \cdot)$ , obtemos a fórmula de conexão

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n(b+1; x) - \frac{n}{2(\lambda+n)}(x-i)\mathcal{P}_{n-1}(b+1; x) \\ = \frac{\lambda}{ib} \left[ \mathcal{P}_{n+1}(b; x) - \frac{2\lambda+n}{2(\lambda+n)}(x-i)\mathcal{P}_n(b; x) \right],\end{aligned}$$

$n \geq 1$ , para os polinômios  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$ . Como,  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  e  $\mathcal{P}_{n+1}(b; \cdot)$  são polinômios com coeficientes reais segue o seguinte teorema.

**Teorema 2.2.** *Seja  $\text{Re}(b) = \lambda > 0$ . Então,*

$$\mathcal{P}_n(b+1; x) - \frac{n}{2(\lambda+n)} \left( x + \frac{\eta}{\lambda} \right) \mathcal{P}_{n-1}(b+1; x) = \frac{2\lambda+n}{2(\lambda+n)} \mathcal{P}_n(b; x)$$

e

$$\frac{\eta}{\lambda} \mathcal{P}_n(b+1; x) - \frac{n}{2(\lambda+n)} \left( \frac{\eta}{\lambda} x - 1 \right) \mathcal{P}_{n-1}(b+1; x) = - \left[ \mathcal{P}_{n+1}(b; x) - \frac{2\lambda+n}{2(\lambda+n)} x \mathcal{P}_n(b; x) \right],$$

para  $n \geq 1$ .

Uma fórmula de conexão entre  $\mathcal{R}_n(b+1; \cdot)$  e  $\mathcal{R}_n(b; \cdot)$  foi obtida em [8, eq. 4.4], a saber,

$$\rho^{(n,b)}(z-1)^2 \mathcal{R}_n(b+1; z) = \mathcal{R}_{n+2}(b; z) + \kappa_1^{(n,b)} \mathcal{R}_{n+1}(b; z) + \kappa_1^{(n,b)} z \mathcal{R}_n(b; z), \quad (2.28)$$

para  $n \geq 0$ , onde

$$\rho^{(n,b)} = \frac{b(b+n+1)}{\lambda(\lambda+n+1)},$$

$$\kappa_1^{(n,b)} = \frac{(b-\bar{b})(2\lambda+n+1)}{\bar{b}(\lambda+n+1)}, \quad \kappa_2^{(n,b)} = -\frac{b(2\lambda+n)(2\lambda+n+1)}{\bar{b}(\lambda+n)(\lambda+n+1)}.$$

Desta forma, usando (2.19) em (2.28) e separando a parte real e a parte imaginária da equação, resulta no próximo teorema.

**Teorema 2.3.** *Seja  $\text{Re}(b) = \lambda > 0$ . Então,*

$$\begin{aligned} -\left(\lambda+n+1 - \frac{\eta^2}{\lambda}\right) \mathcal{P}_n(b+1; x) &= (\lambda+n+1) \mathcal{P}_{n+2}(b; x) \\ &+ \frac{\eta(2\lambda+n+1)}{|b|^2} (-\eta x + \lambda) \mathcal{P}_{n+1}(b; x) \\ &+ \frac{1}{4} \frac{(\eta^2 - \lambda^2)(2\lambda+n)(2\lambda+n+1)}{|b|^2(\lambda+n)} (x^2+1) \mathcal{P}_n(b; x). \end{aligned}$$

e

$$-\frac{\eta}{\lambda} \mathcal{P}_n(b+1; x) = \frac{\eta}{|b|^2} (\lambda x + \eta) \mathcal{P}_{n+1}(b; x) - \frac{1}{2} \frac{(\lambda\eta)(2\lambda+n)}{|b|^2(\lambda+n)} (x^2+1) \mathcal{P}_n(b; x).$$

## 2.3 Modelo Eletrostático para Polinômios CRR

Conforme mencionado, o modelo eletrostático para os zeros dos polinômios ortogonais clássicos foi obtido por Stieltjes, ver em [49]. Posteriormente, ele também trabalhou com um problema mais geral considerando polinômios (também chamados de polinômios de Heine-Stieltjes) que são soluções de uma equação diferencial de Lamé. Desde então, este tópico tem chamado a atenção de vários pesquisadores, incluindo [16] e [36]. Nessa seção apresentamos uma interpretação eletrostática para os zeros da sequência  $\{\mathcal{P}_n(b; \cdot)\}_{n \geq 0}$ .

Antes de apresentarmos a interpretação eletrostática precisamos do próximo lema que contém parte dos resultados do Teoremas 2.1 e Teorema 2.2 apresentados em [26].

**Lema 2.4.** *Seja  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  a sequência de polinômios que satisfazem a relação de recorrência do tipo  $R_{II}$ , isto é,*

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= (x - c_{n+1})P_n(x) - d_{n+1}(x^2 + 1)P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \\ P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x - c_1, \end{aligned}$$

onde  $\{c_n\}_{n \geq 1}$  é uma sequência real e  $\{d_{n+1}\}_{n \geq 1}$  é uma sequência encadeada. Denotemos por  $\mathbf{p}_n$  o coeficiente do termo de maior grau de  $P_n$ . Então,  $\mathbf{p}_0 = 1$ ,  $\mathbf{p}_1 = 1$  e  $\mathbf{p}_n = (1 - l_n)\mathbf{p}_{n-1}$ , onde  $\{l_n\}_{n \geq 1}$  é a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada  $\{d_{n+1}\}_{n \geq 1}$ . Além disso, os zeros de  $P_n$  são reais e simples.

É fácil ver que  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  satisfaz uma relação de recorrência do tipo  $R_{II}$ , de onde  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  tem grau  $n$ , zeros reais e simples. O próximo resultado, enunciado em uma forma mais geral, combinado com o Lema 2.4 vai garantir que  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  é a única solução polinomial de grau  $n$  da equação diferencial (2.12).

**Lema 2.5.** *Considere  $\omega \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}(\omega) \neq 0$ ,  $\lambda > 0$  e  $\eta \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $\lambda$  não é um número natural ou  $(\lambda + n - 1)\text{Re}(\omega) - \eta \neq 0$ , então a equação diferencial*

$$(x - \omega)(x - \bar{\omega})\frac{d^2 f}{dx^2} - 2[(\lambda + n - 1)x - \eta]\frac{df}{dx} + n(n - 1 + 2\lambda)f = 0 \quad (2.29)$$

*possui uma única solução polinomial. Caso contrário, possui duas soluções polinomiais linearmente independentes com grau  $n$  e  $2\lambda + n - 1 \geq n + 1$ .*

*Em particular, quando  $\omega = i$  a solução polinomial de grau  $n$  é  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, observe que a unicidade da solução polinomial de (2.29) é equivalente a unicidade da solução polinomial da equação diferencial

$$(y^2 + 1)\frac{d^2 g}{dy^2} - 2\{(\lambda + n - 1)y + [(\lambda + n - 1)\text{Re}(\omega) - \eta]/\text{Im}(\omega)\}\frac{dg}{dy} + n(n - 1 + 2\lambda)g = 0. \quad (2.30)$$

Mais precisamente, se  $g(y)$  é uma solução da equação diferencial (2.30), então  $g([x - \text{Re}(\omega)]/\text{Im}(\omega))$  é solução da equação diferencial (2.29). Isto é garantido fazendo a mudança de variável  $y = [x - \text{Re}(\omega)]/\text{Im}(\omega)$ .

Para simplificar a notação vamos denotar a operação de derivação por uma aspa, isto é,  $df/dx = f'$ . Desta forma, para provar a primeira parte do teorema vamos supor que  $p$  e  $q$  são duas soluções polinomiais de (2.30) e mostrar que o Wronskiano  $W(y) = p'(y)q(y) - q'(y)p(y)$  é nulo, ou seja,  $p$  e  $q$  são linearmente dependentes. De fato, temos

$$(y^2 + 1)p''(y) - 2\{(\lambda + n - 1)y + [(\lambda + n - 1)\text{Re}(\omega) - \eta]/\text{Im}(\omega)\}p'(y) + n(n - 1 + 2\lambda)p(y) = 0, \quad (2.31)$$

$$(y^2 + 1)q''(y) - 2\{(\lambda + n - 1)y + [(\lambda + n - 1)\text{Re}(\omega) - \eta]/\text{Im}(\omega)\}q'(y) + n(n - 1 + 2\lambda)q(y) = 0.$$

Multiplicando a primeira equação em (2.31) por  $q(y)$  e a segunda equação por  $p(y)$  e subtraindo os resultados, obtemos

$$(y^2 + 1)W'(y) = 2\{(\lambda + n - 1)y + [(\lambda + n - 1)\text{Re}(\omega) - \eta]/\text{Im}(\omega)\}W(y).$$

Assim,

$$\begin{aligned} W(y) &= \text{const.} \cdot \exp \left( \int \frac{2\{(\lambda + n - 1)y + [(\lambda + n - 1) \text{Re}(\omega) - \eta]/ \text{Im}(\omega)\}}{(y^2 + 1)} dy \right) \\ &= \text{const.} \cdot (y^2 + 1)^{(\lambda+n-1)} \exp \left( \frac{(\lambda + n - 1) \text{Re}(\omega) - \eta}{\text{Im}(\omega)} \arctan(y) \right). \end{aligned}$$

Entretanto, como  $W$  é um polinômio, segue que  $W(y) = 0$ .

Para a segunda parte do teorema, usamos a relação entre os polinômios de Romanovski-Routh e os polinômios de Jacobi,  $P_n^{(\alpha, \bar{\alpha})}$ , com parâmetros e variável complexos como vimos em (2.2). Temos que  $P_n^{(\alpha, \bar{\alpha})}$  satisfaz a equação diferencial

$$(1 - z^2)h''(z) - 2\{i \text{Im}(\alpha) + [\text{Re}(\alpha) + 1]z\}h'(z) + n(2 \text{Re}(\alpha) + 1 + n)h(z) = 0. \quad (2.32)$$

Fazendo a mudança de variável  $z = iy$  em (2.32) obtemos a equação diferencial dos polinômios de Romanovski-Routh. Mais que isso, fixando  $-\text{Re}(\alpha) = \lambda + n$  e  $\text{Im}(\alpha) = -[(\lambda + n - 1) \text{Re}(r) - \eta]/ \text{Im}(r)$  temos que  $h(z)$  é uma solução de (2.32) se, e somente se,  $h(iy)$  é uma solução de (2.30). Dessa relação obtemos a representação dos polinômios de Romanovski-Routh em termos dos polinômios de Jacobi, mencionada em (2.2) e também a forma explícita para a segunda solução de (2.30) [49, p. 65], que é,

$$q(y) = (1 - iy)^{-\alpha} {}_2F_1 \left( -n - \alpha, n + \bar{\alpha} + 1; 1 - \alpha; \frac{1 - iy}{2} \right). \quad (2.33)$$

Usando que  $\text{Im}(\alpha) = 0$ ,  $-\text{Re}(\alpha) = \lambda + n$  e que  $\lambda$  é um inteiro positivo concluímos que o grau de  $q(y)$  é  $-\alpha - (n + \bar{\alpha} + 1) = 2\lambda + n - 1 \geq n + 1$ .  $\square$

**Teorema 2.6.** *Considere a função energia dada por  $n$  cargas unitárias positivas localizadas em  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  que se movem livremente sobre a reta real e por duas cargas fixas negativas de magnitude  $\lambda_n = (\lambda + n - 1)/2$  nas posições  $i$  e  $-i$  que obedecem a lei do potencial logarítmico na presença de um campo externo dado em termos da função  $\arctan(x)$ . Então a energia total do sistema, definida em*

$$\Lambda := \{(x_1, \dots, x_n) : \infty < x_1 < \dots < x_n < \infty\}$$

é

$$E(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j < k \leq n} -\ln |x_j - x_k| + \lambda_n \sum_{j=1}^n \left[ \ln |x_j - i| + \ln |x_j + i| \right] - \eta \sum_{j=1}^n \arctan(x_j).$$

Essa função energia tem um único ponto de equilíbrio em  $\Lambda$  e ocorre precisamente quando  $\{x_1, \dots, x_n\}$  são os zeros de  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$ .

*Demonstração.* O problema de minimizar  $E(x_1, \dots, x_n)$  é equivalente ao de maximizar

a função

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, \dots, x_n) &= e^{-2E(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \\ &= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_j - x_i)^2 \prod_{j=1}^n (x_j^2 + 1)^{-(\lambda+n-1)} \prod_{j=1}^n e^{2\eta \arctan(x_j)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Note que  $T$  é contínua, não negativa e se anula no infinito. Assim,  $T$  tem pelo menos um ponto de máximo. Reescrevamos a função  $T$  como

$$s(x \setminus x_k) p_k^2(x_k) (x_k^2 + 1)^{-(\lambda+n-1)} e^{2\eta \arctan(x_k)}, \quad (2.35)$$

onde  $s(x \setminus x_k)$  é a parte de  $T$  que não depende da variável  $x_k$ ,

$$p(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n) \text{ e } p_k(x) = p(x)/(x - x_k). \quad (2.36)$$

Seja  $X = (x_1, \dots, x_n)$ . Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(X)}{\partial x_k} &= s(x \setminus x_k) \left\{ 2p_k(x_k) p_k'(x_k) [(x_k^2 + 1)]^{-(\lambda+n-1)} e^{2\eta \arctan(x_k)} \right\} \\ &\quad + s(x \setminus x_k) p_k^2(x_k) \partial_{x_k} \left\{ [(x_k^2 + 1)]^{-(\lambda+n-1)} e^{2\eta \arctan(x_k)} \right\} \\ &= T(X) \left\{ \frac{2p_k'(x_k)}{p_k(x_k)} - (\lambda + n - 1) \frac{2x_k}{(x_k^2 + 1)} + \frac{2\eta}{(x_k^2 + 1)} \right\} \\ &= T(X) \left\{ \frac{p''(x_k)}{p'(x_k)} - 2 \left[ \frac{(\lambda + n - 1)x_k - \eta}{(x_k^2 + 1)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Se  $X$  é um ponto de máximo da função  $T$ , então

$$T(X) \neq 0$$

e

$$\frac{p''(x_k)}{p'(x_k)} - 2 \left[ \frac{(\lambda + n - 1)x_k - \eta}{(x_k^2 + 1)} \right] = 0, \quad \text{para } k = 1, \dots, n,$$

que é equivalente a

$$(x_k^2 + 1)p''(x_k) - 2[(\lambda + n - 1)x_k - \eta]p'(x_k) = 0, \quad \text{para } k = 1, \dots, n.$$

Como  $(x^2 + 1)p''(x) - 2[(\lambda + n - 1)x - \eta]p'(x)$  é um polinômio de grau  $n$  com os mesmos zeros do polinômio  $p(x)$ , segue que

$$(x^2 + 1)p''(x) - 2[(\lambda + n - 1)x - \eta]p'(x) + n(n - 1 + 2\lambda)p(x) = 0,$$

que é a equação diferencial (2.29) com  $\omega = i$ , que possui uma única solução polinomial de grau  $n$ . Portanto,  $p(x) = \text{const.} \mathcal{P}_n(b; x)$ .  $\square$

Para os casos  $\omega \in \mathbb{C}$  e  $\text{Im}(\omega) \neq 0$ , a função energia para a solução polinomial de grau  $n$  da equação diferencial (2.29) é

$$E(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j < i \leq n} -\ln |x_j - x_i| + \lambda_n \sum_{j=1}^n \left[ \ln |x_j - \omega| + \ln |x_j + \bar{\omega}| \right] + \kappa_n \sum_{j=1}^n \arctan \left( \frac{x_j - \text{Re}(\omega)}{\text{Im}(\omega)} \right),$$

onde  $\kappa_n = [(\lambda + n - 1) \text{Re}(\omega) - \eta] / \text{Im}(\omega)$ . A solução polinomial de grau  $n$  pode ser expressa por

$$\mathcal{R}_n^{(\alpha, \beta)} \left( \frac{x - \text{Re}(\omega)}{\text{Im}(\omega)} \right),$$

com  $\alpha = -2[(\lambda + n - 1) \text{Re}(\omega) - \eta] / \text{Im}(\omega)$  e  $\beta = -(\lambda + n - 1)$ . Além disso, se  $(\lambda + n - 1) \text{Re}(\omega) - \eta = 0$ , a função energia obtida coincide com os casos considerados em [36] por Orive e García. Em [36] foram considerados problemas de equilíbrio envolvendo cargas unitárias que se movem em  $\mathbb{R}$  na presença de cargas fixas localizadas em  $\mathbb{C}$ .

## 2.4 Funções Geradoras para os Polinômios CRR

As funções geradoras são uma importante ferramenta na teoria de funções especiais e polinômios ortogonais. Por exemplo, a partir da função geradora para polinômios ortogonais clássicos, é possível recuperar as relações de recorrência. Nesta seção, estabelecemos uma função geradora para a sequência de polinômios CRR mônicos. Esta função, em contraste com a função apresentada em (2.10), é uma função inteira, cujas propriedades são estudadas no próximo capítulo.

O teorema a seguir é uma aplicação da função geradora dos polinômios  $\mathcal{Q}_n^{(\alpha, \beta)}$  que foi apresentada (2.10) com as escolhas de parâmetros adequadas de forma a obter  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$ , uma vez que temos (2.11).

**Teorema 2.7.** *Para os polinômios CRR  $\{\mathcal{P}_n(b; \cdot)\}_{n \geq 0}$  onde  $b = \lambda + i\eta$ ,  $\lambda > 0$ , temos*

$$\frac{e^{2\eta \operatorname{arccot}(x)}}{[(xw - 1)^2 + w^2]^\lambda e^{2\eta \operatorname{arccot}[x - w(x^2 + 1)]}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (\lambda)_n \mathcal{P}_n(b; x) \frac{w^n}{n!}. \quad (2.38)$$

A seguir, apresentamos uma outra função geradora utilizando a sequência  $\{\widehat{\mathcal{P}}_n(b; \cdot)\}_n$  de polinômios CRR mônicos. Seja  $\mathfrak{p}_n^{(b)}$  o coeficiente do termo de maior grau do polinômio  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$ . Usando a relação de recorrência de três termos, ou simplesmente aplicando o Lema 2.4, segue que

$$\mathfrak{p}_n^{(b)} = (1 - \ell_n^{(\lambda)}) \mathfrak{p}_{n-1}^{(b)} = \frac{(2\lambda)_n}{2^n (\lambda)_n}, \quad (2.39)$$

onde  $\{\ell_n^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$  é a sequência de parâmetros minimal dada em (1.2). Assim,

$$\widehat{\mathcal{P}}_n(b; x) = \frac{1}{\mathfrak{p}_n^{(b)}} \mathcal{P}_n(b; x) = \frac{2^n (\lambda)_n}{(2\lambda)_n} \mathcal{P}_n(b; x), \quad n \geq 1. \quad (2.40)$$

Ademais, usando (2.13) e (2.40), segue que a sequência  $\{\widehat{\mathcal{P}}_n(b; \cdot)\}_n$  satisfaz

$$\frac{d\widehat{\mathcal{P}}_n(b; x)}{dx} = n\widehat{\mathcal{P}}_{n-1}(b; x) \quad (2.41)$$

e de (2.16) e (2.40) obtemos a relação de recorrência para os polinômios CRR mônicos

$$\widehat{\mathcal{P}}_{n+1}(b; x) = \frac{2}{2\lambda + n} [(\lambda + n)x - \eta] \widehat{\mathcal{P}}_n(b; x) - \frac{n}{2\lambda + n} (x^2 + 1) \widehat{\mathcal{P}}_{n-1}(b; x), \quad n \geq 1, \quad (2.42)$$

$$\widehat{\mathcal{P}}_0(b; x) = 1, \quad \widehat{\mathcal{P}}_1(b; x) = x - \eta/\lambda.$$

Uma sequência de polinômios que satisfazem a propriedade (2.41) é chamada de *sequência de Appell* [5]. É sabido na literatura que toda sequência de Appell possui uma função geradora da forma  $e^{xw} F(w)$ . O próximo teorema fornece a função geradora explicitamente.

**Teorema 2.8.** *A sequência de polinômios CRR mônicos  $\{\widehat{\mathcal{P}}_n(b; \cdot)\}_{n \geq 0}$  é uma sequência de Appell com função geradora dada por*

$$e^{xw} \mathcal{N}(b; w) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{P}}_n(b; x) \frac{w^n}{n!}, \quad (2.43)$$

onde

$$\mathcal{N}(b; w) = e^{-iw} {}_1F_1(b; b + \bar{b}; 2iw). \quad (2.44)$$

*Demonstração.* Primeiramente observe que, escolhendo  $x = i$  na relação de recorrência (2.16) e usando (2.40), resulta em

$$\widehat{\mathcal{P}}_n(b; i) = \frac{2^n i^n (b)_n}{(2\lambda)_n}, \quad n \geq 0.$$

Tomando  $\mathcal{N}(b; w) = e^{-iw} H(b; w)$ , onde  $H(b; w) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j^{(b)} w^j$ , precisamos mostrar que

$$h_j^{(b)} = \frac{(b)_j 2^j i^j}{(2\lambda)_j n!}, \quad j \geq 0.$$

Temos

$$e^{xw} \mathcal{N}(b; w) = e^{(x-i)w} \sum_{j=0}^{\infty} h_j^{(b)} w^j = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{P}}_n(b; x) \frac{w^n}{n!}.$$



Assim,

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-i)^k}{k!} w^k \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} h_j^{(b)} w^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^n h_{n-l}^{(b)} \frac{(x-i)^l}{l!} \right) w^n = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{P}}_n(b; x) \frac{w^n}{n!},$$

e igualando os coeficientes das potências de mesmo grau, temos

$$\widehat{\mathcal{P}}_n(b; x) = n! \sum_{l=0}^n h_{n-l}^{(b)} \frac{(x-i)^l}{l!}, \quad n \geq 0. \quad (2.45)$$

Usando a representação hipergeométrica para  $\widehat{\mathcal{P}}_n(b; \cdot)$  dada no Teorema 2.1 segue que

$$h_n^{(b)} = \frac{1}{n!} \widehat{\mathcal{P}}_n(b; i) = \frac{(b)_n 2^n i^n}{(2\lambda)_n n!}, \quad n \geq 0,$$

e isto completa a prova. □

**Observação 2.9.** A função  $H(b; \cdot)$  é a função de Kummer confluyente de primeiro tipo definida em (1.13), que é uma função inteira. Desta forma, a função geradora da sequência dos polinômios CRR mônicos é uma função inteira e o lado direito de (2.43) é absolutamente convergente em  $\mathbb{C}$ .

A função  $\mathcal{N}(b; \cdot)$ , quando  $\text{Im}(b) = \eta = 0$  e  $\text{Re}(b) = \lambda \geq 1/2$ , está relacionada com as funções de Bessel definidas em (1.17). Precisamente,

$$\mathcal{N}(\lambda; w) = \Gamma(\lambda + 1/2) \left( \frac{w}{2} \right)^{-\lambda+1/2} J_{\lambda-1/2}(w), \quad (2.46)$$

e com esta representação seguem os seguintes corolários.

**Corolário 2.10.** Para  $\alpha > -1/2$  temos a seguinte fórmula de expansão para a função de Bessel  $J_\alpha(w)$

$$e^{xw} J_\alpha(w) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left( \frac{w}{2} \right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{P}}_n(\alpha + 1/2; x) \frac{w^n}{n!}.$$

Para o próximo corolário basta fixar  $\alpha = 1/2$  e usar a representação  $J_{1/2}(w) = \sqrt{2/\pi w} \text{sen}(w)$  [24, p. 924].

**Corolário 2.11.**

$$e^{xw} w^{-1} \text{sen}(w) = e^{xw} \mathcal{N}(1; w) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{P}}_n(1, x) \frac{w^n}{n!}.$$

A função geradora está relacionada com as funções de Whittaker  $M_{k,m}$ , definidas em (1.15), da seguinte forma

$$\mathcal{N}(b; w) = \mathcal{N}(\lambda + i\eta; w) = (i2w)^{-\lambda} M_{-i\eta, \lambda-1/2}(2iw).$$

Se  $\lambda$  for um inteiro, temos que  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  está relacionada com a função de onda Coulomb regular,  $F_L(\eta, \cdot)$ , definida por

$$F_L(\eta, w) = C_L(\eta) w^{L+1} e^{-iw} {}_1F_1(L+1-i\eta; 2L+2; 2iw),$$

onde

$$C_L(\eta) = \frac{2^L e^{-\pi\eta/2} |\Gamma(L+1+i\eta)|}{(2L+1)!} \quad (2.47)$$

com  $L \geq 0$  inteiro e  $\eta \in \mathbb{R}$ , ver em [1, p. 537]. Logo, para  $\lambda = L \geq 1$  inteiro, temos

$$F_{L-1}(-\eta, w) = C_{L-1}(-\eta) w^L \mathcal{N}(b; w).$$

De maneira geral, para  $b = \lambda + i\eta$  e  $\lambda > 0$ , podemos definir a função  $\mathcal{M}(b; \cdot)$  por

$$\mathcal{M}(b; w) = \mathfrak{C}(b) w^\lambda \mathcal{N}(b; w) \quad \text{e} \quad \mathfrak{C}(b) = 2^{\lambda-1} e^{\pi\eta/2} \frac{|\Gamma(b)|}{\Gamma(2\lambda)}, \quad (2.48)$$

que chamamos de *função de onda Coulomb estendida*, pois se  $\lambda = L$  é um inteiro positivo, segue que

$$\mathcal{M}(\bar{b} + 1; w) = F_L(\eta, w) \quad \text{e} \quad \mathfrak{C}(\bar{b} + 1) = C_L(\eta). \quad (2.49)$$

Logo, usando a conexão da função geradora do Teorema 2.8 com as funções de onda Coulomb temos o próximo resultado.

**Corolário 2.12.** *A seguinte fórmula de expansão com respeito a função de onda Coulomb estendida  $\mathcal{M}(b; \cdot)$  vale*

$$e^{xw} \mathcal{M}(b; w) = \mathfrak{C}(b) w^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{P}}_n(b; x) \frac{w^n}{n!}.$$

Em particular, para a função de onda Coulomb  $F_L(\eta, \cdot)$  temos

$$e^{xw} F_L(\eta, w) = C_L(\eta) w^{L+1} \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{P}}_n(L+1-i\eta; x) \frac{w^n}{n!},$$

para  $L = 0, 1, 2, \dots$ , onde  $C_L(\eta)$  dado em (2.47).

Fazendo  $x = 0$  no Corolário 2.12 obtemos uma série de expansão

$$F_L(\eta, w) = C_L(\eta) w^{L+1} \sum_{k=L+1}^{\infty} A_k^L(\eta) w^{k-L-1},$$

onde  $(k-L-1)! A_k^L(\eta) = \widehat{\mathcal{P}}_{k-L-1}(L+1-i\eta; 0)$ . Esta expansão juntamente com a relação de recorrência de três termos (2.42) satisfeita por  $\{\widehat{\mathcal{P}}_n(L+1-i\eta; 0)\}_{n \geq 0}$  é

exatamente a fórmula de expansão para  $F_L(\eta, \cdot)$  dada em [1, p.538]. Se usarmos a expressão hipergeométrica para  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  descrita no Teorema 2.1 obtemos a expressão fechada para  $A_k^L(\eta)$ , a saber,

$$A_{k+L+1}^L(\eta) = \frac{(-i)^k}{k!} {}_2F_1(-k, L+1-i\eta; 2L+2; 2), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Fazendo  $x = -\eta/(L+1)$  no Corolário 2.12 obtemos a série de expansão para a função de onda Coulomb descrita em [34].

A seguir apresentamos outras fórmulas de expansão associadas com as funções  $\mathcal{X}(b; \cdot)$  e  $\mathcal{M}(b; \cdot)$  definidas em (2.44) e (2.48).

**Teorema 2.13.** *Seja  $b = \lambda + i\eta$ ,  $\lambda > 0$ . Considere as sequências reais  $\{\mathbf{a}_n\}_{n \geq 0} = \{\mathbf{a}_n^{(\lambda, \eta)}\}_{n \geq 0}$  e  $\{\mathbf{b}_n\}_{n \geq 0} = \{\mathbf{b}_n^{(\lambda, \eta)}\}_{n \geq 0}$  dadas por*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{n+1} \\ \mathbf{b}_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{2}{2\lambda + n} \begin{bmatrix} -\eta & -(\lambda + n) \\ (\lambda + n) & -\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_n \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix}, \quad n \geq 0,$$

com  $\mathbf{a}_0 = 1$  e  $\mathbf{b}_0 = 0$ . Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{C}(b)} w^{-\lambda} \cos(w) \mathcal{M}(b; w) &= \cos(w) \mathcal{X}(b; w) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \frac{w^n}{n!}, \\ \frac{1}{\mathfrak{C}(b)} w^{-\lambda} \sin(w) \mathcal{M}(b; w) &= \sin(w) \mathcal{X}(b; w) = w \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \mathbf{b}_{n+1} \frac{w^n}{n!}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Além disso, se  $\mathfrak{c}_n(w) = \mathbf{a}_n \cos(w) + \mathbf{b}_{n+1} w \sin(w)/(n+1)$ ,  $n \geq 0$ , então

$$\mathcal{X}(b; w) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{c}_n(w) \frac{w^n}{n!}.$$

*Demonstração.* No Teorema 2.8, fazendo  $x = i$  e  $x = -i$ , e então, respectivamente, somando e subtraindo obtemos as equações

$$\begin{aligned} 2 \cos(w) \mathcal{X}(b; w) &= \sum_{n=0}^{\infty} [\widehat{\mathcal{P}}_n(b; i) + \widehat{\mathcal{P}}_n(b; -i)] \frac{w^n}{n!}, \\ i 2 \sin(w) \mathcal{X}(b; w) &= \sum_{n=0}^{\infty} [\widehat{\mathcal{P}}_n(b; i) - \widehat{\mathcal{P}}_n(b; -i)] \frac{w^n}{n!}. \end{aligned}$$

Desta forma, segue que

$$2\mathbf{a}_n = [\widehat{\mathcal{P}}_n(b; i) + \widehat{\mathcal{P}}_n(b; -i)] \quad \text{e} \quad i 2\mathbf{b}_n = [\widehat{\mathcal{P}}_n(b; i) - \widehat{\mathcal{P}}_n(b; -i)], \quad n \geq 0.$$

Logo  $\mathbf{a}_0 = 1$  e  $\mathbf{b}_0 = 0$ . Usando (2.16), (2.40) temos que  $\widehat{\mathcal{P}}_n(b; i) = \overline{\widehat{\mathcal{P}}_n(b; -i)} = 2^n i^n (b)_n / (2\lambda)_n$ ,  $n \geq 0$  e isto fornece explicitamente os termos das sequências  $\{\mathbf{a}_n\}_{n \geq 0}$

e  $\{\mathbf{b}_n\}_{n \geq 0}$ , a saber,

$$2\mathbf{a}_n = \frac{2^n}{(2\lambda)_n} [(i)^n (b)_n + (-i)^n (\bar{b})_n] \quad \text{e} \quad i2\mathbf{b}_n = \frac{2^n}{(2\lambda)_n} [(i)^n (b)_n - (-i)^n (\bar{b})_n],$$

para  $n \geq 1$ . Definindo

$$2\tilde{\mathbf{a}}_n = [(i)^n (b)_n + (-i)^n (\bar{b})_n] \quad \text{e} \quad i2\tilde{\mathbf{b}}_n = [(i)^n (b)_n - (-i)^n (\bar{b})_n],$$

temos que

$$\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} = -\eta\tilde{\mathbf{a}}_n - (\lambda + n)\tilde{\mathbf{b}}_n \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{b}}_{n+1} = -\eta\tilde{\mathbf{b}}_n + (\lambda + n)\tilde{\mathbf{a}}_n, \quad \text{para } n \geq 0.$$

Note que  $\eta = [(b + n) - (\bar{b} + n)]/(2i)$  e  $(\lambda + n) = [(b + n) + (\bar{b} + n)]/2$ . Com estas substituições completamos a prova das fórmulas para  $\mathbf{a}_n$  e  $\mathbf{b}_n$ . Para finalizarmos a demonstração do teorema basta multiplicar a primeira fórmula em (2.50) por  $\cos(w)$  e a segunda fórmula (2.50) por  $\sen(w)$ , e usar a identidades trigonométrica  $\sen(w)^2 + \cos(w)^2 = 1$ .  $\square$

Para o caso das funções de onda Coulomb do Teorema 2.13 temos o seguinte resultado.

**Corolário 2.14.** *Para  $L \geq 0$ , considere as sequências reais  $\{\mathbf{a}_n\}_{n \geq 0}$  e  $\{\mathbf{b}_n\}_{n \geq 0}$  dada por  $\mathbf{a}_0 = 1$ ,  $\mathbf{b}_0 = 0$  e*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{n+1} \\ \mathbf{b}_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{2}{2L + n + 2} \begin{bmatrix} \eta & -(L + n + 1) \\ (L + n + 1) & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_n \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} \cos(w) F_L(\eta, w) &= C_L(\eta) w^{L+1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \frac{w^n}{n!}, \\ \sen(w) F_L(\eta, w) &= C_L(\eta) w^{L+2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \mathbf{b}_{n+1} \frac{w^n}{n!}, \end{aligned} \tag{2.51}$$

onde  $C_L$  é como no Corolário 2.12. Além disso, se  $\{\mathbf{c}_n\}_{n \geq 0}$  é dada por

$$\mathbf{c}_n(w) = \mathbf{a}_n \cos(w) + \frac{\mathbf{b}_{n+1}}{n+1} w \sen(w), \quad n \geq 0,$$

então

$$F_L(\eta, w) = C_L(\eta) w^{L+1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{c}_n(w) \frac{w^n}{n!}.$$

Quando  $\eta = 0$ , as fórmulas  $\mathbf{a}_n$  e  $\mathbf{b}_n$  no Teorema 2.13 são simplificadas. É fácil verificar que

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_0 = 0, \quad \mathbf{b}_1 = \frac{2}{2\lambda}(\lambda)\mathbf{a}_0 = 1.$$

Desta forma, seguem as fórmulas para a função de Bessel.

**Corolário 2.15.** *Para  $\alpha > -1/2$ , seja*

$$\mathbf{a}_{2n} = (-1)^n \frac{2^{2n}(\alpha + 1/2)_{2n}}{(2\alpha + 1)_{2n}}, \quad \mathbf{b}_{2n+1} = (-1)^n \frac{2^{2n}(\alpha + 3/2)_{2n}}{(2\alpha + 2)_{2n}}, \quad n \geq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} \cos(w) J_\alpha(w) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{w}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_{2n} \frac{w^{2n}}{(2n)!}, \\ \text{sen}(w) J_\alpha(w) &= \frac{w}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{w}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n + 1} \mathbf{b}_{2n+1} \frac{w^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Além disso, se  $\mathbf{c}_{2n}(w) = \mathbf{a}_{2n} \cos(w) + \frac{1}{2n+1} \mathbf{b}_{2n+1} w \text{sen}(w)$ ,  $n \geq 0$ , então

$$J_\alpha(w) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{w}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{c}_{2n}(w) \frac{w^{2n}}{(2n)!}.$$

## 2.5 Zeros dos Polinômios $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$

Nesta seção abordamos as expectativas para continuação do estudo dos polinômios complementares de Romanovski-Routh. Vimos que os polinômios  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  satisfazem a relação de recorrência do tipo  $R_{II}$  como adiantado no Lema 2.4, e disto sabemos que  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  tem grau exatamente  $n$  e possui zeros reais e distintos. Além disso, como consequência do trabalho de Ismail e Ranga [26], também segue que os zeros dos polinômios  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  se entrelaçam, ou seja, se denotarmos os zeros de  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  por  $x_{n,j}^{(\lambda,\eta)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , com  $x_{n,j}^{(\lambda,\eta)} < x_{n,j+1}^{(\lambda,\eta)}$ , então vale

$$x_{n+1,1}^{(\lambda,\eta)} < x_{n,1}^{(\lambda,\eta)} < x_{n+1,2}^{(\lambda,\eta)} < \dots < x_{n+1,n}^{(\lambda,\eta)} < x_{n,n}^{(\lambda,\eta)} < x_{n+1,n+1}^{(\lambda,\eta)}, \quad n \geq 1. \tag{2.53}$$

Também foi estabelecido que  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  é o polinômio característico do problema de autovalor generalizado

$$\mathbf{A}_n^{(b)} \mathbf{u}_n^{(b)}(x) = x \mathbf{B}_n^{(b)} \mathbf{u}_n^{(b)}(x),$$

onde as matrizes  $\mathbf{A}_n^{(b)}$  e  $\mathbf{B}_n^{(b)}$  são, respectivamente,

$$\left[ \begin{array}{cccccc} c_1^{(b)} & i\sqrt{d_2^{(b)}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -i\sqrt{d_2^{(b)}} & c_2^{(b)} & i\sqrt{d_3^{(b)}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{d_3^{(b)}} & c_3^{(b)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1}^{(b)} & i\sqrt{d_n^{(b)}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -i\sqrt{d_n^{(b)}} & c_n^{(b)} \end{array} \right], \quad \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & \sqrt{d_2^{(b)}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{d_2^{(b)}} & 1 & \sqrt{d_3^{(b)}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_3^{(b)}} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \sqrt{d_n^{(b)}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{d_n^{(b)}} & 1 \end{array} \right].$$

Os coeficientes das matrizes  $\mathbf{A}_n^{(b)}$  e  $\mathbf{B}_n^{(b)}$  são os mesmos da relação de recorrência de três termos (2.16). Além disso,  $\mathbf{A}_n^{(b)}$  e  $\mathbf{B}_n^{(b)}$  são hermitianas e, como  $\{d_{n+1}^{(b)}\}_{n \geq 1}$  é uma sequência encadeada, a matriz  $\mathbf{B}_n^{(b)}$  é ainda positiva definida.

Os próximos teoremas são uma aplicação natural dos resultados sobre as funções geradoras dos polinômios CRR que estabelecemos na Seção 2.4. O primeiro teorema fornece a relação entre os polinômios CRR com os polinômios clássicos de Laguerre e Hermite, e como consequência deste temos um resultado assintóticos sobre os zeros de  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$ .

**Teorema 2.16.** *Seja  $Q_n(b; x) = (-2)^n (\lambda)_n \mathcal{P}_n(b; x)$  e  $n \in \mathbb{N}$  fixo. Então, temos as seguintes fórmulas assintóticas*

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n Q_n(b; 2\eta/x) x^n}{(2\eta)^n n!} = L_n^{(2\lambda-1)}(x) \quad e \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n Q_n(b; x/\sqrt{\lambda})}{\lambda^{n/2}} = H_n(x),$$

onde  $H_n$  e  $L_n^{(2\lambda-1)}$  são os polinômios ortogonais de Hermite e Laguerre, respectivamente.

*Demonstração.* Usando a função geradora dada no Teorema 2.7 temos

$$\left[ \frac{1}{(xw+1)^2 + w^2} \right]^\lambda \frac{e^{2\eta \operatorname{arccot}(x)}}{e^{2\eta \operatorname{arccot}(x+w[x^2+1])}} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(b; x) \frac{w^n}{n!}. \quad (2.54)$$

Substituindo  $x$  por  $x/\sqrt{\lambda}$  e  $w$  por  $-w/\sqrt{\lambda}$  em (2.10) segue que

$$\left[ 1 - \left( \frac{-w^2 + 2xw}{\lambda} - \frac{x^2 w^2}{\lambda^2} \right) \right]^{-\lambda} \frac{e^{2\eta \operatorname{arccot}(x/\sqrt{\lambda})}}{e^{2\eta \operatorname{arccot}[(x-w)/\sqrt{\lambda} - wx^2/\lambda^{3/2}]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n Q_n(b; x/\sqrt{\lambda}) w^n}{\lambda^{n/2} n!}.$$

Fazendo  $\lambda \rightarrow \infty$  ambos os lados, temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[ 1 - \left( \frac{-w^2 + 2xw}{\lambda} - \frac{x^2 w^2}{\lambda^2} \right) \right]^{-\lambda} = e^{-w^2 + 2xw}$$

e

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{e^{2\eta \operatorname{arccot}(x/\sqrt{\lambda})}}{e^{2\eta \operatorname{arccot}[(x-w)/\sqrt{\lambda} - wx^2/\lambda^{3/2}]} = 1.$$

Reconhecendo que  $e^{-w^2 + 2xw}$  é a função geradora (1.26) dos polinômios de Hermite segue o primeiro resultado assintótico.

A segunda propriedade assintótica segue de forma análoga substituindo  $x$  por  $2\eta/x$ ,  $w$  por  $-wx/2\eta$  em (2.10) e usando que

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{e^{2\eta \operatorname{arccot}\left(\frac{2\eta}{x}\right)}}{e^{2\eta \operatorname{arccot}\left(\frac{4\eta^2(1-w)-wx^2}{2\eta x}\right)}} = e^{\frac{-wx}{(1-w)}} \quad (2.55)$$

e que  $(1-w)^{-2\lambda} e^{-wx/(1-w)}$  é a função geradora (1.26) dos polinômios de Laguerre

$L_n^{(2\lambda-1)}$ . Estes resultados também podem ser verificados diretamente fazendo a mudança de variável na relação de recorrência  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  e comparando as relações de recorrência de  $H_n$  e  $L_n^{(2\lambda-1)}$ .  $\square$

Como consequência imediata temos as propriedades assintóticas envolvendo os zeros dos polinômios CRR com os zeros dos polinômios de Hermite e Laguerre.

**Teorema 2.17.**

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda} x_{n,k}^{(\eta,\lambda)} = h_{n,k} \quad e \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{2\eta}{x_{n,k}^{(\eta,\lambda)}} = l_{n,k}^{(2\lambda-1)} \quad (2.56)$$

onde  $h_{n,k}$  e  $l_{n,k}^{(2\lambda-1)}$  são os zeros de  $H_n$  e  $L_n^{(2\lambda-1)}$ , respectivamente.

Uma questão levantada pelo Teorema 2.17 é como ocorre a convergência de  $\sqrt{\lambda} x_{n,k}^{(\eta,\lambda)}$  e  $2\eta/x_{n,k}^{(\eta,\lambda)}$ . Para tentar responder esta questão, inicialmente fizemos as simulações numérica ilustradas nas Figuras 2.1 e 2.2. Por exemplo, a Figura 2.1 sugere que a partir de um certo valor  $\lambda$ ,  $\sqrt{\lambda} x_{n,k}^{(\eta,\lambda)}$  converge de forma decrescente para os zeros de Hermite. Este tipo comportamento assintótico envolvendo os zeros dos polinômios complementares de Romanovski-Routh também levanta questões com respeito a ordem da convergência e sobre comportamento monotônico dos zeros com relação aos parâmetros  $\lambda$  e  $\eta$ , questões que pretendemos investigar no futuro.

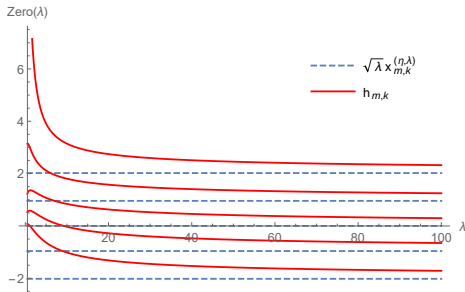


Figura 2.1:  $m = 5$ ,  $\eta = 1$

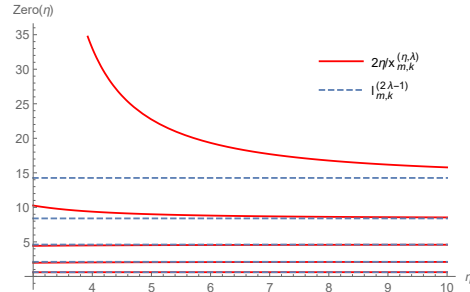


Figura 2.2:  $m = 5$ ,  $\lambda = 1$

Análises desta natureza são bastante conhecidas para os polinômios de Gegenbauer  $C_n^{(\lambda)}$  [6, 15, 19, 20]. A saber, se  $n, k \in \mathbb{N}$  é fixo e  $\zeta_{n,k}^{(\lambda)}$ ,  $k = 1, \dots, n$  são os zeros do polinômio ortogonal de Gegenbauer  $C_n^{(\lambda)}$ , é sabido que  $\sqrt{\lambda} \zeta_{n,k}^{(\lambda)}$  são funções crescentes de  $\lambda$  que convergem para os zeros  $h_{n,k}$  de Hermite. Ademais, é bem conhecido que os zeros positivos  $\zeta_{n,k}^{(\lambda)}$  de  $C_n^{(\lambda)}$  são funções decrescentes de  $\lambda$ . Em [20], os autores estabeleceram um resultado mais forte, a saber, se  $f_n(\lambda) = \sqrt{\lambda + c_n}$  com  $c_n = (2n^2 + 1)/(4n + 2)$  então  $f_n(\lambda) \zeta_{n,k}^{(\lambda)}$  são funções crescentes de  $\lambda$ , para  $\lambda > -1/2$ . Posteriormente, em [19] os autores estabeleceram a questão sobre quão “grande”  $f_n(\lambda)$  pode ser de modo que  $f_n(\lambda) \zeta_{n,k}^{(\lambda)}$  seja crescente de  $\lambda$  para  $k = 1, \dots, [n/2]$  e concluíram que a função é precisamente a apresentada em [20].

### 3 Estudo das Funções $\mathcal{N}(b; \cdot)$ e $\mathcal{M}(b; \cdot)$

Neste capítulo apresentamos resultados sobre os zeros e estimativas da função de onda Coulomb estendidas  $\mathcal{M}(b; \cdot)$  e da função  $\mathcal{N}(b; \cdot)$ . Tais resultados estão contidos no trabalho [33], que encontra-se em fase final de preparação. A função de onda Coulomb regular  $F_L(\eta, w) = \mathcal{M}(L + 1 - i\eta; w)$  com  $L \in \mathbb{N}$  e  $\eta \in \mathbb{R}$  é uma importante ferramenta em problemas de espalhamento nuclear e compõe as soluções da equação de Schrödinger para uma partícula carregada sujeita ao potencial coulombiano. Isto justifica o extenso interesse científico no estudo de propriedades destas funções e também de estimativas dos valores da mesma [22, 44]. Por questão de clareza vamos relembrar sua definição

$$\mathcal{M}(b; w) = \mathfrak{C}(b)w^\lambda \mathcal{N}(b; w), \quad b = \lambda + i\eta, \quad \lambda > 0, \quad (3.1)$$

onde

$$\mathfrak{C}(b) = 2^{\lambda-1} e^{\pi\eta/2} \frac{|\Gamma(b)|}{\Gamma(2\lambda)} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(b; w) = e^{-iw} {}_1F_1(b; b + \bar{b}; 2iw).$$

Utilizando a equação diferencial das funções hipergeométricas confluentes (1.14) obtemos que

$$w \frac{d^2}{dw^2} \mathcal{N}(b; w) + 2\lambda \frac{d}{dw} \mathcal{N}(b; w) + [w + 2\eta] \mathcal{N}(b; w) = 0, \quad (3.2)$$

Transformando esta equação diferencial na sua forma normal segue que  $\mathcal{M}(b; \cdot)$  satisfaz

$$\frac{d^2}{dw^2} \mathcal{M}(b; w) + q(\lambda, \eta; w) \mathcal{M}(b; w) = 0, \quad (3.3)$$

onde

$$q(\lambda, \eta; w) = 1 + 2\eta w^{-1} - \lambda(\lambda - 1)w^{-2}. \quad (3.4)$$

Note que  $\mathcal{M}(b; w)$  é proporcional da função de Whittaker  $M_{-i\eta, \lambda-1/2}(2iw)$  dada em (1.15). Das relações contíguas satisfeitas pelas funções de Whitakker [48, p. 27] segue que

$$\mathcal{M}(b + 2; w) = \frac{(2\lambda + 1)}{\lambda |b + 1|} \left[ \frac{\lambda(\lambda + 1)}{w} - \eta \right] \mathcal{M}(b + 1; w) - \frac{(\lambda + 1)|b|}{\lambda |b + 1|} \mathcal{M}(b; w), \quad (3.5)$$



para todo  $\lambda > 0$ . Em particular, temos

$$F_{L+1}(\eta, w) = \frac{(2L+1)}{L|L+1+i\eta|} \left[ \frac{L(L+1)}{w} + \eta \right] F_L(\eta, w) - \frac{(L+1)|L+i\eta|}{L|L+1+i\eta|} F_{L-1}(\eta, w),$$

que vale para  $L = 1, 2, 3, \dots$ . Esta relação de recorrência de três termos associada com a função de onda Coulomb foi dada primeiramente por Powel em [38]. A maioria das propriedades básicas e estudos sobre zeros da sequência de funções de Onda Coulomb  $\{F_L(\eta, \cdot)\}_{L \geq 0}$  são consequências de um problema de autovalor obtido através de sua relação de recorrência de três termos. Dentre estas propriedades, temos que  $F_L(\eta, \cdot)$  tem infinitos zeros, todos reais e simples [25]. Estas propriedades também seguem analogamente para a sequência  $\{\mathcal{M}(b+n; \cdot)\}_{n \geq 0}$ . A seguir provamos que  $\mathcal{M}(b; \cdot)$  tem infinitos zeros, todos reais e simples, usando uma abordagem diferente. Para isto usamos o famoso Teorema da Comparação de Sturm [49].

**Teorema 3.1** (Teorema da Comparação de Sturm). *Sejam  $f$  e  $F$  funções contínuas em  $x_0 < x < x_1$  com  $f(x) \leq F(x)$ . Sejam  $y$  e  $Y$ , ambas não nulas, satisfazendo as equações diferenciais*

$$y''(x) + f(x)y(x) = 0 \quad e \quad Y''(x) + F(x)Y(x) = 0. \quad (3.6)$$

*Sejam  $x'$  e  $x''$ ,  $x' < x''$ , zeros consecutivos de  $y$  em  $(x_0, x_1)$ . Então, a função  $Y$  possui pelo menos um zero no intervalo  $(x', x'')$  a menos que  $F(x) = f(x)$  no intervalo  $[x', x'']$ . Além disso, se  $x' = x_0$  satisfaz*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} y(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \{y'(x)Y(x) - y(x)Y'(x)\} = 0,$$

*então  $Y$  tem pelo menos um zero em  $(x_0, x'')$  (similarmente, vale para  $x'' = x_1$ ).*

Observe que da primeira transformação de Kummer para funções hipergeométricas confluentes,  $e^{-z} {}_1F_1(a; b; z) = {}_1F_1(b-a; b; -z)$  dada em [48, eq. 1.4.1], temos

$$\mathcal{N}(b; w) = \mathcal{N}(\bar{b}; -w) = \overline{\mathcal{N}(b; \bar{w})}. \quad (3.7)$$

Se  $x$  é real, derivando a função geradora com respeito a  $w$ , do Teorema 2.8 temos

$$\mathcal{N}'(b; w)e^{xw} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \widehat{\mathcal{P}}_{n+1}(b; x) - x\widehat{\mathcal{P}}_n(b; x) \right] \frac{w^n}{n!}.$$

Visto que  $\widehat{\mathcal{P}}_n(b; \cdot)$  é um polinômio com coeficientes reais temos, portanto,

$$\mathcal{N}'(b; w) = \overline{\mathcal{N}'(b; \bar{w})}. \quad (3.8)$$

Além disso,

$$\mathcal{N}'(b; 0) = \widehat{\mathcal{P}}_1(b; x) - x\widehat{\mathcal{P}}_0(b; x) = -\frac{\eta}{\lambda}.$$

Observe que os zeros não nulos de  $\mathcal{M}(b; \cdot)$  são os zeros de  $\mathcal{N}(b; \cdot)$ . Desta forma, o próximo teorema dá uma nova abordagem para os zeros da função de onda Coulomb estendida.

**Teorema 3.2.** *Seja  $b = \lambda + i\eta$  tal que  $\lambda > 0$ . Então  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  tem somente zeros reais. Além disso, possui um número infinito enumerável de zeros e todos eles são simples.*

*Demonstração.* Considere a equação diferencial (3.3). Mostraremos inicialmente que  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  tem infinitos zeros reais. Note que  $\lim_{w \rightarrow \pm\infty} q(\lambda, \eta; w) = 1$ . Assim, dado qualquer  $\epsilon$  in  $(0, 1)$ , existe  $A > 0$  tal que se  $|w| > A$  então  $|q(\lambda, \eta; w) - 1| < \epsilon$  e isso implica que  $q(\lambda, \eta; w) > 1 - \epsilon$ . Por outro lado,  $\text{sen}(\sqrt{1 - \epsilon}w)$  é a solução da equação diferencial

$$\mathfrak{F}''(w) + (1 - \epsilon)\mathfrak{F}(w) = 0.$$

Assim segue do Teorema da Comparação de Sturm que entre dois zeros consecutivos de  $\text{sen}(\sqrt{1 - \epsilon}w)$  em  $(-\infty, -A] \cup [A, \infty)$  existe pelo menos um zero de  $\mathcal{N}(b; \cdot)$ . Visto que  $\text{sen}(\sqrt{1 - \epsilon}w)$  possui infinitos zeros, o resultado segue.

Usamos agora a equação diferencial (3.2) para mostrar que  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  possui somente zeros simples. É fácil ver que  $\mathcal{N}(b; 0) \neq 0$ . Desta forma, se  $w_0 \neq 0$  é um zero múltiplo de  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  segue de (3.2) que  $\mathcal{N}^{(m)}(b; w_0) = 0$  para todo  $m$ , sendo  $\mathcal{N}^{(m)}(b; w_0)$  a  $m$ -ésima derivada de  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  em  $w_0$ . Logo,  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  é identicamente nula e isso nos leva a uma contradição. Portanto,  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  possui apenas zeros simples.

Ademais, como  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  é uma função inteira, todos os seus zeros são isolados. De (3.7) segue que se  $w_c$  é um zero de  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  então  $\bar{w}_c$  também é um zero de  $\mathcal{N}(b; \cdot)$ . Para finalizar, multiplicando a equação (3.2) por  $w^{2\lambda-1}$  e substituindo  $w$ , respectivamente, por  $\zeta_1 u$  e  $\zeta_2 u$  e fazendo as devidas simplificações, obtemos

$$\zeta_1 u^{2\lambda} \mathcal{N}''(b; \zeta_1 u) + 2\lambda u^{2\lambda-1} \mathcal{N}'(b; \zeta_1 u) + [\zeta_1 u + 2\eta] u^{2\lambda-1} \mathcal{N}(b; \zeta_1 u) = 0,$$

$$\zeta_2 u^{2\lambda} \mathcal{N}''(b; \zeta_2 u) + 2\lambda u^{2\lambda-1} \mathcal{N}'(b; \zeta_2 u) + [\zeta_2 u + 2\eta] u^{2\lambda-1} \mathcal{N}(b; \zeta_2 u) = 0.$$

Multiplicando a primeira equação por  $\mathcal{N}(b; \zeta_2 u)$ , a segunda por  $\mathcal{N}(b; \zeta_1 u)$  e subtraindo ambas segue que

$$\begin{aligned} & u^{2\lambda} [\zeta_1 \mathcal{N}''(b; \zeta_1 u) \mathcal{N}(b; \zeta_2 u) - \zeta_2 \mathcal{N}''(b; \zeta_2 u) \mathcal{N}(b; \zeta_1 u)] \\ & + 2\lambda u^{2\lambda-1} [\mathcal{N}'(b; \zeta_1 u) \mathcal{N}(b; \zeta_2 u) - \mathcal{N}'(b; \zeta_2 u) \mathcal{N}(b; \zeta_1 u)] \\ & + [\zeta_1 - \zeta_2] u^{2\lambda} \mathcal{N}(b; \zeta_1 u) \mathcal{N}(b; \zeta_2 u) = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Observe que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{du} \{u^{2\lambda} [\mathcal{N}'(b; \zeta_1 u) \mathcal{N}(b; \zeta_2 u) - \mathcal{N}'(b; \zeta_2 u) \mathcal{N}(b; \zeta_1 u)]\} \\ &= 2\lambda u^{2\lambda-1} [\mathcal{N}'(b; \zeta_1 u) \mathcal{N}(b; \zeta_2 u) - \mathcal{N}'(b; \zeta_2 u) \mathcal{N}(b; \zeta_1 u)] + u^{2\lambda} [\zeta_2 - \zeta_1] \mathcal{N}'(b; \zeta_1 u) \mathcal{N}'(b; \zeta_2 u) \\ & \quad + u^{2\lambda} [\zeta_1 \mathcal{N}''(b; \zeta_1 u) \mathcal{N}(b; \zeta_2 u) - \zeta_2 \mathcal{N}''(b; \zeta_2 u) \mathcal{N}(b; \zeta_1 u)]. \end{aligned}$$

Então podemos reescrever (3.9) como

$$\begin{aligned} & \frac{d}{du} \{u^{2\lambda} [\mathcal{N}'(b; \zeta_1 u) \mathcal{N}(b; \zeta_2 u) - \mathcal{N}'(b; \zeta_2 u) \mathcal{N}(b; \zeta_1 u)]\} \\ &= [\zeta_2 - \zeta_1] u^{2\lambda} [\mathcal{N}(b; \zeta_1 u) \mathcal{N}(b; \zeta_2 u) + \mathcal{N}'(b; \zeta_1 u) \mathcal{N}'(b; \zeta_2 u)]. \end{aligned}$$

Integrando ao longo da reta em  $u$  de 0 até 1 resulta em

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}'(b; \zeta_1) \mathcal{N}(b; \zeta_2) - \mathcal{N}'(b; \zeta_2) \mathcal{N}(b; \zeta_1) \\ &= [\zeta_2 - \zeta_1] \int_0^1 u^{2\lambda} [\mathcal{N}(b; \zeta_1 u) \mathcal{N}(b; \zeta_2 u) + \mathcal{N}'(b; \zeta_1 u) \mathcal{N}'(b; \zeta_2 u)] du. \end{aligned}$$

Desta forma, considerando  $\zeta_1 = w_c$  e  $\zeta_2 = \bar{w}_c$  dois possíveis zeros complexos de  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  e as equações (3.7) e (3.8) segue que

$$0 = (\bar{w}_c - w_c) \int_0^1 u^{2\lambda} (|\mathcal{N}(b; w_c u)|^2 + |\mathcal{N}'(b; w_c u)|^2) du. \quad (3.10)$$

Como a integral do lado direito é diferente de zero, isto mostra que existem apenas zeros reais.  $\square$

**Corolário 3.3.** *Seja  $b = \lambda + i\eta$  tal que  $\lambda > 0$ . Então  $\mathcal{N}'(b; \cdot)$  tem somente zeros reais. Além disso, possui um número infinito enumerável de zeros, e seus zeros são simples exceto possivelmente em  $-2\eta$ .*

*Demonstração.* Usando (3.10) segue que os zeros são reais, são infinitos pelo do Teorema do Valor Intermediário e são simples, exceto possivelmente em  $-2\eta$ , pela equação diferencial (3.2).  $\square$

**Observação 3.4.** *Usando a relação entre  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  e  $\mathcal{M}(b; \cdot)$ , segue do Teorema do Valor Intermediário que  $\mathcal{M}'(b; \cdot)$  também tem um número infinito de zeros reais. Os zeros  $w_0$  são simples, exceto possivelmente se satisfaz a equação  $q(\lambda, \eta; w_0) = 0$ , onde  $q(\lambda, \eta; \cdot)$  é definida em (3.4).*

O próximo resultado descreve a monotonicidade dos zeros da função geradora  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  com relação aos parâmetros  $\lambda$  e  $\eta$ . Note que  $\mathcal{N}(b; 0) \neq 0$ . Como  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  possui zeros reais, contáveis e simples, vamos denotar os zeros de  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  por  $w_j^{(\lambda, \eta)}$ ,  $j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

ordenados da seguinte forma

$$\dots < w_{-2}^{(\lambda, \eta)} < w_{-1}^{(\lambda, \eta)} < 0 < w_1^{(\lambda, \eta)} < w_2^{(\lambda, \eta)} < \dots$$

**Teorema 3.5. (i)** *Seja  $\lambda > 0$  fixo. Para todo  $j$  positivo ou negativo a função  $w_j^{(\lambda, \eta)}$  é estritamente decrescente com relação a  $\eta$ , com  $\eta \in (-\infty, \infty)$ ;*

**(ii)** *Seja  $\eta \in (-\infty, \infty)$  fixo. Para todo  $j \geq 1$ , a função  $w_j^{(\lambda, \eta)}$  é estritamente crescente com relação a  $\lambda$ , desde que  $\lambda$  esteja em  $(1/2, \infty)$ ;*

**(iii)** *Seja  $\eta \in (-\infty, \infty)$  fixo. Para todo  $j \leq 1$ , a função  $w_j^{(\lambda, \eta)}$  é estritamente decrescente com relação a  $\lambda$ , desde que  $\lambda$  esteja em  $(1/2, \infty)$ .*

*Demonstração.* Primeiramente observe que estudar o comportamento monotônico dos zeros da função  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  é equivalente a estudar o comportamento monotônico dos zeros não nulos de  $\mathcal{M}(b; \cdot)$ . Utilizando a ideia do Teorema da Comparação de Sturm faremos a prova do item **(ii)**; para os demais casos, a demonstração é análoga.

Dado  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, considere (3.3) para  $b$  e  $b + \epsilon$ . Em seguida, multiplicando por  $\mathcal{M}(b; \cdot)$  e  $\mathcal{M}(b + \epsilon; \cdot)$ , respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}''(b; w) \mathcal{M}(b + \epsilon; w) + q(\lambda, \eta; w) \mathcal{M}(b; w) \mathcal{M}(b + \epsilon; w) &= 0, \\ \mathcal{M}''(b + \epsilon; w) \mathcal{M}(b; w) + q(\lambda + \epsilon, \eta; w) \mathcal{M}(b + \epsilon; w) \mathcal{M}(b; w) &= 0. \end{aligned}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} [\mathcal{M}'(b; w) \mathcal{M}(b + \epsilon; w) - \mathcal{M}'(b + \epsilon; w) \mathcal{M}(b; w)] \\ = [q(\lambda + \epsilon, \eta; w) - q(\lambda, \eta; w)] \mathcal{M}(b; w) \mathcal{M}(b + \epsilon; w). \end{aligned}$$

Substituindo  $\mathcal{M}(b; w)$  e  $\mathcal{M}(b + \epsilon; w)$  por  $w^\lambda \mathcal{N}(b; w)$  e  $w^{\lambda + \epsilon} \mathcal{N}(b + \epsilon; w)$ , respectivamente, e fazendo as devidas simplificações temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} \left\{ w^{2\lambda + \epsilon} [\mathcal{N}'(b + \epsilon; w) \mathcal{N}(b; w) - \mathcal{N}(b + \epsilon; w) \mathcal{N}'(b; w)] + \epsilon w^{2\lambda - 1 + \epsilon} \mathcal{N}(b; w) \mathcal{N}(b + \epsilon; w) \right\} \\ = [(2\lambda - 1)\epsilon + \epsilon^2] w^{2\lambda + \epsilon} \mathcal{N}(b; w) \mathcal{N}(b + \epsilon; w). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Integrando a equação acima de 0 a  $w_1^{(\lambda + \epsilon, \eta)}$ , temos

$$\begin{aligned} [w_1^{(\lambda + \epsilon, \eta)}]^{2\lambda + \epsilon} \mathcal{N}'(b + \epsilon; w_1^{(\lambda + \epsilon, \eta)}) \mathcal{N}(b; w_1^{(\lambda + \epsilon, \eta)}) \\ = [(2\lambda - 1)\epsilon + \epsilon^2] \int_0^{w_1^{(\lambda + \epsilon, \eta)}} w^{2\lambda + \epsilon} \mathcal{N}(b; w) \mathcal{N}(b + \epsilon; w) dw. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Note que como  $\mathcal{N}(b; 0) = \mathcal{N}(b + \epsilon; 0) = 1$ , então  $\mathcal{N}(b + \epsilon; \cdot)$  é positiva em  $[0, w_1^{(\lambda + \epsilon, \eta)})$  e  $\mathcal{N}'(b, w_1^{(\lambda + \epsilon, \eta)}) < 0$ . Mostramos que o zero  $w_1^{(\lambda, \eta)}$  de  $\mathcal{N}(b; \cdot)$ , que está suficiente próximo

do zero  $w_1^{(\lambda+\epsilon, \eta)}$  de  $\mathcal{N}(b+\epsilon; \cdot)$  devido a continuidade, pertence ao intervalo  $(0, w_1^{(\lambda+\epsilon, \eta)})$ . Com efeito, suponha que  $\mathcal{N}(b, \cdot)$  não possui o primeiro zero  $w_1^{(\lambda, \eta)}$  em  $(0, w_1^{(\lambda+\epsilon, \eta)})$ ; então  $\mathcal{N}(b, \cdot)$  também é positiva em  $[0, w_1^{(\lambda+\epsilon, \eta)})$ . Conseqüentemente, o lado esquerdo de (3.12) é negativo enquanto o lado direito é positivo, e isto nos leva a uma contradição. Logo, o zero  $w_1^{(\lambda, \eta)}$  de  $\mathcal{N}(b, \cdot)$  está em  $(0, w_1^{(\lambda+\epsilon, \eta)})$ , ou seja,  $w_1^{(\lambda, \eta)} < w_1^{(\lambda+\epsilon, \eta)}$ .

Para concluir que os zeros positivos são uma função estritamente crescente de  $\lambda$  vamos supor por indução que  $w_k^{(\lambda, \eta)} < w_k^{(\lambda+\epsilon, \eta)}$ , para  $k = 1, \dots, n$ . Integrando (3.11) de  $w_{n+1}^{(\lambda+\epsilon, \eta)}$  a  $w_n^{(\lambda+\epsilon, \eta)}$ , resulta em

$$\begin{aligned} & [w_{n+1}^{(\lambda+\epsilon, \eta)}]^{2\lambda+\epsilon} \mathcal{N}'(b+\epsilon; w_{n+1}^{(\lambda+\epsilon, \eta)}) \mathcal{N}(b; w_{n+1}^{(\lambda+\epsilon, \eta)}) \\ & - [w_n^{(\lambda+\epsilon, \eta)}]^{2\lambda+\epsilon} \mathcal{N}'(b+\epsilon; w_n^{(\lambda+\epsilon, \eta)}) \mathcal{N}(b; w_n^{(\lambda+\epsilon, \eta)}) \\ & = [(2\lambda-1)\epsilon + \epsilon^2] \int_{w_n^{(\lambda+\epsilon, \eta)}}^{w_{n+1}^{(\lambda+\epsilon, \eta)}} w^{2\lambda+\epsilon} \mathcal{N}(b; w) \mathcal{N}(b+\epsilon; w) dw, \end{aligned}$$

Se  $w_{n+1}^{(\lambda, \eta)} > w_{n+1}^{(\lambda+\epsilon, \eta)}$  segue que  $\mathcal{N}'(b+\epsilon, w_n^{(\lambda+\epsilon, \eta)}) \mathcal{N}'(b+\epsilon, w_{n+1}^{(\lambda+\epsilon, \eta)}) < 0$  e  $\mathcal{N}(b, \cdot)$  tem sinal constante em  $[w_n^{(\lambda+\epsilon, \eta)}, w_{n+1}^{(\lambda+\epsilon, \eta)}]$ . Isto implica que na equação anterior o lado esquerdo tem sinal oposto do sinal do lado direito, o que nos leva a uma contradição e o resultado segue.  $\square$

Ainda usando o Teorema da Comparação de Sturm podemos obter uma estimativa de limitantes inferiores e superiores para o primeiro zero positivo e negativo de  $\mathcal{N}(b; \cdot)$ , respectivamente.

**Proposição 3.6.** *Sejam  $0 < \lambda < 1$ ,*

$$2m = \min \left\{ -2\eta + \sqrt{4\eta^2 + 4\lambda(1-\lambda)}, -2\eta - \sqrt{4\eta^2 + 4\lambda(1-\lambda)} \right\}$$

e

$$2M = \max \left\{ -2\eta + \sqrt{4\eta^2 - 4\lambda(\lambda-1)}, -2\eta - \sqrt{4\eta^2 - 4\lambda(\lambda-1)} \right\}.$$

Então,

$$w_{-1}^{(\lambda, \eta)} < m < 0 < M < w_1^{(\lambda, \eta)}.$$

*Demonstração.* Como  $\mathcal{N}(b, 0) = 1$  existe um intervalo aberto  $I \ni 0$  tal que  $\mathcal{N}(b, w) \neq 0$ , para todo  $w \in I$ . Note que os zeros não nulos de  $\mathcal{M}(b; \cdot)$  são os mesmos zeros de  $\mathcal{N}(b, \cdot)$  e que  $\mathcal{M}(b; 0) = 0$ . Vimos que  $\mathcal{M}(b; \cdot)$  satisfaz a equação diferencial (3.3), onde

$$q(\lambda, \eta; w) = \frac{w^2 + 2\eta w - \lambda(\lambda-1)}{w^2}. \quad (3.13)$$

Observe que, para  $0 < \lambda < 1$  o numerador de  $q(\lambda, \eta; \cdot)$  possui dois zeros com sinais opostos, a saber,  $m$  e  $M$ . Então,  $\mathcal{N}(b, \cdot)$  não tem zero em  $I = (m, M)$ . De fato, suponha que  $\mathcal{N}(b, \cdot)$  possui pelo menos um zero em  $I$ . Logo,  $\mathcal{M}(b; \cdot)$  possui pelo menos dois zeros em  $I$  e  $q(\lambda, \eta; w) < 0$  para todo  $w \in I$ . Pelo Teorema da Comparação de Sturm isto

implica que  $v(x) \equiv 1$ , que é solução da equação diferencial  $v''(x) + 0v(x) = 0$ , possui pelo menos um zero em  $I$ , o que é um absurdo.  $\square$

**Observação 3.7.** Em [35] foi mostrado que os zeros de  $F_L(\eta, \cdot)$  e  $F'_L(\eta, \cdot)$  se entrelaçam. Este resultado é estendido em [7] para os zeros de  $\mathcal{M}(\bar{b} + 1; \cdot) = F_\lambda(\eta, \cdot)$  e  $\mathcal{M}'(\bar{b} + 1; \cdot)$ . Precisamente, se denotarmos os zeros não nulos de  $\mathcal{M}'(b; \cdot)$  por  $z_j^{(\lambda, \eta)}$ ,  $j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , então temos

$$\dots < w_{-2}^{(\lambda, \eta)} < z_{-2}^{(\lambda, \eta)} < w_{-1}^{(\lambda, \eta)} < z_{-1}^{(\lambda, \eta)} < 0 < z_1^{(\lambda, \eta)} < w_1^{(\lambda, \eta)} < z_2^{(\lambda, \eta)} < w_2^{(\lambda, \eta)} < \dots \quad (3.14)$$

Para  $0 < \lambda_0 \leq 1$  e  $b_0 = \lambda_0 + i\eta$  considere a sequência de funções  $\{\mathcal{M}_n(b_0; \cdot)\}_{n \geq 0}$  dada por

$$\mathcal{M}_n(b_0; w) = \mathcal{M}(b_0 + n; w) = \mathfrak{C}(b_0 + n)w^{\lambda_0 + n}\mathcal{X}(b_0 + n; w), \quad (3.15)$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Usando (3.5) é fácil ver que  $y_n(w) = \mathcal{M}_n(b_0; w)$  satisfaz a relação de recorrência de três termos

$$\begin{aligned} \frac{|(b_0 + n)|}{(\lambda_0 + n)}y_{n+1} + \frac{2\lambda_0 + 2n - 1}{(\lambda_0 + n - 1)(\lambda_0 + n)} \left[ \eta - \frac{(\lambda_0 + n)(\lambda_0 + n - 1)}{w} \right] y_n \\ + \frac{|(b_0 + n - 1)|}{(\lambda_0 + n - 1)}y_{n-1} = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

para  $n \geq 1$ . Considere

$$\chi_n(b_0; w) = \mathcal{M}'_n(b_0; w)\mathcal{M}_{n-1}(b_0; w) - \mathcal{M}_n(b_0; w)\mathcal{M}'_{n-1}(b_0; w), \quad n \geq 1,$$

onde  $\mathcal{M}'_n(b_0; w) = d\mathcal{M}_n(b_0; w)/dw$ . Então multiplicando (3.16) por  $\mathcal{M}'_n(b_0; \cdot)$ , derivando (3.16) e multiplicando por  $\mathcal{M}_n(b_0; \cdot)$  e posteriormente subtraindo os resultados resulta em

$$\chi_n(b_0; w) = \frac{A_{n+1}^{(b_0)}}{B_{n+1}^{(b_0)}} \frac{1}{w^2} [\mathcal{M}_n(b_0; w)]^2 + \frac{1}{B_{n+1}^{(b_0)}} \chi_{n+1}(b_0; w), \quad n \geq 1,$$

onde

$$A_{n+1}^{(b_0)} = \frac{(2\lambda_0 + 2n - 1)(\lambda_0 + n)}{|b_0 + n|} \quad \text{e} \quad B_{n+1}^{(b_0)} = \frac{|b_0 + n - 1|(\lambda_0 + n)}{(\lambda_0 + n - 1)|b_0 + n|}.$$

Observe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{X}(b_0 + n; w) = 1 \quad \text{e} \quad \mathfrak{C}(b_0 + n)w^{\lambda_0 + n} \sim \text{const} \frac{(2w)^n n!}{n^{\lambda_0} (2n)!},$$

então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(b_0, w) = 0$  e

$$\chi_n(b_0, w) = w^{-2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{A_{k+1}^{(b_0)}}{\prod_{j=n}^k B_{j+1}^{(b_0)}} [\mathcal{M}_k(b_0; w)]^2 > 0, \quad (3.17)$$

para  $n \geq 1$  e  $w$  real. Como  $\chi_n(b_0; w) > 0$  temos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'_n(b_0; w_j^{(\lambda_0+n, \eta)}) \mathcal{M}_{n-1}(b_0; w_j^{(\lambda_0+n, \eta)}) &> 0, & \mathcal{M}'_n(b_0; w_{j+1}^{(\lambda_0+n, \eta)}) \mathcal{M}_{n-1}(b_0; w_{j+1}^{(\lambda_0+n, \eta)}) &> 0, \\ -\mathcal{M}'_{n-1}(b_0; z_j^{(\lambda_0+n, \eta)}) \mathcal{M}_n(b_0; z_j^{(\lambda_0+n, \eta)}) &> 0, & -\mathcal{M}'_{n-1}(b_0; z_{j+1}^{(\lambda_0+n, \eta)}) \mathcal{M}_n(b_0; z_{j+1}^{(\lambda_0+n, \eta)}) &> 0, \end{aligned}$$

para  $j = 1, 2, 3, \dots$  e  $j = -2, -3, -4, \dots$ . Disto segue o resultado.

**Teorema 3.8.** *Seja  $b_0 = \lambda_0 + i\eta$  e  $0 < \lambda_0 \leq 1$ . Então para  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,*

- (i) *os zeros positivos de  $\mathcal{M}_{n-1}(b_0; \cdot)$  se entrelaçam com os zeros positivos de  $\mathcal{M}_n(b_0; \cdot)$ ,*
- (ii) *os zeros negativos de  $\mathcal{M}_{n-1}(b_0; \cdot)$  se entrelaçam com os zeros negativos de  $\mathcal{M}_n(b_0; \cdot)$ ,*
- (iii) *os zeros positivos de  $\mathcal{M}'_{n-1}(b_0; \cdot)$  se entrelaçam com os zeros positivos de  $\mathcal{M}'_n(b_0; \cdot)$ ,*
- (iv) *os zeros negativos de  $\mathcal{M}'_{n-1}(b_0; \cdot)$  se entrelaçam com os zeros negativos de  $\mathcal{M}'_n(b_0; \cdot)$ .*

### Experimentos numéricos com $\mathcal{M}(b; \cdot)$

Existem várias estratégias para fazer estimativas de valores de funções especiais. Isto acontece porque geralmente, para uma dada função especial, existem várias formas de representá-la. Por exemplo, podemos citar expansões em séries de potências, representações integrais, expansões assintóticas [50]. Nesta seção estimamos numericamente a função de onda Coulomb  $\mathcal{M}(b; \cdot)$  usando a função  $\mathcal{N}(b; \cdot)$ , utilizando a linguagem *Python* versão 3.6. e precisão dupla. As técnicas utilizadas são baseadas em

1. Relação de recorrência;
2. Função geradora.

Observe que para estimar os valores de  $\mathcal{M}(b; \cdot)$ ,  $b = \lambda + i\eta$ , com  $\lambda > 0$ , se decompor-mos  $\lambda = \lambda_0 + k$  de modo que  $0 < \lambda_0 \leq 1$  e  $k \in \mathbb{N}$ , então estimar  $\mathcal{M}(b; \cdot)$  é equivalente a estimar  $\mathcal{M}_k(b_0; \cdot)$ , com  $b_0 = \lambda_0 + i\eta$ .

Definindo  $\mathcal{N}_n(b_0; w) = \mathcal{N}(b_0 + n; w)$ ,  $n \geq 0$ , segue que podemos estimar o valor da função  $\mathcal{M}_n(b_0; \cdot)$  usando as estimativas de  $\mathcal{N}_n(b_0; \cdot)$  e da constante  $\mathfrak{C}(b_0 + n)$ . Além disso, a constante  $\mathfrak{C}(b_0 + n)$  pode ser simplificada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(b_0 + n) &= 2^{n+\lambda_0-1} e^{\pi\eta/2} \frac{|\Gamma(b_0 + n)|}{\Gamma(2\lambda_0 + 2n)} \\ &= \frac{2^{n+\lambda_0-1}}{\Gamma(2\lambda_0 + 2n)} \left\{ [(n + \lambda_0 - 1)^2 + \eta^2] \cdots [\lambda_0^2 + \eta^2] [(\lambda_0 - 1)^2 + \eta^2] |\Gamma(\lambda_0 - 1 + i\eta)|^2 e^{\pi\eta} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Se  $\lambda_0 = 1$  e aplicando a fórmula da reflexão de Euler dada em (1.6) obtemos

$$\mathfrak{C}(1 + L - i\eta) = \frac{2^L}{(2L + 1)!} \left\{ (L^2 + \eta^2) \cdots (2^2 + \eta^2)(1 + \eta^2) \frac{2\eta\pi}{e^{2\pi\eta} - 1} \right\}^{1/2}, \quad (3.19)$$

que é a constante  $C_L(\eta)$  que aparece na definição da função de onda Coulomb  $F_L(\eta, \cdot)$ . A seguir apresentamos técnicas de estimativas para as funções  $\mathcal{N}(b; \cdot)$ .

### Primeira técnica

A primeira estimativa é baseada na relação de recorrência. Para  $0 < \lambda_0 \leq 1$  e  $b_0 = \lambda_0 + i\eta$  consideremos a sequência de funções  $\{\mathcal{N}_n(b_0; \cdot)\}_{n \geq 0}$ . Usando a definição  $\mathcal{M}_n(b_0; \cdot)$  e sua relação de recorrência (3.16) segue que  $\mathcal{N}_n(b_0; \cdot)$  satisfaz

$$\mathcal{N}_{n+1}(b_0; w) + a_n \mathcal{N}_n(b_0; w) + b_n \mathcal{N}_{n-1}(b_0; w) = 0, \quad n \geq 1, \quad (3.20)$$

com

$$b_n = \frac{[4(\lambda_0 + n)^2 - 1](\lambda_0 + n)^2}{|b_0 + n|^2 w^2} \quad \text{e} \quad a_n = b_n \left( \frac{\eta w}{(\lambda_0 + n)(\lambda_0 + n - 1)} - 1 \right). \quad (3.21)$$

Quando queremos estimar uma função através de uma relação de recorrência, uma primeira abordagem consiste em estimar as condições iniciais e em seguida calcular todos os demais valores recursivamente, levando em consideração os erros de arredondamento. Entretanto, não são somente os erros de arredondamento que podem comprometer a confiabilidade das estimativas. Em [22] Gautschi aponta a possibilidade de uma relação de recorrência de três termos possuir soluções especiais, chamadas de soluções minimais. Na prática, ser solução minimal de uma relação de recorrência implica que gerar as funções numericamente recursivamente no sentido de crescimento do índice  $n$  resulta em instabilidade numérica. A seguir discorreremos brevemente sobre soluções minimais. Mais detalhes em [22].

**Definição 3.9.** *Seja  $\{h_n\}_{n \geq 0}$  solução da relação de recorrência de três termos*

$$h_{n+1} + a_n h_n + b_n h_{n-1} = 0, \quad n \geq 1. \quad (3.22)$$

$\{h_n\}_{n \geq 0}$  é dita ser uma solução minimal da relação de recorrência de três termos se existe uma solução  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  de (3.22) linearmente independente de  $h_n$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{g_n} = 0. \quad (3.23)$$

O próximo resultado fornece um critério para detectar se uma dada relação de recorrência de três termos tem solução minimal [22, 50].

**Teorema 3.10** (Teorema de Perron). *Considere a relação de recorrência (3.22) e suponha que os coeficientes satisfazem*

$$a_n \sim an^\alpha \quad b_n \sim bn^\beta \quad ab \neq 0 \quad \alpha, \beta \text{ real} \quad n \rightarrow \infty.$$

*Sejam  $t_1$  e  $t_2$  os zeros do polinômio característico  $p(t) = t^2 + at + b$  com  $|t_1| \geq |t_2|$ .*



1. Se  $\alpha > \beta/2$ , a relação de recorrência (3.22) tem duas soluções  $h_n$  e  $g_n$  linearmente independentes tais que

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} \sim -an^\alpha, \quad \frac{g_{n+1}}{g_n} \sim -\frac{b}{a}n^{\beta-\alpha}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Além disso,  $g_n$  é a solução minimal.

2. Se  $\alpha = \beta/2$ , a relação de recorrência (3.22) tem duas soluções  $h_n$  e  $g_n$  linearmente independentes tais que

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} \sim t_1 n^\alpha, \quad \frac{g_{n+1}}{g_n} \sim t_2 n^\alpha, \quad n \rightarrow \infty,$$

se  $|t_1| > |t_2|$ . Se  $|t_1| = |t_2|$  então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [|g_n|(n!)^{-\alpha}]^{1/n} = |t_1|$$

para toda solução não trivial  $g_n$  de (3.22). Além disso,  $g_n$  é a solução minimal no primeiro caso.

3. Se  $\alpha < \beta/2$ , então para toda solução não trivial  $g_n$  de (3.22) temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup [|g_n|(n!)^{-\beta/2}]^{1/n} = \sqrt{|b|}.$$

Note que de (3.21) temos

$$b_n \sim \frac{4n^2}{w^2} \quad \text{e} \quad a_n \sim -\frac{4n^2}{w^2} \quad \text{para grandes valores de } n. \quad (3.24)$$

Neste caso, o Teorema de Perron fornece uma resposta positiva sobre a existência de soluções minimais e garante que se  $h_n$  e  $g_n$  são duas soluções linearmente independentes de (3.20), elas se comportam assintoticamente como

$$\frac{g_n}{g_{n-1}} \sim 1 \quad \text{e} \quad \frac{h_n}{h_{n-1}} \sim -\frac{4n^2}{w^2}. \quad (3.25)$$

Comparando (3.25) com o comportamento assintótico de  $\mathcal{N}_n(b_0; w) \sim 1$ , segue que  $\mathcal{N}_n(b_0; \cdot)$  é a solução minimal da relação de recorrência de três termos (3.20) na direção de crescimento do índice  $n$ . Da mesma forma, segue que  $\mathcal{M}_n(b_0; \cdot)$  é solução minimal da relação de recorrência (3.16). A conclusão desta propriedade segue da mesma análise feita para as funções de Onda Coulomb  $F_L(\eta, \cdot)$  em [22].

Uma estratégia para contornar este problema é gerar as funções via relação de recorrência no sentido de decrescimento no índice  $n$  ou usar o algoritmo de Gautschi para estimativas de soluções minimais [22]. Vamos denotar por  $\{f_k\}_{k \geq 0}$  as aproximações para  $\{\mathcal{N}_{L+k}(b_0, w)\}_{k \geq 0}$  através do algoritmo de Gautschi para um  $w$  fixo. O algoritmo

pode ser descrito da seguinte forma.

**Passo 1:** Fixar um inteiro  $N$ , precisão  $\epsilon$  e normalização

$$\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \mathcal{N}_{L+m}(b_0, w) = s, \quad 0 < |s| < \infty.$$

**Passo 2:** Calcular  $f_k$ ,  $k = N, N - 1, \dots, 1, 0$  através das fórmulas

$$\begin{aligned} r_N &= 0, & r_{k-1} &= \frac{-b_k}{a_k + r_k}, \\ s_N &= 0, & s_{k-1} &= r_{k-1}(\gamma_k + s_k), \\ f_0 &\sim \frac{s}{\gamma_0 + s_0}, & f_k &\sim r_{k-1}f_{k-1}, \quad k = N, N - 1, \dots, 1. \end{aligned}$$

**Passo 3:** Se  $f_0$  não estiver com a precisão desejada, aumentar  $N$  por um inteiro  $r$  e repita o passo 2.

A Tabela 3.1 fornece os resultados obtidos usando este método para aproximar  $\mathcal{N}_L(1 - i\eta, 1)$  para alguns valores de  $L$  e  $\eta$ . Os números na coluna  $\mathcal{N}_L(1 - i\eta, 1)$  são os valores de referência ( $V_r^1$ ) obtidos através de substituição direta usando o *software Wolfram Mathematica 11.2*. A coluna  $f_0$  representa a aproximação para  $\mathcal{N}_L(1 - i\eta, 1)$ . Dizemos que esta aproximação está com a precisão desejada quando

$$|V_r - f_0| < \epsilon, \quad \text{com } \epsilon = 10^{-4}.$$

As condições iniciais para gerar a tabela pela primeira técnica foram  $N = 100$ ,  $\gamma_N = s = 1$ ,  $\gamma_k = 0$  para  $k \neq N$ . Além disso, o valor de  $N$  foi aumentado de 100 a cada reiteração do processo. Logo o valor de  $N$  na tabela é o valor que torna  $f_0$  uma aproximação com a precisão desejada.

### Segunda técnica

A segunda estimativa é dada através da função geradora (2.43). Faremos a análise para estimar  $\mathcal{N}_L(1 - i\eta; w)$  via função geradora. Então fixado  $w$  e  $x$  definimos

$$A_N(w) = e^{-xw} \sum_{k=0}^N \frac{\mathcal{P}_k(L + 1 - i\eta; x)}{k!} w^k. \quad (3.26)$$

Desejamos encontrar  $N$  de modo que  $A_N(w) \sim \mathcal{N}_L(1 - i\eta; w)$ .

A Tabela 3.1 fornece os resultados obtidos usando este método para aproximar  $\mathcal{N}_L(1 - i\eta, 1)$  para alguns valores de  $L$  e  $\eta$ . Nas colunas 6 e 7, da segunda técnica, temos as aproximações  $A_N(1)$ , como em (3.26), para  $\mathcal{N}_L(1 - i\eta, 1)$  com  $x = 0$  e  $x = -\eta/(L + 1)$ , respectivamente. Além disso, nas colunas 6 e 7 apresentamos o

---

<sup>1</sup> $V_r$  com precisão de 10 dígitos

número de termos  $(N + 1)$  que precisam ser calculados para obter  $A_N(1)$  com a precisão desejada. Dizemos que a aproximação estará com a precisão desejada quando

$$|A_N(w) - V_r| < \epsilon, \quad \text{com } \epsilon = 10^{-4}.$$

Os valores de referência  $V_r$  são os mesmos da primeira técnica.

$L$	$\eta$	$V_r$ $\mathcal{N}_L(1 - i\eta, 1)$	1ª técnica		2ª técnica	
			$f_0$	$N$	$x = 0$ $A_N(1) : N + 1$	$x = -\eta/(L + 1)$ $A_N(1) : N + 1$
0	0	0.8414709848	0.84156	2200	(0.84146): 7	(0.84146): 7
2	0	0.9305257802	0.93062	2400	(0.93055): 5	(0.93055): 5
5	0	0.9621732438	0.96226	2500	(0.96217): 5	(0.96217): 5
0	1	2.098514451	2.09841	15800	(2.09852): 7	(2.09856): 8
2	1	1.293748136	1.29364	9700	(1.29365): 4	(1.29377): 6
5	1	1.136160309	1.13606	8600	(1.13609): 5	(1.13619): 5
0	2	4.365329317	4.36522	76400	(4.36531): 8	(4.36535): 12
2	2	1.773469712	1.77336	31100	(1.77341): 6	(1.77344): 6
5	2	1.338836124	1.33873	23500	(1.33877): 5	(1.33890): 5
2	3	2.401518958	2.40141	66100	(2.40158): 6	(2.40147): 7
3	4	2.462451116	2.46235	92400	(2.46245): 7	(2.46241): 7
4	5	2.503498395	2.50339	119000	(2.50359): 5	(2.50345): 6
5	6	2.533094529	2.53299	145700	(2.53315): 6	(2.53308): 6

Tabela 3.1: Estimativas para  $\mathcal{N}_L(1 - i\eta, 1)$

A Tabela 3.1 mostra que as estimativas feitas com a primeira técnica convergem mais lentamente, visto que o valor de  $N$  necessário para se alcançar a precisão com a primeira técnica é alto. Isto acontece porque o algoritmo de Gautschi depende de uma normalização no passo 1. A normalização para este primeiro teste equivale a supor que as aproximações iniciais são  $f_N = 1$  e  $f_{N+1} = 0$ . Uma forma de melhorar a velocidade da convergência seria combinando a segunda técnica para estimar alguns termos da sequência  $\{\mathcal{N}_{L+k}(b_0, w)\}_k$  e fornecer outras normalizações. Por exemplo, seja  $w$  fixo, se estimarmos  $\mathcal{N}_{L+m}(b_0, w)$  e  $\mathcal{N}_{L+m+1}(b_0, w)$  para um certo  $m \in \mathbb{N}$  podemos iniciar as iterações com  $N = m$  e usar a normalização  $\mathcal{N}_{L+m}(b_0, w) + \mathcal{N}_{L+m+1}(b_0, w) = s$  com isto o algoritmo fornecerá os demais termos  $\{\mathcal{N}_{L+k}(b_0, w)\}_{k=0}^{m-1}$  de forma mais rápida.

A segunda técnica, baseada na série de expansão, é bem promissora e com poucos termos é possível alcançar a precisão desejada. A escolha de  $x = 0$  na expansão foi motivada pelo fato de que  $\widehat{\mathcal{P}}_n(b; 0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , como veremos no Teorema 3.11, e isso garante a convergência rápida da expansão. A escolha de  $x = -\eta/(L + 1)$  foi estudada em [34] e seria interessante comparar qual expansão converge mais rápido. Analisando os dados da tabela temos que a quantidade de termos necessários para obter a aproximação com precisão desejada,  $\epsilon = 10^{-4}$ , com  $x = 0$  é menor ou igual a quantidade de termos necessários para obter a aproximação com a escolha de  $x = -\eta/(L + 1)$ .

O próximo teorema descreve o comportamento do termo geral dos coeficientes da aproximação  $A_N(w)$  fixando  $x = 0$ . Tais coeficientes são os coeficientes da função geradora (2.43) com  $x = 0$ .

**Teorema 3.11.** *Seja  $\operatorname{Re}(b) = \lambda \geq 1$ . Então para todo  $\delta$  tal que  $0 < \delta < 1$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \delta)^n |\mathcal{P}_n(0)| = 0.$$

*Em particular,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 - \delta)^n}{2^n} n^\lambda |\widehat{\mathcal{P}}_n(0)| = 0.$$

*Demonstração.* Usando (2.16) e (2.42) temos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{P}}_0(b; 0) &= \mathcal{P}_0(b; 0) = 1 \quad \text{e} \quad \widehat{\mathcal{P}}_1(b; 0) = \mathcal{P}_1(b; 0) = -\eta/\lambda, \quad \gamma_1 = 1 \\ \mathcal{P}_{n+1}(b; 0) &= -\frac{\eta}{\lambda + n} \mathcal{P}_n(b; 0) - \frac{1}{4} \frac{n(2\lambda + n - 1)}{(\lambda + n)(\lambda + n - 1)} \mathcal{P}_{n-1}(b; 0) \\ \gamma_{n+1} &= \frac{2(\lambda + n)}{2\lambda + n} \gamma_n \quad \text{e} \quad \widehat{\mathcal{P}}_{n+1}(b; 0) = \gamma_{n+1} \mathcal{P}_{n+1}(b; 0). \end{aligned}$$

Da fórmula de recorrência para  $\{\mathcal{P}_n(b; 0)\}_{n \geq 0}$  temos

$$t_{n+1} < (2 - \delta) |c_{n+1}^{(b)}| t_n + (2 - \delta)^2 d_{n+1}^{(b)} t_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

onde  $t_n = (2 - \delta)^n |\mathcal{P}_n(0)|$ ,  $n \geq 0$ . Observe que  $|c_{n+1}^{(b)}| = |\eta|/(n + \lambda)$  decresce monotonicamente para zero e  $d_{n+1}^{(b)}$ , que é positiva, converge (monotonicamente crescente quando  $\lambda > 1$ ) para  $1/4$ . A convergência monotônica crescente da sequência encadeada segue de

$$\frac{1}{4} - d_{n+1}^{(b)} = \frac{1}{4} \frac{\lambda(\lambda - 1)}{(\lambda + n - 1)(\lambda + n)}, \quad n \geq 1.$$

Dado qualquer  $\delta$  satisfazendo  $0 < \delta < 1$ , seja  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$(2 - \delta) |c_{n+1}^{(b)}| < \delta(1 - \delta), \quad n \geq N.$$

Isto é sempre possível devido ao comportamento monotônico de  $|c_{n+1}^{(b)}|$ .

Considere  $T_N = \max_{0 \leq n \leq N} t_n$ . Vamos analisar o comportamento de  $t_{N+r}$  para  $r \geq 1$ , encontrando primeiramente limitantes para  $t_{N+1}$ ,  $t_{N+2}$ ,  $t_{N+3}$  e  $t_{N+4}$ . Temos

$$t_{N+1} < \delta(1 - \delta) t_N + \frac{(2 - \delta)^2}{4} t_{N-1} < \left[ \delta(1 - \delta) + \frac{(2 - \delta)^2}{4} \right] T_N = \frac{4 - 3\delta^2}{4} T_N < T_N,$$

$$t_{N+2} < \delta(1 - \delta) t_{N+1} + \frac{(2 - \delta)^2}{4} t_N < \left[ \delta(1 - \delta) + \frac{(2 - \delta)^2}{4} \right] T_N = \frac{4 - 3\delta^2}{4} T_N,$$

$$\begin{aligned}
t_{N+3} &< \delta(1-\delta)t_{N+2} + \frac{(2-\delta)^2}{4}t_{N+1} \\
&< \left[ \delta(1-\delta) + \frac{(2-\delta)^2}{4} \right] \left( \frac{4-3\delta^2}{4} \right) T_N = \left( \frac{4-3\delta^2}{4} \right)^2 T_N < \frac{4-3\delta^2}{4} T_N, \\
t_{N+4} &< \delta(1-\delta)t_{N+3} + \frac{(2-\delta)^2}{4}t_{N+2} \\
&< \left[ \delta(1-\delta) + \frac{(2-\delta)^2}{4} \right] \left( \frac{4-3\delta^2}{4} \right) T_N = \left( \frac{4-3\delta^2}{4} \right)^2 T_N.
\end{aligned}$$

Assim, recursivamente temos

$$\begin{aligned}
t_{N+2r-1} &< \left( \frac{4-3\delta^2}{4} \right)^r T_N, \\
& & r \geq 1. \\
t_{N+2r} &< \left( \frac{4-3\delta^2}{4} \right)^r T_N,
\end{aligned}$$

Fazendo  $r \rightarrow \infty$  obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2-\delta)^n |\mathcal{P}_n(0)| = 0.$$

Da definição da função  $\Gamma(z)$  temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\lambda (2-\delta)^n}{2^n} |\widehat{\mathcal{P}}_n(0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\lambda (\lambda)_n}{(2\lambda)_n} (2-\delta)^n |\mathcal{P}_n(0)| = \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(\lambda)} \lim_{n \rightarrow \infty} (2-\delta)^n |\mathcal{P}_n(0)| = 0.$$

Com isso concluímos o resultado.  $\square$

**Observação 3.12.** *Observe que, se escolhermos  $\delta$  suficientemente pequeno, o teorema sugere que  $|\widehat{\mathcal{P}}_n(0)|$  tende a zero de forma similar ou mais rápida que  $1/n^\lambda$ .*

Alguns fatos interessantes relacionados aos assuntos discutidos nesta seção que ainda ficaram em aberto e que serão objetos de trabalhos futuros são:

- Estimar a distância entre os zeros de  $\mathcal{M}(b; \cdot)$  e os zeros da função de Bessel, visto que estas funções estão relacionadas;
- Comportamento assintótico de  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  com  $n$  suficientemente grande;
- Investigar se  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  é solução minimal da relação de recorrência de três termos (2.16).

O segundo item nos ajudaria a responder se  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  é ou não solução minimal da relação de recorrência de três termos, pois o Teorema de Peron é inconclusivo para este caso.

# 4 Aproximações por Funções com Ortogonalidade Híbrida

Este capítulo está dividido em duas seções. Na Seção 4.1 apresentamos os resultados conhecidos na literatura sobre as funções com ortogonalidade híbrida. O resultado inédito desta seção aparece no Teorema 4.11, onde respondemos um problema deixado em aberto no artigo [9]. Na Seção 4.2 introduzimos as aproximações por funções com ortogonalidade híbrida através método dos mínimos quadrados modificado. Como aplicações do método dos mínimos quadrados modificado, apresentamos resultados de convergência e estimativas para funções no espaço vetorial  $\Omega_n$ .

## 4.1 Definições e Propriedades

Seja  $\mathbb{P}_n$  o espaço vetorial dos polinômios reais de grau no máximo  $n$  e  $\Omega_n$  o espaço vetorial das funções reais em  $[-1, 1]$  definido por  $\Omega_0 = \mathbb{P}_0$ , e se  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{F} \in \Omega_n \Leftrightarrow \mathcal{F}(x) = B^{(0)}(x) + \sqrt{1-x^2}B^{(1)}(x), \quad (4.1)$$

com  $B^{(0)} \in \mathbb{P}_n$ ,  $B^{(1)} \in \mathbb{P}_{n-1}$  satisfazendo  $B^{(0)}(-x) = (-1)^n B^{(0)}(x)$ , e  $B^{(1)}(-x) = (-1)^{n-1} B^{(1)}(x)$ .

O espaço das funções  $\Omega_n$  foi introduzido recentemente em [9], e sua importância se encontra no fato de que este espaço contém a sequência de funções  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  que possuem propriedades análogas às propriedades dos polinômios ortogonais na reta real. No caso em que a medida  $\psi$  é simétrica, estas funções podem ser vistas como extensão de polinômios ortogonais simétricos em  $[-1, 1]$ . Ademais, as funções  $\mathcal{W}_n$  estão conectadas, através da transformação de Delsarte e Genin, com polinômios definidos na circunferência unitária. Desta forma, usando as propriedades das funções  $\mathcal{W}_n$  foi possível concluir fatos sobre polinômios para-ortogonais no que diz respeito aos seus zeros e suas propriedades monotônicas, e a existência de *gaps* no suporte das medidas [14, 18, 17, 31].

A seguir estabelecemos alguns resultados relacionados aos espaços  $\Omega_n$  já conhecidos na literatura [9]. Seja  $\mathcal{F}(x) = B^{(0)}(x) + \sqrt{1-x^2}B^{(1)}(x) \in \Omega_n$ . Então, podemos

reescrever  $B^{(0)}$  e  $B^{(1)}$  da seguinte forma

$$B^{(0)}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} b_j^{(0)} x^{n-2j} \text{ e } B^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} b_j^{(1)} x^{n-1-2j}, \quad (4.2)$$

para coeficientes apropriados  $b_j^{(0)}$  e  $b_j^{(1)}$ . Dizemos que  $\mathcal{F}$  possui grau  $n$  se  $(b_0^{(0)})^2 + (b_0^{(1)})^2 > 0$ . Observe que a dimensão de  $\Omega_n$  é  $n + 1$ , e como base podemos tomar, por exemplo,

$$\{1, x\sqrt{1-x^2}, x^2, \dots, x^{n-1}\sqrt{1-x^2}, x^n\}, \quad (4.3)$$

se  $n$  é par, e

$$\{\sqrt{1-x^2}, x, x^2\sqrt{1-x^2}, \dots, x^{n-1}\sqrt{1-x^2}, x^n\}, \quad (4.4)$$

se  $n$  é ímpar. Observe que  $\Omega_{2n} \subset \Omega_{2n+2}$ ,  $\Omega_{2n+1} \subset \Omega_{2n+3}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso, se  $m$  e  $n$  tem paridades diferentes temos que  $\Omega_m \cap \Omega_n$  é o conjunto que contém somente a função nula.

**Teorema 4.1.** *Seja  $\mathcal{F} \in \Omega_n$ . Então, o número de zeros de  $\mathcal{F}$  em  $(-1, 1)$  não excede  $n$ . Além disso, se  $1$  é zero de  $\mathcal{F}$  então  $-1$  também é zero de  $\mathcal{F}$  e, neste caso, o número de zeros de  $\mathcal{F}$  em  $[-1, 1]$  não excede  $n + 1$ .*

O próximo teorema define a sequência  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  de funções que serão utilizadas para o método de aproximação que iremos propor neste capítulo. A demonstração pode ser encontrada com detalhes em [9].

**Teorema 4.2.** *Seja  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  a sequência de funções definidas pela relação de recorrência*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0(x) &= \gamma_0, & \mathcal{W}_1(x) &= (\gamma_1 x - c_1 \sqrt{1-x^2}) \mathcal{W}_0(x), \\ \mathcal{W}_{n+1}(x) &= (\gamma_{n+1} x - c_{n+1} \sqrt{1-x^2}) \mathcal{W}_n(x) - d_{n+1} \mathcal{W}_{n-1}(x), \text{ para } n \geq 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aqui,  $\{d_n\}_{n \geq 2}$ ,  $\{c_n\}_{n \geq 1}$  e  $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$  são sequências de números reais com  $\gamma_n \neq 0$ ,  $n \geq 0$ . Então, para qualquer  $n \geq 0$ ,

- Uma base para  $\Omega_{2n}$  é  $\{\mathcal{W}_{2n}(x), \sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_{2n-1}(x), \dots, \sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_1(x), \mathcal{W}_0(x)\}$ ;
- Uma base para  $\Omega_{2n+1}$  é  $\{\mathcal{W}_{2n+1}(x), \sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_{2n}(x), \dots, \mathcal{W}_1(x), \sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_0(x)\}$ .

Conforme adiantado na introdução, queremos utilizar a sequência de funções  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  para propor um método de aproximação. Seja  $\psi$  uma medida positiva em  $[-1, 1]$ . Consideremos a sequência de funções  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$ , onde  $\mathcal{W}_n$  tem grau  $n$  satisfa-

zendo a propriedade de ortogonalidade híbrida

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2n}(x)\mathcal{W}_{2m}(x)\sqrt{1-x^2}d\psi(x) &= \rho_{2m}\delta_{n,m}; \\ \int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2n+1}(x)\mathcal{W}_{2m+1}(x)\sqrt{1-x^2}d\psi(x) &= \rho_{2m+1}\delta_{n,m}; \\ \int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2n+1}(x)\mathcal{W}_{2m}(x)d\psi(x) &= 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

Desta forma, para a sequência de funções  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  dadas em (4.5) satisfazendo (4.6) temos o seguinte resultado.

**Teorema 4.3.** *Uma sequência de funções  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  satisfazendo a propriedade de ortogonalidade (4.6) e  $\mathcal{W}_n \in \Omega_n$  possuindo grau  $n$  sempre existe. Além disso, os coeficientes são dados por  $\gamma_n \neq 0$ ,  $n \geq 0$ , e*

$$\begin{aligned} c_1 &= \gamma_1 \rho_0^{-1} \int_{-1}^1 x \mathcal{W}_0^2(x) d\psi(x), \\ c_{n+1} &= \gamma_{n+1} \frac{1}{\rho_n} \int_{-1}^1 x \mathcal{W}_n^2(x) d\psi(x), \\ d_{n+1} &= \frac{\gamma_{n+1}^2 + c_{n+1}^2}{\gamma_n^2 + c_n^2} \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

para  $n \geq 1$ . Aqui,  $\rho_n = \int_{-1}^1 \mathcal{W}_n^2(x)\sqrt{1-x^2}d\psi(x) > 0$ ,  $n \geq 0$ .

Observe que se a medida  $\psi$  é simétrica, ou seja,  $d\psi(-x) = -d\psi(x)$ , então os coeficientes  $c_n = 0$ , para todo  $n \geq 0$  e as funções  $\mathcal{W}_n$  são polinômios simétricos em  $[-1, 1]$ .

Dizemos que as funções  $\mathcal{W}_n$  são normalizadas quando  $\rho_n = 1$  para todo  $n \geq 0$ . Denotamos por  $\{\widehat{\mathcal{W}}_n\}_{n \geq 0}$  a sequência de funções reescaladas, definidas por

$$\widehat{\mathcal{W}}_0(x) = \frac{1}{\gamma_0} \mathcal{W}_0(x) \quad \text{e} \quad \widehat{\mathcal{W}}_n(x) = \frac{1}{\gamma_0 \cdots \gamma_n} \mathcal{W}_n(x), \quad n \geq 1. \quad (4.8)$$

Observe que as funções reescaladas satisfazem a relação de recorrência

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{W}}_0(x) &= 1, \quad \widehat{\mathcal{W}}_1(x) = (x - \widehat{c}_1 \sqrt{1-x^2}), \\ \widehat{\mathcal{W}}_{n+1}(x) &= (x - \widehat{c}_{n+1} \sqrt{1-x^2}) \widehat{\mathcal{W}}_n(x) - \widehat{d}_{n+1} \widehat{\mathcal{W}}_{n-1}(x), \quad \text{para } n \geq 1, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}_n &= \int_{-1}^1 \widehat{\mathcal{W}}_n^2(x) \sqrt{1-x^2} d\psi(x), & \widehat{c}_1 &= \frac{1}{\widehat{\rho}_0} \int_{-1}^1 x \widehat{\mathcal{W}}_0^2(x) d\psi(x), \\ \widehat{c}_{n+1} &= \frac{1}{\widehat{\rho}_n} \int_{-1}^1 x \widehat{\mathcal{W}}_n^2(x) d\psi(x), & \widehat{d}_{n+1} &= \frac{1 + (\widehat{c}_{n+1})^2}{1 + (\widehat{c}_n)^2} \frac{\widehat{\rho}_n}{\widehat{\rho}_{n-1}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$



O próximo exemplo pode ser encontrado com detalhes em [9].

**Exemplo 4.4.** *Seja  $\psi$  a medida positiva dada por  $d\psi(x) = [e^{-\arccos(x)}]^{2\eta}(1-x^2)^{\lambda-1}dx$  com parâmetros  $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 1/2$ , com  $\arccos(x)$  entre 0 e  $\pi$ . Então,*

$$\widehat{\mathcal{W}}_n(x) = 2^{-n} \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda)_n} e^{-in\theta/2} {}_2F_1(-n, b; b + \bar{b}; 1 - e^{i\theta})$$

onde  $x = \cos(\theta/2)$ ,  $b = \lambda + i\eta$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}_n &= \frac{\pi n!(\lambda+n)\Gamma(2\lambda+n)}{2^{2\lambda+2n-1}e^{\pi\eta}|\Gamma(b+n+1)|^2 [(\lambda)_n]^2} [(\operatorname{Re}[(b)_n])^2 + (\operatorname{Im}[(b)_n])^2], \\ \widehat{c}_n &= \frac{\eta}{n+\lambda-1} \quad \text{e} \quad \widehat{d}_{n+1} = \frac{1}{4} \frac{n(n+2\lambda-1)}{(n+\lambda-1)(n+\lambda)}. \end{aligned}$$

Os próximos resultados também podem ser encontrados com detalhes em [9].

**Lema 4.5.** *Se a sequência de funções  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  é dada pela recorrência (4.5), com  $\mathcal{W}_n$  de grau  $n$  e satisfazendo a ortogonalidade híbrida (4.6), temos*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)\mathcal{W}_0(x)\mathcal{W}_1(x)d\psi(x) &= \sigma_1, \\ \int_{-1}^1 (1-x^2)\mathcal{W}_1(x)\mathcal{W}_2(x)d\psi(x) &= \sigma_2, \text{ e para } n \geq 3, \\ \int_{-1}^1 (1-x^2)\mathcal{W}_{n-1-2k}(x)\mathcal{W}_n(x)d\psi(x) &= \begin{cases} \sigma_n, & k=0, \\ 0, & 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \end{cases} \end{aligned} \tag{4.11}$$

onde  $\sigma_n = -\rho_n(\gamma_{n+1}c_n + \gamma_n c_{n+1})/(\gamma_n^2 + c_n^2)\gamma_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ .

**Lema 4.6.** *A sequência de funções  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$ , com  $\mathcal{W}_n \in \Omega_n$  de grau  $n$  satisfaz a ortogonalidade híbrida (4.6) se, e somente se, para todo  $n \geq 1$*

$$\int_{-1}^1 \mathcal{F}(x)\mathcal{W}_n(x)d\psi(x) = 0, \text{ sempre que } \mathcal{F} \in \Omega_{n-1}.$$

**Lema 4.7.** *A sequência de funções  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$ , com  $\mathcal{W}_n \in \Omega_n$  de grau  $n$  satisfaz a ortogonalidade híbrida (4.6) se, e somente se, para todo  $n \geq 1$*

$$\int_{-1}^1 p(x)\mathcal{W}_n(x)d\psi(x) = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-1}^1 q(x)\mathcal{W}_n(x)\sqrt{1-x^2}d\psi(x) = 0,$$

onde  $p \in \mathbb{P}_{n-1}$  e  $q \in \mathbb{P}_{n-2}$  e satisfazem

$$p(-x) = (-1)^{n-1}p(x) \quad \text{e} \quad q(-x) = (-1)^{n-2}q(x).$$

Considere  $f$  uma função contínua. Diremos que um zero  $\xi$  de  $f$  é relevante se  $f$

muda de sinal em  $\xi$ . Os próximos resultados dizem respeito aos zeros das funções  $\mathcal{W}_n$ .

**Teorema 4.8.** *Sejam  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  a sequência de funções dadas no Teorema 4.3. Para  $n \geq 1$ , a função  $\mathcal{W}_n$  tem exatamente  $n$  zeros distintos no intervalo  $[-1, 1]$ . Além disso, todos os zeros são simples.*

Em [9] também foram apresentados fórmulas de quadratura envolvendo a sequência de funções dadas no Teorema 4.3. Uma consequência disto é o próximo teorema.

**Teorema 4.9.** *Para  $n \geq 1$ , considere  $x_0^{(n)} = -1$ ,  $x_{n+1}^{(n)} = 1$  e sejam  $x_j^{(n)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  os zeros de  $\mathcal{W}_n$  ordenados da seguinte forma  $x_j^{(n)} < x_{j+1}^{(n)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-1$ . Então, em todo intervalo  $(x_j^{(n)}, x_{j+1}^{(n)})$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , existe um zero de  $\mathcal{W}_{2n_r}$  com  $n_r = \lfloor (n + 2r)/2 \rfloor$  e  $r \geq 1$ . Em particular, temos a propriedade do entrelaçamento*

$$x_1^{(2n)} < x_1^{(2n-1)} < x_2^{(2n)} < \dots < x_{2n-1}^{(2n)} < x_{2n-1}^{(2n-1)} < x_{2n}^{(2n)}, \quad n \geq 1. \quad (4.12)$$

Note que o Teorema 4.9 fornece apenas uma propriedade de entrelaçamento parcial, isto é, os zeros de  $\mathcal{W}_{2n-1}$  e  $\mathcal{W}_{2n}$  se entrelaçam. Para o estudo sobre os zeros das funções de ortogonalidade híbrida podemos sem perda de generalidade considerar tanto a sequência de funções  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  quanto a sequência reescalada  $\{\widehat{\mathcal{W}}_n\}_{n \geq 0}$ . Em [18] os autores mostraram que se na relação de recorrência (4.9) a sequência  $\{\widehat{d}_{n+1}\}_{n \geq 1}$  é uma sequência encadeada positiva, então os zeros de  $\widehat{\mathcal{W}}_n$  e  $\widehat{\mathcal{W}}_{n+1}$  se entrelaçam, ou seja, entre os zeros de  $\widehat{\mathcal{W}}_{n+1}$  existe um único zero de  $\widehat{\mathcal{W}}_n$ . Então, em [9] os autores fazem duas conjecturas:

- Seja  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  a sequência de funções definidas no Teorema 4.3. Podemos afirmar que os zeros de  $\mathcal{W}_{n+1}$  e  $\mathcal{W}_n$  se entrelaçam?
- Seja  $\{\widehat{\mathcal{W}}_n\}_{n \geq 0}$  a sequência reescalada dada em (4.9). É possível garantir que  $\{\widehat{d}_{n+1}\}_{n \geq 1}$  é uma sequência encadeada positiva?

Recentemente foi confirmado o entrelaçamento para  $\mathcal{W}_{2n}$  e  $\mathcal{W}_{2n+1}$  [54]. De fato,

**Teorema 4.10.** *Seja  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  a sequência de funções dadas no Teorema 4.3 com  $\gamma_n \neq 0$  para todo  $n \geq 0$ . Então os zeros de  $\mathcal{W}_{2n}$  e  $\mathcal{W}_{2n+1}$  se entrelaçam.*

Portanto, do Teorema 4.8 segue que  $\widehat{\mathcal{W}}_n$  possui exatamente  $n$  zeros relevantes em  $[-1, 1]$  e dos Teoremas 4.9 e 4.10 segue que os zeros de  $\widehat{\mathcal{W}}_{n+1}$  e  $\widehat{\mathcal{W}}_n$  se entrelaçam para todo  $n \geq 1$ . Além disso, do Teorema 4.3 temos que  $\widehat{d}_{n+1} > 0$  para todo  $n \geq 1$ . A seguir, mostramos que a sequência  $\{\widehat{d}_{n+1}\}_{n \geq 1}$  é uma sequência encadeada positiva.

**Teorema 4.11.** *A sequência de parâmetros  $\{\widehat{d}_{n+1}\}_{n \geq 1}$  que aparece na relação de recorrência (4.9) da sequência de funções  $\{\widehat{\mathcal{W}}_n\}_{n \geq 0}$  é uma sequência encadeada positiva.*

*Demonstração.* Se garantirmos que  $\widehat{\mathcal{W}}_n(1) > 0$  para todo  $n \geq 1$ , então

$$g_{n+1} = 1 - \frac{\widehat{\mathcal{W}}_{n+1}(1)}{\widehat{\mathcal{W}}_n(1)}$$

é a sequência de parâmetros minimal para  $\{\widehat{d}_{n+1}\}_{n \geq 1}$ . De fato, fixando  $x = 1$  na relação de recorrência (4.9) temos

$$\widehat{\mathcal{W}}_{n+1}(1) = \widehat{\mathcal{W}}_n(1) - \widehat{d}_{n+1}\widehat{\mathcal{W}}_{n-1}(1),$$

que é equivalente a

$$\widehat{d}_{n+1} = \left(1 - \frac{\widehat{\mathcal{W}}_{n+1}(1)}{\widehat{\mathcal{W}}_n(1)}\right) \left(\frac{\widehat{\mathcal{W}}_n(1)}{\widehat{\mathcal{W}}_{n-1}(1)}\right).$$

Usando o fato de  $\widehat{d}_{n+1} > 0$  e  $\widehat{\mathcal{W}}_n(1) > 0$  para  $n \geq 1$ , segue que  $0 < \frac{\widehat{\mathcal{W}}_{n+1}(1)}{\widehat{\mathcal{W}}_n(1)} < 1$  para todo  $n \geq 1$  e o resultado segue.

Portanto, para concluir a prova, basta verificarmos que  $\widehat{\mathcal{W}}_n(1) > 0$  para todo  $n \geq 1$ . Sejam  $\{x_i^{(n)}\}_{i=1}^n$  os zeros da função  $\widehat{\mathcal{W}}_n$  ordenados da seguinte forma  $x_j^{(n)} < x_{j+1}^{(n)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-1$  e  $I_i = (x_i^{(i)}, 1)$ . Que  $\widehat{\mathcal{W}}_1(1) > 0$  é trivial. Usando a relação de recorrência (4.9) para  $n = 1$  e o fato de  $\widehat{d}_2 > 0$  segue que  $\widehat{\mathcal{W}}_2(x_1^{(1)}) < 0$ . Como os zeros de  $\widehat{\mathcal{W}}_2(x)$  e  $\widehat{\mathcal{W}}_1(x)$  se entrelaçam existe um único zero relevante de  $\widehat{\mathcal{W}}_2(x)$  em  $I_1$  e isso implica que  $\widehat{\mathcal{W}}_2(1) > 0$ . Visto que  $\widehat{\mathcal{W}}_2(1) > 0$  e  $\widehat{\mathcal{W}}_1(1) > 0$  então  $\widehat{\mathcal{W}}_2(x) > 0$  em  $I_2$  e  $\widehat{\mathcal{W}}_1(x) > 0$  em  $I_1$  e devido ao entrelaçamento dos zeros temos  $I_2 \subset I_1$ . Usando a relação de recorrência (4.9) para  $n = 2$ , o fato de  $\widehat{d}_3 > 0$  e de  $I_2 \subset I_1$  segue que  $\widehat{\mathcal{W}}_3(x_2^{(2)}) < 0$ ; isto juntamente com  $I_3 \subset I_2$ , devido o entrelaçamento, implica que  $\widehat{\mathcal{W}}_3(1) > 0$ . Assim, recursivamente, mostra-se que  $\widehat{\mathcal{W}}_n(x_{n-1}^{(n-1)}) < 0$  e, portanto,  $\widehat{\mathcal{W}}_n(1) > 0$ , para todo  $n$ .  $\square$

## 4.2 Aproximação em $\Omega_n$

Nesta seção iremos propor um método sobre aproximação de funções  $f$  por sequência de funções em  $\Omega_n$ . Antes de propor o método vamos fazer uma breve introdução sobre séries ortogonais. A referência utilizada é livro de G. Alexits [3].

Seja  $\psi$  uma medida positiva  $[a, b]$ . Vamos denotar por  $L_\psi^1$  o espaço das *funções reais  $f$  módulo integráveis* em  $[a, b]$ , ou seja, o espaço das funções  $f$  tal que a integral  $\int_a^b |f(x)|d\psi(x)$  exista. E seja  $L_\psi^2$  o espaço das *funções reais  $f$  quadrado integráveis* em  $[a, b]$ , ou seja, o espaço das funções  $f$  tal que a integral  $\int_a^b f^2(x)d\psi(x)$  exista.

Uma sequência  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  de funções quadrado integráveis é dita ser *ortogonal em  $[a, b]$  com relação a medida  $\psi$* , ou simplesmente um *sistema ortogonal se*

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle := \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)d\psi(x) = 0, \quad m \neq n, \quad (4.13)$$

onde  $\varphi_n$  são funções não nulas em quase toda parte do intervalo  $[a, b]$ . Vamos denotar por  $\|\cdot\|_2$  a norma induzida pelo produto interno (4.13), ou seja,

$$\|f\|_2 = \left\{ \int_a^b [f(x)]^2 d\psi(x) \right\}^{1/2}. \quad (4.14)$$

O sistema ortogonal é chamado de ortonormal se  $\|\varphi_n\|_2 = 1$  para todo  $n \geq 0$ . Qualquer série  $\sum c_n \varphi_n(x)$  construída formalmente com funções de um sistema ortogonal, onde  $c_i, i = 1, 2, \dots$  são números reais arbitrários, é chamada de *série ortogonal*. Entretanto, se os coeficientes  $c_n$  são os coeficientes de Fourier, isto é,

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|_2^2} \int_a^b \varphi_n(x) f(x) d\psi(x), \quad (4.15)$$

a série ortogonal é conhecida como *expansão ortogonal da função  $f$* . Quando o sistema ortogonal é formado pelos polinômios trigonométricos  $\{1, \text{sen}(nx), \text{cos}(nx)\}_{n \geq 1}$ , a série ortogonal da função  $f$  é bem conhecida como série de Fourier, e se o sistema ortogonal for a sequência de polinômios ortogonais de Legendre  $\{P_n\}_{n \geq 0}$ , a série ortogonal é chamada de série de Fourier-Legendre.

Vamos denotar a soma parcial da expansão ortogonal de  $f$  por

$$S_n(f; x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x). \quad (4.16)$$

A diferença entre a série ortogonal e a expansão ortogonal é que a soma parcial  $S_n(f; \cdot)$  satisfaz uma propriedade de mínimo:

**Teorema 4.12.** *Seja  $f \in L^2_\psi$ ,  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  um sistema ortogonal e  $X_n$  o espaço vetorial de dimensão  $n + 1$  gerado por  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Então,  $S_n(f; \cdot)$  é a melhor aproximação de  $f$  em  $X_n$ , isto é,*

$$\|f - S_n(f; \cdot)\|_2 \leq \|f - g\|_2, \text{ para toda } g \in X_n. \quad (4.17)$$

O problema de encontrar  $S_n(f; \cdot)$  recebe o nome de método dos mínimos quadrados (MMQ) em  $X_n$ . [3, 23].

**Exemplo 4.13.** *Se  $\{P_k\}_{k \geq 0}$  são os polinômios de Legendre e  $X_n = \text{span}\{P_k : k = 0, \dots, n\}$ , então  $S_n(f; \cdot)$  é uma aproximação polinomial de grau  $n$  para a função  $f$  obtida através do método dos mínimos quadrados.*

Uma propriedade importante dos coeficientes da expansão ortonormal é que os coeficientes são dados explicitamente por (4.15) e satisfazem a desigualdade de Bessel

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leq \int_a^b f^2(x) d\psi(x). \quad (4.18)$$

Disto também segue que os coeficientes  $c_n$  convergem para zero se  $f \in L^2_\psi$ . Uma caracterização sobre a completude dos sistemas ortonormais é dada pela *equação de Parseval*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b f^2(x) d\psi(x). \quad (4.19)$$

Esta propriedade de completude do sistema ortogonal é consequência da teoria de convergência das expansões ortogonais. É bem conhecido que se o sistema ortogonal é uma sequência de polinômios ortogonais ou trigonométricos, então ele é um sistema completo. Esta completude garante que  $S_n(f; \cdot)$  converge para  $f$  em  $L^2_\psi$ .

Há também resultados sobre a convergência pontual de  $S_n(f; \cdot)$  para  $f$ . Por exemplo, para as aproximações com um sistema de polinômios trigonométricos, se a função  $f$  for suave por partes em  $[a, b]$ , então nos pontos de continuidade de  $f$ ,  $S_n(f; \cdot)$  converge para  $f$ , e nos pontos de descontinuidade  $S_n(f; \cdot)$  converge para a média da descontinuidade. Existem também estudos de convergência usando funções núcleos como, por exemplo, o núcleo de Christoffel–Darboux. Detalhes sobre resultados de convergência de expansões ortogonais podem ser encontrados com detalhes em [2, 3, 37].

Daqui em diante vamos fixar  $\psi$  uma medida positiva em  $[-1, 1]$  tal que

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\psi(x) < \infty, \quad (4.20)$$

e definir as medidas  $\psi_A$  e  $\psi_B$  dadas por

$$\psi_A(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-t^2} d\psi(t), \quad \psi_B(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} d\psi(t). \quad (4.21)$$

Ainda, para  $f \in L^2_{\psi_B}$ , vamos definir as normas  $\|\cdot\|_B$  e  $\|\cdot\|_A$  por

$$\|f\|_A = \left\{ \int_{-1}^1 [f(x)]^2 d\psi_A(x) \right\}^{1/2}, \quad \|f\|_B = \left\{ \int_{-1}^1 [f(x)]^2 d\psi_B(x) \right\}^{1/2}. \quad (4.22)$$

Nosso objetivo é descrever um método alternativo para aproximar funções pertencentes a  $L^2_{\psi_B}$  por funções em  $\Omega_n$ . Devido a natureza do espaço  $\Omega_n$ , os casos com  $n$  par e ímpar devem ser analisados separadamente. Pelo Teorema 4.2 temos que quaisquer  $f \in \Omega_{2n}$  e  $g \in \Omega_{2n+1}$  podem ser unicamente escritas como

$$f(x) = \sum_{j=0}^n a_j^{(2n)} \mathcal{W}_{2j}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} b_j^{(2n)} \sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_{2j+1}(x), \quad (4.23)$$

$$g(x) = \sum_{j=0}^n a_j^{(2n+1)} \mathcal{W}_{2j+1}(x) + \sum_{j=0}^n b_j^{(2n+1)} \sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_{2j}(x). \quad (4.24)$$

Por motivo de clareza vamos denotar

$$G(\mathbf{a}_{2n}; \mathbf{b}_{2n}; x) := \sum_{j=0}^n a_j^{(2n)} \mathcal{W}_{2j}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} b_j^{(2n)} \sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_{2j+1}(x), \quad (4.25)$$

$$G(\mathbf{a}_{2n+1}; \mathbf{b}_{2n+1}; x) := \sum_{j=0}^n a_j^{(2n+1)} \mathcal{W}_{2j+1}(x) + \sum_{j=0}^n b_j^{(2n+1)} \sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_{2j}(x), \quad (4.26)$$

onde  $\mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m$  são os vetores com entradas reais

$$\mathbf{a}_m = \left( a_0^{(m)}, \dots, a_{\lfloor m/2 \rfloor}^{(m)} \right) \text{ e } \mathbf{b}_m = \left( b_0^{(m)}, \dots, b_{\lfloor (m-1)/2 \rfloor}^{(m)} \right). \quad (4.27)$$

Vamos definir formalmente as *séries ortogonais híbridas* como sendo as do tipo

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(2n)} \mathcal{W}_{2j}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(2n)} \sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_{2j+1}(x), \quad (4.28)$$

e

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(2n+1)} \mathcal{W}_{2j+1}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(2n+1)} \sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_{2j}(x), \quad (4.29)$$

onde  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  são as funções de ortogonalidade híbrida do Teorema 4.3 e  $\{a_j^{(m)}\}_{j \geq 0}$  e  $\{b_j^{(m)}\}_{j \geq 0}$  são coeficientes reais. As somas parciais das séries ortogonais híbridas são as dadas em (4.25) e (4.26), respectivamente.

Podemos obter uma expressão fechada para os coeficientes em (4.23) e (4.24). De fato, se multiplicamos (4.23) por  $\mathcal{W}_{2j+1}$  e integramos com respeito a medida  $\psi$  em  $[-1, 1]$ , então usando as propriedades de ortogonalidade híbrida (4.6) determinamos que  $b_j^{(2n)}$  é

$$b_j^{(2n)} = \frac{1}{\rho_{2j+1}} \int_{-1}^1 f(x) \mathcal{W}_{2j+1}(x) d\psi(x), \text{ para } j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (4.30)$$

onde  $\rho_{2j+1}$  é como em (4.6).

Para obter os coeficientes  $a_j^{(2n)}$ , para  $j = 0, \dots, n$ , multiplicamos (4.23) por  $\mathcal{W}_{2j}$  e integramos em  $[-1, 1]$  com relação a medida  $\psi_A$ . Usando a ortogonalidade híbrida (4.6) juntamente com o Lema 4.5 obtemos

$$\rho_{2j} a_j^{(2n)} + \sigma_{2j} b_{j-1}^{(2n)} + \sigma_{2j+1} b_j^{(2n)} = \int_{-1}^1 f(x) \mathcal{W}_{2j}(x) d\psi_A(x), \quad (4.31)$$

$j = 0, 1, \dots, n$ ,  $b_{-1}^{(2n)} = b_n^{(2n)} = 0$  e  $\sigma_j$  como no Lema 4.5.

Inspirados nos coeficientes deduzidos para  $f \in \Omega_{2n}$  vamos definir a soma parcial da

expansão ortogonal híbrida da função  $f$  em  $\Omega_{2n}$  como sendo

$$G(f; \boldsymbol{\alpha}_{2n}; \boldsymbol{\beta}_{2n}; x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j^{(2n)} \mathcal{W}_{2j}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(2n)} \sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_{2j+1}(x), \quad (4.32)$$

onde  $\boldsymbol{\beta}_{2n}$  e  $\boldsymbol{\alpha}_{2n}$  são os vetores cujas entradas  $\beta_j^{(2n)}$ ,  $\alpha_j^{(2n)}$  satisfazem (4.30), (4.31), respectivamente.

Da mesma forma vamos definir a soma parcial da *expansão ortogonal híbrida da função  $f$  em  $\Omega_{2n+1}$*  como sendo

$$G(f; \boldsymbol{\alpha}_{2n+1}; \boldsymbol{\beta}_{2n+1}; x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j^{(2n+1)} \mathcal{W}_{2j}(x) + \sum_{j=0}^n \beta_j^{(2n+1)} \sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_{2j+1}(x), \quad (4.33)$$

onde  $\boldsymbol{\alpha}_{2n+1}, \boldsymbol{\beta}_{2n+1}$  denotam os vetores com entradas  $\alpha_j^{(2n+1)}$ ,  $\beta_j^{(2n+1)}$ , respectivamente, dadas por

$$\beta_j^{(2n+1)} = \frac{1}{\rho_{2j}} \int_{-1}^1 f(x) \mathcal{W}_{2j}(x) d\psi(x), \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, n, \quad (4.34)$$

e

$$\rho_{2j+1} \alpha_j^{(2n+1)} + \sigma_{2j+1} \beta_j^{(2n+1)} + \sigma_{2j+2} \beta_{j+1}^{(2n+1)} = \int_{-1}^1 f(x) \mathcal{W}_{2j+1}(x) d\psi_A(x), \quad (4.35)$$

$j = 0, 1, \dots, n$ ,  $\beta_{n+1}^{(2n+1)} = 0$  e  $\sigma_j$  como no Lema 4.5.

Em suma, dada  $f \in L^2_{\psi_B}$ , nosso objetivo é estudar as propriedades de convergência das expansões ortogonais híbridas, ou seja, estudar a convergência de somas parciais  $G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot) \in \Omega_m$ . Veremos que esta aproximação vai minimizar, em certo sentido, ambas as normas  $\|f - G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)\|_A$  e  $\|f - G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)\|_B$ . Por isso iremos nos referir a  $G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)$  como aproximação da função  $f$  via o *método de mínimos quadrados modificado*.

### 4.2.1 Método dos Mínimos Quadrados Modificado

Nesta seção descrevemos as propriedades da aproximação  $G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot) \in \Omega_m$ ,  $m \geq 0$ . Dentre tais propriedades temos uma propriedade de mínimo envolvendo as normas  $\|\cdot\|_A$  e  $\|\cdot\|_B$  e uma desigualdade do tipo Bessel.

**Teorema 4.14.** *Seja  $f \in L^2_{\psi_B}$ , defina  $\mathcal{I}_j(f) = \int_{-1}^1 f(x) \mathcal{W}_j(x) d\psi(x)$ ,  $j \geq 0$  e*

$$\boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\beta}_m(f) = \left( \beta_0^{(m)}, \beta_1^{(m)}, \dots, \beta_{\lfloor (m-1)/2 \rfloor}^{(m)} \right)$$

o vetor cujas entradas com  $m = 2n$  e  $m = 2n + 1$  são os coeficientes das expansões

ortogonais híbridas (4.32) e (4.33), respectivamente, isto é

$$\beta_j^{(2n)} = \frac{\mathcal{I}_{2j+1}(f)}{\rho_{2j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{e} \quad \beta_j^{(2n+1)} = \frac{\mathcal{I}_{2j}(f)}{\rho_{2j}}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (4.36)$$

Então, para todo vetor  $\mathbf{a}_m$  temos

$$\|f - G(f; \mathbf{a}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)\|_B = \min_{\mathbf{b}_m} \|f - G(\mathbf{a}_m; \mathbf{b}_m; \cdot)\|_B.$$

*Demonstração.* Vamos fazer a prova para  $m = 2n$ . Note que

$$\begin{aligned} & \|f - G(\mathbf{a}_{2n}; \mathbf{b}_{2n}; \cdot)\|_B^2 \\ &= \int_{-1}^1 \left[ f(x) - \sum_{j=0}^n a_j^{(2n)} \mathcal{W}_{2j}(x) \right]^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\psi(x) - 2 \sum_{j=0}^{n-1} b_j^{(2n)} \mathcal{I}_{2j+1}(f) + \sum_{j=0}^{n-1} [b_j^{(2n)}]^2 \rho_{2j+1} \\ &= \int_{-1}^1 \left[ f(x) - \sum_{j=0}^n a_j^{(2n)} \mathcal{W}_{2j}(x) \right]^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\psi(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ [b_j^{(2n)}]^2 - 2b_j^{(2n)} \beta_j^{(2n)} \right\} \rho_{2j+1} \\ &= \int_{-1}^1 \left[ f(x) - \sum_{j=0}^n a_j^{(2n)} \mathcal{W}_{2j}(x) \right]^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\psi(x) - \sum_{j=0}^{n-1} [\beta_j^{(2n)}]^2 \rho_{2j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} [b_j^{(2n)} - \beta_j^{(2n)}]^2 \rho_{2j+1}. \end{aligned}$$

Então, o mínimo com relação a  $b_j^{(2n)}$  ocorre quando  $b_j^{(2n)} = \beta_j^{(2n)}$ .

Uma forma alternativa de fazer a demonstração deste teorema é considerar o sistema de equações

$$\frac{\partial \|f - G(\mathbf{a}_{2n}; \mathbf{b}_{2n}; \cdot)\|_B^2}{\partial b_k^{(2n)}} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

O caso de minimizar  $\|f - G(\mathbf{a}_{2n+1}; \mathbf{b}_{2n+1}; \cdot)\|_B^2$  é análogo. □

**Teorema 4.15.** *Seja  $f \in L_{\psi_B}^2$ , defina  $\mathcal{J}_j(f) = \int_{-1}^1 f(x) \mathcal{W}_j(x) \sqrt{1-x^2} d\psi(x)$ ,  $j \geq 0$  e*

$$\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\alpha}_m(f) = \left( \alpha_0^{(m)}, \alpha_1^{(m)}, \dots, \alpha_{\lfloor (m-1)/2 \rfloor}^{(m)} \right)$$

o vetor cujas entradas com  $m = 2n$  e  $m = 2n + 1$  são os coeficientes das expansões ortogonais híbridas (4.32) e (4.33), respectivamente, isto é

$$\rho_{2j} \alpha_j^{(2n)} + \sigma_{2j} \beta_{j-1}^{(2n)} + \sigma_{2j+1} \beta_j^{(2n)} = \mathcal{J}_{2j}(f), \quad j = 0, \dots, n, \quad (4.37)$$

com  $\beta_{-1}^{(2n)} = \beta_n^{(2n)} = 0$  e

$$\rho_{2j+1} \alpha_j^{(2n+1)} + \sigma_{2j+1} \beta_j^{(2n+1)} + \sigma_{2j+2} \beta_{j+1}^{(2n+1)} = \mathcal{J}_{2j+1}(f), \quad j = 0, \dots, n, \quad (4.38)$$



com  $\beta_{n+1}^{(2n+1)} = 0$ . As constantes são  $\rho_j$  e  $\sigma_j$  como no Lema 4.5 e Teorema 4.3, respectivamente. Então,

$$\|f - G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)\|_A = \min_{\mathbf{a}_m} \|f - G(f; \mathbf{a}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)\|_A.$$

*Demonstração.* Vamos fazer a prova para  $m = 2n$ . Note que

$$\begin{aligned} & \|f - G(f; \mathbf{a}_{2n}; \boldsymbol{\beta}_{2n}; \cdot)\|_A^2 \\ &= \int_{-1}^1 \left[ f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(2n)} \sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_{2j+1}(x) \right]^2 \sqrt{1-x^2} d\psi(x) - 2 \sum_{j=0}^n a_j^{(2n)} \mathcal{J}_{2j}(f) \\ &+ \sum_{j=0}^n a_j [\beta_{j-1}^{(2n)} \sigma_{2j} + \beta_j^{(2n)} \sigma_{2j+1}] + \sum_{j=0}^n [a_j^{(2n)}]^2 \rho_{2j} \\ &= \int_{-1}^1 \left[ f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(2n)} \sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_{2j+1}(x) \right]^2 \sqrt{1-x^2} d\psi(x) \\ &- \sum_{j=0}^n [\alpha_j^{(2n)}]^2 \rho_{2j} + \sum_{j=0}^n [a_j^{(2n)} - \alpha_j^{(2n)}]^2 \rho_{2j}. \end{aligned}$$

Então, o mínimo com relação a  $a_j^{(2n)}$  ocorre quando  $a_j^{(2n)} = \alpha_j^{(2n)}$ .

Uma forma alternativa de fazer a demonstração deste teorema é considerar o sistema de equações

$$\frac{\partial \|f - G(\mathbf{a}_{2n}; \boldsymbol{\beta}_{2n}; \cdot)\|_B^2}{\partial a_k^{(2n)}} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

O caso de minimizar  $\|f - G(f; \mathbf{a}_{2n+1}; \boldsymbol{\beta}_{2n+1}; \cdot)\|_A^2$  é análogo.  $\square$

**Observação 4.16.** Se  $\mathcal{F} \in \Omega_m$ , então  $G(\mathcal{F}; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; x) = \mathcal{F}(x)$ .

Observe que para toda função  $f$  em  $L_{\psi_B}^2$  temos as desigualdades

$$\|f\|_A \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_B. \quad (4.39)$$

Tais desigualdades serão bastante utilizadas no decorrer dos próximos teoremas. O resultado a seguir fornece estimativas para os coeficientes da aproximação  $G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)$  de funções  $f$  integráveis.

**Proposição 4.17.** Se  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  é uma sequência normalizada e uniformemente limitada, i.e., existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que

$$|\mathcal{W}_n(x)| \leq M \text{ para todo } x \in [-1, 1] \text{ e } n \geq 0 \quad (4.40)$$

e  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)| d\psi(x) < \infty$ , então

$$|\beta_j^{(m)}| \leq M \|f\|_1 \text{ e } |\alpha_j^{(m)}| \leq 3M \|f\|_1, \quad m \geq 1. \quad (4.41)$$

*Demonstração.* Consideremos  $m = 2n$ . O resultado para  $m$  ímpar é análogo. Usando a definição dos coeficientes  $\beta_j^{(2n)}$  e  $\alpha_j^{(2n)}$  da soma parcial (4.32) temos

$$|\beta_j^{(2n)}| \leq \int_{-1}^1 |f(x)| |\mathcal{W}_{2j+1}(x)| d\psi(x) \leq M \|f\|_1,$$

e

$$\begin{aligned} |\alpha_j^{(2n)}| &\leq \int_{-1}^1 |f(x)| |\mathcal{W}_{2j}(x)| \sqrt{1-x^2} d\psi(x) + |\sigma_{2j}| |\beta_{j-1}^{(2n)}| + |\sigma_{2j+1}| |\beta_j^{(2n)}| \\ &\leq M \|f\|_1 + |\sigma_{2j}| M \|f\|_1 + |\sigma_{2j+1}| M \|f\|_1. \end{aligned}$$

Para concluir o resultado, usando o Lema 4.5 e a desigualdade de Hölder (ver por exemplo [12]), obtemos

$$\begin{aligned} |\sigma_k| &= \left| \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_k(x) \sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_{k-1}(x) d\psi(x) \right| \\ &\leq \|\sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_k\|_2 \|\sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_{k-1}\|_2 \\ &\leq \|\sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_k\|_B \|\sqrt{1-x^2} \mathcal{W}_{k-1}\|_B \\ &= \|\mathcal{W}_k\|_A \|\mathcal{W}_{k-1}\|_A = \sqrt{\rho_k} \sqrt{\rho_{k-1}} = 1. \end{aligned}$$

□

Alguns exemplos de sequência de funções  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  ortogonais híbridas e uniformemente limitadas serão mencionados em seções posteriores, inclusive resultados sobre limitação uniforme serão obtidos como aplicação da desigualdade do tipo Bessel descrita a seguir.

**Teorema 4.18** (Desigualdade tipo Bessel). *Sejam  $f \in L^2_{\psi_B}$ ,  $\alpha_k^{(m)}$  e  $\beta_k^{(m)}$  os coeficientes da aproximação  $G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)$  dados nos teoremas 4.14 e 4.15. Então,*

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \left( \alpha_i^{(2n)} \right)^2 \rho_{2i} + \sum_{i=0}^{n-1} \left( \beta_i^{(2n)} \right)^2 \rho_{2i+1} &\leq \|f\|_B^2, \\ \sum_{i=0}^n \left( \alpha_i^{(2n+1)} \right)^2 \rho_{2i+1} + \sum_{i=0}^n \left( \beta_i^{(2n+1)} \right)^2 \rho_{2i} &\leq \|f\|_B^2. \end{aligned}$$

Em particular, se  $\rho_i \equiv 1$  para todo  $i \geq 0$ , então

$$\sum_{i=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left( \alpha_i^{(m)} \right)^2 + \sum_{i=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} \left( \beta_i^{(m)} \right)^2 \leq \|f\|_B^2. \quad (4.42)$$

*Demonstração.* Faremos a prova para o caso  $m = 2n$ , e o outro caso é análogo. Primeiramente observe que

$$\int_{-1}^1 [f(x) - G(f; \boldsymbol{\alpha}_{2n}; \boldsymbol{\beta}_{2n}; x)] \mathcal{W}_{2i}(x) \sqrt{1-x^2} d\psi(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.43)$$

Isto implica que

$$\|f - G(f; \boldsymbol{\alpha}_{2n}; \boldsymbol{\beta}_{2n}; \cdot)\|_A^2 = \left\| f - \sqrt{1-x^2} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(2n)} \mathcal{W}_{2j-1} \right\|_A^2 - \left\| \sum_{j=0}^n \alpha_j^{(2n)} \mathcal{W}_{2j} \right\|_A^2.$$

Disto segue

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^n \alpha_j^{(2n)} \mathcal{W}_{2j} \right\|_A^2 &\leq \left\| f - \sqrt{1-x^2} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(2n)} \mathcal{W}_{2j-1} \right\|_A^2 \\ &\leq \left\| f - \sqrt{1-x^2} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(2n)} \mathcal{W}_{2j-1} \right\|_B^2 \leq \|f\|_B^2 - 2 \sum_{j=0}^{n-1} (\beta_j^{(2n)})^2 \rho_{2j+1} + \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(2n)} \mathcal{W}_{2j+1} \right\|_A^2. \end{aligned}$$

Para finalizar usamos a ortogonalidade (4.6) para garantir que

$$\left\| \sum_{j=0}^n \alpha_j^{(2n)} \mathcal{W}_{2j} \right\|_A^2 = \sum_{j=0}^n (\alpha_j^{(2n)})^2 \rho_{2j} \quad \text{e} \quad \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(2n)} \mathcal{W}_{2j+1} \right\|_A^2 = \sum_{j=0}^{n-1} (\beta_j^{(2n)})^2 \rho_{2j+1}.$$

□

Como consequência imediata temos

**Corolário 4.19.** *Considere a sequência  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  normalizada. Se  $f \in L^2_{\psi_B}$  e  $\alpha_k, \beta_k$  são os coeficientes da expansão ortogonal híbrida de  $f$  em  $\Omega_m$ , como no Teorema 4.18, então*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0. \quad (4.44)$$

Vamos reescrever a aproximação pelo MMQ modificado  $G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)$  com o intuito de iniciar a análise sobre a convergência. Sejam  $f \in L^2_{\psi_B}$ , a sequência  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  de funções ortogonais híbridas normalizada e  $G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)$  a função obtida via MMQ

modificado. Então, usando a definição dos coeficientes podemos reescrever

$$\begin{aligned}
G(f; \alpha_{2n}; \beta_{2n}; y) &= \sum_{k=0}^n \alpha_{2k}^{(2n)} \mathcal{W}_{2k}(y) + \sqrt{1-y^2} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{2k+1}^{(2n)} \mathcal{W}_{2k+1}(y) \\
&= \int_{-1}^1 f(x) \left[ \sum_{k=0}^n \mathcal{W}_{2k}(x) \mathcal{W}_{2k}(y) \right] \sqrt{1-x^2} d\psi(x) \\
&\quad + \int_{-1}^1 f(x) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{W}_{2k+1}(x) \mathcal{W}_{2k+1}(y) \right] \sqrt{1-y^2} d\psi(x) \\
&\quad - \int_{-1}^1 f(x) \left[ \sum_{k=1}^n \sigma_{2k} \mathcal{W}_{2k-1}(x) \mathcal{W}_{2k}(y) \right] d\psi(x) \\
&\quad - \int_{-1}^1 f(x) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_{2k+1} \mathcal{W}_{2k+1}(x) \mathcal{W}_{2k}(y) \right] d\psi(x),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
G(f; \alpha_{2n+1}; \beta_{2n+1}; y) &= \sum_{k=0}^n \alpha_{2k+1}^{(2n+1)} \mathcal{W}_{2k+1}(y) + \sqrt{1-y^2} \sum_{k=0}^n \beta_{2k}^{(2n+1)} \mathcal{W}_{2k}(y) \\
&= \int_{-1}^1 f(x) \left[ \sum_{k=0}^n \mathcal{W}_{2k+1}(x) \mathcal{W}_{2k+1}(y) \right] \sqrt{1-x^2} d\psi(x) \\
&\quad + \int_{-1}^1 f(x) \left[ \sum_{k=0}^n \mathcal{W}_{2k}(x) \mathcal{W}_{2k}(y) \right] \sqrt{1-y^2} d\psi(x) \\
&\quad - \int_{-1}^1 f(x) \left[ \sum_{k=0}^n \sigma_{2k+1} \mathcal{W}_{2k}(x) \mathcal{W}_{2k+1}(y) \right] d\psi(x) \\
&\quad - \int_{-1}^1 f(x) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_{2k+2} \mathcal{W}_{2k+2}(x) \mathcal{W}_{2k+1}(y) \right] d\psi(x).
\end{aligned}$$

Se a medida  $\psi$  é simétrica em  $[-1, 1]$  segue que  $c_m = 0$  para todo  $m \geq 1$  e então, pelo Lema 4.5, temos que  $\sigma_m = 0$ , para todo  $m \geq 1$  e a expressão para  $G(f; \alpha_m; \beta_m; \cdot)$  se reduz a

$$\begin{aligned}
G(f; \alpha_{2n}; \beta_{2n}; y) &= \int_{-1}^1 f(x) \left[ \sum_{k=0}^n \mathcal{W}_{2k}(x) \mathcal{W}_{2k}(y) \right] \sqrt{1-x^2} d\psi(x) \\
&\quad + \int_{-1}^1 f(x) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{W}_{2k+1}(x) \mathcal{W}_{2k+1}(y) \right] \sqrt{1-y^2} d\psi(x), \quad (4.45)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G(f; \alpha_{2n+1}; \beta_{2n+1}; y) &= \int_{-1}^1 f(x) \left[ \sum_{k=0}^n \mathcal{W}_{2k+1}(x) \mathcal{W}_{2k+1}(y) \right] \sqrt{1-x^2} d\psi(x) \\ &+ \int_{-1}^1 f(x) \left[ \sum_{k=0}^n \mathcal{W}_{2k}(x) \mathcal{W}_{2k}(y) \right] \sqrt{1-y^2} d\psi(x). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Além disso, para o caso de medida  $\psi$  simétrica conseguimos simplificar ainda mais a expressão para  $G(f; \alpha_m; \beta_m; \cdot)$ .

**Lema 4.20.** *Seja  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  a sequência normalizada associada a medida  $\psi$  simétrica. Então,*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \mathcal{W}_{2k}(x) \mathcal{W}_{2k}(y) &= \frac{1}{\gamma_{2n+2} \gamma_{2n+1}} \left[ \frac{\mathcal{W}_{2n+2}(x) \mathcal{W}_{2n}(y) - \mathcal{W}_{2n+2}(y) \mathcal{W}_{2n}(x)}{x^2 - y^2} \right], \\ \sum_{k=0}^n \mathcal{W}_{2k+1}(x) \mathcal{W}_{2k+1}(y) &= \frac{1}{\gamma_{2n+3} \gamma_{2n+2}} \left[ \frac{\mathcal{W}_{2n+3}(x) \mathcal{W}_{2n+1}(y) - \mathcal{W}_{2n+3}(y) \mathcal{W}_{2n+1}(x)}{x^2 - y^2} \right]. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Como  $\psi$  é simétrica, então  $c_m \equiv 0$  e  $d_m = \gamma_m / \gamma_{m-1}$ . Definindo

$$T_{(2n+2)}[x, y] := \mathcal{W}_{2n+2}(x) \mathcal{W}_{2n}(y) - \mathcal{W}_{2n+2}(y) \mathcal{W}_{2n}(x), \quad (4.47)$$

temos

$$\begin{aligned} T_{(2n+2)}[x, y] &= \\ &= \gamma_{2n+2} [x \mathcal{W}_{2n+1}(x) \mathcal{W}_{2n}(y) - y \mathcal{W}_{2n+1}(y) \mathcal{W}_{2n}(x)] \\ &= \gamma_{2n+2} \gamma_{2n+1} \mathcal{W}_{2n}(y) \mathcal{W}_{2n}(x) [x^2 - y^2] - \gamma_{2n+2} d_{2n+1} [x \mathcal{W}_{2n}(y) \mathcal{W}_{2n-1}(x) - y \mathcal{W}_{2n}(x) \mathcal{W}_{2n-1}(y)] \\ &= \gamma_{2n+2} \gamma_{2n+1} \mathcal{W}_{2n}(y) \mathcal{W}_{2n}(x) [x^2 - y^2] + \frac{\gamma_{2n+2} d_{2n+1} d_{2n}}{\gamma_{2n}} T_{(2n)}[x, y] \\ &= \gamma_{2n+2} \gamma_{2n+1} \mathcal{W}_{2n}(y) \mathcal{W}_{2n}(x) [x^2 - y^2] + \gamma_{2n+2} \gamma_{2n+1} \frac{1}{\gamma_{2n} \gamma_{2n-1}} T_{(2n)}[x, y] \end{aligned}$$

e recursivamente o resultado segue. A outra soma segue de forma análoga.  $\square$

Na próxima seção usaremos o resultado do Lema 4.20 para simplificar  $G(f; \alpha_m; \beta_m; \cdot)$  e estabelecer resultados sobre a convergência pontual do MMQ modificado. Até o momento para o caso  $\psi$  não simétrica ainda não conhecemos uma simplificação como esta.

## 4.2.2 Convergências com o MMQ Modificado

Nesta seção, fazemos um estudo sobre a convergência da aproximação pelo método dos mínimos quadrados modificado. Resultados envolvendo a convergência na norma

$\|\cdot\|_A$  foram obtidos. Com respeito a convergência pontual foram estabelecidos resultados para o caso em que a medida  $\psi$  é simétrica.

**Teorema 4.21.** *Seja  $f \in L^2_{\psi_B}$  e  $G(f; \tilde{\mathbf{a}}_m; \tilde{\mathbf{b}}_m; \cdot)$  a aproximação para  $f$  obtida em  $\Omega_m$  através do método dos mínimos quadrados com respeito a norma  $\|\cdot\|_B$ , ou seja,*

$$\|f - G(f; \tilde{\mathbf{a}}_m; \tilde{\mathbf{b}}_m; \cdot)\|_B = \min_{\mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m} \|f - G(\mathbf{a}_m; \mathbf{b}_m; \cdot)\|_B.$$

Se

$$\|f - G(f; \tilde{\mathbf{a}}_m; \tilde{\mathbf{b}}_m; \cdot)\|_B \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

então

$$\|f - G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)\|_A \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

sendo  $G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)$  a aproximação via MMQ modificado.

*Demonstração.* Usando o Teorema 4.14 temos

$$\begin{aligned} \|f - G(f; \tilde{\mathbf{a}}_m; \tilde{\mathbf{b}}_m; \cdot)\|_B &= \min_{\mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m} \|f - G(f; \mathbf{a}_m; \mathbf{b}_m; \cdot)\|_B \\ &= \min_{\mathbf{a}_m} \|f - G(f; \mathbf{a}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)\|_B. \end{aligned}$$

Isso implica que  $G(f; \tilde{\mathbf{a}}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)$  é a aproximação pelo MMQ com respeito a norma  $\|\cdot\|_B$ . Portanto, do Teorema 4.15 e da desigualdade (4.39), dada qualquer  $f \in L^2_{\psi_B}$  temos que

$$\|f - G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)\|_A \leq \|f - G(f; \tilde{\mathbf{a}}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)\|_A \leq \|f - G(f; \tilde{\mathbf{a}}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)\|_B$$

e isso conclui o resultado.  $\square$

Vale observar que enquanto  $G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)$  tem um forma explícita para se calcular todos os coeficientes, encontrar  $G(f; \tilde{\mathbf{a}}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)$  requer calcular:

- $\int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2k}(x) \mathcal{W}_{2j}(x) \frac{d\psi(x)}{\sqrt{1-x^2}}$  e  $\int_{-1}^1 f(x) \mathcal{W}_{2k}(x) \frac{d\psi(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ , no caso que  $m = 2n$ ;
- $\int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2k+1}(x) \mathcal{W}_{2j+1}(x) \frac{d\psi(x)}{\sqrt{1-x^2}}$  e  $\int_{-1}^1 f(x) \mathcal{W}_{2k+1}(x) \frac{d\psi(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ , no caso que  $m = 2n + 1$ ;
- E resolver um sistema linear de ordem  $(n + 1) \times (n + 1)$  para determinar os coeficientes de  $\tilde{\mathbf{a}}_m$  com  $m = 2n$  ou  $m = 2n + 1$ .

**Corolário 4.22.** *Seja  $f$  uma função real definida em  $[-1, 1]$  e  $\kappa = 0, 1$ . Se existe uma sequência de funções  $\{f_l\}_{l \geq 0} \in \Omega_{2n+\kappa}$  que converge uniformemente para  $f$ , então  $G(f; \boldsymbol{\alpha}_{2n+\kappa}, \boldsymbol{\beta}_{2n+\kappa}; \cdot)$  converge para  $f$  na norma  $\|\cdot\|_A$ .*

*Demonstração.* Vamos fazer a prova para  $\kappa = 0$ ; para  $\kappa = 1$  é análoga. Fixemos  $\nu_0 = (\int_{-1}^1 d\psi_B(x))^{1/2}$ . Dado  $\epsilon > 0$  existe  $f_l \in \Omega_{2n}$  tal que para  $l$  suficientemente grande

$$|f(x) - f_l(x)| < \frac{\epsilon}{2\nu_0} \text{ para todo } x \in [-1, 1].$$

Seja  $G(f; \tilde{\mathbf{a}}_{2n}, \boldsymbol{\beta}_{2n}; \cdot)$  a aproximação pelo MMQ para  $f$  em  $\Omega_{2n}$ . Então,

$$\|f - G(f; \tilde{\mathbf{a}}_{2n}, \boldsymbol{\beta}_{2n}; \cdot)\|_B \leq \|f - f_l\|_B \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto,

$$\|f - G(f; \tilde{\mathbf{a}}_{2n}, \boldsymbol{\beta}_{2n}; \cdot)\|_B \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

e pelo Teorema 4.21 concluímos

$$\|f - G(f; \boldsymbol{\alpha}_{2n}, \boldsymbol{\beta}_{2n}; \cdot)\|_A \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

□

**Corolário 4.23.** *Seja  $f$  definida em  $[-1, 1]$  tal que as funções*

$$f(x) + (-1)^\kappa f(-x), \quad \frac{f(x) - (-1)^\kappa f(-x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

são contínuas em  $[-1, 1]$ ,  $\kappa = 0, 1$ . Então,  $G(f; \boldsymbol{\alpha}_{2n+\kappa}, \boldsymbol{\beta}_{2n+\kappa}; \cdot)$  converge para a função  $f$  na norma  $\|\cdot\|_A$ .

*Demonstração.* Faremos o caso em que  $\kappa = 0$ . O caso com  $\kappa = 1$  é análogo. Como  $[f(x) + f(-x)]/2$  é par e  $[f(x) - f(-x)]/2\sqrt{1-x^2}$  é ímpar, usando o Teorema de aproximação de Weierstrass ([23]), dado qualquer  $\epsilon > 0$ , existe uma sequência de polinômios pares  $p_n$  e ímpares  $q_n$ , e  $N \in \mathbb{N}$  tais que se  $n > N$ , então

$$\left| \frac{f(x) + f(-x)}{2} - p_n(x) \right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{e} \quad \left| \frac{f(x) - f(-x)}{2\sqrt{1-x^2}} - q_n(x) \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja  $\mathcal{F}(x) = p_{2N}(x) + \sqrt{1-x^2} q_{2N-1}(x) \in \Omega_{2N}$ . Disso segue que  $\mathcal{F}$  converge uniformemente para  $f$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} |f(x) - \mathcal{F}(x)| &= \left| \frac{f(x) + f(-x)}{2} - p_{2N}(x) + \sqrt{1-x^2} \left[ \frac{f(x) - f(-x)}{2\sqrt{1-x^2}} - q_{2N-1}(x) \right] \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x) + f(-x)}{2} - p_{2N}(x) \right| + \left| \frac{f(x) - f(-x)}{2\sqrt{1-x^2}} - q_{2N-1}(x) \right| < \epsilon. \end{aligned}$$

□

**Observação 4.24.** *A hipótese do Corolário 4.23 é equivalente a  $f$  ser uma função contínua tal que  $\lim_{x \rightarrow \pm 1} [f(x) - f(-x)]$  converge para zero pelo menos tão rápido quanto  $\sqrt{x^2 - 1}$  para  $\kappa = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \pm 1} [f(x) + f(-x)]$  converge para zero pelo menos tão rápido quanto  $\sqrt{x^2 - 1}$  para  $\kappa = 1$ .*

**Teorema 4.25.** *Se  $f \in L^2_{\psi_B}$  então  $G(\sqrt{1-x^2}f; \boldsymbol{\alpha}_{2n+\kappa}; \boldsymbol{\beta}_{2n+\kappa}; x)$  converge para*

$\sqrt{1-x^2}f$  na norma  $\|\cdot\|_A$  para  $\kappa = 0, 1$ . Em particular, se  $f/\sqrt{1-x^2} \in L^2_{\psi_B}$  então  $G(f; \boldsymbol{\alpha}_{2n+\kappa}; \boldsymbol{\beta}_{2n+\kappa}; \cdot)$  converge para  $f$  na norma  $\|\cdot\|_A$ .

*Demonstração.* Seja  $\nu_0 = (\int_{-1}^1 d\psi_B(x))^{1/2}$ . Usando que o espaço das funções contínuas,  $C[-1, 1]$ , é denso em  $L^2_{\psi_B}$  (detalhes em [12, p. 351]), dado  $\epsilon > 0$ , existe  $h \in C[-1, 1]$  tal que  $\|f - h\|_B < \sqrt{\epsilon}/2$ . Isso garante que

$$\|f - h\|_A = \|\sqrt{1-x^2}f - \sqrt{1-x^2}h\|_B \leq \|f - h\|_B < \sqrt{\epsilon}/2.$$

Como  $h$  é contínua, da prova do Corolário 4.23 segue que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\sqrt{1-x^2}h(x)$  pode ser aproximada uniformemente por funções em  $\Omega_{2N}$ , ou seja, existe  $\mathcal{F} \in \Omega_{2N}$  tal que

$$|\sqrt{1-x^2}h(x) - \mathcal{F}(x)| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\nu_0}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 [\sqrt{1-x^2}f(x) - \mathcal{F}(x)]^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\psi(x) \\ &= \int_{-1}^1 [\sqrt{1-x^2}f(x) - \sqrt{1-x^2}h(x) + \sqrt{1-x^2}h(x) - \mathcal{F}(x)]^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\psi(x) \\ &= \|h - f\|_A^2 + \|\mathcal{F} - h\sqrt{1-x^2}\|_B^2 \\ &\quad - 2 \int_{-1}^1 [\sqrt{1-x^2}f(x) - \sqrt{1-x^2}h(x)][\mathcal{F}(x) - \sqrt{1-x^2}h(x)] \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\psi(x). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{1-x^2}f - \mathcal{F}\|_B^2 \leq \|h - f\|_A^2 + \|\mathcal{F} - h\sqrt{1-x^2}\|_B^2 \\ & + \left| 2 \int_{-1}^1 [\sqrt{1-x^2}f(x) - \sqrt{1-x^2}h(x)][\mathcal{F}(x) - \sqrt{1-x^2}h(x)] \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\psi(x) \right|, \end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{1-x^2}f - \mathcal{F}\|_B^2 \leq \|h - f\|_A^2 + \|\mathcal{F} - h\sqrt{1-x^2}\|_B^2 \\ & + 2\|f - h\|_A \|\mathcal{F} - \sqrt{1-x^2}h\|_B \\ & < \epsilon/4 + \epsilon/4 + 2\sqrt{\epsilon}/2 \cdot \sqrt{\epsilon}/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, em  $\Omega_{2N}$

$$\|\sqrt{1-x^2}f - G(f; \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{2N}; \boldsymbol{\beta}_{2N}; \cdot)\|_B^2 \leq \|\sqrt{1-x^2}f - \mathcal{F}\|_B^2 < \epsilon$$

e do Teorema 4.21 o resultado segue.  $\square$

Os próximos resultados garantem condições suficientes para aproximar pontualmente funções  $f$  com  $G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot) \in \Omega_m$  por funções  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  que satisfazem a



ortogonalidade híbrida com medida  $\psi$  simétrica em  $[-1, 1]$ . Já comentamos que neste caso a sequência  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  é composta por polinômios simétricos em  $[-1, 1]$  com relação a medida  $\psi_A$ .

Nosso objetivo é estabelecer condições para a função  $f$  de modo a termos convergência pontual, ou seja,

$$|f(x) - G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; x)| \rightarrow 0 \quad \text{para } m \rightarrow \infty. \quad (4.48)$$

Sejam  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m$  os coeficientes de  $G(f; \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)$  dado em termos da sequência  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  normalizada com  $\psi$  simétrica. Usando a definição dos coeficientes juntamente com o Lema 4.5 para  $m = 2n$  temos

$$\beta_j^{(2n)} = \beta_j^{(2n)}(f) = \int_{-1}^1 f(x) \mathcal{W}_{2j+1}(x) d\psi(x), \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4.49)$$

$$\alpha_j^{(2n)} = \alpha_j^{(2n)}(f) = \int_{-1}^1 f(x) \mathcal{W}_{2j}(x) \sqrt{1-x^2} d\psi(x) \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, n. \quad (4.50)$$

A seguir apresentamos resultados para a convergência pontual usando  $G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; \cdot)$ , com  $m$  par. Os resultados com  $m$  ímpar são análogos.

**Lema 4.26.** *Seja  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  a sequência normalizada associada a medida  $\psi$  simétrica. Então,*

$$\left| \frac{1}{\gamma_n} \right| \leq 1 \quad \text{para todo } n \geq 0. \quad (4.51)$$

*Demonstração.* Usando a recorrência de três termos para  $\mathcal{W}_n$  e a ortogonalidade híbrida temos

$$1 = \rho_n = \int_{-1}^1 \mathcal{W}_n^2(x) \sqrt{1-x^2} d\psi(x) = \gamma_n \int_{-1}^1 x \mathcal{W}_n(x) \mathcal{W}_{n-1}(x) \sqrt{1-x^2} d\psi(x).$$

Desta forma, usando a desigualdade de Hölder com respeito a medida  $\psi_A$  temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\gamma_n} \right| &= \left| \int_{-1}^1 x \mathcal{W}_n(x) \mathcal{W}_{n-1}(x) \sqrt{1-x^2} d\psi(x) \right| \\ &\leq \|x \mathcal{W}_n\|_A \|\mathcal{W}_{n-1}\|_A \leq \sqrt{\rho_n} \sqrt{\rho_{n-1}} = 1. \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.27.** *Seja  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  a sequência normalizada associada a medida  $\psi$  simétrica. Se a sequência  $\{\mathcal{W}_n(y)\}_{n \geq 0}$  é uniformemente limitada em  $y \in [-1, 1]$  e  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que*

$$L_y(x) = \frac{f(x) - f(y)}{x^2 - y^2} \in L_{\psi_B}^2, \quad (4.52)$$

então  $|G(f; \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_m; y) - f(y)| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , ou seja,  $G(f; \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m; y)$  converge pontualmente para  $f(y)$ .

*Demonstração.* Vamos considerar  $m = 2n$  o outro é análogo. Vimos em (4.45) que

$$G(f; \alpha_{2n}; \beta_{2n}; y) = \int_{-1}^1 f(x) \left[ \sum_{k=0}^n \mathcal{W}_{2k}(x) \mathcal{W}_{2k}(y) \right] \sqrt{1-x^2} d\psi(x) \\ + \sqrt{1-y^2} \int_{-1}^1 f(x) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{W}_{2k+1}(x) \mathcal{W}_{2k+1}(y) \right] d\psi(x).$$

Vamos definir os núcleos simétricos

$$K_1(x, y) = \sum_{k=0}^n \mathcal{W}_{2k}(x) \mathcal{W}_{2k}(y) \quad \text{e} \quad K_2(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{W}_{2k+1}(x) \mathcal{W}_{2k+1}(y).$$

Pela ortogonalidade (4.6), independentemente de a medida  $\psi$  ser ou não simétrica, temos

$$\int_{-1}^1 K_1(x, y) \sqrt{1-x^2} d\psi(x) = 1 \quad \text{e} \quad \int_{-1}^1 K_2(x, y) d\psi(x) = 0.$$

Segue do Lema 4.20 que

$$K_1(x, y) = \frac{1}{\gamma_{2n+2} \gamma_{2n+1}} \left[ \frac{\mathcal{W}_{2n+2}(x) \mathcal{W}_{2n}(y) - \mathcal{W}_{2n+2}(y) \mathcal{W}_{2n}(x)}{x^2 - y^2} \right]$$

e

$$K_2(x, y) = \frac{1}{\gamma_{2n+1} \gamma_{2n}} \left[ \frac{\mathcal{W}_{2n+1}(x) \mathcal{W}_{2n-1}(y) - \mathcal{W}_{2n+1}(y) \mathcal{W}_{2n-1}(x)}{x^2 - y^2} \right].$$

Desta forma, podemos reescrever  $G(f; \alpha_{2n}; \beta_{2n}; y) - f(y)$  como

$$\int_{-1}^1 [f(x) - f(y)] K_1(x, y) \sqrt{1-x^2} d\psi(x) + \sqrt{1-y^2} \int_{-1}^1 [f(x) - f(y)] K_2(x, y) d\psi(x) \\ = \frac{1}{\gamma_{2n+2} \gamma_{2n+1}} \mathcal{W}_{2n}(y) \left[ \int_{-1}^1 L_y(x) \mathcal{W}_{2n+2}(x) \sqrt{1-x^2} d\psi(x) \right] \\ - \frac{1}{\gamma_{2n+2} \gamma_{2n+1}} \mathcal{W}_{2n+2}(y) \left[ \int_{-1}^1 L_y(x) \mathcal{W}_{2n}(x) \sqrt{1-x^2} d\psi(x) \right] \\ + \sqrt{1-y^2} \frac{1}{\gamma_{2n+1} \gamma_{2n}} \mathcal{W}_{2n-1}(y) \left[ \int_{-1}^1 L_y(x) \mathcal{W}_{2n+1}(x) d\psi(x) \right] \\ - \sqrt{1-y^2} \frac{1}{\gamma_{2n+1} \gamma_{2n}} \mathcal{W}_{2n+1}(y) \left[ \int_{-1}^1 L_y(x) \mathcal{W}_{2n-1}(x) d\psi(x) \right].$$

Então identificando as integrais com os coeficientes dados em (4.49) e usando a desi-

gualdade triangular segue que  $|G_{2n}(f; \alpha_{2n}; \beta_{2n}; y) - f(y)|$  é limitado por

$$\left| \frac{1}{\gamma_{2n+2}\gamma_{2n+1}} \right| |\mathcal{W}_{2n}(y)| |\beta_{n+1}^{(2n)}(L_y)| + \left| \frac{1}{\gamma_{2n+2}\gamma_{2n+1}} \right| |\mathcal{W}_{2n+2}(y)| |\beta_n^{(2n)}(L_y)| + \left| \frac{1}{\gamma_{2n+1}\gamma_{2n}} \right| |\mathcal{W}_{2n-1}(y)| |\alpha_n^{(2n)}(L_y)| + \left| \frac{1}{\gamma_{2n+1}\gamma_{2n}} \right| |\mathcal{W}_{2n+1}(y)| |\alpha_{n-1}^{(2n)}(L_y)|.$$

Para concluir usamos que  $|1/\gamma_n|$  e  $\mathcal{W}_n(y)$  são uniformemente limitadas, e o Corolário 4.19 para garantir que  $\alpha_n(L_y) \rightarrow 0$  e  $\beta_n(L_y) \rightarrow 0$  se  $n \rightarrow \infty$  pois  $L_y \in L_{\psi_B}^2$ .  $\square$

Como vimos no Teorema 4.27, a convergência pontual só foi estabelecida para medidas simétricas. Entretanto, experimentos numéricos têm mostrado interessantes comportamentos com relação à aproximação pontual mesmo com medidas não simétricas. É importante observar que as aproximações pelo método dos mínimos quadrados modificado satisfazem

$$G(f; \alpha_{2n}, \beta_{2n}, -1) = G(f; \alpha_{2n}, \beta_{2n}, 1), \quad n \geq 0, \quad (4.53)$$

e

$$G(f; \alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}, -1) = -G(f; \alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}, 1), \quad n \geq 0. \quad (4.54)$$

Desta forma, dada uma função  $f$  genérica, é natural que as aproximações não sejam boas em  $x = \pm 1$ . Entretanto, isto não oferece restrição ao método. De fato, considere as funções definidas por

$$g^{(0)}(f; x) = f(x) - \frac{1}{2}[f(1) - f(-1)]x$$

e

$$g^{(1)}(f; x) = f(x) - \frac{1}{2}[f(1) + f(-1)].$$

Note que  $g^{(0)}(f; 1) = g^{(0)}(f; -1)$  e  $g^{(1)}(f; -1) = -g^{(1)}(f; 1)$ . Então, podemos considerar as aproximações, pelo método dos mínimos quadrados modificado, para as funções  $g^{(0)}(f; \cdot)$  e  $g^{(1)}(f; \cdot)$  como sendo as funções  $G(g^{(0)}; \alpha_{2n}, \beta_{2n}, \cdot)$  e  $G(g^{(1)}; \alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}, \cdot)$ . E, por esta razão, temos as aproximações para a função  $f$

$$N_{2n}(f; x) = G(g^{(0)}; \alpha_{2n}, \beta_{2n}, x) + \frac{1}{2}[f(1) - f(-1)]x$$

ou

$$N_{2n+1}(f; x) = G(g^{(1)}; \alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}, x) + \frac{1}{2}[f(1) + f(-1)].$$

Nas figuras abaixo, ilustramos testes numéricos fixando a medida  $\psi$  não simétrica

dada por  $d\psi(x) = (1-x)dx$  e a função

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/2), & \text{se } x \in [-1, 0], \\ \exp(-x) & \text{se } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Consideramos, no experimento, as aproximações  $G(f; \alpha_{2n}, \beta_{2n}, \cdot)$  e  $N_{2n}(f, \cdot)$  para  $n = 5$  e  $n = 12$ . Vale observar que  $f$  não respeita a simetria nos extremos do intervalo, representadas por (4.53) ou (4.54), e é descontínua na origem. Entretanto, mesmo a função  $f$  não possuindo essa simetria nos extremos do intervalo, as aproximações  $G(f; \alpha_{2n}, \beta_{2n}, \cdot)$  têm bom desempenho e parecem convergir em  $(-1, 1)$ . Usando as aproximações  $N_{2n}(f; \cdot)$ , observamos uma melhora da aproximação nos extremos  $x = \pm 1$ . No ponto de descontinuidade da função, as simulações sugerem uma convergência para a média dos pontos de descontinuidade, conforme acontece para série de Fourier [2].

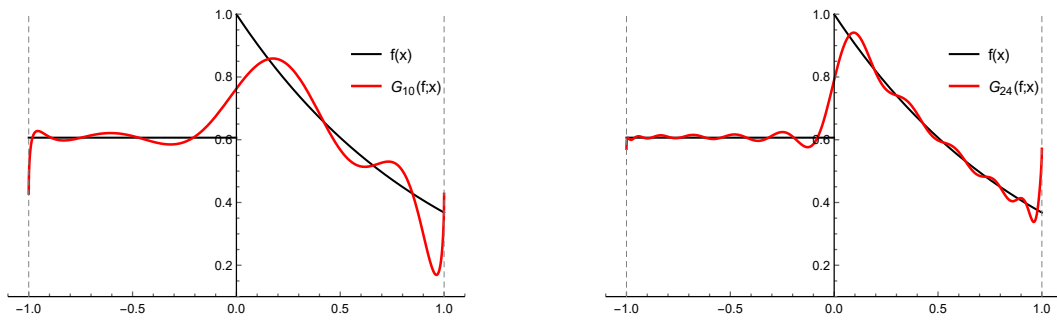


Figura 4.1: Aproximações  $G(f; \alpha_{2n}, \beta_{2n}, \cdot)$  para  $f$  com  $n = 5$  e  $n = 12$ .

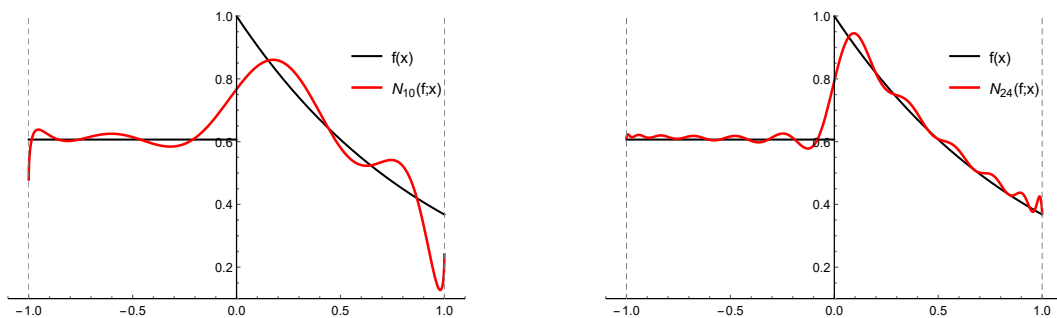


Figura 4.2: Aproximações  $N_{2n}(f; \cdot)$  para  $f$  com  $n = 5$  e  $n = 12$ .

### 4.2.3 Aplicações: Estimativas no Espaço $\Omega_n$

É sabido [21, p. 33] que os polinômios ortonormais de Chebyshev de primeiro tipo são uniformemente limitados em  $[-1, 1]$ , isto é,

$$|T_n(x)| \leq \sqrt{2/\pi} \text{ para todo } n \geq 0, \quad x \in [-1, 1]. \quad (4.55)$$

Por outro lado os polinômios de Chebyshev de segundo tipo e os de Legendre são uniformemente limitados em qualquer subintervalo próprio do suporte da medida, que é  $(-1, 1)$  [21, p. 40]. A seguir vemos alguns exemplos de sequência de funções em  $\Omega_n$  que são uniformemente limitadas e resultados teóricos sobre limitantes uniformes para as funções  $\mathcal{W}_n$  de ortogonalidade híbrida .

**Exemplo 4.28.** *Seja  $\eta < 0$  e  $d\psi_\eta(x) = e^{-2\eta \arccos(x)} dx$ . Então a sequência de funções reescaladas  $\widehat{\mathcal{W}}_n$  associadas a medida positiva  $\psi_\eta$  é uniformemente limitada em todo subconjunto próprio de  $[-1, 1]$ .*

Com efeito, seja  $f(x) = (1 - x^2)\widehat{\mathcal{W}}_{2n-2}(x) \in \Omega_{2n}$ . Consideramos o conjunto

$$\{T_{2n}(x), \sqrt{1-x^2}T_{2n-1}(x), \dots, \sqrt{1-x^2}T_1(x), T_0(x)\},$$

onde  $T_i$  são os polinômios de Chebyshev ortonormais, que é uma base para  $\Omega_{2n}$ . Então,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(2n)} T_{2k}(x) + \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k^{(2n)} T_{2k+1}(x).$$

Usando a ortogonalidade da sequência de polinômios  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  segue que  $\alpha_k^{(2n)}$  e  $\beta_k^{(2n)}$  são os dados por

$$\beta_j^{(2n)} = \int_{-1}^1 f(x) T_{2j+1}(x) \frac{1}{(1-x^2)} dx, \text{ para } j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4.56)$$

$$\alpha_j^{(2n)} = \int_{-1}^1 f(x) T_{2j}(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \text{ para } j = 0, 1, \dots, n. \quad (4.57)$$

Vale observar que a sequência  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  pode ser interpretada como uma sequência de funções de ortogonalidade híbrida associada a medida  $\psi$  dada por  $d\psi(x) = 1/(1-x^2)dx$ , embora a medida não satisfaça a condição (4.20), pois a integral  $\int_{-1}^1 1/(1-x^2)dx$  diverge.

Então, usando a desigualdade triangular, a desigualdade

$$\sum_{k=0}^n |c_k| \leq \sqrt{n+1} \left( \sum_{k=0}^n c_k^2 \right)^{1/2}, \quad (4.58)$$

o fato de  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  ser uniformemente limitada, e parte da demonstração do Teorema

4.18 temos

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \sum_{k=0}^n |\alpha_k^{(2n)}| + \sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k^{(2n)}| \right) \\
&\leq \sqrt{\frac{2(2n+1)}{\pi}} \left( \sum_{k=0}^n (\alpha_k^{(2n)})^2 + \sum_{k=0}^{n-1} (\beta_k^{(2n)})^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{\frac{2(2n+1)}{\pi}} \left( \int_{-1}^1 [f(x)]^2 \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} dx \right)^{1/2}. \tag{4.59}
\end{aligned}$$

Temos que  $0 \leq \arccos(x) \leq \pi$  e  $-\eta > 0$  então  $1 \leq \exp(-2\eta \arccos(x))$  e,

$$\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} dx = \sqrt{1-x^2} [(1-x^2)^{-2} dx] \leq \sqrt{1-x^2} (1-x^2)^{-2} d\psi_\eta(x). \tag{4.60}$$

Usando que  $f(x) = (1-x^2)\widehat{\mathcal{W}}_{2n-2}(x)$  é fácil ver que

$$|(1-x^2)\widehat{\mathcal{W}}_{2n-2}(x)| \leq \sqrt{\frac{2(2n+1)}{\pi}} \widehat{\rho}_{2n-2} \tag{4.61}$$

com  $\widehat{\rho}_{2n-2} = \int_{-1}^1 [\mathcal{W}_{2n-2}(x)]^2 \sqrt{1-x^2} d\psi_\eta(x)$ . Vimos no Exemplo 4.4 que

$$\widehat{\rho}_m = \frac{\pi(m+1)^2 |(1+i\eta)_m|^2}{2^{2m+1} e^{\pi\eta} |\Gamma(i\eta+m+2)|^2}.$$

Além disso, note que  $\sqrt{(m+3)\widehat{\rho}_m} \rightarrow 0$ . De fato, considerando a série  $\sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{(m+3)\widehat{\rho}_m}$  temos que

$$\frac{\widehat{\rho}_m}{\widehat{\rho}_{m-1}} \leq \frac{(m+1)^2}{4m^2}$$

e usando o teste da razão segue que a série converge e logo o termo geral vai para zero.

Portanto, o lado direito da desigualdade (4.61) é limitado para todo  $n$ . E isso conclui o resultado para a sequência  $\{\widehat{\mathcal{W}}_m\}_{m \geq 0}$  com índice  $m$  par. Para índice  $m$  ímpar a demonstração é análoga.

**Teorema 4.29.** *Sejam  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  a sequência de funções de ortogonalidade híbrida associada a medida  $\psi$  e  $A$  um subconjunto de  $[-1, 1]$  tal que*

$$|\mathcal{W}_n(x)| \leq \varphi(x) \text{ para todo } x \in A, n = 0, 1, 2, \dots$$

Se  $m \geq 2$  e  $\mathcal{F} \in \Omega_{m-2}$  é não negativa em  $\text{supp}(\psi) \subset [-1, 1]$ , considere a medida  $\psi^*$  dada por

$$\psi^*(x) = \int_{-1}^x \Pi(t) d\psi(t), \quad \Pi(x) = (1-x^2)\mathcal{F}(x) \tag{4.62}$$

e seja  $\{\mathcal{W}_n^*\}_{n \geq 0}$  a sequência de funções de ortogonalidade híbrida associada a medida

$\psi^*$ . Fixando  $L = \max_{x \in \text{supp}(\psi)} \mathcal{F}(x)$  temos

$$|\Pi(x)\mathcal{W}_n^*(x)| \leq \sqrt{(m+1)L} \varphi(x), \text{ para todo } x \in A, n = 0, 1, 2, \dots$$

*Demonstração.* Sem perda de generalidade vamos supor que  $\mathcal{W}_n$  e  $\mathcal{W}_n^*$  são normalizadas e que  $m = 2l$ . Note que  $\Pi \in \Omega_m$  e então  $\Pi(x)\mathcal{W}_n^*(x) \in \Omega_{m+n}$ . Pelo Teorema 4.2 temos

$$\Pi(x)\mathcal{W}_{2n}^*(x) = \sum_{k=0}^{l+n} a_k \mathcal{W}_{2k}(x) + \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^{l+n-1} b_k \mathcal{W}_{2k+1}(x) \quad (4.63)$$

e

$$\Pi(x)\mathcal{W}_{2n+1}^*(x) = \sum_{k=0}^{l+n} \tilde{a}_k \mathcal{W}_{2k+1}(x) + \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^{l+n} \tilde{b}_k \mathcal{W}_{2k}(x). \quad (4.64)$$

Usando a ortogonalidade híbrida da sequência de funções  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  e definindo  $\tilde{b}_{-1} = b_{-1} = b_{l+n} = 0$  temos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \Pi(x)\mathcal{W}_{2n}^*(x)\mathcal{W}_{2k+1}(x)d\psi(x) &= b_k, \quad 0 \leq k \leq n+l-1, \\ \int_{-1}^1 \Pi(x)\mathcal{W}_{2n}^*(x)\mathcal{W}_{2k}(x)\sqrt{1-x^2}d\psi(x) &= a_k + b_k\sigma_{2k+1} + b_{k-1}\sigma_{2k}, \quad 0 \leq k \leq n+l, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \Pi(x)\mathcal{W}_{2n+1}^*(x)\mathcal{W}_{2k}(x)d\psi(x) &= \tilde{b}_k, \quad 0 \leq k \leq n+l, \\ \int_{-1}^1 \Pi(x)\mathcal{W}_{2n+1}^*(x)\mathcal{W}_{2k+1}(x)\sqrt{1-x^2}d\psi(x) &= \tilde{a}_k + \tilde{b}_k\sigma_{2k+1} + \tilde{b}_{k-1}\sigma_{2k}, \quad 0 \leq k \leq n+l. \end{aligned}$$

Assim, usando que  $d\psi^*(x) = \Pi(x)d\psi(x)$  e o Lema 4.6 temos

$$\begin{aligned} b_k &= \int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2n}^*(x)\mathcal{W}_{2k+1}(x)d\psi^*(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\ a_k &= \int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2n}^*(x)\mathcal{W}_{2k}(x)\sqrt{1-x^2}d\psi^*(x) - b_k\sigma_{2k+1} - b_{k-1}\sigma_{2k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Logo, podemos reescrever (4.63) como

$$\Pi(x)\mathcal{W}_{2n}^*(x) = \sum_{k=n}^{l+n} a_k \mathcal{W}_{2k}(x) + \sqrt{1-x^2} \sum_{k=n}^{l+n-1} b_k \mathcal{W}_{2k+1}(x). \quad (4.65)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}\tilde{b}_k &= \int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2n+1}^*(x) \mathcal{W}_{2k}(x) d\psi^*(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n, \\ \tilde{a}_k &= \int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2n+1}^*(x) \mathcal{W}_{2k+1}(x) \sqrt{1-x^2} d\psi^*(x) - b_k \sigma_{2k+1} - b_{k-1} \sigma_{2k} = 0, \quad k = 0, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Logo, podemos reescrever (4.64) como

$$\Pi(x) \mathcal{W}_{2n+1}^*(x) = \sum_{k=n}^{l+n} \tilde{a}_k \mathcal{W}_{2k}(x) + \sqrt{1-x^2} \sum_{k=n+1}^{l+n-1} \tilde{b}_k \mathcal{W}_{2k+1}(x). \quad (4.66)$$

Por outro lado,  $a_k$ ,  $\tilde{a}_k$  e  $b_k$ ,  $\tilde{b}_k$  são exatamente os coeficientes obtidos via método dos MQM, que satisfazem a desigualdade dada no Teorema 4.18, isto é,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{l+n} a_k^2 + \sum_{k=n}^{l+n-1} b_k^2 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 \leq \int_{-1}^1 [\Pi(x) \mathcal{W}_{2n}^*(x)]^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\psi(x), \\ \sum_{k=n}^{l+n} \tilde{a}_k^2 + \sum_{k=n+1}^{l+n-1} \tilde{b}_k^2 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_k^2 \leq \int_{-1}^1 [\Pi(x) \mathcal{W}_{2n+1}^*(x)]^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\psi(x).\end{aligned}$$

Usando que  $L = \max_{x \in \text{supp}(\psi)} \mathcal{F}(x)$  então

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 [\Pi(x) \mathcal{W}_n^*(x)]^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\psi(x) &= \int_{-1}^1 \Pi(x) [\mathcal{W}_n^*(x)]^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\psi^*(x) = \\ &= \int_{-1}^1 \mathcal{F}(x) [\mathcal{W}_n^*(x)]^2 \sqrt{1-x^2} d\psi^*(x) \leq L \int_{-1}^1 [\mathcal{W}_n^*(x)]^2 \sqrt{1-x^2} d\psi^*(x) = L.\end{aligned}$$

Desta forma, para todo  $x \in A$  e  $n \in \mathbb{N}$  usando as expansões (4.65) e (4.66)

$$\begin{aligned}|\Pi(x) \mathcal{W}_n^*(x)| &\leq \varphi(x) \begin{cases} \sum_{k=n}^{l+n} |a_k| + \sum_{k=n}^{l+n-1} |b_k|, & \text{se } n \text{ é par} \\ \sum_{k=n}^{l+n} |\tilde{a}_{k+1}| + \sum_{k=n+1}^{l+n} |\tilde{b}_k|, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \\ &\leq \varphi(x) \sqrt{m+1} \begin{cases} (\sum_{k=n}^{l+n} |a_k|^2 + \sum_{k=n}^{l+n-1} |b_k|^2)^{1/2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ (\sum_{k=n}^{l+n} |\tilde{a}_{k+1}|^2 + \sum_{k=n+1}^{l+n} |\tilde{b}_k|^2)^{1/2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \\ &\leq \varphi(x) \sqrt{(m+1)L}.\end{aligned}$$

Na última desigualdade usamos (4.58). □

**Teorema 4.30.** *Sejam  $\sigma(x) \geq 0$  contínua em  $[-1, 1]$ , e  $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$  a sequência de*



funções normalizadas associada a medida simétrica  $\psi$ . Suponha que

$$\int_{-1}^1 [\mathcal{W}_n(t)]^2 \sigma(t) d\psi(t) \leq M, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.67)$$

$$\int_{-1}^1 [\mathcal{W}_n(t)]^2 \sigma^{-1}(t) d\psi(t) \leq M,$$

e que

$$|\mathcal{W}_n(x)| \leq \varphi(x), \text{ para } x \in A \subset [-1, 1]. \quad (4.68)$$

Se existe  $\delta > 0$ , que independe de  $x$ , tal que

$$\left| \frac{\sigma(x) - \sigma(t)}{x^2 - t^2} \right| \leq L, \quad (4.69)$$

para  $x \in A$  e  $t \in \{r : |x^2 - r^2| < \delta\} \cap [-1, 1]$ , então as funções  $\mathcal{W}_n^*$  normalizadas associadas à medida  $\psi^*$  dada por

$$\psi^*(x) = \int_{-1}^x \sigma(t) d\psi(t) \quad (4.70)$$

satisfazem

$$|\mathcal{W}_n^*(x)| \leq [B\sigma^{-1}(x) + C]\varphi(x) \quad (4.71)$$

onde  $B \leq 4M^{1/2}(L + \delta^{-1})$  e  $C \leq M^{1/2}(1 + 4\delta^{-1})$ .

*Demonstração.* Usando (4.67) e a desigualdade de Hölder temos

$$u_{n,k} = \int_{-1}^1 |\mathcal{W}_n^*(t)| |\mathcal{W}_k(t)| \sigma(t) d\psi(t) \leq \sqrt{\int_{-1}^1 [\mathcal{W}_n^*(t)]^2 d\psi^*(t)} \sqrt{\int_{-1}^1 [\mathcal{W}_k(t)]^2 \sigma(t) d\psi(t)} \leq M^{1/2},$$

e

$$\begin{aligned} v_{n,k} &= \int_{-1}^1 |\mathcal{W}_n^*(t)| |\mathcal{W}_k(t)| d\psi(t) = \int_{-1}^1 |\mathcal{W}_n^*(t)\sigma(t)| |\mathcal{W}_k(t)| \sigma^{-1}(t) d\psi(t) \\ &\leq \sqrt{\int_{-1}^1 [\mathcal{W}_n^*(t)]^2 d\psi^*(t)} \sqrt{\int_{-1}^1 [\mathcal{W}_k(t)]^2 \sigma(t)^{-1} d\psi(t)} \leq M^{1/2}. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade vamos supor  $n$  par, isto é,  $n = 2m$ . Então, pelo Teorema 4.2 e com a ortogonalidade (4.6) temos

$$\mathcal{W}_{2m}^*(x) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \mathcal{W}_{2k}(x) + \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k \mathcal{W}_{2k+1}(x) \quad (4.72)$$

com

$$\alpha_k = \int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2m}^*(t) \mathcal{W}_{2k}(t) \sqrt{1-t^2} d\psi(t) \quad \text{e} \quad \beta_k = \int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2m}^*(t) \mathcal{W}_{2k+1}(t) d\psi(t). \quad (4.73)$$

Por outro lado, usando o Lema 4.6 temos

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{W}_{2k+1}(x) \int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2m}^*(t) \mathcal{W}_{2k+1}(t) \sigma(t) d\psi(t) = 0, \quad (4.74)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{W}_{2k}(x) \int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2m}^*(t) \mathcal{W}_{2k}(t) \sqrt{1-t^2} \sigma(t) d\psi(t) = 0. \quad (4.75)$$

Com isto, podemos reescrever (4.72) como

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{2m}^*(x) &= \mathcal{W}_{2m}(x) \int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2m}^*(t) \mathcal{W}_{2m}(t) \sqrt{1-t^2} d\psi(t) \\ &+ \sigma^{-1}(x) \int_{-1}^1 \left( \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{W}_{2k}(x) \mathcal{W}_{2k}(t) \right) \mathcal{W}_{2m}^*(t) \sqrt{1-t^2} [\sigma(x) - \sigma(t)] d\psi(t) \\ &+ \sigma^{-1}(x) \sqrt{1-x^2} \int_{-1}^1 \left( \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{W}_{2k+1}(x) \mathcal{W}_{2k+1}(t) \right) \mathcal{W}_{2m}^*(t) [\sigma(x) - \sigma(t)] d\psi(t). \end{aligned}$$

Visto que  $\psi$  é simétrica segue do Lema 4.20 que

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{2m}^*(x) &= \mathcal{W}_{2m}(x) \int_{-1}^1 \mathcal{W}_{2m}^*(t) \mathcal{W}_{2m}(t) \sqrt{1-t^2} d\psi(t) \\ &+ \frac{\sigma^{-1}(x)}{\gamma_{2m} \gamma_{2m-1}} \int_{-1}^1 \left[ \frac{\mathcal{W}_{2m}(x) \mathcal{W}_{2m-2}(t) - \mathcal{W}_{2m}(t) \mathcal{W}_{2m-2}(x)}{x^2 - t^2} \right] \mathcal{W}_{2m}^*(t) \sqrt{1-t^2} [\sigma(x) - \sigma(t)] d\psi(t) \\ &+ \frac{\sigma^{-1}(x) \sqrt{1-x^2}}{\gamma_{2m+1} \gamma_{2m}} \int_{-1}^1 \left[ \frac{\mathcal{W}_{2m+1}(x) \mathcal{W}_{2m-1}(t) - \mathcal{W}_{2m+1}(t) \mathcal{W}_{2m-1}(x)}{x^2 - t^2} \right] \mathcal{W}_{2m}^*(t) [\sigma(x) - \sigma(t)] d\psi(t). \end{aligned}$$

Usando a hipótese (4.69) temos que

$$\left| \frac{\sigma(x) - \sigma(t)}{x^2 - t^2} \right| \leq L + \frac{[\sigma(x) + \sigma(t)]}{\delta}, \quad t \in [-1, 1]. \quad (4.76)$$

Então, obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}_{2m}^*(x)| &\leq \varphi(x) v_{2m,2m} + \sigma^{-1}(x) \varphi(x) L (v_{2m,2m-2} + v_{2m,2m} + v_{2m,2m-1} + v_{2m,2m+1}) \\ &+ \varphi(x) \delta^{-1} (v_{2m,2m-2} + v_{2m,2m} + v_{2m,2m-1} + v_{2m,2m+1}) \\ &+ \sigma^{-1}(x) \varphi(x) \delta^{-1} (u_{2m,2m-2} + u_{2m,2m} + u_{2m,2m-1} + u_{2m,2m+1}) \end{aligned}$$

e usando as desigualdades  $u_{2m,k}$  e  $v_{2m,k}$  o resultado segue. □

Conforme vimos até o momento, a convergência pontual do método dos mínimos

---

quadrados modificado foi estabelecida para medidas  $\psi$  simétricas. Como questões ainda em aberto, que pretendemos investigar em próximos trabalhos, citamos

- Possibilidade de generalizar o Teorema 4.27 sobre convergência pontual para medidas não simétricas;
- Possibilidade de generalizar o Lema 4.20 para medidas não simétricas;
- Uma generalização do Lema 4.20 possibilita estender o Teorema 4.30, visto que para a demonstração foi essencial o resultado do lema;
- Estimar o erro cometido pela aproximação via método dos mínimos quadrados modificado;
- Descrever o comportamento da aproximação em pontos de descontinuidade.

# Considerações Finais

Este trabalho é uma coleção de vários resultados, e está organizado em três partes: investigação de propriedades dos polinômios complementares de Romanovski-Routh, caracterização dos zeros da função geradora destes polinômios, e introdução de um método de aproximação de mínimos quadrados modificado com base em funções com ortogonalidade híbrida. Os principais resultados estabelecidos podem ser sintetizados da seguinte forma.

No Capítulo 2, vimos que os polinômios  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  estão conectados com polinômios para-ortogonais  $\mathcal{R}_n(b; \cdot)$  na circunferência unitária, através da transformação de Cayley, e isso possibilitou uma demonstração alternativa para a ortogonalidade satisfeita por  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  e a determinação de fórmulas de conexão envolvendo os polinômios  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  com  $\mathcal{P}_n(b+1; \cdot)$ . Apresentamos uma interpretação física para a localização dos zeros de  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$ . Para isto consideramos a função energia dada por  $n$  cargas unitárias positivas localizadas em  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  que se movem livremente sobre a reta real, duas cargas fixas negativas de magnitude  $\lambda_n = (\lambda + n - 1)/2$  nas posições  $i$  e  $-i$ , que obedecem a lei do potencial logarítmico na presença de um campo externo, a saber,

$$E(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j < k \leq n} -\ln|x_j - x_k| + \lambda_n \sum_{j=1}^n \left[ \ln|x_j - i| + \ln|x_j + i| \right] - \eta \sum_{j=1}^n \arctan(x_j).$$

Então, os pontos de equilíbrio desta energia ocorrem precisamente quando  $\{x_1, \dots, x_n\}$  são os zeros de  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$ .

Estabelecemos que a sequência de polinômios complementares de Romanovski-Routh mônicos  $\{\widehat{\mathcal{P}}_n(b; \cdot)\}_{n \geq 0}$  é uma sequência de Appel com função geradora

$$e^{xw} \mathcal{N}(b; w) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{P}}_n(b; x) \frac{w^n}{n!}, \text{ com } \mathcal{N}(b; w) = e^{-iw} {}_1F_1(b; b + \bar{b}; 2iw).$$

Além disso, a função  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  está relacionada com a função de onda Coulomb regular e com a função de Bessel regular e como consequência foi possível obter várias fórmulas de expansão envolvendo estas funções.

No Capítulo 3 investigamos os zeros das funções  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  e da função de onda Coulomb estendida regular

$$\mathcal{M}(b; w) = \mathfrak{C}(b) w^\lambda \mathcal{N}(b; w) \quad \text{e} \quad \mathfrak{C}(b) = 2^{\lambda-1} e^{\pi\eta/2} \frac{|\Gamma(b)|}{\Gamma(2\lambda)},$$

que estão diretamente relacionadas com a função geradora dos polinômios complementares de Romanovski-Routh mônicos. Apresentamos uma abordagem alternativa para mostrar que  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  tem infinitos zeros, todos reais e simples. Estabelecemos resultados sobre o comportamento monotônico dos zeros de  $\mathcal{N}(b; \cdot)$  com respeito aos parâmetros  $\lambda$  e  $\eta$ , que implicam resultados sobre os zeros de  $\mathcal{M}(b; \cdot)$ . Ademais, estabelecemos a propriedade de entrelaçamento dos zeros de  $\mathcal{M}(b; \cdot)$  com  $\mathcal{M}(b+1; \cdot)$  e de  $\mathcal{M}'(b; \cdot)$  com  $\mathcal{M}'(b+1; \cdot)$ .

No Capítulo 4 apresentamos uma teoria de aproximação de funções usando uma classe de funções  $\mathcal{W}_n$ , que satisfazem uma relação de recorrência de três termos e uma propriedade de ortogonalidade híbrida. Estas aproximações podem ser obtidas pelo método de mínimos quadrados modificado. Apresentamos resultados de convergência na norma, desigualdade do tipo Bessel para os coeficientes da aproximação, e convergência pontual para casos de ortogonalidade híbrida associada a uma medida simétrica. Foi ainda possível obter teoremas que garantem quais tipos de mudanças na medida preservam a limitação uniforme das funções  $\mathcal{W}_n$  em subconjuntos do suporte da medida  $[-1, 1]$ . Em outras palavras, se as funções  $\mathcal{W}_n$  associadas a uma medida  $\psi$  são uniformemente limitadas em  $A \subset [-1, 1]$ , isto é,

$$|\mathcal{W}_n(x)| \leq \varphi(x), \quad x \in A$$

para algum  $\varphi$ , mostramos que tipo de mudanças podemos operar na medida  $\psi$  de modo as funções de ortogonalidade híbrida associadas a nova medida continuem uniformemente limitadas em  $A$ .

Finalmente, vale ressaltar que este trabalho abre várias questões para a classe de polinômios de Romanovski-Routh  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$ , para as funções  $\mathcal{M}(b; \cdot)$  e  $\mathcal{N}(b; \cdot)$ , e para as funções de ortogonalidade híbrida  $\mathcal{W}_n$ . No final dos capítulos 2, 3 e 4 apresentamos problemas ainda em aberto. Dentre eles, mencionamos o comportamento assintótico dos zeros de  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$ , a possibilidade de  $\mathcal{P}_n(b; \cdot)$  ser solução minimal da relação de recorrência de três termos, a estimativa da distância entre os zeros da função de onda Coulomb e os zeros das funções de Bessel, e como estender os resultados de convergência pontual do método dos mínimos quadrados modificado. Pretendemos, em trabalhos futuros, continuar a investigar estas questões.

# Referências

- [1] M. Abramowitz, I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards, 1972.
- [2] M. Al-Gwaiz. *Sturm-Liouville Theory and its Applications*. Springer, 2008.
- [3] G. Alexits. *Convergence Problems of Orthogonal Series*, volume 20. Pergamon Press, 1961.
- [4] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy. *Special Functions*. Cambridge University Press, 2001.
- [5] P. Appell. Sur une classe de polynômes. *Annales Scientifiques de l'É.N.S.*, 9:119–144, 1880.
- [6] I. Area, D.K. Dimitrov, E. Godoy, A. Ronveaux. Zeros of Gegenbauer and Hermite polynomials and connection coefficients. *Math. Comp.*, 73:1937–1951, 2004.
- [7] A. Baricz. Turán type inequalities for regular Coulomb wave functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 430:166–180, 2015.
- [8] C.F. Bracciali, A. Martínez-Finkelshtein, A. Sri Ranga, D.O. Veronese. Christoffel formula for kernel polynomials on the unit circle. *J. Approx. Theory*, 235:46–73, 2018.
- [9] C.F. Bracciali, J.H. McCabe, T.E. Pérez, A. Sri Ranga. A class of orthogonal functions given by a three term recurrence formula. *Math. Comp.*, 85:1837–1859, 2016.
- [10] C.F. Bracciali, A. Sri Ranga, A. Swaminathan. Para-orthogonal polynomials on the unit circle satisfying three term recurrence formulas. *Appl. Numer. Math.*, 109:19–40, 2016.
- [11] M.J. Cantero, L. Moral, L. Velázquez. Measures and para-orthogonal polynomials on the unit circle. *East J. Approx.*, 8:447–464, 2002.
- [12] N.L. Carothers. *Real Analysis*. Cambridge University Press, 1 edition, 2000.

- 
- [13] T.S. Chihara. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Routledge, 1 edition, 1978.
- [14] M.S. Costa, H.M. Felix, A. Sri Ranga. Orthogonal polynomials on the unit circle and chain sequences. *J. Approx. Theory*, 173:14–32, 2013.
- [15] D.K. Dimitrov. On a conjecture concerning monotonicity of zeros of ultraspherical polynomials. *J. Approx. Theory*, 85:88–97, 1996.
- [16] D.K. Dimitrov, W. Van Assche. Lamé differential equation and electrostatics. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128:3621–3628, 2000.
- [17] D.K. Dimitrov, M.E.H. Ismail, A. Sri Ranga. A class of hypergeometric polynomials with zeros on the unit circle: extremal and orthogonal properties and quadrature formulas. *Appl. Numer. Math.*, 65:41–52, 2013.
- [18] D.K. Dimitrov, A. Sri Ranga. Zeros of a family of hypergeometric para-orthogonal polynomials on the unit circle. *Math. Nachr.*, 286:1778–1791, 2013.
- [19] D.K. Dimitrov, R.O. Rodrigues. On the behaviour of zeros of Jacobi polynomials. *J. Approx. Theory*, 116:224–239, 2002.
- [20] A. Elbert, P.D. Siafarikas. Monotonicity properties of the zeros of ultraspherical polynomials. *J. Approx. Theory*, 97:31–39, 1999.
- [21] G. Freud. *Orthogonal Polynomials*. Pergamon Press, 1 edition, 1971.
- [22] W. Gautschi. Computational aspects of three-term recurrence relations. *SIAM Rev.*, 9:24–82, 1967.
- [23] W. Gautschi. *Numerical Analysis*. Birkhäuser, 2 edition, 2012.
- [24] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 7 edition, 2007.
- [25] Y. Ikebi. The zeros of regular Coulomb wave functions and of their derivatives. *Math. Comp.*, 29:878–887, 1975.
- [26] M.E.H. Ismail, A. Sri Ranga.  $R_{II}$  type recurrence, generalized eigenvalue problem and orthogonal polynomials on the unit circle. *Linear Algebra Appl.*, 562:63–90, 2019.
- [27] W.B. Jones, O. Njåstad, W.J. Thron. Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle. *Bull. London Math. Soc.*, 21:113–152, 1989.

- 
- [28] K. Jordaan, F. Toókos. Orthogonality and asymptotics of pseudo-Jacobi polynomials for non-classical parameters. *J. Approx. Theory*, 178:1–12, 2014.
- [29] N.N. Lebedev, R.R. Silverman. *Special Functions and their Applications*. Dover Publications, revised edition, 1972.
- [30] F. Marcellán, A. Martínez-Finkelshtein, P. Martínez-González. Electrostatic models for zeros of polynomials: old, new, and some open problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 207:258–272, 2007.
- [31] A. Martínez-Finkelshtein, A. Sri Ranga, D.O. Veronese. Extreme zeros in a sequence of para-orthogonal polynomials and bounds for the support of the measure. *Math. Comp.*, 87:261–288, 2018.
- [32] A. Martínez-Finkelshtein, L.L. Silva Ribeiro, A. Sri Ranga, M. Tyaglov. Complementary Romanovski-Routh polynomials: From orthogonal polynomials on the unit circle to Coulomb wave functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, (aceito).
- [33] A. Martínez-Finkelshtein, L.L. Silva Ribeiro, A. Sri Ranga, M. Tyaglov. Complementary Romanovski-Routh polynomials: From orthogonal polynomials on the unit circle to Coulomb wave functions II. (em preparação).
- [34] A.S. Meligy. Simple expansion for the regular Coulomb wave function. *Nuclear Phys.*, 6:440–442, 1958.
- [35] Y. Miyazaki, Y. Kikuchi, D. Cai, Y. Ikebi. Error analysis for the computation of zeros of regular Coulomb wave function and its first derivative. *Math. Comp.*, 70:1195–1204, 2001.
- [36] R. Orive, Z. García. On a class of equilibrium problems in the real axis. *J. Comput. Appl. Math.*, 235:1065–1076, 2010.
- [37] B. Osilenker. *Fourier Series in Orthogonal Polynomials*. Word Scientific, 1999.
- [38] J.L. Powel. Recurrence formulas for Coulomb wave functions. *Phys. Rev.*, 72:626–627, 1947.
- [39] P.A. Lesky R. Koekoek, R.F. Swarttouw. *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their  $q$ -Analogues*. Springer, 1 edition, 2010.
- [40] A. Sri Ranga. Szegő polynomials from hypergeometric functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138:4243–4247, 2010.
- [41] A.P. Raposo, H.J. Weber, D.E. Alvarez-Castillo, M. Kirchbach. Romanovski polynomials in selected physics problems. *Cent. Eur. J. Phys.*, 5:253–284, 2007.



- 
- [42] V. Romanovski. Sur quelques classes nouvelles de polynomes orthogonaux. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 188:1023–1025, 1929.
- [43] E.J. Routh. On some properties of certain solutions of a differential equation of the second order. *Proc. London Math. Soc.*, 16:245–261, 1884.
- [44] J.R. Shepanski, S.T. Butler. An expansion for Coulomb wave functions. *Nuclear Phys.*, 1:313–321, 1956.
- [45] J.A. Shohat. On the development of functions in series of orthogonal polynomials. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 41:49–82, 1935.
- [46] B. Simon. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1. Classical Theory*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 2005.
- [47] B. Simon. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 2. Spectral Theory*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 2005.
- [48] L.J. Slater. *Confluent Hypergeometric Functions*. Cambridge University Press, 1960.
- [49] G. Szegő. *Orthogonal Polynomials*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 4 edition, 1939.
- [50] N.M. Temme. *Special Functions: an Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*. John Wiley & Sons, 1996.
- [51] H.S. Wall. *Analytic Theory of Continued Fractions*. Chelsea Publishing, 1 edition, 1948.
- [52] H.J. Weber. Connection between Romanovski polynomials and other polynomials. *Cent. Eur. J. Math.*, 5:581–595, 2007.
- [53] H.J. Weber. Connections between real polynomial solutions of hypergeometric-type differential equations with Rodrigues formula. *Cent. Eur. J. Math.*, 5:415–427, 2007.
- [54] L.C. Yen. On zeros of paraorthogonal polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, (aceito).

# Índice Remissivo

Delta de Kronecker, 8

Função

- de Kummer, 6
- de onda Coulomb, 31
- de onda Coulomb estendida, 31
- integrável, 56
- quadrado integrável, 56
- de Bessel, 7
- de Whittaker, 6
- gama, 5
- hipergeométrica confluyente, 6
- hipergeométrica de Gauss, 6

Matriz de Jacobi, 9

Medida

- de probabilidade, 8
- positiva, 7
- simétrica, 53

Núcleo Christoffel-Darboux, 12

Ortogonalidade híbrida, 53

Parâmetro

- inicial, 3

Polinômio

- CRR, 18
- de Jacobi, 7
- de Romanovski-Routh, 17
- de Szegő, 11
- ortogonal na circunferência unitária, 11
- ortogonal na reta, 8
- para-ortogonal, 13

Ponto de aumento, 7

Símbolo de Pochhammer, 4

Série hipergeométrica, 5

Sequência

- de Appell, 29
- de parâmetros, 3
- de parâmetros maximal, 4
- de parâmetros minimal, 4
- de Polinômios ortogonais, 8
- encadeada, 3

Solução minimal, 45

Suporte da medida, 8

Transformação de Cayley, 20

Zero relevante, 55