

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Frederico Albuquerque Ribeiro

Resposta Aeroelástica à Rajada 1-cosseno
Usando Aproximação Aerodinâmica Não
Estacionária

Ilha Solteira

2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JULIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

Frederico Albuquerque Ribeiro

**Resposta Aeroelástica à Rajada 1-cosseno Usando Aproximação
Aerodinâmica Não Estacionária**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - Unesp como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Douglas Domingues Bueno
Co-orientador: Prof. Dr. Gustavo Luiz Chagas Manhães de Abreu

Ilha Solteira
2019

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

R484r Ribeiro, Frederico Albuquerque.
Resposta aeroelástica à rajada 1-cosseno usando aproximação aerodinâmica não estacionária / Frederico Albuquerque Ribeiro. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2019
116 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2019

Orientador: Douglas Domingues Bueno
Coorientador: Gustavo Luiz Chagas Manhães de Abreu
Inclui bibliografia

1. Aeroelasticidade. 2. Aerodinâmica não estacionária. 3. Aproximações por funções racionais. 4. Método dos mínimos quadrados. 5. Resposta à rajada. 6. 1-cosseno.


Raiane da Silva Santos

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Resposta aeroelástica à rajada 1-cosseno usando aproximação aerodinâmica não estacionária

AUTOR: FREDERICO ALBUQUERQUE RIBEIRO

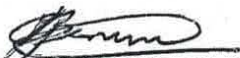
ORIENTADOR: DOUGLAS DOMINGUES BUENO

COORIENTADOR: GUSTAVO LUIZ CHAGAS MANHAES DE ABREU

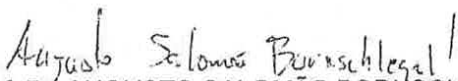
Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA MECÂNICA, área: Mecânica dos Sólidos pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. DOUGLAS DOMINGUES BUENO
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. GUILHERME RIBEIRO BEGNINI
Departamento de Engenharia Mecânica / Universidade Federal da Bahia



Prof. Dr. AUGUSTO SALOMÃO BORN SCHLEGEL
Unidadell, Faculdade de Engenharia - FAEN / Universidade Federal de Grande Dourados

Ilha Solteira, 13 de março de 2019

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me dar oportunidades, sabedoria, conhecimento e principalmente saúde.

Ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Douglas Domingues Bueno por sempre acreditar em mim, pelo apoio, paciência e conhecimento transmitido durante à realização deste trabalho. E também aos demais professores do Departamento de Engenharia Mecânica da Unesp-Feis, por toda contribuição para a conclusão desta etapa.

Aos meus amigos João Francisco Silva Trentin, Lucas Perrone Chaim, Maurício Kiot-sune Iwanaga Rafael Daia Mattei, Rafael de Oliveira Teloli, Renan Sanches Geronel, João Brogin, Lucas Zanetti, Vinícius Germano, Oscar Scussel, Marcus Omori, Lucas Zanovello e Jessé Paixão, pelos momentos de trocas de conhecimento e também os de descontração. A toda minha família por todo o suporte e incentivo necessário para execução do trabalho.

À Unesp-Feis em especial ao Departamento de Engenharia Mecânica e Programa de Pós-Graduação em Engenharia mecânica. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"No que diz respeito ao empenho, ao compromisso, ao esforço, à dedicação, não existe meio termo. Ou você faz uma coisa bem feita ou não faz."

— Ayrton Senna

Resumo

Os fenômenos associados aos sistemas aeroelásticos definem uma importante classe de problemas envolvida no projeto de aeronaves. Algumas análises podem ser realizadas utilizando a formulação no domínio da frequência, porém, para alguns problemas específicos a análise no domínio do tempo mostra-se mais conveniente, especialmente para projeto de controladores e inclusão de não linearidades. Em particular, forças aerodinâmicas não estacionárias são tipicamente obtidas no domínio da frequência reduzida. Tais formulações não permitem de maneira direta, através de uma transformada inversa, obter modelos matemáticos no domínio do tempo e, portanto, é necessário o uso de um método de aproximação, como o de Roger-Abel. No entanto, uso deste método de aproximação apresenta algumas lacunas com relação ao significado físico e escolha dos parâmetros de atraso. Desta forma, o presente texto explora a influência dos estados de atraso demonstrando que é responsável pela correção da fase entre o movimento e as forças aerodinâmicas resultantes e, também, propõe uma forma de avaliação da qualidade da aproximação obtida. A partir da aproximação das cargas aerodinâmicas se obtém o modelo matemático do sistema aeroelástico, e através de simulações numéricas computacionais, tem-se a resposta do sistema aeroelástico no domínio do tempo devido à cargas de rajada $1 - \cos$. A partir da análise da resposta à rajada é possível avaliar condições em que a rajada se apresenta de maneira mais crítica para o sistema de estudo.

Palavras-chave: Aeroelasticidade. Aerodinâmica não estacionária. Aproximações por funções racionais. Método dos mínimos quadrados. Resposta à rajada. $1 - \cos$.

Abstract

The phenomena associated with the aeroelastic systems define an important class of problems involved in aircraft design. Some analyzes may be performed in the frequency domain, however, for some specific problems time domain analysis is more convenient, especially for controller design and the inclusion of nonlinearities. In particular, non-stationary aerodynamic forces are typically obtained in the reduced frequency domain. Such formulations do not allow, by means of an inverse transform, to obtain mathematical models in the time domain, and therefore it is necessary to use an approximation method, such as that of Roger-Abel. However, the use of this approximation method presents some gaps with respect to the physical meaning and choice of lag parameters. In this way, the present text explores the influence of the lag states demonstrating that it is responsible for the correction of the phase between the movement and the resulting aerodynamic forces and also proposes a method to evaluate the quality of the approximation achieved. From the approximation of the aerodynamic loads the mathematical model of the aeroelastic system is obtained, and through computational numerical simulations, has the response of the aeroelastic system in the time domain due to the $1 - \cosine$ gust load. From the analysis of the response to the gust, it is possible to evaluate conditions in which the gust is presented in a more critical way for the study system.

Keywords: Aeroelasticity. Unsteady aerodynamics. Rational function approximation. Least square method. Gust response. 1-cossine.

Lista de Figuras

1	Esquema ilustrando a contribuição da flexibilidade estrutural	21
2	Representação esquemática do triângulo de Collar	21
3	Seção típica de três graus de liberdade	30
4	Seção típica com dois graus de liberdade	31
5	Frequências elásticas de <i>plunge</i> e <i>pitch</i>	37
6	Alteração do raio de giração da seção típica com relação à variação da posição do centro elástico	38
7	Representação do aerofólio através do círculo	39
8	Elementos de vórtice sobre o aerofólio e bordo de fuga ao infinito, sendo $\Delta\Gamma$ o elemento de vórtice	41
9	Retas mostrando como os valores de frequência e velocidade variam em relação à frequência reduzida para determinada semi-corda	45
10	Velocidade de rajada do tipo 1-cosseno	46
11	Dimensão da matriz dinâmica aeroelástica para $n_{lag} = 10$ (\circ), $n_{lag} = 5$ (Δ) e estrutural, que não considera os esforços aerodinâmicos (\bullet)	52
12	Resposta no tempo do deslocamento angular θ e os dois primeiros estados aumentados relacionados	54
13	RMS relativo dos estados aumentados	54
14	Movimento imposto (\circ) e força aerodinâmica correspondente (Δ) normalizados pela respectiva amplitude máxima	57
15	Diferença de tempo pico a pico entre o movimento prescrito e a força aerodinâmica de <i>plunge</i> em diferentes valores de frequência reduzida	58

16	Razão da diferença de tempo pico a pico entre o movimento prescrito e a força aerodinâmica de <i>plunge</i> em diferentes valores de frequência reduzida com o respectivo período	59
17	Função de transferência	60
18	Ilustração da senóide na frequência	60
19	Defasagem em tempo (Δt_r) em <i>plunge</i> de forças aerodinâmicas aproximadas em comparação com a obtida pelas equações de Theodorsen (1935) . .	61
20	Defasagem em tempo (Δt_r) em <i>pitch</i> de forças aerodinâmicas aproximadas em comparação com a obtida pelas equações de Theodorsen (1935)	62
21	Defasagem em tempo (Δt_r) para a superfície de controle de forças aerodinâmicas aproximadas em comparação com a obtida pelas equações de Theodorsen (1935)	62
22	Diferença de defasagens (Δ) para $n_{lag} = 1$ (Δ) e $n_{lag} = 7$ (*)	63
23	Relação do Δt_r com o respectivo período para cada frequência reduzida associada - <i>plunge</i>	64
24	Relação do Δt_r com o respectivo período para cada frequência reduzida associada - <i>pitch</i>	64
25	Relação do Δt_r com o respectivo período para cada frequência reduzida associada - superfície de controle	65
26	Movimento imposto (\circ) e as forças relacionadas com os estados de atraso (Δ), normalizados com relação às respectivas amplitudes	66
27	Defasagem de tempo dos termos de atraso da força aerodinâmica para diferentes parâmetros de atraso - <i>plunge</i>	67
28	Defasagem de tempo dos termos de atraso da força aerodinâmica para diferentes parâmetros de atraso - <i>pitch</i>	67
29	Defasagem de tempo dos termos de atraso da força aerodinâmica para diferentes parâmetros de atraso - superfície de controle	68
30	Relação da defasagem e seu período associado a cada frequência reduzida para diferentes parâmetros de atraso - <i>Plunge</i>	69

31	Relação da defasagem e seu período associado a cada frequência reduzida para diferentes parâmetros de atraso - <i>Pitch</i>	69
32	Relação da defasagem e seu período associado a cada frequência reduzida para diferentes parâmetros de atraso - superfície de controle	70
33	Avaliação gráfica da aproximação para o elemento Q_{11} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)	71
34	Avaliação gráfica da aproximação para o elemento Q_{22} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)	72
35	Avaliação gráfica da aproximação para o elemento Q_{33} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)	72
36	Comparação das fases para o elemento Q_{11} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)	73
37	Comparação das fases para o elemento Q_{22} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)	74
38	Comparação das fases para o elemento Q_{33} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)	74
39	Avaliação da aproximação para cada n_{lag} utilizado - elemento Q_{11}	76
40	Avaliação da aproximação para cada n_{lag} utilizado - elemento Q_{22}	76
41	Avaliação da aproximação para cada n_{lag} utilizado - elemento Q_{33}	77
42	Avaliação da aproximação para cada n_{lag} utilizado - elemento Q_{11} (módulo)	78
43	Avaliação da aproximação para cada n_{lag} utilizado - elemento Q_{22} (módulo)	78
44	Avaliação da aproximação para cada n_{lag} utilizado - Elemento Q_{33} (módulo)	79
45	FRF obtida a partir das equações de Theodorsen (1935) e aproximação - H_{11}	80
46	FRF obtida a partir das equações de Theodorsen (1935) e aproximação - H_{22}	80
47	FRF obtida a partir das equações de Theodorsen (1935) e aproximação - H_{33}	81
48	Relação de energia em função do número de estados de atraso - E_{11}	82
49	Relação de energia em função do número de estados de atraso - E_{22}	82
50	Relação de energia em função do número de estados de atraso - E_{33}	83

51	Resposta à rajada para diferentes gradientes de rajada - deslocamento (<i>plunge</i>)	85
52	Resposta à rajada para diferentes gradientes de rajada - aceleração (<i>plunge</i>)	86
53	Resposta à rajada para diferentes gradientes de rajada - deslocamento (<i>pitch</i>)	87
54	Valor RMS da resposta à rajada com relação à velocidade de voo para diferentes gradientes de rajada	88
55	Valor RMS da resposta à rajada com relação ao gradiente de rajada para diferentes velocidades de voo	89
56	Rajada 1 – <i>cos seno</i>	90
57	Resposta à rajada em frequência para diferentes valores de gradientes . . .	91
58	Resposta à rajada em frequência adimensional para diferentes valores de gradientes	92
59	Comparação entre resposta à rajada e impulso	92
60	Resposta à rajada para vários valores de velocidade máxima do perfil da rajada - deslocamento (<i>plunge</i>)	93
61	Resposta à rajada para vários valores de velocidade máxima do perfil da rajada - aceleração (<i>plunge</i>)	94
62	Resposta à rajada para diferentes condições de voo, sendo a velocidade do perfil de rajada 20% desta e gradiente fixo em 30 m - deslocamento (<i>plunge</i>)	95
63	Resposta à rajada para diferentes condições de voo, sendo a velocidade do perfil de rajada 20% desta e gradiente fixo em 30 m - aceleração (<i>plunge</i>) .	95
64	Resposta à rajada para diferentes condições de voo, sendo a velocidade do perfil de rajada 20% desta e gradiente fixo em 30 m em tempo adimensional - deslocamento (<i>plunge</i>)	96
65	Resposta à rajada para diferentes condições de voo, sendo a velocidade do perfil de rajada 20% desta e gradiente fixo em 30 m em tempo adimensional - aceleração (<i>plunge</i>)	97
66	Resposta à rajada em função da velocidade de escoamento considerando diferentes gradientes	98

67	Resposta à rajada em função da velocidade de escoamento considerando diferentes gradientes	99
68	Resposta máxima atingida devido à rajada em função do instante de tempo em que ocorreu o evento	100
69	Instante de tempo em que ocorre máximo deslocamento em função da velocidade de escoamento e diferentes gradientes	101
70	Avaliação gráfica da aproximação para o elemento Q_{21} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)	113
71	Avaliação gráfica da aproximação para o elemento Q_{31} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)	113
72	Comparação das fases para o elemento Q_{21} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)	114
73	Comparação das fases, elemento Q_{31} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)	114
74	Avaliação da aproximação para cada n_{lag} utilizado - elemento Q_{12}	115
75	Avaliação da aproximação para cada n_{lag} utilizado - elemento Q_{31}	115

Lista de Tabelas

1	Dados da seção típica com 2 graus de liberdade	35
2	Dados da seção típica 3 graus de liberdade utilizados no trabalho	53

Lista de Símbolos

a	- Posição do centro elástico
\mathbf{A}	- Matriz dinâmica
\mathbf{A}_e	- Matriz dinâmica aeroelástica
b	- Comprimento da semi corda
\mathbf{B}	- Matriz de amortecimento
\mathbf{B}_a	- Matriz de amortecimento aeroelástica
\mathbf{B}_{nc}	- Matriz de amortecimento não circulatória
c	- Posição da superfície de controle
C	- Função de Theodorsen
$E_i^{I,(m,n)}$	- Parte imaginária do erro para cada elemento da matriz e frequência reduzida
$E_i^{R,(m,n)}$	- Parte real do erro para cada elemento da matriz e frequência reduzida
$E_i^{C,(m,n)}$	- Função de erro complexo
$E_{(m,n)}$	- Energia do sistema aeroelástico
$E_{(m,n)}^a$	- Energia do sistema aeroelástico aproximado
f_a	- Força aerodinâmica desacoplada no domínio do tempo reduzido
$f_{a_{max}}$	- Amplitude da força aerodinâmica desacoplada
f_h	- Frequência natural desacoplada de <i>plunge</i> em Hz
f_β	- Frequência natural desacoplada da superfície de controle em Hz
f_θ	- Frequência natural desacoplada de <i>pitch</i> em Hz
\tilde{f}	- Frequência adimensional
F_{ai}	- Força aerodinâmica desacoplada no domínio da frequência reduzida
F_h^{circ}	- Força circulatória
F_h^{nc}	- Força não circulatória
F_{lag}^i	- Força aerodinâmica desacoplada relacionado aos termos de atraso
\mathbf{F}_a	- Matriz de forças aerodinâmicas
\mathbf{F}_{ext}	- Vetor de forças externas
\mathbf{F}_g	- Vetor de força devido à rajada
\mathbf{F}_{lag}	- Matriz de forças aerodinâmicas relacionado aos termos de atraso

h	- Movimento de translação (<i>plunge</i>)
\dot{h}	- Velocidade de translação (<i>plunge</i>)
\ddot{h}	- Aceleração de translação (<i>plunge</i>)
H	- Gradiente de rajada
\mathbf{H}	- Função de resposta em frequência
I	- Momento de inércia da seção típica
I_a	- Momento de inércia do aerofólio
I_{CS}	- Momento de inércia da superfície de controle
I_β	- Momento de inércia em torno do centro elástico da superfície de controle
I_θ	- Momento de inércia em torno do centro elástico
\mathcal{L}	- Lagrangiana
k	- Frequência reduzida
k_h	- Rigidez de <i>plunge</i>
k_β	- Rigidez da superfície de controle
k_θ	- Rigidez de <i>pitch</i>
\mathbf{K}	- Matriz de rigidez
\mathbf{K}_a	- Matriz de rigidez aeroelástica
\mathbf{K}_{nc}	- Matriz de rigidez não circulatória
m	- Massa do aerofólio
M_β^{circ}	- Momento circulatório da superfície de controle
M_β^{nc}	- Momento não circulatório da superfície de controle
M_θ^{circ}	- Momento circulatório de <i>plunge</i>
M_θ^{nc}	- Momento não circulatório de <i>plunge</i>
\mathbf{M}	- Matriz de massa
\mathbf{M}_a	- Matriz de massa aeroelástica
\mathbf{M}_{nc}	- Massa não circulatória
n_{lag}	- Número de estados de atraso
p	- Diferença de pressão
p_h	- Pressão local
q	- Pressão dinâmica
$Q_{app}^{m,n}$	- Elemento da matriz de coeficientes aerodinâmicos aproximada
Q_h	- Força aerodinâmica no <i>plunge</i>
Q_{ii}	- Coeficiente aerodinâmico desacoplado

Q_β	-	Força aerodinâmica na superfície de controle
Q_θ	-	Força aerodinâmica no <i>pitch</i>
\mathbf{Q}	-	Matriz de coeficientes aerodinâmicos
\mathbf{Q}_{app}	-	Matriz de coeficientes aerodinâmicos aproximada
r	-	Raio de giro em relação à a
\mathbf{r}_{cg}	-	Vetor posição do centro de gravidade
\mathbf{r}_{cgCS}	-	Vetor posição do centro de gravidade
\mathbf{R}_1	-	Termo relacionado ao componente circulatório
s	-	Variável de Laplace
s'	-	Variável de Laplace modificada
\mathbf{S}_1	-	Termo relacionado ao componente circulatório
\mathbf{S}_2	-	Termo relacionado ao componente circulatório
S_β	-	Produto de inércia
S_θ	-	Produto de inércia
t	-	Tempo
t_r	-	Tempo reduzido
T	-	Energia cinética
T_r	-	Período reduzido
\mathbf{u}	-	Vetor de deslocamento das coordenadas físicas
\mathbf{u}_{aj}	-	Vetor de deslocamento dos estados de atraso
$\dot{\mathbf{u}}$	-	Vetor de velocidade das coordenadas físicas
$\dot{\mathbf{u}}_{aj}$	-	Vetor de deslocamento dos estados de atraso
$\ddot{\mathbf{u}}$	-	Vetor de aceleração das coordenadas físicas
\mathbf{v}_{cg}	-	Vetor velocidade do centro de gravidade
\mathbf{v}_{cgCS}	-	Vetor velocidade do centro de gravidade
V	-	Velocidade de voo
V_e	-	Energia Potencial
w_g	-	Perfil de velocidade da rajada
w_0	-	Velocidade máxima de rajada
x	-	Movimento imposto no domínio do tempo reduzido
x_θ	-	Posição do centro de gravidade da superfície de controle
x_θ	-	Posição do centro de gravidade do aerofólio

- x_0 - Amplitude do movimento imposto no domínio do tempo reduzido
- x_1 - Posição no eixo das abcissas
- \mathbf{x} - Vetor variável de estados
- X_{ii} - Movimento imposto no domínio da frequência reduzida
- y_1 - Posição no eixo das ordenadas

Letras Gregas

β	- Rotação da superfície de controle
$\dot{\beta}$	- Velocidade angular da superfície de controle
$\ddot{\beta}$	- Aceleração angular da superfície de controle
γ	- Parâmetro de atraso
$\Delta\Gamma$	- Elemento de Vórtice
Δt_r	- Diferença de tempo reduzido pico a pico
ϵ	- Erro de aproximação calculado pela fase
ϵ_m	- Erro de aproximação calculado pela módulo
ϵ_φ	- Magnitude da fonte
λ	- Autovalor
θ	- Rotação do aerofólio (<i>pitch</i>)
$\dot{\theta}$	- Velocidade angular do aerofólio (<i>pitch</i>)
$\ddot{\theta}$	- Aceleração angular do aerofólio (<i>pitch</i>)
$\dot{\theta}$	- Vetor velocidade angular
ν	- Número de graus de liberdade
ρ	- Massa específica
ϕ	- Ângulo de fase
$\phi^{(m,n)}$	- Ângulo de fase para um elemento da matriz \mathbf{Q}
$\phi_{app}^{(m,n)}$	- Ângulo de fase para um elemento da matriz \mathbf{Q}_{app}
φ	- Função potencial
φ_h	- Função potencial devido à velocidade de translação do aerofólio
φ_β	- Função potencial devido à rotação da superfície de controle
$\varphi_{\dot{\beta}}$	- Função potencial devido à velocidade angular da superfície de controle
φ_γ	- Função potencial devido ao vórtice
φ_θ	- Função potencial devido à rotação do aerofólio
$\varphi_{\dot{\theta}}$	- Função potencial devido à velocidade angular do aerofólio
ω_β	- Frequência natural desacoplada de <i>pitch</i>
ω_θ	- Frequência natural desacoplada de <i>plunge</i>
Ω	- Vetor velocidade angular da superfície de controle

Lista de Siglas

EASA - *European Aviation Safety Agency*

FAA - *Federal Aviation Administration*

FRF - *Função de resposta em frequência*

HALE - *High-altitude long-endurance*

LQG - *Linear Quadratic Gaussian*

LQR - *Linear Quadratic Regulator*

Sumário

1	Introdução	20
1.1	Processo de Certificação: Cargas de Rajada	26
1.2	Objetivos do Trabalho	27
1.3	Contribuições Alcançadas	27
1.4	Organização do Trabalho	28
2	Metodologia	29
2.1	Sistema Aeroelástico Sujeito à Rajada	29
2.2	Equações do Movimento	30
2.2.1	Seção Típica de 2 Graus de Liberdade	31
2.2.2	Seção Típica de 3 Graus de Liberdade	33
2.3	Alteração Dinâmica Devido ao Centro Elástico	35
2.4	Aerodinâmica Não-Estacionária de Theodorsen	38
2.5	Força Devido à Rajada	45
2.5.1	Rajada no Domínio do Tempo	45
2.6	Aproximação de Forças Aerodinâmicas por Funções Racionais	47
2.6.1	Método de Roger-Abel	47
2.7	Representação em Espaço de Estados	50
2.8	Resposta dos Estados de Atraso	52
2.9	FRF aeroelástica	55
3	Novo Critério para Definição dos Parâmetros de Atraso	56
3.1	Força Aerodinâmica em Movimento Harmônico no Domínio do Tempo . . .	56

3.1.1	No Domínio da Frequência	59
3.2	Aproximação de Forças Aerodinâmicas	61
3.3	Uma Abordagem Alternativa para Avaliação da Aproximação	70
4	Resposta do Sistema Aeroelástico no Domínio do Tempo	84
4.1	Resposta à Rajada	84
5	Conclusões	102
5.1	Sugestão para Trabalhos Futuros	103
	Referências	105
	Anexo A – Potenciais de Velocidade e Constantes de Theodorsen	109
	Anexo B – Comparações das Matrizes Aerodinâmicas Aproximada e Exata	112

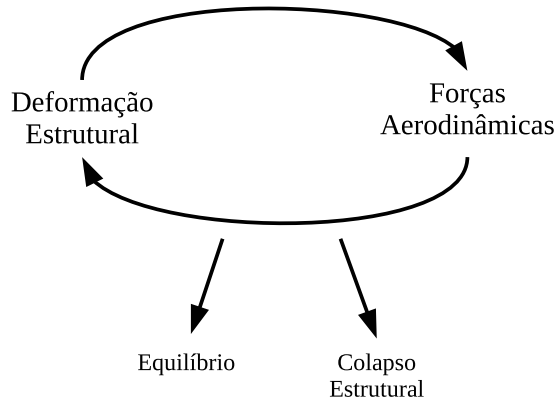
1 Introdução

A história da aeronáutica é considerada recente, tendo seu início no começo do século XX. Algumas vertentes defendem que a aviação de fato foi concebida pelos irmãos Wright nos Estados Unidos da América, enquanto que outros creditam esse início ao aeronauta e inventor brasileiro Santos Dummont, consagrado pelo voo em 1906 com o 14 bis. Porém, é inquestionável a importância de ambos, e até mesmo de outros nomes para a evolução da aviação até atingir o presente nível.

A partir daqueles primeiros, desenvolveram-se diversas aplicações com novos conceitos de máquinas voadoras, para transporte de cargas e pessoas na aviação civil e para fins militares, como ocorreu em princípio, pois o início da primeira grande guerra se dá próximo ao começo da história da aviação. Em particular, um dos aviões utilizados na primeira guerra mundial foi o bombardeiro britânico Handley Page 0/400, que apresentava um dos mais estudados problemas envolvendo aeroelasticidade, o flutter, que ocorria em sua cauda horizontal ([BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996](#)).

Os aviões modernos possuem maior flexibilidade quando comparados com os primeiros veículos produzidos em larga escala. Tal fato se deve principalmente as maiores dimensões e aplicações de diferentes materiais, implicando na análise aeroelástica ser um assunto de grande importância durante os ciclos de desenvolvimento. Na prática, o movimento estrutural induz variação das forças aerodinâmicas, que por sua vez alteram a posição da estrutura o que permite evolução até o equilíbrio ou, então, tornar o movimento cíclico, podendo implicar colapso da estrutura, conforme descrito por [Collar \(1946\)](#) e ilustrado pelo esquema da figura (1).

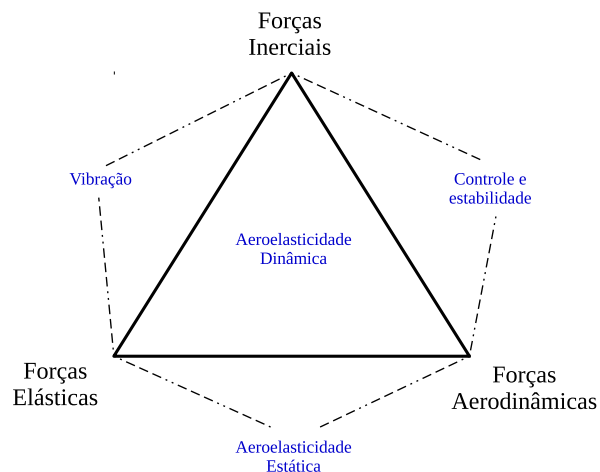
Figura 1 – Esquema ilustrando a contribuição da flexibilidade estrutural



Fonte: Adaptado de Collar (1946)

A partir dos efeitos resultantes da interação entre estrutura e cargas aerodinâmicas, tem-se que aeroelasticidade compreende uma importante classe de problemas envolvida no projeto de aeronaves por considerar a interação mútua entre forças aerodinâmicas, elásticas e de inércia (FUNG, 1993; BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996; HODGES; PIERCE, 2002; WRIGHT; COOPER, 2015). Uma forma de representação gráfica dos tópicos que compreendem a aeroelasticidade, foi proposta por Collar (1946), conhecido como o triângulo de Collar, apresentado na figura (2).

Figura 2 – Representação esquemática do triângulo de Collar



Fonte: Adaptado de Collar (1946)

Os fenômenos aeroelásticos podem ser divididos em duas classificações, de acordo com

os tipos de forças envolvidas. A estática, que ocorre devido às forças elásticas e aerodinâmicas, e engloba, por exemplo, os fenômenos de divergência e reversão de comando. E a dinâmica, que está relacionada com interação entre as forças inerciais, elásticas e aerodinâmicas, compreendendo fenômenos como flutter, buffeting e resposta dinâmica (COLLAR, 1946; FUNG, 1993; BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996; WRIGHT; COOPER, 2015).

O fenômeno da divergência ocorre em determinada velocidade, conhecida como velocidade de divergência, na qual forças aerodinâmicas superam a de restauração elástica causando a ruptura. A reversão de comando acontece a uma velocidade denominada velocidade de reversão de comando, na qual o comando realizado pelo piloto é anulado devido deformações elásticas da estrutura, podendo até ter o efeito oposto ao desejado em uma manobra (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996). Buffeting tem como causa a formação de esteiras de escoamento que surgem principalmente em asas e fuselagem, gerando vibração transiente nos componentes estruturais. Flutter é uma instabilidade dinâmica que pode ocorrer em um avião durante voo em determinada velocidade. Respostas dinâmicas tem origem devido ação de armamento embarcado (lançamento de míssil), aterrisagens, movimentos agressivos e rajadas de vento.

A resposta à rajada pode ter origem em condições climáticas adversas, que são causadoras de alguns acidentes envolvendo aeronaves, como ocorreu em maio de 2009 com uma aeronave Airbus A330-225, no trajeto Miami e São Paulo, que, durante o procedimento de descida, experimentou rajadas severas por aproximadamente trinta segundos que ocasionaram lesões em passageiros e tripulação (CENIPA, 2013a). Em setembro do ano de 2013, durante a fase de cruzeiro no atlântico do trajeto Madrid-São Paulo, o Airbus A330-203 foi atingido por rajada intensa, que em determinado momento causou variação na razão de subida da aeronave em $4601 \text{ ft}/\text{min}$ e, também, alterou o ângulo de ataque. O fenômeno teve uma duração de 1 minuto e 37 segundos, sendo intensa durante 15 segundos, tal que alguns passageiros e tripulantes tiveram lesões de leve a grave (CENIPA, 2013b).

Segundo Bisplinghoff, Ashley e Halfman (1996), a análise de resposta a rajada é um dos principais problemas nos projetos de veículos aéreos. Sabe-se que o avião deve ser submetido a estes esforços durante os voos, o que pode comprometer a integridade estrutural e a aeronavegabilidade. Assim, resposta à rajada é de grande importância, especialmente pelas questões de segurança para se avaliar a vida útil em fadiga (WRIGHT; COOPER, 2015). Neste sentido, algumas aeronaves modernas já contemplam sistemas projetados para promoção de alívio de cargas de rajada.

Os problemas associados aos fenômenos aeroelásticos, mais especificamente relacionadas à rajada, são objeto de vários trabalhos da literatura, tendo entre eles, [Karpel \(1981\)](#), [Aouf, Boulet e Botez \(2000\)](#), [Vartio et al. \(2005\)](#), [Pettit, Hajj e Beran \(2007\)](#), [Prime, Cazzolato e Doolan \(2008\)](#), [Possout-Vassal et al. \(2017\)](#). Estes trabalhos, em geral, concentram-se em entender os comportamentos de sistemas sujeitos à rajadas para auxiliar os processos de certificação de aeronaves pelos órgãos competentes, e até mesmo, visam desenvolver novos métodos e tecnologias para a supressão de maneira eficiente os efeitos indesejáveis causados pelas rajadas de vento.

[Karpel \(1982\)](#) desenvolveu técnicas de controle para a supressão do fenômeno de flutter e alívio de cargas de rajada em sistemas aeroelásticos. O autor utiliza aerodinâmica não estacionária de [Theodorsen \(1935\)](#) em uma seção típica com três graus de liberdade, para a qual as técnicas de controle utilizadas são desenvolvidas no domínio do tempo. Para a utilização destas técnicas no domínio temporal utiliza métodos de aproximação a fim de se obter as forças aerodinâmicas, o autor utiliza o método de Padé, Roger-Abel e apresenta uma nova estratégia para realizar a aproximação para o domínio do tempo, denominado *Minimum-State method*.

[Noback \(1986\)](#) apresenta uma comparação dos métodos de análise de cargas de resposta à rajada utilizados como requisitos para a certificação de grandes aeronaves de acordo com o FAR-25 ([FEDERAL AVIATION ADMINISTRATION, 2014](#)) e EASA CS-25 ([EASA, 2007](#)). Os tipos de rajada que compreendem a análise comparativa são a discreta $1 - \text{cosseno}$, e a contínua. De acordo com o autor, a rajada contínua tende a ser mais crítica para grandes aeronaves com razão de massa elevada ou frequência natural baixa. Neste trabalho constata-se que não há uma relação direta entre as rajadas do tipo discreta e contínua, são relatadas as fontes de discrepância entre os métodos, sendo a velocidade de rajada e o comprimento de rajada as principais.

[Marzocca, Librescu e Chiocchia \(2001\)](#) avaliam em seu trabalho a resposta de um aerofólio bidimensional considerando a aerodinâmica não estacionária de [Wagner \(1925\)](#) devido à cargas de rajada e carregamentos do tipo explosivos, como os efeitos gerados por aeronaves passando do regime subsônico para o supersônico, que alteram a distribuição de pressão no entorno da estrutura. Os autores utilizam perfis de rajada do tipo degrau, $1 - \text{cosseno}$, triangular e exponencial, incluindo o efeito de Küssner.

Alterações atmosféricas podem ser precursoras de rajadas, e por sua vez, podem levar equipamentos à falha, como exemplo o caso do HALE (*high-altitude long-endurance*) Helios. De acordo com [Noll et al. \(2004\)](#) o incidente ocorrido está relacionada à altas de-

formações resultante de uma grande alteração no diedro devido rajadas o que culminaram em uma falha estrutural e, conseqüentemente, na queda do protótipo. [Patil \(2007\)](#) descreve um método para obter a resposta à rajada, tanto no domínio da frequência quanto do tempo, considerando aeronaves altamente flexíveis e não linearidades no modelo. [Dill-saver, Cesnik e Kolmanovsky \(2011\)](#) apresentam o desenvolvimento de um sistema de alívio de cargas de rajada em aeronaves muito flexíveis utilizando o método LQG (*Linear Quadratic Gaussian*) para obter o controlador.

A utilização de transdutores piezoelétricos é uma alternativa para solução de problemas de alívio de carga de rajada ([VERSIANI, 2016](#)). Em seu trabalho, o autor utiliza atuadores e sensores, aplicados a um modelo aerodinâmico baseado em formulação quasi-estacionária. Os ganhos de controle para o alívio de rajada são considerados proporcionais às saídas e obtidos pelo método LQR (*Linear Quadratic Regulator*). Também, [Tang, Gavin e Dowell \(2004\)](#) desenvolvem e realizam simulações de um amortecedor eletromagnético controlável. Utilizam um modelo de seção típica com três graus de liberdade com a superfície de controle para fixar o amortecedor. Os resultados numéricos demonstram que o amortecedor eletromagnético pode ser utilizado para o alívio de carga de rajada.

De forma geral sistemas de controle podem ser utilizados para reduzir respostas à rajada e promover o alívio de cargas críticas, além de melhorar o conforto e funcionalidade da aeronave ([MOULIN; KARPEL, 2007](#)). Os autores utilizam leis de controle para o alívio de cargas de rajada em um modelo de aeronave avaliado em túnel de vento, e consideram três superfícies de controle para supressão da rajada. As análises são feitas através do software comercial ZAERO. Os controladores são projetados para rajadas discretas ajustadas a fim de se ter o maior momento de torção ([MOULIN; KARPEL, 2007](#)).

[Vartio et al. \(2005\)](#) apresentam resultados obtidos de um teste em túnel de vento do sistema de alívio de rajada em um modelo de asa da aeronave conceito. O objetivo central do estudo é encontrar um método para reduzir o peso estrutural da asa através do desenvolvimento de asa com rigidez mínima, de maneira que os requisitos de cargas devido à manobras e rajada sejam respeitados ([VARTIO et al., 2005](#)). O controlador utilizado é baseado no LQG (*Linear Quadratic Gaussian*).

A análise de resposta à rajada no domínio do tempo tem grande relevância ao se considerar casos que envolvem incertezas e não linearidades na estrutura, como é o caso estudado por [Matas et al. \(2019\)](#). A estrutura estudada pelo autor é uma semi-asa tridimensional sujeita à cargas aerodinâmicas não estacionárias e rajadas discretas. Para se

obter o sistema no domínio do tempo, utiliza o método de aproximação por funções racionais. A partir do sistema no domínio do tempo, analisa-se os efeitos da não linearidade e incertezas em cargas críticas obtidas na presença de rajadas, demonstrando as condições nas quais as cargas críticas são mais extremas.

Em particular para análises não estacionárias, as forças aerodinâmicas tipicamente são descritas no domínio da frequência reduzida, não sendo obtidas no tempo de maneira direta por uso de transformada inversa. No entanto, de acordo com [Karpel \(1982\)](#), [Bueno \(2014\)](#) as forças aerodinâmicas podem ser escritas no domínio do tempo através de aproximações por funções racionais. Alguns autores como, [Karpel \(1981\)](#), [Biskri et al. \(2006\)](#) e [Marqui et al. \(2017\)](#), ainda, propõem diferentes metodologias para realizar tais aproximações. Neste sentido, destacam-se com significativa importância as análises de rajada no domínio do tempo, principalmente ao se considerar não linearidades como as introduzidas por folgas, atuadores hidráulicos, amortecedores magnetoreológicos e, também, aerodinâmicas (como o efeito de onda de choque, por exemplo). Assim, é fundamental utilizar estas metodologias para se escrever os esforços aerodinâmicos neste domínio. No entanto, ainda existem desafios que precisam ser superados, pois parte destas formulações conhecidas na literatura apresentam limitações práticas para utilização em sistemas com múltiplos graus de liberdade. Para clareza de entendimento são apresentadas algumas: i) necessidade da definição do intervalo de interpolação para que esteja adequado com as condições de operação; ii) necessidade de se arbitrar o número de estados de atraso; iii) necessidade de se definir valores para parâmetros de atraso (ambos os casos nas aproximações por funções racionais).

Os primeiros avanços nos métodos de aproximação de forças aerodinâmicas não estacionárias aplicadas na aeroelasticidade são apresentados por [Jones \(1940\)](#) através de uma função racional no domínio de Laplace para aproximar forças não estacionárias. Seguindo uma linha cronológica, [Vepa \(1976\)](#) introduz uma função de transferência aproximada através dos polinômios de Padé. [Roger \(1977\)](#) apresenta um método de aproximação utilizando funções racionais e mínimos quadrados, [Abel \(1979\)](#) modifica a função de aproximação utilizada por [Roger \(1977\)](#) e detalha a formulação para se obter os coeficientes do polinômio aproximador. [Dunn \(1980\)](#) apresenta um método aperfeiçoado baseado nos mínimos quadrados e polinômios Padé para a aproximação da aerodinâmica não estacionária no domínio do tempo. [Dowell \(1980\)](#) desenvolve um método direto para converter a aerodinâmica no domínio da frequência para a aerodinâmica indicial. [Karpel \(1981\)](#), [Karpel \(1982\)](#) introduzem o *Minimum-State method* aplicado à supressão flutter e alívio de cargas de rajadas. [Dinu, Botez e Cotoi \(2005\)](#) apresentam um método para calcular cargas

aerodinâmicas aplicado em aeroservoelasticidade através dos polinômios de Chebyshev. [Biskri et al. \(2006\)](#) propõem o *Mixed-State method*, baseado no método dos mínimos quadrados e no *Minimum-State method*. E, recentemente, [Marqui et al. \(2017\)](#) apresenta um método para obter o modelo em espaço de estados de um sistema aeroelástico no domínio do tempo através de um método de interpolação utilizando polinômios de Laguerre modificados para representar quantidades complexas.

De acordo com [Bhatia \(2003\)](#) ocorreram na década de 70 importantes avanços na área de projeto de controle ativo aplicado à aeroservoelasticidade com o desenvolvimento do Boeing B-52, demonstrado através de [Sevart \(1975\)](#), [Roger \(1977\)](#), [Abel \(1979\)](#). [Sevart \(1975\)](#) apresenta um estudo para o desenvolvimento de um sistema ativo para supressão de flutter em testes em túnel de vento, [Abel \(1979\)](#) apresenta um método analítico para a predição do desempenho de um sistema ativo de supressão de flutter em um modelo de asa e [Roger \(1977\)](#) descreve um método analítico para a obtenção de um modelo matemático para o projeto de sistemas de controle a análise de desempenho em um avião. Os requisitos para a aplicação de algumas técnicas de controle moderno em sistemas aeroelástico envolvem a utilização das equações do movimento no domínio do tempo, conforme desenvolvido o projeto do Boeing B-52 para se obter as cargas aerodinâmicas não estacionárias através do método de aproximação por funções racionais utilizando o método dos Mínimos Quadrados, conhecido como método de Roger.

Diante do exposto, o presente trabalho compreende o estudo de resposta aeroelástica à rajada considerando a seção típica de três graus de liberdade, com aerodinâmica não-estacionária de [Theodorsen \(1935\)](#) escrita no domínio do tempo usando aproximação por funções racionais através do método dos mínimos quadrados ([ROGER, 1977](#); [ABEL, 1979](#)). Em particular, após uma detalhada revisão bibliográfica, este método é neste trabalho denominado "método de Roger-Abel" devido o entendimento da importância da contribuição de [Abel \(1979\)](#) para a formulação que se utiliza atualmente. No entanto, o método é comumente citado na literatura como "Método de Roger", ou simplesmente "método dos Mínimos Quadrados".

1.1 Processo de Certificação: Cargas de Rajada

O processo de desenvolvimento e produção de uma aeronave compreende diversas etapas, como a certificação, por agências controladoras, que inclui entre outras a análise de respostas devido rajadas. Um dos órgãos responsáveis pela regulamentação é a *Federal Aviation Administration* (FAA), tendo o documento 25.341-1, [Federal Aviation](#)

[Administration \(2014\)](#), tratando de cargas devido à turbulências e rajadas em aviões de transporte.

De acordo com o texto, as análises de resposta à rajada devem ser realizadas dentro de um envelope de desenvolvimento, que incluem a influência de parâmetros como massa, centro de gravidade, capacidade de carga, velocidade e altitude. Quanto aos modelos de rajada, o discreto é utilizado de forma a representar apenas um evento extremo de turbulência, enquanto que a contínua representa uma turbulência de longa duração. No caso da discreta, utilizada no presente trabalho, o gradiente é definido como a distância na qual a velocidade de rajada atinge seu valor máximo e é especificado em valores entre $10 m$ e $110 m$ ([FEDERAL AVIATION ADMINISTRATION, 2014](#)).

1.2 Objetivos do Trabalho

O principal objetivo deste trabalho é analisar no domínio do tempo a resposta aeroelástica devido à rajada discreta $1 - \cos$. Também, compreende desenvolver critérios quantitativos para avaliar aproximação por funções racionais para se escrever aerodinâmica não estacionária no domínio do tempo.

Tem-se, também, como objetivos secundários:

- Avaliar características fundamentais das respostas à rajada discreta $1 - \cos$;
- Discutir os efeitos dos parâmetro de atraso nas respostas de sistemas aeroelásticos;
- Discutir a quantidade de parâmetros de atraso para se obter uma aproximação adequada.

1.3 Contribuições Alcançadas

Algumas contribuições alcançadas neste trabalho são listadas a seguir:

- Discussão da resposta aeroelástica à rajada discreta $1 - \cos$ no domínio do tempo;
- Discussão sobre o estados de atraso no domínio do tempo e da frequência;
- Discussão acerca dos efeitos relacionados aos parâmetros de atraso na força aerodinâmica, assim como do significado físico;

- Proposta de critério para avaliar a qualidade da aproximação das forças aerodinâmicas obtidas através do método Roger-Abel.

1.4 Organização do Trabalho

A seguir apresenta-se uma sucinta descrição do conteúdo de cada capítulo deste documento.

Capítulo 1: apresenta o contexto no qual o trabalho está situado, os objetivos e contribuições alcançadas;

Capítulo 2: descreve a base matemática utilizada para se obter o modelo físico-matemático utilizado para realizar as simulações numéricas;

Capítulo 3: apresenta uma discussão acerca dos parâmetros de atraso quanto ao significado físico para o sistema aeroelástico no domínio do tempo, assim como uma proposta de um critério para a definição dos parâmetros de atraso;

Capítulo 4: apresenta os resultados da simulação do sistema aeroelástico sujeito à cargas de rajada;

Capítulo 5: apresenta as conclusões obtidas e sugestões para trabalhos futuros;

Anexo A: apresenta equações referentes à aerodinâmica não estacionária de [Theodorsen \(1935\)](#)

Anexo B: apresenta resultados adicionais para a aproximação das forças aerodinâmicas não estacionárias usando o método de Roger-Abel.

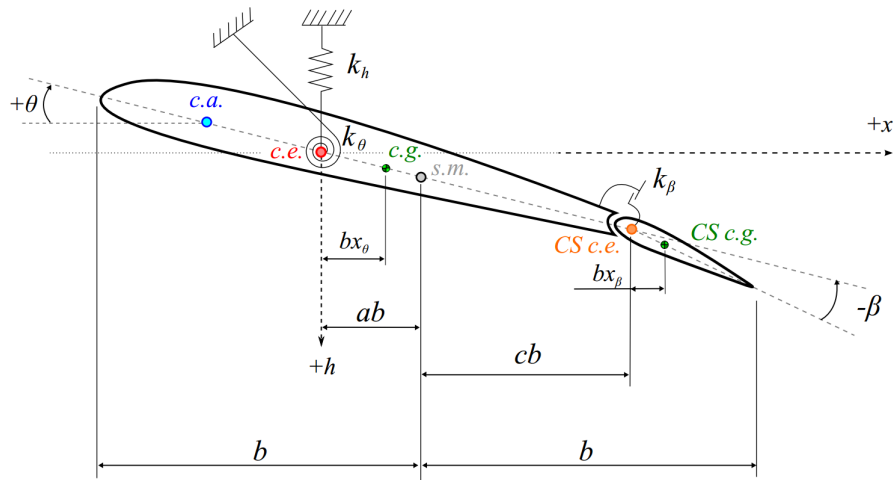
2 Metodologia

Neste capítulo é descrita a metodologia utilizada neste trabalho. Apresenta-se o modelo estrutural, sendo neste caso a seção típica que representa a seção transversal de asa com, dois e três graus de liberdade, a formulação das forças aerodinâmicas aplicadas, o método de aproximação para a obtenção do sistema aeroelástico no domínio do tempo, assim como sua representação em espaço de estados e as cargas devido às rajadas.

2.1 Sistema Aeroelástico Sujeito à Rajada

Um modelo aeroelástico consolidado na literatura para se estudar problemas aeroelásticos é o da seção típica, mostrado de forma ilustrativa na figura (3). Este modelo é descrito com três graus de liberdade, sendo um de translação e duas rotações. Na ilustração, define-se o centro aerodinâmico (c.a), o centro elástico (c.e), o centro de gravidade (c.g) e o meio da seção (s.m). Os termos k_h , k_θ e k_β estão associadas a cada uma das coordenadas independentes do sistema, representando as rigidezes estruturais. O comprimento da semi corda é definido por b , a é a localização do centro elástico com relação ao centro de gravidade, c é a localização da superfície de controle com relação ao centro da seção, x_θ é a distância do centro de gravidade com relação ao centro elástico e x_β é a distância do centro de gravidade da superfície de controle com relação ao centro elástico da mesma.

Figura 3 – Seção típica de três graus de liberdade



Fonte: Bueno (2014)

A equação que descreve este modelo de três graus de liberdade para o problema de rajada é a seguinte:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_a(\mathbf{u}(t), t) + \mathbf{F}_g(t) \quad (1)$$

sendo o vetor de deslocamento das coordenadas físicas dada pela equação (2), sendo $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ a primeira e segunda derivada temporal respectivamente, ou seja os vetores velocidade e aceleração das coordenadas físicas.

$$\mathbf{u}(t) = \left\{ h(t) \quad \theta(t) \quad \beta(t) \right\}^T \quad (2)$$

sendo $h(t)$ o movimento de translação (do inglês *plunge*), $\theta(t)$ a rotação do aerofólio em torno do centro elástico (do inglês *pitch*) e $\beta(t)$ a rotação da superfície de controle em torno de seu respectivo centro elástico, as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{B} e \mathbf{K} são correspondentes a massa, amortecimento e rigidez do sistema, respectivamente, as quais são também definidas neste capítulo, \mathbf{F}_a é o vetor de esforços aerodinâmicos não estacionários e \mathbf{F}_g o vetor de força devido à rajada, que são detalhados nas seções seguintes.

2.2 Equações do Movimento

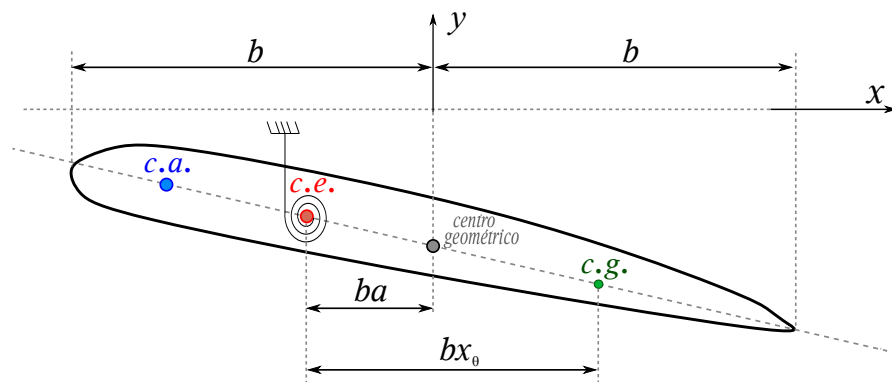
Nesta seção são apresentados os desenvolvimentos para se obter as equações do movimento para seções típicas de dois e três graus de liberdade através da mecânica lagran-

geana.

2.2.1 Seção Típica de 2 Graus de Liberdade

Para os vetores posição (r_{cg}) e velocidade (v_{cg}) do centro de gravidade da seção típica de dois graus de liberdade mostrada na figura (4), considera-se pequenos ângulos de rotação θ , descritos pelas equações (3) e (4), respectivamente.

Figura 4 – Seção típica com dois graus de liberdade



Fonte: Próprio Autor

$$\mathbf{r}_{cg} = \left\{ b x_{\theta} \cos(\theta) \quad -h - b x_{\theta} \sin(\theta) \quad 0 \right\}^T \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_{cg} = \left\{ -\dot{\theta} b x_{\theta} \sin(\theta) \quad -\dot{h} - \dot{\theta} b x_{\theta} \cos(\theta) \quad 0 \right\}^T \quad (4)$$

sendo $\sin(\cdot)$ a função seno e $\cos(\cdot)$ a função cosseno.

O desenvolvimento das equações é apresentado considerando a mecânica lagrangiana, portanto, é necessário calcular as energias cinética e potencial da seção típica. A energia cinética é calculada por:

$$T = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_{cg} \cdot \mathbf{v}_{cg}) + \frac{1}{2} I (\dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} m (\dot{h}^2 + 2\dot{h}\dot{\theta} b x_{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 b^2 x_{\theta}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (5)$$

são adotados pequenos ângulos de oscilações para θ , assim $\cos \theta \approx 1$ portanto a equação

(5) é reescrita por:

$$T = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}_{cg} \cdot \mathbf{v}_{cg}) + \frac{1}{2}I(\dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2}m(\dot{h}^2 + 2\dot{h}\dot{\theta}bx_\theta + \dot{\theta}^2b^2x_\theta^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (6)$$

onde $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \{0 \ 0 \ \dot{\theta}\}^T$ é a velocidade angular do aerofólio em torno do centro elástico, m a massa e I o momento de inércia do aerofólio. E a equação da energia potencial á dada por:

$$V_e = \frac{1}{2}k_h h^2 + \frac{1}{2}k_\theta \theta^2 \quad (7)$$

A lagrangiana é, então, calculada por:

$$\mathcal{L} = T - V_e = \frac{1}{2}(m\dot{h}^2 + 2m\dot{h}\dot{\theta}bx_\theta + m\dot{\theta}^2b^2x_\theta^2 + I\dot{\theta}^2 - k_h h^2 - k_\theta \theta^2) \quad (8)$$

As equações do movimento são calculadas por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} = m\ddot{h} + \ddot{\theta}(mbx_\theta) + k_h h = Q_h \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = (I + mb^2x_\theta^2)\ddot{\theta} + \dot{h}(mbx_\theta) + k_\theta \theta = Q_\theta \quad (10)$$

Organizando as equações (9) e (10), na forma matricial, tem-se para o caso da seção típica com dois graus de liberdade as matrizes de massa e rigidez dadas por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & S_\theta \\ S_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{K} = \text{diag}(k_h, k_\theta) \quad (12)$$

sendo o momento de inércia em torno do centro elástico $I_\theta = I + m(bx_\theta)^2$, $S_\theta = mbx_\theta$, $k_h = m\omega_h^2$, $k_\theta = I_\theta\omega_\theta^2$ onde ω_h e ω_θ são respectivamente as frequências naturais desacopladas do *plunge* e *pitch*. Sem perda de generalidade a matriz de amortecimento estrutural \mathbf{B} é considerada nula.

2.2.2 Seção Típica de 3 Graus de Liberdade

Para o modelo de três graus de liberdade os vetores posição e velocidade do centro de gravidade do aerofólio são representados respectivamente por:

$$\mathbf{r}_{cg} = \left\{ bx_\theta \cos(\theta) \quad -h - bx_\theta \sin(\theta) \quad 0 \right\}^T \quad (13)$$

$$\mathbf{v}_{cg} = \left\{ -\dot{\theta} b x_\theta \sin(\theta) \quad -\dot{h} - \dot{\theta} b x_\theta \cos(\theta) \quad 0 \right\}^T \quad (14)$$

e os vetores deslocamento e velocidade do centro de gravidade da superfície de controle da seção típica são calculados respectivamente por:

$$\mathbf{r}_{cgCS} = \left\{ bx_\beta \cos(\beta) \quad -bx_\beta \sin(\beta) \quad 0 \right\}^T \quad (15)$$

$$\mathbf{v}_{cgCS} = \left\{ \begin{array}{c} -\dot{h} \sin(\theta) - \dot{\theta} b x_\beta \sin(\beta) - \dot{\beta} b x_\beta \sin(\beta) \\ \dot{h} \cos(\theta) - \dot{\theta} (c - a) b - \dot{\theta} b x_\beta \sin(\beta) - \dot{\beta} b x_\beta \sin(\beta) \\ 0 \end{array} \right\} \quad (16)$$

os vetores que representam a rotação do aerofólio e da superfície de controle são dados pelas equações (17) e (18), respectivamente.

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \left\{ 0 \quad 0 \quad \dot{\theta} \right\}^T \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \left\{ 0 \quad 0 \quad \dot{\theta} + \dot{\beta} \right\}^T \quad (18)$$

Assim, a energia cinética da seção típica com três graus de liberdade é calculada pela equação (19).

$$T = \frac{1}{2} m_a (\mathbf{v}_{ceCS} \cdot \mathbf{v}_{ceCS}) + \frac{1}{2} m_{CS} (\mathbf{v}_{cgCS} \cdot \mathbf{v}_{cgCS}) + \frac{1}{2} I_a (\dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{1}{2} I_{CS} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2}\dot{h}^2 [m_a + m_{CS}] \\
& + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 [m_a b^2 x_\beta^2 + m_a b^2 (c - a)^2 + 2m_a b^2 x_\beta (c - a) + I_a + I_{CS} + m_a b^2 x_\theta^2] \\
& + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 [m_{CS} b^2 x_\beta^2 + I_{CS}] + \dot{\theta}\dot{\beta} [m_{CS} b^2 x_\beta^2 + m_{CS} b^2 x_\beta (c - a) + I_{CS}] \\
& + \dot{h}\dot{\theta} [m_{CS} b x_\beta + m_a b x_\theta + m_{CS} b (c - a)] + \dot{h}\dot{\beta} m_{CS} b x_\beta \quad (20)
\end{aligned}$$

sendo a massa da seção típica dada por $m = m_a + m_{CS}$, o momento de inércia em relação ao centro elástico $I_\theta = [m_a(x_\beta + c - a)^2 + I_a + I_{CS} + m_a b^2 x_\theta^2]$, $I_\beta = m_{CS} b^2 x_\beta^2 + I_{CS}$ o momento de inércia da superfície de controle em relação ao centro elástico, e os momentos estáticos de massa $S_\theta = m_{CS} b x_\beta + m_a b x_\theta + m_{CS} b (c - a)$ e $S_\beta = m_{CS} b x_\beta$. Conhecendo esses termos se pode reescrever a equação (20) na forma:

$$T = \frac{1}{2}\dot{h}^2 m + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 I_\theta + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 I_\beta + \dot{\theta}\dot{\beta} [I_\beta + S_\beta b (c - a)] + \dot{h}\dot{\theta} S_\theta + \dot{h}\dot{\beta} S_\beta \quad (21)$$

e a energia potencial é demonstrada pela equação (22).

$$V_e = \frac{1}{2}k_h h^2 + \frac{1}{2}k_\theta \theta^2 + \frac{1}{2}k_\beta \beta^2 \quad (22)$$

Então, a lagrangeana é:

$$\mathcal{L} = T - V_e = \frac{1}{2}\{\dot{h}^2 m + \dot{\theta}^2 I_\theta + \dot{\beta}^2 I_\beta + 2\dot{\theta}\dot{\beta} [I_\beta + S_\beta b (c - a)] + 2\dot{h}\dot{\theta} S_\theta + 2\dot{h}\dot{\beta} S_\beta\} \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} = m\ddot{h} + \ddot{\theta} S_\theta + \ddot{\beta} S_\beta + k_h h = Q_h \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = I_\theta \ddot{\theta} + \ddot{h} S_\theta + \ddot{\beta} [I_\beta + b S_\beta (c - a)] + k_\theta \theta = Q_\theta \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = I_\beta \ddot{\beta} + \ddot{h} S_\beta + \ddot{\theta} [I_\beta + b S_\beta (c - a)] + k_\beta \beta = Q_\beta \quad (26)$$

Reescrevendo as três equações acima de forma matricial, tem-se a equação (1) onde as matrizes de massa e rigidez são respectivamente:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & S_\theta & S_\beta \\ S_\theta & I_\theta & I_\beta + S_\beta b (c - a) \\ S_\beta & I_\beta + S_\beta b (c - a) & I_\beta \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{K} = \text{diag}(k_h, k_\theta, k_\beta) = \text{diag}(m\omega_h^2, I_\theta\omega_\theta^2, I_\beta\omega_\beta^2) \quad (28)$$

2.3 Alteração Dinâmica Devido ao Centro Elástico

O objetivo desta seção é avaliar o comportamento de propriedades dinâmicas, como as frequências naturais, de uma seção típica com dois graus de liberdade quanto a alterações de propriedades geométricas. Neste caso, assume-se variações nas posições do centro elástico (a) e, conseqüentemente, do centro de gravidade (x_θ) da seção típica ilustrada na figura (4). Utiliza-se uma seção típica com os dados de geometria e de massa dispostos na tabela (1).

Tabela 1 – Dados da seção típica com 2 graus de liberdade

semi corda	$b = 0,15 \text{ m}$
massa da seção típica	$m = 5 \text{ kg}$
frequência de <i>plunge</i>	$f_h = 3 \text{ Hz}$
frequência de <i>pitch</i>	$f_\theta = 4,5 \text{ Hz}$
localização do centro elástico*	$a = -0,4$
raio de giro em relação a a	$r = (0,25)^{1/2}$

* medido em relação ao centro geométrico

Fonte: Adaptado de [Bueno \(2014\)](#)

Os valores das distâncias do centro elástico não devem ser maiores que b e nem menores que $-b$. Assim, para que o centro de gravidade esteja contido no interior da seção típica, os valores de x_θ devem respeitar a relação abaixo:

$$(-1) \leq x_\theta - a \leq (1) \quad (29)$$

$$(a - 1) \leq x_\theta \leq (1 + a) \quad (30)$$

A análise da influência da geometria (posicionamento do centro elástico) nas propriedades dinâmicas é feita a partir de um problema de autovalor, conforme demonstrado na equação

(31).

$$\det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (31)$$

$$\lambda_1 = \omega_h^2 \quad (32)$$

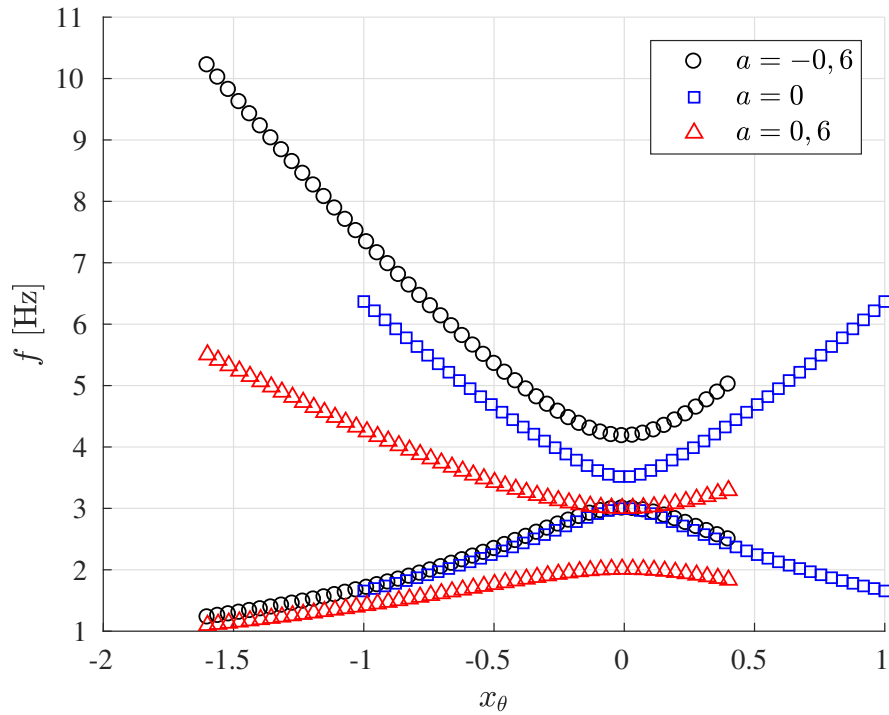
$$\lambda_2 = \omega_\theta^2 \quad (33)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e $\det(\cdot)$ é o determinante da matriz.

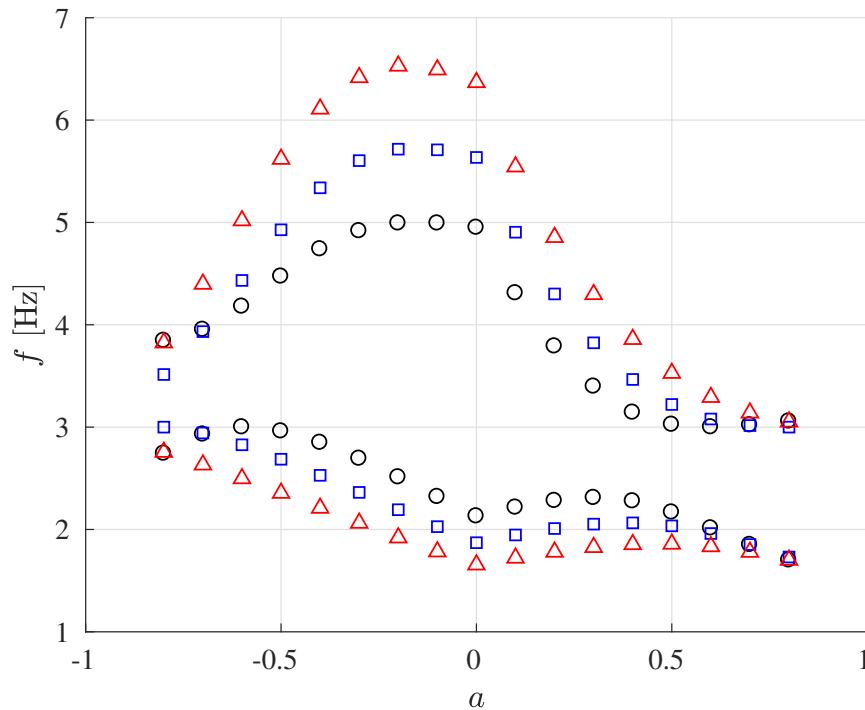
Na equação (11) é possível observar que a matriz de massa é diferente para cada combinação de valores de x_θ e a , sendo que o primeiro altera o momento estático de massa S_θ , e o segundo altera o momento de inércia da seção típica que também é função de x_θ , conforme mostra a equação (34).

$$I'_\theta = I_\theta + [(a' - a)b]^2 \quad (34)$$

sendo a' o novo valor para a e I'_θ o novo valor para o momento de inércia. A figura (5) mostra o comportamento das frequências naturais em relação as variações do centro de gravidade e centro elástico.

Figura 5 – Frequências elásticas de *plunge* e *pitch*

(a) Frequências pela posição do centro de gravidade para diversas posições do centro elástico



(b) Frequência com relação ao centro elástico

Fonte: Próprio Autor

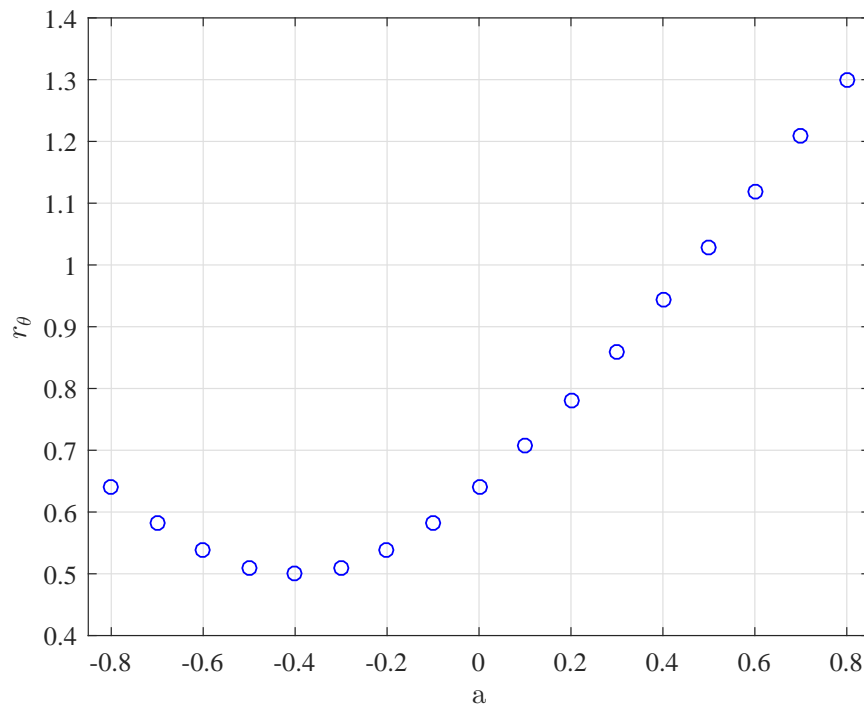
Analisando a figura é possível notar que as frequências de *plunge* e *pitch* apresentam

importante variação quanto as alterações de x_θ e a . Estas informações auxiliam no projeto de um aerofólio quanto ao posicionamento do centro elástico e também permitem estimar a localização do centro de gravidade da seção típica.

Seguindo a mesma ideia expressada pela equação (34), pode-se obter o raio de giração em relação à variação da posição do centro elástico através da Equação (35), conforme ilustrado pela figura (6). Tem-se que o raio de giração aumenta para valores diferentes de $a = -0,4$, alterando o momento de inércia e o momento estático de massa.

$$r'_\theta{}^2 = r_\theta^2 + \Delta a^2 \quad (35)$$

Figura 6 – Alteração do raio de giração da seção típica com relação à variação da posição do centro elástico



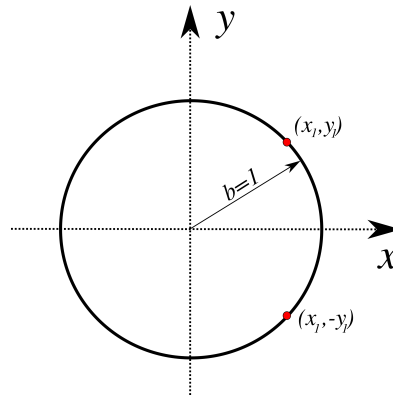
Fonte: Próprio Autor

2.4 Aerodinâmica Não-Estacionária de Theodorsen

Os esforços aerodinâmicos aplicados no sistema aeroelástico são apresentados por [Theodorsen \(1935\)](#). O desenvolvimento realizado é baseado na teoria de escoamento potencial e nas condições de Kutta ([THEODORSEN, 1935](#)). A abordagem proposta através do escoamento potencial, divide as forças aerodinâmicas em forças não circulatorias e

circulatórias, relacionadas com a descontinuidade formada atrás do aerofólio, conhecida como a esteira. De acordo com [Silva \(1994\)](#), devido à típica natureza senoidal do movimento, ocorre variação na sustentação (circulação) induzindo uma esteira de vórtices com intensidade oscilante, que modifica a circulação no aerofólio. Essa circulação poderá ser somada ou subtraída à circulação do aerofólio, resultando na alteração de fase da força resultante (atraso ou adiantamento). [Theodorsen \(1935\)](#) inicialmente utiliza um círculo de raio unitário para representar uma seção típica de aerofólio, conforme mostra a figura (7).

Figura 7 – Representação do aerofólio através do círculo



Fonte: Adaptado de [Theodorsen \(1935\)](#)

[Theodorsen \(1935\)](#) posiciona uma fonte dupla $2\epsilon_\varphi$ no ponto (x_1, y_1) do círculo e $(x_1, -y_1)$ um sumidouro $-2\epsilon_\varphi$, fornecendo um potencial em torno do círculo dado por:

$$\varphi = \frac{\epsilon_\varphi}{2\pi} \ln \left[\frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{(x - x_1)^2 + (y + y_1)^2} \right] \quad (36)$$

escrevendo $y = \sqrt{1 - x^2}$ o potencial da equação (36) pode ser reescrito apenas em função de x . O potencial da superfície de controle do aerofólio (Fig. 3), rotacionada no sentido horário de β , onde $\epsilon_\varphi = -V\beta b$ é dado por:

$$\varphi_\beta = \frac{V\beta b}{\pi} \left[\sqrt{1 - x^2} \cos^{-1}(c) - (x - c) \ln(N) \right] \quad (37)$$

No caso de uma velocidade angular da superfície de controle $\dot{\beta}$, sendo $\epsilon_\varphi = -(x_1 - c)\dot{\beta}b^2$, então, o potencial é:

$$\varphi_\beta = \frac{b^2\dot{\beta}}{\pi} \left[\sqrt{1 - c^2}\sqrt{1 - x^2} + \cos^{-1}(c)(x - 2c)\sqrt{1 - x^2} - (x - c)^2 \ln(N) \right] \quad (38)$$

O potencial do ângulo de ataque θ da seção típica é encontrado fazendo $c = -1$ na equação (37), obtendo-se então:

$$\varphi_\theta = V\theta b\sqrt{1-x^2} \quad (39)$$

para a velocidade de translação \dot{h} o potencial é dado por:

$$\varphi_{\dot{h}} = \dot{h}b\sqrt{1-x^2} \quad (40)$$

Finalmente, o potencial para a velocidade $\dot{\theta}$ da seção típica, é considerado o efeito equivalente à rotação no bordo de ataque do aerofólio $c = -1$, somado a um movimento vertical $-\dot{\theta}(1+a)b$, é determinado por:

$$\varphi_{\dot{\theta}} = \frac{\dot{\theta}b^2}{2\pi}\pi(x+2)\sqrt{1-x^2} - \dot{\theta}(1+a)b^2\sqrt{1-x^2} = \dot{\theta}b^2\left(\frac{1}{2x-a}\right)\sqrt{1-x^2} \quad (41)$$

A equação (42) mostra a expressão de N utilizada nas equações acima, sendo sua definição apresentada por [Theodorsen \(1935\)](#) através de integrais ([THEODORSEN, 1935](#)).

$$N = \frac{1 - cx - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2}}{x-c} \quad (42)$$

Aplicando o teorema estendido de Bernoulli, de acordo com [Theodorsen \(1935\)](#), para o escoamento não estacionário, tem-se a pressão local dada por:

$$p_h = -\rho\left(V\frac{w^2}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \quad (43)$$

onde w é a velocidade e φ é a velocidade potencial no ponto. Substituindo $w = V + \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, obtém-se a diferença de pressão entre o extradorso e intradorso dado por:

$$p = -2\rho\left(V\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \quad (44)$$

Assim, as forças e momentos não circulatorios são obtidos a partir de:

$$F_h^{nc} = -2\rho b \int_{-1}^1 \dot{\varphi} dx \quad (45)$$

$$M_\theta^{nc} = -2\rho b^2 \int_{-1}^1 \dot{\varphi}(x-c) dx + 2\rho V b \int_{-1}^1 \varphi dx - 2\rho b^2 \int_{-1}^1 \dot{\varphi}(c-a) dx \quad (46)$$

$$M_{\beta}^{nc} = -b^2 \int_c^1 \dot{\varphi}(x-c) dx + 2\rho V b \int_c^1 \varphi dx \quad (47)$$

Resolvendo as integrais das equações (45) a (47) e utilizando as constantes de [Theodorsen \(1935\)](#), tem-se:

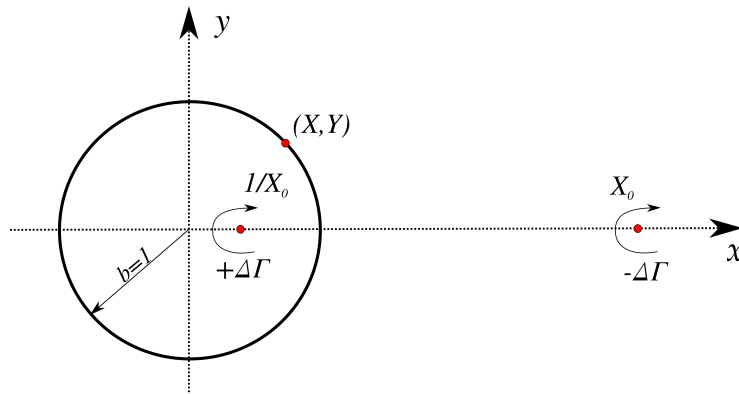
$$F_h^{nc} = -\rho b^2 \left[V\pi\dot{\theta} + \pi\dot{h} - b\pi a\ddot{\theta} - VT_4\dot{\beta} + bT_1\ddot{\beta} \right] \quad (48)$$

$$M_{\theta}^{nc} = -\rho b^2 \left[T_4 V^2 \theta (2T_9 + T_1) bV\dot{\theta} + 2T_{13} b^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{\pi} T_5 V^2 \beta \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\pi} T_7 - \frac{1}{\rho i} T_2 \right) bV\dot{\beta} - \frac{1}{\pi} b^2 T_3 \ddot{\beta} + T_4 V \dot{h} - T_1 b \ddot{h} \right] \quad (49)$$

$$M_{\beta}^{nc} = -\rho b^2 \left[-V^2 \theta + \pi \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) b^2 \ddot{\theta} V T_4 \beta + \{T_1 - T_5 - (c-a)T_4\} b \dot{\beta} V \right. \\ \left. + \{-T_7 - (c-a)T_{11}\} b \ddot{\beta} - ba\pi \ddot{h} - \pi V \dot{h} \right] \quad (50)$$

Assim, é necessário obter forças e momentos circulatorios através da velocidade potencial do escoamento ao redor do círculo resultante dos elementos de vórtice no aerofólio e na esteira do bordo de fuga ao infinito ([THEODORSEN, 1935](#)), conforme ilustra a figura (8).

Figura 8 – Elementos de vórtice sobre o aerofólio e bordo de fuga ao infinito, sendo $\Delta\Gamma$ o elemento de vórtice



Fonte: Adaptado de [Theodorsen \(1935\)](#)

As forças e momentos circulatorios para a seção típica com três graus de liberdade são definidos pelas equações (51) a (53), e podem ser encontrados em ([THEODORSEN,](#)

1935).

$$F_h^{circ} = -\rho V b \int_1^\infty \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} U dx_0 \quad (51)$$

$$M_\theta^{circ} = -\rho V b^2 \int_1^\infty \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}} - \left(a + \frac{1}{2} \frac{x_0}{\sqrt{x_0 - 1}} \right) \right\} U dx_0 \quad (52)$$

$$M_\beta^{circ} = -\frac{\rho V b^2}{\pi} \left[\left\{ \sqrt{1 - c^2} \left(1 + \frac{c}{2} \right) \right\} \int_1^\infty \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2}} U dx_0 + \left(\cos^{-1}(c) - c\sqrt{1 - c^2} \right) \frac{1}{2} \int_1^\infty \sqrt{\frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}} U dx_0 \right] \quad (53)$$

onde U é considerada estacionária com relação aos elementos do fluido,

$$U = f(Vt - x_0) \quad (54)$$

Assim, U é uma função da distância do ponto do primeiro elemento de vórtice. Para se obter a solução das expressões circulatorias, é necessário então obter a intensidade de U . De acordo com Theodorsen (1935), a magnitude da circulação é determinada através da consideração da condição de Kutta, que requer velocidade finita no bordo de fuga ou $x = 1$.

$$\frac{\partial}{\partial x} (\varphi_\Gamma + \varphi_\theta + \varphi_{\dot{h}} + \varphi_{\dot{\theta}} + \varphi_\beta + \varphi_{\dot{\beta}}) \equiv \text{valor finito} \quad (55)$$

considerando cada potencial de velocidade, obtém-se a relação:

$$\frac{1}{2\pi} \int_1^\infty \sqrt{\frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}} U dx_0 = V\theta + \dot{h} + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} + \frac{T_{10}}{\pi} V\beta + b \frac{T_{11}}{2\pi} \dot{\beta} = Q_\varphi \quad (56)$$

e, também, definindo a função de Theodorsen C por:

$$C = \frac{\int_1^\infty \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} U dx_0}{\int_1^\infty \sqrt{\frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}} U dx_0} \quad (57)$$

Assim, é possível reescrever as equações de força e momentos circulatorios em função das equações (57) e (56):

$$F_h^{circ} = -2\rho V b \pi C Q_\varphi \quad (58)$$

$$M_{\theta}^{circ} = -2\pi\rho V b^2 \left[\left(a + \frac{1}{2} \right) C - \frac{1}{2} \right] Q_{\varphi} \quad (59)$$

$$M_{\beta}^{circ} = -\rho V b^2 (T_{12}C - T_4) Q_{\varphi} \quad (60)$$

[Theodorsen \(1935\)](#) propôs a solução para a equação (57) através das funções de Bessel introduzindo o parâmetro adimensional k (frequência reduzida) conforme a equação abaixo:

$$C(k) = \frac{-J_1 + iY_1}{-(J_1 + Y_0) + i(Y_1 - J_0)} \quad (61)$$

A partir dos esforços não circulatorios e circulatorios, [Theodorsen \(1935\)](#) obteve o sistema aeroelástico, onde as cargas aerodinâmicas são definidas pela equação (62).

$$\mathbf{F}_a = q\mathbf{Q}(s')\mathbf{u}(s') \quad (62)$$

onde $q = \frac{1}{2}\rho V^2$ é a pressão dinâmica.

Escrevendo de forma matricial conforme [Karpel \(1982\)](#), tem-se que a matriz de coeficientes aerodinâmicos é:

$$\mathbf{Q}(s') = 2b^2 [\mathbf{M}_{nc}(s')^2 + (\mathbf{B}_{nc} + C(s')\mathbf{R}_1\mathbf{S}_2) s' + \mathbf{K}_{nc} + C(s')\mathbf{R}_1\mathbf{S}_1] \quad (63)$$

onde os termos de massa, amortecimento e rigidez não circulatorio são respectivamente:

$$\mathbf{M}_{nc} = \begin{bmatrix} -\pi & \pi a & T_1 \\ \pi a & -\pi(a^2 + 1/8) & -2T_{13} \\ T_1 & -2T_{13} & T_3/\pi \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\mathbf{B}_{nc} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi a & T_4 \\ 0 & \pi(a - 1/2) & -T_{16} \\ 0 & -T_{17} & -T_{19}/\pi \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\mathbf{K}_{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_{15} \\ 0 & 0 & -T_{18}\pi \end{bmatrix} \quad (66)$$

e os termos relacionados aos componentes circulatorios

$$\mathbf{R}_1 = \left[-2\pi \quad 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right) \quad -T_{12} \right]^T \quad (67)$$

$$\mathbf{S}_1 = \left[0 \quad 1 \quad T_{10}/\pi \right] \quad (68)$$

$$\mathbf{S}_2 = \left[1 \quad 2 \left(a - \frac{1}{2} \right) \quad T_{11}/\pi \right] \quad (69)$$

A variável s' na equação (62) é a variável de Laplace modificada $s' = ik$, sendo k a frequência reduzida definida por:

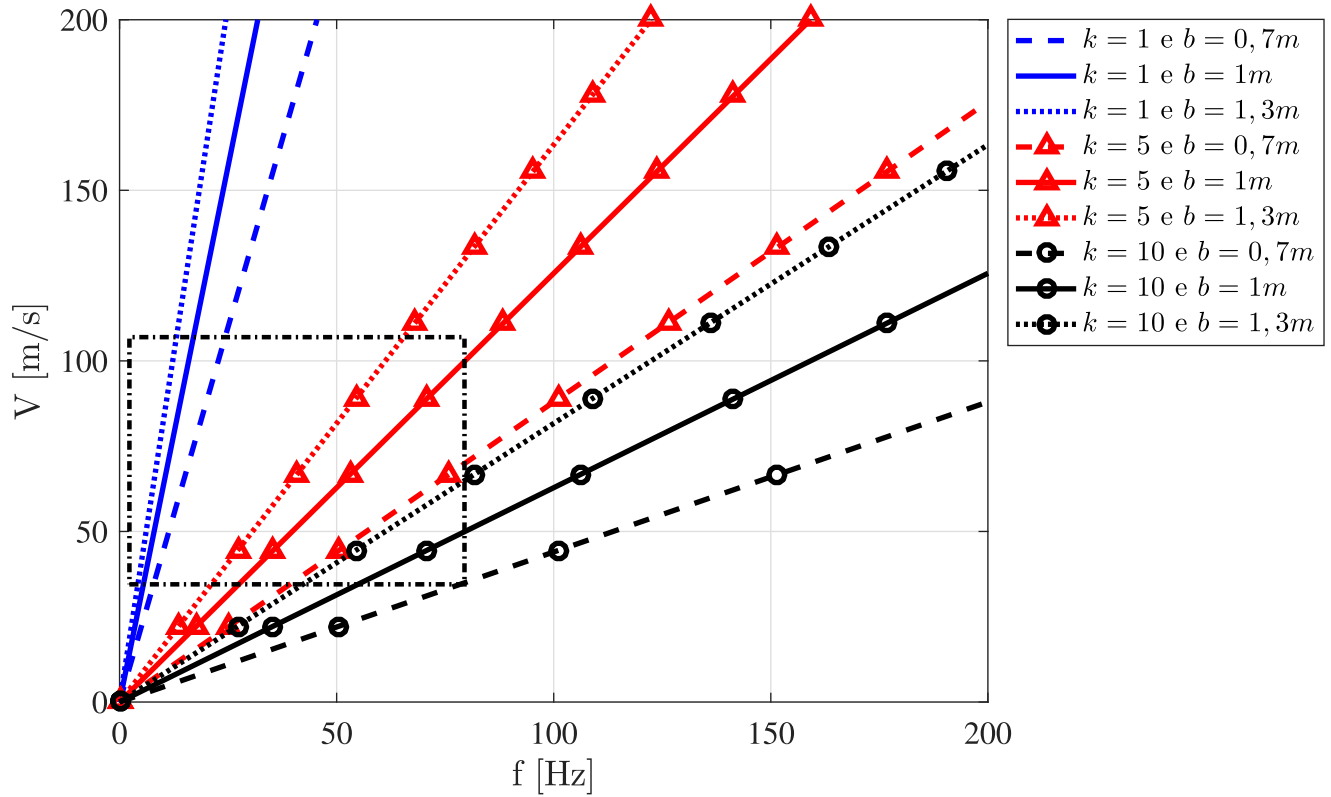
$$k = \frac{\omega b}{V} \quad (70)$$

que pode ser entendida como o número de oscilações realizado pelo sistema aeroelástico durante o tempo necessário para que o fluxo de ar atravesse uma semi corda do aerofólio multiplicado por 2π (WRIGHT; COOPER, 2015). Similarmente o tempo adimensional (ou tempo reduzido), equação (71) é interpretado como a quantidade de semi cordas percorrida pelo aerofólio (WRIGHT; COOPER, 2015).

$$t_r = \frac{Vt}{b} \quad (71)$$

Para se obter o envelope de operação adequado em termos da frequência reduzida tem-se a figura (9) que mostra os valores associados à velocidade para diferentes frequências reduzidas e semi-cordas, calculada através da equação $\omega = \frac{k}{b} V$. Considerando arbitrariamente, para ilustrar, um envelope de velocidade voo entre $V = 30$ e 110 m/s , as frequências significantes para o sistema aeroelástico estão entre $f = 1$ e 75 Hz e um $b = 0,7 \text{ m}$, tem-se o envelope representado pelo retângulo na figura a seguir. Para este caso as frequências reduzidas associadas tem valores mínimo $k = 0,04$ e máximo $k = 11$. Assim, definindo os envelopes de velocidades e frequências obtém-se as frequências reduzidas relacionadas com o envelope de operação desejado.

Figura 9 – Retas mostrando como os valores de frequência e velocidade variam em relação à frequência reduzida para determinada semi-corda



Fonte: Próprio Autor

2.5 Força Devido à Rajada

Conhecendo as forças aerodinâmicas é necessário introduzir as forças relacionadas à rajada vertical, F_g , a fim de se obter as respostas aeroelásticas resolvendo a equação (1).

2.5.1 Rajada no Domínio do Tempo

Considerando o tempo adimensional t_r descrito em função do tempo e da semi corda do aerofólio, conforme a equação (71). Também, utilizando o conceito da integral de Duhamel, ou integral de convolução, pode-se escrever a equação de sustentação quando há a penetração da velocidade de rajada equação (72) em função do tempo adimensional t_r da mesma forma como feito por (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996; MARZOCCA; LIBRESCU; CHIOCCHIA, 2001; WRIGHT; COOPER, 2015).

$$F_g(t_r) = 2\pi\rho Vb \int_0^{t_r} w_g(t_r) \frac{\partial\psi(t_r - \tau)}{\partial t_r} d\tau \quad (72)$$

onde $\psi(t_r)$ é uma função responsável por alterar o perfil da força de sustentação, como por exemplo a função de Küssner (KÜSSNER; SCHWARZ, 1940), que descreve o crescimento da sustentação que atua na seção típica durante a penetração da rajada (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996). Para o presente caso não se utiliza qualquer função, assim, a força devido à rajada vertical é calculado através da equação (73).

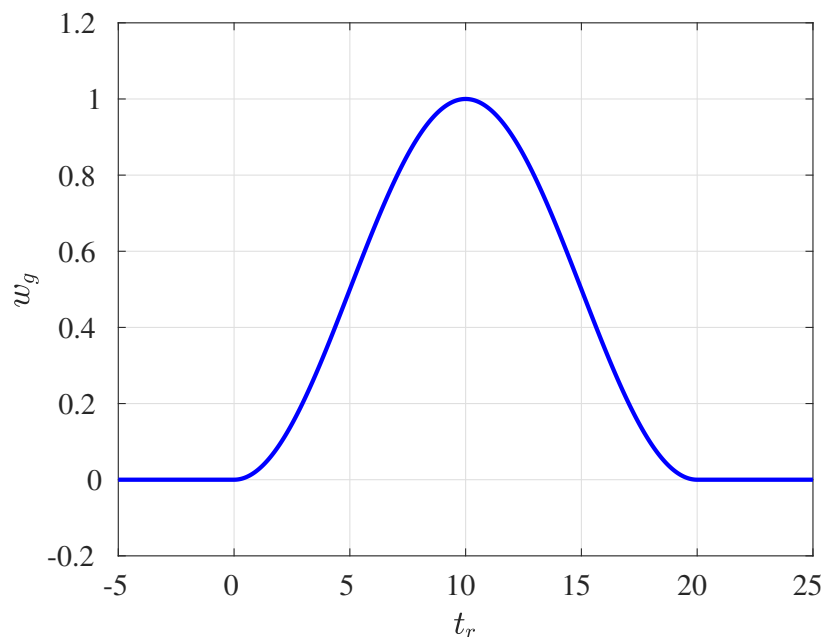
$$F_g(t_r) = 2\pi\rho V b w_g(t_r) \quad (73)$$

Alguns perfis de velocidade de rajada, $w_g(t_r)$, que podem ser encontradas com facilidade na literatura são a *sharp-edged*, triangular, gradativo e $1 - \text{cosseno}$ que também é única utilizada como requisito no processo de certificação de uma aeronave como demonstra [Federal Aviation Administration \(2014\)](#), [EASA \(2007\)](#). A rajada do tipo $1 - \text{cosseno}$, é definida pela equação (74) e representada na figura (10).

$$w_g(t) = \begin{cases} \frac{w_0}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi V t}{H}\right) \right] & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{2H}{V} \\ 0 & \text{para } t > \frac{2H}{V} \end{cases} \quad (74)$$

sendo w_0 a velocidade máxima da rajada e H o gradiente de rajada (distância entre o início e momento em que a rajada tem o valor máximo). Para o caso exemplificado na figura w_0 e V possuem valor unitário e $H = 10 \text{ m}$.

Figura 10 – Velocidade de rajada do tipo 1-cosseno



Fonte: Próprio Autor

2.6 Aproximação de Forças Aerodinâmicas por Funções Racionais

Para se obter a resposta à rajada no domínio do tempo é necessário escrever a equação do movimento na forma de espaço de estados. Porém, as forças aerodinâmicas não podem ser obtidas diretamente realizando uma transformada inversa. Para isso deve-se utilizar métodos de aproximação, pois as forças aerodinâmicas são determinadas para valores discretos da frequência reduzida (BUENO, 2014). Para o presente trabalho utiliza-se o método dos mínimos quadrados desenvolvido por Roger (1977), Abel (1979), mencionado neste texto como método de Roger-Abel, conforme definido nas seções anteriores.

2.6.1 Método de Roger-Abel

O método de Roger-Abel, também conhecido como aproximação de Roger, é um exemplo da utilização de funções racionais para realizar aproximações das forças aerodinâmicas descritas no domínio da frequência, proposto por Roger (1977), baseado no método dos mínimos quadrados. No entanto, o trabalho de Abel (1979) traz importante contribuição à formulação e estratégia de utilização. Assim, neste texto o método é referenciado como método de Roger-Abel, sendo a função de aproximação dada pela equação (75). Para clareza de comparação, a equação (76) mostra a expressão original de Roger (1977), sendo possível observar que o autor não utiliza os termos proporcionais à s e s^2 .

$$\mathbf{Q}_{app}(s) = \mathbf{Q}_0 + \left(\frac{b}{V}\right) \mathbf{Q}_1 s + \left(\frac{b}{V}\right)^2 \mathbf{Q}_2 s^2 + \sum_{j=1}^{n_{lag}} \mathbf{Q}_{(j+2)} \left(\frac{s}{s + \frac{V}{b} \gamma_j}\right) \quad (75)$$

$$\mathbf{Q}_{app}(s) = \mathbf{Q}_0 + \sum_{j=1}^{n_{lag}} \mathbf{Q}_{(j)} \left(\frac{s}{s + \frac{V}{b} \gamma_j}\right) \quad (76)$$

onde $s = i\omega$ é a variável de Laplace, ω a frequência, n_{lag} o número de termos de atraso e γ_j o j -ésimo parâmetro de atraso ($j = 1, 2, \dots, n_{lag}$). O domínio da frequência das forças aerodinâmicas não estacionárias de acordo com a equação (62) é $s' = ik$, variável de Laplace modificada ou adimensional $s' = ik = sb/V$. Assim reescrevendo a equação (75) em termos de s' tem-se:

$$\mathbf{Q}(s') \approx \mathbf{Q}_{app}(s') = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 s' + \mathbf{Q}_2 s'^2 + \sum_{j=1}^{n_{lag}} \mathbf{Q}_{(j+2)} \left(\frac{s'}{s' + \gamma_j}\right) \quad (77)$$

Reescrevendo a equação (77) na forma escalar o método do mínimos quadrados pode

ser definido para cada elemento da matriz de coeficientes aerodinâmicos não estacionários $\mathbf{Q}(k)$, sendo $Q^{(m,n)}$ onde $m, n = 1, 2, 3$, ou seja,

$$Q_{app}^{(m,n)}(s') = Q_0^{(m,n)} + Q_1^{(m,n)}s' + Q_2^{(m,n)}s'^2 + \sum_{j=1}^{n_{lag}} Q_{(j+2)}^{(m,n)} \left(\frac{s'}{s' + \gamma_j} \right) \quad (78)$$

Substituindo a variável de Laplace modificada $s' = ik$ e multiplicando e dividindo os termos de atraso (termos da somatória) pelo conjugado do denominador, na equação (78), tem-se:

$$Q_{app}^{(m,n)}(k) = Q_0^{(m,n)} + ikQ_1^{(m,n)} - k^2Q_2^{(m,n)} + \sum_{j=1}^{n_{lag}} \frac{ikQ_{(j+2)}^{(m,n)}(-ik + \gamma_j)}{(ik + \gamma_j)(-ik + \gamma_j)} \quad (79)$$

rearranjando tal equação

$$Q_{app}^{(m,n)}(k) = Q_0^{(m,n)} + ikQ_1^{(m,n)} - k^2Q_2^{(m,n)} + \sum_{j=1}^{n_{lag}} \frac{k^2Q_{(j+2)}^{(m,n)} + ik\gamma_jQ_{(j+2)}^{(m,n)}}{k^2 + \gamma_j^2} \quad (80)$$

Pode-se, então, separar as partes real e imaginária da equação (80) em respectivamente:

$$Q_{app}^{R,(m,n)}(k) = Q_0^{(m,n)} - k^2Q_2^{(m,n)} + \sum_{j=1}^{n_{lag}} \frac{k^2Q_{(j+2)}^{(m,n)}}{k^2 + \gamma_j^2} \quad (81)$$

$$Q_{app}^{I,(m,n)}(k) = kQ_1^{(m,n)} + \sum_{j=1}^{n_{lag}} \frac{\gamma_j k Q_{(j+2)}^{(m,n)}}{k^2 + \gamma_j^2} \quad (82)$$

Para cada i -ésimo valor de frequência reduzida no intervalo em análise, as funções de erro, tanto da parte real quanto imaginária, são determinadas respectivamente por:

$$E_i^{R,(m,n)} = Q_i^{R,(m,n)} - \mathbf{B}_{Q_i}^R \mathbf{C}_{Q^{(m,n)}} \quad (83)$$

$$E_i^{I,(m,n)} = Q_i^{I,(m,n)} - \mathbf{B}_{Q_i}^I \mathbf{C}_{Q^{(m,n)}} \quad (84)$$

onde

$$\mathbf{B}_{Q_i}^R = \left[1 \quad 0 \quad -k_i^2 \quad \dots \quad \frac{k_i^2}{k_i^2 + \gamma_j^2} \right] \quad \mathbf{B}_{Q_i}^I = \left[0 \quad k_i \quad 0 \quad \dots \quad \frac{\gamma_j k_i}{k_i^2 + \gamma_j^2} \right] \quad (85)$$

$$\mathbf{C}_{Q^{(m,n)}} = \left\{ Q_0^{(m,n)} \quad Q_1^{(m,n)} \quad Q_2^{(m,n)} \quad \dots \quad Q_{n_{lag}+2}^{(m,n)} \right\}^T \quad (86)$$

e cada i se refere a uma frequência reduzida na qual $Q^{(m,n)}$ é calculada. Definindo a função de erro complexa como, $E_i^{(m,n),C} = E_i^{(m,n),R} + jE_i^{(m,n),I}$ e seu conjugado $E_i^{(m,n),C*}$, o método do Mínimos Quadrados ajusta as curvas nos N_k pontos, para cada $Q^{(m,n)}$ definindo:

$$\frac{\partial}{\partial c} \sum_{i=1}^{N_k} E_i^{C,(m,n)} E_i^{C*,(m,n)} = 0 \quad (87)$$

Realizando a diferenciação acima, tem-se

$$\sum_{i=1}^{N_k} \left[(Q_i^{R,(m,n)} + \mathbf{B}_{Q_i}^R \mathbf{C}_{Q^{(m,n)}}) \mathbf{B}_{Q_i}^R + (Q_i^{I,(m,n)} + \mathbf{B}_{Q_i}^I \mathbf{C}_{Q^{(m,n)}}) \mathbf{B}_{Q_i}^I \right] = 0 \quad (88)$$

e os coeficientes do ajuste de curva são obtido por:

$$\mathbf{C}_{Q^{(m,n)}} = - \left[\sum_{i=1}^{N_k} (\mathbf{B}_{Q_i}^{R,T} \mathbf{B}_{Q_i}^R + \mathbf{B}_{Q_i}^{I,T} \mathbf{B}_{Q_i}^I) \right]^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} (Q_i^{R,(m,n)} \mathbf{B}_{Q_i}^{R,T} + Q_i^{I,(m,n)} \mathbf{B}_{Q_i}^{I,T}) \quad (89)$$

Assim, os coeficientes $Q_0, Q_1, Q_2, Q_{(j+2)}$ são obtidos através da equação (89) e a função de aproximação (Equação 75) é totalmente definida.

Os valores de parâmetros dos atraso, γ_j , de acordo com [Roger \(1977\)](#), [Abel \(1979\)](#), [Battina e Yang \(1984\)](#), [Mattaboni, Quaranta e Mantegazza \(2009\)](#), devem ser escolhidos pelo usuário valores dentro do intervalo da interpolação definido pelas frequências reduzidas consideradas.

As forças aerodinâmicas aproximadas no domínio de Laplace são reescritas conforme a equação (90).

$$\mathbf{F}_a(s) = q \left[\mathbf{Q}_0 + \left(\frac{b}{V} \right) \mathbf{Q}_1 s + \left(\frac{b}{V} \right)^2 \mathbf{Q}_2 s^2 + \sum_{j=1}^{n_{lag}} \mathbf{Q}_{(j+2)} \left(\frac{s}{s + \frac{V}{b} \gamma_j} \right) \right] \mathbf{u}(s) \quad (90)$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa na equação acima, a força aproximada no domínio do tempo é determinada por:

$$\mathbf{F}_a(t) = q \left[\mathbf{Q}_0 \mathbf{u}(t) + \left(\frac{b}{V} \right) \mathbf{Q}_1 \dot{\mathbf{u}}(t) + \left(\frac{b}{V} \right)^2 \mathbf{Q}_2 \ddot{\mathbf{u}}(t) + \sum_{j=1}^{n_{lag}} \mathbf{Q}_{(j+2)} \mathbf{u}_{aj}(t) \right] \quad (91)$$

Para cada estado de atraso da aproximação, existe um vetor de estado aerodinâmico aumentado associado $\mathbf{u}_{aj}(t)$, o qual contém ν estados aumentados, onde cada j -ésimo estado $u_{a(\eta,j)}$ está relacionado a cada um dos η -ésimos estados aeroelásticos pela equação

(92).

$$u_{a(\eta,j)} = \frac{s'}{s' + \gamma_j} u_\eta(s') = \frac{s}{s + \frac{V}{b} \gamma_j} u_\eta(s) \quad (92)$$

Considerando o produto de convolução aplicado na equação abaixo

$$\mathcal{L}^{-1}\{u_{a(\eta,j)}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{[s u_\eta(s)] \frac{1}{s + \frac{V}{b} \gamma_j}\right\} \quad (93)$$

é possível escrever a equação (94) que deve satisfazer o sistemas de equações na representação em espaço de estados.

$$\dot{\mathbf{u}}_{aj}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t) - \frac{V}{b} \gamma_j \mathbf{u}_{aj}(t) \quad (94)$$

onde $j = 1, 2, \dots, n_{lag}$.

Os parâmetros de atraso utilizados no presente trabalho são obtidos através da equação (95) desenvolvida pela empresa ZonaTech (ZONA, 2011), a qual torna a seleção dos valores destes parâmetros dependente da quantidade escolhida pelo analista, além da frequência reduzida máxima.

$$\gamma_j = 1,7 k_{max} \left(\frac{j}{n_{lag} + 1} \right)^2 \quad j = 1, 2, \dots, n_{lag} \quad (95)$$

2.7 Representação em Espaço de Estados

Considerando os resultados da seção 2.6 (aproximação das forças aerodinâmicas por funções racionais) a equação do movimento é dada por:

$$\left(\mathbf{M} - q \frac{b^2}{V^2} \mathbf{Q}_2 \right) \ddot{\mathbf{u}}(t) + \left(\mathbf{B} - q \frac{b}{V} \mathbf{Q}_1 \right) \dot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{K} - q \mathbf{Q}_0) \mathbf{u}(t) - q \sum_{j=1}^{n_{lag}} \mathbf{Q}_{(j+2)} \mathbf{u}_{aj}(t) = \mathbf{F}_g(t) \quad (96)$$

sendo

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{M} - q \frac{b^2}{V^2} \mathbf{Q}_2 \quad (97)$$

$$\mathbf{B}_a = \mathbf{B} - q \frac{b}{V} \mathbf{Q}_1 \quad (98)$$

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{K} - q \mathbf{Q}_0 \quad (99)$$

substituindo as relações (97) a (99) na equação (96)

$$\mathbf{M}_a \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{B}_a \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}_a \mathbf{u}(t) - q \sum_{j=1}^{n_{lag}} \mathbf{Q}_{(j+2)} \mathbf{u}_{aj}(t) = \mathbf{F}_g \quad (100)$$

para se obter a representação em espaço de estados pode isolar o vetor de derivada segunda da equação anterior e, a partir de um rearranjo matricial, obter a seguinte representação:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_{ext} \quad (101)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (102)$$

o vetor de variáveis de estado $\mathbf{x}(t)$ é composto pelas coordenadas físicas e as relacionadas com os estados de atraso conforme abaixo:

$$\mathbf{x}(t) = \left\{ \dot{\mathbf{u}}(t) \quad \mathbf{u}(t) \quad \mathbf{u}_{a1}(t) \quad \dots \quad \mathbf{u}_{an_{lag}}(t) \right\}^T \quad (103)$$

assim a matriz dinâmica aeroelástica \mathbf{A} com estados aumentados é:

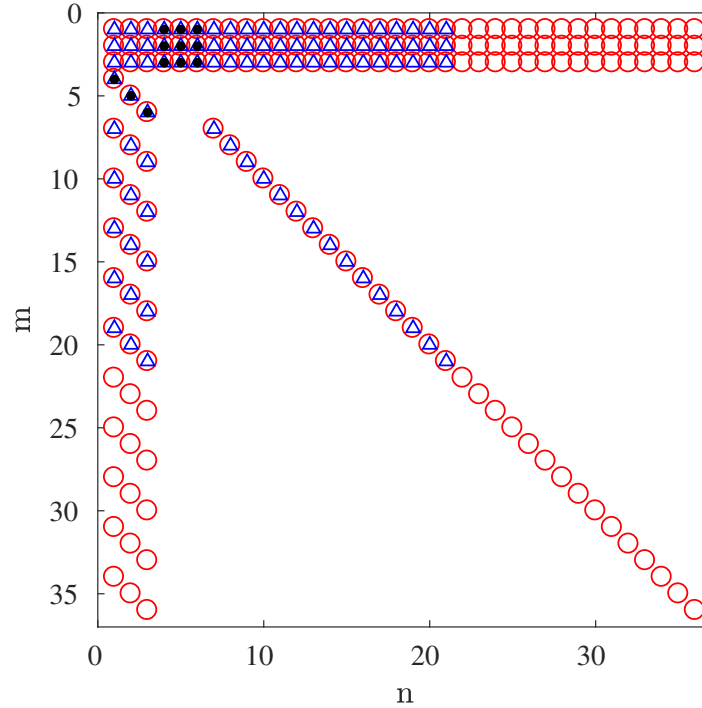
$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_a^{-1}\mathbf{B}_a & -\mathbf{M}_a^{-1}\mathbf{K}_a & \mathbf{M}_a^{-1}q\mathbf{Q}_3 & \dots & \mathbf{M}_a^{-1}q\mathbf{Q}_{2+n_{lag}} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\frac{V}{b}\gamma_1\mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \dots \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \vdots & \dots & -\frac{V}{b}\gamma_{n_{lag}}\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (104)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e $\mathbf{0}$ é uma matriz quadrada de zeros, com a mesma dimensão de \mathbf{M}_a . E o vetor $\mathbf{F}_{ext}(t)$ é dado por:

$$\mathbf{F}_{ext}(t) = \left\{ \mathbf{F}_g(t) \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right\}^T \quad (105)$$

Realizada a aproximação, a matriz dinâmica aeroelástica possui uma dimensão $\nu(2 + n_{lag}) \times \nu(2 + n_{lag})$, onde ν é o numero de graus de liberdade. A figura (11) ilustra a diferença da dimensão da matriz dinâmica para algumas quantidade de parâmetros de atraso utilizados, sendo $n_{lag} = 10$ (\circ), $n_{lag} = 5$ (\triangle) e o sistema dinâmico estrutural de três graus de liberdade (sem considerar o esforços aerodinâmicos (\bullet))

Figura 11 – Dimensão da matriz dinâmica aeroelástica para $n_{lag} = 10$ (\circ), $n_{lag} = 5$ (\triangle) e estrutural, que não considera os esforços aerodinâmicos (\bullet)



Fonte: Próprio Autor

2.8 Resposta dos Estados de Atraso

A presente seção apresenta a comparação entre a resposta da coordenada física $\theta(t)$, com seus estados aumentados relacionados, tanto no domínio do tempo quanto em frequência, para uma visão ampla. A tabela (2) mostra os parâmetros geométricos e de inércia utilizados para uma seção típica com três graus de liberdade que utilizados para se obter os resultados deste trabalho. A resposta no tempo é obtida através da integração numérica da equação (101), pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com condições iniciais sem considerar os efeitos da rajada, ou seja, para \mathbf{F}_{ext} nulo. Para as condições iniciais se adota a velocidade no movimento de *plunge*, $\dot{h}(0) = 20 \text{ m/s}$ sendo as demais nulas, assim $\mathbf{x}(0) = \{20 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0\}^T$. A condição de voo adotada é a uma velocidade $V = 40 \text{ m/s}$ e para se obter a aproximação das cargas aerodinâmicas são utilizados 6 parâmetros de atraso, calculados através da equação (95).

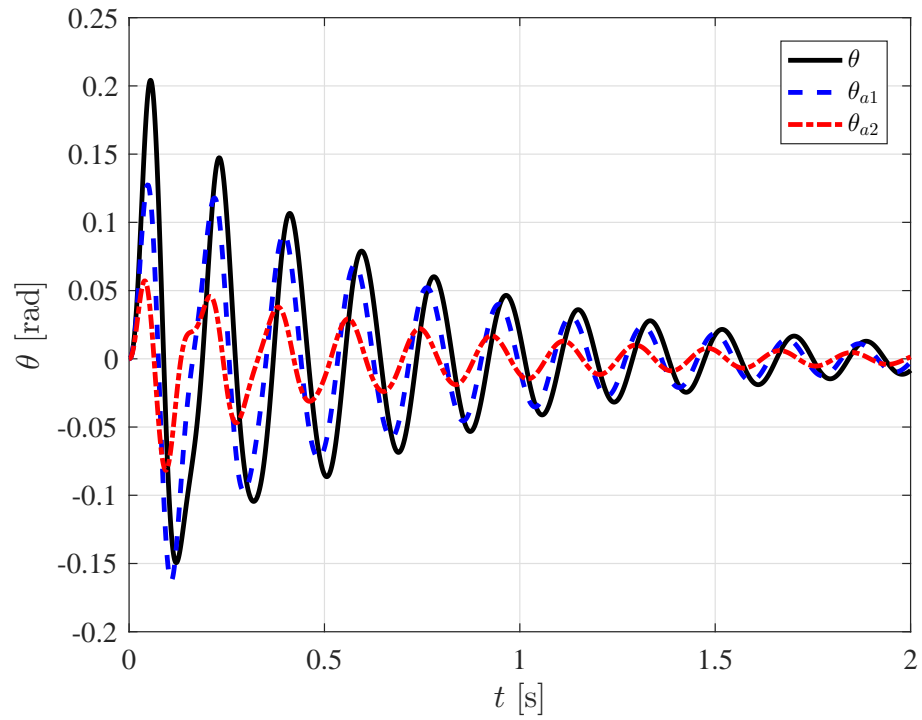
Tabela 2 – Dados da seção típica 3 graus de liberdade utilizados no trabalho

semi corda	$b = 0,7m$
massa do aerofólio	$m = 20kg$
frequência de <i>plunge</i>	$f_h = 5,5Hz$
frequência de <i>pitch</i>	$f_\theta = 11Hz$
frequência da superfície de controle	$f_\beta = 20Hz$
c.e em relação ao c.g	$a = -0.4$
localização da SC em relação ao centro geométrico	$c = 0,6$
c.g em relação ao centro elástico	$x_\theta = 0,2$
c.g da SC em relação ao centro elástico	$x_\beta = 0,0125$
raio de giro em relação a a	$r = (0,25)^{1/2}$
raio de giro da SC em relação a a	$r = (0,00625)^{1/2}$
massa específica	$\rho = 1,225kg/m^3$

Fonte: Adaptado de [Bueno \(2014\)](#)

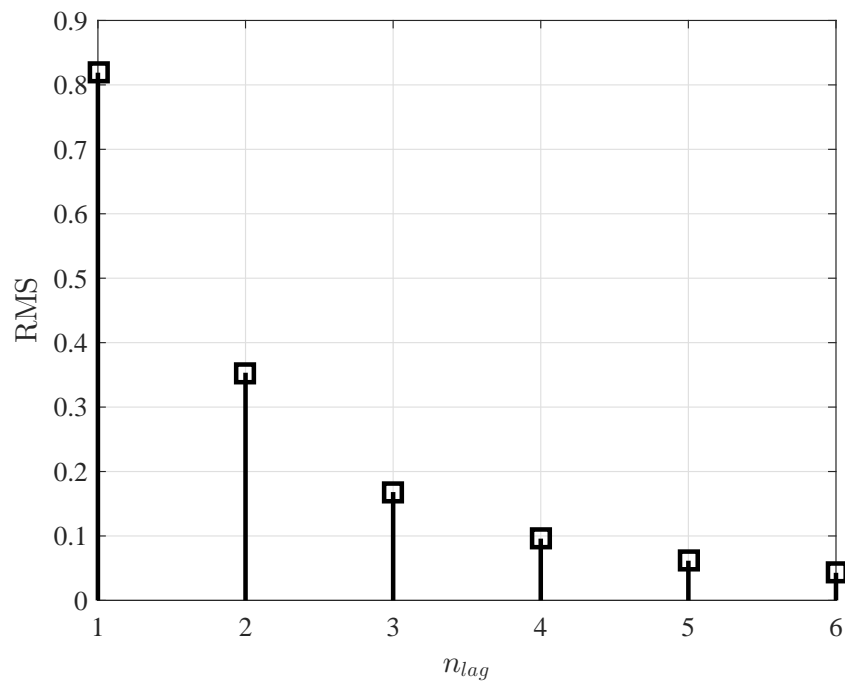
A figura (12) mostra o deslocamento angular e os dois primeiros estados aumentados. Nota-se que há o amortecimento relacionado à interação fluido-estrutura devido ao decaimento nas curvas de resposta. Há diferença na amplitude de movimento em relação à resposta da coordenada θ e, também, uma defasagem quando se observa os valores máximos. Também, a figura (13) mostra a energia de cada estado de atraso relacionado à θ , a qual é menor para maiores valores de γ_j .

Figura 12 – Resposta no tempo do deslocamento angular θ e os dois primeiros estados aumentados relacionados



Fonte: Próprio Autor

Figura 13 – RMS relativo dos estados aumentados



Fonte: Próprio Autor

2.9 FRF aeroelástica

Considere a equação do movimento aeroelástico, conforme equação (96), porém com o termo aerodinâmico escrito no domínio da frequência. Aplicando a transformada de Laplace, tem-se:

$$\mathbf{M}\mathbf{U}(s)s^2 + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)s + \mathbf{K}\mathbf{U}(s) = q\mathbf{Q}(k)\mathbf{U}(s) + \mathbf{F}_g(s) \quad (106)$$

e considerando $s = i\omega$, pode-se definir a função de resposta em frequência (FRF) do sistema, na forma exata descrita pela equação (107) e na forma aproximada, devido a aproximação aerodinâmica, conforme equação (108).

$$\mathbf{H} = [-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{B}i\omega + \mathbf{K} - q\mathbf{Q}]^{-1} \quad (107)$$

$$\mathbf{H}_{app} = \left[-\mathbf{M}_a\omega^2 + \mathbf{B}_ai\omega + \mathbf{K}_aq \sum_{j=1}^{n_{lag}} \mathbf{Q}_{(j+2)} \left(\frac{i\omega}{i\omega + \frac{V}{b}\gamma_j} \right) \right]^{-1} \quad (108)$$

sendo \mathbf{M}_a , \mathbf{B}_a e \mathbf{K}_a definidas respectivamente pelas equações (97) a (99).

3 Novo Critério para Definição dos Parâmetros de Atraso

Apresenta-se neste capítulo uma discussão da força aerodinâmica do aerofólio sujeito ao movimento harmônico prescrito, no domínio do tempo, assim como a influência da fase e o comportamento com relação aos estados de atraso. Conforme discutido previamente, para se obter a aproximação das forças aerodinâmicas através do método de Roger-Abel é necessário selecionar a quantidade e valores para os parâmetros de atraso γ .

3.1 Força Aerodinâmica em Movimento Harmônico no Domínio do Tempo

É discutido nesta seção a força aerodinâmica atuante na seção típica devido ao movimento prescrito, do tipo harmônico em cada grau de liberdade separadamente (desacoplados). Assim, a força e momentos aerodinâmicos podem ser obtidos no domínio do tempo através da aplicação da transformada de Fourier.

Para se obter resultados gerais para todo envelope de voo se utiliza o domínio da frequência reduzida k , portanto, a transformada inversa leva ao tempo reduzido t_r , sendo que para este caso a variável de Laplace tem a forma: $s' = ik$. Assim, similarmente à equação (62), tem-se:

$$F_{ai}(k) = qQ_{ii}(k)X_i(k) \quad (109)$$

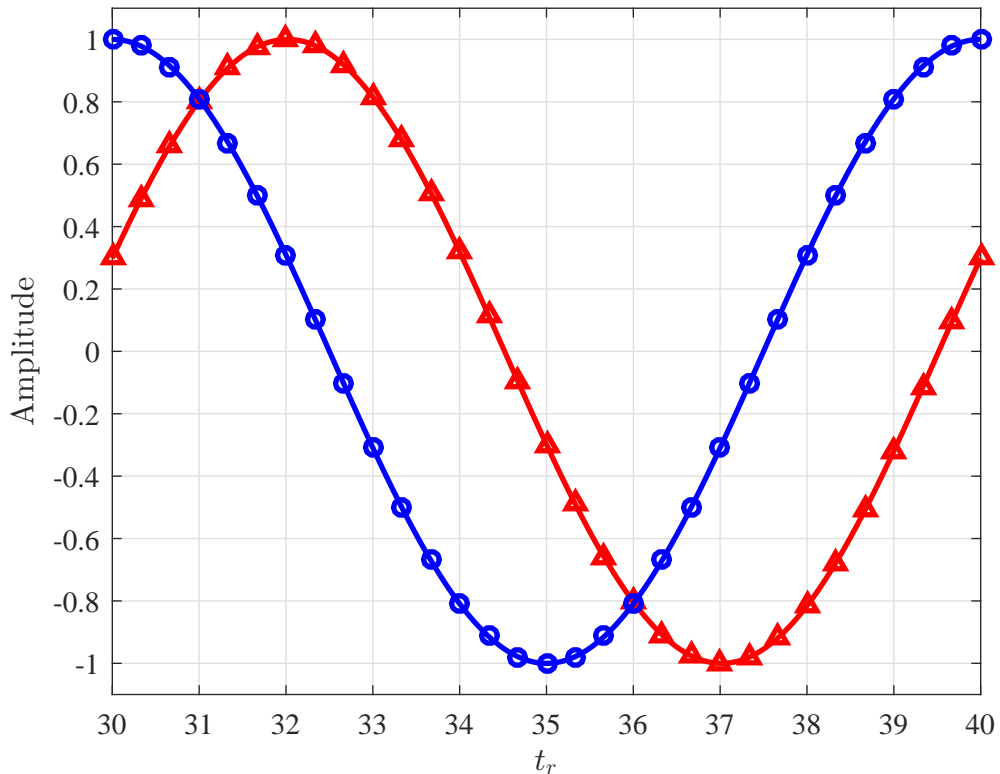
sendo $Q_{ii}(k)$ o coeficiente aerodinâmico relacionado ao movimento a ser estudado ($i = 1, 2, 3$), q pressão dinâmica, $X_i(k)$ o movimento imposto no domínio da frequência reduzida. O movimento imposto no tempo reduzido é dado por:

$$x(t_r) = x_0 \sin(t_r k) \quad (110)$$

sendo x_0 uma amplitude definida para o movimento.

A força aerodinâmica (\triangle) devido à imposição de movimento é ilustrada na figura (14), bem como o movimento prescrito (\circ). Os valores das amplitudes de força e movimento são normalizados com relação a seus respectivos máximos, sendo a força $\frac{f_a(t_r)/q}{f_{a_{max}}}$, e o movimento prescrito $x(t_r)/x_0$, onde $f_{a_{max}}$ é o máximo da força aerodinâmica gerada.

Figura 14 – Movimento imposto (\circ) e força aerodinâmica correspondente (\triangle) normalizados pela respectiva amplitude máxima



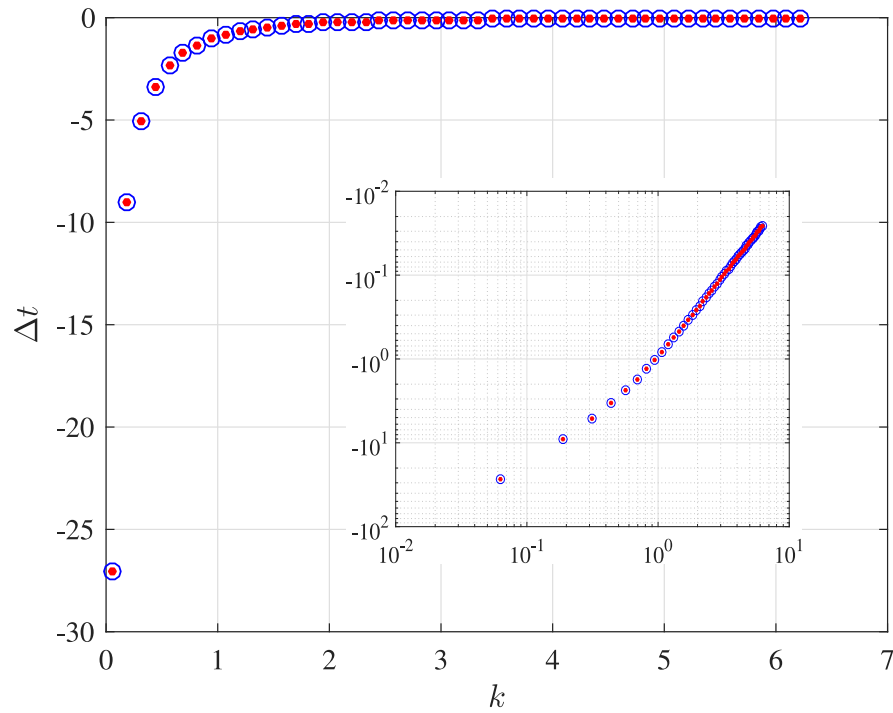
Fonte: Próprio Autor

Analisando a figura acima é possível notar a defasagem (Δt_r) entre o movimento prescrito (*plunge*) e a força aerodinâmica resultante. Desse modo, pode-se escrever a força aerodinâmica no domínio do tempo reduzido por:

$$f_a(t_r) = f_{a_{max}} \sin(kt_r + \phi) \quad (111)$$

onde ϕ é a fase. Então, é possível encontrar o valor de Δt_r para as frequências reduzidas a partir da diferença de tempo pico a pico entre força e posição. A figura (15) mostra a defasagem entre a força e movimento para algumas frequências reduzidas, sendo neste caso semelhante a uma função exponencial negativa. Estes resultados podem também ser obtidos através do domínio da frequência, indicado com o símbolo (\bullet).

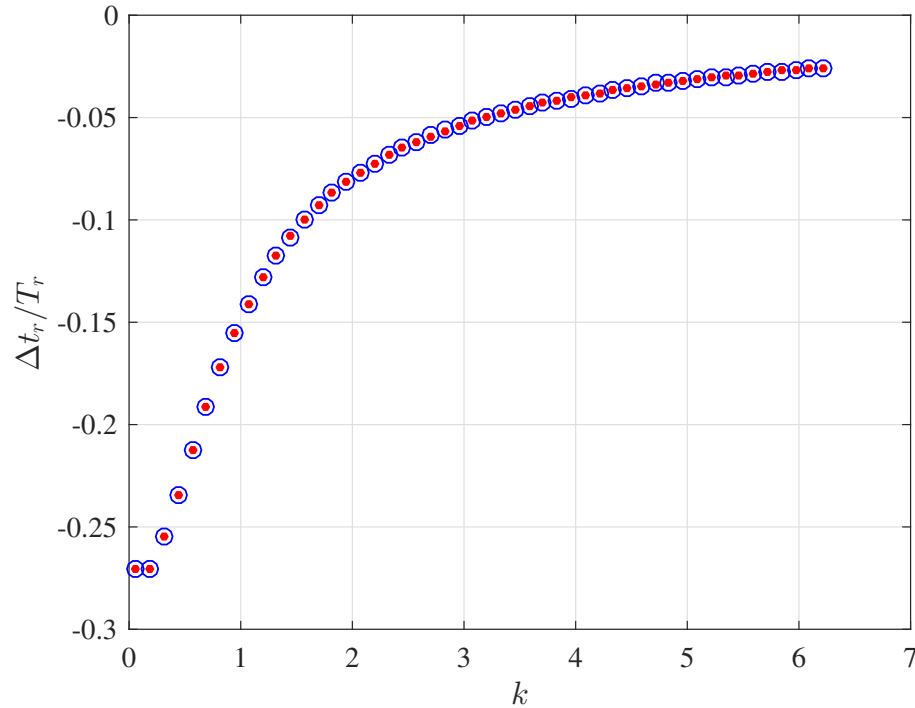
Figura 15 – Diferença de tempo pico a pico entre o movimento prescrito e a força aerodinâmica de *plunge* em diferentes valores de frequência reduzida



Fonte: Próprio Autor

Dividindo o valor da defasagem para cada frequência reduzida pelo seu respectivo período ($T_r = 1/f_r$), tem-se a figura (16), que mostra a proporção de período que a força está defasada em relação ao movimento. A curva obtida através domínio do tempo é mostrada com o símbolo (\circ) e do domínio da frequência com (\bullet).

Figura 16 – Razão da diferença de tempo pico a pico entre o movimento prescrito e a força aerodinâmica de *plunge* em diferentes valores de frequência reduzida com o respectivo período



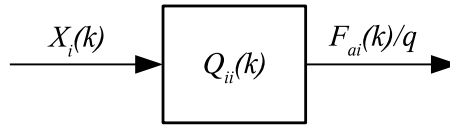
Fonte: Próprio Autor

3.1.1 No Domínio da Frequência

Uma maneira alternativa de se obter o resultado anterior é interpretar o problema da força aerodinâmica resultante de um movimento prescrito conforme o diagrama de bloco da figura (17), que ilustra a equação (112), e mostra que o coeficiente aerodinâmico relacionado ao movimento de interesse $Q_{ii}(k)$ é uma função de transferência, onde o movimento prescrito é a entrada $X_i(k)$ e a força aerodinâmica a saída $F_{ai}(k)$ (neste caso *plunge*, ou seja $i = 1$)¹.

¹o comportamento apresentado é semelhante para para o *pitch* e superfície de controle

Figura 17 – Função de transferência

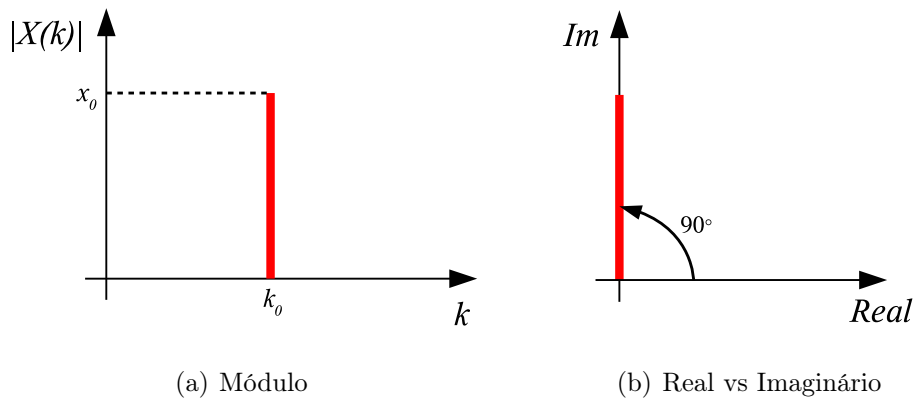


Fonte: Próprio Autor

$$Q_{ii}(k) = \frac{F_{ai}(k)/q}{X_i(k)} \quad (112)$$

sendo $X_i(k)$, $Q_{ii}(k)$ e $F_{ai}(k) \in \mathbb{C}$, é possível se obter propriedades como fase e módulo desses valores. Considerando que a entrada imposta é uma senóide, a sua representação gráfica no domínio da frequência é ilustrada por:

Figura 18 – Ilustração da senóide na frequência



(a) Módulo

(b) Real vs Imaginário

Assim, tem-se que a saída é na mesma frequência da entrada, conforme demonstrado na figura (14), porém, com alteração na fase. A partir da equação (111), quando a fase ϕ tiver valor de 2π , a defasagem é igual a um período T_r . Então, é possível calcular o tempo dessa defasagem a partir da fase de $Q(k)$ pela seguinte relação:

$$\Delta t_r = \frac{\phi(k)T_r}{2\pi} \quad (113)$$

e, também, obtém-se a relação de proporcionalidade,

$$\frac{\Delta t_r}{T_r} = \frac{\phi(k)}{2\pi} \quad (114)$$

considerando que $\phi(k)$ é a fase de $Q(k) \in \mathbb{C}$, e que cada T_r está associado a uma frequência

reduzida k .

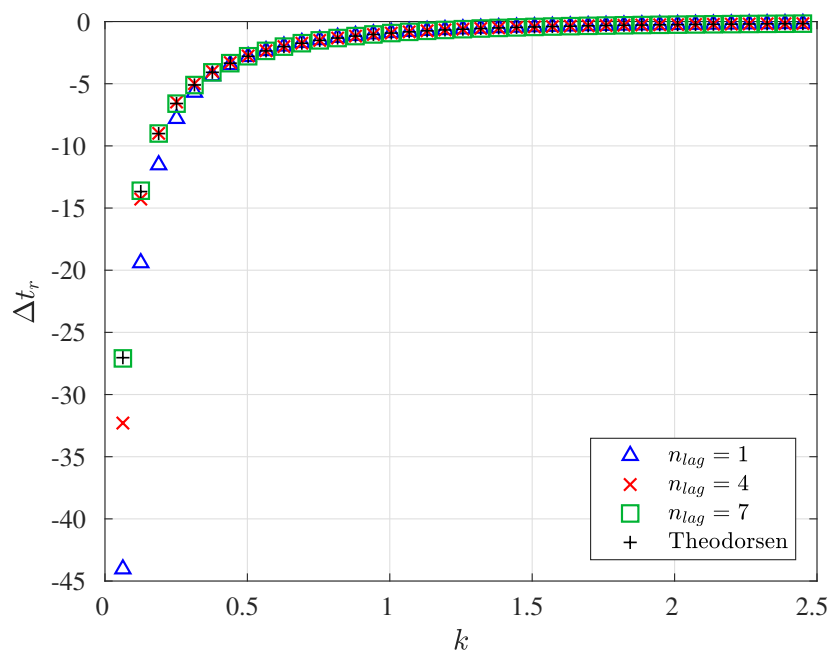
Os resultados obtidos a partir das equações (113) e (114) estão nas figuras (15) e (16), representados pelo símbolo (\bullet). Esses resultados são idênticos aos obtidos a partir da resposta $f_a(t_r)$, porém, há vantagens nos cálculos visto que não é preciso realizar a transformada rápida de Fourier para obter os valores de Δt_r .

Toda ideia e procedimento apresentado nesta seção é de fundamental importância para os resultados e entendimento da física relacionada aos estados de atraso resultante do método de aproximação desenvolvido por Roger (1977) e Abel (1979) e são apresentados e discutidos a seguir neste trabalho.

3.2 Aproximação de Forças Aerodinâmicas

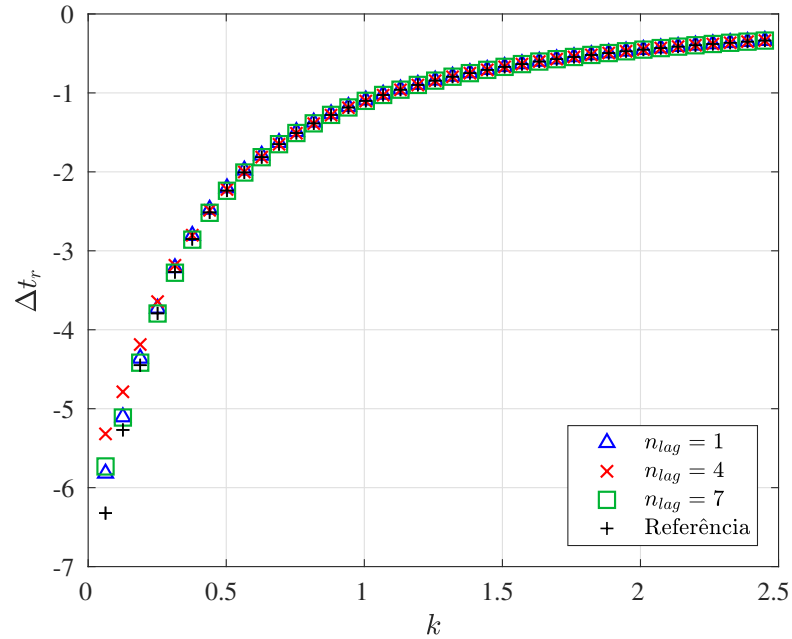
Nas figuras (19) a (21) são mostrados as defasagens (Δt_r) entre o movimento imposto e as forças aerodinâmicas aproximadas para os movimentos de *plunge*, *pitch* e da superfície de controle, respectivamente, no tempo reduzido utilizando $n_{lag} = 1, 4$ e 7 , sendo γ_j calculado através da equação (95), além das forças aerodinâmicas calculadas por meio das equações de Theodorsen (1935).

Figura 19 – Defasagem em tempo (Δt_r) em *plunge* de forças aerodinâmicas aproximadas em comparação com a obtida pelas equações de Theodorsen (1935)



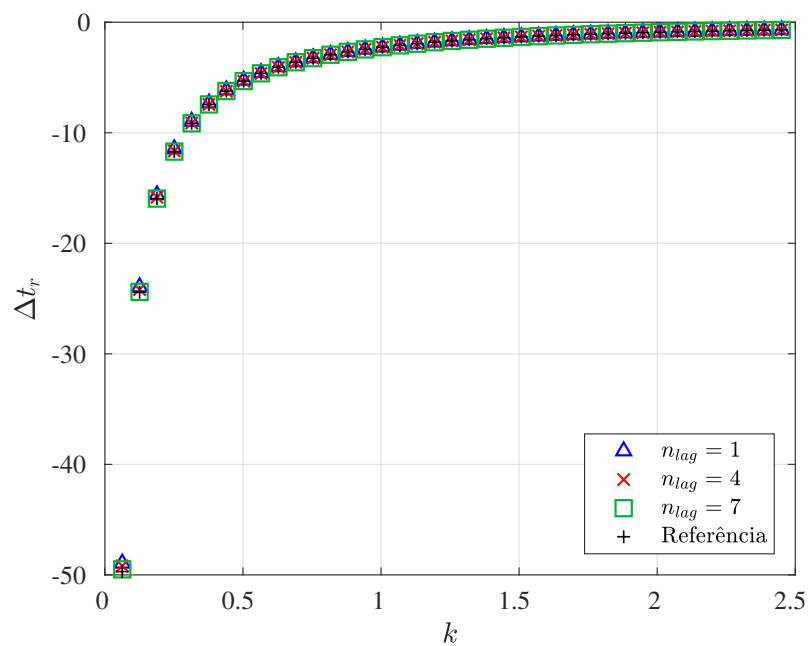
Fonte: Próprio Autor

Figura 20 – Defasagem em tempo (Δt_r) em *pitch* de forças aerodinâmicas aproximadas em comparação com a obtida pelas equações de Theodorsen (1935)



Fonte: Próprio Autor

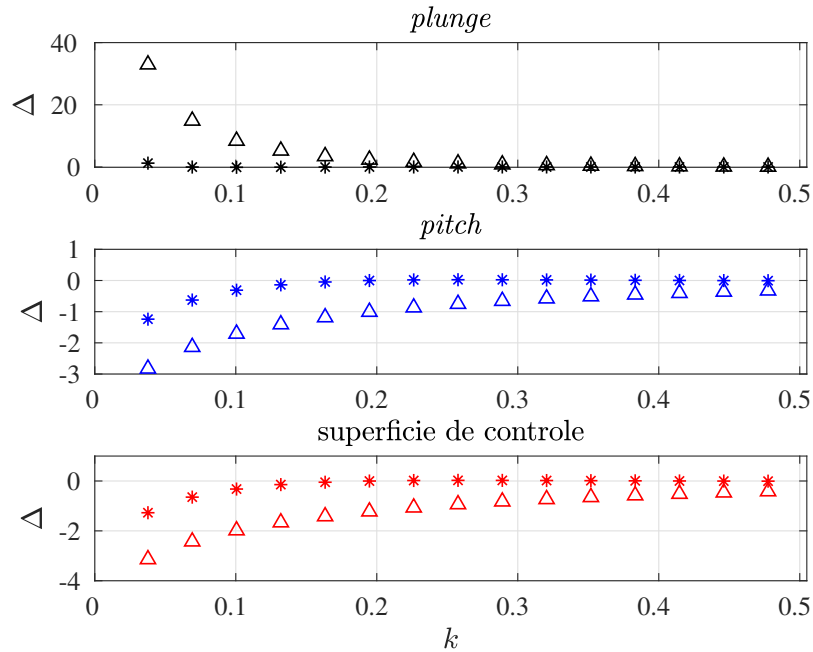
Figura 21 – Defasagem em tempo (Δt_r) para a superfície de controle de forças aerodinâmicas aproximadas em comparação com a obtida pelas equações de Theodorsen (1935)



Fonte: Próprio Autor

Para um parâmetro de atraso os valores de defasagem de tempo são distantes da referência, e ao se utilizar mais parâmetros a diferença da defasagem diminui, conforme ilustra a figura (22). Os valores dos parâmetros são calculados pela equação (95), restando como variáveis a quantidade de parâmetros a serem utilizados e a máxima frequência reduzida.

Figura 22 – Diferença de defasagens (Δ) para $n_{lag} = 1$ (Δ) e $n_{lag} = 7$ (*)

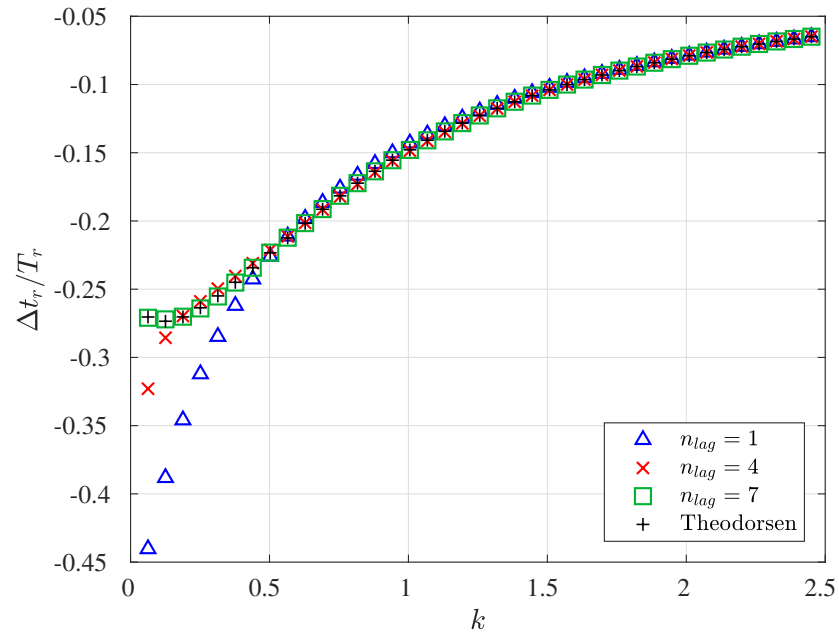


Fonte: Próprio Autor

Sendo $\Delta = \Delta t_r^{(Theodorsen)} - \Delta t_r^{\gamma_j}$. A figura (22) mostra até a frequência reduzida $k = 0,5$, pois os valores de Δ para $n_{lag} = 1$ e 7 são próximos para frequências reduzidas mais altas.

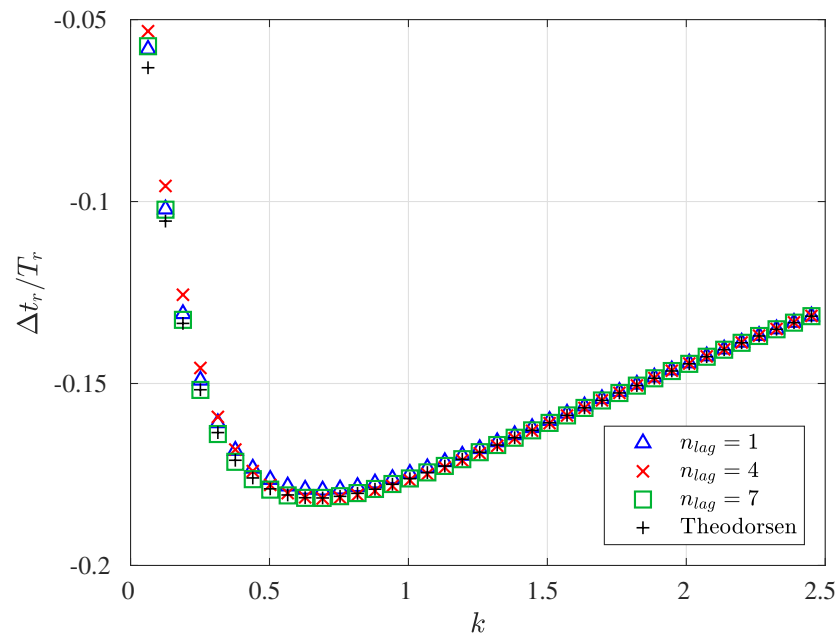
Comparando a relação do Δt_r com o período reduzido associado a cada frequência reduzida, tem-se as figuras (23) a (25), nas quais mostram-se também que poucos estados de atraso utilizados são insuficientes.

Figura 23 – Relação do Δt_r com o respectivo período para cada frequência reduzida associada - *plunge*



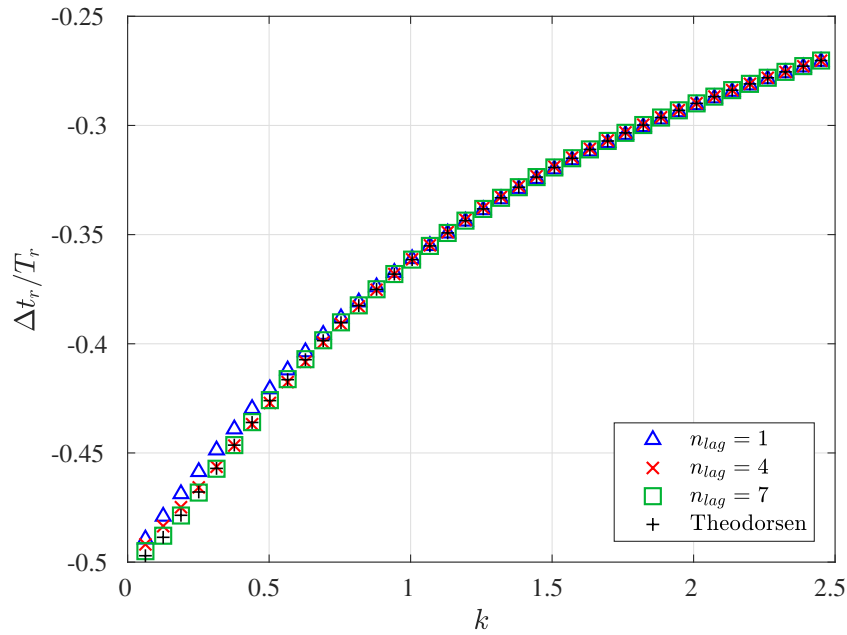
Fonte: Próprio Autor

Figura 24 – Relação do Δt_r com o respectivo período para cada frequência reduzida associada - *pitch*



Fonte: Próprio Autor

Figura 25 – Relação do Δt_r com o respectivo período para cada frequência reduzida associada - superfície de controle



Fonte: Próprio Autor

Após demonstrado a influência da quantidade de estados de atraso utilizados para aproximar as forças aerodinâmicas, sendo γ_j calculados pela equação (95), em comparação com as equações de [Theodorsen \(1935\)](#), nas figuras (27) a (29) é exposto o Δt_r da parcela dos estados de atraso calculados a partir da fase da equação (117) para cada valor de frequência reduzida.

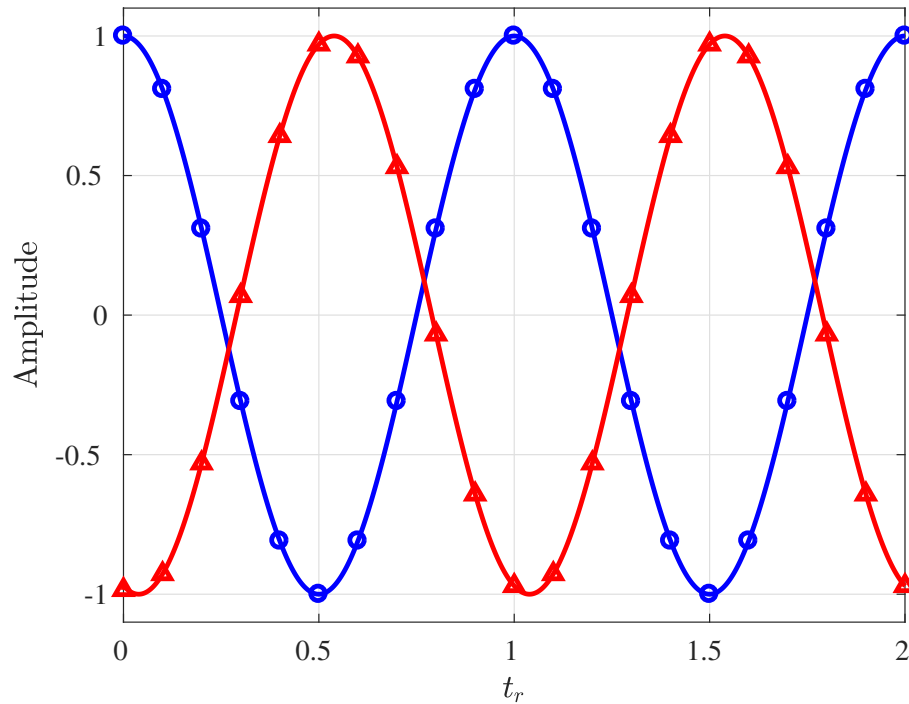
A equação das forças aerodinâmicas aproximadas é dada pela equação (90), no domínio de Laplace, e no domínio do tempo pela equação (91). Isolando os termos de atraso pode-se reescrever tais equações nos domínios da frequência e do tempo reduzido, respectivamente por:

$$\mathbf{F}_{lag}(s') = \frac{\mathbf{F}_a(s')}{q} - \mathbf{Q}_0 \mathbf{U}(s') - \mathbf{Q}_1 s' \mathbf{U}(s') - \mathbf{Q}_2 s'^2 \mathbf{U}(s') \quad (115)$$

$$\mathbf{F}_{lag}(t_r) = \frac{\mathbf{F}_a(t_r)}{q} - [\mathbf{Q}_0 \mathbf{u}(t_r) + \mathbf{Q}_1 \dot{\mathbf{u}}(t_r) + \mathbf{Q}_2 \ddot{\mathbf{u}}(t_r)] \quad (116)$$

Utilizando o movimento prescrito da equação (110), e suas respectivas derivadas primeira e segunda aplicadas na equação (116), tem-se a força de atraso aerodinâmico normalizada na figura (26).

Figura 26 – Movimento imposto (\circ) e as forças relacionadas com os estados de atraso (\triangle), normalizados com relação às respectivas amplitudes



Fonte: Próprio Autor

Na figura acima, bem como na figura (14), existe uma defasagem temporal entre o movimento e a resposta. Assim, com o intuito de compreender melhor os estados de atraso pode-se explorar essa defasagem similarmente, a discussão apresentada na seção anterior para as forças aerodinâmicas.

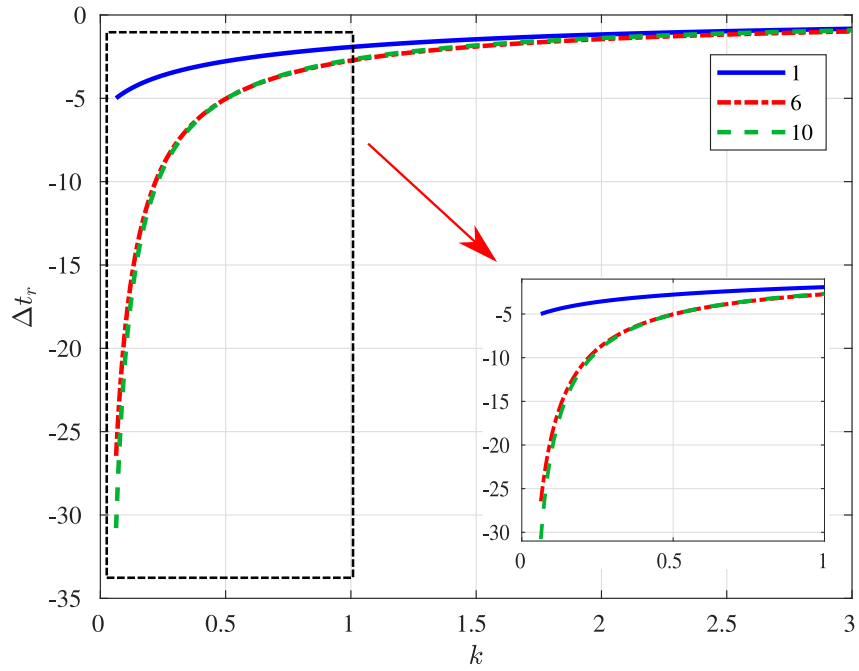
Reescrevendo a equação (115) como função de transferência, para um movimento $X_i(s')$ no i -ésimo grau de liberdade:

$$\frac{F_{lag}^i(s')}{X_i(s')} = Q^{ii}(s') - Q_0^{ii} - Q_1^{ii}s' - Q_2^{ii}(s')^2 \quad (117)$$

A partir da fase da função de transferência acima, as defasagem no tempo são obtidas conforme na seção anterior, porém, neste caso são para compreender os efeitos dos termos de atraso.

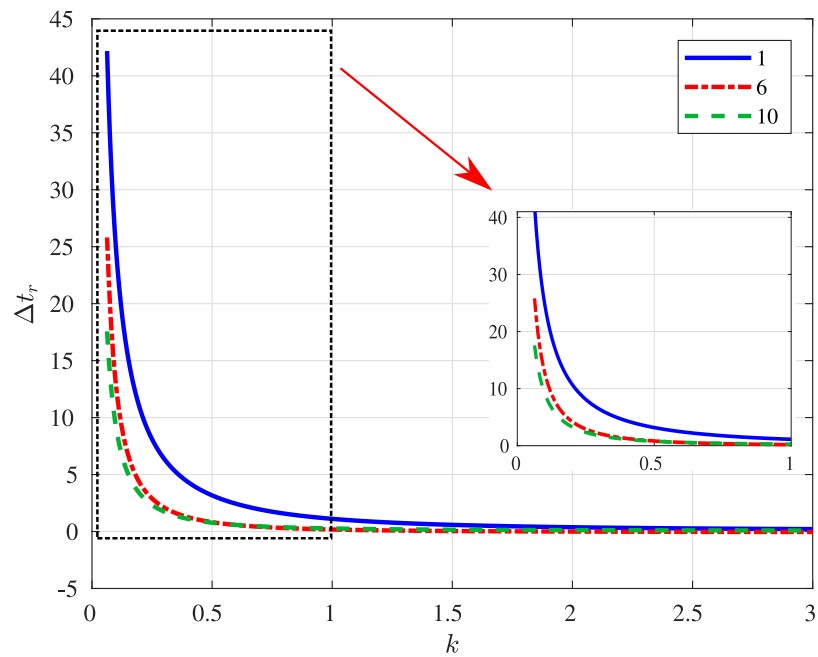
O gráficos dos valores de Δt_r das figuras (27) a (29) são para $n_{lag} = 1, 6$ e 10 . Para o caso do movimento de *plunge*, figura (27), em frequências reduzidas de baixos valores, conforme se aumenta a quantidade de parâmetros de atraso calculados pela equação (95) o Δt_r aumenta significativamente, possuindo forma semelhante à uma função exponencial.

Figura 27 – Defasagem de tempo dos termos de atraso da força aerodinâmica para diferentes parâmetros de atraso - *plunge*



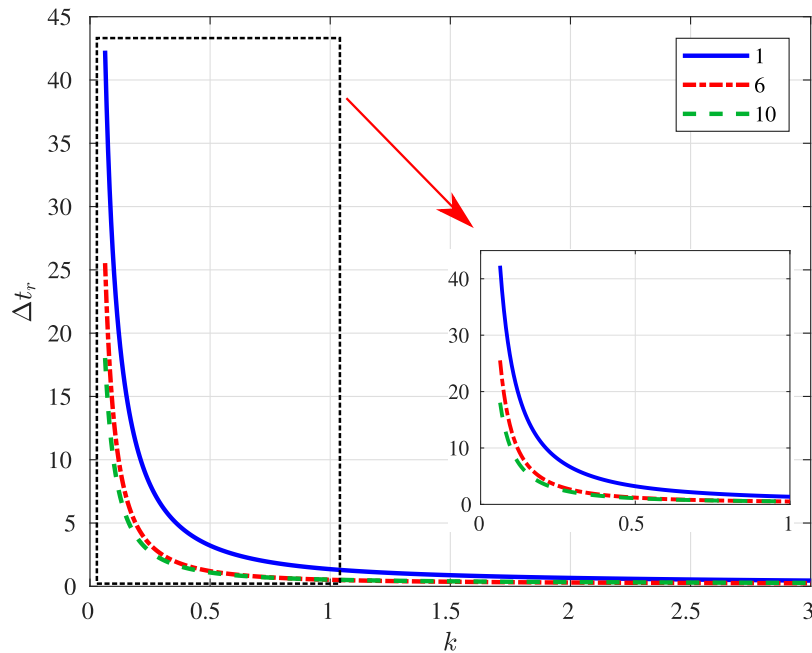
Fonte: Próprio Autor

Figura 28 – Defasagem de tempo dos termos de atraso da força aerodinâmica para diferentes parâmetros de atraso - *pitch*



Fonte: Próprio Autor

Figura 29 – Defasagem de tempo dos termos de atraso da força aerodinâmica para diferentes parâmetros de atraso - superfície de controle



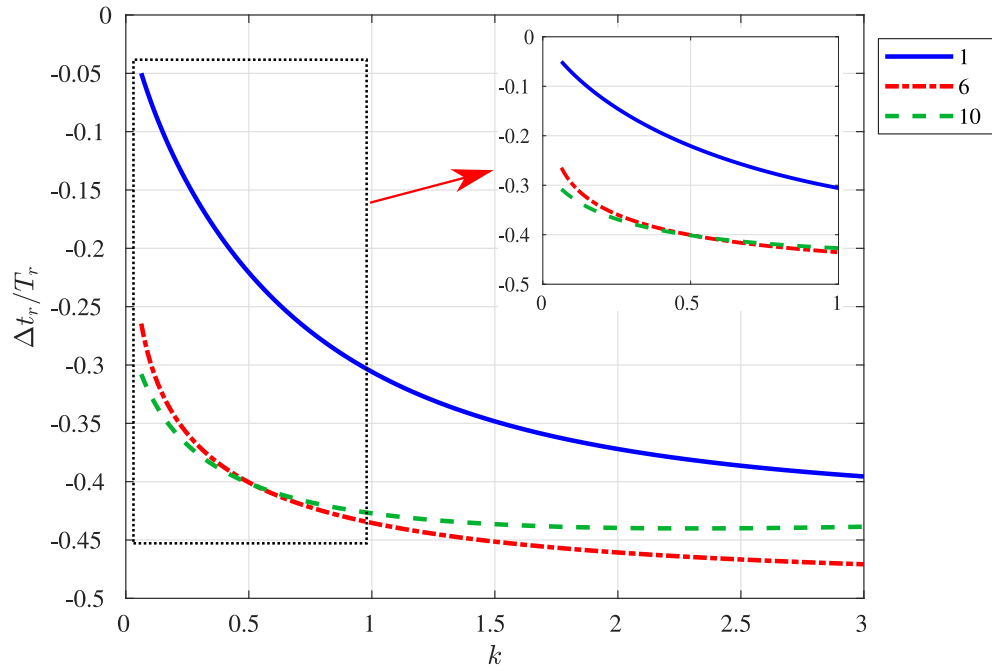
Fonte: Próprio Autor

No movimento de *pitch*, figura (28), para frequências reduzidas abaixo de 3, o aumento na quantidade de n_{lag} diminui os valores de Δt_r nessa faixa. Pode-se notar que a partir de uma dada quantidade de parâmetros de atraso ocorrem pequenas alterações na curva.

Já para a superfície de controle, a partir do gráfico da figura (29), não se tem claramente, em princípio, uma regra explícita para o comportamento do Δt_r com relação aos parâmetros de atraso. Porém, quanto maior o n_{lag} utilizado, mais as curvas se concentram em uma mesma região aproximando-se entre si.

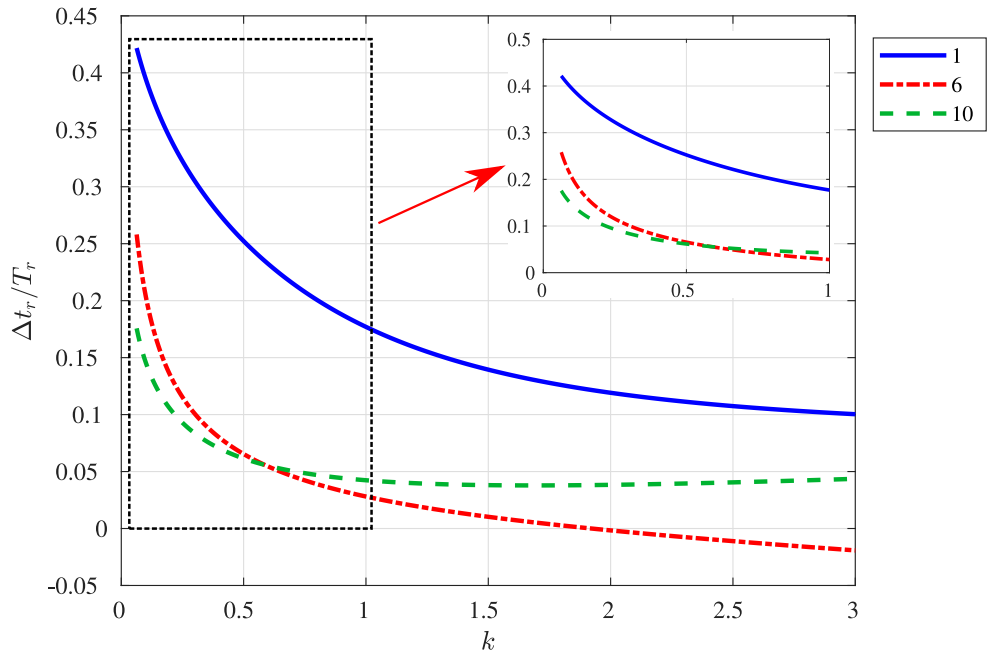
Através da relação entre Δt_r com o período associado a cada frequência reduzida, T_r , obtém-se os gráficos das figura (30) a (32). Para o *plunge* e *pitch* a quantidade de parâmetros de atraso no primeiro aumenta os valores da relação para baixas frequências reduzidas, e diminui no segundo para até 4 da frequência reduzida. Do mesmo modo como apresentado na figura (29), na superfície de controle há apenas uma concentração das retas próximo à curva de $n_{lag} = 10$.

Figura 30 – Relação da defasagem e seu período associado a cada frequência reduzida para diferentes parâmetros de atraso - *Plunge*



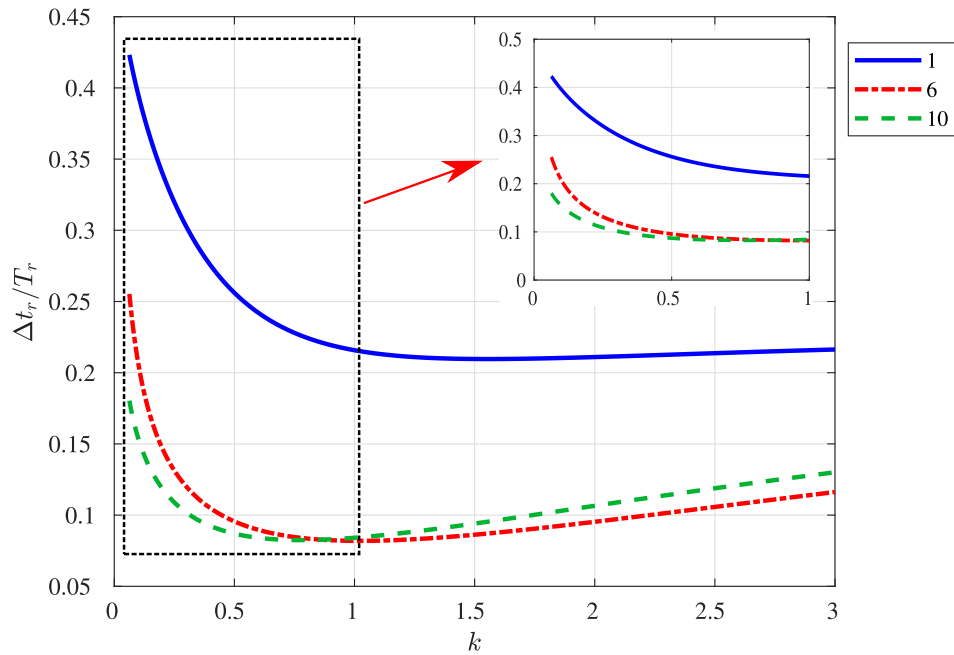
Fonte: Próprio Autor

Figura 31 – Relação da defasagem e seu período associado a cada frequência reduzida para diferentes parâmetros de atraso - *Pitch*



Fonte: Próprio Autor

Figura 32 – Relação da defasagem e seu período associado a cada frequência reduzida para diferentes parâmetros de atraso - superfície de controle



Fonte: Próprio Autor

A partir do exposto nesta seção, nota-se que os estados de atraso utilizados para realizar a aproximação estão relacionados com o ajuste da defasagem entre a força aerodinâmica e o movimento (fase da função de transferência). Além disso, é evidente a grande importância da fase para a aproximação das forças aerodinâmicas pelo método de Roger-Abel (ROGER, 1977; ABEL, 1979).

3.3 Uma Abordagem Alternativa para Avaliação da Aproximação

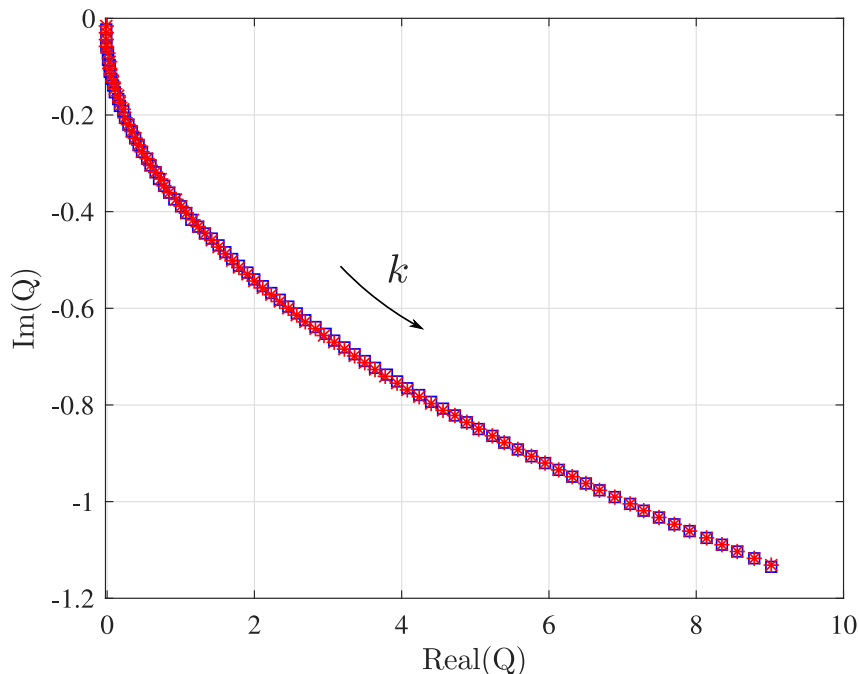
Propõe-se nesta seção uma abordagem alternativa a fim de se avaliar a qualidade das aproximações obtidas a partir do método de Roger-Abel (ROGER, 1977; ABEL, 1979) utilizado como critério de escolha para os valores de parâmetros de atraso (Eq. 95).

A equação (75) é a forma mais comum de aproximação por função racional encontrada na literatura e algumas variações são usadas por Karpel (1981) e Biskri et al. (2006). A matrix \mathbf{Q}_0 é equivalente à rigidez aerodinâmica, \mathbf{Q}_1 ao amortecimento aerodinâmico e \mathbf{Q}_2 equivale à inércia aerodinâmica (LIND, 2002).

A precisão que se pode obter através da aproximação é dependente dos valores dos

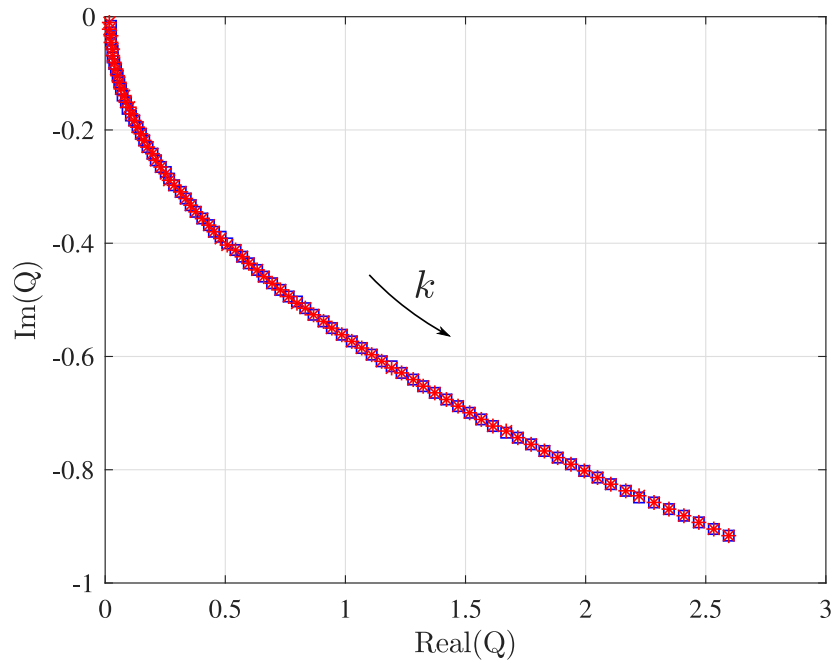
estados de atraso γ_j (EVERSMAN; TEWARI, 1991). Os parâmetros de atraso γ_j são em geral escolhidos arbitrariamente pelo usuário dentro do intervalo na qual está sendo feita a aproximação, definido pelos valores de frequência reduzida (ROGER, 1977; ABEL, 1979; BATINA; YANG, 1984; MATTABONI; QUARANTA; MANTEGAZZA, 2009). Por outro lado, conforme destacado neste texto o manual teórico do software ZAERO fornece uma formulação empírica para o cálculo dos parâmetros de atraso baseado na quantidade e o limite superior da interpolação (ZONA, 2011). A vantagem desta equação é que não há necessidade de o usuário escolher os valores dos parâmetros de atraso, pois é dependente da quantidade utilizada na interpolação e o valor máximo da frequência reduzida considerada. Em geral, a avaliação da qualidade de aproximação é tipicamente baseada em uma comparação gráfica da parte real contra a parte imaginária dos valores dos coeficientes da matriz $\mathbf{Q}(k)$ com a aproximação calculada no domínio da frequência. As figuras (33) a (35) ilustra algumas destas comparações para alguns elementos da matriz de coeficientes aerodinâmicos (ver também no anexo B). Neste caso, para exemplificar, a aproximação é feita com apenas um estado de atraso.

Figura 33 – Avaliação gráfica da aproximação para o elemento Q_{11} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)



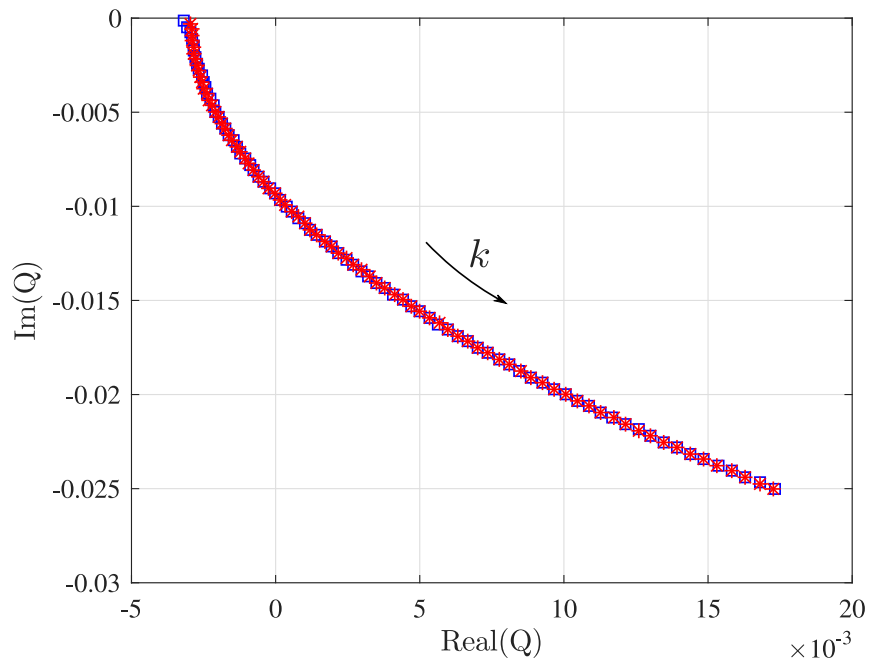
Fonte: Próprio Autor

Figura 34 – Avaliação gráfica da aproximação para o elemento Q_{22} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)



Fonte: Próprio Autor

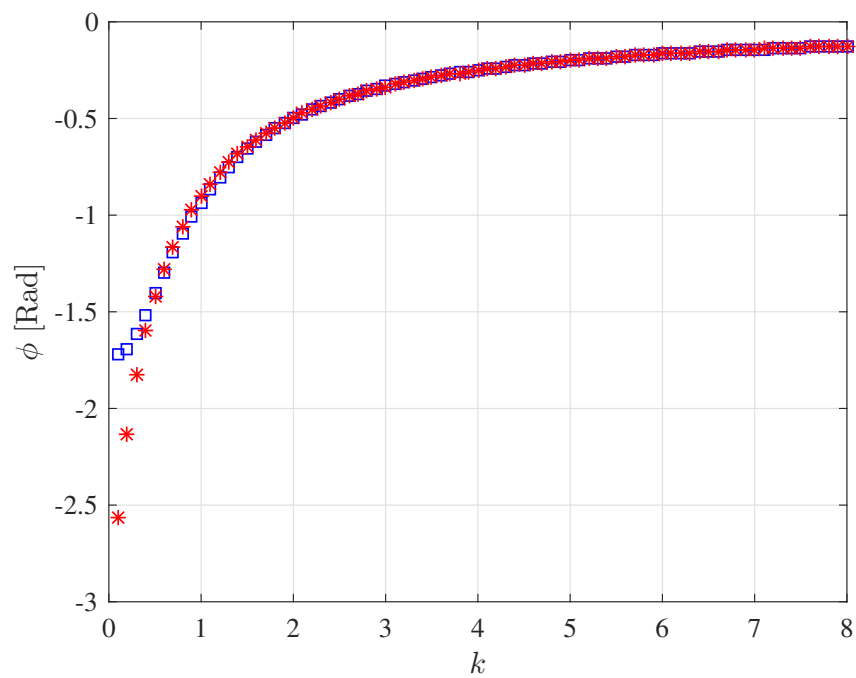
Figura 35 – Avaliação gráfica da aproximação para o elemento Q_{33} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)



Fonte: Próprio Autor

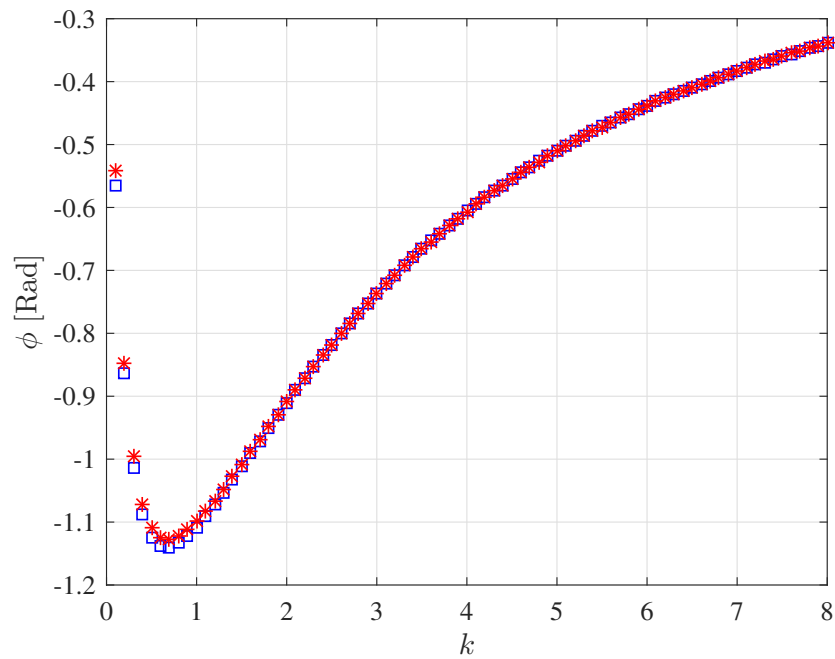
De acordo com as análises em relação à fase, apresentadas nas seções anteriores e, também, comparando as fases de alguns elementos da matriz aerodinâmica nas figuras (36) a (38), é notável sua importância em relação aos estados de atraso. Dessa maneira, propõem-se uma abordagem para avaliar a aproximação à partir da fase. As fases de $Q^{(m,n)}(k)$ e $Q_{app}^{(m,n)}(k)$ são calculadas respectivamente pelas equações (118) e (119).

Figura 36 – Comparação das fases para o elemento Q_{11} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)



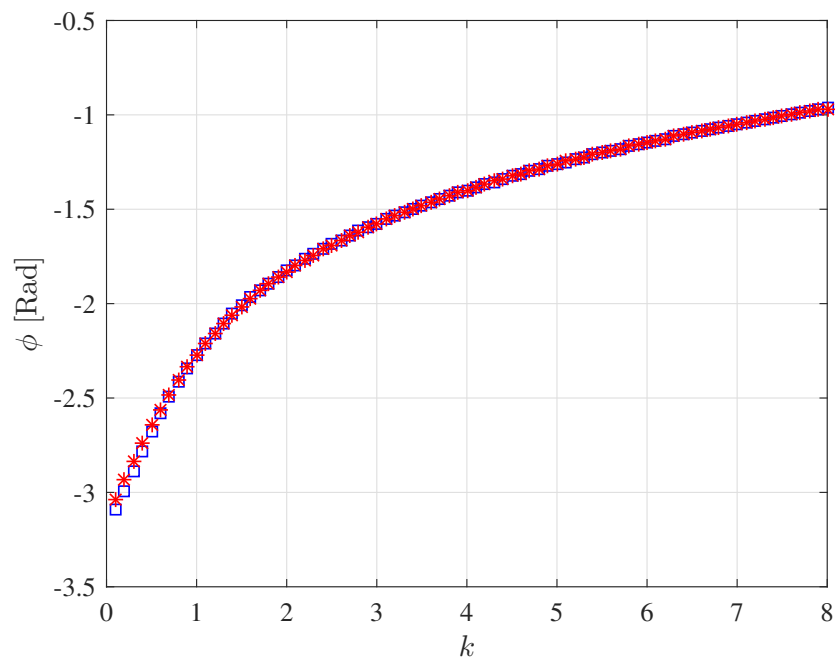
Fonte: Próprio Autor

Figura 37 – Comparação das fases para o elemento Q_{22} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)



Fonte: Próprio Autor

Figura 38 – Comparação das fases para o elemento Q_{33} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)



Fonte: Próprio Autor

$$\phi^{(m,n)}(k) = \tan^{-1} \left[\frac{Im(Q^{(m,n)})}{Re(Q^{(m,n)})} \right] \quad (118)$$

$$\phi_{app}^{(m,n)}(k) = \tan^{-1} \left[\frac{Im(Q_{app}^{(m,n)})}{Re(Q_{app}^{(m,n)})} \right] \quad (119)$$

A alternativa de avaliação da aproximação utilizando a fase é baseada no cálculo da norma quadrática da diferença na fase da aproximação com relação à referência no intervalo de interpolação para elemento da matriz de coeficientes aerodinâmicos, conforme abaixo:

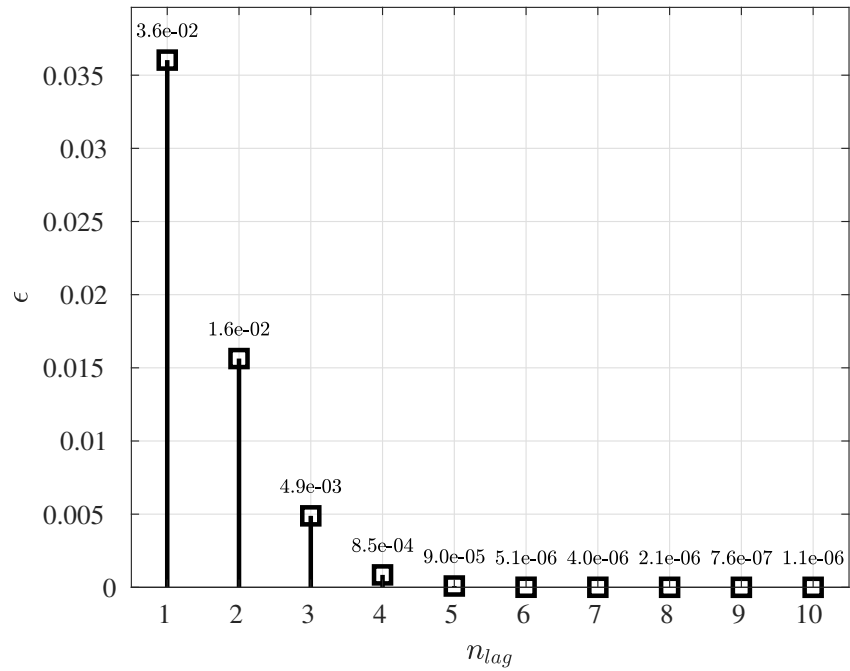
$$\epsilon = \frac{\sum_{j=1}^{n_k} [\phi(k_j) - \phi_{app}(k_j)]^2}{\sum_{j=1}^{n_k} \phi^2(k_j)} \quad (120)$$

e de modo complementar para o módulo de cada elemento se tem:

$$\epsilon_m = \frac{\sum_{j=1}^{n_k} [|Q|(k_j) - |Q|_{app}(k_j)]^2}{\sum_{j=1}^{n_k} |Q|^2(k_j)} \quad (121)$$

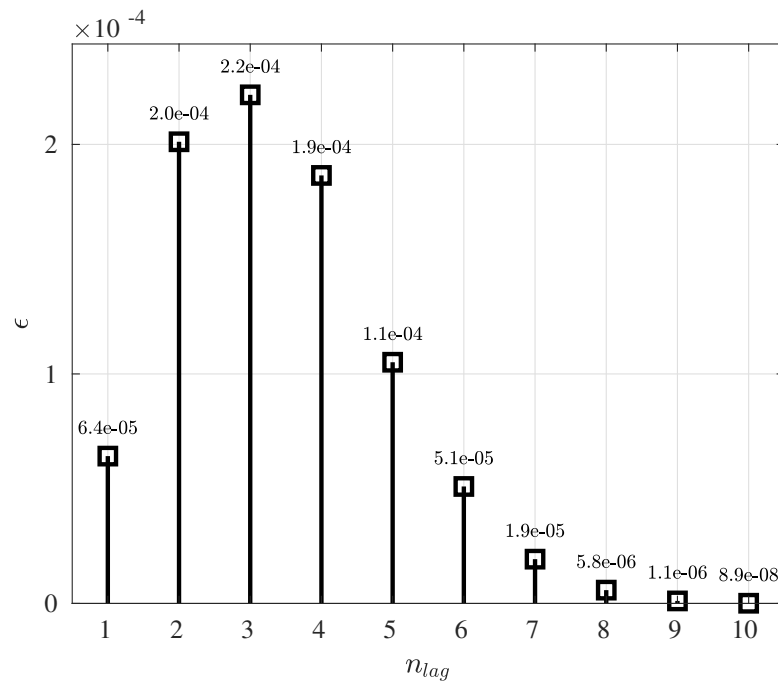
Aplicando a equação (120), obtém-se os gráficos para cada quantidade utilizada de parâmetros de atraso. Nas figuras (39) à (41) as curvas dos erros dos elementos Q_{11} , Q_{22} e Q_{33} , escolhidos arbitrariamente, e os demais elementos são apresentados no anexo B.

Figura 39 – Avaliação da aproximação para cada n_{lag} utilizado - elemento Q_{11}

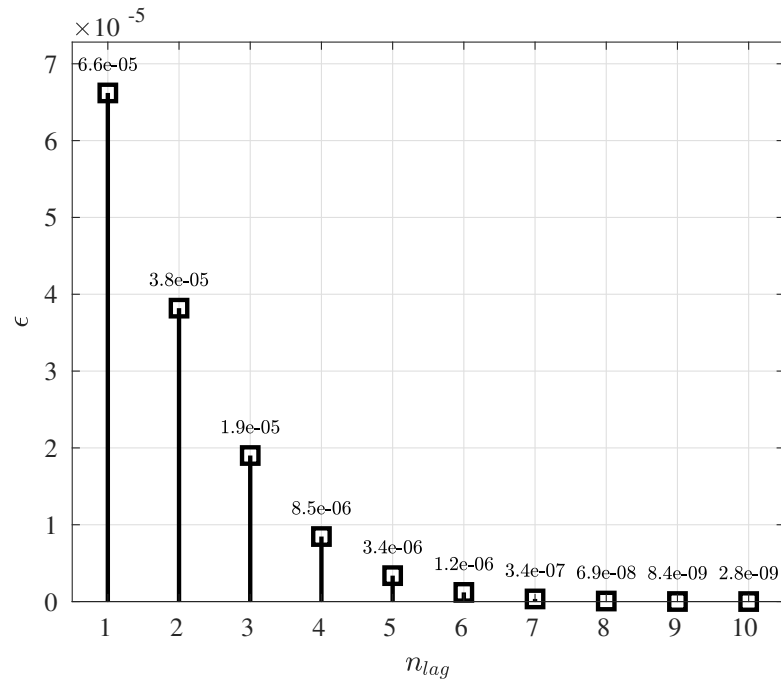


Fonte: Próprio Autor

Figura 40 – Avaliação da aproximação para cada n_{lag} utilizado - elemento Q_{22}



Fonte: Próprio Autor

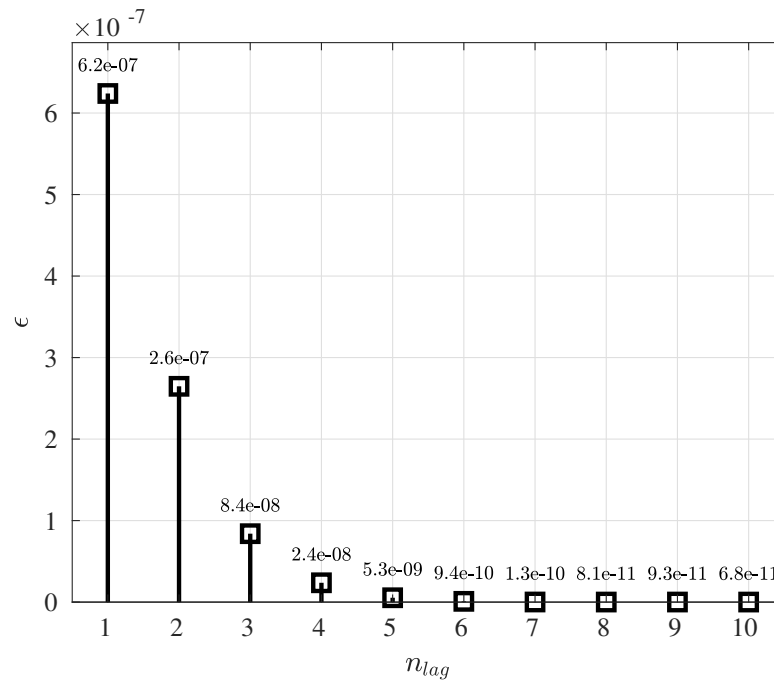
Figura 41 – Avaliação da aproximação para cada n_{lag} utilizado - elemento Q_{33} 

Fonte: Próprio Autor

A partir das figuras (39) à (41) nota-se que a utilização de 6 parâmetros de atraso, para este caso, é suficiente para se obter adequada aproximação com importante redução do erro relativo da norma. E, também, mostrando a utilização de mais que 6 parâmetros de atraso não resulta em um ganho significativo se tratando da redução deste erro.

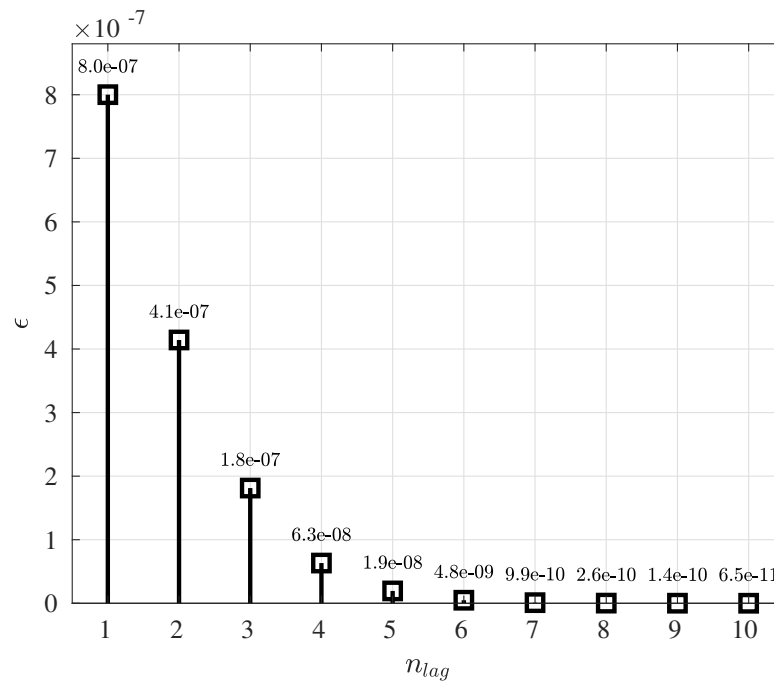
Utilizando a equação (121), porém, em vez de se aplicar a fase como critério de erro, utilizando o módulo, tem-se para os elementos da diagonal principal da matriz de coeficientes aerodinâmicos as figuras (42) a (44) com os erros para cada quantidade de estado de atraso utilizado, sendo o parâmetro calculado pela equação (95). Analisando as figuras abaixo nota-se, de maneira qualitativa, a existência de uma convergência do erro levando que a utilização de apenas $n_{lag} = 4$ é suficiente para se obter uma aproximação de qualidade, sendo que mais parâmetros de atraso não implica em um ganho expressivo na qualidade da aproximação.

Figura 42 – Avaliação da aproximação para cada n_{lag} utilizado - elemento Q_{11} (módulo)



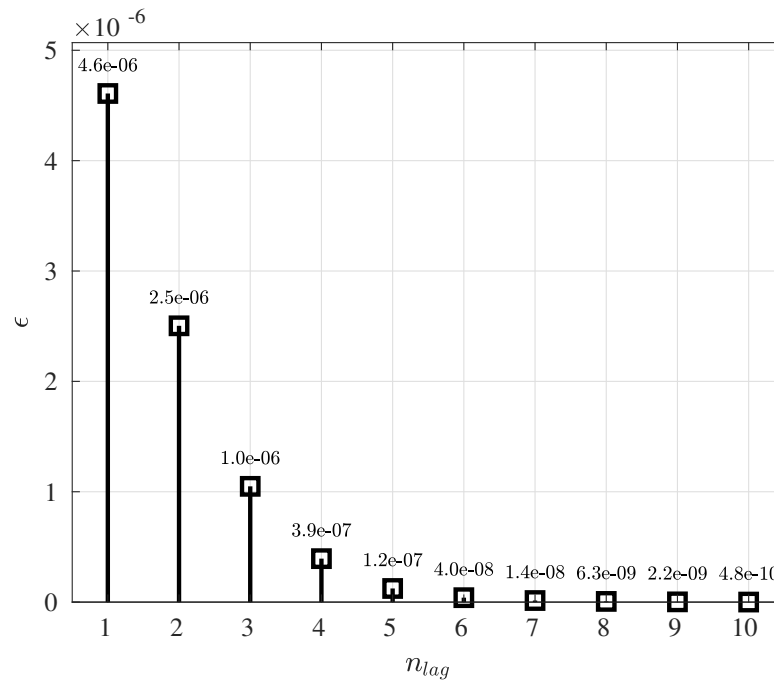
Fonte: Próprio Autor

Figura 43 – Avaliação da aproximação para cada n_{lag} utilizado - elemento Q_{22} (módulo)



Fonte: Próprio Autor

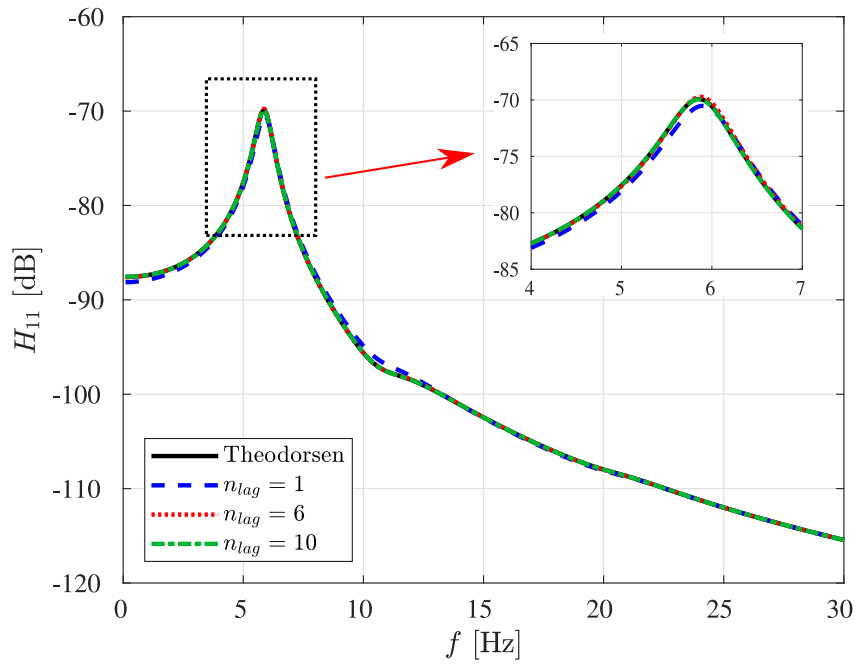
Figura 44 – Avaliação da aproximação para cada n_{lag} utilizado - Elemento Q_{33} (módulo)



Fonte: Próprio Autor

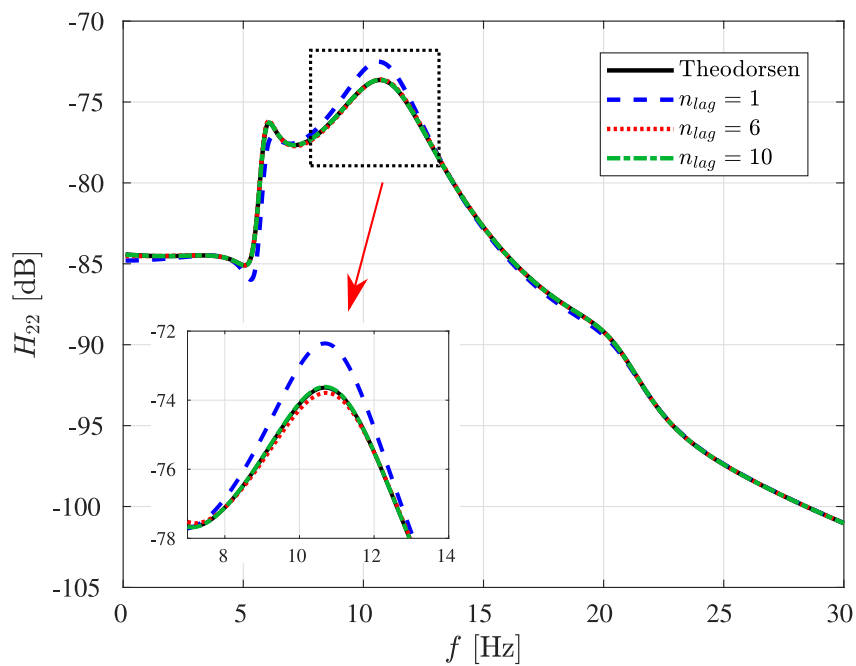
Comparando as FRFs obtidas através das equações (107) e (108) para uma condição de $V = 70m/s$, nas figuras (45) a (47), nota-se que há uma diferença entre as curvas quando utiliza-se $n_{lag} = 1$ aplicada na equação (95) para a seleção dos parâmetros de atraso. Tal diferença é menor quando $n_{lag} = 6$, sendo praticamente imperceptível em $n_{lag} = 10$. Uma forma de realizar a comparação, porém de maneira quantitativa ao invés de qualitativa, é através da utilização do teorema de Parseval (OPPENHEIM, 1999), o qual permite obter a energia a partir integração da densidade espectral de energia com relação à frequência.

Figura 45 – FRF obtida a partir das equações de Theodorsen (1935) e aproximação - H_{11}



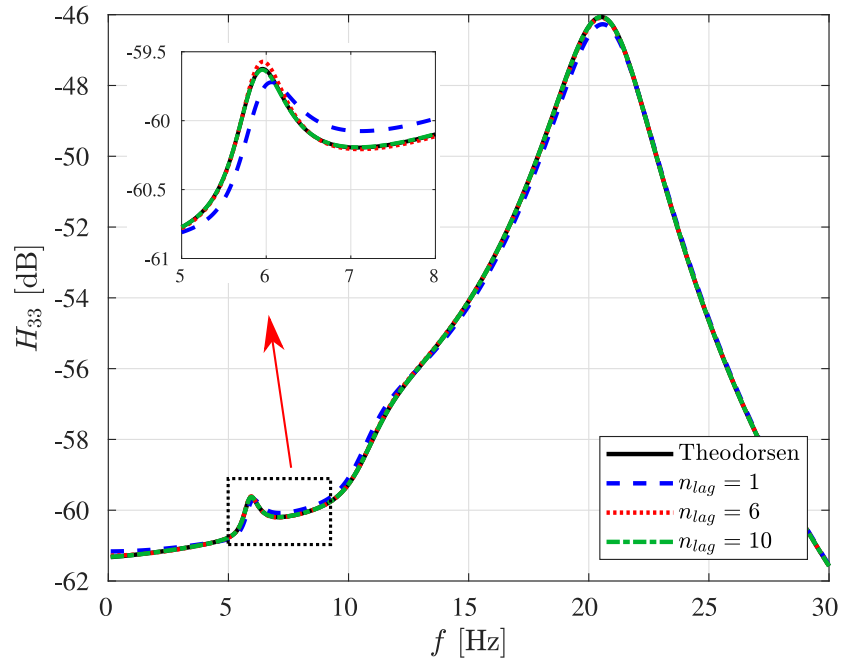
Fonte: Próprio Autor

Figura 46 – FRF obtida a partir das equações de Theodorsen (1935) e aproximação - H_{22}



Fonte: Próprio Autor

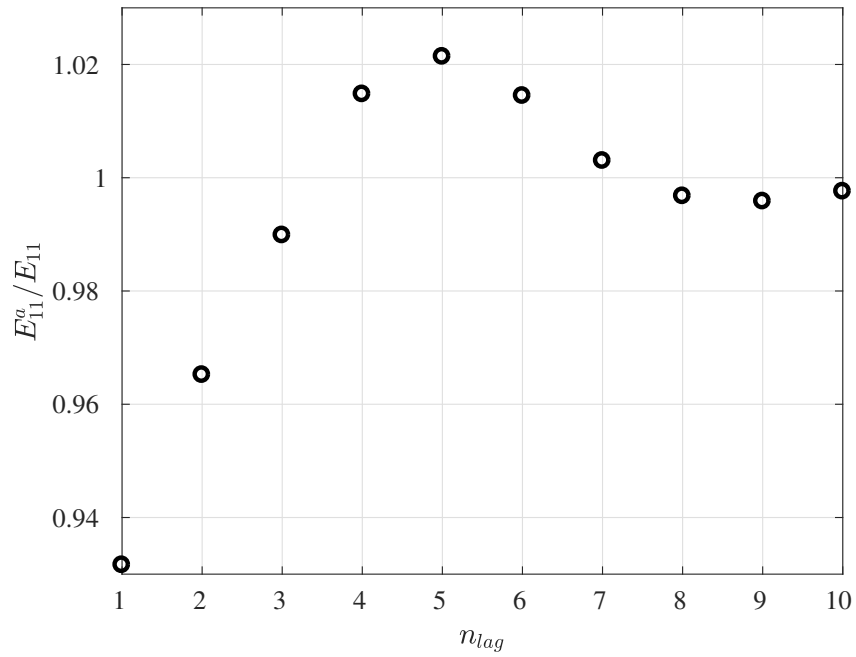
Figura 47 – FRF obtida a partir das equações de Theodorsen (1935) e aproximação - H_{33}



Fonte: Próprio Autor

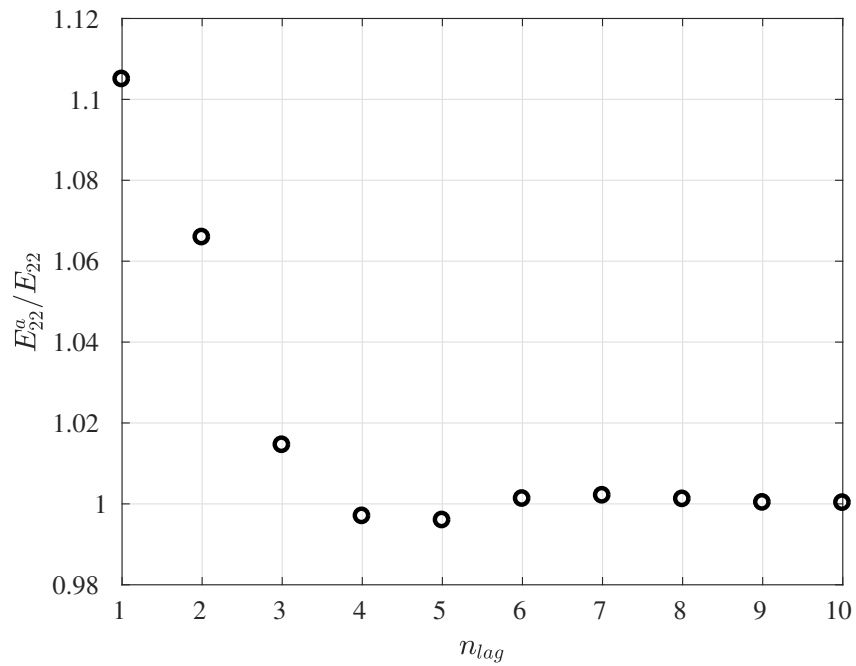
Aplicando o teorema de Parseval para as FRFs obtidas através das equações (107) e (108) sendo $n_{lag} = 1, \dots, 10$, para o cálculo dos parâmetros de atraso através da equação (95), obtém-se as energias E_{mn} e E_{mn}^a para o caso aproximado, sendo a m -ésima saída pela n -ésima entrada. As relações das segundas com a primeira, para os n_{lag} utilizados, são ilustradas nas figuras (48) a (50).

Figura 48 – Relação de energia em função do número de estados de atraso - E_{11}



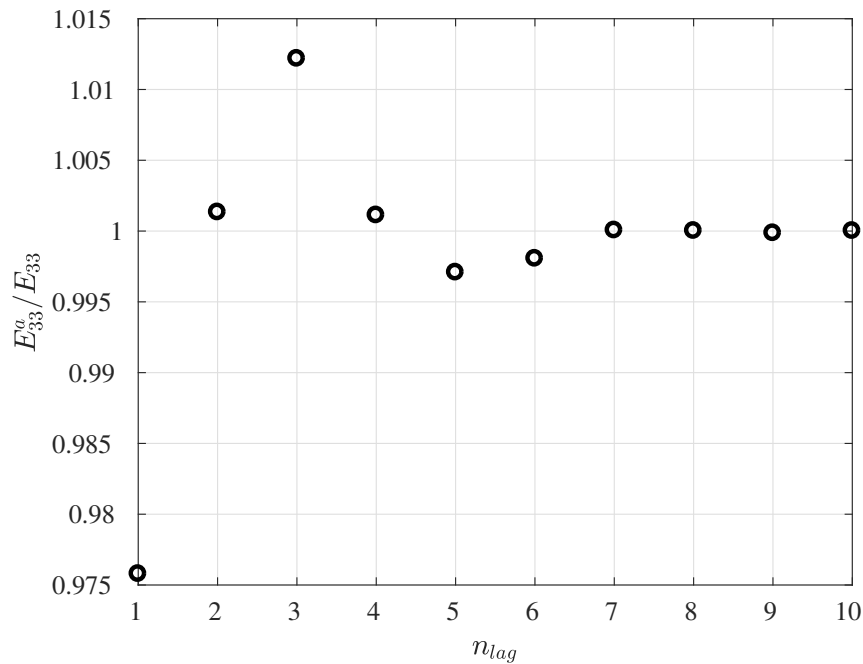
Fonte: Próprio Autor

Figura 49 – Relação de energia em função do número de estados de atraso - E_{22}



Fonte: Próprio Autor

Figura 50 – Relação de energia em função do número de estados de atraso - E_{33}



Fonte: Próprio Autor

É possível notar a partir das figuras (48) a (50) uma convergência da relação de energia com o incremento dos n_{lag} utilizados, uma vez que o valor desejado é a unidade. Apesar de existir tal convergência, não se verifica dispersão importante, podendo variar até no máximo 10% para os piores casos.

Analisando a avaliação da qualidade da aproximação através do erro relativo da norma da fase e módulo, de forma complementar, tem-se que a utilização de 6 parâmetros de atraso é adequada para se obter uma boa aproximação, ao menos para o modelo de seção típica, sendo necessária uma investigação complementar para aplicações com sistemas de maior complexidade (maior número de graus de liberdade).

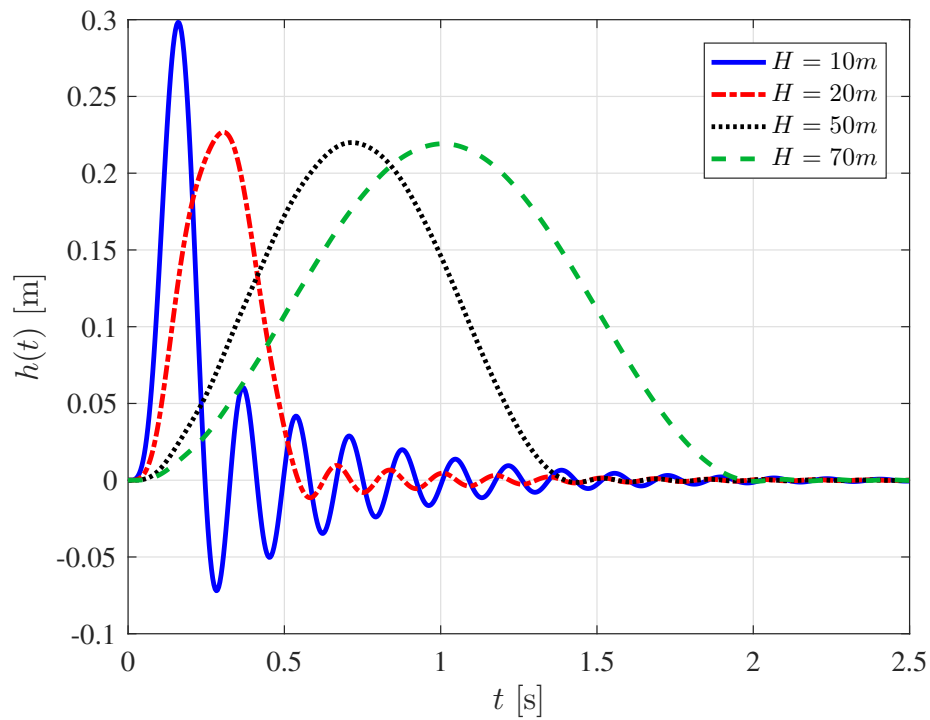
4 Resposta do Sistema Aeroelástico no Domínio do Tempo

Neste capítulo são apresentadas respostas do sistema aeroelástico estudado neste trabalho, assim como uma discussão dos resultados obtidos.

4.1 Resposta à Rajada

A figura (51) mostra o deslocamento do movimento de *plunge* do sistema aeroelástico devido à presença de rajada $1 - \cos$. Considera-se para este caso uma velocidade de escoamento do aerofólio de $V = 70 \text{ m/s}$, a velocidade máxima do perfil de velocidade de rajada igual à 20% do valor de V . Os gradientes de rajada utilizados são $H = 10, 20, 50$ e 70 m . Nota-se que a resposta de deslocamento apresenta amplitudes máximas semelhantes para todos os valores de gradiente, exceto para o de 10 m .

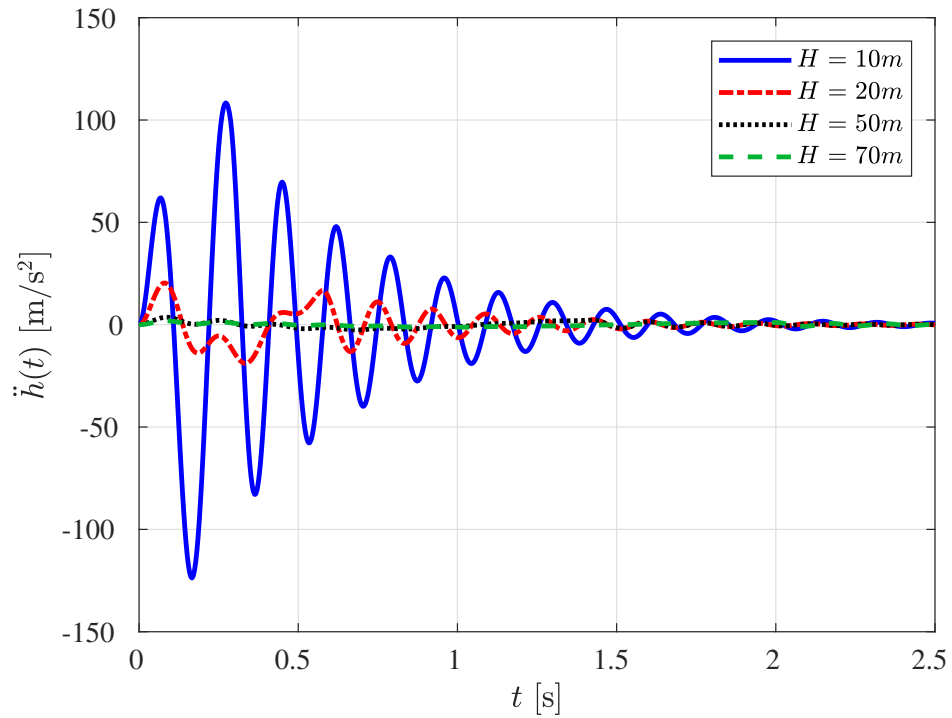
Figura 51 – Resposta à rajada para diferentes gradientes de rajada - deslocamento (*plunge*)



Fonte: Próprio Autor

Tem-se na figura (52) a aceleração do movimento de *plunge* para diferentes valores de gradiente de rajada. Nota-se que gradientes de rajada de valores menores aumentam a amplitude da aceleração, o que pode causar maiores cargas sobre a estrutura do sistema aeroelástico devido forças elevadas.

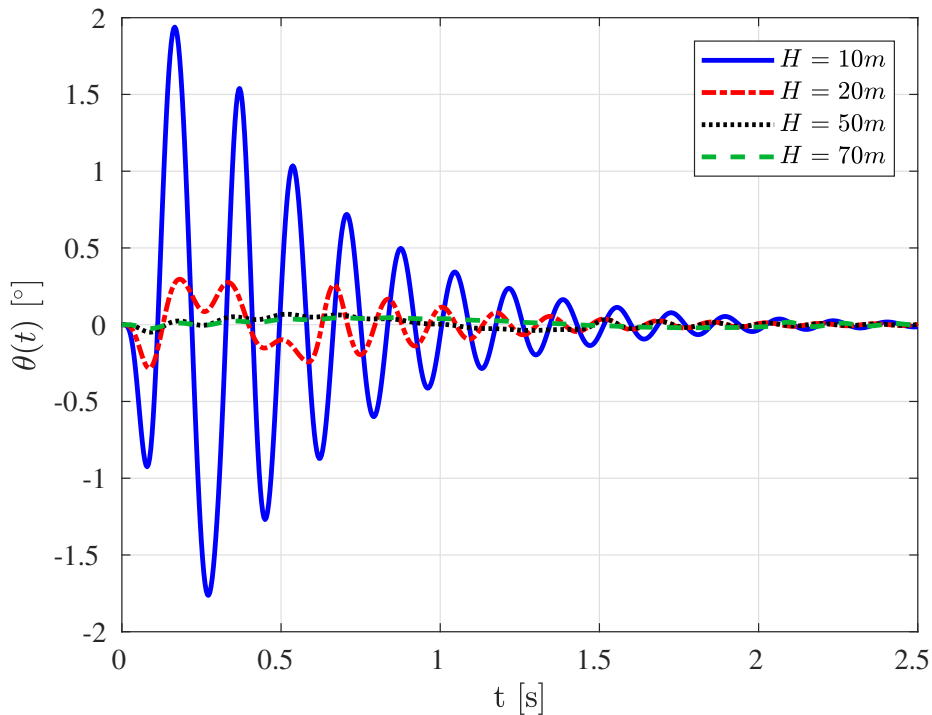
Figura 52 – Resposta à rajada para diferentes gradientes de rajada - aceleração (*plunge*)



Fonte: Próprio Autor

A figura (53) ilustra o comportamento da rotação do aerofólio (*pitch*). O comportamento observado é semelhante ao da aceleração apresentado na figura anterior, porém mesmo para o caso de maior amplitude os valores são bem pequenos.

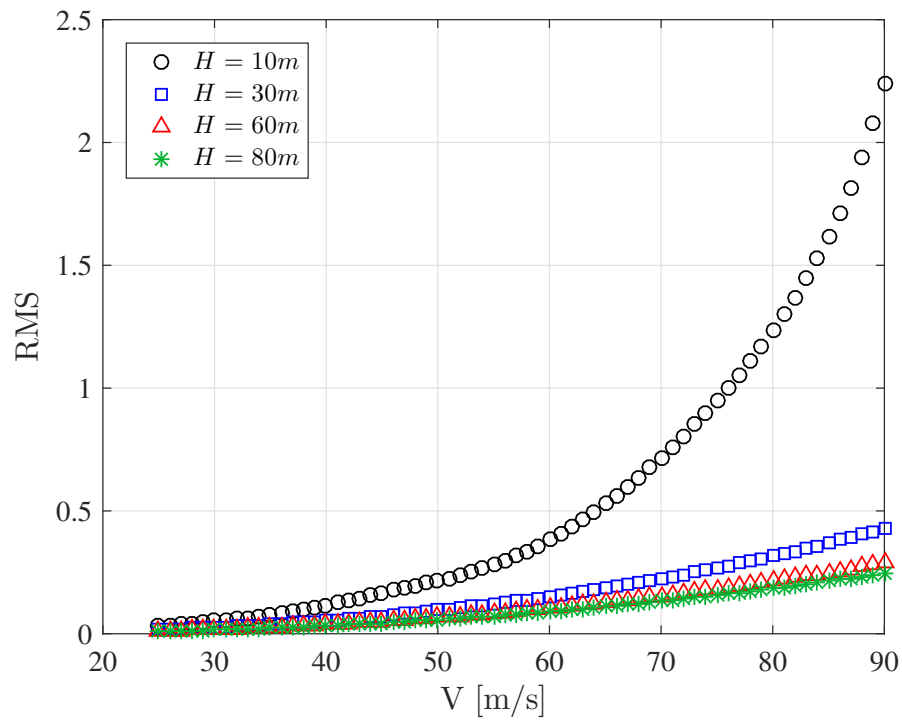
Figura 53 – Resposta à rajada para diferentes gradientes de rajada - deslocamento (*pitch*)



Fonte: Próprio Autor

Para demonstrar que a energia contida no sinal da resposta à rajada é maior para valores menores do gradientes a figura (54) mostra o gráfico do valor RMS (*root mean square*) da resposta à rajada contra a velocidade de voo para diferentes gradientes, este resultado representa a energia do sinal (OPPENHEIM, 1999). Observa-se que para os gradientes de rajada utilizados entre 30 e 80 m, os valores RMS são próximos para toda a faixa de velocidade, enquanto que um gradiente $H = 10\text{ m}$ tem valores RMS distantes dos outros a partir de 40 m/s , apresentando um comportamento exponencial. Assim, a energia é maior para um valor de gradiente menor.

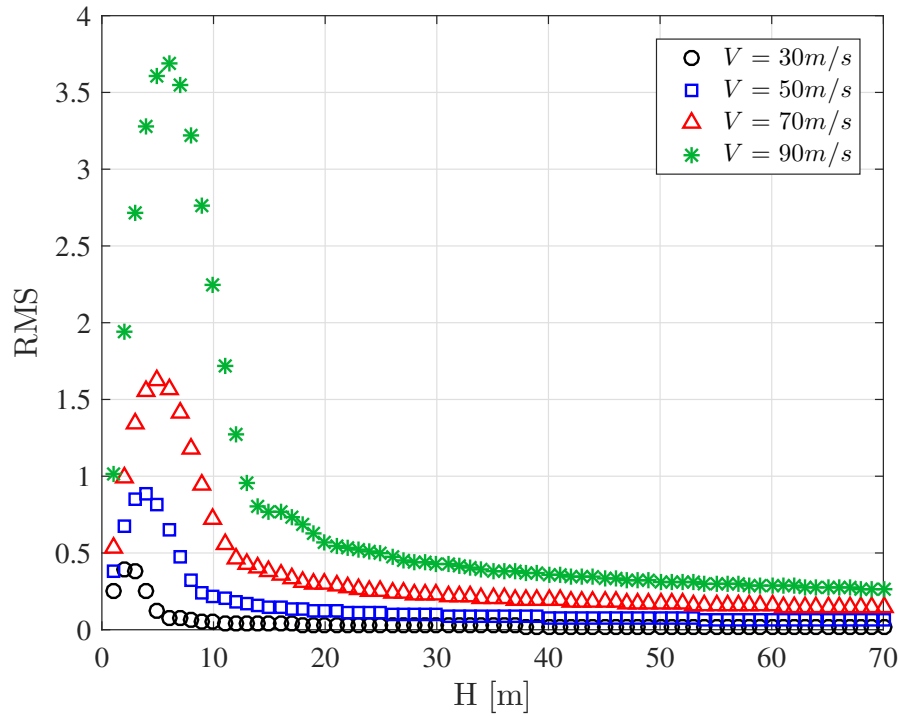
Figura 54 – Valor RMS da resposta à rajada com relação à velocidade de voo para diferentes gradientes de rajada



Fonte: Próprio Autor

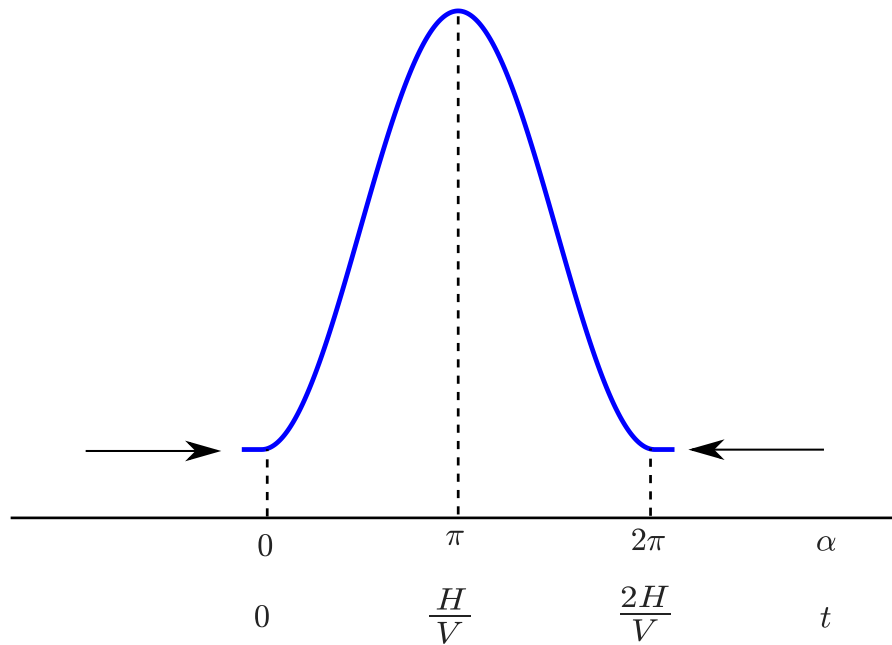
Prosseguindo na análise com relação ao valor RMS do sinal, a figura (55) mostra o RMS contra os valores do gradiente para diferentes curvas de velocidade de voo. Nota-se que existe um valor do gradiente em que o valor RMS é mais acentuado, e este gradiente é diferente para cada velocidade de voo e está abaixo de 10 m . Em linhas gerais a velocidade de voo também afeta a energia do sinal deslocando os pontos próximo ao gradiente crítico para valores RMS maiores.

Figura 55 – Valor RMS da resposta à rajada com relação ao gradiente de rajada para diferentes velocidades de voo



Fonte: Próprio Autor

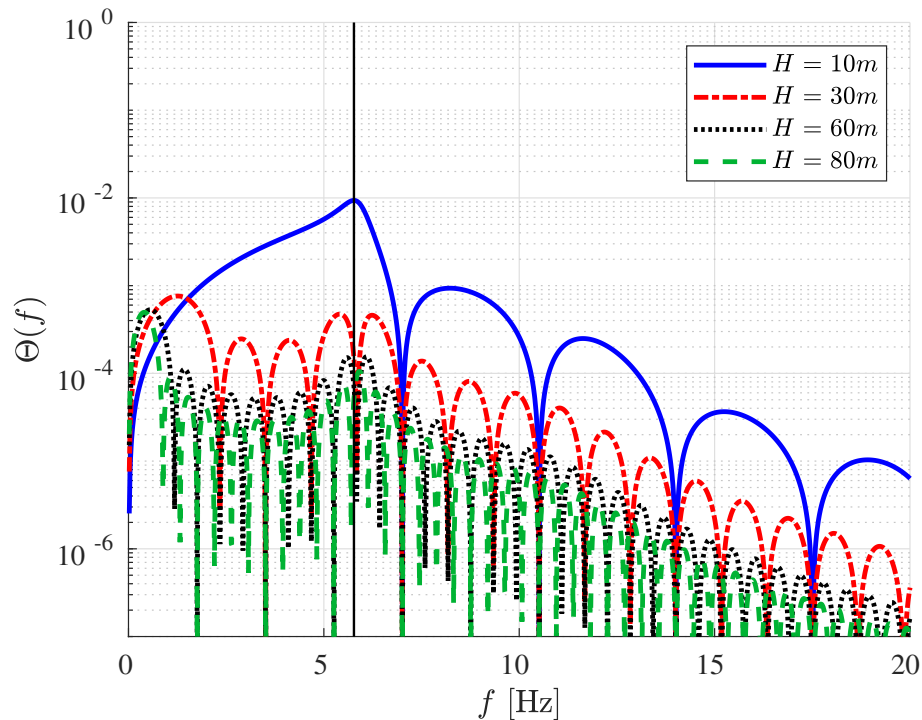
Analisando a equação (74), a frequência de oscilação é $\omega = \frac{\pi V}{H}$ ou $f = \frac{V}{2H}$, assim o período é $T = \frac{2H}{V}$. Considerando um intervalo de α de $[0, 2\pi]$ para a rajada, o termo $1 - \cos$ será nulo quando o argumento tiver valores 0 e 2π , ou então, $t = 0$ e $t = \frac{2H}{V}$ respectivamente, o valor máximo é atingido em π ou $t = \frac{H}{V}$. A rajada $1 - \cos$ é semelhante à entrada impulso quando ocorrer em um intervalo de tempo suficientemente pequeno, conforme ilustra a figura (56), para que isso ocorra a primeira condição da equação (74) deve tender à zero, ou seja, $\frac{2H}{V} \rightarrow 0$, as condições para que isso ocorra são, V ser um valor alto ou o gradiente H tendendo à zero.

Figura 56 – Rajada 1 – *cos seno*

Fonte: Próprio Autor

A figura (57) demonstra a resposta à rajada do *pitch* no domínio da frequência considerando uma velocidade de voo $V = 70 \text{ m/s}$ e o gradiente de rajada $H = 10, 30, 60$ e 80 m . Percebe-se a existência do primeiro modo aeroelástico próximo à 5 Hz , evidenciado através da linha vertical, nos primeiros valores do gradiente, sendo mais sutil nos outros. Nota-se uma periodização de Θ com relação à frequência de maneira proporcional ao tamanho do gradiente, com exceção do primeiro período, dentro um período quando $H = 10 \text{ m}$ há o triplo para quando $H = 30 \text{ m}$, e assim por diante. De acordo com [Oppenheim \(1999\)](#) o teorema de Parseval enuncia a conservação de energia do sinal, assim, a integral da PSD (*power spectral density*) da figura (57) é igual ao valor RMS e a resposta à rajada para valores de gradientes menores possui maior energia, conforme demonstrado no domínio do tempo, figuras (51) à (55).

Figura 57 – Resposta à rajada em frequência para diferentes valores de gradientes



Fonte: Próprio Autor

Já na figura (58) tem-se a resposta à rajada com o eixo da frequência adimensional definida através da equação:

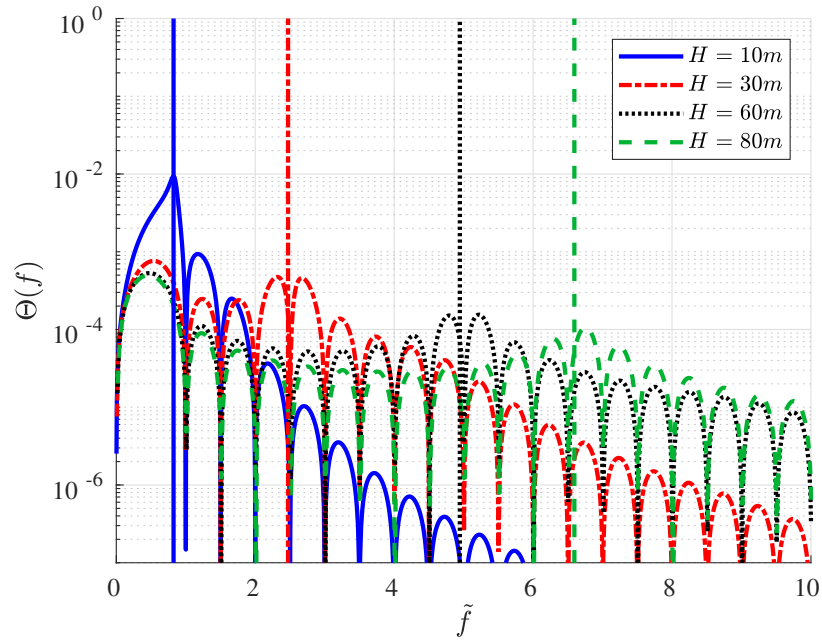
$$\tilde{f} = f \frac{H}{V} \quad (122)$$

sendo interpretada como o número de oscilações durante o tempo necessário para se atingir o ponto de máximo da rajada. As linhas verticais demarcam as frequências aeroelástica adimensionais para cada valor de H . Nota-se que quanto menor o gradiente, mais próximo de zero está essa frequência. A região de \tilde{f} entre 0 e 1 é o trecho no qual a rajada tem um comportamento que se assemelha com uma entrada impulso. Assim, quanto menor o gradiente, mais semelhante a rajada é à entrada impulso, portanto, os picos das frequências aeroelásticas são mais evidentes e podem apresentar maiores amplitudes.

A figura (59) demonstra a comparação entre a resposta à rajada para um gradiente $H = 1 m$ com a resposta à entrada impulso unitário. As curvas apresentadas possuem características semelhante, principalmente com relação à forma, pois os picos estão posicionados no mesmo valor de frequência, conforme mostrado através das linhas verticais, a diferença entre as curvas se apresenta na amplitude da resposta sendo a do impulso menor

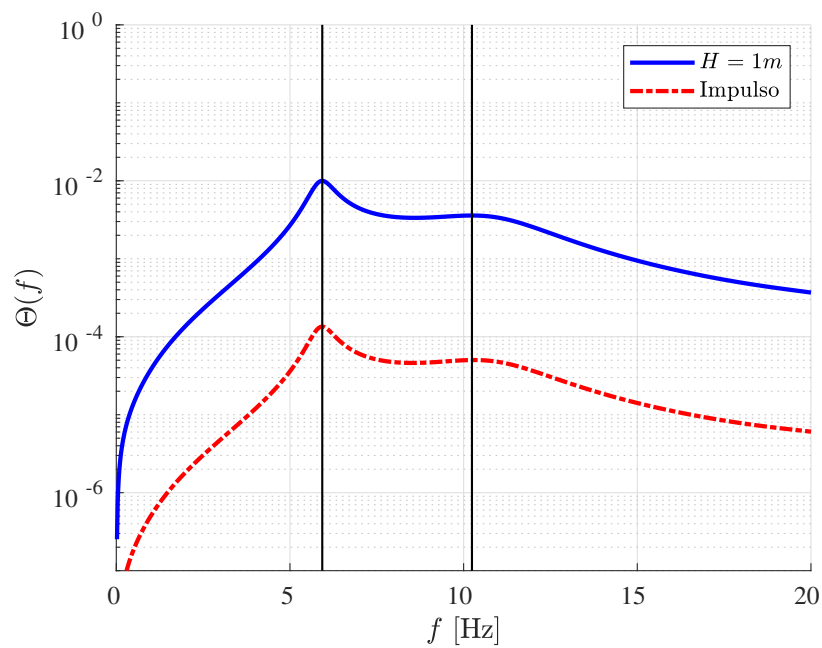
que para a rajada.

Figura 58 – Resposta à rajada em frequência adimensional para diferentes valores de gradientes



Fonte: Próprio Autor

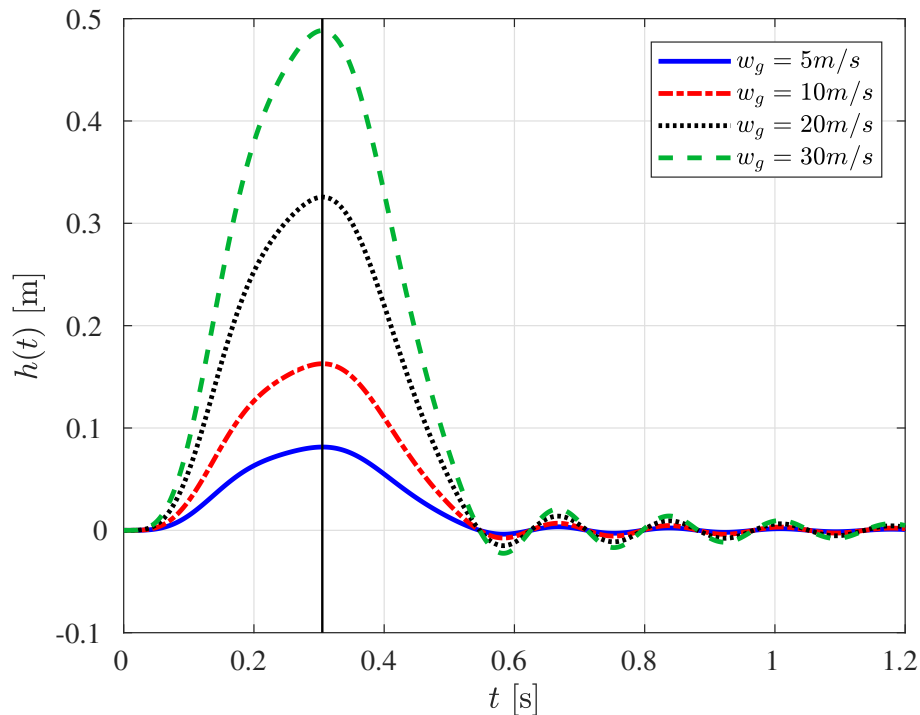
Figura 59 – Comparação entre resposta à rajada e impulso



Fonte: Próprio Autor

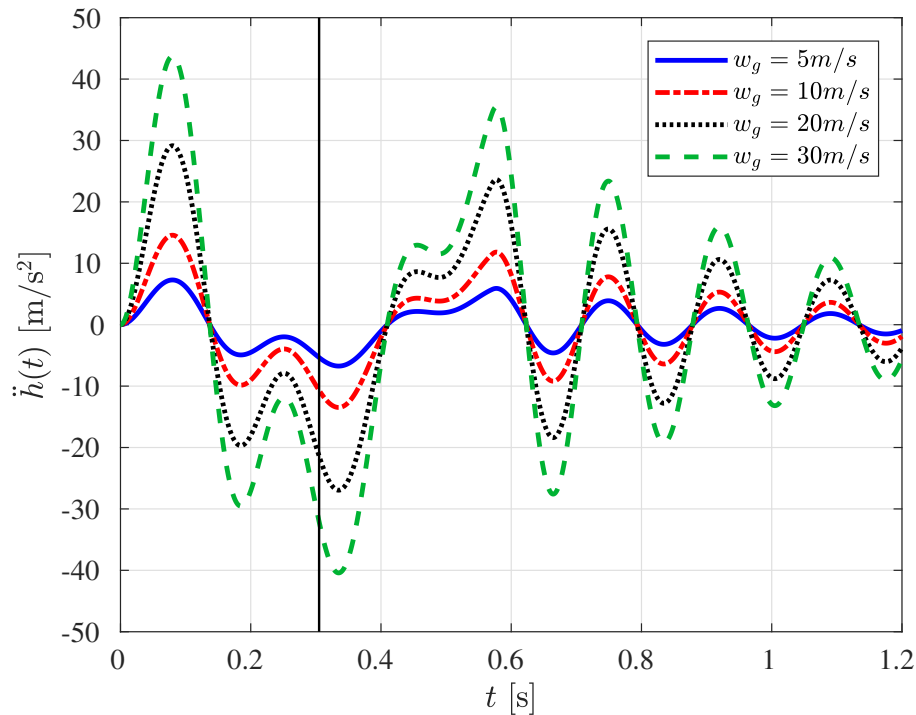
Na figura (60) observa-se as respostas às cargas de rajada sendo a velocidade do sistema aeroelástico igual à 70 m/s e um gradiente de rajada de 30 m , variando o valor da velocidade máxima do perfil da rajada entre 5 m/s e 30 m/s . Conforme há o aumento da velocidade máxima no perfil de rajada os valores máximos da resposta também aumentam, sendo possível notar que o máximo de deslocamento ocorre em um mesmo instante de tempo $t = 0,3\text{ s}$ para todos os casos. E na figura (52) tem-se a aceleração do *plunge* variando os valores de w_0 assim como para o deslocamento, a amplitude da aceleração aumenta com maiores valores de w_0 , no tempo de máxima amplitude a aceleração possui valor de 35 m/s^2 , em módulo, próximo ao maior pico da porção negativa.

Figura 60 – Resposta à rajada para vários valores de velocidade máxima do perfil da rajada - deslocamento (*plunge*)



Fonte: Próprio Autor

Figura 61 – Resposta à rajada para vários valores de velocidade máxima do perfil da rajada - aceleração (*plunge*)

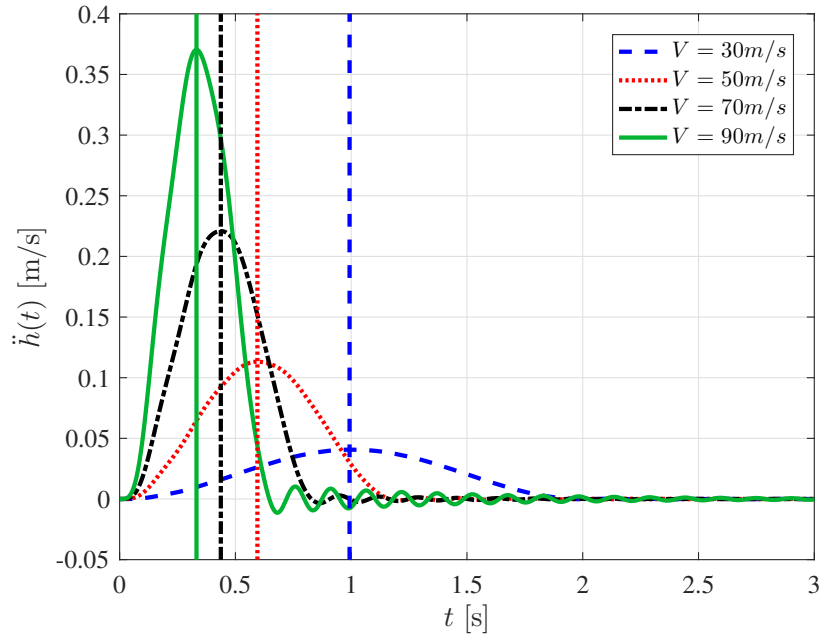


Fonte: Próprio Autor

Na figura (62) são consideradas algumas velocidades no aerofólio, entre 30 m/s e 90 m/s , para a resposta do deslocamento devido à rajada com velocidade de perfil de 20% da velocidade de voo com um gradiente de 30 m . Para esta situação, conforme a velocidade de escoamento no aerofólio diminui, a amplitude do deslocamento apresenta um decremento e, além disso, o instante de em que ocorre a amplitude máxima é deslocado para a direita no eixo do tempo. Assim, em velocidades de voo maiores, a seção típica percebe a rajada antes e experimenta um deslocamento maior. A figura (63) mostra a aceleração para o caso descrito, assim como a amplitude de deslocamento a aceleração tem maiores amplitudes quanto maior for a velocidade de voo. Então, o mesmo tipo de rajada é mais severo ao sistema aeroelástico quando este apresenta maiores velocidades de voo. As linhas verticais nas figuras (62) e (63) indicam o tempo que ocorre a máxima amplitude, o qual é obtido através da equação (123).

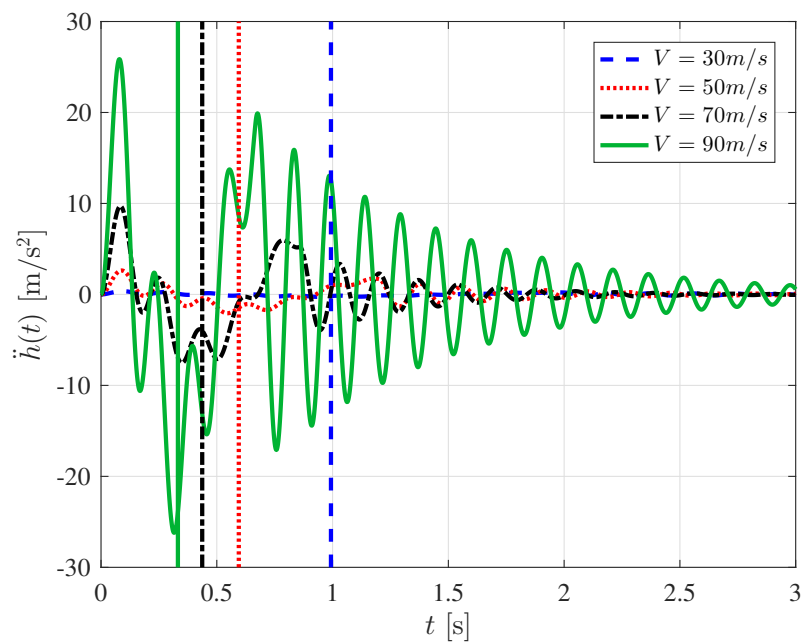
$$t_{max} = \frac{H}{V} \quad (123)$$

Figura 62 – Resposta à rajada para diferentes condições de voo, sendo a velocidade do perfil de rajada 20% desta e gradiente fixo em 30 m - deslocamento (*plunge*)



Fonte: Próprio Autor

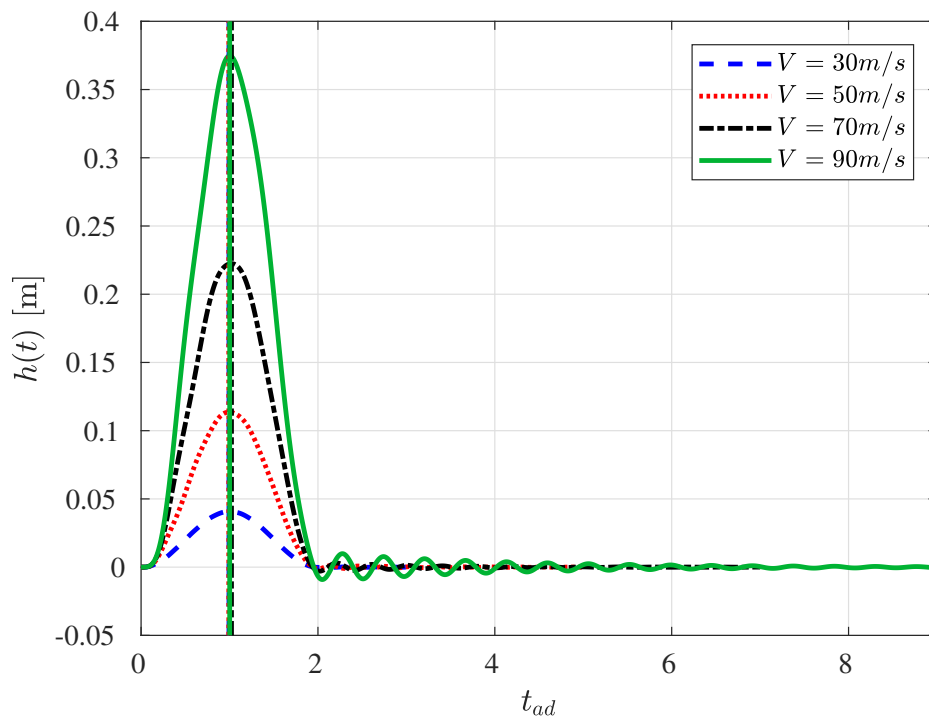
Figura 63 – Resposta à rajada para diferentes condições de voo, sendo a velocidade do perfil de rajada 20% desta e gradiente fixo em 30 m - aceleração (*plunge*)



Fonte: Próprio Autor

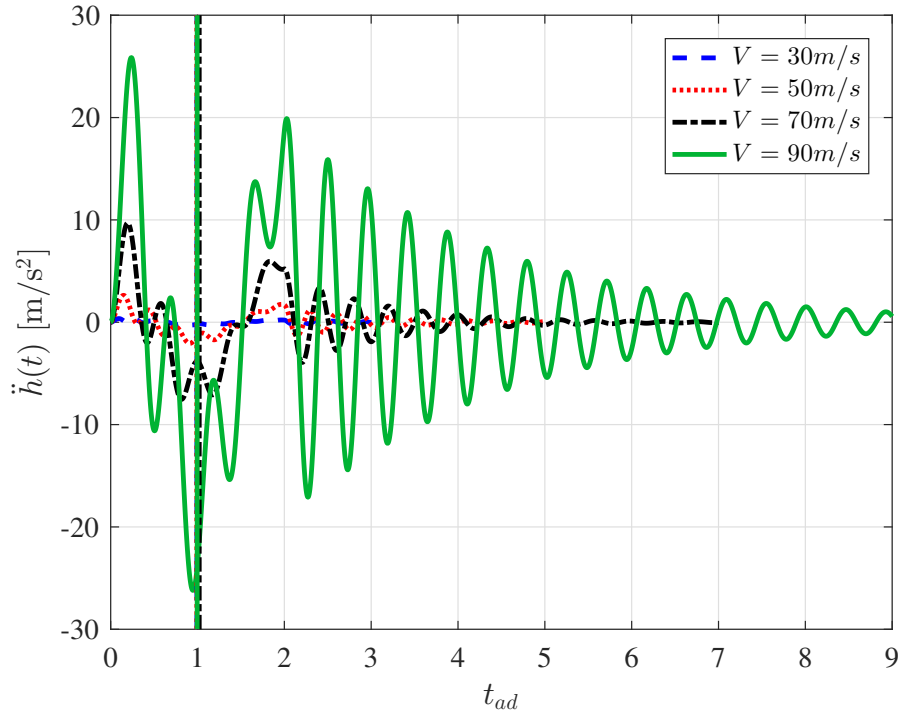
Adimensionalizando o eixo do tempo nas figuras (62) e (63) através da relação $t_{ad} = t \frac{H}{V}$, tem-se as figuras (64) e (65). Na figura (64) os valores máximos de amplitudes estão em $t_{ad} = 1$, com uma pequena variação de até 2%. A figura (65) mostra a aceleração, considerando $t_{ad} = 1$, a amplitude da aceleração para $V = 90m/s$ apresenta valor próximo ao máximo (em módulo), enquanto que para $V = 70$ e $50m/s$ a amplitude da aceleração já está em um ponto de mínimo local, próximo à valores de máximos.

Figura 64 – Resposta à rajada para diferentes condições de voo, sendo a velocidade do perfil de rajada 20% desta e gradiente fixo em 30 m em tempo adimensional - deslocamento (*plunge*)



Fonte: Próprio Autor

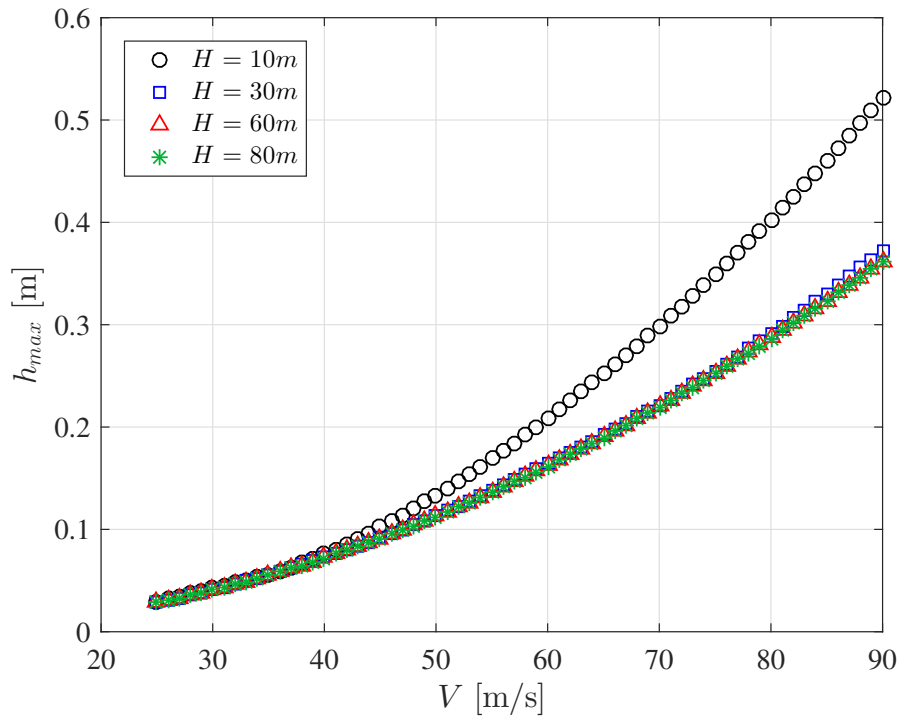
Figura 65 – Resposta à rajada para diferentes condições de voo, sendo a velocidade do perfil de rajada 20% desta e gradiente fixo em 30 m em tempo adimensional - aceleração (*plunge*)



Fonte: Próprio Autor

Sabendo o comportamento do deslocamento para diferentes velocidades de voo, é possível obter a figura (66), que mostra o valor máximo de deslocamento atingido para diferentes velocidades de voo, tendo o perfil de rajada velocidades máximas igual à 20% de V e, também, calculado para diferentes gradientes de rajada. Nota-se na figura (66) que para o gradiente $H = 10 \text{ m}$ as respostas possuem valores maiores a partir de aproximadamente 50 m/s em comparação com os outros valores de H . Para os gradientes $H = 30 \text{ m}$, 60 m e 80 m , não existem diferenças substanciais. Portanto, para essas condições, gradientes menores causam maior deslocamento, sendo mais perceptível conforme a velocidade de voo aumenta.

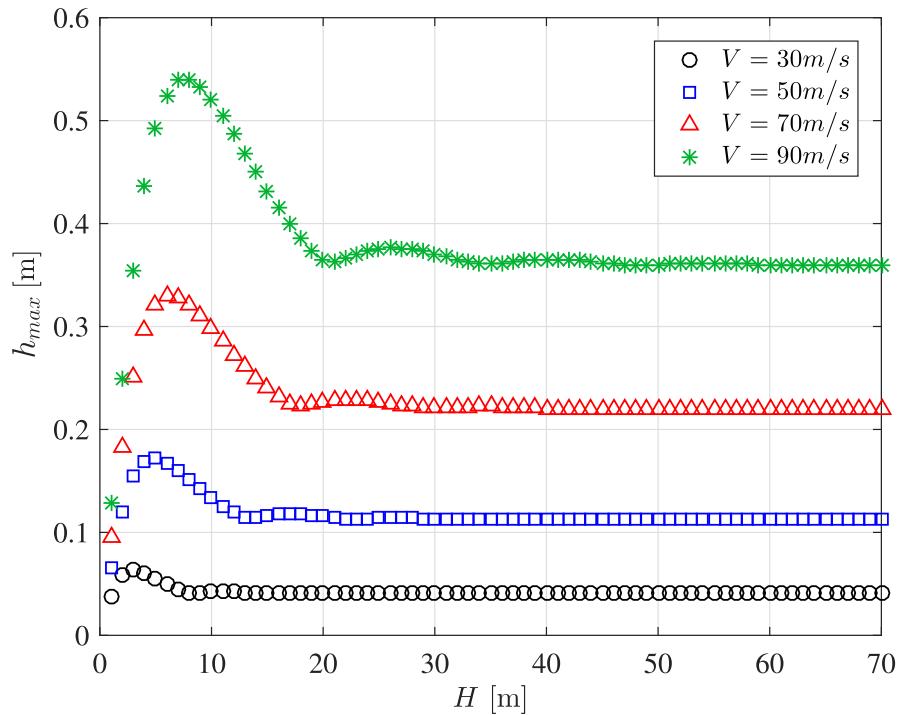
Figura 66 – Resposta à rajada em função da velocidade de escoamento considerando diferentes gradientes



Fonte: Próprio Autor

A figura (67) ilustra o comportamento dos valores da amplitude máxima atingida pelo aerofólio em função do gradiente de rajada para diferentes valores de velocidade de voo. Nota-se que para cada velocidade de voo há um valor do gradiente de rajada que resulta em um valor máximo para h_{max} , comportamento semelhante ao observado na figura (55), sendo que estes valores ocorrem para $H < 10 m$.

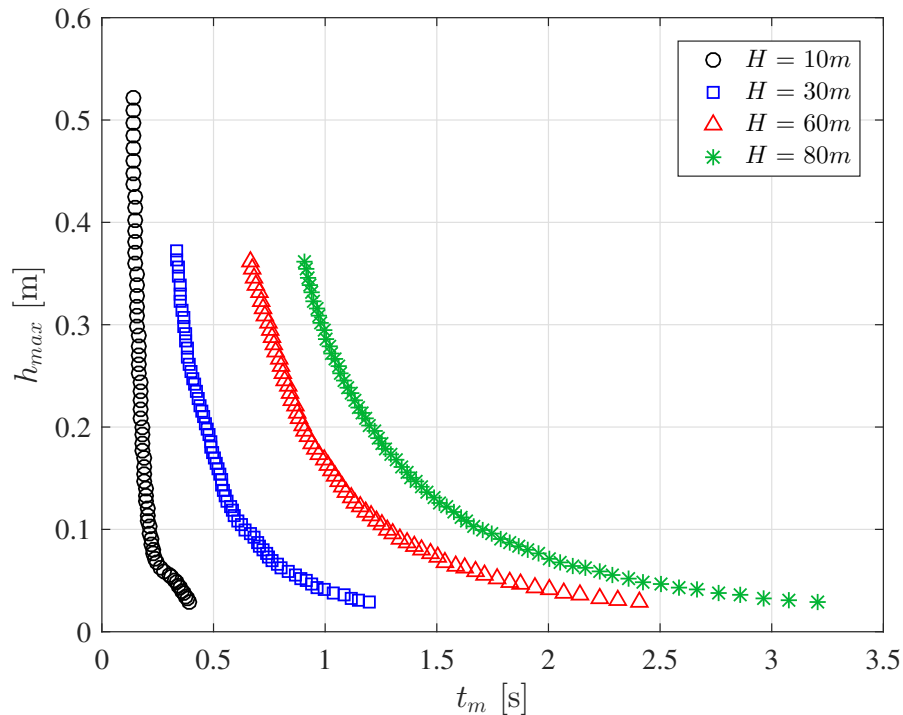
Figura 67 – Resposta à rajada em função da velocidade de escoamento considerando diferentes gradientes



Fonte: Próprio Autor

A figura (68) mostra em qual o instante de tempo t que se atinge o valor máximo da resposta à rajada para as mesmas velocidades utilizadas nas curvas da figura (66), para rajadas com velocidade de 20% da velocidade de voo, nestas figuras t_m é tal que $t_m = \operatorname{argmax}[h(t)]$. Para o valor de gradiente $H = 10 m$, o instante de tempo t do máximo é baixo, entre 0,14 e 0,4 s, enquanto que a resposta tem o maior valor e sua diminuição se dá em um intervalo de tempo pequeno. O aumento no valor do gradiente impacta em uma diminuição na resposta máxima à rajada, h entre 0,4 e 0,03 m, sendo semelhante para $H = 30, 60$ e $80 m$, e o instante em que ocorre é também cada vez maior. A cada aumento no gradiente o respectivo intervalo em que ocorre o máximo deslocamento se torna também maior.

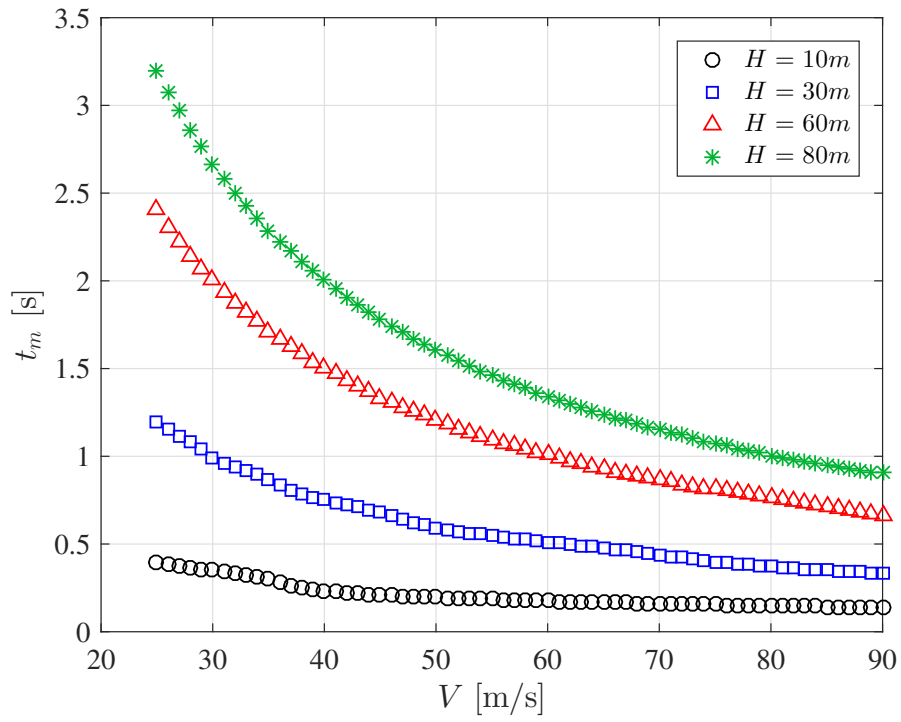
Figura 68 – Resposta máxima atingida devido à rajada em função do instante de tempo em que ocorreu o evento



Fonte: Próprio Autor

Finalmente, analisando a figura (69) tem-se o instante de tempo t em que há resposta máxima para uma faixa de velocidade de escoamento entre 25 e 100 m/s . Em gradientes baixos, o tempo para se atingir a resposta máxima é também menor e não há variação significativa com relação ao aumento da velocidade, variando entre 0,3 e 0,4 s . Aumentando o gradiente de rajada, nota-se um aumento substancial no instante de tempo, assim como a diferença entre o instante em que o máximo ocorre, sendo para $H = 80 m$ para t entre 1 e 3,25 s . Portanto, com menores velocidades, o maior deslocamento é atingido em um instante de tempo maior para qualquer valor do gradiente, sendo que para maiores valores a redução no valor deste instante de tempo é mais perceptível.

Figura 69 – Instante de tempo em que ocorre máximo deslocamento em função da velocidade de escoamento e diferentes gradientes



Fonte: Próprio Autor

5 Conclusões

Problemas envolvendo cargas de rajada são de grande interesse para a área de aeroelasticidade, pois além de terem potencialidade para causar acidentes, podem reduzir a vida útil de uma aeronave, estar relacionado com o ganho de desempenho, redução de massa e do consumo de combustível. Para se obter a resposta aeroelástica devido à rajada no domínio do tempo utilizando a aerodinâmica não estacionária de [Theodorsen \(1935\)](#), que está definida no domínio da frequência reduzida, tipicamente utiliza-se métodos de aproximação por funções racionais.

O método de Roger-Abel ([ROGER, 1977](#); [ABEL, 1979](#)) utilizado para realizar as aproximações das forças aerodinâmicas não estacionárias é amplamente utilizado em diversos trabalhos que tratam de sistemas aeroelásticos. Tal método apresenta desvantagens como a necessidade de se atribuir valores de parâmetros de atraso, os quais resultam em estados de atraso. A partir de uma análise do movimento prescrito, o presente trabalho demonstra que esses parâmetros são responsáveis pela correção da defasagem no tempo entre as forças aerodinâmicas e o movimento. A partir da investigação dos efeitos relacionados aos parâmetros de atraso na força aerodinâmica aproximada, são apresentados três critérios, de modo complementar, para avaliar a aproximação, sendo que critério para a escolha dos parâmetros através da equação (95) e do erro relativo da norma da fase se destaca e pode eventualmente ser utilizado de modo independente.

A partir da análise para a rajada discreta do tipo 1 – *cossseno*, para cada velocidade de voo V , fixa-se a velocidade máxima de rajada $w_0 = 0,2V$. Verifica-se que o sistema apresenta maiores amplitudes de oscilação (*plunge*, *pitch* e superfície de controle) para gradientes menores, por exemplo $H = 10m$, enquanto que para valores maiores já apresentam menor amplitude de deslocamento sem significativa diferença entre elas no caso do *plunge*, já para *pitch* a amplitude diminui com o aumento de H , o mesmo é válido para a aceleração do *plunge*.

Analisando a energia da resposta à rajada através de valores RMS, conclui-se que até uma velocidade de 50 m/s não há grandes incrementos para os gradientes, porém

em velocidades de voo maiores um $H = 10 m$ resulta em respostas com maior energia, que eventualmente pode ser prejudicial à estrutura enquanto que para outros valores de gradiente não se observa diferenças significantes. Utilizando os valores RMS se encontra qual a faixa de gradiente de rajada para que a resposta tenha maior valor em diferentes velocidades de voo.

Já uma breve análise no domínio da frequência demonstra que para rajada com comprimento de gradiente menor resulta em maior amplitude, assim como demonstrado anteriormente. Através do teorema de Parseval [Oppenheim \(1999\)](#) sabe-se que a integral da PSD é a energia contida no sinal, assim gradientes menores possuem maior energia. A rajada $1 - \text{cosseno}$ se aproxima da entrada impulso quando o intervalo de tempo, $0 \leq t \leq 2H/V$, tende à zero, ou seja, quando os valores de H são suficientemente baixo ou V alto. É possível tornar o eixo da frequência adimensional, $\tilde{f} = f \frac{H}{V}$ (número de oscilações durante o tempo necessário para atingir o ponto máximo), assim a partir desse gráfico conclui-se que o intervalo entre 0 e 1 é a região na qual a rajada tem comportamento semelhante à entrada impulso, e também que para menores valores de H a frequência aeroelástica associada se aproxima de zero.

Adotando-se uma velocidade de voo $V = 70 m/s$ e o gradiente de rajada $H = 30 m$, com o aumento do pico de velocidade de w_{go} , a resposta apresenta amplitudes maiores. Finalmente, ao se variar a velocidade de voo V , tornando fixos os outros parâmetros, maiores velocidades de voo contribuem para que a amplitude da resposta à rajada seja maior. Comparando as amplitudes máximas em função das velocidades de voo, para diferentes gradientes de rajada, nota-se que até certa a velocidade $V = 50 m/s$ o gradiente não tem grande influência na amplitude máxima (entre 0,1 e 0,15 m), sendo que após tal velocidade gradientes com menor valor mostram-se mais agressivos em relação aos maiores, em $V = 90 m/s$ e $H = 10 m$ a amplitude é de 0,5 m e 0,35 m para os demais H . De maneira geral é possível concluir que o impacto de valores menores de gradiente é maior para a maioria dos casos analisados já que a amplitude ou energia atingiram valores muito maiores que os demais H . Assim gradientes de menor comprimento ter um maior potencial para causar mais danos à estrutura de aeronaves, porém dependendo da velocidade de voo considerada esse impacto poderá ser semelhante aos demais valores de H .

5.1 Sugestão para Trabalhos Futuros

Para a continuidade deste trabalho segue as seguintes sugestões:

- Utilização de outro sistema estrutural;
- Utilização da rajada contínua;
- Obtenção do modelo no domínio do tempo através de outro método de aproximação;
- Análise de resposta à rajada considerando incertezas (estrutural ou condições de voo);
- Análise experimental da resposta à rajada;
- Implementar um sistema de controle para alívio da resposta à rajada (considerando ou não as incertezas).

Referências

ABEL, I. **An analytical technique for predicting the characteristics of a flexible wing equipped with an active flutter-suppression system and comparison with wind-tunnel data.** Hampton: Langley Research Center, 1979.

AOUF, N.; BOULET, B.; BOTEZ, R. M. Robust gust load alleviation for a flexible aircraft. **Canadian Aeronautics and Space Journal**, Ottawa, 1962-2004., v. 46, n. 3, p. 131–139, 2000.

BATINA, J. T.; YANG, T. Y. Application of transonic codes to aeroelastic modeling of airfoils including active controls. **Journal of Aircraft**, Washington, v. 21, n. 8, p. 623–630, 1984. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/3.45033>. Acesso em: 20 out. 2017.

BHATIA, K. G. Airplane aeroelasticity: practice and potential. **Journal of aircraft**, Washington, v. 40, n. 6, p. 1010–1018, 2003.

BISKRI, D. et al. New mixed method for unsteady aerodynamic force approximations for aeroservoelasticity studies. **Journal of Aircraft**, Washington, v. 43, n. 5, p. 1538–1542, 2006.

BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. L. **Aeroelasticity.** [S.l.]: Dover Publications, 1996.

BUENO, D. D. **A contribution to aeroelasticity using Lyapunov's Theory.** 2014. 178 f. Tese (Thesis) — ITA - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2014.

BUENO, D. D.; GONÇALVES, P. J. P. A note on typographical errors defining theodorsen's coefficients for aeroelastic analysis. **Journal of Vibration and Control**, London, v. 24, n. 10, p. 2061–2069, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1177/1077546316677191>. Acesso em: 10 mai. 2017.

CENIPA. **Relatório Final A-064/CENIPA/2013.** [S.l.], 2013a.

_____. **Relatório Final A-158/CENIPA/2013.** [S.l.], 2013b.

COLLAR, A. R. The expanding domain of aeroelasticity. **The Journal of the Royal Aeronautical Society**, Cambridge, v. 50, n. 428, p. 613–636, jun. 1946.

DILLSAVER, M. J.; CESNIK, C. E.; KOLMANOVSKY, I. V. Gust load alleviation control for very flexible aircraft. In: **AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference**, Portland, v. 6368, p. 8–11, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/6.2011-6368>. Acesso em: 15 dez. 2017.

- DINU, A. D.; BOTEZ, R. M.; COTOI, I. Aerodynamic forces approximations using the chebyshev method for closed-loop aeroservoelasticity studies. **Canadian Aeronautics and Space Journal**, Ottawa, v. 51, p. 167–175, n. 4, 2005.
- DOWELL, E. H. **A simple method for converting frequency-domain aerodynamics to the time domain**. Hampton: Langley Research Center, 1980.
- DUNN, H. J. **An analytical technique for approximating unsteady aerodynamics in the time domain**. Hampton: Langley Research Center, 1980.
- EASA (Ed.). **Certification specifications for large aeroplanes S-25**. [S.l.: s.n.], 2007.
- EVERSMAN, W.; TEWARI, A. Consistent rational-function approximation for unsteady aerodynamics. **Journal of Aircraft**, Washington, v. 28, n. 9, p. 545–552, 1991. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/3.46062>. Acesso em: 20 nov. 2017.
- FEDERAL AVIATION ADMINISTRATION. **FAA Advisory Circular 25.341-1**. [S.l.: s.n.], 2014.
- FUNG, Y. C. **An introduction to the theory of aeroelasticity**. [S.l.]: Dover Publications, 1993.
- HODGES, D. H.; PIERCE, G. A. **Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity**. Cambridge, Cambridge University Press, 2002.
- JONES, R. T. **The unsteady lift of a wing of finite aspect ratio**. Washington, National Advisory Committee for Aeronautics, 1940.
- KARPEL, M. **Design for active and passive flutter suppression and gust alleviation**. Stanford: Langley Research Center, 1981.
- _____. Design for active flutter suppression and gust alleviation using state-space aeroelastic modeling. **Journal of Aircraft**, Washington, v. 19, n. 3, p. 221–227, 1982.
- KÜSSNER, H. G.; SCHWARZ, I. **The Oscillating Wing with Aerodynamically Balanced Elevator**. [S.l.], 1940.
- LIND, R. Match-point solutions for robust flutter analysis. **Journal of aircraft**, Washington, v. 39, n. 1, p. 91–99, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/2.2900>. Acesso em: 11 nov. 2017.
- MARQUI, C. R. et al. A reduced order state space model for aeroelastic analysis in time domain. **Journal of Fluids and Structures**, Amsterdã v. 69, p. 428–440, 2017.
- MARZOCCA, P.; LIBRESCU, L.; CHIOCCHIA, G. Aeroelastic response of 2-d lifting surfaces to gust and arbitrary explosive loading signatures. **International Journal of Impact Engineering**, Amsterdã v. 25, n. 1, p. 41–65, 2001.
- MATAS, L. G. et al. Worst-case gust loads prediction with the effects of local structural nonlinearity. In: AIAA SCITECH 2019 FORUM, 2019, [S. l.: s. n.], 2019. **Proceedings [...]** [S. l.: s. n.], 2019. p. 0760

MATTABONI, M.; QUARANTA, G.; MANTEGAZZA, P. Active flutter suppression for a three-surface transport aircraft by recurrent neural networks. **Journal of guidance, control, and dynamics**, Washington, v. 32, n. 4, p. 1295–1307, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/1.40774>. Acesso em: 12 set. 2017.

MOULIN, B.; KARPEL, M. Gust loads alleviation using special control surfaces. **Journal of Aircraft**, Washington, v. 44, n. 1, p. 17–25, 2007.

NOBACK, R. Comparison of discrete and continuous gust methods for airplane design loads determination. **Journal of Aircraft**, Washington, v. 23, n. 3, p. 226–231, 1986. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/3.45293>. Acesso em: 27 out. 2018.

NOLL, T. E. et al. **Investigation of the Helios Prototype Aircraft Mishap**. [S.l.:s.n.], 2004.

OPPENHEIM, A. V. **Discrete-time signal processing**. [S.l.]: Pearson Education India, 1999.

PATIL, M. Nonlinear gust response of highly flexible aircraft. In: AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC STRUCTURES, STRUCTURAL DYNAMICS, AND MATERIALS CONFERENCE, 48th, [S.l.]. **Proceedings [...]** [S.l.: s.n.], 2007. p. 2103.

PETTIT, C. L.; HAJJ, M.; BERAN, P. Gust loads with uncertainty due to imprecise gust velocity spectra. In: AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, STRUCTURAL DYNAMICS, AND MATERIALS CONFERENCE, STRUCTURES, STRUCTURAL DYNAMICS, AND MATERIALS AND CO-LOCATED CONFERENCES, 48th, [S.l.]. **Proceedings [...]** [S.l.: s.n.], 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/6.2007-1965>.

POSSOUT-VASSAL, C. et al. Gust load alleviation: Identification, control, and wind tunnel testing of a 2-d aeroelastic airfoil. New York, **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 25, n. 5, p. 1736–1749, 2017. ISSN 1063-6536.

PRIME, Z.; CAZZOLATO, B.; DOOLAN, C. A mixed H_2/H_∞ scheduling control scheme for a two degree-of-freedom aeroelastic system under varying airspeed and gust conditions. In: AIAA GUIDANCE, NAVIGATION AND CONTROL CONFERENCE, 2008, Honolulu. **Proceedings [...]** Hawaii: [s.n.], 2008. p. 18-21. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/6.2008-6787>. Acesso em: 27 out. 2018.

ROGER, K. Airplane math modeling methods for active control design. In: **Structural Aspects of Active Control**. [S.l.: s.n.], 1977.

SEVART, F. D. **Development of active flutter suppression wind tunnel testing technology**. [S.l.:s.n.], 1975.

SILVA, R. G. A. da. **Análise aeroelástica no espaço de estados aplicada a aeronaves de asa fixa**. 1994. 196 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — USP, São Carlos, 1994.

TANG, D.; GAVIN, H. P.; DOWELL, E. H. Study of airfoil gust response alleviation using an electro-magnetic dry friction damper. par 1: Theory. **Journal of Sound and Vibration**, Amsterdã, v. 269, n. 3-5, p. 853–874, 2004.

THEODORSEN, T. **General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter**. [S.l.:s.n.], 1935.

VARTIO, E. et al. Structural modal control and gust load alleviation for a sensorcraft concept. In: AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC STRUCTURES, STRUCTURAL DYNAMICS AND MATERIALS CONFERENCE, 46th, [s.n.]. **Proceedings** [...] [S.l.:s.n.], 2005. p. 1946. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/6.2005-1946>. Acesso em: 22 set. 2018.

VEPA, R. On the use of padé approximants to represent unsteady aerodynamic loads for arbitrarily small motions of wings. In: AEROSPACE SCIENCES MEETING, 14th, [s. n.] **Proceedings** [...] [S. l.: s.n.], 1976. p. 17.

VERSIANI, T. de S. S. **Alívio de carga de rajada em asa flexível instrumentada com transdutores piezoelétricos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — ITA - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2016.

WAGNER, H. Über die entstehung des dynamischen auftriebes von tragflügeln. **ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics**/**Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, Berlim, v. 5, n. 1, p. 17–35, 1925.

WRIGHT, J. R.; COOPER, J. E. **Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads**. 2. ed. [S.l.]: Wiley Aerospace Series, 2015.

ZONA. **ZAERO theoretical manual**. 02-12.4, v. 8.5. ed. [S.l.], 2011.

ANEXO A – Potenciais de Velocidade e Constantes de Theodorsen

São apresentados neste anexo as formulações para os potenciais de velocidade utilizados para a obtenção dos esforços aerodinâmicos conforme desenvolvido por [Theodorsen \(1935\)](#), assim como as constantes de Theodorsen.

$$\int_c^1 \varphi_\theta dx = -\frac{b}{2} V \theta T_4 \quad (124)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_\theta dx = \frac{b}{2} V \pi \quad (125)$$

$$\int_c^1 \varphi_{\dot{h}} dx = -\frac{b}{2} \dot{h} T_4 \quad (126)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_{\dot{h}} dx = \frac{b}{2} \dot{h} \pi \quad (127)$$

$$\int_c^1 \varphi_{\dot{\theta}} dx = \dot{\theta} b^2 T_9 \quad (128)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_{\dot{\theta}} dx = -\dot{\theta} b^2 \frac{\pi a}{2} \quad (129)$$

$$\int_c^1 \varphi_\beta dx = -\frac{b}{2\pi} V \beta T_5 \quad (130)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_\beta dx = -\frac{b}{2} V \beta T_4 \quad (131)$$

$$\int_c^1 \varphi_{\dot{\beta}} dx = -\frac{b^2}{2\pi} \dot{\beta} T_2 \quad (132)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_{\dot{\beta}} dx = -\frac{b^2}{2} \dot{\beta} T_1 \quad (133)$$

$$\int_c^1 \varphi_\theta(x-c)dx = -\frac{b^2}{2}V\theta T_1 \quad (134)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_\theta(x-c)dx = -\frac{b^2}{2}V\theta c\pi \quad (135)$$

$$\int_c^1 \varphi_{\dot{h}}(x-c)dx = -\frac{b^2}{2}\dot{h}T_1 \quad (136)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_{\dot{h}}(x-c)dx = -\frac{b^2}{2}\dot{h}c\pi \quad (137)$$

$$\int_c^1 \varphi_{\dot{\theta}}(x-c)dx = \dot{\theta}b^2T_{13} \quad (138)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_{\dot{\theta}}(x-c)dx = \dot{\theta}b^2T_{14}\pi \quad (139)$$

$$\int_c^1 \varphi_\beta(x-c)dx = -\frac{b}{2\pi}V\beta T_2 \quad (140)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_\beta(x-c)dx = -\frac{b}{2\pi}V\beta T_8 \quad (141)$$

$$\int_c^1 \varphi_{\dot{\beta}}(x-c)dx = -\frac{b}{2\pi}V\dot{\beta}T_2 \quad (142)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_{\dot{\beta}}(x-c)dx = -\frac{b}{2\pi}V\dot{\beta}T_7 \quad (143)$$

As constantes T_n são definidas abaixo, sendo para $n = 1, \dots, 14$ apresentadas em [Theodorsen \(1935\)](#), enquanto que $n = 15, \dots, 19$, não são definidas no trabalho original, visto que o autor não utiliza arranjo matricial.

$$T_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{1-c^2}(2+c^2) + c\cos^{-1}(c) \quad (144)$$

$$T_2 = c(1-c^2) - \sqrt{1-c^2}(1+c^2)\cos^{-1} + c(\cos^{-1})^2 \quad (145)$$

$$T_3 = -\left(\frac{1}{8} + c^2\right)(\cos^{-1}(c))^2 + \frac{1}{4}c\sqrt{1-c^2}\cos^{-1}(c)(7+2c^2) \quad (146)$$

$$T_4 = -\cos^{-1}(c) + c\sqrt{1-c^2} \quad (147)$$

$$T_5 = -(1-c^2) - (\cos^{-1}(c))^2 + 2c\sqrt{1-c^2}\cos^{-1}(c) \quad (148)$$

$$T_6 = T_2 \quad (149)$$

$$T_7 = -\left(\frac{1}{8} + c^2\right) \cos^{-1}(c) + \frac{1}{8}c\sqrt{1-c^2}(7+2c^2) \quad (150)$$

$$T_8 = -\frac{1}{3}\sqrt{1-c^2}(2c^2+1) + c \cos^{-1}(c) \quad (151)$$

$$T_9 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \left(\sqrt{1-c^2} \right)^3 + aT_4 \right] \quad (152)$$

$$T_{10} = \sqrt{1-c^2} + \cos^{-1}(c) \quad (153)$$

$$T_{11} = \cos^{-1}(c)(1-2c) + \sqrt{1-c^2}(2-c) \quad (154)$$

$$T_{12} = \sqrt{1-c^2}(2+c) - \cos^{-1}(c)(2c+1) \quad (155)$$

$$T_{13} = \frac{1}{2} [-T_7 - (c-a)T_1] \quad (156)$$

$$T_{14} = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}ac \quad (157)$$

$$T_{15} = T_4 + T_{10} \quad (158)$$

$$T_{16} = T_1 - T_8 - (c-a)T_4 + \frac{T_{11}}{2} \quad (159)$$

$$T_{17} = -2T_9 - T_1 + \left(a - \frac{1}{2}\right)T_4 \quad (160)$$

$$T_{18} = T_5 - T_4T_{10} \quad (161)$$

$$T_{19} = -\frac{1}{2}T_4T_{11} \quad (162)$$

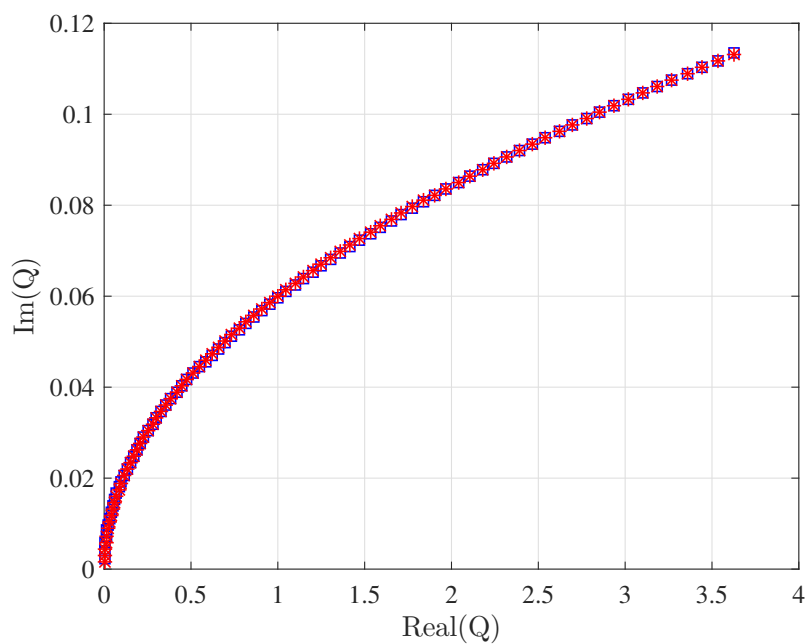
É possível encontrar a prova matemática para algumas das constantes de Theodorsen em [Bueno \(2014\)](#), [Bueno e Gonçalves \(2016\)](#).

ANEXO B – Comparações das Matrizes Aerodinâmicas Aproximada e Exata

São apresentados neste anexo as figuras de comparação dos coeficientes, real contra imaginário, e fase, entre os elementos da matriz aerodinâmica $\mathbf{Q}(k)$ com aproximação obtida através do método de Roger-Abel ([ROGER, 1977](#); [ABEL, 1979](#)), assim como as curvas de erro obtidas para diferentes valores de n_{lag} .

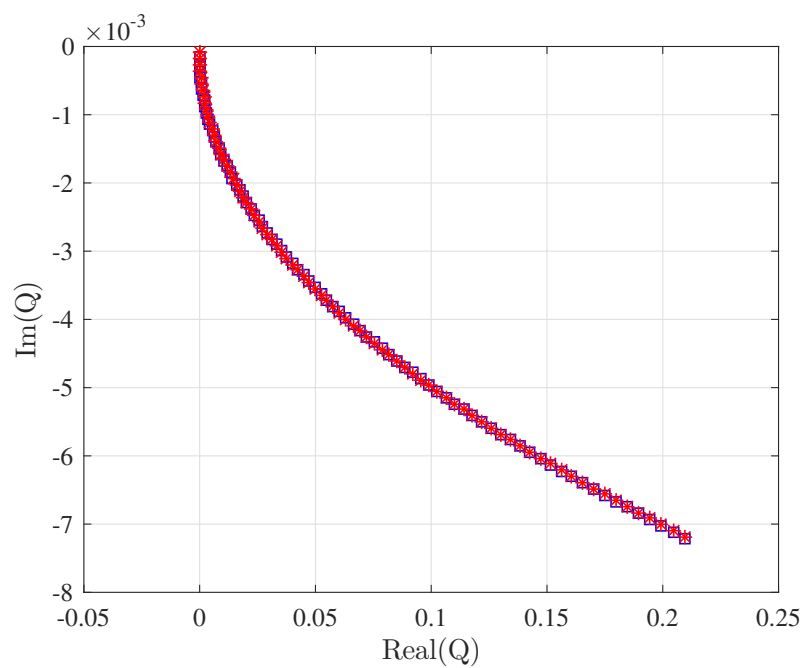
Nas figuras (70) e (71) são mostradas as comparações da parte real contra a imaginária dos elementos Q_{12} e Q_{13} das matrizes $\mathbf{Q}(k)$ e $\mathbf{Q}_{app}(k)$, as demais possuem comportamentos similares aos apresentados e, então, são omitidos neste texto. Similarmente as figuras (72) e (73) mostram as comparações da fase entre os elementos da matriz aerodinâmica de, [Theodorsen \(1935\)](#), e a aproximada, utilizando apenas um estado de atraso, elementos Q_{21} e Q_{31} da matriz de coeficientes aerodinâmicos. Finalmente, as figuras de (74) e (75) mostra os erros dos elementos Q_{21} e Q_{31} da matriz aerodinâmica aproximada com relação à quantidade de parâmetros de atrasos utilizados, sendo este calculados a partir da equação (95).

Figura 70 – Avaliação gráfica da aproximação para o elemento Q_{21} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)



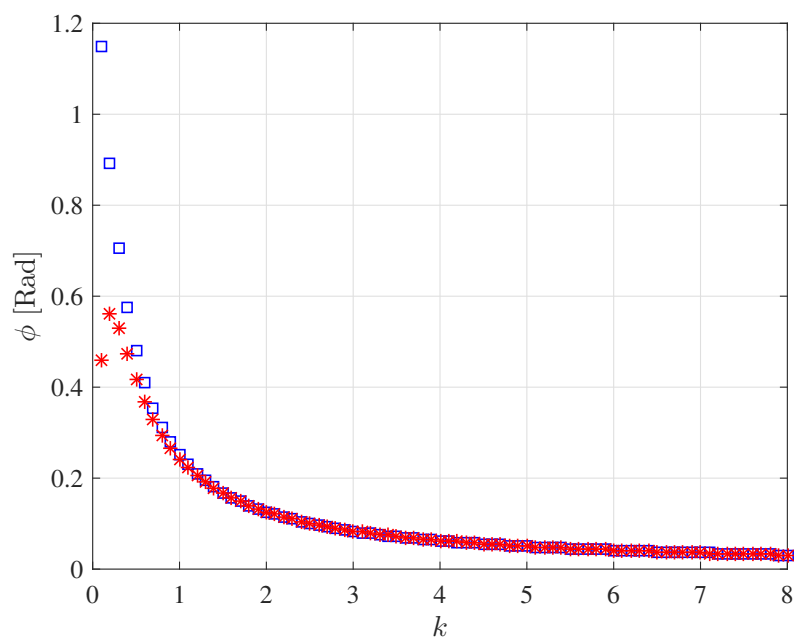
Fonte: Próprio Autor

Figura 71 – Avaliação gráfica da aproximação para o elemento Q_{31} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)



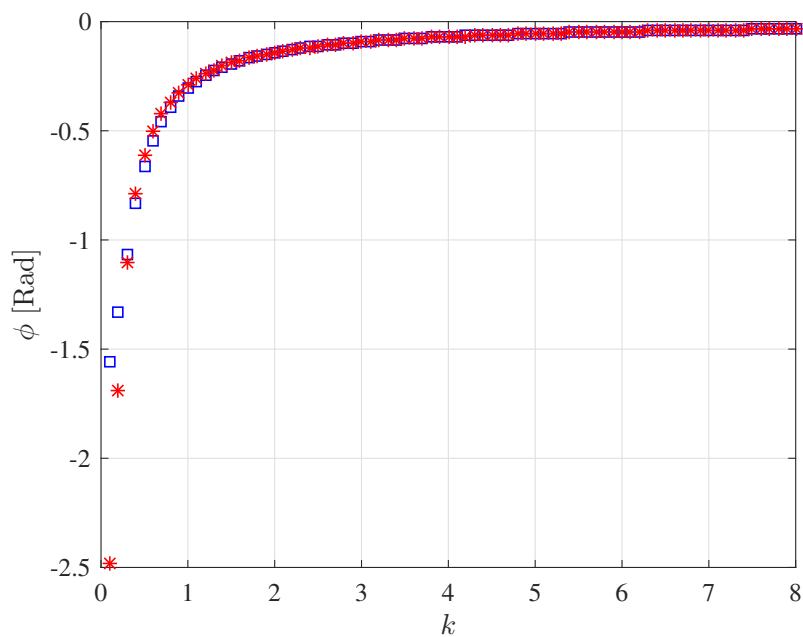
Fonte: Próprio Autor

Figura 72 – Comparação das fases para o elemento Q_{21} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)



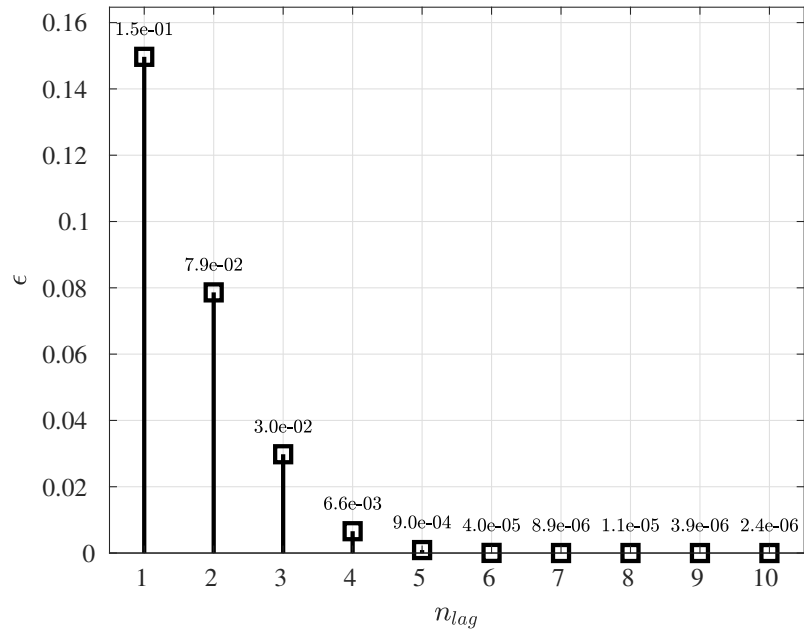
Fonte: Próprio Autor

Figura 73 – Comparação das fases, elemento Q_{31} - equação de Theodorsen (\square) e aproximação com um estado de atraso ($*$)



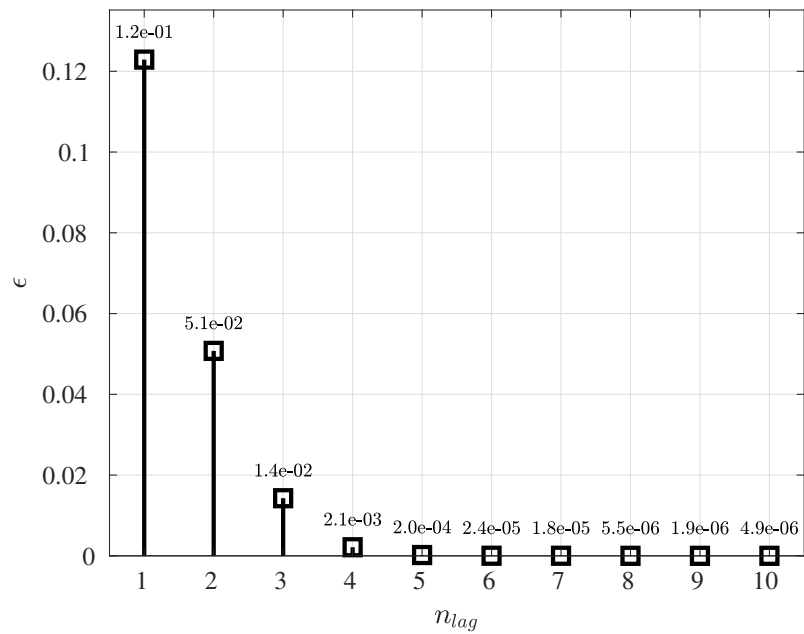
Fonte: Próprio Autor

Figura 74 – Avaliação da aproximação para cada n_{lag} utilizado - elemento Q_{12}



Fonte: Próprio Autor

Figura 75 – Avaliação da aproximação para cada n_{lag} utilizado - elemento Q_{31}



Fonte: Próprio Autor