



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
JÚLIO DE MESQUITA FILHO
FACULDADE DE ENGENHARIA
Ilha Solteira - SP

ALEJANDRA TABARES POZOS

**PLANEJAMENTO DOS SISTEMAS DE
DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA
ELÉTRICA INTEGRANDO A
CONFIABILIDADE DO SERVIÇO**

Ilha Solteira

2019

ALEJANDRA TABARES POZOS

**PLANEJAMENTO DOS SISTEMAS DE
DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA
INTEGRANDO A CONFIABILIDADE DO
SERVIÇO**

Trabalho apresentado como requisito para a obtenção do título de doutor no Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Ilha Solteira. Especialidade: Automação.

Especialidade: Automação.

Orientador: Prof. Dr. John Fredy Franco Baquero

Ilha Solteira

2019



FICHA CATALOGRÁFICA

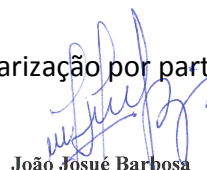
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

T112p Tabares Pozos, Alejandra.
Planejamento dos sistemas de distribuição de energia elétrica integrando a confiabilidade do serviço / Alejandra Tabares Pozos. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2019
158 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2019

Orientador: John Fredy Franco
Inclui bibliografia

1. Confiabilidade . 2. Fluxo de potência AC. 3. Linearização por partes. 4. Otimização. 5. Planejamento de expansão.



João Josué Barbosa
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação
Diretor Técnico
CRB 8-5642

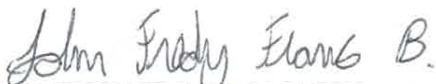
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Planejamento dos sistemas de distribuição de energia elétrica integrando a confiabilidade do serviço

AUTORA: ALEJANDRA TABARES POZOS

ORIENTADOR: JOHN FREDY FRANCO BAQUERO

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Doutora em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. JOHN FREDY FRANCO BAQUERO

Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Câmpus Experimental Rosana



Prof. Dr. RUBEN AUGUSTO ROMERO LAZARO

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Dr. JONATAS BOAS LEITE

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. EDUARDO NOBUHIRO ASADA

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação / Escola de Engenharia de São Carlos - USP



Profa. Dra. FERNANDA CASEÑO LIMA TRINDADE ARIOLI

Departamento de Sistemas e Energia / Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Ilha Solteira, 15 de fevereiro de 2019

Para Mancho, Sora e Junior aqui na terra, e para Elvira, Augusto e Colacho lá no céu

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus fonte de toda felicidade na minha existência, por cada uma das oportunidades grandiosas que coloca no meu caminho e sobre tudo, pela companhia que me brinda em cada segundo da minha vida;

À minha família pois por eles vivo e existo e a eles devo a honra e os frutos do meu esforço. Aos meus pais German Tabares e Zoraida Pozos, por ser antes pais e hoje amigos, companheiros de luta e grandes exemplos de retidão e honestidade. Ao meu irmão German Augusto por ser a minha fonte de inspiração para ultrapassar qualquer obstáculo que se apresenta, por ser o primeiro grande milagre na minha vida e minha alma gêmea neste extenso universo;

Ao meu orientador Prof. Dr. John Fredy Baquero, agradeço pela atenção, dedicação, empenho, e pelas contribuições na minha formação acadêmica, profissional e pessoal. Agradeço pelo apoio, direcionamento e orientação nos trabalhos realizados, mas por cima de tudo, por ser um exemplo de profissional e pessoa, digno de admiração e imitação;

À Prof^a. Dra. Marina Lavorato de Oliveira pela sua orientação. Sem suas ideias e sugestões não teria sido possível alcançar os objetivos da minha pesquisa;

Ao Prof. Dr. Rubén Romero Lázaro pelos seus conselhos e pela sua grande ajuda e apoio neste lugar. Sempre um grande amigo, um grande ser humano e um prodígio;

A todos meus companheiros do LAPSEE, brasileiros e estrangeiros pela sua amizade, sua ajuda e apoio durante todo este tempo. Ao David Álvarez Martínez por ter-me convidado a iniciar meus estudos de pós-graduação neste lugar. Aos "Soquetes" que preencheram minha vida de gratas recordações;

Agradeço a UNESP e ao programa de pós-graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira pelas instalações disponíveis para desenvolver meu trabalho;

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), projeto 2015/21972-6.

*"No te rindas, por favor no cedas, aunque el frío queme, aunque el miedo muera,
aunque el sol se esconda, y se calle el viento, aún hay fuego en tu alma, aún hay vida en
tus sueños"*

(Mario Benedetti)

RESUMO

O planejamento bem-sucedido de redes de distribuição requer uma metodologia que inclua um modelo de rede preciso que considere não apenas os custos econômicos, mas também os custos associados à confiabilidade do sistema. Considerando estas duas características essenciais, esta tese propõe modelos matemáticos que permitam incluir a avaliação da confiabilidade dentro do problema do planejamento de expansão de sistemas de distribuição com múltiplos estágios, visando expandir os ativos de rede (ramos e subestações) e minimizar os custos de confiabilidade do sistema. Em relação às características da rede, o modelo de planejamento proposto utiliza um fluxo de potência AC não-linear e não convexo, que é convertido em um problema convexo usando reformulação cônica, técnicas de linearização por partes, com o intuito de obter tratabilidade computacional usando técnicas clássicas de otimização. Além disso, a avaliação de confiabilidade convencional baseada em simulação é implementada de forma equivalente por meio de expressões algébricas dentro do modelo matemático. Vários casos de estudo são usados para demonstrar a eficácia da metodologia de planejamento proposta.

Palavras-chave: Confiabilidade. Fluxo de potência AC. Linearização por partes. Otimização. Planejamento de expansão.

ABSTRACT

Successful planning of distribution networks requires a methodology that includes an accurate network model that considers not only the economic costs but also the costs associated with system reliability. Considering these two essential characteristics, this thesis proposes mathematical models that include reliability assessment within multi-stage expansion planning problem of distribution systems, aiming at expanding network assets (branches and substations) and minimizing reliability costs of the system. In relation to the network characteristics, the proposed planning model uses a non-convex nonlinear AC power flow, which is converted into a convex problem using conic reformulation and piece-wise linearization, to obtain the computational tractability using classical optimization techniques. In addition, conventional simulation-based reliability assessment is implemented equivalently through algebraic expressions. Several benchmarks are used to demonstrate the effectiveness of the proposed planning methodology.

Keywords: AC power flow. Expansion planning. Optimization. Piece-wise linearization. Reliability.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo ilustrativo - Taxas e durações de interrupção nodal esperadas. a) Interrupções de reparação. b) Interrupções de comutação.	35
Figura 2 – Exemplo ilustrativo – Relação entre as taxas nodais esperadas de interrupções de reparação e as taxas de falha do ramo que os une. . . .	36
Figura 3 – Exemplo ilustrativo – Relação entre as durações nodais esperadas de interrupções de reparação e o produto entre a taxa de falha e a duração de reparação do ramo que os une.	36
Figura 4 – Exemplo ilustrativo – Relação entre as taxas nodais esperadas de interrupções de comutação e as taxas de falha do ramo que os une. . .	37
Figura 5 – Exemplo ilustrativo – Relação entre as durações nodais esperadas de interrupções de comutação e o produto entre a taxa de falha e a duração de restauração do ramo que os une.	37
Figura 6 – Sistema fictício associado ao exemplo ilustrativo. (a) Condição de carregamento para a taxa esperada de interrupções comutação afetando o nó raiz. (b) Condição de carregamento para a duração esperada de interrupções comutação que afetam o nó raiz.	41
Figura 7 – Topologia inicial para o sistema de 24 nós.	59
Figura 8 – Topologias de expansão para o sistema de 24 nós. a) Geradas pelo modelo DC. b) Geradas pelos modelos AC cônico e linear	61
Figura 9 – Topologia inicial para o sistema de 54 nós.	63
Figura 10 – Plano de investimento ótimo para o sistema de 54 nós.	64
Figura 11 – Exemplo ilustrativo. (a) topologia inicial. (b) Sistema fictício associado.	75
Figura 12 – Topologia inicial do sistema de 24 nós.	81
Figura 13 – Topologia final do sistema de 24 nós a) Sem e com ENS de coeficiente de custo baixo. b) com ENS de coeficiente de custo alto.	81
Figura 14 – Resultados ilustrativos - Durações de interrupção nodais esperadas. a) Interrupções de reparação . b) Interrupções de comutação.	83
Figura 15 – Topologia inicial do sistema de 27 nós.	84

Figura 16 – Topologias de expansão para o sistema de 27 nós. a) Com e sem custos de ENS. b) Com limites para o SAIFI e o SAIDI. Em ambas figuras as linhas verdes representam o uso do condutor tipo 2 e as linha pretas presentam o condutor tipo 1	85
Figura 17 – Topologia ótima do sistema de 24 nós no planejamento multi-período - Modelo cônico. a) Modelo DC. b) Modelo linear. c) Modelo cônico.	88
Figura 18 – Plano de investimento ótimo para o sistema de 54 nós considerando a avaliação da confiabilidade.	94
Figura 19 – Representação da subestação fictícia e ramos fictícios.	98
Figura 20 – Investimentos no sistema de 24 nós.	108
Figura 21 – Topologias de resturação para dois casos de falha no sistema de 24 nós.	108
Figura 22 – Topologia inicial para o sistema de 18 nós.	109
Figura 23 – Resultados caso de estudo de 18 nós a) Investimentos totais na rede	110
b) Operação em estado sem falha.	

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Taxas e durações nodais esperadas para interrupções de reparação e restauração no sistema teste de 37 nós	43
Tabela 2 – Resultados casos de estudo	44
Tabela 3 – Resumo de custos em (US\$10 ³) para o caso de estudo de 24 nós	62
Tabela 4 – Erros das aproximações fluxos de potência (MVA) por tipo de ramos para o sistema de 24 nós	62
Tabela 5 – Erros das aproximações da potência gerada em (MVA) pela subestação para o sistema de 24 nós	63
Tabela 6 – Detalhamento de custos por período para a solução ótima do modelo linear e do modelo cônico (US\$10 ⁶)	65
Tabela 7 – Resumo de custos em (US\$ $\times 10^3$) para o caso estático do sistema teste de 24 nós	82
Tabela 8 – Resumo de custos em (10 ³ \$) para o sistema teste de 27 nós	85
Tabela 9 – Taxas e durações de reparação e restauração para cada nó de demanda do sistema de 27 nós para a solução sem considerar penalidades por SAIFI e SAIDI	86
Tabela 10 – Taxas e durações de reparação e restauração para cada barra de demanda do sistema de 27 nós para a solução considerando custos de confiabilidade.	87
Tabela 11 – Resumo de custos em (US\$ 10 ³) para o sistema teste de 24 nós incluindo a avaliação analítica da confiabilidade	90
Tabela 12 – Erros das aproximações do fluxo de potência (MVA) por tipo de ramos para o sistema de 24 nós considerando confiabilidade	91
Tabela 13 – Erros das aproximações da potência gerada em (MVA) pela subestação para o sistema de 24 nós considerando confiabilidade	91
Tabela 14 – Custos em cada ano de planejamento na solução do sistema de 54 nós .	93
Tabela 15 – Detalhamento de custos por período para a solução ótima do modelo linear e do modelo cônico (US\$10 ⁶)	95
Tabela 16 – Erros de aproximação do modelo AC linear para o sistema teste de 54 nós	95

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AMPL	<i>A modeling language for mathematical programming</i>
ASAI	<i>Average system availability index</i>
ENS	<i>Expected energy not supplied</i>
PCSO	Programação cônica de segunda ordem
PCSOIM	Programação cônica de segunda ordem inteira mista
PLIM	Programação linear inteira mista
PNLIM	Programação não linear inteira mista
PPESD	Problema de planejamento da expansão dos sistemas de distribuição
SAIDI	<i>System average interruption duration index</i>
SAIFI	<i>System average interruption frequency index</i>
SDEE	Sistemas de distribuição de energia elétrica

LISTA DE SÍMBOLOS

Conjuntos

Φ_a	Conjunto de tipos de condutores
Φ_c	Conjunto de alternativas para as subestações
Θ	Conjunto de períodos de planejamento
Ω^B	Conjunto de nós
Ω^D	Conjunto de nós de demanda
Ω^R	Conjunto de nós conectados diretamente à subestação
Ω^S	Conjunto de nós de subestação
Ω^{SF}	Conjunto de nós subestação fictícios
Υ	Conjunto de ramos
Υ^{fic}	Conjunto de ramos fictícios
Υ_i^{DW}	Conjunto de ramos que estão a jusante do nó i
Υ_i^{UP}	Conjunto de ramos a montante do nó i
E	Conjunto estados operacionais

Parâmetros:

α^A	Numero de horas por ano
λ_{ij}	Taxa de falha no ramo ij
$ \Theta $	Número de anos do período de planejamento
$\sigma_{z,\kappa}$	Inclinação de κ th variável auxiliar utilizada na discretização de z
τ_{ij}^{RS}	Duração da interrupção por reparação no ramo ij

τ_{ij}^{SO}	Duração da interrupção por restauração no ramo ij
b^{IN}	Valor Big-M usado para calcular os custos c_t^{IN}
b^{RS}	Valor Big-M usado para calcular as durações de reparação
$b^{RS,\Pi}$	Valor Big-M usado para calcular as taxas de reparação
b^{SO}	Valor Big-M usado para calcular as durações de restauração
$b^{SO,\Pi}$	Valor Big-M usado para calcular as taxas de restauração
cf	Fator de carga
C_i^c	Coefficiente de custo do corte de energia no nó i
C_i^{ene}	Coefficiente de custo da energia fornecida pela subestação no nó i
C^{ENS}	Coefficiente de custo da energia não suprida
$C_{ij,a}^{fl}$	Coefficiente de custo da construção do ramo ij usando condutor tipo a
C_a^M	Coefficiente de custo da manutenção do condutor tipo a
C_c^S	Coefficiente de custo da manutenção da subestação tipo c
C^L	Coefficiente de custo das perdas ativas
C^O	Coefficiente de custo de operação da subestação
C_c^S	Coefficiente de custo da instalação da subestação no nó i tipo c
C_c^R	Coefficiente de custo da repotenciação da subestação no nó i tipo c
C^{sw}	Coefficiente de custo da operação das chaves
C^{SAIFI}	Coefficiente de custo devido à violação do SAIFI
C^{SAIDI}	Coefficiente de custo devido à violação do SAIDI
\bar{I}_a	Magnitude do fluxo de corrente máxima de condutor tipo a
I_f	Taxa de juro
K	Número de discretizações utilizadas na função $f(z, \bar{z}, \kappa)$

ℓ	Comprimento do ramo ij
n	Número de anos para cada período
NC_i	Número de clientes no nó i .
P_i^D	Demanda de potência ativa no nó i
$P_{i,t}^D$	Demanda de potência ativa no nó i no período t
$Q_{i,t}^D$	Demanda de potência reativa no nó i no período t
R_a	Resistência por unidade de comprimento do tipo condutor a
R_i^S	Resistência da subestação i
RR^l	Taxa de recuperação de capital para investimentos em ramos
RR^S	Taxa de recuperação de capital para investimentos em subestações
\bar{R}_c	Capacidade de potência aparente para a repotenciação tipo c
\bar{S}_c	Capacidade de potência aparente para a instalação tipo c
\overline{SAIDI}	Índice de duração média máxima de interrupções
\overline{SAIFI}	Índice de frequência média máxima de interrupções
\underline{V}	Limite inferior da magnitude de tensão
\overline{V}	Limite superior da magnitude de tensão
V_i^{est}	Valor estimado da tensão
X_a	Reatância por comprimento do condutor tipo a
\bar{z}	Valor máximo de z
Z_a	Impedância por comprimento do condutor tipo a
$SAIDI$	Índice de duração da interrupção média do sistema
$SAIFI$	Índice de frequência de interrupção média do sistema
$ASAI$	Índice médio de disponibilidade do sistema

$EENS$ Índice médio de energia não suprida do sistema

Variáveis contínuas:

α_{ij}^+	Variável associada à direção de avanço do ramo ij
α_{ij}^-	Variável associada à direção para trás do ramo ij
$\delta_{z,\kappa}$	Variável auxiliar utilizada na discretização de z
$\Delta_{ij,t}^{RS}$	Variável auxiliar para o calculo das durações de reparação dos nós ij , no período t
$\Delta_{ij,t}^{RS,\Pi}$	Variável auxiliar para o calculo das taxas de reparação dos nós ij , no período t
$\Delta_{ij,t}^{SO}$	Variável auxiliar para o calculo das durações de restauração dos nós ij , no período t
$\Delta_{ij,t}^{SO,\Pi}$	Variável auxiliar para o calculo das taxas de restauração dos nós ij , no período t
$\Delta_{ij,t}^V$	Variável que calcula a queda de tensão entre os nós ij , no período t
Γ_i^{RS}	Duração esperada de interrupções de reparação nó i
$\Gamma_{i,t}^{RS}$	Duração esperada de interrupções de reparação nó i , no período t
Γ_i^{SO}	Duração esperada de interrupções de restauração nó i
$\Gamma_{i,t}^{SO}$	Duração esperada de interrupções de restauração nó i , no período t
$\Gamma_{i,t}^{SO}$	Duração esperada de interrupções de restauração nó i , período t
η^l	Vida útil do ramos
η^{SS}	Vida útil das subestações
Π_i^{RS}	Taxa esperada de interrupções de reparação nó i
$\Pi_{i,t}^{RS}$	Taxa esperada de interrupções de reparação nó i , no período t

Π_i^{SO}	Taxa esperada de interrupções de restauração nó i
$\Pi_{i,t}^{SO}$	Taxa esperada de interrupções de restauração nó i , no período t
$\Upsilon_{i,t}^{SO}$	Geração do nó raiz i no sistema fictício usado para calcular a duração esperada de restauração no período t
$\Upsilon_{i,t}^{SO,\Pi}$	Geração do nó raiz i no sistema fictício usado para calcular a taxa esperada de restauração no período t
c_t^{ens}	Custo da energia não suprida no período t
$c_t^{ens,r}$	Custo da energia não suprida com possibilidades de restauração no período t
c_t^{IN}	Custo de penalização por ultrapassar os índices de continuidade do serviço no período t
c^I	Custo de investimentos no período t
c_t^L	Custo de perdas nos ramos no período t
c_t^M	Custo de manutenção no período t
c_t^P	Custo de produção de energia no período t
c_t^O	Custo de operação das subestações no período t
c_t^{sw}	Custo de operação das chaves no período t
c^T	Custo total da função objetivo
c_t^U	Custo de corte de carga no período t
f_{ij}^{Π}	Fluxo pelo ramo ij no sistema fictício usado para calcular a taxa esperada de restauração.
f_{ij}^F	Fluxo pelo ramo ij no sistema fictício usado para calcular a duração esperada de restauração
$f_{ij,t}^{SO}$	Fluxo pelo ramo ij no sistema fictício usado para calcular a duração esperada de restauração no período t

$g_{ij,t}^{SO}$	Fluxo pelo ramo ij no sistema fictício usado para calcular a taxa esperada de restauração no período t
$SAIDI_{i,t}^+$	Variável auxiliar utilizado no cálculo da penalização do SAIDI
$SAIDI_{i,t}^-$	Variável auxiliar utilizado no cálculo da penalização do SAIDI
$SAIFI_{i,t}^+$	Variável auxiliar utilizado no cálculo da penalização do SAIFI
$SAIFI_{i,t}^-$	Variável auxiliar utilizado no cálculo da penalização do SAIFI
$I_{ij,a,t,e}$	Quadrado da magnitude do fluxo de corrente no ramo ij , associado com o tipo de condutor a , no estado e , no período t
$I_{ij,a,t}$	Quadrado da magnitude do fluxo de corrente no ramo ij , associado com o tipo de condutor a , no período t
$\hat{I}_{ij,t,e}^{sqr}$	Quadrado da magnitude do fluxo de corrente no ramo ij , no estado e , no período t
$\hat{I}_{ij,t}^{sqr}$	Quadrado da magnitude do fluxo de corrente no ramo ij , no período t
$P_{i,t,e}^S$	Potência ativa gerada pela subestação no nó i , no estado e , no período t
$P_{i,t}^S$	Potência ativa gerada pela subestação no nó i , no período t
$P_{i,t,e}^{SF}$	Potência ativa gerada pela subestação fictícia no nó i , no estado e , no período t
$P_{i,t}^{SF}$	Potência ativa cortada no nó i , no período t
$P_{ij,a,t,e}$	Fluxo de potência ativa no ramo ij relacionado com o tipo de condutor a , no estado e , no período t
$P_{ij,a,t}$	Fluxo de potência ativa no ramo ij relacionado com o tipo de condutor a , no período t
$\hat{P}_{ij,t,e}$	Fluxo de potência ativa no ramo ij , no estado e , no período t
$\hat{P}_{ij,t}$	Fluxo de potência ativa no ramo ij , no período t

$Q_{i,t,e}^S$	Potência reativa gerada pela subestação no nó i , no estado e , no período t
$Q_{i,t}^S$	Potência reativa gerada pela subestação no nó i , no período t
$Q_{i,t,e}^{SF}$	Potência reativa gerada pela subestação fictícia no nó i , no estado e , no período t
$Q_{i,t}^{SF}$	Potência reativa cortada no nó i , no período t
$Q_{ij,a,t,e}$	Fluxo de potência reativa no ramo ij relacionado com o tipo de condutor a , no estado e , no período t
$Q_{ij,a,t}$	Fluxo de potência reativa no ramo ij relacionado com o tipo de condutor a , no período t
$\hat{Q}_{ij,t,e}$	Fluxo de potência reativa no ramo ij , no estado e , no período t
$\hat{Q}_{ij,t}$	Fluxo de potência reativa no ramo ij , no período t
$S_{i,t,e}^{sqr}$	Quadrado da potência aparente fornecido por subestação no nó i , no estado e , no período t
$S_{i,t}^{sqr}$	Quadrado da potência aparente fornecida pela subestação no nó i , no estado e , no período t
$V_{i,t,e}^{sqr}$	Quadrado da magnitude tensão no nó i , no estado e , no período t
$V_{j,t}^{sqr}$	Quadrado da magnitude tensão no nó i , no período t
z^+	Variável auxiliar usada na linearização por partes no calculo de $ zb $
z^-	Variável auxiliar usada na linearização por partes no calculo de $ zb $

Variáveis binárias:

$x_{ij,a,t}^l$	Variável binária para construção/recondutoramento de ramo ij , usando o tipo de condutor a , no período t
$x_{i,c,t}^r$	Variável binária para a repotenciação da subestação no nó i , utilizando a alternativa c , no período t

$x_{i,c,t}^s$	Variável binária para a construção da subestação no nó i , utilizando a alternativa c , no período t
$x_{i,t}^{SAIDI+}$	Variável binária auxiliar usada no cálculo da penalização do SAIDI nó i , no período t
$x_{i,t}^{SAIDI+}$	Variável binária auxiliar usada no cálculo da penalização do SAIDI nó i , no período t
$x_{i,t}^{SAIFI+}$	Variável binária auxiliar usada no cálculo da penalização do SAIFI nó i , no período t
$x_{i,t}^{SAIFI+}$	Variável binária auxiliar usada no cálculo da penalização do SAIFI nó i , no período t
$y_{ij,a,t,e}^l$	Variável binária associada com a operação do ramo ij usado no estado e , no período t
$y_{ij,a,t}^l$	Variável binária associada com a operação do ramo ij usando o tipo de condutor de a , no período t
$y_{ij,t}^{l+}$	Variável binária associada à direção de avanço do ramo ij , no período t
$y_{ij,t}^{l-}$	Variável binária associada à direção para atrás do ramo ij , no período t
$y_{ij,t,e}^{lf}$	Variável binária associada com a operação do ramo fictício ij , no estado e , no período t
$y_{i,c,t}^r$	Variável binária associada com a operação da repotenciação da subestação no nó i , utilizando a alternativa c , no período t
$y_{i,c,t}^s$	Variável binária associada com a operação da construção da subestação no nó i , utilizando a alternativa c , no período t
$y_{ij,t,e}^{sw+}$	Variável auxiliar associada com o funcionamento do equipamento de chaveamento de ramo ij , no estado e , no período t
$y_{ij,t,e}^{sw-}$	Variável auxiliar associada com o funcionamento do equipamento de chaveamento de ramo ij , no estado e , no período t

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
1.1	ANTECEDENTES	25
1.2	MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS	27
1.3	METODOLOGIA E DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO	27
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	28
2	CONFIABILIDADE EM REDES DE DISTRIBUIÇÃO	29
2.1	INTRODUÇÃO	29
2.2	MODELO PARA A AVALIAÇÃO ANALÍTICA DA CONFIABILIDADE	31
2.3	AVALIAÇÃO ANALÍTICA DA CONFIABILIDADE	34
2.3.1	Algoritmo convencional baseado em simulação	34
2.3.2	Abordagem proposta	35
2.4	MODELO ALGÉBRICO PROPOSTO PARA AVALIAÇÃO ANALÍTICA DA CONFIABILIDADE	38
2.5	RESULTADOS NUMÉRICOS	42
2.5.1	Caso de estudo de 37 nós	42
2.5.2	Casos de estudo 85 e 137 nós	43
2.6	CONCLUSÕES	45
3	MODELOS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA PARA O PPSD	46
3.1	INTRODUÇÃO	46
3.2	MODELO DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR INTEIRO E NÃO CONVEXO PARA O PPSD	49
3.2.1	Função objetivo	50
3.2.2	Restrições lógicas associadas a investimentos e operações	51
3.2.3	Restrições fundamentais dos SDEE	53
3.2.4	Limites operacionais	54
3.2.5	Restrição de radialidade	54

3.2.6	Modelo de programação não linear inteiro misto para o PPESD	55
3.3	MODELOS DE PROGRAMAÇÃO CONVEXOS INTERIOS MISTOS PARA O PPESD	55
3.3.1	Modelo de programação cônico de segunda ordem inteiro misto para o PPESD	56
3.3.2	Modelo de programação linear inteiro misto para o PPESD	57
3.4	RESULTADOS NUMÉRICOS	59
3.4.1	Caso de estudo de 24 nós	59
3.4.2	Caso de estudo de 54 nós	61
3.5	CONCLUSÕES	64
4	MODELOS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA PARA O PPESD CONSIDERANDO CONFIABILIDADE	66
4.1	INTRODUÇÃO	66
4.2	PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO CONSIDERANDO ÍNDICES DE CONFIABILIDADE	70
4.2.1	Modelamento da confiabilidade no PPESD	71
4.2.2	Restrições de confiabilidade	72
4.2.3	Penalização por violação de índices de confiabilidade	75
4.2.4	Função objetivo incluindo confiabilidade	78
4.2.5	Modelo de programação não linear inteiro misto para o PPESD considerando a avaliação da confiabilidade	78
4.2.6	Modelo de programação cônico de segunda ordem inteiro misto para o PPESD	79
4.2.7	Modelo de programação linear inteiro misto para o PPESD	79
4.3	RESULTADOS NUMÉRICOS	79
4.3.1	Caso de estudo de 24 nós	80
4.3.2	Caso de estudo de 27 nós	83
4.3.3	Caso de estudo de 24 nós multi-período	87
4.3.4	Caso de estudo de 54 nós multi-período	92
4.3.4.1	Comparação modelos DC	92
4.3.4.2	Comparação modelos AC	93

4.4	CONCLUSÕES	94
5	MODELO DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA PARA O PPESD CONSIDERANDO RAMOS DE RESERVA	96
5.1	MODELAGEM DE CONFIABILIDADE CONSIDERANDO ESTADOS RESTAURATIVOS NO PPESD	96
5.1.1	Considerações	97
5.2	PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO CONSIDERANDO RAMOS DE RESERVA	99
5.2.1	Função objetivo incluindo ramos de reserva	99
5.2.2	Restrições que caracterizam os estados de operação	100
5.2.3	Restrições fundamentais dos SDEE para cada estado de operação	103
5.2.4	Restrições lógicas associadas a investimentos e operações	103
5.2.5	Limites operacionais	104
5.3	MODELOS DE PROGRAMAÇÃO CONVEXOS INTEIROS MISTOS PARA O PPESD CONSIDERANDO RAMOS DE RESERVA	104
5.3.1	Modelo de programação cônico de segunda ordem inteiro misto para o PPESD considerando ramos de reserva	105
5.3.2	Modelo de programação linear inteiro misto para o PPESD considerando restauração	106
5.4	RESULTADOS NUMÉRICOS	106
5.4.1	Caso de estudo de 24 nós	107
5.4.2	Caso de estudo de 18 nós	109
5.5	Conclusões	111
6	CONCLUSÃO	112
	Referências	115
	Anexo A – Artigos publicados em revistas	122

Anexo B–Artigos aceitos para publicação em revistas	149
--	-----

1 INTRODUÇÃO

O principal propósito desta tese é apresentar um conjunto de modelagens matemáticas para problema de planejamento da expansão dos sistemas de distribuição (PPESD) considerando aspectos relevantes como a confiabilidade e modelos de rede computacionalmente tratáveis e precisos, que forneçam suporte ao planejador da rede a hora de eleger o plano ótimo.

1.1 ANTECEDENTES

Um sistema de potência geralmente consiste em unidades de geração, transmissão e sistemas de distribuição. Sendo o sistema de distribuição uma importante porção da rede que conecta o resto dos componentes do sistema de potência com os usuários e clientes finais (GOMEZ-EXPOSITO; CONEJO; CANIZARES, 2008). A grande maioria dos sistemas de distribuição de energia elétrica (SDEE) operam de forma radial por ser o modo mais econômico e metodologicamente simples desde o ponto de vista de planejamento e proteção.

Tradicionalmente, estas redes tem sido projetadas com amplos intervalos de operação, que permitem a operação passiva da rede, resultando assim em um modo econômico de administrar a rede. Porém, o investimento em redes de distribuição é muitas vezes mais custoso do que na rede de transmissão (GOMEZ-EXPOSITO; CONEJO; CANIZARES, 2008), que revela a importância econômica do planejamento das redes de distribuição. Além disso, um plano de expansão viável deve não só ser econômico, mas também satisfazer vários critérios técnicos e operacionais (WILLIS, 2004).

O planejamento das redes de distribuição consiste em determinar a localização, o tempo e o dimensionamento dos ativos de distribuição a serem instalados em uma rede de distribuição, de modo que o crescimento da demanda prevista seja satisfeito durante o um horizonte de planejamento de forma econômica e segura (WILLIS, 2004). Os modelos existentes para resolver o PPESD podem ser classificados em dois grupos: não-lineares e convexos. O primeiro grupo de modelos para o PPESD reflete precisamente as características não-lineares da rede (isto é, equações de fluxo de potência AC e perdas de energia), porém elas são formuladas como problemas de programação não linear inteira mista (PNLIM) cuja resolução é bastante complexa (SEDGHI; AHMADIAN; ALIAKBAR-

GOLKAR, 2016; AGHAEI *et al.*, 2014; PEREIRA-JUNIOR *et al.*, 2014; MOKRYANI, 2015), sendo comumente usadas técnicas heurísticas ou metaheurísticas para sua resolução.

Para superar as desvantagens mencionadas acima, o segundo grupo de modelos para o PPESD é formulado usando programação convexa, a partir da eliminação das não linearidades do modelo original (ASENSIO *et al.*, 2018; HAFFNER *et al.*, 2008; MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2016; TABARES *et al.*, 2016; FRANCO; RIDER; ROMERO, 2014; JABR, 2013); entretanto, esses modelos têm suas próprias deficiências como seu gasto computacional especialmente para tratar problemas de grande porte, enquanto que a sua principal vantagem é fornecer medidas respeito a otimalidade. Os primeiros modelos convexos usados para lidar com as não linearidades são aproximações baseadas em programação linear inteira mista (PLIM) (HAFFNER *et al.*, 2008; MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2016; TABARES *et al.*, 2016; SANTOS *et al.*, 2017b), assim como modelos de programação cônica (FRANCO; RIDER; ROMERO, 2014; JABR, 2013).

Dentro do problema de planejamento podem ser destacados dois aspectos. O primeiro aspecto é a consideração da confiabilidade, definida como a capacidade de satisfazer continuamente as necessidades do uso de energia elétrica dos usuários finais com a quantidade e a qualidade necessárias (CHOWDHURY; KOVAL, 2009). Hoje os operadores do SDEE estão sob uma pressão incrementa para prover mais com menos, onde a desregulamentação e a competência estão a forçar melhoras na eficiência e redução de custos, ao tempo que os usuários exigem níveis mais elevando de confiabilidade no serviço. Uma vez que tipicamente o SDEE representa o 40% dos custos da potência eléctrica entregue e o 80% dos problemas de confiabilidade (WILLIS, 2004; CHOWDHURY; KOVAL, 2009; BROWN, 2008), o planejamento do SDEE é fundamental para o sucesso financeiro e a satisfação dos usuários.

O segundo aspecto exige o desenvolvimento de métodos de planejamento que incorporem modelos de rede cada vez mais precisos, refletindo características operacionais realistas do sistema, que não só garanta a melhor alternativa econômica, mas também permita satisfazer os critérios técnicos e operacionais. Assim como avaliação da confiabilidade requer de modelos analíticos que simulem características relevantes para aumentar a satisfação dos usuários, é preciso contar com modelos de fluxo de potência precisos e que na medida do possível conservem as características mais importantes da rede de distribuição. Um modelo para o PPESD fornecerá planos de

expansão confiáveis somente se incorporar um estudo completo da operação da rede com base nas equações do fluxo de potência AC.

1.2 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

Poucas são as técnicas de solução exatas presentes na literatura para o problema de planejamento da expansão de redes de distribuição considerando restrições de confiabilidade (GEORGILAKIS; HATZIARGYRIOU, 2015). Esta questão metodológica relevante é consequência de dois fatores: (i) a dependência de índices de confiabilidade da topologia da rede, que, por sua vez, é um resultado da otimização, e (ii) o uso da simulação para a computação da confiabilidade na ausência de expressões analíticas que modelem a confiabilidade em termos das variáveis de decisão relacionadas à topologia.

Assim na primeira parte do presente trabalho é proposta uma modelagem matemática que permita a avaliação analítica da confiabilidade sem o uso de técnicas de simulação (e.g método de Monte Carlo) em redes de distribuição existentes, por tanto com topologia conhecida. Os desenvolvimentos desta seção serão posteriormente usados dentro do PPESD.

Na segunda parte do presente trabalho são propostos diferentes modelos matemáticos convexos que permitam tratar as não linearidades características do PPESD considerando múltiplos períodos de planejamento (FLETCHER; STRUNZ, 2007b), e que também ofereçam a tratabilidade computacional e otimalidade.

Na terceira parte do presente trabalho, os desenvolvimentos em modelagem com relação a avaliação analítica da confiabilidade em redes existentes são adaptados dentro dos modelos para o PPESD, onde a topologia é resultado do processo de otimização. Adicionalmente, novos modelos matemáticos são propostos para considerar a restauração no sistema para melhorar a confiabilidade por meio do dimensionamento de ramos de reserva.

1.3 METODOLOGIA E DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

No presente trabalho e devido à complexidade inerente do PPESD, serão desenvolvidas formulações matemáticas de forma separada para considerar os dois grandes aspectos descritos na seção 1.1. As formulações podem ser resumidas assim:

1. Um conjunto de sistemas lineares é proposto para a avaliação analítica da confiabilidade em uma rede totalmente automatizada já existente.
2. Modelos convexos determinísticos, aptos para ser resolvidos por técnicas exatas conhecidas, são apresentados para o PPESD multi-período. Esses modelos reformulam as não linearidades características do problema.
3. Os modelos convexos para o PPESD são estendidos para incorporar a avaliação da confiabilidade do sistema em um modelo compacto capacitado para fornecer um plano de expansão que considere os objetivos econômicos e de confiabilidade.
4. Novos modelos para incorporar capacidade de restauração do sistema são propostos com o objetivo de melhorar a confiabilidade.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está organizado da forma descrita a seguir: No Capítulo 2 é apresentado um modelo matemático para o cálculo das principais grandezas de confiabilidade em um sistema de distribuição radial sob o contexto de uma rede totalmente automatizada.

No Capítulo 3 é apresentado um modelo matemático para a avaliação da confiabilidade em um sistema de distribuição radial sob o contexto de uma rede pseudo-automatizada.

No Capítulo 4 são apresentados modelos matemáticos convexos determinísticos para o PPESD multi-período que como resultado de otimização permite avaliar a confiabilidade.

No Capítulo 5 é apresentado um modelo matemático para considerar o dimensionamento de ramos de reserva para a melhora a confiabilidade dentro do PPESD sob o contexto de uma rede automatizada, permitindo manobras de restauração. Seguidamente são apresentadas as conclusões gerais, referências bibliográficas e se anexam os trabalhos publicados e aceitos em revistas de alto impacto.

2 CONFIABILIDADE EM REDES DE DISTRIBUIÇÃO

Neste capítulo é proposto um conjunto de sistemas lineares para avaliar analiticamente as principais grandezas de confiabilidade em uma rede de distribuição existente sob a consideração que toda a rede de distribuição conta com elementos de proteção.

Deve-se destacar que apenas se conhecem dois antecedentes imediatos na literatura especializada que propõem métodos não baseados em simulação para calcular as grandezas de confiabilidade, ambos os métodos empregam otimização. Pela primeira vez na literatura, é apresentado um método equivalente e computacionalmente eficiente baseado em álgebra linear. Portanto, nenhum processo de simulação ou otimização está envolvido na sua resolução.

2.1 INTRODUÇÃO

Confiabilidade é um termo abstrato que significa resistência, confiança e bom desempenho. Para sistemas de engenharia, no entanto, é mais do que um termo abstrato; é algo que pode ser computado, medido, avaliado, planejado e projetado em um equipamento ou sistema. Confiabilidade fala da capacidade de um sistema para desempenhar a função para que foi concebido nas condições de funcionamento encontradas durante a sua vida útil prevista ([CHOWDHURY; KOVAL, 2009](#)).

A confiabilidade é definida como a capacidade de um sistema de energia para atender continuamente as necessidades de eletricidade dos usuários finais com a quantidade necessária e qualidade ([WILLIS, 2004](#)). A confiabilidade nos sistemas de distribuição é fundamental, uma vez que, conforme relatado na literatura, mais de 80% de todas as interrupções de clientes são devidas a falhas nesse nível. Portanto, uma consideração adequada da confiabilidade na operação e no planejamento do sistema de distribuição é essencial.

Na realidade, os principais indicadores da confiabilidade de um sistema de energia para os consumidores são a frequência e a duração das interrupções em seu ponto de utilização (ou seja, seu ponto de carga). Do ponto de vista da engenharia, a questão é como você determina matematicamente a frequência e a duração das interrupções do ponto de carga?. Os índices de avaliação da confiabilidade mais usados pelos operadores

dos sistemas de distribuição no mundo são o índice médio da duração das interrupções do sistema (SAIDI pelas siglas em inglês *System Average Interruption Duration Index*), e o índice médio da frequência das interrupções do sistema (SAIFI pelas siglas em inglês *System Average Interruption Frequency Index*). Os índices de confiabilidade caracterizam a duração e a frequência das interrupções de longa duração (maior ou igual a 5 minutos) durante períodos de apuração usualmente de um ano.

Existem muitos outros indicadores e estratégias de análise da confiabilidade (BILLINTON; ALLAN, 1996), no entanto, o SAIDI e o SAIFI são os mais adequados para avaliar o impacto das interrupções em termos do número de usuários afetados pelas falhas de longa duração. Eles permitem fazer análise do comportamento global da continuidade nas redes e são os padrões de referência que as agências reguladoras utilizam para calcular as penalidades e incentivos em função da qualidade do serviço elétrico que as empresas de distribuição estão fornecendo.

Uma técnica relevante e prática para calcular tais índices é o método analítico preditivo (WILLIS, 2004; CHOWDHURY; KOVAL, 2009; BROWN; HANSON, 2001). Para uma topologia de rede dada, o método analítico quantifica o impacto de um conjunto pré-especificado de eventos na continuidade do serviço através da simulação de interrupções de componentes da rede, um de cada vez. Para este propósito, são utilizadas duas informações para calcular índices de confiabilidade normalizados, nomeadamente taxas de falhas e durações de interrupção.

Devido à dependência entre a topologia e o processo de simulação de falha dos componentes, métodos aproximados têm sido propostos mais amplamente que os métodos analíticos para avaliar os índices de confiabilidade dentro dos problemas de operação e planejamento nas redes de distribuição, onde as decisões relacionadas com a topologia são resultado do processo de otimização. Entre os métodos aproximados, grande número de metaheurísticas têm sido usadas para avaliar iterativamente os índices de confiabilidade de uma população de topologias candidatas e guiar a busca dentro do espaço de solução (GEORGILAKIS; HATZIARGYRIOU, 2015). A desvantagem dos métodos aproximados é não fornecer informação ao respeito da qualidade da solução achada nem sua distância com relação à solução ótima.

Na literatura encontram-se os trabalhos de López, Lavorato e Rider (2016) e Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo (2018b) como os primeiros a desenvolver métodos analíticos baseados em otimização que calculam os índices de confiabilidade. Estes

trabalhos usam o mesmo princípio de solução para determinar os índices de confiabilidade, embora que os problemas de pesquisa resolvidos por cada um sejam diferentes. A ideia principal de ambos os trabalhos trata de caracterizar o caminho mínimo de cada um dos nós de demanda da rede por meio da resolução de um problema de otimização para assim conhecer as características de confiabilidade em cada nó de carga (LÓPEZ; LAVORATO; RIDER, 2016; MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2018b) Esta metodologia aumenta consideravelmente o número de variáveis das formulações por eles propostas, pois para cada ramo da rede deve ser atribuída uma variável que a relacione com a pertença ou não para um caminho mínimo de atendimento de um nó de carga. Embora as dificuldades mencionadas acima, as formulações em López, Lavorato e Rider (2016) e Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo (2018b) conseguem os mesmos resultados que o método baseado em simulação pelo que representam uma grande contribuição para a avaliação da confiabilidade dentro dos problemas das redes de distribuição.

Seguindo o caminho pavimentado por López, Lavorato e Rider (2016) e Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo (2018b), nesta seção se apresenta uma nova abordagem não baseada em simulação nem em otimização para a avaliação de confiabilidade analítica de sistemas de distribuição. Aqui, o impacto do conjunto de falhas considerado em Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo (2018b), que é mais amplo do que o analisado em López, Lavorato e Rider (2016), é modelado de forma equivalente. Para esse fim, novas expressões lineares são desenvolvidas e mais especificamente, as taxas de interrupção esperadas e as durações de cada nó de carga são expressas algebricamente em termos dos valores dessas magnitudes para os nós adjacentes.

O modelo resultante é um sistema de equações lineares. Portanto, nenhum processo de simulação ou otimização está envolvido e algoritmos eficazes estão disponíveis para resolvê-los. Os testes realizados sugerem uma superioridade computacional maior sobre a abordagem apresentada em Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo (2018b).

2.2 MODELO PARA A AVALIAÇÃO ANALÍTICA DA CONFIABILIDADE

A avaliação da confiabilidade em sistema de distribuição utilizada ao longo deste capítulo está baseada na metodologia proposta por Billinton e Allan (1996), Willis (2004),

Chowdhury e Koval (2009), Brown e Hanson (2001), Brown (2008). O cálculo dos índices de confiabilidade padrão baseia-se no conhecimento da topologia da rede e da condição de carga (MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2018b). Por tanto, a avaliação da confiabilidade se faz sob as seguintes suposições:

- Somente interrupções sofridas devido a falhas individuais dos ramos são consideradas. As falhas dos ramos são caracterizadas por taxas de falha e durações de interrupção;
- Considera-se a operação radial do sistema em que cada ramo ligado a uma subestação está equipado com um disjuntor sem um religador na saída da subestação;
- Todos os ramos estão equipados com chaves que permitem o isolamento da parte do sistema à jusante da falha para satisfazer a parte do sistema que está à montante da falha e que pode ser restaurada. Assim, uma vez que ocorreu uma falha, o primeiro disjuntor à montante da falha é aberto, restringindo assim todas as solicitações de carga à jusante;
- A topologia do sistema é reconfigurada operando chaves e disjuntores para reduzir a energia não fornecida. Para isso, é aberta a primeira chave a montante da falha para isolá-la. Em seguida, o disjuntor é fechado de modo que o fornecimento de todas as demandas entre o disjuntor e a chave é restaurado. Finalmente, quando a falha isolada é reparada, a chave correspondente é fechada e o serviço completo é restabelecido.

Levando em consideração as anteriores simplificações, os nós de carga encontram-se afetados por dois tipos de interrupções a saber:

1. Interrupções de reparação, para as falhas em que o serviço apenas é restabelecido quando o dano tem sido reparado;
2. Interrupções de restauração, associado com a reconfiguração sofrida no sistema para limpar o componente que causou a falha.

Cada tipo das interrupções nodais mencionadas anteriormente podem ser quantificadas em termos dos valores esperados das taxas e durações e que podem ser expressas de forma compacta, como segue:

$$\Pi_i^{RS} = \sum_{jk \in \Upsilon_i^{UP}} \lambda_{jk} \ell_{jk}; \forall i \in \Omega^D \quad (1)$$

$$\Gamma_i^{RS} = \sum_{jk \in \Upsilon_i^{UP}} \tau_{jk}^{RS} \lambda_{jk} \ell_{jk}; \forall i \in \Omega^D \quad (2)$$

$$\Pi_i^{SO} = \sum_{jk \in \Upsilon_i^F} \lambda_{jk} \ell_{jk} - \sum_{jk \in \Upsilon_i^{UP}} \lambda_{jk} \ell_{jk}; \forall i \in \Omega^D \quad (3)$$

$$\Gamma_i^{SO} = \sum_{jk \in \Upsilon_i^F} \tau_{jk}^{SO} \lambda_{jk} \ell_{jk} - \sum_{jk \in \Upsilon_i^{UP}} \tau_{jk}^{SO} \lambda_{jk} \ell_{jk}; \forall i \in \Omega^D \quad (4)$$

Por definição, as taxas de interrupção esperadas e as durações nos nós da subestação são iguais a 0, isto é:

$$\Pi_i^{RS} = 0; \forall i \in \Omega^S \quad (5)$$

$$\Pi_i^{SO} = 0; \forall i \in \Omega^S \quad (6)$$

$$\Gamma_i^{RS} = 0; \forall i \in \Omega^S \quad (7)$$

$$\Gamma_i^{SO} = 0; \forall i \in \Omega^S. \quad (8)$$

Os índices de confiabilidade padrão podem ser calculados como em [Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo \(2018b\)](#), fazendo uso das taxas e durações de interrupção nodais esperadas:

$$SAIFI = \frac{\sum_{i \in \Omega^D} NC_i (\Pi_i^{RS} + \Pi_i^{SO})}{\sum_{i \in \Omega^D} NC_i} \quad (9)$$

$$SAIDI = \frac{\sum_{i \in \Omega^D} NC_i (\Gamma_i^{RS} + \Gamma_i^{SO})}{\sum_{i \in \Omega^D} NC_i} \quad (10)$$

$$ASAI = 1 - \frac{SAIDI}{8760} \quad (11)$$

$$EENS = \sum_{i \in \Omega^D} cf P_i^D (\Gamma_i^{RS} + \Gamma_i^{SO}) \quad (12)$$

Onde ASAI e EENS correspondem as siglas em inglês para *Average system availability index* e *Expected energy not supplied*, respetivamente.

Considerar uma avaliação completa da confiabilidade envolve elementos adicionais que não são discutidos neste trabalho como falhas temporárias, falhas nos elementos de proteção, sobrecarga nos ramos e perturbações transitórias. Destaca-se que a estrutura de modelagem acima já foi amplamente adotada para operação e planejamento do sistema de distribuição ([JORDEHI, 2015](#)).

2.3 AVALIAÇÃO ANALÍTICA DA CONFIABILIDADE

O método analítico baseia-se na análise de interrupções de componentes, uma por cada vez. Como resultado, métricas padrão como SAIFI, SAIDI, ASAI e EENS (IEEE..., 2012) são calculadas usando duas informações, a saber, taxas de falha e durações de interrupção. Tais índices de confiabilidade podem ser determinados usando simulação (BROWN, 2008) e recentemente, foram apresentadas abordagens baseadas em otimização por López, Lavorato e Rider (2016) e Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo (2018b).

2.3.1 Algoritmo convencional baseado em simulação

Para uma topologia de rede já dada, o algoritmo convencional baseado em simulação (BROWN, 2008) analisa as interrupções nos ramos do sistema, uma de cada vez. Para cada ramo, as taxas de interrupção esperadas para os nós afetados por uma falha em tal ramo são aumentadas pela taxa de falha do ramo correspondente. Da mesma forma, as durações de interrupção esperadas para os nós afetados por uma falha em tal ramo são aumentadas pelo produto da taxa de falha pela duração da interrupção do ramo correspondente. Esse algoritmo é descrito da seguinte maneira:

Set Π_i^{RS} , Π_i^{SO} , Γ_i^{RS} , and Γ_i^{SO} igual a 0 para todos os nós de carga

Loop sobre todos os ramos ij

Loop sobre todos os nós i

If nó i experimenta uma interrupção de reparação devido a uma falha no ramo

ij

$$\Pi_i^{RS} \leftarrow \Pi_i^{RS} + \lambda_{ij} \ell_{ij}$$

$$\Gamma_i^{RS} \leftarrow \Gamma_i^{RS} + \lambda_{ij} \ell_{ij} \tau_{ij}^{RS}$$

Else if nó i experimenta uma interrupção de comutação devido a uma falha no

ramo ij

$$\Pi_i^{SO} \leftarrow \Pi_i^{SO} + \lambda_{ij} \ell_{ij}$$

$$\Gamma_i^{SO} \leftarrow \Gamma_i^{SO} + \lambda_{ij} \ell_{ij} \tau_{ij}^{SO}$$

End if

End loop

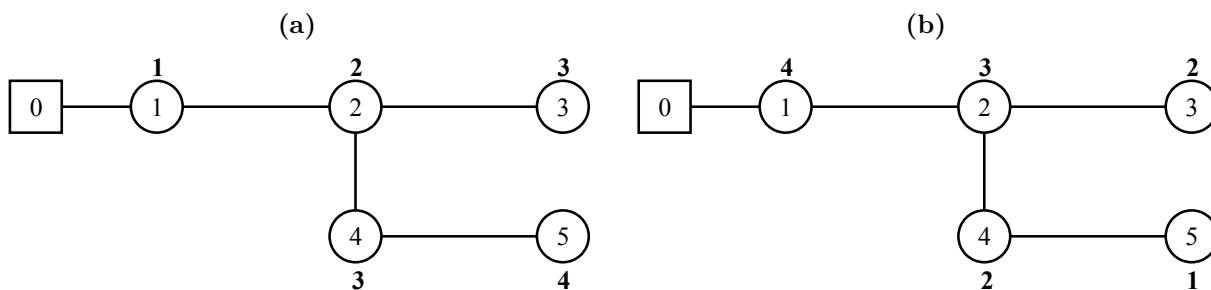
End loop

Uma vez que os valores de Π_i^{RS} , Π_i^{SO} , Γ_i^{RS} , e Γ_i^{SO} são determinados, os índices de confiabilidade podem ser calculados usando (13)–(16).

2.3.2 Abordagem proposta

Esta seção descreve a estrutura de modelagem e usa um exemplo para ilustrar a nova abordagem proposta.

Figura 1. Exemplo ilustrativo - Taxas e durações de interrupção nodal esperadas. a) Interrupções de reparação. b) Interrupções de comutação.

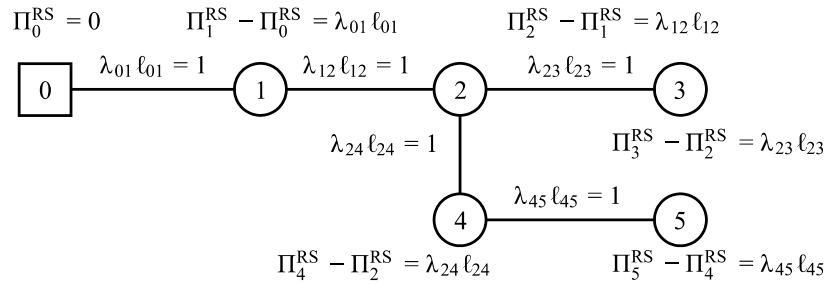


Fonte: Próprio autor

Usando as expressões (1)–(4), as taxas nodais esperadas e as durações das interrupções de reparação e de comutação são calculadas para o sistema didático mostrado na Figura 1. Este sistema compreende cinco nós de carga, representados por círculos; um nó de subestação representado como um quadrado; e cinco ramos, indicados por linhas sólidas. Por questões de simplicidade, os comprimentos, as taxas de falhas e as durações das interrupções dos ramos são numericamente iguais a 1. Portanto, para cada nó, a taxa esperada e a duração esperada das interrupções de reparação são idênticas, como mostrado na Figura 1(a) ao lado de cada nó de carga. Da mesma forma, o mesmo resultado vale para interrupções de comutação, como mostrado na Figura 1(b) ao lado de cada nó de carga.

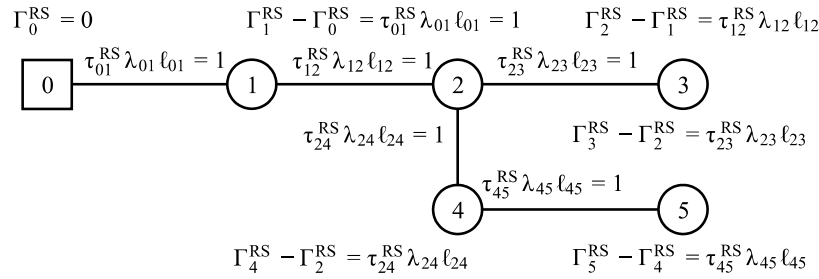
Como pode ser observado, as taxas nodais e as durações esperadas das interrupções de reparação aumentam à medida que a distância até a subestação cresce. Em contraste, o efeito oposto é experimentado pelas taxas e durações nodais esperadas das interrupções de comutação. Conseqüentemente, importantes e simples observações se desprendem dos valores de taxas e durações obtidos no exemplo ilustrativo:

Figura 2. Exemplo ilustrativo – Relação entre as taxas nodais esperadas de interrupções de reparação e as taxas de falha do ramo que os une.



Fonte: Próprio autor

Figura 3. Exemplo ilustrativo – Relação entre as durações nodais esperadas de interrupções de reparação e o produto entre a taxa de falha e a duração de reparação do ramo que os une.

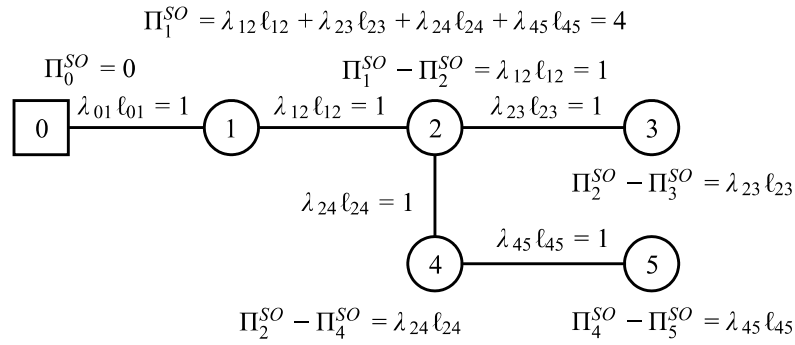


Fonte: Próprio autor

1. Para interrupções de reparação, a diferença entre as taxas esperadas entre dois nós diretamente na jusante e na montante de um ramo é igual à taxa de falha do ramo. Da mesma forma, a diferença entre as durações esperadas para dois nós consecutivos é igual ao produto da taxa de falha e duração de reparação do ramo. A Figura 2 ilustra o cálculo das taxas esperadas de interrupções de reparação, enquanto a Figura 3 ilustra o cálculo das durações esperadas de interrupções de reparação;
2. Para interrupções de comutação, os mesmos resultados relacionados com as taxas e as durações nodais esperadas de reparação são obtidos, ao subtrair as taxas esperadas e as durações esperadas de dois nós diretamente na jusante e na montante de um ramo, tendo como referência o nó mais afastado da subestação, respetivamente.
3. As taxas nodais esperadas das interrupções de comutação para os nós de carga diretamente conectados com um nó de subestação, em diante chamados nós raiz, são iguais à soma das taxas de falha de todos os ramos à jusante desse nó. Da mesma forma, as durações esperadas são iguais a soma dos produtos da taxa de

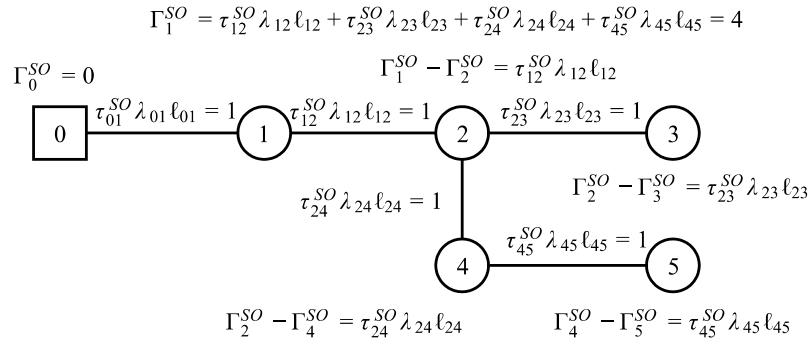
falha e a duração de interrupção de comutação de todas os ramos à jusante desse nó. A Figura 4 ilustra o cálculo das taxas esperadas de interrupções de comutação, enquanto a Figura 5 ilustra o cálculo das durações esperadas de interrupções de comutação. O cálculo dos índices nodais para os nós raiz são também exemplificados no nó 1 das figuras 4 e 5.

Figura 4. Exemplo ilustrativo – Relação entre as taxas nodais esperadas de interrupções de comutação e as taxas de falha do ramo que os une.



Fonte: Próprio autor

Figura 5. Exemplo ilustrativo – Relação entre as durações nodais esperadas de interrupções de comutação e o produto entre a taxa de falha e a duração de restauração do ramo que os une.



Fonte: Próprio autor

Considerando as observações anteriormente expostas, um conjunto de restrições simples podem ser propostas para calcular os índices globais de confiabilidade (5)–(8). Este conjunto de expressões simples é apresentado a seguir:

$$|\Pi_i^{RS} - \Pi_j^{RS}| = \lambda_{ij} \ell_{ij}; \forall ij \in \Upsilon \quad (13)$$

$$|\Gamma_i^{RS} - \Gamma_j^{RS}| = \tau_{ij}^{RS} \lambda_{ij} \ell_{ij}; \forall ij \in \Upsilon \quad (14)$$

$$|\Pi_i^{SO} - \Pi_j^{SO}| = \lambda_{ij} \ell_{ij}; \forall ij \in \Upsilon | i, j \notin \Omega^S \quad (15)$$

$$|\Gamma_i^{SO} - \Gamma_j^{SO}| = \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} \ell_{ij}; \forall ij \in \Upsilon | i, j \notin \Omega^S \quad (16)$$

$$\Pi_i^{SO} = \sum_{jk \in \Upsilon_i^{DW}} \lambda_{jk} \ell_{jk}; \forall i \in \Omega^R \quad (17)$$

$$\Gamma_i^{SO} = \sum_{jk \in \Upsilon_i^{DW}} \tau_{jk}^{SO} \lambda_{jk} \ell_{jk}; \forall i \in \Omega^R \quad (18)$$

$$\text{Expressões (5)–(8)} \quad (19)$$

As equações (13)–(18) expressam as observações apresentadas acima, onde a diferença entre taxas e as durações tanto de reparação como de restauração entre dois nós consecutivos é igual a taxa/duração do ramo que os conecta. As expressões (17) e (18) garantem que os nós raiz têm acumulados consigo as taxas e durações de restauração dos ramos localizados à jusante deles. As expressões (19) condicionam o valor da taxa e a duração de restauração da subestação a serem iguais a zero.

2.4 MODELO ALGÉBRICO PROPOSTO PARA AVALIAÇÃO ANALÍTICA DA CONFIABILIDADE

Esta seção apresenta um modelo algébrico e, portanto, não baseado em otimização para avaliação de confiabilidade analítica. Para este propósito as expressões (13)–(18), são reformuladas para eliminar os valores absolutos que aparecem em (13)–(16) e o uso do conjunto Υ_i^{DW} relacionado com o conhecimento explícito da topologia da rede. Isto porque essas expressões não podem ser usadas de forma imediata para incorporar a avaliação de confiabilidade em modelos de otimização existentes para a operação e o planejamento da expansão de redes de distribuição, já que nesses casos a topologia resultante não é conhecida com antecedência.

A fim de resolver esta lacuna, nesta seção é proposto um modelo algébrico alternativo onde tais conjuntos são descartados. O modelo proposto apresenta dois aspectos principais. Primeiro, a topologia da rede é explicitamente caracterizada por um conjunto de expressões matemáticas adicionais. Em segundo lugar, um modelo de fluxo

de carga para um sistema fictício é formulado para garantir os supostos da avaliação analítica da confiabilidade relacionados como os nós raiz. Este modelo foi apresentado em [Tabares et al. \(2019\)](#) (para ver mais informação consultar o anexo B).

O modelo algébrico proposto para avaliação analítica da confiabilidade é apresentado como o seguinte sistema de equações lineares:

$$\sum_{ji \in \Upsilon} \alpha_{ji}^+ + \sum_{ij \in \Upsilon} \alpha_{ij}^- = 0; \forall i \in \Omega^S \quad (20)$$

$$\sum_{ji \in \Upsilon} \alpha_{ji}^+ + \sum_{ij \in \Upsilon} \alpha_{ij}^- = 1; \forall i \in \Omega^D \quad (21)$$

$$\alpha_{ij}^+ + \alpha_{ij}^- = 1; \forall ij \in \Upsilon \quad (22)$$

$$\Pi_i^{RS} = \Pi_j^{RS} + \lambda_{ij} l_{ij} \alpha_{ij}^- - \lambda_{ij} l_{ij} \alpha_{ij}^+; \forall ij \in \Upsilon \quad (23)$$

$$\Gamma_i^{RS} = \Gamma_j^{RS} + \tau_{ij}^{RS} \lambda_{ij} l_{ij} \alpha_{ij}^- - \tau_{ij}^{RS} \lambda_{ij} l_{ij} \alpha_{ij}^+; \forall ij \in \Upsilon \quad (24)$$

$$\Pi_i^{SO} = \Pi_j^{SO} + \lambda_{ij} l_{ij} \alpha_{ij}^+ - \lambda_{ij} l_{ij} \alpha_{ij}^-; \forall ij \in \Upsilon | i, j \notin \Omega^S \quad (25)$$

$$\Gamma_i^{SO} = \Gamma_j^{SO} + \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} l_{ij} \alpha_{ij}^+ - \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} l_{ij} \alpha_{ij}^-; \forall ij \in \Upsilon | i, j \notin \Omega^S \quad (26)$$

$$\sum_{ji \in \Upsilon | j \notin \Omega^S} f_{ji}^{\Pi} - \sum_{ij \in \Upsilon | j \notin \Omega^S} f_{ij}^{\Pi} + \Pi_i^{SO} = 0; \forall i \in \Omega^R \quad (27)$$

$$\sum_{ji \in \Upsilon | j \notin \Omega^S} f_{ji}^{\Pi} - \sum_{ij \in \Upsilon | j \notin \Omega^S} f_{ij}^{\Pi} = \sum_{ji \in \Upsilon} \lambda_{ji} l_{ji} \alpha_{ji}^+ + \sum_{ij \in \Upsilon} \lambda_{ij} l_{ij} \alpha_{ij}^-; \forall i \in (\Omega^D \setminus \Omega^R) \quad (28)$$

$$\sum_{ji \in \Upsilon | j \notin \Omega^S} f_{ji}^{\Gamma} - \sum_{ij \in \Upsilon | j \notin \Omega^S} f_{ij}^{\Gamma} + \Gamma_i^{SO} = 0; \forall i \in \Omega^R \quad (29)$$

$$\sum_{ji \in \Upsilon | j \notin \Omega^S} f_{ji}^{\Gamma} - \sum_{ij \in \Upsilon | j \notin \Omega^S} f_{ij}^{\Gamma} = \sum_{ji \in \Upsilon} \tau_{ji}^{SO} \lambda_{ji} l_{ji} \alpha_{ji}^+ + \sum_{ij \in \Upsilon} \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} l_{ij} \alpha_{ij}^-; \forall i \in (\Omega^D \setminus \Omega^R) \quad (30)$$

$$\text{Expressões (5)–(8)} \quad (31)$$

Com base em [Taylor e Hover \(2012\)](#), duas novas variáveis contínuas, embora de comportamento binário, são usadas para cada ramo ij , a saber α_{ij}^+ e α_{ij}^- . Tais variáveis permitem caracterizar o gráfico formado por subestações, ramos e nós de carga. A direção do fluxo através de um ramo específico ij é modelada pelos valores das variáveis α_{ij}^+ e α_{ij}^- para duas combinações possíveis. Assim, a combinação $\alpha_{ij}^+ = 1$ e $\alpha_{ij}^- = 0$ é usada para identificar que o nó i está à montante do nó j e, portanto, o fluxo é de i para j . Por outro lado, a combinação $\alpha_{ij}^+ = 0$ e $\alpha_{ij}^- = 1$ é usada para identificar que o nó i está a jusante do nó j em relação à subestação e, portanto, o fluxo é de j para i .

Matematicamente, a caracterização da direção de fluxo entre dos nós ij diretamente na montante e na jusante de um ramo é formulada em (20)–(22). Tais

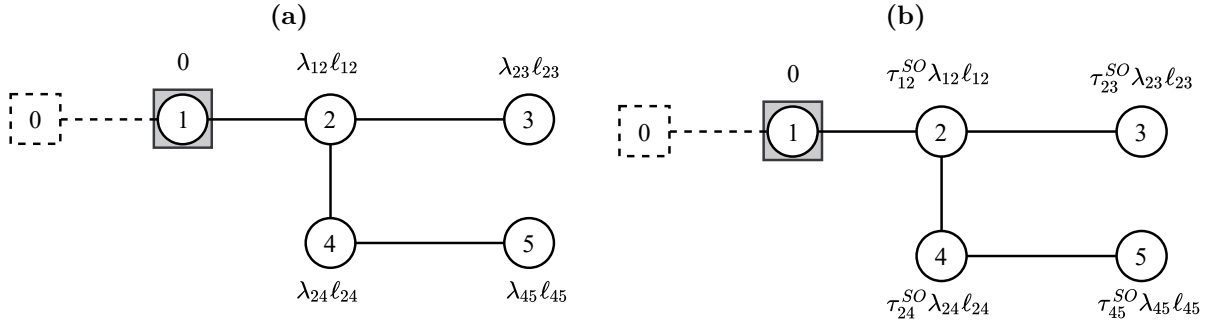
expressões apresentam uma estrutura de matriz unimodular (veja (WOLSEY, 1998), proposição 3.2). Além disso, os termos do lado direito são 0 ou 1. Como conseqüência, as variáveis contínuas α_{ij}^+ e α_{ij}^- só podem ter dois valores, 0 e 1. Assim, as condições necessárias para operação radial (JABR, 2013), (MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2016) são modeladas em (20) e (21). As expressões (20) asseguram que, nenhum ramo alimenta uma subestação, isto é, o fluxo da subestação é apenas em direção à jusante. Além disso, as expressões (21) garantem que cada nó de carga seja alimentado por um único ramo. As expressões (22) garantem que para cada ramo ij , as variáveis α_{ij}^+ e α_{ij}^- não podem ter valores idênticos. Portanto, seus valores são limitados às duas combinações acima mencionadas. Como conseqüência, é possível determinar a posição de dos nós conectados a cada ramo conhecendo a sua direção conforme desejado, o que facilita também lidar com os valores absolutos que aparecem em (13)–(16).

As expressões (23) e (24) correspondem equivalentemente a (13) e (14), respectivamente. Observa-se que o uso das variáveis α_{ij}^+ e α_{ij}^- impede a necessidade dos conjuntos dependentes de topologia Υ_j^{UP} . A equivalência é mostrada para um determinado ramo ij como segue. Se o fluxo for de i para j , ou seja, $\alpha_{ij}^+ = 1$ e $\alpha_{ij}^- = 0$, as expressões (23) e (24) respectivamente se tornar $\Pi_i^{RS} = \Pi_j^{RS} - \lambda_{ij}\ell_{ij}$ e $\Gamma_i^{RS} = \Gamma_j^{RS} - \tau_{ij}^{RS}\lambda_{ij}\ell_{ij}$. Ambas as expressões são consistentes com (13) e (14), respectivamente. Por outro lado, se o fluxo é de j a i , ou seja, $\alpha_{ij}^+ = 0$ e $\alpha_{ij}^- = 1$, então expressões (23) e (24) respectivamente se tornam $\Pi_i^{RS} = \Pi_j^{RS} + \lambda_{ij}\ell_{ij}$ e $\Gamma_i^{RS} = \Gamma_j^{RS} + \tau_{ij}^{RS}\lambda_{ij}\ell_{ij}$.

As expressões (25) e (26) respectivamente correspondem a (15) e (16). Semelhante a (23) e (24) para interrupções de reparação, as variáveis α_{ij}^+ e α_{ij}^- são usadas para calcular as taxas nodais esperadas e durações de interrupções comutação. Note-se, no entanto, que, ao contrário de (23) e (24), as expressões (25) e (26) não envolvem os nós dos ramos conectados às subestações.

As taxas esperadas e as durações das interrupções de comutação para os nós raiz são determinadas respectivamente por (27)–(28) e (29)–(30). Assim, as expressões (27) e (28) correspondem as expressões (17), enquanto as expressões (29) e (30) estão associadas a (18). Vale ressaltar que, diferentemente de (17) e (18), as expressões (27)–(30) não dependem do conjunto Υ_j^{DW} , dependente da topologia e que foi usado para identificar os ramos a jusante do nó raiz correspondente.

Figura 6. Sistema fictício associado ao exemplo ilustrativo. (a) Condição de carregamento para a taxa esperada de interrupções comutação afetando o nó raiz. (b) Condição de carregamento para a duração esperada de interrupções comutação que afetam o nó raiz.



Fonte: Próprio autor

Pode-se observar que as expressões (27)–(28) e (29)–(30) correspondem a um fluxo de uma rede radial. Este fluxo modela a operação de um sistema fictício extraído do sistema de distribuição original. O sistema fictício é obtido da seguinte maneira. Primeiro, os nós da subestação e os ramos que os conectam com os nós raiz são removidos, isto porque a subestação já tem assignada as taxas e durações de restauração por definição em (6) e (8). Assim, os nós raiz no sistema original se tornam os nós fonte (geradores) no sistema fictício. Além disso, todos os ramos do sistema fictício são idênticos aos ramos correspondentes no sistema original. A Figura 6 descreve o sistema fictício associado ao exemplo ilustrativo descrito na Seção 2.3, onde os elementos removidos são mostrados usando linhas tracejadas e o nó raiz original é delimitado por um quadrado para indicar sua função como um nó fonte no sistema fictício.

O princípio aqui usado é que a geração dos nós raiz deve corresponder com o valor da soma das interrupções dos ramos a jusante deles, seja para o cálculo das taxas ou durações esperadas dos nós raiz. Para poder usar o fluxo de carga é necessário que os demais nós de carga tenham assinado um valor de demanda e que para os nós fonte no sistema fictício esse valor seja igual a 0. Além disso, para cada nó de carga no sistema fictício, a demanda é definida como igual à taxa de falha do ramo que conecta esse nó com o nó a montante, no caso do cálculo das taxas nodais esperadas. No caso do cálculo das durações nodais, a demanda é definida igual ao produto da taxa de falha e da duração da interrupção de comutação do ramo que conecta esse nó com o nó a montante. A Figura 6(b) mostra esta condição de carga para o sistema fictício associado ao exemplo ilustrativo.

As variáveis α_{ij}^+ e α_{ij}^- , auxiliam a caracterizar as equações de balanço (27) e (28) do sistema fictício sob as condições especiais anteriormente mencionadas. Nesse fluxo de rede fictício, o fluxo através do ramo ij no sistema fictício é modelado por f_{ij}^{Π} . As expressões (27) correspondem ao balanço dos nós fonte do sistema fictício, ou seja, os nós raiz do sistema original. Analogamente, as expressões (28) estão relacionadas aos nós de carga restantes no sistema fictício, ou seja, os nós de carga diferentes dos nós raiz no sistema original.

Semelhante a (27) e (28), as equações de balanço (29) e (30) modelam a operação do sistema fictício para o caso das durações esperadas de interrupção de comutação. Note-se que as variáveis f_{ij}^{Γ} em (29) e (30) representam os fluxos através dos ramos do sistema fictício.

Finalmente, as taxas e as durações de interrupção esperadas nulas para nós de subestação modeladas em (5)–(8) são impostas em (31).

2.5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Os resultados de vários casos de estudo são apresentados nesta seção. Primeiro, a abordagem proposta foi aplicada a um sistema de teste de 37 nós baseado em [Samper e Vargas \(2013\)](#). A escalabilidade da abordagem proposta foi validada com dois casos de estudo adicionais, correspondendo a sistemas de 85 e 137 nós, baseados em sistemas teste descritos em [Su e Lee \(2003\)](#) e [Lavorato *et al.* \(2010\)](#), respectivamente. Os dados para os três casos de estudos podem ser consultados em [Tabares \(2018\)](#). As simulações foram implementadas em computador de um Gigabyte R280-A3C X64 com dois processadores Intel Xeon E5-2698 v3 a 2.30 GHz e 256 GB de RAM usando CPLEX 12.6 ([IBM ILOG CPLEX, 2018](#)) e GAMS 24.7 ([GAMS, 2018](#)).

2.5.1 Caso de estudo de 37 nós

O primeiro caso de estudo é um sistema de teste de 13,2 kV composto por 36 nós de carga e 1 nó de subestação. Como feito em ([LOTERO; CONTRERAS, 2011](#)), todos os ramos são caracterizados por 0,1 falhas por ano por km. Portanto, as taxas de falha dos

ramos são definidas de modo que $\lambda_{ij} = 0.1\ell_{ij}, \forall ij \in \Upsilon$. Os dados adicionais podem ser encontrados em [Tabares \(2018\)](#).

A abordagem algebraica proposta exigiu 0,02 s para determinar os valores para as variáveis Π_i^{RS} , Π_i^{SO} , Γ_i^{RS} e Γ_i^{SO} , que são idênticos aos fornecidos em [Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo \(2018b\)](#). Os resultados de confiabilidade são iguais aos encontrados por ([MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2018b](#)) e são resumidos na Tabela 1.

Tabela 1. Taxas e durações nodais esperadas para interrupções de reparação e restauração no sistema teste de 37 nós

Nó	Π_i^{RS}	Γ_i^{RS}	Π_i^{SO}	Γ_i^{SO}	Nó	Π_i^{RS}	Γ_i^{RS}	Π_i^{SO}	Γ_i^{SO}	Nó	Π_i^{RS}	Γ_i^{RS}	Π_i^{SO}	Γ_i^{SO}
1	0,00	0,00	0,00	0,00	14	0,25	0,54	0,43	0,10	27	0,39	0,59	1,69	0,40
2	0,35	0,67	1,70	0,43	15	0,47	1,08	0,20	0,05	28	0,51	0,82	1,57	0,37
3	0,47	0,94	1,59	0,40	16	0,59	1,28	0,09	0,02	29	0,54	0,90	1,54	0,36
4	0,51	1,01	1,55	0,39	17	0,15	0,26	1,51	0,38	30	0,59	1,05	1,49	0,35
5	0,56	1,13	1,50	0,39	18	0,28	0,50	1,39	0,35	31	0,72	1,31	1,36	0,32
6	0,67	1,37	1,39	0,36	19	0,39	0,74	1,28	0,32	32	0,77	1,43	1,31	0,32
7	0,71	1,47	1,35	0,35	20	0,54	1,07	1,12	0,28	33	0,79	1,35	1,29	0,31
8	0,77	1,54	1,29	0,34	21	0,57	1,04	1,10	0,28	34	1,00	1,81	1,08	0,26
9	0,94	1,89	1,11	0,28	22	0,57	1,12	1,09	0,27	35	0,93	1,60	1,15	0,28
10	0,96	1,86	1,10	0,28	23	0,73	1,50	0,94	0,22	36	1,09	1,89	0,99	0,24
11	0,93	1,78	1,13	0,30	24	0,73	1,53	0,93	0,24	37	1,11	1,99	0,97	0,23
12	1,14	2,31	0,91	0,25	25	0,78	1,47	0,88	0,22					
13	0,16	0,32	0,52	0,12	26	0,89	1,69	0,78	0,20					

Fonte: Próprio autor

Usando as taxas e durações nodais esperadas acima, os índices de confiabilidade do sistema SAIFI, SAIDI, ASAI e EENS são calculados. A Tabela 2 relata os valores de tais métricas de confiabilidade, que são idênticas àquelas alcançadas pelo algoritmo convencional baseado em simulação descrito no Apêndice 2.3.1 e o método baseado em otimização recentemente apresentado em [Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo \(2018b\)](#).

2.5.2 Casos de estudo 85 e 137 nós

Dois casos de estudo de grande porte foram analisados. A Tabela 2 resume os resultados alcançados pelos três métodos: simulação ([BROWN, 2008](#)), otimização ([MUÑOZ-](#)

DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2018b) e a abordagem proposta, tanto para os casos de estudo de grande porte como para o sistema teste de 37 nós.

Semelhante ao estudo de caso de 37 nós, os índices de confiabilidade do sistema resultantes são idênticos para todas as metodologias, como esperado. Além disso, a comparação dos tempos de execução relatados na Tabela 2 revela a superioridade computacional da abordagem proposta. Note que o esforço computacional requerido pela abordagem proposta é duas e três ordens de magnitude menor do que aqueles associados ao algoritmo baseado em simulação e à abordagem baseada em otimização, respectivamente.

Tabela 2. Resultados casos de estudo

Numero de nós	37	85	137
SAIFI (interrupções/ano)	1,81	1,97	1,79
SAIDI(h/ano)	1,53	2,41	1,65
ASAI (%)	99,98	99,97	99,98
EENS (MWh/ano)	69,51	48,9	48,13
Tempo algoritmo de simulação (s)	0,01	0,05	0,16
Tempo abordagem de otimização (s)	2,94	8,36	13,63
Tempo abordagem proposta (s)	0,02	0,03	0,03

Fonte: Próprio autor

2.6 CONCLUSÕES

Uma nova abordagem foi apresentada para a avaliação analítica de confiabilidade de sistemas de distribuição. Como característica destacável, a confiabilidade é avaliada usando expressões algébricas. Assim, diferentemente dos antecedentes na literatura especializada, nem simulação nem otimização são necessárias, o que é computacionalmente vantajoso.

Os resultados numéricos mostram que eles são idênticos aos fornecidos pelas técnicas existentes baseadas em simulação e otimização, embora com um menor esforço computacional. Tais resultados revelam a superioridade do método algébrico.

As expressões lineares desenvolvidas nesta seção para a avaliação analítica da confiabilidade serão usadas dentro do problema de planejamento do capítulo 4.

3 MODELOS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA PARA O PPESD

Neste capítulo são apresentados modelos matemáticos para o PPESD considerando múltiplos períodos de planejamento. Primeiramente será apresentado um modelo de programação não linear inteiro misto (PNLIM) para posteriormente ser reescrito em modelos convexos, que possuem a capacidade de ser resolvidos usando técnicas conhecidas de otimização. No processo de convexificação são usados fundamentos de programação cônica de segunda ordem e de linearização por partes.

3.1 INTRODUÇÃO

O principal objetivo do sistema de distribuição elétrica é fornecer um serviço confiável para os consumidores, garantindo simultaneamente a qualidade do fornecimento de energia a um custo mínimo. O aumento da demanda do sistema, juntamente com a instalação de novas cargas, obriga as concessionárias a expandir o SDEE para satisfazer esta nova demanda. Assim, o objetivo do problema de planejamento de expansão do sistema de distribuição é estabelecer estratégias para atender a nova demanda, mantendo ao mesmo tempo a operação segura do SDEE. No PPESD, devem ser consideradas múltiplas funções objetivo: o custo de instalação de novos equipamentos, os custos operacionais das subestações, a confiabilidade do sistema de distribuição e as perdas de potência ativa. Ao longo dos anos, os pesquisadores têm contribuído significativamente para a solução do PPESD com vários modelos matemáticos e técnicas de solução ([GANGULY; SAHOO; DAS, 2013b](#)).

Dois tipos de modelos para o PPESD podem ser distinguidos quando é considerada a influência do valor do dinheiro no horizonte de planejamento: a instância mono-período ou estática e a multi-período ou dinâmica ([FLETCHER; STRUNZ, 2007a](#)). Na abordagem estática, o planejamento ótimo é realizado de acordo com a demanda que será estabelecida no final do período de planejamento e são determinados os investimentos que deveriam ser feitos para atender dita demanda sem estabelecer o momento mais adequado para realizá-las ao longo do horizonte de planejamento. A abordagem multi-período define não apenas o local ideal, o tipo e a capacidade dos investimentos, mas também o momento mais apropriado para fazer tais investimentos

ao longo do horizonte de planejamento, de modo que o crescimento contínuo da demanda é sempre absorvido pelo SDEE de forma ótima. Esta abordagem analisa a expansão dos SDEE em várias etapas, representando o curso natural de um problema de expansão. Devido ao acoplamento entre as várias fases, é muito mais difícil formular e resolver o PPESD multi-período, mas a solução obtida é normalmente melhor do que a encontrada utilizando a abordagem estática como comprovado em [Tabares *et al.* \(2016\)](#). O PPESD multi-período é um problema de PNLIM que envolve variáveis binárias que representam a construção e/ou reforço de novos equipamentos e variáveis contínuas que representam a operação em estado estacionário do SDEE ([FLETCHER; STRUNZ, 2007a](#)).

Os modelos existentes para resolver o PPESD podem ser classificados em dois grupos: não-lineares e convexos. O primeiro grupo de modelos reflete precisamente as características não-lineares da rede, particularmente nas equações de fluxo de potência AC e perdas de energia, porém elas são formuladas como um problema de PNLIM cuja resolução é bastante complexa. Assim, os algoritmos de solução dessa classe de modelos concentram-se principalmente em algoritmos inteligentes, como algoritmo genético, otimização de enxame de partículas, entre outros ([LAVORATO *et al.*, 2010](#); [YANG; DONG; WONG, 2008](#); [MIRANDA; RANITO; PROENÇA, 1994a](#); [SEDGHI; AHMADIAN; ALIAKBAR-GOLKAR, 2016](#); [AGHAEI *et al.*, 2014](#); [PEREIRA-JUNIOR *et al.*, 2014](#)). Embora as heurísticas e metaheurísticas sejam robustas, flexíveis e consigam bons resultados, também apresentam algumas desvantagens como a alta demanda computacional, a necessidade de ajuste e refinamento dos parâmetros, assim como a definição de um critério de parada. Além disso, sua maior desvantagem é que não podem garantir a convergência para o ótimo global e não podem indicar a qualidade da solução entregue porque não fornecem um indicador de distância à solução ótima.

Para superar as desvantagens mencionadas acima, o segundo grupo de modelos para o PPESD é formulado usando programação convexa, a partir da eliminação das não linearidades do modelo original ([ASENSIO *et al.*, 2018](#); [HAFFNER *et al.*, 2008](#); [MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2016](#); [ASENSIO; MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS, 2017](#); [TABARES *et al.*, 2016](#); [JABR, 2013](#); [FRANCO; RIDER; ROMERO, 2014](#)). Mesmo com a sua capacidade de garantir otimalidade, esses modelos têm suas próprias deficiências como o crescimento do problema matemático a solucionar, o aumento do gasto computacional o que se traduz em pouca flexibilidade no momento de adicionar características mais reais nos modelos. Com todo, os modelos de otimização clássica continuam a melhorar para

permitir um balanço entre tratabilidade computacional e a representação das características essenciais do SDEE.

Os primeiros modelos convexos de otimização usados para lidar com as não linearidades foram aproximações baseadas em programação linear inteira mista (PLIM) (HAFFNER *et al.*, 2008; MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2016; ASENSIO; MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS, 2017; SANTOS *et al.*, 2017a; TABARES *et al.*, 2016; SANTOS *et al.*, 2017b). Por exemplo, um modelo de PLIM baseado em uma extensão do modelo linear disjuntivo, normalmente usado no planejamento de expansão de redes de transmissão, é proposto em Haffner *et al.* (2008). Esse modelo linear é obtido com algumas simplificações, como o emprego de equações de fluxo de potência DC e a desconsideração das perdas de potência. Da mesma forma, os autores em Asensio *et al.* (2018) propõem um modelo de PLIM incorporando uma versão adaptada de equações de fluxo de potência DC ao PPESD, onde a perda de potência e o balanço de potência reativa são completamente negligenciados. Usar esses modelos simplificados de rede pode fazer com que as soluções encontradas para o problema de PPESD sejam otimistas demais ou até mesmo ineficazes. Os modelos de PLIM apresentados em Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo (2016), Asensio, Muñoz-Delgado e Contreras (2017), Santos *et al.* (2017a) têm uma vantagem relativa sobre os propostos em Asensio *et al.* (2018), Haffner *et al.* (2008) uma vez que consideram as perdas de potência ativa. No entanto, continuam usando uma variante das equações DC de fluxo de potência.

Um modelo para o PPESD fornecerá planos de expansão confiáveis se incorporar um estudo completo da operação da rede com base nas equações do fluxo de potência AC. Motivado por este fato, relaxações convexas usando programação cônica de segunda ordem (PCSO) foram propostas nos últimos anos para tratar as não linearidades do modelo original (JABR, 2013; FRANCO; RIDER; ROMERO, 2014). Jabr (2013) mostra que o PPESD pode ser formulado como um modelo cônico disjuntivo em duas formulações equivalentes (circuito único e o circuito paralelo) que adicionalmente admite uma aproximação poliédrica. O trabalho em Franco, Rider e Romero (2014) propõe o uso de programação inteira mista com restrições quadráticas, que é equivalente ao modelo não linear AC. Ambos os trabalhos foram testados em uma instância de um só período de planejamento para o PPESD. Porém, os modelos de PCSO precisam ser explorados em instâncias dinâmicas do PPESD e que considerem outras características salientes como a confiabilidade.

Outras relaxações convexas baseadas em PLIM foram recentemente propostas usando o fluxo de potência AC (TABARES *et al.*, 2016; SANTOS *et al.*, 2017b). O modelo de PLIM apresentado em Tabares *et al.* (2016) emprega uma versão linearizada de equações de fluxo de potência AC para capturar de forma mais aprimorada as características inerentes da rede. No entanto, esse modelo de rede é obtido por meio de várias suposições propensas a erros que afetam negativamente sua exatidão. Em Santos *et al.* (2017b), é proposto um modelo de PLIM mais preciso com menos supostos que os apresentados na literatura para o PPESD; esse modelo utiliza uma técnica de linearização por partes para evitar as não-linearidades baseado no trabalho anterior de Tabares *et al.* (2016), a diferença de ambos trabalhos radica em que o primeiro é usado num modelo multi-estágio estocástico e o segundo resolve uma instância determinística com um maior número de ativos para o investimento. No entanto, a aproximação no cálculo das tensões nodais de ambos os trabalhos precisa ser melhorada, pois presume um valor fixo baseado na solução de uma instância linear não inteira do problema.

Em resumo, os modelos de PLIM propostos na literatura para o PPESD ainda podem ser melhorados ou estendidos para capturar novas características do problema de planejamento. Pelo anterior, modelos de programação convexa e baseados no fluxo de potência AC são propostos neste capítulo em sua forma mais básica, visando sua extensão em capítulos seguintes para considerar aspectos econômicos e de confiabilidade de forma conjunta.

3.2 MODELO DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR INTEIRO E NÃO CONVEXO PARA O PPESD

Conforme discutido anteriormente, o principal objetivo do planejamento de expansão dos SDEE é atender adequadamente o crescimento da carga com um custo total mínimo, sujeito a um conjunto de restrições técnicas e operacionais. Neste contexto, o método proposto define os investimentos necessários para satisfazer o crescimento da carga, mantendo uma operação adequada. A construção / reforço de subestações e ramos é analisada ao longo de diferentes etapas do horizonte de planejamento, na tentativa de minimizar o investimento total e o custo operacional.

As seguintes suposições são feitas para formular um modelo matemático adequado para ser resolvido usando otimização:

- O modelo proposto é resolvido do ponto de vista do operador do sistema de distribuição, buscando assim o plano de expansão que beneficia à sociedade;
- Devido à complexidade inerente do problema de expansão, assume-se que o sistema de distribuição está operando em estado estacionário;
- As cargas são modeladas como sendo do tipo potência constante. O modelo considera o aumento da carga existente e a alocação de novas cargas no sistema;
- O sistema de distribuição é balanceado e representado por um equivalente monofásico.

Um modelo de PNLIM com não-linearidades relacionadas a perdas de energia quadráticas e geração de energia por parte da subestação é reformulado como um modelo de programação cônica de segunda ordem inteiro misto (PCSOIM) usando as equações de fluxo de potência propostas em [Franco, Rider e Romero \(2014\)](#). Adicionalmente, um modelo de PLIM que utiliza uma técnica de linearização por partes é usada para superar as não-linearidades ([BRADLEY; HAX; MAGNANTI, 1977](#)). A abordagem de solução proposta produz um programa convexo inteiro misto para o qual a convergência para o ótimo é garantida, enquanto fornece uma medida da distância à ótimo ao longo do processo de solução ([NEMHAUSER; WOLSEY, 1999](#)). A primeira das alterações comuns a todos os modelos para lidar com as não-linearidades é a troca das variáveis $V_{i,t}^2$ e $I_{ij,t}^2$ por $V_{i,t}^{sqr}$ e $I_{ij,t}^{sqr}$.

3.2.1 Função objetivo

O custo total minimizado em (32) inclui o custo do investimento e o custo operacional, que compreende os custos de manutenção, produção de energia e corte de carga. O objetivo do modelo proposto é a minimização do valor presente do custo total, que, baseado em ([LOTERO; CONTRERAS, 2011](#); [MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2016](#)), é formulado como a seguinte soma de três termos :

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } c^T = & \sum_{t \in \Theta} \frac{(1 + I_f)^{-(t-1)}}{I_f} c_t^I + Ipv(I_f, n) \sum_{t \in \Theta} \left[(1 + I_f)^{-(t-1)} (c_t^M + c_t^P + c_t^O + c_t^U) \right] \\ & + \frac{(1 + I_f)^{-|\Theta|}}{I_f} (c_{|\Theta|}^M + c_{|\Theta|}^P + c_{|\Theta|}^O + c_{|\Theta|}^U) \end{aligned} \quad (32)$$

No primeiro termo, o valor presente do custo de investimento é representado sob a hipótese de um horizonte de planejamento perpétuo ou infinito (BLANK; TARQUIN, 2012). O segundo termo caracteriza o valor presente do custo operacional. Finalmente, no terceiro termo é modelado o valor presente do custo operacional incorridos após o último período. Observe que o terceiro termo depende dos custos no último estágio de planejamento e assume um horizonte de planejamento perpétuo. Os termos de custo em (32) são formulados da seguinte forma:

$$c_t^I = RR^l \sum_{a \in \Phi_a} \sum_{ij \in \Upsilon} C_{ij,a}^{fl} x_{ij,a,t}^l + RR^S \left(\sum_{c \in \Phi_c} \sum_{i \in \Omega_S} C_c^S x_{i,c,t}^s + \sum_{c \in \Phi_c} \sum_{i \in \Omega_S} C_c^R x_{i,c,t}^r \right) \quad (33)$$

$$c_t^M = \sum_{a \in \Phi_a} \sum_{ij \in \Upsilon} C_a^M y_{ij,a,t}^l + \sum_{c \in \Phi_c} \sum_{i \in \Omega_S} C_c^M (y_{i,c,t}^s + y_{i,c,t}^r); \forall t \in \Theta \quad (34)$$

$$c_t^P = \sum_{i \in \Omega_S} \alpha^A cf C_i^{ene} P_{i,t}^S; \forall t \in \Theta \quad (35)$$

$$c_t^U = \sum_{i \in \Omega_S} \alpha^A cf C_i^c P_{i,t}^{SF}; \forall t \in \Theta \quad (36)$$

$$c_t^O = C^o \sum_{i \in \Omega_S} \alpha^A cf R_i^S S g_{i,t}^{sqr}; \forall t \in \Theta \quad (37)$$

$$c_t^L = C^L \sum_{a \in \Phi_a} \sum_{ij \in \Upsilon} \alpha^A cf R_a l_{ij} I_{ij,a,t}^{sqr}; \forall t \in \Theta \quad (38)$$

Onde as taxas de recuperação do capital são calculadas como $RR^l = \frac{I_f(1+I_f)^t}{(1+I_f)^{t-1}}$ e $RR^S = \frac{I_f(1+I_f)^{SS}}{(1+I_f)^{SS-1}}$ e a função $Ipv(I_f, n) = \frac{(1-(1+I_f)^{-n})}{I_f}$ atualiza os valores dos custos operacionais ao início de cada um dos períodos de planejamento (HAFFNER *et al.*, 2008).

3.2.2 Restrições lógicas associadas a investimentos e operações

As expressões que relacionam as variáveis de investimento e operação ao longo do horizonte de planejamento são representadas por (39)–(48). Essas restrições são adaptadas de Haffner *et al.* (2008), Lotero e Contreras (2011). Além disso, para melhorar o desempenho do processo de otimização, o estado operacional de cada ramo, em cada período de planejamento é representado por duas variáveis binárias (41), como proposto em Franco *et al.* (2013). Se $y_{ij,t}^{l+}$ ou $y_{ij,t}^{l-}$ são iguais a 1, então o ramo ij está em operação e se ambas forem zero, então o ramo ij está fora de operação. Além disso, a direção do fluxo através de um ramo específico ij é modelada pelos valores das variáveis

$y_{ji,t}^{l+}$ e $y_{ji,t}^{l-}$. Assim, a combinação $y_{ji,t}^{l+} = 1$ e $y_{ji,t}^{l-} = 0$ é usada para identificar que o nó i está à montante do nó j e, portanto, o fluxo é de i para j . Por outro lado, a combinação $y_{ji,t}^{l+} = 0$ e $y_{ji,t}^{l-} = 1$ é usada para identificar que o nó i está à jusante do nó j e, portanto, o fluxo é de j para i .

As expressões (39) garantem que apenas um tipo de condutor seja selecionado para cada ramo. As expressões (40) garantem o uso de um tipo de condutor que já foi construído. Com relação aos investimentos e operação das subestações, só é possível escolher um tipo de investimento para a construção e repotênciação (42)–(44). Adicionalmente, a repotênciação das subestações ocorre após a construção da subestação, conforme garantido pelas expressões (44). Finalmente, as expressões (45)–(43) garantem o uso do tipo de investimentos realizados para a instalação e a repotênciação.

$$\sum_{a \in \Phi_a} x_{ij,a,t}^l = 1; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta \quad (39)$$

$$y_{ij,a,t}^l \leq \sum_{k=1}^t x_{ij,a,k}^l; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta \quad (40)$$

$$y_{ij,t}^{l+} + y_{ij,t}^{l-} = \sum_{a \in \Phi_a} y_{ij,a,t}^l; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta \quad (41)$$

$$\sum_{t \in \Theta} \sum_{c \in \Phi_c} x_{i,c,t}^s \leq 1; \forall i \in \Omega^S \quad (42)$$

$$\sum_{t \in \Theta} \sum_{c \in \Phi_c} x_{i,c,t}^r \leq 1; \forall i \in \Omega^S \quad (43)$$

$$x_{i,c,t}^r \leq \sum_{k=1}^t x_{i,c,k}^s; \forall i \in \Omega^S, t \in \Theta \quad (44)$$

$$y_{i,c,t}^r \leq \sum_{k=1}^t x_{i,c,k}^r; \forall i \in \Omega^S, t \in \Theta \quad (45)$$

$$y_{i,c,t}^s \leq \sum_{k=1}^t x_{i,c,k}^s; \forall i \in \Omega^S, t \in \Theta \quad (46)$$

$$\sum_{c \in \Phi_c} y_{i,c,t}^s \leq 1; \forall i \in \Omega^S, t \in \Theta \quad (47)$$

$$\sum_{c \in \Phi_c} y_{i,c,t}^r \leq 1; \forall i \in \Omega^S, t \in \Theta \quad (48)$$

3.2.3 Restrições fundamentais dos SDEE

As expressões (49)–(57) representam o modelo de fluxo de potência AC em uma rede de distribuição radial baseada em um conjunto de equações recursivas propostas por Baran e Wu (1989). Mais especificamente, as equações (49) e (50) asseguram o balanço de potência ativa e reativa para cada nó, obrigando que todas as cargas sejam fornecidas, isto é, a primeira lei de Kirchhoff. As expressões (51)–(53) modelam a segunda lei de Kirchhoff para cada laço fundamental. Como o fornecimento da topologia radial é produto do processo de otimização, as expressões (52) indicam que a variável auxiliar $\Delta_{ij,t}^V$ é zero se o ramo ij estiver em operação no correspondente período de planejamento. Quando o ramo ij está fora de operação, a variável $\Delta_{ij,t}^V$ é ativada para satisfazer (51). Além disso, as equações (54)–(56) são empregadas com base no fato de que cada ramo usa apenas um tipo de condutor em cada período de planejamento. Finalmente, as expressões (57) relacionam as potências ativa, reativa e aparente fornecidas por cada subestação.

$$\sum_{ki \in \Upsilon} \sum_{a \in \Phi_a} P_{ki,a,t} - \sum_{ij \in \Upsilon} \sum_{a \in \Phi_a} (P_{ij,a,t} + R_a l_{ij} I_{ij,a,t}^{sqr}) + P_{i,t}^S + P_{i,t}^{SF} = P_{i,t}^D; \forall i \in \Omega^B, t \in \Theta \quad (49)$$

$$\sum_{ki \in \Upsilon} \sum_{a \in \Phi_a} Q_{ki,a,t} - \sum_{ij \in \Upsilon} \sum_{a \in \Phi_a} (Q_{ij,a,t} + X_a l_{ij} I_{ij,a,t}^{sqr}) + Q_{i,t}^S + Q_{i,t}^{SF} = Q_{i,t}^D; \forall i \in \Omega^B, t \in \Theta \quad (50)$$

$$V_{i,t}^{sqr} = V_{j,t}^{sqr} + \sum_{a \in \Phi_a} [2(R_a P_{ij,a,t} + X_a Q_{ij,a,t}) l_{ij} - Z_a^2 l_{ij}^2 I_{ij,a,t}^{sqr}] + \Delta_{ij,t}^V; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta \quad (51)$$

$$|\Delta_{ij,t}^V| \leq (\bar{V}^2 - \underline{V}^2) [1 - (y_{ij,t}^{l+} + y_{ij,t}^{l-})]; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta \quad (52)$$

$$V_{j,t}^{sqr} \hat{I}_{ij,t}^{sqr} = \hat{P}_{ij,t}^2 + \hat{Q}_{ij,t}^2; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta \quad (53)$$

$$\hat{I}_{ij,t}^{sqr} = \sum_{a \in \Phi_a} I_{ij,a,t}^{sqr}; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta \quad (54)$$

$$\hat{P}_{ij,t} = \sum_{a \in \Phi_a} P_{ij,a,t}; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta \quad (55)$$

$$\hat{Q}_{ij,t} = \sum_{a \in \Phi_a} Q_{ij,a,t}; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta \quad (56)$$

$$Sg_{i,t}^{sqr} \geq (P_{i,t}^S)^2 + (Q_{i,t}^S)^2; \forall i \in \Omega_S, t \in \Theta \quad (57)$$

3.2.4 Limites operacionais

As expressões (58) determinam o intervalo aceitável das magnitudes da tensão nodal. As expressões (59)–(60) representam os limites nos fluxos de corrente pelos ramos com base no tipo de condutor usado para construí-los e seu estado operacional em cada período de planejamento, respectivamente. Da mesma forma, as expressões (61)–(62) e (63)–(64) limitam os fluxos de potência ativa e reativa pelos ramos com base no tipo de condutores usados para construí-los e seu estado operacional em cada período de planejamento, respectivamente. Além disso, as expressões (65) limitam a potência aparente fornecida por cada subestação considerando a sua capacidade instalada. Por último, as expressões (66)–(67) limitam o corte de carga nos nós.

$$\underline{V} \leq V_{i,t}^{sqr} \leq \bar{V}; \forall i \in \Omega^B, t \in \Theta \quad (58)$$

$$0 \leq I_{ij,a,t}^{sqr} \leq \bar{I}_a^2 x_{ij,a,t}^l; \forall ij \in \Upsilon, a \in \Phi_a, t \in \Theta \quad (59)$$

$$0 \leq I_{ij,a,t}^{sqr} \leq \bar{I}_a^2 (y_{ij,t}^{l+} + y_{ij,t}^{l-}); \forall ij \in \Upsilon, a \in \Phi_a, t \in \Theta \quad (60)$$

$$|P_{ij,a,t}| \leq \bar{V} \bar{I}_a x_{ij,a,t}^l; \forall ij \in \Upsilon, a \in \Phi_a, t \in \Theta \quad (61)$$

$$|P_{ij,a,t}| \leq \bar{V} \bar{I}_a (y_{ij,t}^{l+} + y_{ij,t}^{l-}); \forall ij \in \Upsilon, a \in \Phi_a, t \in \Theta \quad (62)$$

$$|Q_{ij,a,t}| \leq \bar{V} \bar{I}_a x_{ij,a,t}^l; \forall ij \in \Upsilon, a \in \Phi_a, t \in \Theta \quad (63)$$

$$|Q_{ij,a,t}| \leq \bar{V} \bar{I}_a (y_{ij,t}^{l+} + y_{ij,t}^{l-}); \forall ij \in \Upsilon, a \in \Phi_a, t \in \Theta \quad (64)$$

$$Sg_{i,t}^{sqr} \leq \left(\sum_{c \in \Phi_c} \bar{S}_c y_{i,c,t}^s + \sum_{c \in \Phi_c} \bar{R}_c y_{i,c,t}^r \right)^2; \forall i \in \Omega_S, t \in \Theta \quad (65)$$

$$P_{i,t}^{SF} \leq P_{i,t}^D; \forall i \in \Omega^B, t \in \theta \quad (66)$$

$$Q_{i,t}^{SF} = \tan(\cos^{-1}(pf)) P_{i,t}^{SF}; \forall i \in \Omega^B, t \in \theta \quad (67)$$

3.2.5 Restrição de radialidade

Em Taylor e Hover (2012) é apresentado um conjunto de restrições para garantir a operação radial para o problema de reconfiguração dos sistema de distribuição. As equações (68)–(70) junto com (41) são extensões naturais deste trabalho. Este conjunto de equações constrói uma estrutura tipo árvore típica para da operação de um sistema radial

e em conjunto com as equações de balanço de potência (49)–(50) garantem a conectividade dos nós.

$$\sum_{ji \in \Upsilon} y_{ji,t}^{l+} + \sum_{ij \in \Upsilon} y_{ij,t}^{l-} = 0; \forall i \in \Omega^S, t \in \Theta \quad (68)$$

$$\sum_{ji \in \Upsilon} y_{ji,t}^{l+} + \sum_{ij \in \Upsilon} y_{ij,t}^{l-} = 1; \forall i \in \Omega^B \setminus \Omega^S, t \in \Theta | P_{i,t}^D > 0 \quad (69)$$

$$\sum_{ji \in \Upsilon} y_{ji,t}^{l+} + \sum_{ij \in \Upsilon} y_{ij,t}^{l-} \leq 1; \forall i \in \Omega^B \setminus \Omega^S, t \in \Theta | P_{i,t}^D = 0 \quad (70)$$

3.2.6 Modelo de programação não linear inteiro misto para o PPESD

Considerando as expressões das seções anteriores, o modelo de PNLIM para o PPESD de multiples períodos é dado por:

Minimizar (32)

sujeito a:

(39) – (70)

Este modelo representa mais exatamente as características do PPESD. No entanto, por ser um programa de PNLIM e não-convexo, as técnicas de otimização desenvolvidas para obter soluções não podem garantir otimalidade e na prática tem-se verificado que é preciso um esforço computacional maior em comparação como modelos convexos.

3.3 MODELOS DE PROGRAMAÇÃO CONVEXOS INTERIOS MISTOS PARA O PPESD

Para superar as desvantagens do modelo MINLP, aqui são derivadas três formulações convexas alternativas para o PPESD. As abordagens seguidas para obter estas formulações compreende:

1. Uso de formulação de fluxo de potência cônico que transforma o problema em um programa convexo (FARIVAR; LOW, 2013; FRANCO; RIDER; ROMERO, 2014);
2. Uso de álgebra de números inteiros para eliminar o produto de variáveis binárias e contínuas (FLOUDAS, 1995);

3. Uso de uma aproximação linear por partes para reformular as perdas de energia quadráticas e a potência aparente gerada pelas subestações e reescrever-las como um modelo de programação linear (BRADLEY; HAX; MAGNANTI, 1977).

Os resultados finais são um modelo de PCSOIM e um modelo de PLIM para o PPESD.

3.3.1 Modelo de programação cônico de segunda ordem inteiro misto para o PPESD

O modelo de PNLIM para o PPESD pode ser reformulado usando programação cônica de segunda ordem como segue:

Minimizar (32)

sujeito a:

$$(39) - (52), (54) - (64), (68) - (70)$$

$$V_{j,t}^{sqr} \widehat{I}_{ij,t}^{sqr} \geq \widehat{P}_{ij,t}^2 + \widehat{Q}_{ij,t}^2; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta \quad (71)$$

$$Sg_{i,t}^{sqr} = \sum_{c \in \Phi_c} \bar{S}_c^2 y_{i,c,t}^s + \sum_{c \in \Phi_c} \bar{R}_c^2 y_{i,c,t}^r + 2 \sum_{c \in \Phi_c} \bar{S}_c \bar{R}_c y_{i,c,t}^r; \forall i \in \Omega_S, t \in \Theta \quad (72)$$

A formulação modificada é obtida pela aplicação dos primeiros passos apresentados na Seção 3.3, os quais convexificam o modelo não linear. Para este propósito, as equações (53) são reformuladas como (71) aplicando o primeiro passo da Seção 3.3, e as equações (65) são reformuladas como (72) aplicando o segundo passo. Além disso, vale ressaltar que as expressões (57) já são cônicas de segunda ordem e não precisam ser reformuladas.

De acordo com Farivar e Low (2013), Franco, Rider e Romero (2014), o programa de PCSOIM será equivalente ao problema de PNLIM se: 1) a rede for radial; e 2) a função objetivo está aumentando estritamente com relação a $V_{j,t}^{sqr}$, $\widehat{I}_{ij,t}^{sqr}$ e $Sg_{i,t}^{sqr}$, que aparecem no lado esquerdo das expressões (53) e (57), respetivamente. Assim, a primeira condição é totalmente satisfeita pelas condições de radialidade discutidas na Seção 3.3. Para satisfazer a segunda condição, as variáveis $V_{j,t}^{sqr}$, $\widehat{I}_{ij,t}^{sqr}$ e $Sg_{i,t}^{sqr}$ estão definidas como positivas dentro do modelo e estão presentes indiretamente na função objetivo pelas relações existentes entre elas com a potência ativa gerada pela subestação no balanço de potência ativa (49), variável que está diretamente presente na função objetivo.

As expressões (72) são obtidas aplicando o segundo passo e assim reformular as expressões (65). Para este propósito, o lado direito de (65) é expandido usando uma identidade adequada de álgebra, aproveitando as variáveis binárias $y_{i,c}^s$ e $y_{i,c}^r$ e tendo em conta que apenas um tipo de investimento é permitido pelas restrições (42) e (43). O resultado da expressão é o seguinte:

$$\left(\sum_{c \in \Phi_c} \bar{S}_c y_{i,c,t}^s + \sum_{c \in \Phi_c} \bar{R}_c y_{i,c,t}^r \right)^2 = \sum_{c \in \Phi_c} (\bar{S}_c)^2 y_{i,c,t}^s + 2 \sum_{c \in \Phi_c} \bar{S}_c \bar{R}_c y_{i,c,t}^r + \sum_{c \in \Phi_c} (\bar{R}_c)^2 y_{i,c,t}^s$$

$$\forall i \in \Omega_S, t \in \Theta \quad (73)$$

A vantagem do programa de PCSOIM é que a solução obtida é sempre exata para redes radiais, como demonstrado em Farivar e Low (2013), e pode ser resolvido usando os métodos de pontos interiores primal-dual desenvolvidos para otimização linear (JABR, 2006).

3.3.2 Modelo de programação linear inteiro misto para o PPESD

O modelo de PNLIM para o PPESD pode ser reformulado usando programação linear como segue:

Minimizar (32)

sujeito a:

$$(39) - (52), (54) - (56), (58) - (64), (68) - (70), (72)$$

$$V_j^{est} \hat{I}_{ij,t}^{sqr} = f(\hat{P}_{ij,t}, \max\{a \in \Phi_a\} \bar{I}_a, K) + f(\hat{Q}_{ij,t}, \max\{a \in \Phi_a\} \bar{I}_a, K) \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta \quad (74)$$

$$Sg_{i,t}^{sqr} = f(P_{i,t}^S, \max\{c \in \Phi_c\} \bar{S}_c, K) + f(Q_{i,t}^S, \max\{c \in \Phi_c\} \bar{S}_c, K) \forall i \in \Omega_S, t \in \Theta \quad (75)$$

A formulação modificada é obtida pela aplicação do segundo e terceiro passo apresentados na Seção 3.3, onde as expressões (53) e (57) são linearizadas usando a metodologia proposta em Bradley, Hax e Magnanti (1977) como segue:

$$V_{j,t}^{sqr} \widehat{I}_{ij,t}^{sqr} \approx V_{j,t}^{est} \widehat{I}_{ij,t}^{sqr} \quad (76)$$

$$(P_{i,t}^S)^2 + (Q_{i,t}^S)^2 \approx f(P_{i,t}^S, \max\{c \in \Phi_c\} \bar{S}_c, \Gamma) + f(Q_{i,t}^S, \max\{c \in \Phi_c\} \bar{S}_c, \Gamma) \forall i \in \Omega_S, t \in \Theta \quad (77)$$

$$\widehat{P}_{ij,t}^2 + \widehat{Q}_{ij,t}^2 \approx f(\widehat{P}_{ij,t}, \max\{a \in \Phi_a\} \bar{I}_a, \Gamma) + f(\widehat{Q}_{ij,t}, \max\{a \in \Phi_a\} \bar{I}_a, \Gamma) \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta \quad (78)$$

A linearização do produto $V_j^{sqr} \widehat{I}_{ij}^{sqr}$ é realizada usando um valor constante para a variável da tensão nodal como é apresentado em (76). Entretanto, para obter um valor adequado para V_j^{nom} , uma versão relaxada do modelo, no qual as variáveis binárias são relaxadas, é resolvida e os valores de tensão para cada nó na solução encontrada são usados para V_j^{nom} . Finalmente, os termos quadráticos de (53) e (57) são aproximados usando a função linear por partes $f(z, \bar{z}, \kappa)$ aplicada em (77) e (78), e definida como segue:

$$f(z, \bar{z}, K) = \sum_{\kappa=1}^K \sigma_{z,\kappa} \delta_{z,\kappa} \quad (79)$$

$$z = z^+ + z^- \quad (80)$$

$$z^+ + z^- = \sum_{\kappa=1}^K \delta_{z,\kappa} \quad (81)$$

$$0 \leq \delta_{z,\kappa} \leq \bar{z}/K; \forall \kappa = 1, \dots, K \quad (82)$$

$$\sigma_{z,\kappa} = (2\kappa - 1)/K; \forall \kappa = 1, \dots, K \quad (83)$$

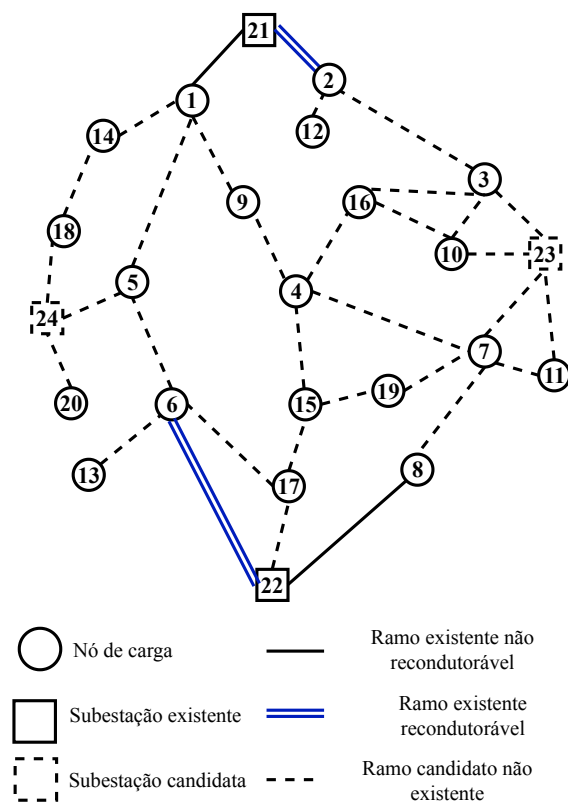
A vantagem dos modelos de PLIM é que podem ser resolvidos usando técnicas de otimização clássicas que garantem a solução ótima e que são mais robustas em comparação com a solução de formulações não lineares.

3.4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Os modelos AC convexos para o PPSD foram testados usando dois sistemas teste de 23 e 54 nós. As simulações foram implementadas em um computador de um Gigabyte R280-A3C X64 com dois processadores Intel Xeon E5-2698 v3 a 2.30 GHz e 256 GB de RAM usando CPLEX 12.6 (IBM ILOG CPLEX, 2018) e GAMS 24.7 (GAMS, 2018).

3.4.1 Caso de estudo de 24 nós

Figura 7. Topologia inicial para o sistema de 24 nós.



Fonte: Próprio autor

O seguinte teste corresponde ao caso de múltiplos períodos de planejamento, onde foi usado o sistema teste de 24 nós pela primeira vez apresentado em [Gönen e Ramírez-Rosado \(1986\)](#). Como se mostra na Figura 7, o sistema compreende 20 nós de carga, representados por círculos; 4 subestações, representados por quadrados; e 33 ramos, indicados por linhas. Além disso, três níveis de carga, nomeadamente alta, média

e baixa, são considerados. Além disso, 30 blocos são utilizados na linearização por partes. Está considerando uma taxa de juros ajustada pela inflação de 7,1% e um orçamento de investimento anual igual a \$6 milhões.

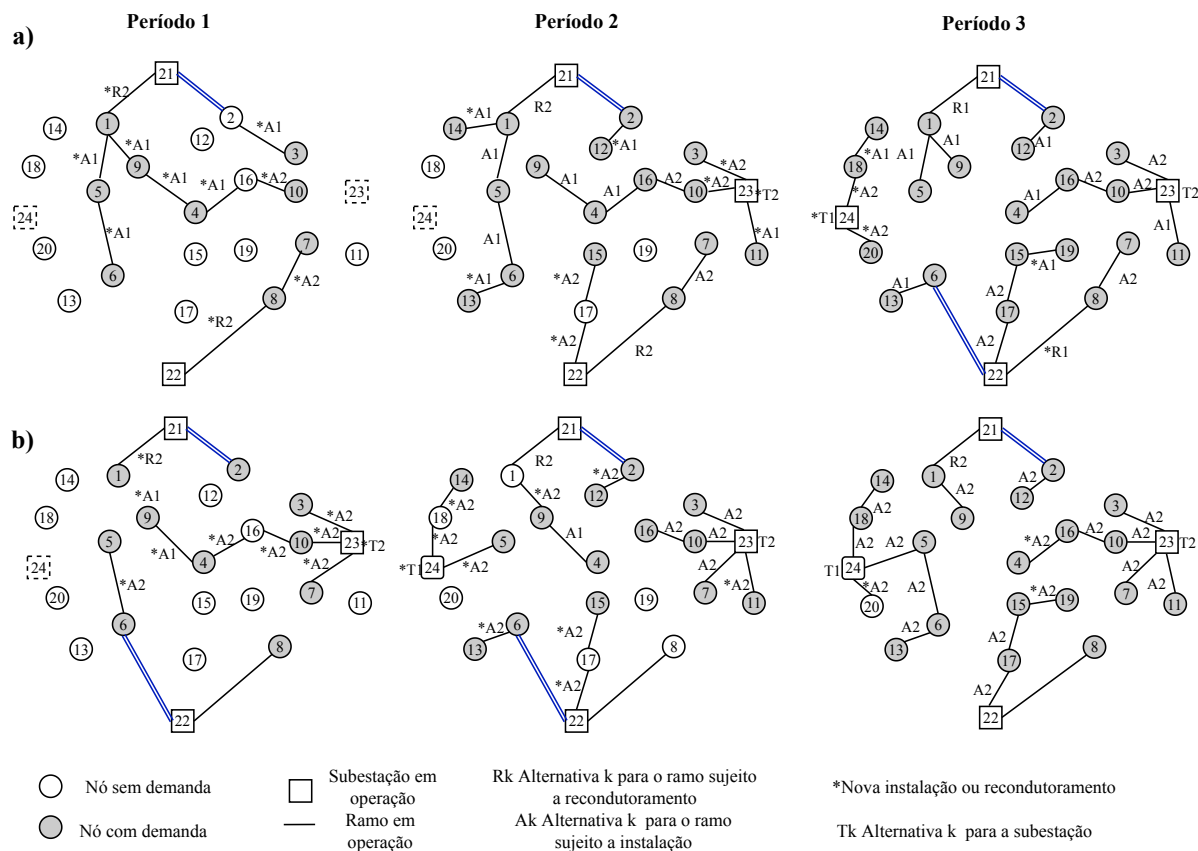
As tensões nos nós da subestação estão definidas em 1,05 p.u em uma base de 20 kV, os limites superior e inferior para as tensões em nós de carga são iguais a 1,05 p.u. e 0,95 p.u., respectivamente. As subestações existentes, nos nós 21 e 22, possuem uma capacidade e 7,5 MVA e um custo de manutenção igual a \$1000, Os nós 23 e 24 representam as subestações candidatas, Os custos de expansão das subestações 21 a 24 são de US \$100,000, US \$100,000, US \$140,000 e US \$ 180,000, respectivamente, Todos os equipamentos relacionados com as subestações tem um ciclo de vida de 15 anos,

Os ramos são categorizados como existentes e candidatos. Os ramos existentes são classificados em dois tipos: 1) aqueles com um alimentador não sujeito a recondutoramento, representados por linhas sólidas na Figura 7; e 2) aqueles existentes que podem sofrer recondutoramento, representados como linhas duplas sólidas. Os ramos candidatos sujeitos a instalação são representados por linhas tracejadas. A capacidade e a impedância dos alimentadores são de 3,94 MVA e $0,732\Omega/\text{km}$, respectivamente. As alternativas de investimento tanto dos ramos como das subestações, dados dos ramos e demanda dos nós para cada um dos três períodos de planejamento encontram-se descritas em (TABARES, 2018).

Os dois modelos convexos foram aplicados para este sistema teste, obtendo uma solução equivalente entre o modelo cônico e o modelo linear. Adicionalmente, foi obtida a solução para o modelo DC, isto é, apenas considerando potência ativa. Na Figura 8 mostra-se as topologias para cada um dos períodos de planejamento obtidos para todos os modelos. Em cada uma das figuras o condutor tipo A1 é de menor capacidade. Pode-se observar que ambos resultados são muito diferentes, a solução DC faz menores investimentos quando comparada com os investimentos do modelo AC.

A Tabela 3 mostra os resultados de custos, enquanto que as Tabelas 4 e 5 mostram os erros na aproximação da não linearidades para cada um dos tipos de ramos considerados e para cada um dos modelos propostos. Ressalta-se que o plano de expansão obtido usando o modelo DC é infatível segundo a solução de um fluxo de carga convencional. O modelo cônico demorou 6 horas e 56 minutos em chegar a solução ótima, enquanto o modelo linear demorou 2 horas e 23 minutos.

Figura 8. Topologias de expansão para o sistema de 24 nós. a) Geradas pelo modelo DC. b) Geradas pelos modelos AC cônico e linear



Fonte: Próprio autor

3.4.2 Caso de estudo de 54 nós

Um sistema teste de 54 nós baseado naquele descrito em [Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo \(2016\)](#), é usado para avaliar o comportamento computacional dos modelos propostos, considerando 10 períodos de planejamento. Como mostrado na [Figura 9](#), o sistema compreende 50 nós de carga, 4 nós de subestação e 63 ramos; as linhas contínuas representam os elementos da rede que inicialmente estão construídos, as linhas duplas representam os únicos ramos que podem ser recondução e as linhas tracejadas representam elementos para adição. Os dados originais encontram-se em [Tabares \(2018\)](#), onde os valores base para potência e tensão são 1 MVA e 13,5 kV, respectivamente. Os coeficientes de custo de investimento e manutenção são baseados naqueles fornecidos em [Loterio e Contreras \(2011\)](#), [Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo \(2016\)](#). Analogamente, os valores dos coeficientes de custo para o corte de cargas, as

Tabela 3. Resumo de custos em (US\$10³) para o caso de estudo de 24 nós

Tipo de custo	Periodo	DC	Cônico	Linear
Custo de investimento	T1	1502,29	1799,29	1799,29
	T2	1664,27	1547,01	1547,01
	T3	2224,47	42,24	42,24
Custo de manutenção	T1	8,36	9,29	9,29
	T2	12,77	13,16	13,16
	T3	245,58	196,46	196,46
Custo de energia	T1	6471,71	6682,02	6683,91
	T2	10248,47	10418,84	10421,75
	T3	248670,00	223260,00	224130,00
Custo corte de carga	T1	0,00	749,21	695,93
	T2	0,00	1108,83	1025,13
	T3	0,00	829210,00	803750,00
Custo de perdas	T1	79,11	24,84	24,61
	T2	100,89	44,73	44,32
	T3	2143,77	1240,79	1237,61
Custos totais		273371,67	1076346,71	1051620,71

Fonte: Próprio autor

Tabela 4. Erros das aproximações fluxos de potência (MVA) por tipo de ramos para o sistema de 24 nós

	Grandeza	Fixos	Construídos	Recondutorados
Modelo cônico	Fluxo de carga	38,28	570,93	170,50
	Valor calculado	37,89	565,37	168,47
Erro		1,00%	0,97%	1,19%
Modelo linear	Fluxo de carga	53,11	485,89	190,29
	Valor calculado	53,56	489,25	192,60
Erro		0,85%	0,69%	1,21%

Fonte: Próprio autor

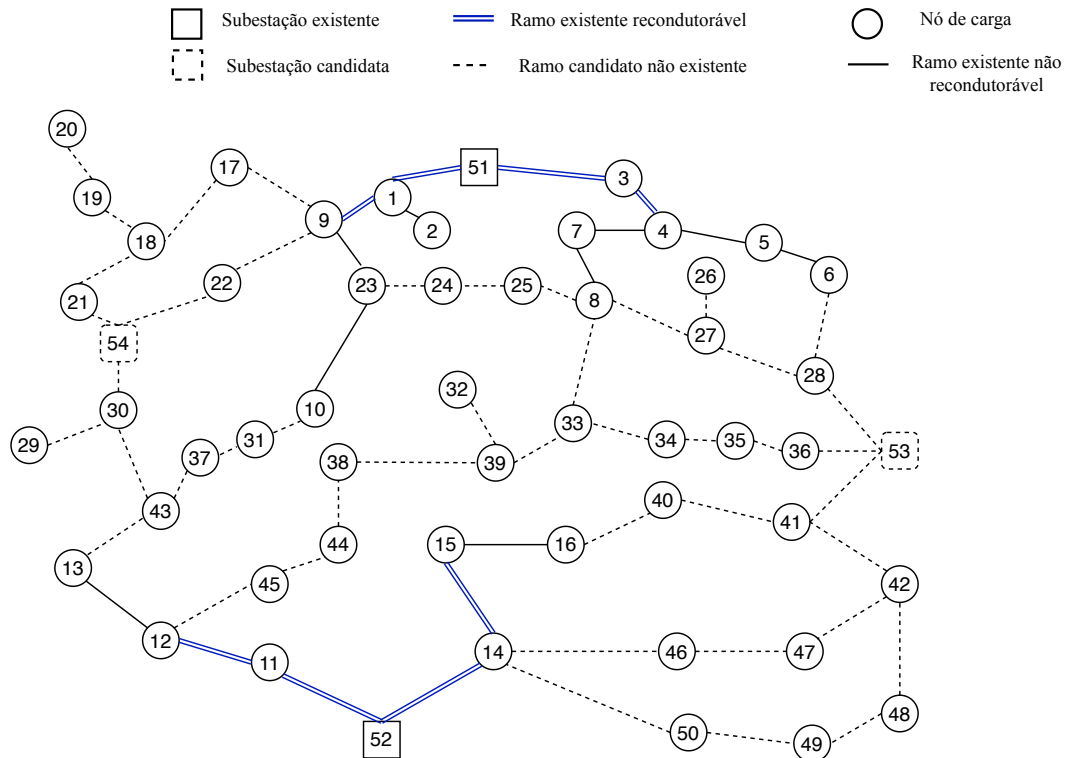
perdas de energia e a energia fornecida pelas subestações foram obtidas de [Loterio e Contreras \(2011\)](#). Para este caso é considerada uma taxa de juros ajustada à inflação de 10% e um orçamento de investimento anual igual a 2 milhões (US\$). Diferente do teste feito em [Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo \(2016\)](#), não é calculada a ENS, nem os

Tabela 5. Erros das aproximações da potência gerada em (MVA) pela subestação para o sistema de 24 nós

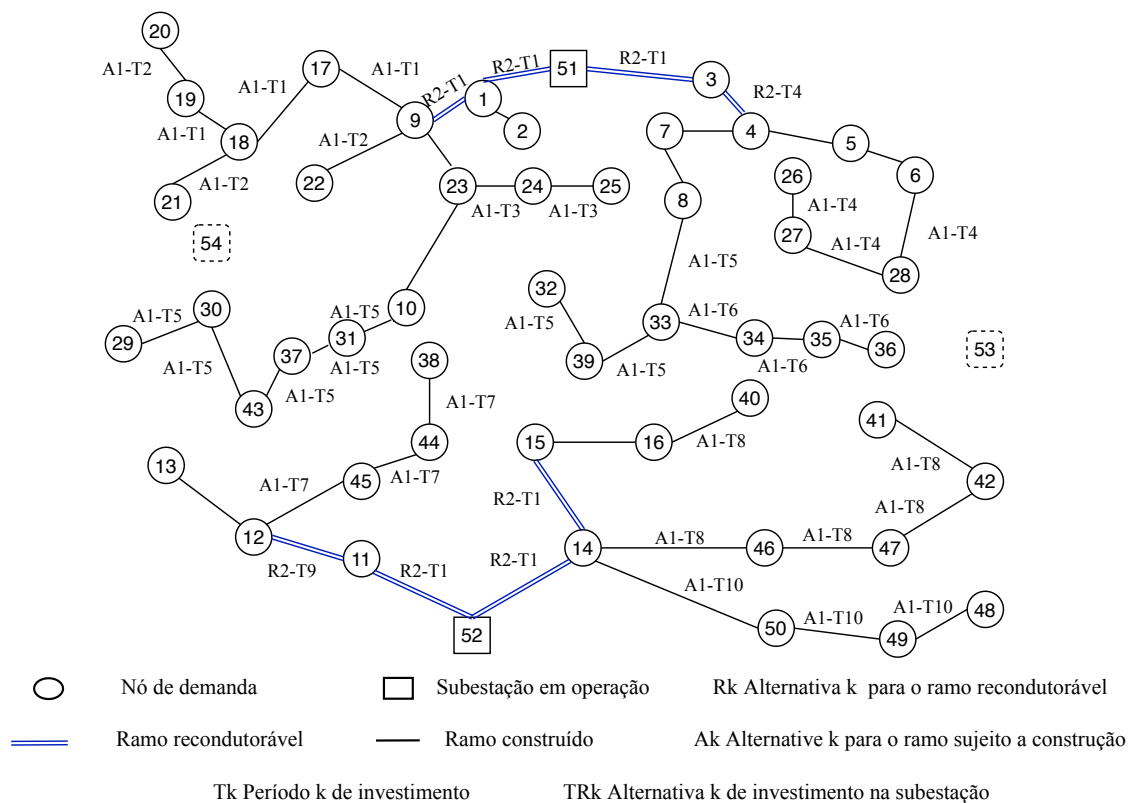
potência subestação	Modelo cônico	Modelo linear
Fluxo de carga	212,49	211,21
Valor calculado	212,49	211,58
Erro	0,00%	0,18%

Fonte: Próprio autor

custos de operação das subestações e as perdas de energia fazem parte do custo de produção de energia.

Figura 9. Topologia inicial para o sistema de 54 nós.**Fonte:** Próprio autor

O plano de investimento ótimo obtido para cada um dos modelos é mostrado na Figura 10, isto é, ambos os modelos fornecem o mesmo plano de expansão para o período de planejamento. Observa-se que nenhuma das subestações foi repotenciada e nenhuma subestação propostas foi construída.

Figura 10. Plano de investimento ótimo para o sistema de 54 nós.**Fonte:** Próprio autor

A Tabela 6 detalha os valores presentes dos custos de cada um dos períodos de investimento deste sistema teste. Pequenas diferenças de ambos modelos se apresentam no custo de energia, isto pela natureza aproximada do modelo linear, o erro respeito do modelo cônico é igual a 0,16%. Embora os bons resultados, se destaca que o modelo cônico investe 12 horas, enquanto o modelo linear investe 1 hora e 33 minutos.

3.5 CONCLUSÕES

Foi apresentado um modelo de programação cônico de segunda ordem e um modelo linear para o problema de planejamento de expansão com vários períodos de planejamento para o sistema de distribuição de energia elétrica. O modelo considerou a construção / reforço de subestações, a construção / reconduzimento de ramos e a modificação da topologia radial incluindo nós de transferência.

O uso de um modelo MILP tem os seguintes benefícios: a) um modelo matemático robusto que é equivalente ao modelo de programação não linear misto, b)

Tabela 6. Detalhamento de custos por período para a solução ótima do modelo linear e do modelo cônico (US\$10⁶)

		Período										Total
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Modelo Linear	Investimento	0,062	0,055	0,021	0,038	0,098	0,019	0,031	0,056	0,000	0,030	0,411
	Manutenção	0,013	0,013	0,012	0,012	0,013	0,012	0,012	0,012	0,011	0,114	0,223
	Energia	1,127	1,181	1,275	1,337	1,360	1,455	1,432	1,460	1,430	15,281	27,338
	Corte de carga	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Modelo Cônico	Investimento	0,062	0,055	0,021	0,038	0,098	0,019	0,031	0,056	0,000	0,030	0,411
	Manutenção	0,013	0,013	0,012	0,012	0,013	0,012	0,012	0,012	0,011	0,114	0,223
	Energia	1,127	1,181	1,275	1,336	1,359	1,452	1,430	1,457	1,427	15,252	27,295
	Corte de carga	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: Próprio autor

um comportamento computacional eficiente com solucionadores comerciais, e c) convergência para a otimalidade garantida pelo uso de técnicas clássicas de otimização.

Os resultados também mostraram que as perdas de energia podem ser calculadas com grande precisão quando se utiliza o método de varredura de fluxo de carga.

4 MODELOS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA PARA O PPESD CONSIDERANDO CONFIABILIDADE

Neste capítulo são propostas distintas modelagens matemáticas visando considerar a confiabilidade no problema de planejamento da expansão dos sistemas de distribuição. Dois tipos de modelagens que já foram implementadas na literatura especializada por meio das metaheurísticas são modeladas por meio de expressões algébricas. As modelagens propostas visam relacionar o cálculo de diferentes índices de confiabilidade com as variáveis de decisão do PPESD e assim a confiabilidade ser um produto do processo de otimização.

4.1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, a avaliação da confiabilidade do sistema de energia tem se concentrado principalmente na geração e transmissão. A razão básica é que os sistemas de geração e transmissão são intensivos em capital e, sua inadequação pode causar conseqüências catastróficas generalizadas tanto para a sociedade quanto para o meio ambiente (BILLINTON; WANG, 1998). No entanto, a análise das estatísticas de falha do cliente da maioria das operadoras dos SDEE mostram que o sistema de distribuição apresenta a maior contribuição individual à indisponibilidade de fornecimento dos clientes, em conseqüência as falhas na rede de distribuição elétrica representam aproximadamente 80% das interrupções médias do cliente (ALLAN; BILLINTON, 2000; BILLINTON; ALLAN, 1996). De acordo com a Corporação de Confiabilidade Elétrica da América do Norte (HINES; BALASUBRAMANIAM; SANCHEZ, 2009), as interrupções de energia são mais severas atualmente do que há alguns anos; segundo Wirfs-Brock (2014) os eventos médios de falha da rede nos Estados Unidos de América aumentaram de 2,5 para 14,5 por mês durante 2000-2013. Byrd e Matthewman (2014) prevêem que as falhas podem aparecer com maior freqüência e maior severidade no futuro.

Além disso, um interesse considerável em reduzir as perdas econômicas sofridas devido a eventos de confiabilidade foi identificado recentemente pelas partes interessadas do setor elétrico (CHANDRAMOHAN *et al.*, 2010; BANERJEE; ISLAM, 2011). Essa situação, juntamente com a mudança na regulamentação do setor de energia, tem motivado a definição de taxas ou penalidades para empresas de distribuição de acordo com as estatísticas que elas apresentem de confiabilidade do serviço. Não menos importante

resulta mencionar que um aumento de até 2% da renda anual pode ser alcançado pelas operadoras de rede devido à melhoria da confiabilidade (SPANISH MINISTRY OF INDUSTRY ENERGY AND TOURISM, 2013). Assim, a maioria dos operadores do sistema de distribuição tentam melhorar a confiabilidade do sistema de maneira econômica.

A confiabilidade é agora considerada um critério de planejamento essencial para ampliar e manter a infraestrutura do sistema de potência (HELSETH,). Como consequência, os pesquisadores têm colocado sua atenção e proposto metodologias que visem melhorar a confiabilidade do sistema de distribuição. Essas metodologias têm sido geralmente baseadas na alocação ótima de chaves (BILLINTON; JONNAVITHULA, 1996; CELLI; PILO, 1999; TENG; LU, 2002; KAZEMI *et al.*, 2009), religadores e dispositivos de proteção (SILVA; PEREIRA; MANTOVANI, 2004; SILVA *et al.*, 2008; POPOVIĆ *et al.*, 2005; PREGELJ; BEGOVIC; ROHATGI, 2006; TIPPACHON; RERKPREEDAPONG, 2009), bem como a ótima alocação de geração distribuída (POPOVIĆ *et al.*, 2005; PREGELJ; BEGOVIC; ROHATGI, 2006; CATRINU; NORDGARD, 2011) e reconfiguração do sistema (BROWN; HANSON, 2001). Adicionalmente, o PPSD também pode ser considerado como um método adequado para melhorar a confiabilidade da rede. Em geral, um plano que considere a confiabilidade no sistema de distribuição visa minimizar a duração e a frequência das interrupções no suprimento do serviço dos usuários do sistema, onde a avaliação é realizada através de índices de avaliação disponíveis (BILLINTON; BILLINTON, 1989; BILLINTON; ALLAN, 1996; IEEE..., 2012; CHOWDHURY; KOVAL, 2004; BROWN, 2008; CHOWDHURY; KOVAL, 2009; LOTERO; CONTRERAS, 2011; MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2016; MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2018a).

Duas abordagens para o PPSD considerando confiabilidade baseadas em métodos aproximados têm sido usadas na literatura especializada. A primeira categoria compreende várias metaheurísticas (MIRANDA; RANITO; PROENÇA, 1994a; RAMÍREZ-ROSADO; BERNAL-AGUSTÍN, 2001; RAMÍREZ-ROSADO; DOMINGUEZ-NAVARRO, 2004; RAMÍREZ-ROSADO; DOMINGUEZ-NAVARRO, 2006; NAŽAR; HAGHIFAM, 2009; GANGULY; SAHOO; DAS, 2011; SAHOO; GANGULY; DAS, 2012; SALEHI; HAGHIFAM, 2012; NAŽAR; HAGHIFAM; NAŽAR, 2012; BORGES, 2012; GITIZADEH; VAHED; AGHAEI, 2013; SEDGHI; ALIAKBAR-GOLKAR; HAGHIFAM, 2013; GANGULY; SAHOO; DAS, 2013a; PEREIRA-JUNIOR *et al.*, 2014; POPOVIĆ; KERLETA; POPOVIĆ, 2014), em que o PPSD é resolvido usando estratégias para criar iterativamente uma população de topologias candidatas. Para cada topologia candidata, a confiabilidade é avaliada por meio de

simulação. Alguns desses trabalhos consideraram investimentos e reforços em ramos, subestações e geradores distribuídos para melhorar a confiabilidade, principalmente com base na menor taxa de falha de novos equipamentos (MIRANDA; RANITO; PROENÇA, 1994b; FALAGHI *et al.*, 2011; GANGULY; SAHOO; DAS, 2011; SALEHI; HAGHIFAM, 2012; NAŽAR; HAGHIFAM; NAŽAR, 2012; GANGULY; SAHOO; DAS, 2013a; POPOVIĆ; KERLETA; POPOVIĆ, 2014). Outras ações como a alocação de chaves e ramos de reserva têm sido propostas para melhorar a confiabilidade do sistema (BORGES, 2012). Nestes trabalhos, se assume que o sistema de distribuição é totalmente automatizado e os índices de confiabilidade melhorados pela realocação das seções afetadas através dos ramos de reserva e ações de comutação (RAMÍREZ-ROSADO; BERNAL-AGUSTÍN, 2001; RAMÍREZ-ROSADO; DOMINGUEZ-NAVARRO, 2004; RAMÍREZ-ROSADO; DOMINGUEZ-NAVARRO, 2006; GITIZADEH; VAHED; AGHAEI, 2013; SEDGHI; ALIAKBAR-GOLKAR; HAGHIFAM, 2013). Além disso, a alocação de chaves é considerada para melhorar a confiabilidade do sistema através de procedimentos de restauração em caso de falha no sistema (SAHOO; GANGULY; DAS, 2012; NAŽAR; HAGHIFAM; NAŽAR, 2012; PEREIRA-JUNIOR *et al.*, 2014). A maioria dos trabalhos considera a taxa esperada e a duração das interrupções de cada ramo para realizar a avaliação de confiabilidade com base na ENS (MIRANDA; RANITO; PROENÇA, 1994a; BORGES, 2012; RAMÍREZ-ROSADO; DOMINGUEZ-NAVARRO, 2004; RAMÍREZ-ROSADO; DOMINGUEZ-NAVARRO, 2006; PEREIRA-JUNIOR *et al.*, 2014; GITIZADEH; VAHED; AGHAEI, 2013).

A segunda categoria compreende várias aproximações que usam técnicas clássicas de otimização para resolver o PPESD considerando a confiabilidade para superar algumas das desvantagens das metaheurísticas, como é não fornecer uma medida da qualidade da solução obtida, pois não é possível estimar a distância respeito do ótimo global (LOTERO; CONTRERAS, 2011; SOUZA; RIDER; MANTOVANI, 2015; MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2016). Esses trabalhos são baseados em uma extensão do modelo disjuntivo de PLIM normalmente utilizado no planejamento de expansão de redes de transmissão. Esse modelo linear é obtido fazendo algumas simplificações, como o emprego de equações de fluxo de potência DC, onde o balanço de potência reativa é totalmente negligenciado e uma análise *ex-post* é feita para obter uma rede com um custo mínimo e uma rede aceitavelmente confiável.

Nesta categoria os trabalhos de Lotero e Contreras (2011), Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo (2016) apresentaram um modelo matemático que, ao invés de

fornecer um único plano de expansão, fornece um conjunto de soluções de baixo custo para as quais a confiabilidade é avaliada. Em ambos os trabalhos, os índices de confiabilidade e os custos associados são calculados para cada solução, assumindo que o sistema de distribuição é totalmente automatizado. Além disso, um método de planejamento pseudo-dinâmico é usado em [Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo \(2016\)](#) para resolver o PPESD junto à confiabilidade através de uma técnica heurística que primeiro resolve o modelo de planejamento seguido pela solução do modelo de confiabilidade, alocando comutadores e ramos de reserva em cada período do horizonte de planejamento. Finalmente, o trabalho de [Souza, Rider e Mantovani \(2015\)](#) apresenta uma abordagem de planejamento pseudo-dinâmica para estimar o impacto da avaliação de confiabilidade no sistema de distribuição.

Como pode ser analisado, atualmente os métodos de solução exatos são pouco usados dentro do PPESD considerando a confiabilidade. Esta questão metodológica relevante é uma consequência de dois fatores, a saber: i) a dependência dos índices de confiabilidade na topologia da rede, que, por sua vez, é um resultado da otimização, e ii) o uso de simulação para o cálculo dos índices de confiabilidade na ausência de expressões analíticas que modelem a confiabilidade em termos de variáveis de decisão relacionadas à topologia ([MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2018a](#)).

Recentemente, o trabalho ([MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2018a](#)) apresentou uma abordagem de otimização clássica para a incorporação de confiabilidade no PPESD. Este modelo, diferente da proposta de [Loterio e Contreras \(2011\)](#), [Souza, Rider e Mantovani \(2015\)](#), [Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo \(2016\)](#) que apenas usa a modelagem para gerar o conjunto de soluções candidatas, propõe expressões algébricas para avaliação de confiabilidade com base nas descobertas feitas no seu anterior trabalho ([MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2018a](#)). Essas expressões são integradas em uma formulação DC resolvendo o PPESD junto com a confiabilidade. A avaliação de confiabilidade dependente da topologia é explicitamente formulada em termos das variáveis de decisão do problema de otimização proposto, permitindo assim que a solução exata do problema resultante, através da aplicação de técnicas não heurísticas, seja computada para a topologia de operação radial determinada pelo processo de otimização para cada período de planejamento.

A partir da revisão bibliográfica anterior, destaca-se o seguinte:

1. Na literatura especializada existe apenas um trabalho antecedente que utiliza modelagem matemática, para considerar as decisões de planejamento e de confiabilidade como produto do processo de otimização. Pesquisas anteriores na área usaram métodos aproximados;
2. Nos trabalhos onde o PPESD e a confiabilidade são considerados em conjunto, três diferentes níveis de complexidade foram abordados: (i) Assumindo que toda a rede possui dispositivos de proteção, mas que os investimentos de planejamento serão feitos considerando manter os índices de confiabilidade sob certos níveis, (ii) assumindo que toda a rede tenha dispositivos de proteção, mas que investimentos adicionais em ramos de reserva serão feitos para operar em estado de contingência, (iii) sem assumir que a rede tenha os dispositivos de proteção e, portanto, devem ser otimizados conjuntamente com os demais investimentos da rede para garantir a operação em condições de operação normais e de falha;
3. Em todos os trabalhos apenas as interrupções que ocorrem devido a falhas individuais nos ramos são avaliadas, isto porque a probabilidade de ocorrência de falhas simultâneas é considerada mínima. A grande maioria dos trabalhos caracteriza as falhas na rede por meio de taxas de falha e durações de interrupção.

4.2 PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO CONSIDERANDO ÍNDICES DE CONFIABILIDADE

Nesta seção, as novas expressões algébricas apresentadas na Seção 2 são estendidas para considerar o fato de que, em um contexto de planejamento, a topologia de rede não é conhecida *a priori*, sendo resultado do processo de otimização. Esse é o principal aspecto distintivo da modelagem proposta em relação aos modelos de avaliação de confiabilidade descritos em [Loterio e Contreras \(2011\)](#), [Souza, Rider e Mantovani \(2015\)](#), [Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo \(2016\)](#).

A extensão proposta do modelo apresentado na Seção 2 é relevante porque, ao igual que ([MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2018a](#)), permite a consideração explícita da avaliação da confiabilidade como parte do PPEDS. Assim, do ponto de vista da modelagem, a formulação do planejamento com confiabilidade é equivalente àquela apresentada em [Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo \(2018a\)](#), onde a confiabilidade foi caracterizada usando expressões matemáticas dentro do problema de otimização.

A diferença entre o modelo aqui proposto com relação ao trabalho por [Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo \(2018a\)](#) é que não é necessário o uso de novas variáveis de decisão para relacionar a dependência topológica à avaliação de confiabilidade. Assim, não há aumento significativo no tamanho do modelo. A superioridade do método proposto é apoiada por sua capacidade de refletir uma maior precisão das características essenciais da operação da rede usando equações de fluxo de potência AC, ao contrario de [Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo \(2018a\)](#) em que um modelo de potências DC é usado.

4.2.1 Modelamento da confiabilidade no PPESD

Conforme feito em [López, Lavorato e Rider \(2016\)](#) e [Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo \(2018a\)](#), a avaliação da confiabilidade será feita sob os supostos enunciados na Seção 2.3.2.

O PPESD considerando os índices de confiabilidade visa minimizar o valor presente do custo total c^T sobre um vetor n -dimensional de variáveis binárias \mathbf{x} e um vetor de variáveis contínuas \mathbf{y} , o primeiro relacionado com os investimentos e o segundo com as decisões operacionais cuja factibilidade é caracterizada por funções restritas, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Matematicamente, esta descrição geral pode ser declarada da seguinte forma:

$$\underset{\mathbf{x}, \mathbf{y}}{\text{Minimizar}} c^{T, IC} = c^{I, V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (84)$$

sujeito a:

$$\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \quad (85)$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0. \quad (86)$$

O custo total minimizado em (84) inclui o custo do investimento; os custos variáveis de operação, que compreende os custos de manutenção, produção, corte de carga e o custo de confiabilidade. Os custos operacionais e de investimento podem ser expressos em termos de \mathbf{x} e \mathbf{y} como $c^T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Seguindo o caminho proposto por [Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo \(2018a\)](#), esta seção apresenta uma nova abordagem não baseada em simulação para incluir a avaliação analítica da confiabilidade de sistemas de distribuição no PPESD. Mais especificamente, os índices de confiabilidade esperados para cada nó de carga são expressos algebricamente em termos dos valores dessas magnitudes para os nós

adjacentes. Assim, a confiabilidade é explicitamente caracterizada em termos das próprias variáveis de decisão \mathbf{x} e \mathbf{y} do PPESD.

Como resultado, o problema (84)–(86) não precisa do acréscimo de novas variáveis de decisão, contrario ao realizado em Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo (2018a), onde novas variáveis de decisão são usadas para considerar a confiabilidade.

4.2.2 Restrições de confiabilidade

Em Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo (2018a), mostrou-se que os índices de confiabilidade podem ser expressos em termos das durações esperadas de interrupções de reparação e comutação que afetam os nós de carga do sistema. Além disso, na Seção 2 é mostrado que, para uma determinada topologia de rede operada radialmente, tais durações podem ser equivalentemente calculadas através de um conjunto de expressões algébricas. Aqui, essas expressões algébricas são incorporadas explicitamente na formulação matemática do PPESD.

Deve-se notar que a adaptação do modelo para a avaliação analítica da confiabilidade da Seção 2 requer: i) Relacionar as alternativas de investimento com os índices de confiabilidade, ii) Considerar o cálculo dos índices sob a influencia da abordagem de múltiplos períodos de planejamento, e iii) Adaptar algumas das expressões descritas na Seção 2 para lidar com a falha de conhecimento *a priori* da topologia da rede ao longo do horizonte de planejamento, devido a ela ser o resultado do processo de otimização.

Assim sendo, as expressões que calculam os índices nodais de confiabilidade em um contexto de planejamento são formuladas da seguinte forma:

$$\Upsilon_{i,t}^{RS} = \Upsilon_{j,t}^{RS} + \tau_{ij}^{RS} \lambda_{ij} l_{ij} y_{ij,t}^{l-} - \tau_{ij}^{RS} \lambda_{ij} l_{ij} y_{ij,t}^{l+} + \Delta_{ij,t}^{RS}; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta \quad (87)$$

$$|\Delta_{ij,t}^{RS}| \leq b^{RS} [1 - (y_{ij,t}^{l+} + y_{ij,t}^{l-})]; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta \quad (88)$$

$$\Upsilon_{i,t}^{SO} = \Upsilon_{j,t}^{SO} - \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} l_{ij} y_{ij,t}^{l-} + \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} l_{ij} y_{ij,t}^{l+} + \Delta_{ij,t}^{SO}; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta | i, j \notin \Omega^S \quad (89)$$

$$|\Delta_{ij,t}^{SO}| \leq b^{SO} [1 - (y_{ij,t}^{l+} + y_{ij,t}^{l-})]; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta | i, j \notin \Omega^S \quad (90)$$

$$\sum_{\substack{ji \in \Upsilon \\ j \notin \Omega^S}} f_{ji,t}^{SO} - \sum_{\substack{ij \in \Upsilon \\ j \notin \Omega^S}} f_{ij,t}^{SO} + \Psi_{i,t}^{SO} = \sum_{\substack{ji \in \Upsilon \\ j \notin \Omega^S}} \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} l_{ij} y_{ji,t}^{l+} + \sum_{\substack{ij \in \Upsilon \\ j \notin \Omega^S}} \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} l_{ij} y_{ij,t}^{l-}; \forall i \in \Omega^R, t \in \Theta \quad (91)$$

$$\sum_{\substack{ji \in \Upsilon \\ j \notin \Omega^S}} f_{ji,t}^{SO} - \sum_{\substack{ij \in \Upsilon \\ j \notin \Omega^S}} f_{ij,t}^{SO} = \sum_{\substack{ji \in \Omega_l \\ j \notin \Omega^S}} \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} l_{ij} y_{ji,t}^{l+} + \sum_{\substack{ij \in \Upsilon \\ j \notin \Omega^S}} \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} l_{ij} y_{ij,t}^{l-}; \forall i \in \Omega^B \setminus \Omega^R, t \in \Theta \quad (92)$$

$$|f_{ij,t}^{SO}| \leq b^{SO} (y_{ij,t}^{l+} + y_{ij,t}^{l-}); ij \in \Upsilon, t \in \Theta | i, j \notin \Omega^S \quad (93)$$

$$\Psi_{i,t}^{SO} \leq b^{SO} [1 - (y_{ij,t}^{l+} + y_{ij,t}^{l-})]; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta | j \in \Omega^S \quad (94)$$

$$\Psi_{j,t}^{SO} \leq b^{SO} [1 - (y_{ij,t}^{l+} + y_{ij,t}^{l-})]; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta | i \in \Omega^S \quad (95)$$

$$\Upsilon_{i,t}^{SO} \geq \Psi_{i,t}^{SO}; \forall i \in \Omega^R, t \in \Theta \quad (96)$$

$$\Upsilon_{i,t}^{RS} = 0; \forall i \in \Omega^S, t \in \Theta \quad (97)$$

$$\Upsilon_{i,t}^{SO} = 0; \forall i \in \Omega^S, t \in \Theta \quad (98)$$

As expressões (87) e (88) modelam a duração esperada de interrupções de reparação que afetam os nós de carga. Nota-se que o uso das variáveis $y_{ij,t}^{l+}$ e $y_{ij,t}^{l-}$ exclui a necessidade de variáveis adicionais dependentes da topologia, como feito em [Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo \(2018a\)](#). Se o fluxo de potência for na direção de i a j , ou seja, $y_{ij,t}^{l+} = 1$ e $y_{ij,t}^{l-} = 0$, as expressões (87) tornar-se $\Upsilon_{i,t}^{RS} = \Upsilon_{j,t}^{RS} - \tau_{ij}^{RS} \lambda_{ij} l_{ij}$. Por outro lado, se o fluxo for de j para i , ou seja, $y_{ij,t}^{l+} = 0$ e $y_{ij,t}^{l-} = 1$, as expressões (87) se tornam $\Upsilon_{i,t}^{RS} = \Upsilon_{j,t}^{RS} + \tau_{ij}^{RS} \lambda_{ij} l_{ij}$. As expressões (88) declaram que as variáveis auxiliares $\Delta_{ij,t}^{RS}$ são zero se o ramo ij estiver em operação. Quando o ramo ij está fora de operação, a variável $\Delta_{ij,t}^{RS}$ é ativada para satisfazer (87).

As expressões (89) e (90) modelam a duração esperada de interrupções somente de comutação que afetam os nós de carga. Semelhante a (87)–(88) para interrupções de reparação, as variáveis $y_{ij,t}^{l+}$ e $y_{ij,t}^{l-}$ são usadas para calcular as durações nodais esperadas das interrupções de comutação. Além disso, observe que as equações (87)–(88) e (89)–(90),

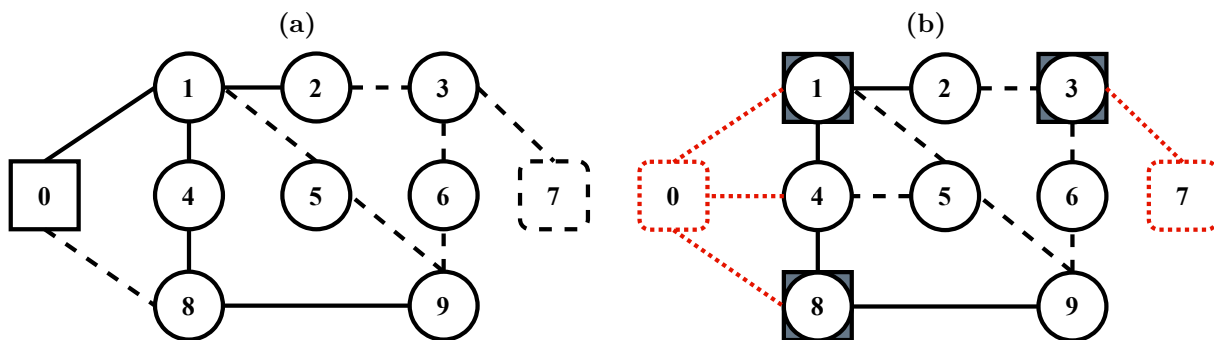
respectivamente, são semelhantes à formulação usada para calcular a queda de tensão no fluxo de carga para um sistema de distribuição com operação radial (51)–(52).

Conforme identificado em Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo (2018a), há uma condição especial para a avaliação das durações esperadas de interrupções de comutação dos nós raiz, que consiste em que os nós raiz devem acumular as durações de interrupções de comutação de todos os ramos à jusante deles. Para fazer isso, as durações esperadas de interrupções de comutação para os nós raiz são determinadas por (91)–(96). Esse conjunto de expressões é usado para identificar os ramos à jusante do nó raiz correspondente. Esta informação topológica requerida é caracterizada de forma equivalente em (91)–(96) modelando a operação de um sistema fictício sob uma condição de carregamento especial.

Um sistema didático mostrado na Figura 11(a) é usado para ilustrar a avaliação das durações esperadas de interrupções de comutação para os nós raiz. Este exemplo compreende 7 nós de carga, representados por círculos; duas subestações representadas por quadrados, o quadrado sólido representa a subestação existente, enquanto a subestação candidata é representado como o quadrado tracejado e 12 ramos, sendo 5 ramos existentes indicados por linhas sólidas e 7 ramos candidatos indicados por linhas tracejadas. O sistema fictício é obtido da rede original da seguinte maneira. Primeiro, os nós da subestação e os ramos, existentes ou candidatos, que os conectam com os nós raiz são removidos. Assim, os nós raiz no sistema original tornam-se possíveis nós fonte no sistema fictício. Além disso, todos os ramos do sistema fictício são idênticos aos ramos correspondentes na rede original, tanto ramos existentes e candidatos. A Figura 11(b) representa o sistema fictício associado ao exemplo ilustrativo descrito na Figura 11(a). Os elementos de rede que não fazem parte do sistema fictício são mostrados usando linhas vermelhas pontilhadas e os nós raiz originais são delimitados por um quadrado para indicar sua função como possível nó fonte no sistema fictício.

A condição de carga especial consiste em definir as demandas para os nós de origem no sistema fictício iguais a 0. Essa condição depende do estado de operação dos ramos que conectam os nós raiz com suas subestações na rede original da seguinte forma: os nós raiz têm uma demanda igual a 0 se o ramo entre a subestação e um nó raiz estiver em operação no sistema real, ou seja, se $y_{ij,t}^{l+} = 1$ e i é um nó de subestação, ou $y_{ij,t}^{l-} = 1$ e j é um nó de subestação. Em outro caso, o nó raiz não está disponível para ser nó fonte do sistema fictício e se torna um nó de carga no sistema fictício.

Figura 11. Exemplo ilustrativo. (a) topologia inicial. (b) Sistema fictício associado.



Fonte: Próprio autor

Além disso, para cada nó de carga no sistema fictício, a demanda é definida como igual ao produto da taxa de falhas e da duração da interrupção do único ramo em operação que conecta esse nó ao nó a montante. Sob essa condição de carga, a duração esperada de interrupções de comutação para os nós raiz da rede original é igual aos níveis de geração nos nós de origem correspondentes no sistema fictício.

As expressões de balanço (91)–(96) representam a operação do sistema fictício para essa condição de carga. Observe que o fluxo fictício através do ramo ij no sistema fictício é modelado por $f_{ij,t}^\Gamma$ e depende do estado das variáveis $y_{ij,t}^{l+}$ e $y_{ij,t}^{l-}$ conforme expresso em (93). As expressões (91) junto com as expressões (94)–(95) correspondem à operação dos nós fonte do sistema fictício, isto é, para que um possível nó raiz do sistema original torne-se fonte do sistema fictício, o ramo entre ele e a subestação deve estar operando. Analogamente, as expressões (92) estão relacionadas aos nós de carga remanescentes no sistema fictício, ou seja, os nós de carga diferentes dos nós raiz no sistema original. A duração esperada de interrupções de comutação para os nós raiz da rede original é igual aos níveis de geração nos nós de origem correspondentes no sistema fictício (96). Finalmente, equações (97)–(98) asseguram que as durações esperadas nos nós da subestação sejam iguais a 0.

4.2.3 Penalização por violação de índices de confiabilidade

O custo da ENS pode ser considerada desde o ponto de vista do operador do SDE ou desde o ponto de vista do usuário. Como mencionado na introdução do presente capítulo, um interesse considerável em reduzir as perdas econômicas sofridas pelos

clientes do sistema de energia devido a eventos de confiabilidade foi identificado recentemente pelas partes interessadas do setor elétrico (CHANDRAMOHAN *et al.*, 2010; BANERJEE; ISLAM, 2011). Essa situação, motivou a definição de taxas ou penalidades baseadas em confiabilidade para empresas de distribuição de energia.

A continuação se apresenta o custo relacionado com a violação dos indicadores de continuidade:

$$c_t^{IN} = C^{SAIFI} \sum_{i \in \Omega^B} \alpha^{year} cfMax \{0, NC_i ((\Pi_{i,t}^{RS} + \Pi_{i,t}^{SO}) - \overline{SAIFI})\} + C^{SAIDI} \sum_{i \in \Omega^B} \alpha^{year} cfMax \{0, NC_i ((\Gamma_{i,t}^{RS} + \Gamma_{i,t}^{SO}) - \overline{SAIDI})\} \quad (99)$$

Onde a função máximo calcula as violações dos limites para o SAIFI e o SAIDI.

Os índices de continuidade dependem das taxas de interrupção, por tanto devem ser adicionadas expressões algébricas equivalentes às (87)–(98) para o cálculo das taxas nodais esperadas das interrupções tanto de reparação como de comutação (100)–(111). Adicionalmente, devem ser formuladas expressões que limitam os índices globais do SDEE em análise (112)–(113).

$$\Pi_{i,t}^{RS} = \Pi_{j,t}^{RS} + \lambda_{ij} l_{ij} y_{ij,t}^{l-} - \lambda_{ij} l_{ij} y_{ij,t}^{l+} + \Delta_{ij,t}^{RS,\Pi}; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta \quad (100)$$

$$|\Delta_{ij,t}^{RS,\Pi}| \leq b^{RS,\Pi} [1 - (y_{ij,t}^{l+} + y_{ij,t}^{l-})]; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta \quad (101)$$

$$\Pi_{i,t}^{SO} = \Pi_{j,t}^{SO} - \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} l_{ij} y_{ij,t}^{l-} + \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} l_{ij} y_{ij,t}^{l+} + \Delta_{ij,t}^{SO,\Pi}; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta | i, j \notin \Omega^S \quad (102)$$

$$|\Delta_{ij,t}^{SO,\Pi}| \leq b^{SO,\Pi} [1 - (y_{ij,t}^{l+} + y_{ij,t}^{l-})]; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta | i, j \notin \Omega^S \quad (103)$$

$$\sum_{\substack{ji \in \Upsilon \\ j \notin \Omega^S}} g_{ji,t}^{SO} - \sum_{\substack{ij \in \Upsilon \\ j \notin \Omega^S}} g_{ij,t}^{SO} + \Psi_{i,t}^{SO} = \sum_{\substack{ji \in \Upsilon \\ j \notin \Omega^S}} \lambda_{ij} l_{ij} y_{ji,t}^{l+} + \sum_{\substack{ij \in \Upsilon \\ j \notin \Omega^S}} \lambda_{ij} l_{ij} y_{ij,t}^{l-}; \forall i \in \Omega^R, t \in \Theta \quad (104)$$

$$\sum_{\substack{ji \in \Upsilon \\ j \notin \Omega^S}} g_{ji,t}^{SO} - \sum_{\substack{ij \in \Upsilon \\ j \notin \Omega^S}} g_{ij,t}^{SO} = \sum_{\substack{ji \in \Omega_l \\ j \notin \Omega^S}} \lambda_{ij} l_{ij} y_{ji,t}^{l+} + \sum_{\substack{ij \in \Upsilon \\ j \notin \Omega^S}} \lambda_{ij} l_{ij} y_{ij,t}^{l-}; \forall i \in \Omega^B \setminus \Omega^R, t \in \Theta \quad (105)$$

$$|g_{ij,t}^{SO}| \leq b^{SO,\Pi} (y_{ij,t}^{l+} + y_{ij,t}^{l-}); ij \in \Upsilon, t \in \Theta | i, j \notin \Omega^S \quad (106)$$

$$\Psi_{i,t}^{SO,\Pi} \leq b^{SO,\Pi} [1 - (y_{ij,t}^{l+} + y_{ij,t}^{l-})]; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta | j \in \Omega^S \quad (107)$$

$$\Psi_{j,t}^{SO,\Pi} \leq b^{SO,\Pi} [1 - (y_{ij,t}^{l+} + y_{ij,t}^{l-})]; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta | i \in \Omega^S \quad (108)$$

$$\Pi_{i,t}^{SO} \geq \Psi_{i,t}^{SO,\Pi}; \forall i \in \Omega^R, t \in \Theta \quad (109)$$

$$\Pi_{i,t}^{RS} = 0; \forall i \in \Omega^S, t \in \Theta \quad (110)$$

$$\Pi_{i,t}^{SO} = 0; \forall i \in \Omega^S, t \in \Theta \quad (111)$$

$$\frac{\sum_{i \in \Omega^D} NC_i (\Pi_{i,t}^{RS} + \Pi_{i,t}^{SO})}{\sum_{i \in \Omega^D} NC_i} \leq \overline{SAIFI} \quad (112)$$

$$\frac{\sum_{i \in \Omega^D} NC_i (\Gamma_{i,t}^{RS} + \Gamma_{i,t}^{SO})}{\sum_{i \in \Omega^D} NC_i} \leq \overline{SAIDI} \quad (113)$$

A função objetivo (99) necessita somente das violações dos limites para o SAIFI e o SAIDI, assim para eliminar a função do valor máximo o conjunto de expressões auxiliares (115)–(122) é usado. As expressões (115) e (119) reformulam a função máximo para o SAIFI e o SAIDI como uma diferença que pode ser positiva ou negativa, respetivamente. Os valores da diferença só podem tomar valores positivos como garantem as restrições (116), (117), (120) e (121), além disso, só uma das duas diferenças pode ser admitida (118) e (122). Como só as diferenças positivas são as unicas que geram custo, basta levar à função objetivo os termos $SAIFI_{i,t}^+$ e $SAIDI_{i,t}^+$ tal e como é expresso em (114).

$$c_t^{IN} = C^{SAIFI} \sum_{i \in \Omega^B} \alpha^{year} cf SAIFI_{i,t}^+ + C^{SAIDI} \sum_{i \in \Omega^B} \alpha^{year} cf SAIDI_{i,t}^+ \quad (114)$$

$$NC_i ((\Pi_{i,t}^{RS} + \Pi_{i,t}^{SO}) - \overline{SAIFI}) = SAIFI_{i,t}^+ + SAIFI_{i,t}^-; \forall i \in \Omega^B, t \in \Theta \quad (115)$$

$$0 \leq SAIFI_{i,t}^+ \leq b^{IN} x_{i,t}^{SAIFI+}; \forall i \in \Omega^B, t \in \Theta \quad (116)$$

$$0 \leq SAIFI_{i,t}^- \leq b^{IN} x_{i,t}^{SAIFI-}; \forall i \in \Omega^B, t \in \Theta \quad (117)$$

$$x_{i,t}^{SAIFI+} + x_{i,t}^{SAIFI-} \leq 1; \forall i \in \Omega^B, t \in \Theta \quad (118)$$

$$NC_i ((\Gamma_{i,t}^{RS} + \Gamma_{i,t}^{SO}) - \overline{SAIDI}) = SAIDI_{i,t}^+ + SAIDI_{i,t}^-; \forall i \in \Omega^B, t \in \Theta \quad (119)$$

$$0 \leq SAIDI_{i,t}^+ \leq b^{IN} x_{i,t}^{SAIDI+}; \forall i \in \Omega^B, t \in \Theta \quad (120)$$

$$0 \leq SAIDI_{i,t}^- \leq b^{IN} x_{i,t}^{SAIDI-}; \forall i \in \Omega^B, t \in \Theta \quad (121)$$

$$x_{i,t}^{SAIDI+} + x_{i,t}^{SAIDI-} \leq 1; \forall i \in \Omega^B, t \in \Theta \quad (122)$$

4.2.4 Função objetivo incluindo confiabilidade

A função (32) apresentada na Seção 3.2.1 deve ser modificada para incluir os custos associados à confiabilidade do sistema. A métrica usada é o custo da ENS, expresso a continuação:

$$c_t^{ens} = C^{ENS} \sum_{i \in \Omega^B} cf(\Upsilon_{i,t}^{RS} + \Upsilon_{i,t}^{SO}) P_{i,t}^D, \forall t \in \Theta \quad (123)$$

Assim, a função objetivo considerando confiabilidade é:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } c^T &= \sum_{t \in \Theta} \frac{(1 + I_f)^{-(t-1)}}{I_f} c_t^I + \\ &I pv(I_f, n) \sum_{t \in \Theta} \left[(1 + I_f)^{-(t-1)} (c_t^M + c_t^P + c_t^O + c_t^U + c_t^{IN} + c_t^{ens}) \right] + \\ &\frac{(1 + I_f)^{-|\Theta|}}{I_f} (c_{|\Theta|}^M + c_{|\Theta|}^P + c_{|\Theta|}^O + c_{|\Theta|}^U + c_{|\Theta|}^{IN} + c_{|\Theta|}^{ens}) \end{aligned} \quad (124)$$

Nesta nova função objetivo foram incluídos dos novos custos, o primeiro c_t^{IN} relacionado como as penalidades na continuidade do serviço e o segundo corresponde ao custo de ENS, ambos custos variáveis formam parte do segundo e terceiro termo da função objetivo.

4.2.5 Modelo de programação não linear inteiro misto para o PPESD considerando a avaliação da confiabilidade

Considerando as expressões das seções anteriores, o modelo de PNLIM para o PPESD de múltiplos períodos incluindo a confiabilidade da rede é dado por:

Minimizar (124)

sujeito a:

$$(39) - (70), (87) - (98)$$

Este modelo representa mais exatamente as características do PPESD considerando índices de confiabilidade. No entanto, por ser um modelo de PNLIM e não-convexo, as técnicas de otimização desenvolvidas para este tipo de problemas não podem garantir otimalidade. Como característica saliente, as expressões de confiabilidade não acrescentam

termos não-lineares à formulação do PPESD base, apresentada na Seção 3. Assim os processos de convexificação apresentados no capítulo anterior podem ser aplicados ao modelo incluindo confiabilidade.

4.2.6 Modelo de programação cônico de segunda ordem inteiro misto para o PPESD

O modelo de PNLIM para o PPESD pode ser reformulado usando programação cônica de segunda ordem como segue:

Minimizar (124)

sujeito a:

$$(39) - (52), (54) - (64), (68) - (70)$$

$$(71) - (72), (87) - (98)$$

4.2.7 Modelo de programação linear inteiro misto para o PPESD

O modelo de PNLIM para o PPESD pode ser reformulado usando programação linear como segue:

Minimizar (124)

sujeito a:

$$(39) - (52), (54) - (56), (58) - (64)$$

$$(68) - (70), (72), (74) - (75), (87) - (98)$$

4.3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Os resultados de vários estudos de caso são apresentados nesta seção. Primeiro, a abordagem proposta foi aplicada em uma instancia estática do problema de planejamento em dois sistemas teste, o primeiro de 24 nós e o segundo de 27 nós, baseados nos sistemas descritos em Gönen e Ramírez-Rosado (1986) e Lotero e Contreras (2011), respetivamente. Ambos os modelos foram implementados na

linguagem de modelagem matemática (AMPL) do inglês *A Modeling Language for Mathematical Programming* (FOURER; GAY; KERNIGHAN, 2003). As soluções dos modelos foram obtidas utilizando o solver comercial CPLEX (IBM ILOG CPLEX, 2018), usando um computador Intel Core i7-4500 1,80GHz com 8 GB de RAM.

Posteriormente, foram realizados testes nos sistemas de 24 e 54 nós usados na seção 3.4 utilizando os modelos convexos AC e considerando o planejamento multi-período. Estes últimos testes foram implementados em um computador de um Gigabyte R280-A3C X64 com dois processadores Intel Xeon E5-2698 v3 a 2.30 GHz e 256 GB de RAM usando CPLEX 12.6 (IBM ILOG CPLEX, 2018) e GAMS 24.7 (GAMS, 2018).

4.3.1 Caso de estudo de 24 nós

Este teste foi baseado no sistema utilizado por Gönen e Ramírez-Rosado (1986). O sistema possui 24 nós, 4 subestações e 20 nós de carga, operando a uma tensão nominal de 13,8 kV. A topologia inicial do SDEE é mostrada na Figura 12, onde os retângulos representam as subestações, os círculos representam os nós onde as cargas estão concentradas, as linhas contínuas representam os ramos iniciais e as linhas tracejadas representam os ramos a serem adicionados. No estado inicial, as subestações 1021 e 1022 estão construídas. Este trabalho adotou um horizonte de planejamento de 15 anos. A taxa de juros é fixada em 10% e os limites superior e inferior da tensão são 1,05 p.u e 0,95 p.u, respectivamente. O custo da energia é de US\$ 0,10/kWh, o fator de potência é igual a 0,9 e o fator de perdas é igual a 0,35.

Para este teste apenas um só período de planejamento foi considerado, desconsideram-se os termos dos custos perpétuos e apenas os custos relacionados nos resumos foram levados em consideração. A Tabela 7 apresenta os resultados correspondentes a cenários com três valores diferentes do custo da energia não suprida: 0, 10 e 100 vezes o valor da compra da energia, respetivamente. Os custos apresentados estão expressos em US\$ $\times 10^3$.

As soluções para os dois primeiros cenários são iguais com relação aos investimentos a serem feitos na rede, a Figura 13 mostra a topologia ótima obtida para cada um dos cenários. onde a Figura 13(a) mostra o plano de expansão para os dois primeiros cenários

Tabela 7. Resumo de custos em (US\$x10³) para o caso estático do sistema teste de 24 nós

Custos	$C^{ENS} = 0$	$C^{ENS} = 10C_i^{ene}$	$C^{ENS} = 100C_i^{ene}$
Custo total	6511,59	6846,93	13912,62
Custo investimento em subestações	4200	4200	11000
Custo investimento em ramos	859	859	632,5
Custo energia não suprida	0	329,06	1571,75
Custo perdas potência ativa	1452,59	1458,87	708,37

Fonte: Próprio autor

A Figura 14 mostra os valores das durações esperadas para a reparação 14(a) e restauração 14(b) de cada um dos nós do sistema. Onde o valor dentro dos nós representa a duração esperada de cada um deles. Embora não há uma influência da ENS nos investimentos da rede, este teste permite observar os supostos sob os quais funcionam as restrições de confiabilidade expressos na Seção 2.3.2, tais como : i) crescimento das durações de reparação quando os nós de carga se encontram mais afastados da subestação, ii) o decremento das durações nodais das interrupções de restauração entre mais afastado se encontra o nó da subestação que o supre e iii) A acumulação das durações de interrupções de restauração dos alimentadores das subestações nos nós raiz.

Adicionalmente é possível observar o comportamento de alimentadores com mais de um caminho, como por exemplo os que iniciam nos circuitos 2-1021 e 6-1022, onde as durações de restauração nos nós terminais que se encontram a jusante são influenciados pelas falhas nos outros circuitos que fazem parte do alimentador e que não levam potência para eles.

Outro ponto a ser ressaltado é a influencia do coeficiente da ENS no fornecimento de topologia ótima de planejamento, como se observa na Figura13(b) esse coeficiente deve ser muito alto para gerar um plano de expansão diferente daquele obtido sem considerar a confiabilidade. O anterior pode ser explicado porque a minimização das perdas de potência ativa, minimiza indiretamente os custos de energia não suprida.

Para o caso do sistema teste de 24 nós se faz necessário aumentar o valor do custo de ENS em um fator de 100. Assim a topologia obtida é a apresentada na Figura 13b, onde

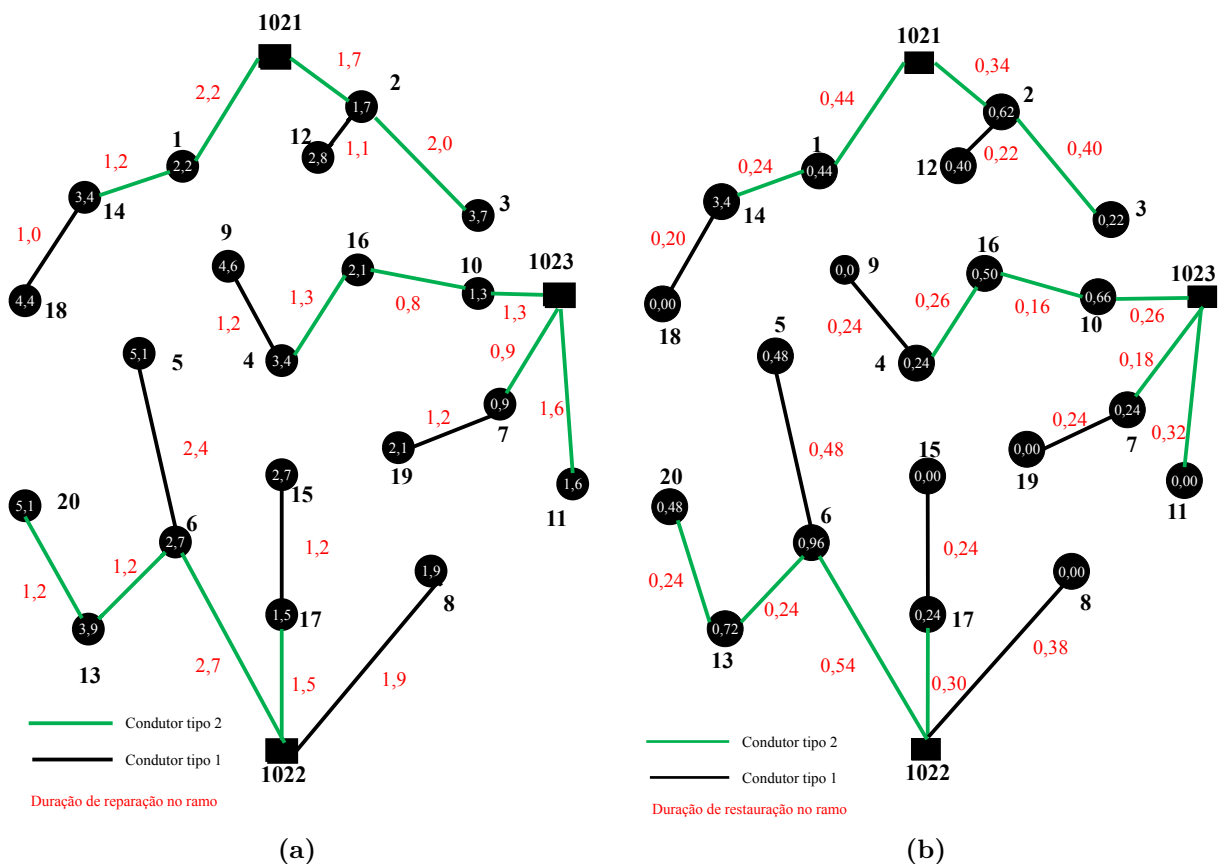


Figura 14. Resultados ilustrativos - Durações de interrupção nodais esperadas. a) Interrupções de reparação . b) Interrupções de comutação.

Fonte: Próprio autor

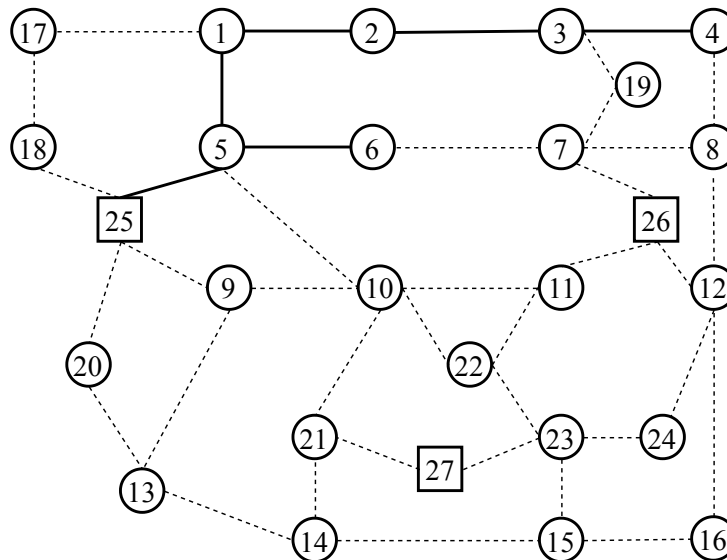
se observa que para diminuir o valor de ENS, é preciso a construção da subestação 1024, que faz as cargas ficarem a uma distancia menor das correspondentes subestações.

4.3.2 Caso de estudo de 27 nós

O sistema de 27 nós foi adaptado do apresentado em Lotero e Contreras (2011) para identificar a influência dos índices de continuidade (SAIFI e SAIDI) no do plano de expansão. Este sistema possui duas subestações com possibilidade de repotênciação e uma candidata à construção durante o planejamento, 8 ramos são existentes e 31 são ramos propostos para serem adicionados ao sistema, conforme se ilustra na Figura 15. A tensão nominal do sistema é de 13,8 kV e os limites de tensão são de 0,95 a 1,05 p.u. Os círculos indicam os nós de carga. As linhas tracejadas indicam ramos candidatos a ser adicionados ao sistema utilizando condutores do tipo 1 e 2. As linhas sólidas indicam

circuitos existentes todos eles tipo 1. Maiores detalhes do sistema podem ser consultados em (TABARES, 2018).

Figura 15. Topologia inicial do sistema de 27 nós.



Fonte: Próprio autor

O custo de energia para o teste foi de 0,10 U\$/kWh. O fator de perdas considerado foi 0,35 e a taxa de juros 10% . O horizonte de planejamento foi de 20 anos. Diferente do teste anterior, aqui serão considerados os custos de penalidades por ultrapassar os limites de SAIFI e SAIDI. Para este teste foi utilizado um fator de penalidade 20 vezes o valor da produção da energia (NETO *et al.*, 2011) e para penalizar a ENS foi considerado um custo de 10 vezes o custo da produção da energia. Adicionalmente, foi adotado para o teste uma taxa de falha de 0,3 falhas/ano para todos os ramos, tempo de reparação e de restauração iguais a 2h e 0,25 h, respectivamente, e os limites dos índices de continuidade estipulados pelo órgão regulador de 2 horas/ano para o SAIDI e 2 interrupções/ano para o SAIFI.

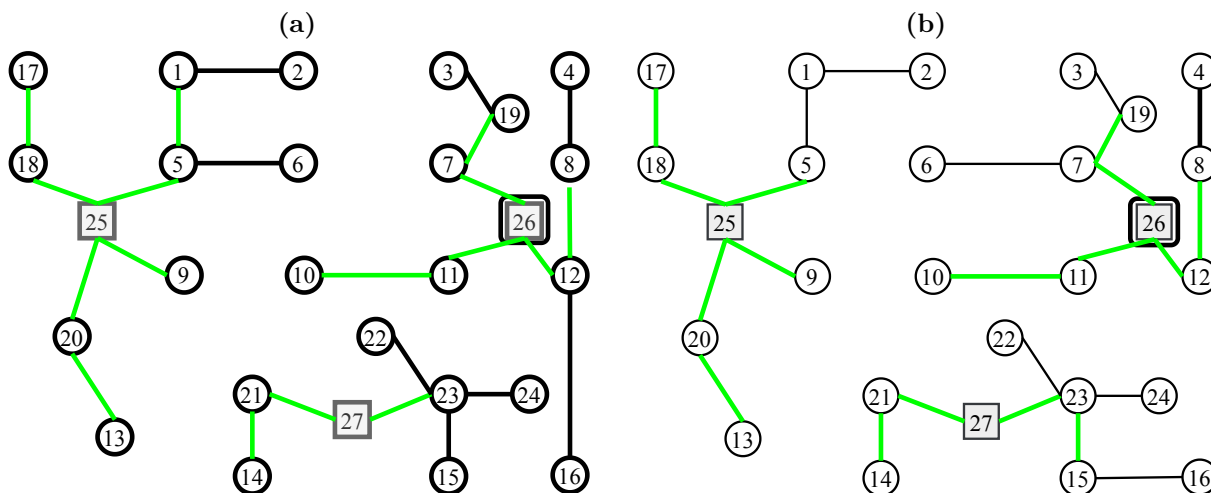
A Tabela 8 apresenta o resumo dos custos para os diferentes cenários de análise considerados. Na primeira coluna se relacionam os custos de expansão sem custo de ENS e sem ter em conta as penalidades por interrupção na prestação do serviço, na segunda coluna se relacionam os custos do cenário considerando o custo de ENS sem ter em conta as penalidades por interrupção na prestação do serviço e por último e na ultima coluna são relacionados tanto os custos da ENS como as penalidades por violação dos limites de continuidade. Ao igual que no teste anterior são desconsiderados os termos de custo perpetuo na função objetivo e demais custos que não foram relacionados na Tabela 8.

Tabela 8. Resumo de custos em (10^3 \$) para o sistema teste de 27 nós

Custos	$C^{ENS} = 0$	$C^{ENS} = 10C_i^{ene}$	$C^{SAIFI} = 20C_i^{ene}$
	Sem ENS	Com ENS	$C^{SAIDI} = 20C_i^{ene}$
Custo total	1757,26	1876,54	1906,58
Custo da operação das subestações	124,89	124,89	122,67
Custo investimento em subestações	1115,00	1115,00	1115,00
Custo investimento em ramos	148,28	148,28	153,24
Custo energia não suprida	0	119,28	118,14
Custo por violação do SAIFI	0	0	0
Custo por violação do SAIDI	0	0	17,75
Custo perdas potência ativa	369,09	369,09	379,70
Erro de aproximação	0.21%	0.21%	0.20%
Tempo computacional (horas)	11,91	5,63	4,84

Fonte: Próprio autor

Figura 16. Topologias de expansão para o sistema de 27 nós. a) Com e sem custos de ENS. b) Com limites para o SAIFI e o SAIDI. Em ambas figuras as linhas verdes representam o uso do condutor tipo 2 e as linha pretas presentam o condutor tipo 1



Fonte: Próprio autor

As topologias encontradas para os casos que consideram e não a ENS são iguais e se mostram na Figura 16(a). Quando são considerados os limites de continuidade da prestação do serviço (SAIFI e SAIDI) tanto na função objetivo como nas restrições, há um aumento nos investimentos nos ramos do sistema que caracterizam a construção da linha 15-16 e da linha 6-7 e a saída de operação dos ramos 12-16 e 5-6. A caixinha na subestação 26 representa a sua repotênciação.

A Tabela 9 apresenta os valores esperados das taxas e durações de reparação e restauração de cada uns dos nós para a solução que não considera os custos de confiabilidade. Para esta solução o valor do SAIFI e SAIDI é igual a 1,00585 falhas/ ano e 1,11996 h/ano.

Tabela 9. Taxas e durações de reparação e restauração para cada nó de demanda do sistema de 27 nós para a solução sem considerar penalidades por SAIFI e SAIDI

Nó	Π_i^{RS}	Γ_i^{RS}	Π_i^{SO}	Γ_i^{SO}	Nó	Π_i^{RS}	Γ_i^{RS}	Π_i^{SO}	Γ_i^{SO}
1	0,19	1,19	0,74	0,60	13	0,00	1,46	0,00	0,73
2	0,09	1,94	0,37	0,97	14	0,00	1,12	0,00	0,56
3	0,00	1,58	0,00	0,79	15	0,14	1,07	0,54	0,53
4	0,19	2,03	0,75	1,02	16	0,19	2,03	0,75	1,02
5	0,26	0,56	1,06	0,28	17	0,00	1,16	0,00	0,58
6	0,17	1,31	0,69	0,65	18	0,08	0,53	0,32	0,27
7	0,12	0,64	0,47	0,32	19	0,06	1,10	0,24	0,55
8	0,27	1,40	1,06	0,70	20	0,09	0,74	0,36	0,37
9	0,00	0,63	0,00	0,32	21	0,07	0,58	0,27	0,29
10	0,00	1,44	0,00	0,72	22	0,13	1,10	0,52	0,55
11	0,09	0,70	0,37	0,35	23	0,20	0,53	0,81	0,26
12	0,38	0,53	1,50	0,27	24	0,14	1,03	0,56	0,52

Fonte: Próprio autor

A Tabela 10 apresenta os valores esperados das taxas e durações de reparação e restauração de cada um dos nós para a solução que considera todos os custos. Para esta solução o valor do SAIFI e SAIDI é igual a 0,888383 falhas/ ano e 1.0819 h/ ano. Ressalta-se que os alimentadores de todas as subestações sofreram modificações respeito da solução que não considera penalidades no SAIFI e no SAIDI e onde as mudanças mas importantes se concentram nos alimentadores da subestação 26. Na Tabela 10 têm sido destacados os nós que sofrem uma melhora nos seus indicadores nodais de confiabilidade (nós 2, 4, e 8), explicado pela nova distribuição de cargas que diminui o número de nós que fazem parte dos alimentadores onde eles estão conectados.

Tabela 10. Taxas e durações de reparação e restauração para cada barra de demanda do sistema de 27 nós para a solução considerando custos de confiabilidade.

Nó	Π_i^{RS}	Γ_i^{RS}	Π_i^{SO}	Γ_i^{SO}	Nó	Π_i^{RS}	Γ_i^{RS}	Π_i^{SO}	Γ_i^{SO}
1	0,09	1,19	0,37	0,60	13	0,00	1,46	0,00	0,73
2	0,00	1,94	0,00	0,97	14	0,00	1,12	0,00	0,56
3	0,09	1,58	0,37	0,79	15	0,23	1,07	0,91	0,53
4	0,00	2,03	0,00	1,02	16	0,13	1,81	0,54	0,91
5	0,17	0,56	0,69	0,28	17	0,00	1,16	0,00	0,58
6	0,12	1,38	0,47	0,69	18	0,08	0,53	0,32	0,27
7	0,21	0,64	0,85	0,32	19	0,15	1,10	0,61	0,55
8	0,08	1,40	0,32	0,70	20	0,09	0,74	0,36	0,37
9	0,00	0,63	0,00	0,32	21	0,07	0,58	0,27	0,29
10	0,00	1,44	0,00	0,72	22	0,22	1,10	0,89	0,55
11	0,09	0,70	0,37	0,35	23	0,30	0,53	1,18	0,26
12	0,19	0,53	0,75	0,27	24	0,23	1,03	0,93	0,52

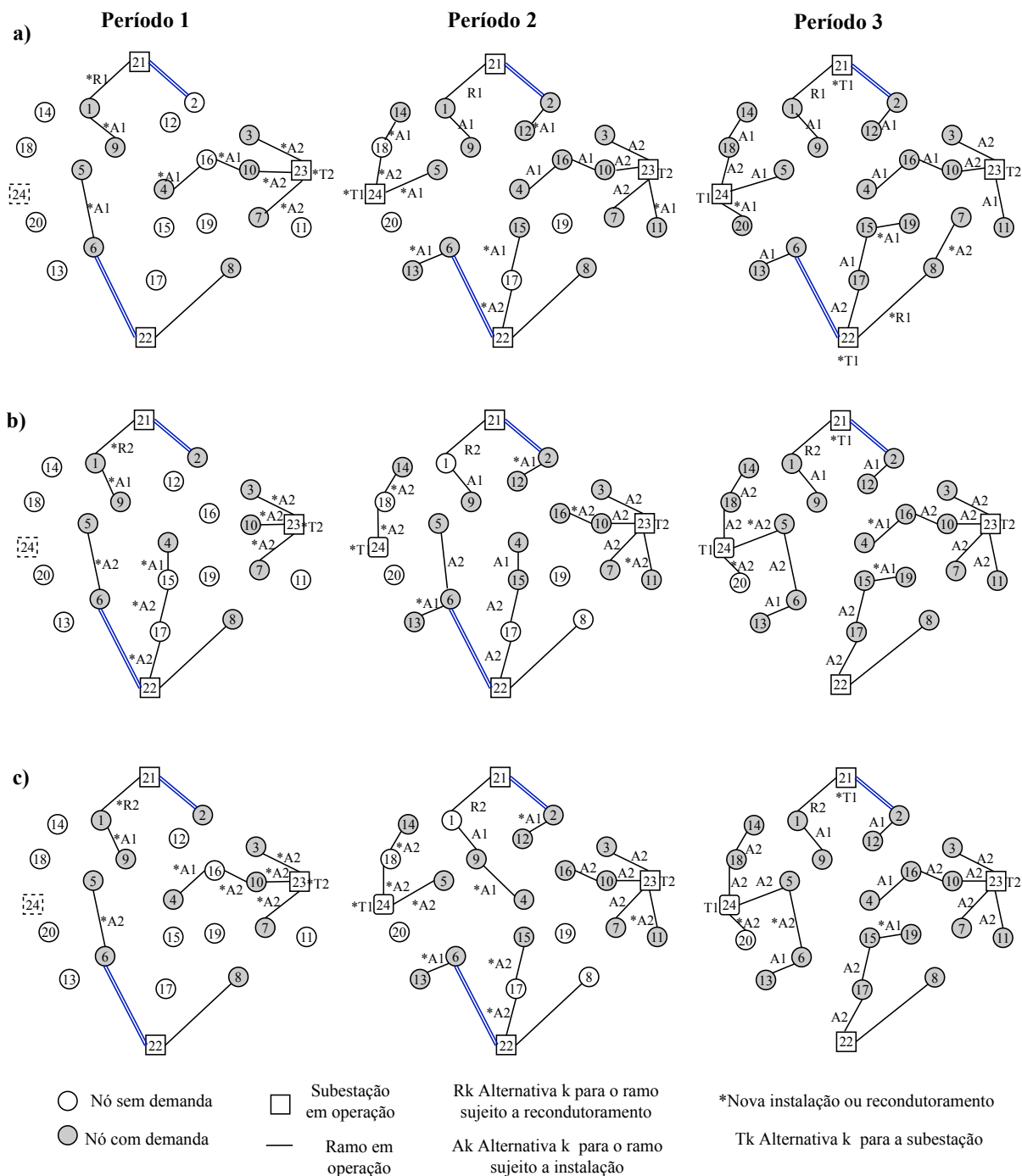
Fonte: Próprio autor

4.3.3 Caso de estudo de 24 nós multi-período

O seguinte teste corresponde ao caso de múltiplos períodos de planejamento, usando o sistema teste de 24 nós (GÖNEN; RAMÍREZ-ROSADO, 1986) que se mostra na Figura 7. O sistema compreende 20 nós de carga, representados por círculos; 4 subestações, representados por quadrados; e 33 ramos, indicados por linhas. Foram considerados 3 períodos de planejamento e a descrição dos dados se encontra em (TABARES, 2018). O coeficiente de custo para a ENS devido a interrupções nos ramos, C^{ENS} , é igual a \$11200/MWh. Como feito em Lotero e Contreras (2011), três níveis de carga são considerados. Para o modelo linear são considerados 30 blocos na linearização por partes, com uma taxa de juros ajustada pela inflação de 7,1% e um orçamento de investimento anual igual a \$6 milhões.

O modelo cônico e o modelo linear apresentam soluções de investimento diferentes quando os índices de confiabilidade são levados em conta. A Figura 17 apresenta as topologias de operação para cada um dos períodos de planejamento obtidos para ambos modelos, as diferenças entre ambos os modelos encontra-se nos períodos 1 e 2, onde existe um maior número de possibilidades em quanto à topologia.

Figura 17. Topologia ótima do sistema de 24 nós no planejamento multi-período - Modelo cônico. a) Modelo DC. b) Modelo linear. c) Modelo cônico.



Fonte: Próprio autor

No caso das subestações, nenhuma das subestações existentes é repotenciada, a subestação de 23 é construída com o transformador de maior capacidade. A subestação 24 é construída com o transformador de menor capacidade representado pela cor preta.

Em relação aos condutores usados, se observa que a solução usa intensivamente o condutor de maior capacidade.

Tabela 11. Resumo de custos em (US\$ 10³) para o sistema teste de 24 nós incluindo a avaliação analítica da confiabilidade

Tipo de custo	Período	Cônico	Linear
Custo investimento	T1	1848,32	1785,62
	T2	1415,56	1502,31
	T3	96,91	58,15
Custo manutenção	T1	9,71	9,29
	T2	13,16	13,16
	T3	196,46	196,46
Custo energia	T1	6651,07	6651,69
	T2	10413,24	10060,27
	T3	216610,00	209690,00
Custo corte de carga	T1	695,93	800,76
	T2	1062,68	10310,31
	T3	1019600,00	1179700,00
Custo ENS	T1	481,21	506,91
	T2	1026,93	985,13
	T3	24289,31	22373,04
Custos totais		1284410,50	1444643,09

Fonte: Próprio autor

Ressalta-se que a solução do modelo linear é factível. Adicionalmente, são apresentados os resultados do modelo DC, isto porque o unico antecedente na literatura que inclua a avaliação da confiabilidade dentro do PPSD é um modelo deste tipo. Comparando as topologias entre o modelo AC e o modelo DC, são notáveis as diferenças obtidas, a mais importante delas está no primeiro período de planejamento com relação à operação da subestação 23, somado com o fato do uso maioritário do condutor de menor capacidade no plano de expansão DC com relação ao plano AC. Destaca-se que a solução do modelo DC não é fatível usando o fluxo de potência ótimo.

A Tabela 11 mostra o resumo de custos para cada um das soluções entregadas em cada modelo. O modelo cônico foi resolvido em 4 horas e 4 minutos, enquanto o modelo linear precisou de 2 horas e 32 minutos. A Tabela 12 e a Tabela 13 mostram os erros obtidos para cada uma das soluções, onde se observa que são menores a 2%.

Tabela 12. Erros das aproximações do fluxo de potência (MVA) por tipo de ramos para o sistema de 24 nós considerando confiabilidade

	Grandeza	Fixos	Construídos	Recondutorados
Modelo cônico	Fluxo de carga	53,81	451,91	218,31
	Valor calculado	53,28	447,49	215,48
Erro		0,97%	0,98%	1,29%
Modelo linear	Fluxo de carga	37,84	561,51	183,46
	Valor calculado	37,85	561,70	183,82
Erro		0,03%	0,03%	0,20%

Fonte: Próprio autor

Tabela 13. Erros das aproximações da potência gerada em (MVA) pela subestação para o sistema de 24 nós considerando confiabilidade

potência subestação	Modelo cônico	Modelo linear
Fluxo de carga	205,66	209,71
Valor calculado	205,66	209,72
Erro	0,00%	0,00%

Fonte: Próprio autor

Quando comparamos as soluções obtidas pelos modelos DC e AC para o PPESD sem considerar a confiabilidade com os planos de expansão quando ela é considerada se destaca que:

- No modelo DC considerando confiabilidade são construídas as duas subestações candidatas, isto para diminuir a distancia entre os nós de carga e a subestação que os alimenta;
- Nos planos de expansão fornecidos pelos modelos AC considerando confiabilidade se evitam que os nós de carga fiquem afastados das subestações, daí que as topologias com os planos quando não se considera a confiabilidade sejam diferentes. O anterior pode ser enxergado no período de planejamento 1 onde para a topologia dos modelos AC sem confiabilidade a subestação 23 contem uma grande quantidade de cargas conectadas com ela. Este fenômeno não acontece nas topologias geradas pelos modelos AC considerando confiabilidade, onde as cargas ficam o mais perto que puderem da subestação mais próxima;

- As soluções do período de planejamento 3 fornecidas pelos modelos AC considerando e sem considerar a confiabilidade são as mesmas, na sua maioria de vezes se deve a que a minimização da potência fornecida pela subestação ou as perdas de potência ativa indiretamente otimizam a confiabilidade do sistema. Embora, sendo as topologias iguais, nas soluções considerando confiabilidade se usam outros tipos de condutores.

4.3.4 *Caso de estudo de 54 nós multi-período*

O sistema teste de 54 (MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2018a) foi usado de duas formas. A primeira consiste em comparar apenas as expressões algébricas inseridas frente ao trabalho de Muñoz-Delgado, Contreras e Arroyo (2018a), dado que ele é o único antecedente da literatura com um trabalho comparável mas que usa um modelo DC. Para esse propósito, o modelo AC linear aqui proposto foi reduzido a seu equivalente DC, considerando apenas a potência ativa para a instância multi-período. A segunda forma consiste em aplicar o teste nos modelos convexos AC propostos e conhecer a influência de considerar um modelo mais preciso de rede no PPESD.

4.3.4.1 *Comparação modelos DC*

Ambos os modelos fornecem os mesmos planos de investimento e os mesmos indicadores de confiabilidade, como se esperava. Porém, a grande diferença consiste no tempo computacional gasto por cada uma dos modelos propostos. Enquanto o modelo proposto no presente trabalho consegue atender a solução ótima em 13 minutos com 17 segundos, o modelo proposto por (MUÑOZ-DELGADO; CONTRERAS; ARROYO, 2018a) usa 54 minutos com 36 segundos para conseguí-lo, usando a mesma estação de trabalho.

A Tabela 14 mostra um resumo dos custos para cada ano do horizonte de planejamento em milhões US\$, a solução obtida não gera corte de carga em nenhum dos períodos de planejamento por tanto os custos não se encontram relacionados.

Tabela 14. Custos em cada ano de planejamento na solução do sistema de 54 nós

Ano	Custo fixo	Custo energia	Custo perdas	Custo ENS	Custo manutenção
1	930,681	1133,464	44,656	273,761	12,182
2	38,948	1193,112	45,776	278,626	11,736
3	81,692	1285,458	51,733	313,658	12,472
4	38,133	1341,833	61,474	383,480	12,158
5	692,568	1385,503	53,032	321,512	13,412
6	-	1486,319	54,858	335,741	12,193
7	10,105	1462,607	55,384	341,204	11,289
8	39,513	1489,529	55,758	342,915	10,823
9	38,450	1455,250	55,280	347,517	10,518
10	31,484	15526,199	602,390	3881,883	110,265

Fonte: Próprio autor

4.3.4.2 Comparação modelos AC

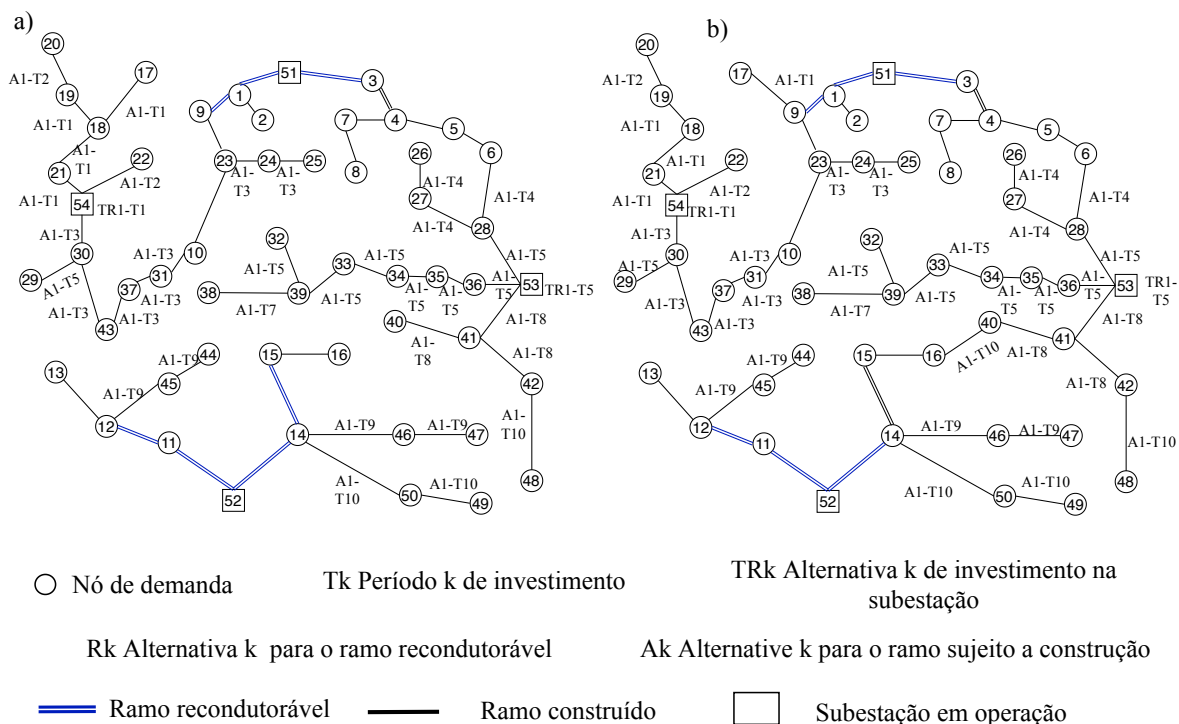
Para aplicar os modelos AC propostos, e como foi feito na seção 3.4.2, não são considerados os custos de operação das subestações e as perdas de potência ativa fazem parte do custo de produção de energia. Obteve-se os resultados do modelo linear, enquanto o modelo AC não conseguiu chegar à solução ótima. Assim, o modelo linear investiu um tempo computacional de 104 horas e 19 minutos.

Na Fig. 18 se mostram os investimentos ótimos que fornecem os modelos linear AC e DC. Ressalta-se que ambas as topologias de investimento apresentam poucas diferenças, particularmente nos alimentadores para os nós 16 e 17, e que ambas soluções utilizam os mesmos tipos de condutores e subestações.

A Tabela 15 resume os custos para ambos modelos, onde se mostram os valores presentes de cada tipo de custos associados à solução ótima em cada período de planejamento. Os investimentos de ambas as soluções são apenas diferentes nos estágios 1, 9 e 10. A diferença nos investimentos leva a uma diferença nos custos operacionais do modelo AC que se traduz em uma economia de 2% (\$6.287.600) em relação à solução do modelo DC.

Ao contrário do sistema de teste de 24 nós, a solução do sistema de teste de 54 nós é factível quando comprovada no modelo de fluxo de potência ótimo e muito próxima da

Figura 18. Plano de investimento ótimo para o sistema de 54 nós considerando a avaliação da confiabilidade.



Fonte: Próprio autor

solução do modelo AC. Uma possível explicação para este resultado é que o sistema teste de 54 nós não é suficientemente estressado (note-se que todos os condutores instalados são de menor capacidade) pelo que ambos os modelos poderiam facilmente convergir para uma solução muito semelhante.

A Tabela 16 mostra os erros na aproximação do modelo linear ara cada um dos tipos de ramos considerados. Note que os erros de aproximação são negligenciáveis, mostrando a precisão do modelo proposto.

4.4 CONCLUSÕES

Neste capítulo foi apresentada uma modelagem matemática que utiliza um conjunto de expressões algébricas de natureza inteiramente linear para incluir a avaliação analítica da confiabilidade dentro do processo de otimização de modelos convexos que representam o PPESD no contexto de redes inteligentes, isto é, supondo que toda a rede conta com dispositivos de proteção;

Tabela 15. Detalhamento de custos por período para a solução ótima do modelo linear e do modelo cônico (US\$10⁶)

		Período										Total
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Modelo Linear	Investimento	0,934	0,039	0,082	0,038	0,693	0,000	0,010	0,040	0,044	0,031	1,910
	Manutenção	0,012	0,012	0,012	0,012	0,013	0,012	0,011	0,011	0,011	0,110	0,217
	Energia	1,147	1,207	1,302	1,365	1,402	1,503	1,480	1,507	1,475	15,743	28,132
	Corte de Carga	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	ENS	0,269	0,277	0,310	0,380	0,318	0,332	0,338	0,340	0,343	3,825	6,7315
Modelo DC	Investimento	0,931	0,039	0,082	0,038	0,693	0,000	0,010	0,040	0,035	0,040	1,906
	Manutenção	0,012	0,012	0,012	0,012	0,013	0,012	0,011	0,011	0,011	0,110	0,217
	Energia	1,171	1,232	1,330	1,395	1,431	1,533	1,510	1,537	1,502	16,064	28,703
	Corte de Carga	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	ENS	0,274	0,279	0,314	0,383	0,322	0,336	0,341	0,343	0,348	3,853	6,792

Fonte: Próprio autor

Tabela 16. Erros de aproximação do modelo AC linear para o sistema teste de 54 nós

Sistema teste	Grandeza	Modelo linear	Fluxo de carga	
Teste 54 nós	Fluxo pelos ramos (MVA)	Fixos	256,76	247,70
		Adicionados	315,23	317,09
	Potência gerada pela subestação(MVA)		245.46	232.57

Os planos de expansão obtidos garantem um adequado nível de confiabilidade por meio do ótimo dimensionamento de subestações e ramos da rede. Assim, os resultados mostram que quando a confiabilidade é considerada junto com o planejamento há diferenças no plano de investimento ótimo;

Os modelos convexos que foram desenvolvidos permitem sua resolução usando técnicas clássicas de otimização, garantindo convergência e informação referente à solução ótima;

Os resultados mostram que não sempre ambos modelos fornecem a mesma solução. Por um lado existem suficientes razões matemáticas para determinar em que casos o modelo cônico fornece a mesma solução que modelo não linear, enquanto que não existe a mesma rigorosidade matemática com a linearização por partes.

5 MODELO DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA PARA O PPESD CONSIDERANDO RAMOS DE RESERVA

Neste capítulo é proposto um conjunto de expressões algébricas para o PPESD considerando que além de dimensionar os investimentos para a operação sob condições normais no sistema, devem ser também dimensionados ramos de reserva que permitam realizar manobras de restauração para os casos de falha na rede, de forma que é minimizado o custo de ENS.

Deve-se destacar que não se conhecem na literatura especializada formulações matemáticas que permitam o dimensionamento de ramos de reserva no PPESD visando melhorar a confiabilidade.

5.1 MODELAGEM DE CONFIABILIDADE CONSIDERANDO ESTADOS RESTAURATIVOS NO PPESD

Como mostrado na Seção 4.2.1 o PPESD incluindo confiabilidade por meio de expressões algébricas pode ser expresso em termos das variáveis de investimento \mathbf{x} e de operação \mathbf{y} sem ter que acrescentar novas variáveis. Porém, essa formulação é insuficiente para considerar manobras de restauração em termos das variáveis \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Na literatura especializada, as metaheurísticas são os únicos métodos que incluem manobras de restauração dentro do PPESD. Procurando inserir dentro do PPESD a capacidade de restauração por meio de ramos de reserva, nesta seção é proposto um conjunto de expressões algébricas com base na metodologia de [Ramírez-Rosado e Bernal-Agustín \(2001\)](#). As expressões algébricas modelam diferentes estados de restauração e um sistema fictício é usado para calcular a ENS quando a rede não pode ser totalmente restaurada. O funcionamento de cada um dos estados de operação e da subestação fictícia esta caracterizado em termos de novas variáveis de decisão. Como resultado, o problema (84)–(86) é reformulado de maneira a considerar estados restaurativos como segue:

$$\underset{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}}{\text{Minimizar}} \quad c^T = c^{I,V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + c^R(\mathbf{z}) \quad (125)$$

sujeito a:

$$\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \quad (126)$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0 \quad (127)$$

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq 0 \quad (128)$$

onde \mathbf{z} é um novo vetor de variáveis que relaciona decisões de topologia e confiabilidade, $C^R(\mathbf{z})$ é uma função que representa explicitamente o valor presente do custo de confiabilidade em termos de as variáveis de decisão incluídas em \mathbf{z} e $g(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ é um novo conjunto de funções restritas que modelam a relação entre \mathbf{x} e \mathbf{z} .

5.1.1 Considerações

O problema de otimização matemática é definido desde o ponto de vista do operador do sistema de distribuição, conseqüentemente procura-se o plano de expansão que tenha um mínimo custo. Devido à complexidade do PPESD são consideradas as mesmas simplificações da Seção 3.3. As simplificações anteriores constituem um balanço adequado entre a precisão da modelagem e o esforço computacional levando em conta que o modelo de PNLIM é o mais preciso para PPESD (LAVORATO *et al.*, 2012).

A formulação proposta adota as simplificações assumidas por Ramírez-Rosado e Bernal-Agustín (2001) para a avaliação da confiabilidade, onde somente são consideradas interrupções sofridas devido a falhas individuais das ramos; além disso, falhas nos ramos são caracterizadas por taxas de falha e durações de interrupção, e todos os ramos estão equipados com chaves.

Adicionalmente e segundo a proposta de Ramírez-Rosado e Bernal-Agustín (2001), para simular a saída de operação das ramos e os esquemas de restauração aproveitando os ramos de reserva, adiciona-se uma subestação e ramos fictícios que permitem a conexão dos nós de carga do sistema com a subestação fictícia. Esta subestação fictícia calcula a ENS quando o sistema não consegue se restaurar e evita reconfigurações desnecessárias em partes saudáveis da rede como mostrado em Romero *et al.* (2016).

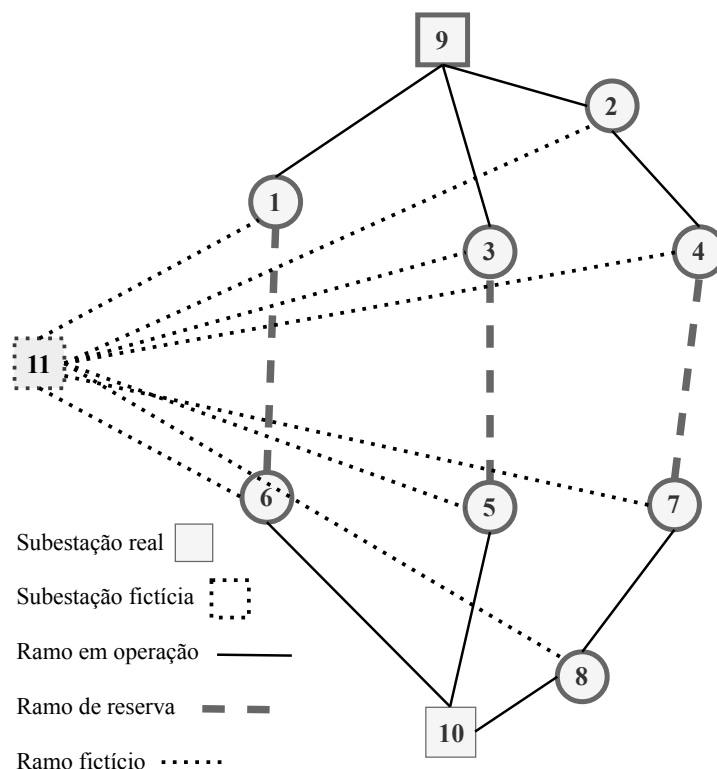


Figura 19. Representação da subestação fictícia e ramos fictícios.

Fonte: Próprio autor

Cada falha é simulada eliminando um ramo (não fictício) da rede. Assim, podem ser avaliadas as mudanças na topologia da rede que permitem ou a transferência de carga por meio dos elementos reais da rede, ou a ENS relacionada ao corte de carga e que corresponde à demanda que fica ligada à subestação fictícia por meio dos ramos fictícios.

O funcionamento da metodologia é ilustrado por meio da Figura 19, que representa um sistema de distribuição didático composto por 7 nós de carga representados por círculos, duas subestações representadas por retângulos, ramos em operação representados por linhas sólidas, ramos de reserva para estados de restauração representados por linhas tracejadas e ramos fictícios junto com uma subestação fictícia, ambos representados por linhas pontilhadas. No caso de uma falha do ramo que conecta a subestação (nó 9) com o nó 1, para restabelecer o serviço no nó 1 deve ser fechada a chave do ramo de reserva que conecta esse nó ao nó 6. Porém, isto é apenas possível se o

limite de corrente do ramo 1-6 e a capacidade da subestação 10 assim o permitem. Em caso que a demanda do nó 1 ultrapasse esses limites, somente a subestação fictícia 11 poderá atender o nó afetado por meio dos ramos fictícios.

Embora [Ramírez-Rosado e Bernal-Agustín \(2001\)](#) tenham adotado esse esquema de avaliação da restauração do SDEE dentro de uma metaheurística, é possível utilizar um modelo matemático que formalize esse processo ([ROMERO et al., 2016](#)).

5.2 PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO CONSIDERANDO RAMOS DE RESERVA

Nesta seção, uma formulação baseada em estados de operação é proposta para integrar em um único modelo matemático de planejamento, os investimentos para a expansão da rede e o impacto do uso de ramos de reserva na confiabilidade dos SDEE. Assim os elementos para a confiabilidade como a construção dos ramos de reserva deve ser resultado do processo de otimização.

Cada um dos mencionados estados de operação representa a falha de um ramo do sistema, além de uma condição especial adicional e_0 que representa o estado de operação normal ou sem falha. Os investimentos feitos para todo o horizonte de planejamento devem garantir que o sistema opere corretamente em cada estado de operação, enquanto as variáveis de operação representam as topologias ótimas em cada um dos estados, tanto no estado de operação sem falha quanto nos estados restaurativos do sistema.

5.2.1 Função objetivo incluindo ramos de reserva

A função (32) apresentada na Seção 3.2.1 deve ser modificada para incluir os custos associados à confiabilidade do sistema. A métrica usada é o custo da ENS, expresso a continuação:

$$c_t^{ens,r} = C^{ENS} \sum_{n \in \Omega^{SF}} \sum_{e \in E} c_f \tau_{ij}^{rep} \lambda_{ij} l_{ij} P_{n,c,t,e}^{SF}; \forall t \in \Theta \quad (129)$$

$$c_t^{sw} = C^{sw} \sum_{ij \in \Upsilon} \sum_{e \in E} (y_{ij,t,e}^{sw+} + y_{ij,t,e}^{sw-}); \forall t \in \Theta \quad (130)$$

Como se observa, o cálculo da ENS que leva em consideração as taxas de falha e tempos de reparação de cada linha que entra em estado de falha no sistema. Além disso,

e para evitar modificações topológicas na rede em parcelas que não tenham sido afetadas pela falha, é imposto um custo de chaveamento C^{sw} como expresso em (130), pelo que se buscar realizar o mínimo de alterações na topologia para restaurar o serviço nos estados de falha.

Conseqüência destes novos custos, a função objetivo total é definida como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } c^T = & \sum_{t \in \Theta} \frac{(1 + I_f)^{-(t-1)}}{I_f} c_t^I + \\ & Ipv(I_f, n) \sum_{t \in \Theta} \left[(1 + I_f)^{-(t-1)} (c_t^M + c_t^P + c_t^O + c_t^U + c_t^{ens,r} + c_t^{sw}) \right] + \\ & \frac{(1 + I_f)^{-|\Theta|}}{I_f} \left(c_{|\Theta|}^M + c_{|\Theta|}^P + c_{|\Theta|}^O + c_{|\Theta|}^U + c_{|\Theta|}^{ens,r} + c_{|\Theta|}^{sw} \right) \end{aligned} \quad (131)$$

5.2.2 Restrições que caracterizam os estados de operação

A principal contribuição deste capítulo é modelar os casos de falha dentro de um único problema de programação, assumindo que a rede conta com chaves em todos os ramos que são construídos. Para obtê-lo, o funcionamento básico de um modelo de programação de dois estágios é usado, onde no primeiro estágio são dimensionados os investimentos e no segundo estágio é calculada a ENS a causa da saída de operação de cada um dos ramos da rede. Assim, de forma diferente da maioria dos modelos de programação propostos para o PPESD, se permite projetar uma rede malhada e que opera radialmente tanto em estado sem falha como em estado restaurativo.

Cabe mencionar que o conjunto de falhas pode ser considerado de acordo com a robustez desejada; assim, poderia selecionar-se um número menor de saídas de operação dos ramos em problemas de grande porte ou os ramos poderiam ser agrupados reduzindo o espaço de busca do problema.

A forma como são consideradas as falhas e a operação dos ramos de reserva constituem uma característica diferencial do presente trabalho, que permite ao planejador do SDEE antecipar-se as mudanças que devem ser executadas para lidar com as falhas nos ramos da rede. As expressões que representam os estados restaurativos são definidas por (132)–(142).

As expressões (132) e (133) garantem que não haverá fluxo de potência pelos ramos fictícios no estado de operação normal; as expressões (134)–(135) garantem que não haverá

geração por parte da subestação fictícia no estado de operação normal do sistema. Por último, a restrição (136) garante que os ramos fictícios não operam no estado normal.

$$P_{ij,t,e}^{lf} = 0; \forall ij \in \Gamma, t \in \theta, e \in E | e = e_0 \quad (132)$$

$$Q_{ij,t,e}^{lf} = 0; \forall ij \in \Gamma, t \in \theta, e \in E | e = e_0 \quad (133)$$

$$P_{i,t,e}^{SF} = 0; \forall i \in \Omega^{SF}, t \in \theta, e \in E | e = e_0 \quad (134)$$

$$Q_{i,t,e}^{SF} = 0; \forall i \in \Omega^{SF}, t \in \theta, e \in E | e = e_0 \quad (135)$$

$$y_{ij,t,e}^{lf} = 0; \forall ij \in \Gamma^{fic}, t \in \theta, e \in E | e = e_0 \quad (136)$$

Cada elemento do conjunto E , exceto o elemento e_0 , está associado com um ramo real do sistema, assim quando um elemento do conjunto coincide com um ramo ij , significará que esse ramo deixará de operar simulando dessa forma a falha permanente nele. As expressões(137) simulam a saída de operação dos ramos reais, um de cada vez. As expressões (138)–(140) garantem que só seja usado um ramo fictício por cada estado de falha e que a subestação fictícia só possa alimentar a parcela da rede afetada pela falha. As expressões (141) e (142) calculam as mudanças feitas na topologia em operação normal para atender o estado de falha, permitindo minimizar o número de mudanças feitas na rede com relação à topologia de operação normal. As expressões (143)–(145) junto com as restrições de balanço de potência, garantem a operação radial do sistema

mesmo em estado de falha, já que os ramos fictícios e a subestação fictícia estão presentes nessas equações e são extensões das propostas da Seção 3.2.5.

$$y_{ij,t,e}^{l+} + y_{ij,t,e}^{l-} = 0; \forall ij \in \Gamma, t \in \theta, e \in E | ij = e \quad (137)$$

$$\sum_{ij \in \Gamma^{fic}} y_{ij,t,e}^{lf+} + y_{ij,t,e}^{lf-} \leq 1; \forall ij \in \Gamma^{fic}, t \in \theta, e \in E \quad (138)$$

$$y_{u,v,t,e}^{lf+} = y_{ij,t,e}^{l+}; \forall ij \in \Gamma, uv \in \Gamma^{fic}, t \in \theta, e \in E | ij = e \wedge u \neq i \wedge v \neq i \wedge u \neq j \wedge v \neq j \quad (139)$$

$$y_{u,v,t,e}^{lf-} = y_{ij,t,e}^{l-}; \forall ij \in \Gamma, uv \in \Gamma^{fic}, t \in \theta, e \in E | ij = e \wedge u \neq i \wedge v \neq i \wedge u \neq j \wedge v \neq j \quad (140)$$

$$y_{ij,t,e}^{sw+} + y_{ij,t,e}^{sw-} \leq 1; \forall ij \in L, t \in \theta, e \in E \quad (141)$$

$$(y_{ij,t,e_0}^{l+} + y_{ij,t,e_0}^{l-}) - (y_{ij,t,e}^{l+} + y_{ij,t,e}^{l-}) = y_{ij,t,e}^{sw+} - y_{ij,t,e}^{sw-}; \forall ij \in \Gamma, t \in \theta, e \in E \quad (142)$$

$$\left(\sum_{ji \in \Gamma} y_{ji,t,e}^{l+} + \sum_{ij \in \Gamma} y_{ij,t,e}^{l-} \right) + \left(\sum_{ji \in \Gamma^{fic}} y_{ji,t,e}^{lf} \right) = 0; \forall i \in \Omega^S, t \in \theta, e \in E \quad (143)$$

$$\left(\sum_{ji \in \Gamma} y_{ji,t,e}^{l+} + \sum_{ij \in \Gamma} y_{ij,t,e}^{l-} \right) + \left(\sum_{ji \in \Gamma^{fic}} y_{ji,t,e}^{lf} \right) = 1; \forall i \in \Omega^B \setminus \Omega^S, t \in \theta, e \in E | P_{i,t}^D > 0; \quad (144)$$

$$\left(\sum_{ji \in \Gamma} y_{ji,t,e}^{l+} + \sum_{ij \in \Gamma} y_{ij,t,e}^{l-} \right) + \left(\sum_{ji \in \Gamma^{fic}} y_{ji,t,e}^{lf} \right) \leq 1; \forall i \in \Omega^B \setminus \Omega^S, t \in \theta, e \in E | P_{i,t}^D = 0; \quad (145)$$

5.2.3 Restrições fundamentais dos SDEE para cada estado de operação

As expressões (146)–(154) são adaptações de (49)–(57) para o PPESD com ramos de reserva e modelam o estado estacionário de cada estado de operação do sistema:

$$\sum_{ki \in L} \sum_{a \in \Phi_a} P_{ki,a,e} - \sum_{ij \in L} \sum_{a \in \Phi_a} (P_{ij,a,e} + R_c l_{ij} I_{ij,a,e}^{sqr}) + \sum_{ki \in \Gamma^{fic}} P_{ki,t,e}^{lf} - \sum_{ij \in \Gamma^{fic}} P_{ij,t,e}^{lf} + P_{i,e}^S + P_{i,t,e}^{SF} = F^D P_{i,t}^D; \forall i \in \Omega^B, t \in \theta, e \in E \quad (146)$$

$$\sum_{ki \in L} \sum_{a \in \Phi_a} Q_{ki,a,e} - \sum_{ij \in L} \sum_{a \in \Phi_a} (Q_{ij,a,e} + X_c l_{ij} I_{ij,a,e}^{sqr}) + \sum_{ki \in \Gamma^{fic}} Q_{ki,t,e}^{fic} - \sum_{ij \in \Gamma^{fic}} Q_{ij,t,e}^{fic} + Q_{i,t,e}^S + Q_{i,t,e}^{SF} = F^D Q_{i,t}^D; \forall i \in \Omega^B, t \in \theta, e \in E \quad (147)$$

$$V_{i,t,e}^{sqr} = V_{j,t,e}^{sqr} + \sum_{a \in \Phi_a} [2(R_a P_{ij,a,t,e} + X_a Q_{ij,a,t,e}) l_{ij} + Z_a^2 l_{ij}^2 I_{ij,a,t,e}^{sqr}] + \Delta_{ij,t,e}^V;$$

$$\forall ij \in L, t \in \theta, e \in E \quad (148)$$

$$|\Delta_{ij,t,e}^V| \leq (\bar{V}^2 - \underline{V}^2) [1 - (y_{ij,t,e}^{l+} + y_{ij,t,e}^{l-})]; \forall ij \in \Gamma, t \in \theta, e \in E \quad (149)$$

$$V_{j,t,e}^{sqr} \hat{I}_{ij,t,e}^{sqr} = (\hat{P}_{ij,t,e})^2 + (\hat{Q}_{ij,t,e})^2; \forall ij \in \Gamma, t \in \theta, e \in E \quad (150)$$

$$\hat{I}_{ij,t,e}^{sqr} = \sum_{a \in \Phi_a} I_{ij,a,t,e}^{sqr}; \forall ij \in \Gamma, t \in \theta, e \in E \quad (151)$$

$$\hat{P}_{ij,t,e} = \sum_{a \in \Phi_a} P_{ij,a,t,e}; \forall ij \in \Gamma, t \in \theta, e \in E \quad (152)$$

$$\hat{Q}_{ij,t,e} = \sum_{c \in C} Q_{ij,a,t,e}; \forall ij \in \Gamma, t \in \theta, e \in E \quad (153)$$

$$Sg_{i,t,e}^{sqr} \geq (P_{i,t,e}^S)^2 + (Q_{i,t,e}^S)^2; \forall i \in \Omega^S, t \in \theta, e \in E \quad (154)$$

5.2.4 Restrições lógicas associadas a investimentos e operações

As expressões que relacionam as variáveis de investimento e operação ao longo do horizonte de planejamento são representadas por (155)–(157) e são extensões naturais das expressões (39)–(48) para o PPESD considerando ramos de reserva.

$$\text{Expressões (39), (42)–(48)} \quad (155)$$

$$y_{ij,a,t,e}^l \leq \sum_{a \in \Phi_a} x_{ij,a,t}^l; \forall ij \in \Gamma, t \in \theta, e \in E \quad (156)$$

$$y_{ij,t,e}^{l+} + y_{ij,t,e}^{l-} = y_{ij,a,t,e}^l; \forall ij \in \Gamma, t \in \theta, e \in E \quad (157)$$

5.2.5 Limites operacionais

A expressões (158)–(170) representam os limites operacionais tanto para a rede real como para a rede fictícia. As expressões (158)–(165) representam extensões naturais de (59)–(60). Adicionalmente, as expressões (166)–(168) limitam o fluxo de potência nos ramos fictícios, enquanto as expressões (169)–(170) limitam a potência da subestação fictícia.

$$\underline{V}^2 \leq V_{i,t,e}^{sqr} \leq \bar{V}^2; \forall i \in \Omega^B, t \in \theta, e \in E \quad (158)$$

$$0 \leq I_{ij,a,t,e}^{sqr} \leq \bar{I}_a^2 x_{ij,a,t}^l; \forall ij \in \Gamma, a \in \Phi_a, t \in \theta, e \in E \quad (159)$$

$$0 \leq I_{ij,a,t,e}^{sqr} \leq \bar{I}_a^2 (y_{ij,t,e}^{l+} + y_{ij,t,e}^{l-}); \forall ij \in \Gamma, a \in \Phi_a, t \in \theta, e \in E \quad (160)$$

$$|P_{ij,a,t,e}| \leq \bar{V}I x_{ij,a,t}^l; \forall ij \in \Gamma, a \in \Phi_a, t \in \theta, e \in E \quad (161)$$

$$|P_{ij,a,t,e}| \leq \bar{V}I (y_{ij,t,e}^{l+} + y_{ij,t,e}^{l-}); \forall ij \in \Gamma, a \in \Phi_a, t \in \theta, e \in E \quad (162)$$

$$|Q_{ij,a,t,e}| \leq \bar{V}I x_{ij,a,t}^l; \forall ij \in \Gamma, a \in \Phi_a, t \in \theta, e \in E \quad (163)$$

$$|Q_{ij,a,t,e}| \leq \bar{V}I (y_{ij,t,e}^{l+} + y_{ij,t,e}^{l-}); \forall ij \in \Gamma, a \in \Phi_a, t \in \theta, e \in E \quad (164)$$

$$Sg_{i,t,e}^{sqr} \leq \left(\sum_{c \in \Phi_c} \bar{S}_c y_{i,c,t}^s + \sum_{c \in \Phi_c} \bar{R}_c y_{i,c,t}^r \right)^2; \forall i \in \Omega^S, t \in \Theta, e \in E \quad (165)$$

$$|P_{ij,t,e}^{lf}| = 0; \forall ij \in \Gamma, t \in \theta, e \in E | i, j \in \Omega^S \quad (166)$$

$$|P_{ij,t,e}^{lf}| \leq \bar{V}I y_{ij,e}^{lf}; \forall ij \in \Gamma^{fic}, t \in \theta, e \in E \quad (167)$$

$$|Q_{ij,t,e}^{lf}| = \tan(\cos^{-1}(pf)) P_{ij,e}^{lf}; \forall ij \in \Gamma^{fic}, t \in \theta, e \in E \quad (168)$$

$$P_{i,t,e}^{SF} \leq b^{fic}; \forall i \in \Omega^{SF}, t \in \theta, e \in E | e \neq e_0 \quad (169)$$

$$Q_{i,t,e}^{SF} = \tan(\cos^{-1}(pf)) P_{i,t,e}^{SF}; \forall i \in \Omega^{SF}, t \in \theta, e \in E | e \neq e_0 \quad (170)$$

5.3 MODELOS DE PROGRAMAÇÃO CONVEXOS INTEIROS MISTOS PARA O PPSD CONSIDERANDO RAMOS DE RESERVA

O modelo (131)–(170) corresponde a um modelo de PNLIM para o PPSD considerando ramos de reserva com não-linearidades nas expressões (150), (154) e (165). Essas expressões são equivalentes a (53), (65) e (57) do modelo de PPSD, respetivamente. Em consequência, as aproximações lineares e as convexificações apresentadas na Seção 3.3 podem ser aplicadas de forma equivalente para obter modelos

computacionalmente tratáveis e comercialmente disponíveis. As reformulações convexas equivalentes para o PPESD considerando ramos de reserva e estados de operação são apresentadas seguidamente.

5.3.1 Modelo de programação cônico de segunda ordem inteiro misto para o PPESD considerando ramos de reserva

O modelo de PNLIM para o PPESD considerando ramos de reserva pode ser reformulado usando programação cônica de segunda ordem como segue:

Minimizar (131)

sujeito a:

(132) – (149), (151) – (164), (166) – (170)

$$V_{j,t,e}^{sqr} \widehat{I}_{ij,t,e}^{sqr} \geq \widehat{P}_{ij,t,e}^2 + \widehat{Q}_{ij,t,e}^2; \forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta, e \in E \quad (171)$$

$$Sg_{i,t,e}^{sqr} = \sum_{c \in \Phi_c} \bar{S}_c^2 y_{i,c,t}^s + \sum_{c \in \Phi_c} \bar{R}_c^2 y_{i,c,t}^r + 2 \sum_{c \in \Phi_c} \bar{S}_c \bar{R}_c y_{i,c,t}^r; \forall i \in \Omega^S, t \in \Theta, e \in E \quad (172)$$

A formulação modificada é obtida pela aplicação dos primeiros passos apresentados na Seção 3.3, os quais convexificam o modelo não linear. Para este propósito, as equações (150) são reformuladas como (171) aplicando o primeiro passo da Seção 3.3, e as equações (165) são reformuladas como (172) aplicando o segundo passo. Além disso, vale ressaltar que as expressões (154) já são cônicas de segunda ordem e não precisam ser reformuladas.

De acordo com Farivar e Low (2013), Franco, Rider e Romero (2014), o programa de PCSOIM será equivalente ao problema de PNLIM se: 1) a rede for radial; e 2) a função objetivo está aumentando estritamente com relação a $V_{j,t,e}^{sqr}$, $\widehat{I}_{ij,t,e}^{sqr}$ e $Sg_{i,t,e}^{sqr}$, que aparecem no lado esquerdo das expressões (171) e (172), respectivamente. Assim, a primeira condição é totalmente satisfeita pelas expressões que garantem a operação radial (143)–(145), (146)–(147). Para satisfazer a segunda condição, as variáveis $V_{j,t,e}^{sqr}$, $\widehat{I}_{ij,t,e}^{sqr}$ e $Sg_{i,t,e}^{sqr}$ estão definidas como positivas dentro do modelo e estão presentes indiretamente na função objetivo pelas relações existentes entre elas com a potência ativa gerada pela subestação no balanço de potência ativa (146), variável que esta diretamente presente na função objetivo (131).

O lado direito das expressões (165) é reformulado da mesma maneira como foram expandidas as expressões (72) da Seção 3.3.

5.3.2 Modelo de programação linear inteiro misto para o PPESD considerando restauração

O modelo de PNLIM para o PPESD considerando ramos de reserva pode ser reformulado usando programação linear como segue:

Minimizar (131)

sujeito a:

$$(132) - (149), (151) - (153), (155) - (164), (166) - (170), (172)$$

$$V_{j,t,e}^{est} \hat{I}_{ij,t,e}^{sqr} = f(\hat{P}_{ij,t,e}, \max\{a \in \Phi_a\} \bar{I}_a, K) + f(\hat{Q}_{ij,t,e}, \max\{a \in \Phi_a\} \bar{I}_a, K);$$

$$\forall ij \in \Upsilon, t \in \Theta, e \in E \quad (173)$$

$$Sg_{i,t,e}^{sqr} = f(P_{i,t,e}^S, \max\{c \in \Phi_c\} \bar{S}_c, K) + f(Q_{i,t,e}^S, \max\{c \in \Phi_c\} \bar{S}_c, K);$$

$$\forall i \in \Omega^S, t \in \Theta, e \in E \quad (174)$$

A formulação modificada é obtida pela aplicação do segundo e terceiro passo apresentados na Seção 3.3, onde as expressões (150) e (154) são linearizadas usando a metodologia proposta em Bradley, Hax e Magnanti (1977) e amplamente explicadas na Seção 3.3. A vantagem dos modelos de PLIM é que pode ser resolvidos usando técnicas de otimização clássicas que garantem a solução ótima e que são mais robustas em comparação com a solução de formulações não lineares.

5.4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Os resultados de dois casos de estudo são apresentados nesta seção. Ambos os casos de estudo foram aplicados em instâncias estáticas do problema de planejamento, o primeiro de 24 nós e o segundo de 18 nós, baseados nos sistemas descritos em Gönen e Ramírez-Rosado (1986) e Haffner *et al.* (2008), respetivamente. Ambos os modelos foram implementados em AMPL (FOURER; GAY; KERNIGHAN, 2003). As soluções dos modelos foram obtidas utilizando o solver comercial CPLEX (IBM ILOG CPLEX, 2018), usando um computador com processador Intel Core i7-4500 processador 1,80GHz com 8 GB de RAM. A função objetivo apenas considera os custos que sejam relatados nas soluções correspondentes, o resto de termos foram desconsiderados para simplificar a análise.

5.4.1 Caso de estudo de 24 nós

O sistema teste de 24 nós, adaptado de (GÖNEN; RAMÍREZ-ROSADO, 1986) e que é descrito detalhadamente em (TABARES, 2018), é usado para mostrar a influência do planejamento incluindo ramos de reserva. Para tal fim apenas uma instancia estática do PPESD será usada. Para este teste o modelo cônico não conseguiu convergência à solução ótima, isto porque o método de ponto interior em que se baseia o software CPLEX ainda precisa ser aprimorado para lidar com formulações cônicas. Conseqüentemente, só serão apresentados os resultados do modelo linear.

A topologia inicial do SDEE é mostrada na Figura 12. A solução obtida para este sistema tem um valor total de US\$ 2344,24x10³, com um investimento em subestações de US\$ 780x10³ e em linhas de US\$418,50x10³, custos de perdas de US\$ 505,83x10³, custos de energia não suprida de US\$84,91x10³ e custos de chaveamentos iguais a US\$ 555,00x10³.

A Figura 20 relaciona os investimentos feitos na rede, onde os ramos 1-14, 2-3, 4-9, 7-11, 15-17, e 6-13 em cor azul são ramos de reserva que atuam na modificação da rede para atender os casos de falha, diminuindo a parcela desenergizada da rede. Todas os ramos são construídos com o condutor tipo 1 de menor capacidade e as subestações 1023 e 1024 foram construídas. A topologia em operação normal (sem presença de falha) está composta pelas subestações e ramos representados por linhas contínuas nas cores preta e verde da Figura 20.

A topologia (a) da Figura 21 mostra as mudanças no sistema no processo de restauração quando acontecer uma falha no ramo 14-18. Matematicamente a falha é simulada eliminando o ramo de operação, fazendo a variável $y_{ij,e,t}^l = 0$, que significa a abertura da chave dessa linha, sendo realizada uma manobra de comutação e que é modelada como $y_{ij,e}^{sw-} = 1$. Neste caso, o nó 14 fica desenergizado e para restabelecer o serviço nele é usado o ramo de reserva 1-14 por meio do fechamento da chave correspondente, que é representado mudando o ramo de reserva para a cor laranja; assim, o estado desse ramo passa de fora de operação na topologia de estado de operação normal (e_0) para o estado em operação no estado de falha (e), isto é, $y_{ij,e_0}^l = 0 \rightarrow y_{ij,e}^l = 1$.

Quando o sistema não consegue ser restaurado como nos casos de falha nos ramos 2-12, 1024-5, 1022-8, a subestação fictícia é quem atende o nó que fica desenergizado,

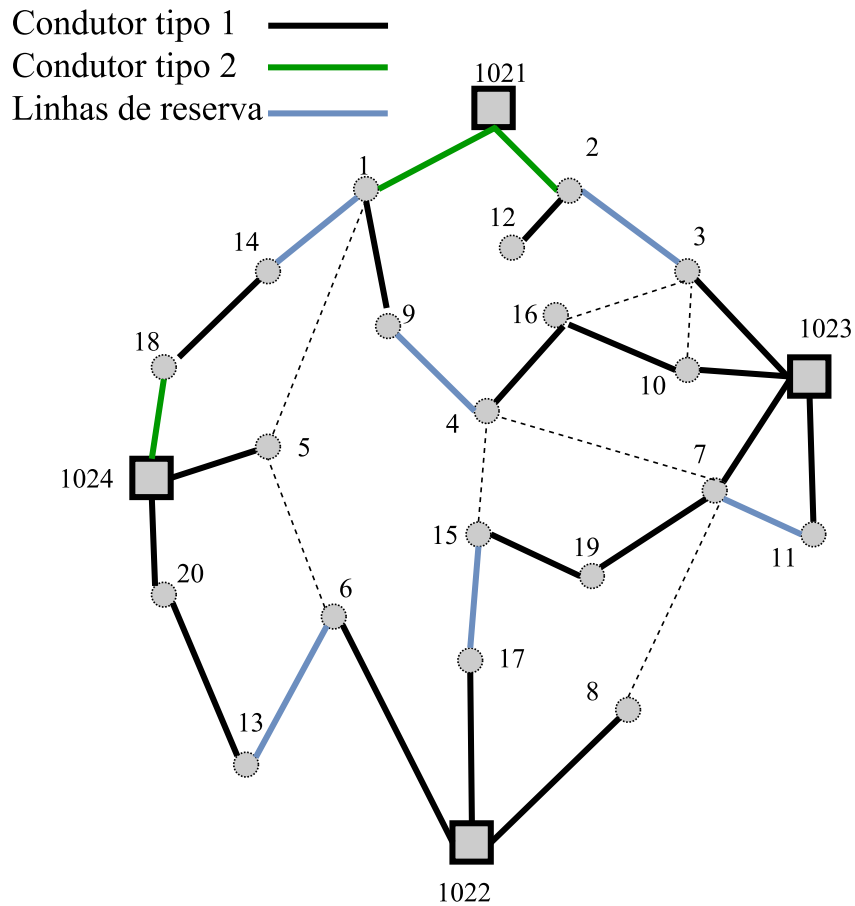


Figura 20. Investimentos no sistema de 24 nós.

Fonte: Próprio autor

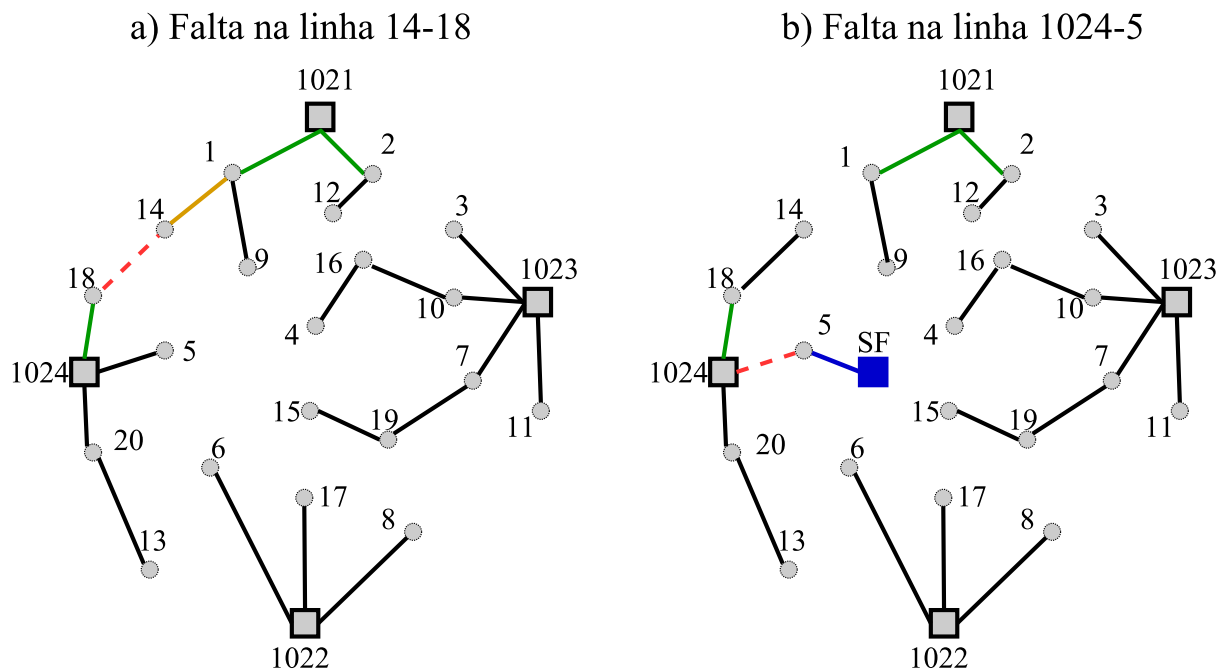


Figura 21. Topologias de restauração para dois casos de falha no sistema de 24 nós.

Fonte: Próprio autor

como é mostrado na topologia (b) da Figura 21 para a falha na linha 1024-5. Para que a subestação fictícia entre em operação, o ramo em falha deve ser desligado e adicionalmente o ramo fictício que conecta o nó de carga com a subestação fictícia deve ser ativado $y_{ij,s}^{lf} = 1$; assim, a subestação fictícia representada com um retângulo azul, com sigla SF nas figuras, permitirá a conexão da parcela não restaurada do sistema. Em (TABARES, 2018) são mostrados o total de topologias para todos os estados de falha do sistema teste.

Destaca-se o fato de que para este teste em particular, as três falhas em que a geração fictícia é acionada, teriam a chance de ser restauradas se fosse construído um número maior de linhas de reserva; porém, o custo total de construção das linhas é maior que o custo associado com a energia não suprida, logo as linhas de reserva não são construídas, pois o plano de expansão é altamente dependente do valor da energia não suprida.

O tempo computacional gastado para obter a solução é de 12 dias e 4 horas e os erros na aproximação das não linearidades são de 2.37%.

5.4.2 Caso de estudo de 18 nós

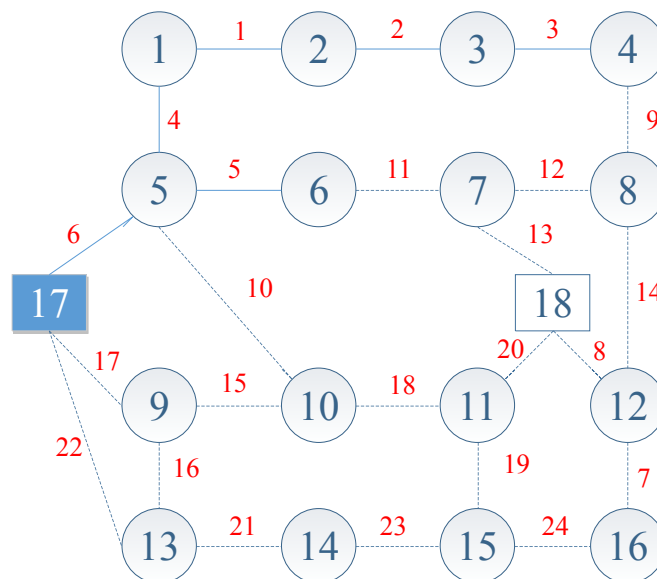


Figura 22. Topologia inicial para o sistema de 18 nós.

Fonte: Próprio autor

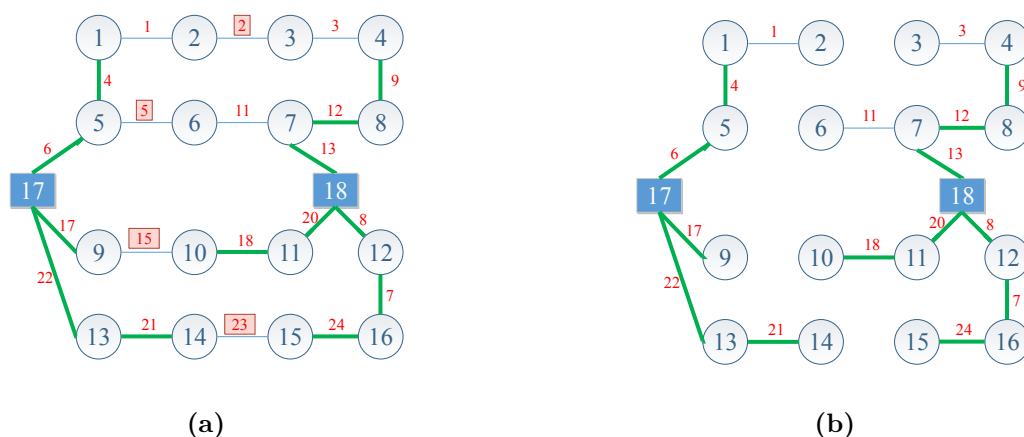


Figura 23. Resultados caso de estudo de 18 nós a) Investimentos totais na rede . b) Operação em estado sem falha.

Fonte: Próprio autor

Para avaliar as formulações propostas neste trabalho foi utilizada uma rede fictícia adaptada de [Haffner et al. \(2008\)](#) composta de 18 nós (2 subestações e 16 nós de carga) e 24 ramos, operando a 13 kV. A topologia inicial da rede é mostrada na Figura 22, os retângulos representam as subestações, os ramos desenhados como linhas contínuas representam a rede inicial e ramos desenhados como linhas tracejadas são candidatos para adição ao sistema. Neste teste a subestação 17 encontra-se construída.

Este trabalho adotou um horizonte de planejamento de 15 anos, taxa de juros de 10%, limites máximo e mínimo da tensão são 1,05 e 0,95 p.u, respectivamente. O custo da energia é de US\$ 0,50/kWh, o custo por saída de operação dos ramos é de US\$ 5,00/kWh, com um fator de potência é igual a 0,9, o fator de perdas é igual a 0,35. Foi adotado para o teste, uma taxa de 0,234 falhas/ano para todos os ramos e tempo de reparação iguais a 3h. A solução obtida para este sistema tem um valor total de US\$ 39795,73x10³, com um total de investimento em subestações de US\$2230,00x10³ e em ramos de US\$ 1566,90x10³, custos de perdas de US\$ 1008,71x10³, custo de energia US\$ 34349,99x10³ e custos de chaveamentos iguais a US\$ 640,00x10³.

A Figura 23(a) apresenta os investimentos totais feitos na rede, onde os ramos remarcados com um retângulo vermelho identificam os ramos de reserva e a subestação 18 é construída. A topologia da Figura 23(b) representa o estado fora de falha. Para todas as figuras os ramos em verde representam o cabo de maior capacidade e os ramos em azul representam o cabo de menor capacidade. Em [Tabares \(2018\)](#) são mostrados o total de

topologias para todos os estados de falha do sistema teste, nos gráficos ali mostrados, os ramos tracejados em vermelho representam o ramo em falha.

O tempo computacional gastado para obter a solução é de 6 horas e 32 minutos e os erros na aproximação das não linearidades são de 0,39%.

5.5 Conclusões

Nesta capítulo foi apresentado um novo modelo de otimização matemática para a inclusão da confiabilidade no problema de PPESD. O modelo proposto identifica o plano ótimo de expansão ao tempo que representa a operação do sistema de distribuição sob condições normais e de falha, supondo que toda a rede conta com dispositivos de proteção e que dimensiona os investimentos em ramos e subestações. Para possibilitar a restauração do sistema, foram determinados investimentos adicionais em ramos de reserva que são usados na ocorrência de falhas.

Apesar do modelo ser complexo e seu tamanho crescer proporcionalmente com o número de ramos existentes e candidatos do sistema sob estudo, ele permite definir o plano de restauração de forma antecipada para um conjunto dado de falhas. O anterior proporciona aos SDEE uma maior flexibilidade de reconfiguração, pois as variáveis de decisão do sistema permitem identificar a melhor topologia de restauração e as manobras a serem realizadas para que o sistema opere normalmente.

Os resultados mostram que quando os SDEE são planejados para considerar estados de contingência, os investimentos mudam em relação a um plano de investimento que apenas considera a operação radial sem contingências.

6 CONCLUSÃO

Nesta tese foram formulados modelos matemáticos que consideram três importantes tópicos para as redes de distribuição como são a avaliação da confiabilidade, a integração da avaliação da confiabilidade dentro do PPESD considerando modelos de rede AC e o planejamento de redes considerando possibilidades de restauração por meio ramos de reserva.

Na primeira parte do presente trabalho foi proposto um conjunto de expressões algébricas que permitem a avaliação analítica da confiabilidade em redes de distribuição existentes, assim conclui-se que:

- O método de avaliação da confiabilidade para redes de distribuição radiais baseado em simulação pode ser equivalentemente representado por meio de expressões algébricas;
- O conjunto de expressões algébricas desenvolvido é adequado para avaliar a confiabilidade de sistemas radiais sem necessitar de técnicas de otimização, apenas é necessário resolver o sistema de equações;
- O reduzido esforço computacional requerido pelo conjunto de expressões algébricas para resolver sistemas de grande porte revela a efetividade da abordagem proposta.

Posteriormente modelos convexos AC foram propostos para o PPESD, permitindo concluir que:

- Os modelos matemáticos convexos implementados permitem tratar as não linearidades características do PPESD considerando múltiplos períodos de planejamento;
- A aplicação da programação cônica de segunda ordem oferece teoricamente uma equivalência das características do modelo não linear que representam o PPESD, embora são necessárias melhoras nos atuais recursos computacionais para obter tratabilidade em problemas de grande porte. Isto porque seu gasto computacional é excessivo quando comparado com outros modelos convexos como o modelo linear;
- A aplicação de programação linear inteira mista é computacionalmente vantajosa para representar o PPESD considerando múltiplos períodos de planejamento, onde os erros da aproximação garantem a qualidade das soluções encontradas;

Posteriormente, o conjunto de expressões algébricas para a avaliação da confiabilidade foi reformulado para ser adicionado dentro dos modelos AC convexos para o PPESD, concluindo que:

- A avaliação da confiabilidade pode ser integrada ao PPESD usando expressões algébricas, o que não supõe um aumento nas variáveis binárias do problema, o qual resulta computacionalmente vantajoso.
- Os modelos convexos AC são uma proposta efetiva para direcionar o PPESD quando de forma conjunta podem minimizar os custos de investimento, operação e confiabilidade e sem a necessidade de conhecer com antecedência a topologia do sistema;
- Os resultados mostram a superioridade da modelagem proposta quando comparada com as propostas na literatura que se baseiam em modelos de potência DC, incapazes de representar características da rede como o balanço de potência reativa e a queda de tensão, e que como consequência podem gerar topologias ineficazes.

Por último, novos modelos matemáticos foram propostos para incorporar a capacidade de restauração dentro do PPESD por meio do dimensionamento de ramos de reserva, concluindo-se que:

- O dimensionamento de ramos de reserva abordado na literatura apenas por metaheurísticas pode ser equivalentemente representado por meio de expressões algébricas;
- O conjunto de expressões algébricas desenvolvido é adequado para fornecer uma rede malhada que opere sob diferentes condições de operação tanto em presença ou ausência de falhas no sistema;
- Os resultados computacionais prevêem sua possibilidade de extensão em modelos que considerem múltiplos períodos de planejamento.

Como trabalhos futuros, pode mencionar-se os seguintes:

- Incorporar incertezas nos parâmetros estocásticos de longo e curto prazo próprios do PPESD;

-
- Considerar a integração de fontes de energia renováveis, resposta da demanda, equipes de armazenamento e veículos elétricos para melhora da confiabilidade no PPESD;
 - Considerar a extensão da metodologia de avaliação analítica da confiabilidade para redes malhadas;
 - Propor novos modelo convexos AC para o PPESD que melhorem o desempenho computacional dos modelos cônicos e que não precisem das simplificações no cálculo das tensões da linearização por partes, tais como os métodos de linearização poliédrica;
 - Incluir dentro do PPESD o dimensionamento das chaves como resultado do processo de otimização, deixando de lado o suposto de que a rede seja totalmente automatizada.

REFERÊNCIAS

- AGHAEI, J. *et al.* Distribution expansion planning considering reliability and security of energy using modified PSO (particle swarm optimization) algorithm. *Energy*, Toronto, v. 65, p. 398–411, Feb. 2014.
- ALLAN, R.; BILLINTON, R. Probabilistic assessment of power systems. *Proceedings of the IEEE*, Piscataway, v. 88, n. 2, p. 140–162, Feb. 2000.
- ASENSIO, M. *et al.* Joint distribution network and renewable energy expansion planning considering demand response and energy storage - Part I: stochastic programming model. *IEEE Transactions on Smart Grid*, Piscataway, v. 9, n. 2, p. 655–666, Mar. 2018.
- ASENSIO, M.; MUÑOZ-DELGADO, G.; CONTRERAS, J. Bi-level approach to distribution network and renewable energy expansion planning considering demand response. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 32, n. 6, Nov. 2017.
- BANERJEE, B.; ISLAM, S. M. Reliability based optimum location of distributed generation. *International Journal Electrical Power Energy Systems*, London, v. 33, n. 8, p. 1470 – 1478, Oct. 2011.
- BARAN, M.; WU, F. Network reconfiguration in distribution systems for loss reduction and load balancing. *IEEE Transactions on Power Delivery*, Piscataway, v. 4, n. 2, p. 1401–1407, Apr. 1989.
- BILLINTON, R.; ALLAN, R. N. *Reliability evaluation of power systems*. 1. ed. New York: Springer, 1996.
- BILLINTON, R.; BILLINTON, J. E. Distribution system reliability indices. *IEEE Transactions on Power Delivery*, Piscataway, v. 4, n. 1, p. 561–568, Jan. 1989.
- BILLINTON, R.; JONNAVITHULA, S. Optimal switching device placement in radial distribution systems. *IEEE Transactions on Power Delivery*, Piscataway, v. 11, n. 3, p. 1646–1651, Jul. 1996.
- BILLINTON, R.; WANG, P. Reliability-network-equivalent approach to distribution-system-reliability evaluation. *IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, Stevenage, v. 145, n. 2, p. 149–153, Mar. 1998.
- BLANK, L.; TARQUIN, A. *Engineering Economy*. 7. ed. New York: McGraw-Hill, 2012.
- BORGES, C. L. T. An overview of reliability models and methods for distribution systems with renewable energy distributed generation. *Renewable & Sustainable Energy Reviews*, Kidlington, v. 16, n. 6, p. 4008–4015, Aug. 2012.
- BRADLEY, S. P.; HAX, A. C.; MAGNANTI, T. L. *Applied Mathematical Programming*. Reading: Addison-Wesley, 1977.
- BROWN, R. E. *Electric Power Distribution Reliability, 2nd ed.* 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2008.
- BROWN, R. E.; HANSON, A. P. Impact of two-stage service restoration on distribution reliability. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 16, n. 4, p. 624–629, Nov. 2001.

- BYRD, H.; MATTHEWMAN, S. Exergy and the city: the technology and sociology of power (failure). *Journal of Urban Technology*, Abingdon, v. 21, n. 3, p. 85–102, Sep. 2014.
- CATRINU, M.; NORDGARD, D. Integrating risk analysis and multi-criteria decision support under uncertainty in electricity distribution system asset management. *Reliability Engineering & System Safety*, London, v. 96, n. 6, p. 663 – 670, Jun. 2011.
- CELLI, G.; PILO, F. Optimal sectionalizing switches allocation in distribution networks. *IEEE Transactions on Power Delivery*, Piscataway, v. 14, n. 3, p. 1167–1172, Jul. 1999.
- CHANDRAMOHAN, S. *et al.* Operating cost minimization of a radial distribution system in a deregulated electricity market through reconfiguration using nsga method. *International Journal Electrical Power Energy Systems*, London, v. 32, n. 2, p. 126 – 132, Feb. 2010.
- CHOWDHURY, A. A.; KOVAL, D. O. Current practices and customer value-based distribution system reliability planning. *IEEE Transactions on Industry Applications*, Piscataway, v. 40, n. 5, p. 1174–1182, Sep./Oct. 2004.
- CHOWDHURY, A. A.; KOVAL, D. O. *Power distribution system reliability: practical methods and applications*. 1. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2009.
- FALAGHI, H. *et al.* DG integrated multistage distribution system expansion planning. *International Journal Electrical Power Energy Systems*, London, v. 33, n. 8, p. 1489–1497, Oct. 2011.
- FARIVAR, M.; LOW, S. H. Branch flow model: relaxations and convexification—part i. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 28, n. 3, p. 2554–2564, Aug. 2013.
- FLETCHER, R. H.; STRUNZ, K. Optimal distribution system horizon planning—Part I: formulation. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 22, n. 2, May. 2007.
- FLETCHER, R. H.; STRUNZ, K. Optimal distribution system horizon planning—Part II: application. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 22, n. 2, p. 862–870, May. 2007.
- FLOUDAS, C. A. *Nonlinear and mixed-integer optimization: fundamentals and applications*. New York: Oxford University Press, 1995.
- FOURER, R.; GAY, D. M.; KERNIGHAN, B. W. *AMPL: a modeling language for mathematical programming*. New York: Thomson, 2003.
- FRANCO, J. F. *et al.* A mixed-integer LP model for the reconfiguration of radial electric distribution systems considering distributed generation. *Electric Power Systems Research*, Amsterdam, v. 97, p. 51–60, Apr. 2013.
- FRANCO, J. F.; RIDER, M. J.; ROMERO, R. A mixed-integer quadratically-constrained programming model for the distribution system expansion planning. *International Journal Electrical Power Energy Systems*, London, v. 62, p. 265–272, Nov. 2014.
- GAMS. 2018. Disponível em <http://www.gams.com>. Acesso em: 14 de outubro de 2017.

- GANGULY, S.; SAHOO, N.; DAS, D. Mono- and multi-objective planning of electrical distribution networks using particle swarm optimization. *Applied Soft Computing*, Amsterdam, v. 11, n. 2, p. 2391 – 2405, Feb. 2011.
- GANGULY, S.; SAHOO, N.; DAS, D. Multi-objective planning of electrical distribution systems using dynamic programming. *International Journal Electrical Power Energy Systems*, London, v. 46, p. 65–78, Mar. 2013.
- GANGULY, S.; SAHOO, N. C.; DAS, D. Recent advances on power distribution system planning: a state-of-the-art survey. *Energy System*, Heidelberg, v. 4, n. 2, p. 165–193, Jan. 2013.
- GEORGILAKIS, P. S.; HATZIARGYRIOU, N. D. A review of power distribution planning in the modern power systems era: Models, methods and future research. *Electric Power Systems Research*, Amsterdam, v. 121, p. 89–100, Apr. 2015.
- GITIZADEH, M.; VAHED, A. A.; AGHAEI, J. Multistage distribution system expansion planning considering distributed generation using hybrid evolutionary algorithms. *Applied Energy*, Kidlington, v. 101, p. 655 – 666, Jan. 2013.
- GOMEZ-EXPOSITO, A.; CONEJO, A. J.; CANIZARES, C. *Electric energy systems: analysis and operation*. New York: CRC Press, 2008.
- GÖNEN, T.; RAMÍREZ-ROSADO, I. J. Review of distribution system planning models: a model for optimal multistage planning. *IEEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, Stevenage, v. 133, n. 7, p. 397–408, Nov. 1986.
- HAFFNER, S. *et al.* Multistage model for distribution expansion planning with distributed generation - Part I: problem formulation. *IEEE Transactions on Power Delivery*, Piscataway, v. 23, n. 2, p. 915–923, Apr. 2008.
- HELSETH, A. *Modelling reliability of supply and infrastructural dependency in energy distribution systems*. Thesis (Philosophiae Doctor) —Faculty of Information Technology, Mathematics and Electrical Engineering, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2008. Disponível em https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/256414/124257_FULLTEXT01.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 8 de agosto de 2018.
- HINES, P.; BALASUBRAMANIAM, K.; SANCHEZ, E. C. Cascading failures in power grids. *IEEE Potentials*, Piscataway, v. 28, n. 5, p. 24–30, Sep. 2009.
- IBM ILOG CPLEX. 2018. Disponível em <https://www.ibm.com/analytics/cplex-optimizer>. Acesso em: 14 de outubro de 2017.
- IEEE Guide for Electric Power Distribution Reliability Indices. *IEEE Std 1366-2012 (Revision of IEEE Std 1366-2003)*, Piscataway, p. 1–43, May. 2012.
- JABR, R. Radial distribution load flow using conic programming. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 21, n. 3, p. 1458–1459, Aug. 2006.
- JABR, R. A. Polyhedral formulations and loop elimination constraints for distribution network expansion planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 28, n. 2, p. 1888–1897, May. 2013. ISSN 0885-8950.

- JORDEHI, A. R. Optimisation of electric distribution systems: A review. *Renewable & Sustainable Energy Reviews*, Kidlington, v. 51, p. 1088–1100, Nov. 2015.
- KAZEMI, S. *et al.* Impacts of automatic control systems of loop restoration scheme on the distribution system reliability. *IET Generation, Transmission & Distribution*, Stevenage, v. 3, n. 10, p. 891–902, Oct. 2009.
- LAVORATO, M. *et al.* Imposing radiality constraints in distribution system optimization imposing radiality constraints in distribution system optimization. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 27, n. 1, p. 172–180, Feb. 2012.
- LAVORATO, M. *et al.* A constructive heuristic algorithm for distribution system planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 25, n. 3, p. 1734–1742, Aug. 2010.
- LÓPEZ, J. C.; LAVORATO, M.; RIDER, M. J. Optimal reconfiguration of electrical distribution systems considering reliability indices improvement. *International Journal Electrical Power Energy Systems*, London, v. 78, p. 837–845, Jun. 2016.
- LOTERO, R. C.; CONTRERAS, J. Distribution system planning with reliability. *IEEE Transactions on Power Delivery*, Piscataway, v. 26, n. 4, p. 2552–2562, Oct. 2011.
- MIRANDA, V.; RANITO, J. V.; PROENÇA, L. M. Genetic algorithms in optimal multistage distribution network planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 1927–1933, Nov. 1994.
- MIRANDA, V.; RANITO, J. V.; PROENÇA, L. M. Genetic algorithms in optimal multistage distribution network planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 1927–1933, Nov. 1994.
- MOKRYANI, G. Active distribution networks planning with integration of demand response. *Solar Energy*, Amsterdam, v. 122, p. 1362–1370, Dec. 2015.
- MUÑOZ-DELGADO, G.; CONTRERAS, J.; ARROYO, J. M. Multistage generation and network expansion planning in distribution systems considering uncertainty and reliability. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 31, n. 5, p. 3715–3728, Sep. 2016.
- MUÑOZ-DELGADO, G.; CONTRERAS, J.; ARROYO, J. M. Distribution network expansion planning with an explicit formulation for reliability assessment. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 33, n. 3, p. 2583–2596, May. 2018.
- MUÑOZ-DELGADO, G.; CONTRERAS, J.; ARROYO, J. M. Reliability assessment for distribution optimization models: a non-simulation-based linear programming approach. *IEEE Transactions on Smart Grid*, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 3048–3059, Jul. 2018.
- NAŽAR, M. S.; HAGHIFAM, M. R. Multiobjective electric distribution system expansion planning using hybrid energy hub concept. *Electric Power Systems Research*, Amsterdam, v. 79, n. 6, p. 899–911, Jun. 2009.
- NAŽAR, M. S.; HAGHIFAM, M. R.; NAŽAR, M. A scenario driven multiobjective primary–secondary distribution system expansion planning algorithm in the presence of wholesale–retail market. *International Journal Electrical Power Energy Systems*, London, v. 40, n. 1, p. 29 – 45, Jan. 2012.

- NEMHAUSER, G. L.; WOLSEY, L. A. *Integer and combinatorial optimization*. New York: Wiley Inter-Science, 1999.
- NETO, N. K. *et al.* Financial impact of penalties applied to brazilian energy distribution companies by exceeded of the limits of performance of power supply continuity. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE EUROPEAN ENERGY MARKET (EEM), 8., 2011, Zagreb. *Proceedings of the ...* Zagreb: IEEE, 2011. p. 520–525.
- PEREIRA-JUNIOR, B. R. *et al.* Multiobjective multistage distribution system planning using tabu search. *IET Generation, Transmission & Distribution*, Stevenage, v. 8, n. 1, p. 35–45, Oct. 2014.
- POPOVIĆ, D. *et al.* Placement of distributed generators and reclosers for distribution network security and reliability. *International Journal Electrical Power Energy Systems*, London, v. 27, n. 5, p. 398 – 408, May. 2005.
- POPOVIĆ Z.N.; KERLETA, V. D.; POPOVIĆ, D. Hybrid simulated annealing and mixed integer linear programming algorithm for optimal planning of radial distribution networks with distributed generation. *Electric Power Systems Research*, Amsterdam, v. 108, p. 211–222, Mar. 2014.
- PREGELJ, A.; BEGOVIC, M.; ROHATGI, A. Recloser allocation for improved reliability of dg-enhanced distribution networks. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 21, n. 3, p. 1442–1449, Aug. 2006.
- RAMÍREZ-ROSADO, I. J.; BERNAL-AGUSTÍN, J. L. Reliability and costs optimization for distribution networks expansion using an evolutionary algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 16, n. 1, p. 111–118, Feb. 2001.
- RAMÍREZ-ROSADO, I. J.; DOMINGUEZ-NAVARRO, J. A. Possibilistic model based on fuzzy sets for the multiobjective optimal planning of electric power distribution networks. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 19, n. 4, p. 1801–1810, Nov. 2004.
- RAMÍREZ-ROSADO, I. J.; DOMINGUEZ-NAVARRO, J. A. New multiobjective tabu search algorithm for fuzzy optimal planning of power distribution systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 21, n. 1, p. 224–233, Feb. 2006.
- ROMERO, R. *et al.* A new mathematical model for the restoration problem in balanced radial distribution systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 31, n. 2, p. 1259–1268, Mar. 2016.
- SAHOO, N.; GANGULY, S.; DAS, D. Multi-objective planning of electrical distribution systems incorporating sectionalizing switches and tie-lines using particle swarm optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, Amsterdam, v. 3, p. 15–32, Mar. 2012.
- SALEHI, J.; HAGHIFAM, M.-R. Long term distribution network planning considering urbanity uncertainties. *International Journal Electrical Power Energy Systems*, London, v. 42, n. 1, p. 321–333, Nov. 2012.
- SAMPER, M. E.; VARGAS, A. Investment decisions in distribution networks under uncertainty with distributed generation–Part II: Implementation and results. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 28, n. 3, p. 2341–2351, Aug. 2013.

- SANTOS, S. F. *et al.* Novel multi-stage stochastic dg investment planning with recourse. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, Piscataway, v. 8, n. 1, p. 164–178, Jan. 2017.
- SANTOS, S. F. *et al.* New multistage and stochastic mathematical model for maximizing res hosting capacity part i: problem formulation. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, Piscataway, v. 8, n. 1, p. 304–319, Jan. 2017.
- SEDGHI, M.; AHMADIAN, A.; ALIAKBAR-GOLKAR, M. Optimal storage planning in active distribution network considering uncertainty of wind power distributed generation. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 31, n. 1, p. 304–316, Jan. 2016. ISSN 0885-8950.
- SEDGHI, M.; ALIAKBAR-GOLKAR, M.; HAGHIFAM, M.-R. Distribution network expansion considering distributed generation and storage units using modified pso algorithm. *International Journal Electrical Power Energy Systems*, London, v. 52, p. 221 – 230, Nov. 2013.
- SILVA, L. G. da; PEREIRA, R. A.; MANTOVANI, J. R. Allocation of protective devices in distribution circuits using nonlinear programming models and genetic algorithms. *Electric Power Systems Research*, Amsterdam, v. 69, n. 1, p. 77–84, Jan. 2004.
- SILVA, L. G. W. da *et al.* Optimised placement of control and protective devices in electric distribution systems through reactive tabu search algorithm. *Electric Power Systems Research*, Amsterdam, v. 78, n. 3, p. 372 – 381, Mar. 2008.
- SOUZA, J. de; RIDER, M. J.; MANTOVANI, J. R. S. Planning of distribution systems using mixed-integer linear programming models considering network reliability. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Heidelberg, v. 26, n. 2, p. 170–179, Apr. 2015.
- SPANISH MINISTRY OF INDUSTRY ENERGY AND TOURISM. Royal decree 1048/2013: metodología para el cálculo de la retribución de la actividad de distribución de energía eléctrica. Dec. 2013. Disponível em https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2015-13782. Acesso em: 30 de setembro de 2018.
- SU, C. T.; LEE, C. S. Network reconfiguration of distribution systems using improved mixed-integer hybrid differential evolution. *IEEE Transactions on Power Delivery*, Piscataway, v. 18, n. 3, p. 1022–1027, Jul. 2003.
- TABARES, A. *Planejamento da expansão das redes de distribuição considerando tópicos de confiabilidade*. 2018. Disponível em https://1drv.ms/f/s!AhomtJciZG8_a7gba8vatAKmzyc. Acesso em: 20 de novembro de 2018.
- TABARES, A. *et al.* Multistage long-term expansion planning of electrical distribution systems considering multiple alternatives. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 31, n. 3, p. 1900–1914, May 2016.
- TABARES, A. *et al.* An enhanced algebraic approach for the analytical reliability assessment of distribution systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, 2019. In press.
- TAYLOR, J. A.; HOVER, F. S. Convex models of distribution system reconfiguration. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 27, n. 3, p. 1407–1413, Aug. 2012.

- TENG, J.-H.; LU, C.-N. Feeder-switch relocation for customer interruption cost minimization. *IEEE Transactions on Power Delivery*, Piscataway, v. 17, n. 1, p. 254–259, Jan. 2002.
- TIPPACHON, W.; RERKPREEDAPONG, D. Multiobjective optimal placement of switches and protective devices in electric power distribution systems using ant colony optimization. *Electric Power Systems Research*, Amsterdam, v. 79, n. 7, p. 1171–1178, Jul. 2009.
- WILLIS, H. L. *Power distribution planning reference book*. 2. ed. New York: Marcel Dekker, 2004.
- WIRFS-BROCK, J. *Power outages on the rise across the U.S.* 2014. Disponível em <http://insideenergy.org/2014/08/18/power-outages-on-the-rise-across-the-u-s/>. Acesso em: 14 de novembro de 2017.
- WOLSEY, L. *Integer programming*. New York: Wiley Inter-Science, 1998.
- YANG, G. Y.; DONG, Z. Y.; WONG, K. P. A modified differential evolution algorithm with fitness sharing for power system planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 23, n. 2, p. 514–522, May. 2008.

Anexo A – ARTIGOS PUBLICADOS EM REVISTAS

1. **TABARES, A.**, FRANCO, J.F., LAVORATO, M., RIDER, M.J. Multistage long-term expansion planning of electrical distribution systems considering multiple alternatives. *IEEE Trans. Power Syst.*, v. 31, n. 3, p.1900–1914, May. 2016. (Pág. 123)
2. BAÑOL, N., **TABARES, A.**, FRANCO, J.F., LAVORATO, M., ROMERO, R. Robust joint expansion planning of electrical distribution systems and EV charging stations. *IEEE Trans. Sustain. Energy*, v. 9, n. 2, p.884-894, Apr. 2018. (Pág. 138)

Multistage Long-Term Expansion Planning of Electrical Distribution Systems Considering Multiple Alternatives

Alejandra Tabares, John F. Franco, *Member, IEEE*, Marina Lavorato, *Member, IEEE*, and Marcos J. Rider, *Member, IEEE*

Abstract—This paper presents a new mixed-integer linear programming (MILP) model to solve the multistage long-term expansion planning problem of electrical distribution systems (EDSs) considering the following alternatives: increasing the capacity of existing substations, constructing new substations, allocating capacitor banks and/or voltage regulators, constructing and/or reinforcing circuits, and modifying, if necessary, the system's topology. The aim is to minimize the investment and operation costs of the EDS over an established planning horizon. The proposed model uses a linearization technique and an approximation for transforming the original problem into an MILP model. The MILP model guarantees convergence to optimality by using existing classical optimization tools. In order to verify the efficiency of the proposed methodology, a 24-node test system was employed.

Index Terms—Distribution system expansion planning, mixed-integer linear programming, multistage long-term planning.

I. NOMENCLATURE

THE notation used throughout this paper is reproduced below for quick reference.

A. Sets

- Ω_a Set of conductor types.
- Ω_b Set of nodes.
- Ω_c Set of alternatives for substations.
- Ω_g Set of alternatives for distributed generations.
- Ω_{bp} Set of transfer nodes.
- Ω_s Set of substation nodes.

- Ω_l Set of branches.
- Ω_u Set of stages.

B. Constants

- $\bar{\Delta}_i^S$ Upper bound for each block of $\Delta_{i,y,u}^{Ps}$ and $\Delta_{i,y,u}^{Qs}$.
- $\bar{\Delta}_i^G$ Upper bound for each block of $\Delta_{i,j,y,u}^{Pg}$ and $\Delta_{i,j,y,u}^{Qg}$.
- Y Number of blocks in the piecewise linearization.
- ϕ_l Load factor.
- ϕ_s Loss factor.
- τ Interest rate.
- α Number of hours in one year (8760 h).
- \bar{b} Upper bound for the variable $b_{ij,u}$.
- c^{cb} Installation cost of the capacitors (US\$).
- $c_{i,c}^s$ Substation fixed cost at node i using the alternative c (US\$).
- $c_{ij,a}^f$ Construction cost of circuit ij using conductor type a (US\$).
- c^e Energy cost of substations (US\$/kWh)
- c_g^{edg} Energy cost of distributed generator considering the alternative g (US\$/kWh).
- c_g^{dg} Installation cost of distributed generator considering the alternative g (US\$).
- c^{mod} Cost of each standard capacitor unit (US\$).
- c^{vr} Installation cost of the voltage regulator (US\$).
- $c_{i,c}^r$ Repowering cost of the substation at node i using the alternative c (US\$).
- c_i^v Operation cost of the substation at node i (US\$/ $(\text{kW})^2/\text{h}$).
- \bar{I}_a Maximum current flow magnitude of conductor type a (A).
- $F_{C_g^{dg}}$ Power factor for the distributed generator considering the alternative g .
- K Number of years in each stage.

Manuscript received September 27, 2014; revised February 08, 2015; accepted June 20, 2015. Date of publication July 16, 2015; date of current version April 15, 2016. This work was supported by the Brazilian institutions CNPq and FAPESP. Paper no. TPWRS-01328-2014.

A. Tabares, J. F. Franco, and M. Lavorato are with the Departamento de Engenharia Elétrica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP – Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira – SP, Brazil (e-mail: tabares.1989@gmail.com; jffranco@gmail.com; marina@dee.feis.unesp.br).

M. J. Rider is with the Department of Systems and Energy, UNICAMP – University of Campinas, Campinas – SP, Brazil. (e-mail: mj rider@dsee.fee.unicamp.br).

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TPWRS.2015.2448942

l_{ij}	Length of circuit ij (km).	$\beta_{ij,u}^{yr}$	Binary variable associated with the allocation of a voltage regulator in circuit ij at stage u .
m_y^G	Slope of the y th block of the piecewise linearization for the power flow of a circuit.	$\varepsilon_{i,u}$	Binary variable associated with the use of transfer node i at stage u .
m_y^S	Slope of the y th block of the piecewise linearization for the generated power of a substation.	$\delta_{ij,a,u}$	Binary variable associated with constructing/reconducting circuit ij using conductor type a at stage u .
\overline{G}	Maximum number of distributed generators that can be installed in the system.	$\sigma_{i,c,u}$	Binary variable associated with constructing a substation at node i using the alternative c at stage u .
\overline{M}	Maximum number of capacitor banks that can be installed in the system.	$r_{i,c,u}$	Binary variable associated with repowering a substation at node i using the alternative c at stage u .
\overline{N}	Maximum number of standard capacitor units that can be installed at a node of the system.	$\varpi_{i,u}$	Integer number of standard capacitor units installed at node i at stage u .
\overline{O}	Maximum number of voltage regulators units that can be added to the system.	$\psi_{i,u}$	Integer number of standard capacitor units operating at node i at stage u .
$P_{i,u}^D$	Active power demand at node i at stage u (kW).	$I_{ij,a,u}^{sqr}$	Square of the current flow magnitude in circuit ij associated with conductor type a at stage u .
$Q_{i,u}^D$	Reactive power demand at node i at stage u (kVA).	$\widehat{I}_{ij,u}^{sqr}$	Square of the current flow magnitude in circuit ij at stage u .
Q_{bc}^{esp}	Reactive power of each standard capacitor unit (kVA).	$P_{i,g,u}^{Dg}$	Active power by distributed generation at node i at stage u considering the alternative g (kW).
$R_{ij}^{\%}$	Regulator range of voltage regulators.	$P_{i,u}^S$	Active power by substation at node i at stage u (kW).
R_a	Resistance per length of conductor type a (Ω/km).	$P_{ij,a,u}$	Active power flow in circuit ij associated with conductor type a at stage u (kW).
$Rg'_{i,c}$	Apparent power capacity for the repowering of the substation considering the alternative c at node i (kVA).	$\widehat{P}_{ij,u}$	Active power flow in circuit ij at stage u (kW).
$Sg'_{i,c}$	Apparent power capacity for a new substation considering the alternative c at node i (kVA).	$P_{ij,u}^+$	Auxiliary variable used in the calculation of $ \widehat{P}_{ij,u} $ (kW).
S_g^{DG}	Apparent power capacity for a distributed generator considering the alternative g at node i (kVA).	$P_{ij,u}^-$	Auxiliary variable used in the calculation of $ \widehat{P}_{ij,u} $ (kW).
\underline{V}	Lower voltage magnitude limit (kV).	$Q_{i,g,u}^{DG}$	Reactive power from distributed generation at node i at stage u considering the alternative g (kVAr).
\overline{V}	Upper voltage magnitude limit (kV).	$Q_{i,u}^S$	Reactive power from substation at node i at stage u (kVAr).
X_a	Reactance per length of conductor type a (Ω/km).	$Q_{ij,a,u}$	Reactive power flow in circuit ij associated with conductor type a at stage u (kVAr).
Z_a	Impedance per length of conductor type a (Ω/km).	$\widehat{Q}_{ij,u}$	Reactive power flow in circuit ij at stage u (kVAr).
C. Variables			
$\Delta_{ij,y,u}^{Pg}$	Discretization variable of the y th block for $ \widehat{P}_{ij,u} $.	$Q_{ij,u}^+$	Auxiliary variable used in the calculation of $ \widehat{Q}_{ij,u} $ (kVAr).
$\Delta_{i,y,u}^{Ps}$	Discretization variable of the y th block for $P_{i,u}^S$.	$Q_{ij,u}^-$	Auxiliary variable used in the calculation of $ \widehat{Q}_{ij,u} $ (kVAr).
$\Delta_{ij,y,u}^{Qg}$	Discretization variable of the y th block for $ \widehat{Q}_{ij,u} $.	$Sg_{i,u}^{sqr}$	Square of the apparent power supplied by substation at node i at stage u (kVA).
$\Delta_{i,y,u}^{Qs}$	Discretization variable of the y th block for $Q_{i,u}^S$.	$V_{i,u}^{sqr}$	Square of the voltage magnitude at node i at stage u .
$\beta_{i,u}^{cb}$	Binary variable associated with the allocation of a capacitor bank at node i at stage u .		
$\beta_{i,g,u}^{dg}$	Binary variable associated with the allocation of a distributed generator at node i considering the alternative g at stage u .		
$\alpha_{ij,u}^{vr}$	Binary variable associated with the operation of a voltage regulator in circuit ij at stage u .		

$\tilde{V}_{i,u}^{sqr}$	Square of the not regulated voltage magnitude at node i at stage u .
$y_{ij,u}^+$	Binary variable associated with the forward direction of circuit ij at stage u .
$y_{ij,u}^-$	Binary variable associated with the backward direction of circuit ij at stage u .
$w_{i,c,u}$	Binary variable that indicates whether the substation at node i , considering the alternative c , is active at stage u .
$z_{ij,a,u}$	Binary variable associated with operating circuit ij using conductor type a at stage u .
$b_{ij,u}$	Variable used in the calculation of the voltage magnitude drop of circuit ij at stage u .

II. INTRODUCTION

THE main objective of the electrical distribution system (EDS) is to provide reliable service to consumers, while ensuring the quality of the power supply at minimum cost. Increased demand on the system, along with the installation of new loads, requires utilities to expand their EDSs in order to satisfy this new demand. Thus, the purpose of the distribution system expansion planning (DSEP) problem is to develop strategies to fulfill the new demand, while maintaining the safe operation of the EDS. In the DSEP problem, multiple objective functions must be considered: the cost of installing new equipment, the operating costs of the substations, the reliability of the distribution system, and active power losses. Over the years, researchers have contributed significantly to solving the DSEP problem using various mathematical models and solution techniques [1].

If the economic and physical characteristics of the DSEP problem are considered realistically, this problem becomes a large-scale mixed-integer nonlinear programming (MINLP) problem. The DSEP problem has been solved using different techniques, such as heuristic algorithms, classical optimization techniques (including linear, nonlinear, and integer programming), and, in recent years, metaheuristic algorithms [1]. These solution techniques have demonstrated different levels of performance depending on the nature of the mathematical model and the size of the EDS [1].

There are two types of DSEP models: static and multistage [2]. In the static approach, optimal planning is aimed at accommodating the demand projected for the end of the planning period. The multistage approach defines not only the ideal location, type, and capacity of the investments, but also the most appropriate time to make such investments. In this way, the continuous growth of the demand is always absorbed by the EDS in an optimal way. This approach looks at the expansion of the EDS over several stages, which represents the natural course of an expansion problem. Due to the coupling between the various stages, it is much more difficult to formulate and solve the multistage DSEP problem. The solution achieved for the multistage

DSEP, however, is usually better than the one found using the static approach.

The multistage DSEP problem is an MINLP problem that involves the optimization of binary investment variables, which represent the construction and/or allocation of new equipment, and continuous variables, which represent the steady-state operation of the EDS [2]. One reason for not using the multistage planning approach is the added complexity of the mathematical model. However, current research shows that it is entirely feasible to work with the multistage model using available optimization techniques. In addition, in order to fulfill the voltage limit constraint, it is increasingly important to incorporate additional expansion alternatives, such as the allocation of capacitors and voltage regulator banks, into long-term planning. In a basic DSEP model, the solution for low voltages is to use conductors with lower impedance, but this leads to an increase in the cost of the expansion plan. By contrast, the formulation proposed in this paper considers the allocation of capacitor banks, voltage regulators, and/or distributed generation (DG) as alternatives that can be used to satisfy the voltage constraints with a lower investment cost.

Within this context, [3] developed a pseudo-dynamic method to solve the multistage DSEP problem in which power losses are represented using linear sections. A multistage model for the DSEP problem, including distributed generation, was presented in [4]. The objective function in [4] was the cost of the installation, operation, and maintenance of the EDS, along with the cost of distributed generation. The paper presented an extension of the linear disjunctive formulation, representing the inclusion, exclusion, and replacement of circuits, and a generalization of constraints related to the creation of new paths, which could be applied in more complex topologies. The authors in [4] also guaranteed that it would be possible to find an optimal solution for the resulting mixed-integer linear programming (MILP) model by using a branch and bound algorithm. In [5], an MILP model for the DSEP problem was proposed in order to minimize the costs of investment, maintenance, and power losses of the EDS. In order to choose the solution with the lowest cost, a pool of solutions was obtained, and the cost of interruptions, due to failures in the circuits, was determined for each solution. Multistage models for the DSEP problem were also presented in [6]–[11].

In [12], the authors presented an MINLP model for the static DSEP problem, which could be solved using classical optimization techniques. The model also considered the possibility of using transfer nodes to define the final system's topology. Due to its significant computational complexity, the model was not able to solve large-scale planning problems in a reasonable amount of time. [13] presented a conic programming model for the DSEP problem, analyzing two formulations: the single-circuit and the parallel-circuit equivalent. In addition, constraints to eliminate loops were proposed with the aim of obtaining a tight formulation and reducing the computational effort needed to solve the DSEP problem. The authors in [14] proposed a quadratically constrained model that considered the construction/ reinforcement of substations, the construction/reconducting of circuits, the allocation of capacitor banks, and radial topology modification. The formulation proposed in

[14] used voltage magnitudes and power flows to represent the steady-state operation of the EDS, in contrast to [13] in which new variables were introduced.

Furthermore, the DSEP problem has been solved through heuristic algorithms, which have produced good solutions with relatively low computational effort. Popular approaches from this category include the branch exchange technique that was used in [15] and [16], and the constructive heuristic algorithm that was implemented in [17]. Reference [17] used a local improvement phase and a branching technique to improve the quality of the solution. In order to enhance the performance of heuristic methods, in recent years, numerous metaheuristic algorithms have been proposed to solve the DSEP problem. An evolutionary algorithm was presented in [18]. In [6] and [19], a genetic algorithm was applied to the DSEP problem. A method based on ant colony systems was developed in [20], and simulated annealing was conducted in [21] and [22].

In [23], an expert system based on neural networks was used to transform the original DSEP problem into a directed graph planning problem, whereas [24] used a particle swarm algorithm. Although metaheuristics are robust, flexible, and achieve good results, they also present many problems, such as high computational demand, the need for adjusting and fine-tuning the parameters, and the definition of a stop criterion. In addition, they cannot guarantee convergence to a global optimum, nor can they indicate the quality of the final solution, because they do not provide a distance indicator to the optimal solution.

Some papers about the DSEP problem have independently addressed the construction of circuits and substations [5], [6], [8], [10], [13], [15]–[20], [23], and [24]; the allocation of capacitor banks [25]–[28]; the allocation of voltage regulators [29]–[31]; and the joint allocation of capacitor banks and voltage regulators [32]–[35]. The construction of circuits and substations, and the installation of capacitor banks were considered in [14]. The authors demonstrated that better solutions could be found by including the allocation of fixed capacitor banks in the DSEP problem, thereby reducing power losses and investments in circuits.

Currently, alternative options for expanding the system, such as DG, can be implemented as possible solutions in DSEP. Relevant works addressing the expansion planning of distribution networks in the presence of distributed generation are found in [4], [9], and [12]. However, in these works, the location and timing of the DG were considered to be parameters, rather than variables of the optimization process. Relevant approaches are also found in [36]–[39]. In [36] a MINLP model for the DSEP problem was proposed and solved using commercially available software; due to the nonlinear formulation, global optimality was not guaranteed. In [37], the model described in [36] was extended and solved using a genetic algorithm. Finally, another evolution-inspired heuristic, namely an evolutionary particle swarm optimization, was applied in [38] and [39] to solve the MINLP formulation for the DSEP problem. The methods in [36]–[39] neither achieve global optimality nor provide a measure of the distance to the optimum. In addition, in [36]–[39], investment decisions associated with the distribution network are exclusively related to the reinforcement of feeders and substations, and the construction of new distribution assets is disre-

garded. Moreover, the models described in [36]–[39] only consider DG comprised of conventional units. Reference [11] presented an approach to expand the distribution network and the DG simultaneously. Investment decisions considered both the reinforcement of assets and the installation of new equipment. This modeling aspect required the incorporation of specific constraints in order to impose the radial operation on the resulting network, as per [12]. DG was comprised of not only conventional units, but also wind power generation. Appendix A shows a summary of the technical characteristics of the references cited herein.

According to the authors' knowledge, in the specialized literature, no works have taken into account the construction and/or installation of the multiple expansion alternatives in the solution of the multistage long-term expansion planning problem of EDSs. The consideration of multiple alternatives in the DSEP problem has the advantage of assessing which equipment is the most appropriate to be installed in the EDS. In this paper, an MINLP model for the multistage long-term DSEP problem is presented. This formulation considers the expansion and/or reinforcement of the substations and circuits; the allocation of capacitor banks, voltage regulators, and/or distributed generation; and a change to the system's topology. A linearization technique and an approximation are used to obtain an MILP model that can be solved using classical optimization techniques, guaranteeing the optimal solution. The planning horizon is divided into several stages, and the proposed optimization model indicates the best time at which to make the investments. A 24-node test system was used to demonstrate the efficiency of the proposed method. The main contributions of this work are given here.

- 1) A new model for the DSEP problem that takes into account the construction of new substations, the increase of the capacity of existing substations, the allocation of capacitor banks and voltage regulators, the construction or reinforcement of circuits, and a change to the system's topology.
- 2) An MILP formulation for the multistage DSEP problem that can be solved using classical optimization techniques to obtain its optimal solution.

III. EXPANSION PLANNING PROBLEM OF EDSs

A. Steady-State Operation of a Radial Distribution System

The equations used to represent the operation of a radial EDS are based on [14]. In these equations, the variables have been changed: $\tilde{V}_{j,u}^{sqr} = \tilde{V}_{j,u}^2$ and $I_{ij,a,u}^{sqr} = I_{ij,a,u}^2$, in order to obtain a suitable MILP model. The model is applied under the following assumptions: 1) the EDS is operating in steady-state; 2) the loads are modeled as a constant power type; and 3) the EDS is balanced and represented by a single-phase equivalent:

$$\begin{aligned} \sum_{ki \in \Omega_l} \sum_{a \in \Omega_a} P_{ki,a,u} - \sum_{ij \in \Omega_l} \sum_{a \in \Omega_a} (P_{ij,a,u} + R_a I_{ij,a,u}^{sqr}) \\ + P_{i,u}^S + \sum_{g \in \Omega_g} P_{i,g,u}^{DG} \\ = P_{i,u}^D \quad \forall i \in \Omega_b, u \in \Omega_u \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{ki \in \Omega_l} \sum_{a \in \Omega_a} Q_{ki,a,u} - \sum_{ij \in \Omega_l} \sum_{a \in \Omega_a} (Q_{ij,a,u} + X_a l_{ij} I_{ij,a,u}^{sqr}) + \psi_{i,u} Q_{bc}^{esp} + Q_{i,u}^S + \sum_{g \in \Omega_g} Q_{i,g,u}^{DG} = Q_{i,u}^D \quad \forall i \in \Omega_b, u \in \Omega_u \quad (2)$$

$$\tilde{V}_{j,u}^{sqr} \hat{I}_{ij,u}^{sqr} = \hat{P}_{ij,u}^2 + \hat{Q}_{ij,u}^2 \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (3)$$

$$V_{i,u}^{sqr} - \tilde{V}_{j,u}^{sqr} = \sum_{a \in \Omega_a} [2(R_a P_{ij,a,u} + X_a Q_{ij,a,u}) l_{ij} + Z_a^2 l_{ij}^2 I_{ij,a,u}^{sqr}] + b_{ij,u} \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (4)$$

$$\hat{I}_{ij,u}^{sqr} = \sum_{a \in \Omega_a} I_{ij,a,u}^{sqr} \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (5)$$

$$\hat{P}_{ij,u} = \sum_{a \in \Omega_a} P_{ij,a,u} \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (6)$$

$$\hat{Q}_{ij,u} = \sum_{a \in \Omega_a} Q_{ij,a,u} \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u. \quad (7)$$

Equations (1) and (2) represent the real and reactive power flow balance in each node. Equation (3) establishes the relationship between the real and reactive power flows of a circuit, the square of the voltage magnitude at the end of the circuit, and the square of the current flow magnitude of the circuit. Equation (4) calculates the voltage drop in the circuits. Since the real and reactive power flows ($P_{ij,a,u}$ and $Q_{ij,a,u}$) and current magnitudes ($I_{ij,a,u}^{sqr}$) are associated with the selection of conductor type a , and (3) is written in terms of the square of the total current flow magnitudes and the total real and reactive power flows of circuit ij , which are calculated using (5)–(7).

B. Mathematical Modeling of Voltage Regulators, Capacitor Banks, and Distributed Generation

For the allocation of voltage regulators, it is assumed that all voltage regulators (VRs) have the same regulator range, as well as the same number of tap steps. Taking into account the multi-stage long-term nature of the DSEP problem, the tap position of the VRs can be calculated approximately. So, in this work, the tap position of the VRs is assumed to be a continuous variable. Constraints

$$\left(1 - R_{ij}^{\%}\right)^2 \tilde{V}_{j,u}^{sqr} \leq V_{j,u}^{sqr} \leq \left(1 + R_{ij}^{\%}\right)^2 \tilde{V}_{j,u}^{sqr} \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (8)$$

$$V_{j,u}^{sqr} - \tilde{V}_{j,u}^{sqr} \leq \left| \bar{V}^2 - \underline{V}^2 \right| \alpha_{ij,u}^{vr} \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (9)$$

represent these assumptions. In addition, VRs can only operate after their allocation, as shown in

$$\alpha_{ij,u}^{vr} \leq \sum_{k=1}^u \beta_{ij,k}^{vr} \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u. \quad (10)$$

Meanwhile, the following equation limits the number of units that can be allocated in the EDS over the planning horizon:

$$\sum_{u \in \Omega_u} \sum_{ij \in \Omega_l} \beta_{ij,u}^{vr} \leq \bar{O}. \quad (11)$$

The allocation of capacitor banks (CBs) is formulated according to [32]. The allocation of a CB has two associated costs:

1) a fixed cost related to the decision to allocate a capacitor at a node of the EDS, as defined by variable $\beta_{i,u}^{cb}$ and corresponding to the structure, protection, and other installation costs; and (b) a cost that depends on the number of modules installed, as defined by the variable $\varpi_{i,u}$. Constraint:

$$\varpi_{i,u} \leq \bar{N} \sum_{k=1}^u \beta_{i,k}^{cb} \quad \forall i \in \Omega_b, u \in \Omega_u \quad (12)$$

establishes that the installation of standard capacitor units at a given stage is possible only if the decision to allocate capacitors at the node in question has already been made in that or any previous stage. Constraint

$$\sum_{u \in \Omega_u} \varpi_{i,u} \leq \bar{N} \quad \forall i \in \Omega_b \quad (13)$$

limits the number of modules installed in a node according to the maximum number allowed and the prior allocation of equipment, while

$$\psi_{i,u} \leq \sum_{k=1}^u \varpi_{i,k} \quad \forall i \in \Omega_b, u \in \Omega_u \quad (14)$$

limits the number of modules operating at every demand level so that they do not exceed the number of modules already installed. No more than one CB can be allocated at each node

$$\sum_{u \in \Omega_u} \beta_{i,u}^{cb} \leq 1 \quad \forall i \in \Omega_b \quad (15)$$

while the maximum number of CBs installed in the EDS is limited by

$$\sum_{u \in \Omega_u} \sum_{i \in \Omega_b} \beta_{i,u}^{cb} \leq \bar{M}. \quad (16)$$

It is assumed that in the planning of the distribution system, investment decisions about new distributed generators can be made. Constraints

$$0 \leq P_{i,g,u}^{DG} \leq S_g^{DG} F C_g^{dg} \beta_{i,g,u}^{dg} \quad \forall i \in \Omega_b, g \in \Omega_g, u \in \Omega_u \quad (17)$$

$$\left| Q_{i,g,u}^{gd} \right| \leq S_g^{DG} \sin(\arccos F C_g^{dg}) \beta_{i,g,u}^{dg} \quad \forall i \in \Omega_b, g \in \Omega_g, u \in \Omega_u \quad (18)$$

respectively limit the active and reactive power that can be generated by DG. Constraint

$$\sum_{g \in \Omega_g} \beta_{i,g,u}^{dg} \leq 1 \quad \forall i \in \Omega_b, u \in \Omega_u \quad (19)$$

guarantees that the model can only choose one alternative of equipment to be allocated, while

$$\sum_{u \in \Omega_u} \sum_{g \in \Omega_g} \beta_{i,g,u}^{dg} \leq 1 \quad \forall i \in \Omega_b \quad (20)$$

limits the number of DGs allocated at each node to one. Constraint

$$\sum_{u \in \Omega_u} \sum_{i \in \Omega_b} \sum_{g \in \Omega_g} \beta_{i,g,u}^{dg} \leq \bar{G} \quad (21)$$

limits the total number of DGs installed in the system over the planning horizon.

C. Mixed-Integer Non-Linear Programming Model for the DSEP Problem

An MINLP formulation to solve the DSEP problem is developed in this section. The equations used in this model are based on the formulations presented in [4], [5], [12], and [14].

1) *Objective Function*: The objective function (30) considers the investment and operation costs, and is based on [17]. The first part is the cost associated with the investment, and the second part corresponds to the costs associated with the active power losses and operating costs. The function $f(\tau, K) = 1 - (1 + \tau)^{-K}/\tau$ in (27) and (29) calculates the present value of an annualized cost that has a duration of K years in terms of interest rate τ .

Investments in circuits (IC):

$$\sum_{ij \in \Omega_l} \sum_{a \in \Omega_a} c_{ij,a}^f \delta_{ij,a,u} l_{ij}. \quad (22)$$

Investments in substations (IS):

$$\sum_{i \in \Omega_s} \sum_{c \in \Omega_c} (c_{i,c}^s \sigma_{i,c,u} + c_{i,c}^r r_{i,c,u}). \quad (23)$$

Investments in voltage regulators (IVR):

$$\sum_{ij \in \Omega_l} c^{vr} \beta_{ij,u}^{vr}. \quad (24)$$

Investments in capacitor banks (ICB):

$$\sum_{i \in \Omega_s} (c^{cb} \beta_{i,u}^{cb} + c^{mod} \varpi_{i,u}). \quad (25)$$

Investments in distributed generation (IDG):

$$\sum_{i \in \Omega_s} \sum_{g \in \Omega_g} c_g^{dg} \beta_{i,g,u}^{dg}. \quad (26)$$

Production costs of electricity from substations (CES):

$$\sum_{i \in \Omega_s} \alpha \phi_l c^e P_{i,u}^{Sf} f(\tau, K). \quad (27)$$

Production costs of electricity from DG (CEDG):

$$\sum_{i \in \Omega_s} \sum_{g \in \Omega_g} \alpha \phi_l c_g^{edg} P_{i,g,u}^{DG} f(\tau, K). \quad (28)$$

Operating costs of substations (OS):

$$\sum_{i \in \Omega_s} \alpha \phi_s c_i^v S g_{i,u}^{sqr} f(\tau, K). \quad (29)$$

Thus, the objective function

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{u \in \Omega_u} [IC + IS + IVR + ICB + IDG + CES \\ + CEDG + OS](1 + \tau)^{-(u-1)K} \end{aligned} \quad (30)$$

corresponds with the sum of the terms related to the investments in circuits, substations, voltage regulators, and capacitor banks,

as well as the terms associated with the cost of power losses in the circuits and the operating cost of the substations.

2) *Constraints*: The constraints related to the investment and operation variables along the planning horizon are represented by

$$\sum_{a \in \Omega_a} \delta_{ij,a,u} \leq 1 \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (31)$$

$$\sum_{u \in \Omega_u} \delta_{ij,a,u} \leq 1 \quad \forall ij \in \Omega_l, a \in \Omega_a \quad (32)$$

$$z_{ij,a,u} \leq \sum_{h=1}^u \delta_{ij,a,h} \quad \forall ij \in \Omega_l, a \in \Omega_a, u \in \Omega_u \quad (33)$$

$$\sum_{c \in \Omega_c} \sigma_{i,c,u} \leq 1 \quad \forall i \in \Omega_s, u \in \Omega_u \quad (34)$$

$$\sum_{c \in \Omega_c} r_{i,c,u} \leq 1 \quad \forall i \in \Omega_s, u \in \Omega_u \quad (35)$$

$$\sum_{u \in \Omega_u} \sum_{c \in \Omega_c} \sigma_{i,c,u} \leq 1 \quad \forall i \in \Omega_s \quad (36)$$

$$\sum_{u \in \Omega_u} \sum_{c \in \Omega_c} r_{i,c,u} \leq 1 \quad \forall i \in \Omega_s \quad (37)$$

$$w_{i,c,u} \leq \sum_{h=1}^u \sigma_{i,c,h} \quad \forall i \in \Omega_s, c \in \Omega_c, u \in \Omega_u \quad (38)$$

$$r_{i,c,u} \leq \sum_{h=1}^u \sigma_{i,c,h} \quad \forall i \in \Omega_s, c \in \Omega_c, u \in \Omega_u. \quad (39)$$

These constraints are adapted from [3]–[5]. The operation state of a circuit at each stage is represented by two binary variables in order to improve the performance of the solution

$$\sum_{a \in \Omega_a} z_{ij,a,u} = y_{ij,u}^+ + y_{ij,u}^- \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (40)$$

$$y_{ij,u}^+ + y_{ij,u}^- \leq 1 \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (41)$$

as proposed in [40] to solve the reconfiguration problem of EDSs.

Constraints

$$\sum_{ij \in \Omega_l} (y_{ij,u}^+ + y_{ij,u}^-) = |\Omega_b| - |\Omega_s| - \sum_{i \in \Omega_{bp}} \varepsilon_{i,u} \quad \forall u \in \Omega_u \quad (42)$$

$$\sum_{ij \in \Omega_l} (y_{ij,u}^+) + \sum_{ki \in \Omega_l} (y_{ki,u}^-) \geq 2\varepsilon_{i,u} \quad \forall i \in \Omega_{bp}, u \in \Omega_u \quad (43)$$

$$y_{ij,u}^+ + y_{ij,u}^- \leq \varepsilon_{i,u} \quad \forall ij \in \Omega_l, i \in \Omega_{bp}, u \in \Omega_u \quad (44)$$

$$y_{ji,u}^+ + y_{ji,u}^- \leq \varepsilon_{i,u} \quad \forall ji \in \Omega_l, i \in \Omega_{bp}, u \in \Omega_u \quad (45)$$

together with (1) and (2) ensure the radial operation of the system and are natural extensions of the work done in [12], adapted to account for the presence of transfer nodes and the particularities of the DSEP problem.

Constraints

$$Sg_{i,u}^{sqr} = P_{i,u}^S{}^2 + Q_{i,u}^S{}^2 \quad \forall i \in \Omega_s, u \in \Omega_u \quad (46)$$

$$Sg_{i,u}^{sqr} \leq \left(\sum_{h=1}^u \sum_{c \in \Omega_C} Sg'_{i,c} \sigma_{i,c,h} + \sum_{h=1}^u \sum_{c \in \Omega_c} Rg'_{i,c} r_{i,c,h} \right)^2 \quad \forall i \in \Omega_s, u \in \Omega_u \quad (47)$$

represent the limits of transformer capacity of substations. Note that (46) is a quadratic constraint; as the operation cost of the substations is minimized in (30), the square of the apparent power (in the optimal solution) must be equal to the sum of the square of the real and reactive power supplied by the substations. Constraint

$$\underline{V}^2 \leq V_{i,u}^{sqr} \leq \overline{V}^2 \quad \forall i \in \Omega_b, u \in \Omega_u \quad (48)$$

limits the voltage magnitudes. Constraints

$$0 \leq I_{ij,a,u}^{sqr} \leq \overline{I}^2 z_{ij,a,u} \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (49)$$

$$0 \leq I_{ij,a,u}^{sqr} \leq \overline{I}^2 (y_{ij,u}^+ + y_{ij,u}^-) \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (50)$$

represent the current magnitude limits of circuits in terms of the capacity of each conductor type and the stage of the circuit, respectively. Constraint

$$|b_{ij,u}| \leq \overline{b} (1 - y_{ij,u}^+ - y_{ij,u}^-) \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (51)$$

limits the voltage magnitude drop in a circuit according to its stage; if circuit ij is active at stage u , then the auxiliary variable $b_{ij,u}$ is zero, otherwise it remains limited by \overline{b} . Constraints

$$|P_{ij,a,u}| \leq \overline{VI}_a (y_{ij,u}^+ + y_{ij,u}^-) \quad \forall ij \in \Omega_l, a \in \Omega_a, u \in \Omega_u \quad (52)$$

$$|Q_{ij,a,u}| \leq \overline{VI}_a (y_{ij,u}^+ + y_{ij,u}^-) \quad \forall ij \in \Omega_l, a \in \Omega_a, u \in \Omega_u \quad (53)$$

$$|P_{ij,a,u}| \leq \overline{VI}_a z_{ij,a,u} \quad \forall ij \in \Omega_l, a \in \Omega_a, u \in \Omega_u \quad (54)$$

$$|Q_{ij,a,u}| \leq \overline{VI}_a z_{ij,a,u} \quad \forall ij \in \Omega_l, a \in \Omega_a, u \in \Omega_u \quad (55)$$

limit the power flow of a circuit according to its stage and the corresponding type of conductor. These constraints are natural extensions of the work done in [14] to include the multistage planning.

Constraints

$$w_{i,c,u} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \Omega_s, c \in \Omega_c, u \in \Omega_u \quad (56)$$

$$r_{i,c,u} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \Omega_s, c \in \Omega_c, u \in \Omega_u \quad (57)$$

$$\sigma_{i,c,u} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \Omega_s, c \in \Omega_c, u \in \Omega_u \quad (58)$$

$$z_{ij,a,u} \in \{0, 1\} \quad \forall ij \in \Omega_l, c \in \Omega_c, u \in \Omega_u \quad (59)$$

$$\beta_{i,g,u}^{dg} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \Omega_b, g \in \Omega_g, u \in \Omega_u \quad (60)$$

$$y_{ij,u}^+, y_{ij,u}^- \in \{0, 1\} \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (61)$$

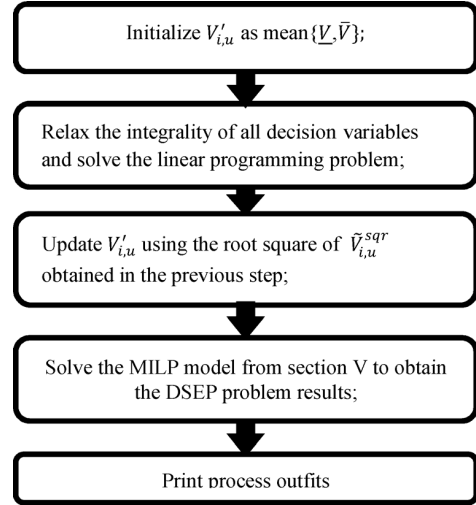


Fig. 1. Procedure to obtain an estimation of the voltage magnitude.

$$\alpha_{ij,u}^{vr} \in \{0, 1\} \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (62)$$

$$\beta_{ij,u}^{vr} \in \{0, 1\} \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (63)$$

$$\varepsilon_{i,u} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \Omega_b, u \in \Omega_u \quad (64)$$

$$\beta_{i,u}^{cb} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \Omega_b, u \in \Omega_u \quad (65)$$

$$\varpi_{i,u} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \forall i \in \Omega_b, u \in \Omega_u \quad (66)$$

$$\psi_{i,u} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \forall i \in \Omega_b, u \in \Omega_u \quad (67)$$

represent the binary and integer nature of the decision variables.

The MINLP model that represents the DSEP problem is described by (1)–(67). Due to the complexity of this model, in the next section it will be linearized in order to obtain a robust and efficient mathematical formulation for the DSEP problem.

IV. LINEARIZATION OF THE DSEP MATHEMATICAL MODEL

Note that (3), (46), and (47) contain nonlinear expressions. Here, those constraints will be linearized in order to obtain an MILP model for the DSEP problem.

A. Linearization of the Left Member of (3)

The linearization of the product $\tilde{V}_{j,u}^{sqr} \hat{I}_{ij,u}^{sqr}$ can be performed by using an estimated voltage magnitude $V'_{i,u}$, as shown in

$$\tilde{V}_{j,u}^{sqr} \hat{I}_{ij,u}^{sqr} \approx (V'_{i,u})^2 \hat{I}_{ij,u}^{sqr} \quad (68)$$

This simplification is an approximation with minimal error due to the limited range of the voltage magnitude variation $[\underline{V}, \overline{V}]$; results in Section V show the low approximation error of the power losses.

In order to obtain a suitable value for the parameter $V'_{i,u}$, the variables first take the value equal to the average voltage limits. Then, a relaxed version (linear programming) of the model in which the binary variables are relaxed is solved; it is assumed that the initial value of the parameter $V'_{i,u}$ corresponds to the average value of the voltage limits. The voltage magnitudes found by solving this relaxed model are used to fix the corresponding values of $V'_{i,u}$. Finally, the proposed MILP model is solved. The procedure shown in the first three steps of Fig. 1 is performed.

B. Linearization of the Right Member of (3)

The following equations are linear expressions that approximate the right member of (3):

$$\widehat{P}_{ij,u}^2 + \widehat{Q}_{ij,u}^2 \approx \sum_{y=1}^Y m_y^G \Delta_{ij,y,u}^{Pg} + \sum_{y=1}^Y m_y^G \Delta_{ij,y,u}^{Qg} \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (69)$$

$$\widehat{P}_{ij,u} = P_{ij,u}^+ - P_{ij,u}^- \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (70)$$

$$\widehat{Q}_{ij,u} = Q_{ij,u}^+ - Q_{ij,u}^- \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (71)$$

$$P_{ij,u}^+ + P_{ij,u}^- = \sum_{y=1}^Y \Delta_{ij,y,u}^{Pg} \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (72)$$

$$Q_{ij,u}^+ + Q_{ij,u}^- = \sum_{y=1}^Y \Delta_{ij,y,u}^{Qg} \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u \quad (73)$$

$$\Delta_{ij,y,u}^{Pg} \leq \overline{\Delta}^G \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u, y = 1, \dots, Y \quad (74)$$

$$\Delta_{ij,y,u}^{Qg} \leq \overline{\Delta}^G \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u, y = 1, \dots, Y \quad (75)$$

The terms on the right-hand side of (69) are linear approximations of $\widehat{P}_{ij,u}^2$ and $\widehat{Q}_{ij,u}^2$, which are formulated according to the discretization for quadratic expressions used in [32]. Equations (70) and (71) represent $\widehat{P}_{ij,u}$ and $\widehat{Q}_{ij,u}$, respectively, by using non-negative auxiliary variables. Constraints (72) and (73) establish that $|\widehat{P}_{ij,u}|$ and $|\widehat{Q}_{ij,u}|$ are the sums of the discretization variables $\Delta_{ij,y,u}^{Pg}$ and $\Delta_{ij,y,u}^{Qg}$ respectively. Constraints (74) and (75) impose limits on the values that can take the discretization variables. The following equations calculate the values of the parameters used in the discretization:

$$m_y^G = (2y - 1) \overline{\Delta}^G \quad y = 1, \dots, Y \quad (76)$$

$$\overline{\Delta}^G = \frac{\overline{V}}{Y} \max \{I_a, a \in \Omega_a\}. \quad (77)$$

These constraints are adapted from [32].

C. Linearization of (46)

Using the same linearization technique presented above, (46) is approximated as shown in

$$Sg_{i,u}^{sqr} = \sum_{y=1}^Y m_y^S \Delta_{i,y,u}^{Ps} + \sum_{y=1}^Y m_y^S \Delta_{i,y,u}^{Qs} \quad \forall i \in \Omega_s, u \in \Omega_u \quad (78)$$

$$P_{i,u}^S = \sum_{y=1}^Y \Delta_{i,y,u}^{Ps} \quad \forall i \in \Omega_s, u \in \Omega_u \quad (79)$$

$$Q_{i,u}^S = \sum_{y=1}^Y \Delta_{i,y,u}^{Qs} \quad \forall i \in \Omega_s, u \in \Omega_u \quad (80)$$

$$\Delta_{i,y,u}^{Ps} \leq \overline{\Delta}^S \quad \forall i \in \Omega_s, u \in \Omega_u, y = 1, \dots, Y \quad (81)$$

$$\Delta_{i,y,u}^{Qs} \leq \overline{\Delta}^S \quad \forall i \in \Omega_s, u \in \Omega_u, y = 1, \dots, Y \quad (82)$$

The following equations calculate the values of the parameters used in the discretization:

$$m_y^S = (2y - 1) \overline{\Delta}^S \quad y = 1, \dots, Y \quad (83)$$

$$\overline{\Delta}^S = \frac{\overline{V}}{Y} \max \{Sg'_{i,c} + Rg'_{i,c}, c \in \Omega_c, i \in \Omega_s\}. \quad (84)$$

D. Linearization of (47)

Constraint (47) can be linearized taking into account that: 1) only one substation type is chosen for the installation of a substation in a single stage, as guaranteed by (36); 2) only one substation type is chosen for the repowering of a substation in a single stage, as guaranteed by (37); 3) a repowering can only occur after the construction of the substation [a planning condition modeled in (39)]; and 4) the decision variables related to the construction or repowering of a substation are binary variables. Consequently, the operational limit of the substations can be replaced by an equivalent linear constraint, as shown in

$$Sg_{i,u}^{sqr} \leq \sum_{h=1}^u \sum_{c \in \Omega_C} Sg'_{i,c} \sigma_{i,c,h} + \sum_{h=1}^u \sum_{c \in \Omega_C} Rg'_{i,c} r_{i,c,h} + 2 \sum_{h=1}^u \sum_{c \in \Omega_C} Sg'_{i,c} Rg'_{i,c} r_{i,c,h} \quad \forall i \in \Omega_s, u \in \Omega_u. \quad (85)$$

E. MILP Model for the DSEP Problem

The proposed algorithm is summarized in the flowchart in Fig. 1. Taking into account the linearization presented in Section IV, the MINLP model presented in Section III can be transformed into an MILP model defined as

Min (30)

Subject to (1) – (2), (4) – (67), (70) – (85)

$$(V'_{i,u})^2 \widehat{I}_{ij,u}^{sqr} = \sum_{y=1}^Y m_y^G \Delta_{ij,y,u}^{Pg} + \sum_{y=1}^Y m_y^G \Delta_{ij,y,u}^{Qg} \quad \forall ij \in \Omega_l, u \in \Omega_u. \quad (86)$$

V. NUMERICAL RESULTS

A 24-node distribution system, based on [41], was used to show the performance of the proposed formulation. The system consisted of 24 nodes (4 substations and 20 load nodes) and 34 branches operating at a nominal voltage of 13.8 kV. The planning horizon was divided into three stages. The proposed model was implemented in the modeling language AMPL [42] and solved with CPLEX [43] using a Dell PowerEdge R910x64 computer with six processors at 1.87 GHz and 128 GB of RAM memory.

The initial topology of the EDS is shown in Fig. 2, in which the rectangles denote the substations, the circles represent the nodes, the branches drawn as continuous lines indicate the initial network, and the branches drawn as dashed lines are candidates for expansion. Table I presents the loads for the three stages of the planning horizon. Table II shows all circuit data and includes the lengths and initial conductor types of each circuit. At the initial stage, substations 21 and 22 were built with

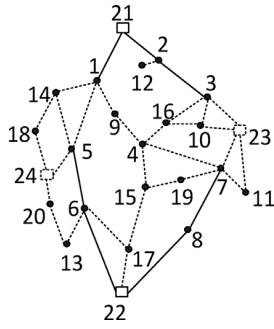


Fig. 2. Initial topology of the 24-node distribution system.

TABLE I
LOAD DATA (KVA)

Node	Stage 1	Stage 2	Stage 3	Node	Stage 1	Stage 2	Stage 3
1	4050	4735	5420	13	0	1150	1350
2	780	995	1210	14	0	3050	3160
3	2580	3380	3980	15	0	1620	1620
4	320	410	490	16	0	0	1220
5	280	370	470	17	0	2160	2400
6	1170	1305	1440	18	0	0	2100
7	4040	4200	4360	19	0	0	1810
8	720	830	940	20	0	0	3790
9	1140	1455	1770	21	0	0	0
10	1560	2040	2400	22	0	0	0
11	0	1910	2800	23	0	0	0
12	0	930	1290	24	0	0	0

TABLE II
CIRCUIT DATA

N°	i	j	l_{ij}	cl^0	N°	i	j	l_{ij}	cl^0	N°	i	j	l_{ij}	cl^0
1	1	5	3.885	-	13	4	15	2.800	-	25	10	16	1.400	-
2	1	9	2.100	-	14	4	16	2.275	-	26	10	23	2.275	-
3	1	14	2.100	-	15	5	6	4.200	1	27	11	23	2.800	-
4	1	21	3.850	1	16	5	24	1.225	-	28	13	20	2.100	-
5	2	3	3.500	1	17	6	13	2.100	-	29	14	18	1.750	-
6	2	12	1.925	-	18	6	17	3.850	-	30	15	17	2.100	-
7	2	21	2.975	1	19	6	22	4.550	1	31	15	19	2.800	-
8	3	10	1.925	-	20	7	8	3.500	1	32	17	22	2.625	-
9	3	16	2.100	-	21	7	11	1.925	-	33	18	24	2.625	-
10	3	23	2.100	-	22	7	19	2.800	-	34	20	24	1.575	-
11	4	7	4.550	-	23	7	23	1.575	-					
12	4	9	2.100	-	24	8	22	3.500	1					

N°= circuit number; l_{ij} in km; cl^0 : initial conductor type

types 1 and 2, respectively, while the other two substations were alternatives that could be built only with type 3. Table III shows the different investment alternatives for substations and conductors. The costs related to the substations and conductors were adapted from [14], the costs related to the CBs and VRs were adapted from [32], and data related to the DGs were adapted from [11].

Furthermore, c_g^{dg} is equal to US\$1000/ kVA, S_g^{DG} is equal to 3000 kVA, \bar{C} is equal to 5, c^{cb} is equal to US\$1000, the unit cost c^{mod} is equal to US\$900, Q_{bc}^{esp} is equal to 300 kVAr, \bar{N} is equal to 4, and \bar{M} is equal to 6. Finally, c^{vr} is equal to US\$8000, $R_{ij}^{\%}$ is equal to 10%, and \bar{O} is equal to 4. This work adopted a planning horizon of 15 years, subdivided into periods of five years. The interest rate was set at 10%, Upper and lower voltage magnitude limits were 1.05 and 0.95 p.u., respectively. The price of energy generated by the substations was 0.10 US\$/kWh, the price of

TABLE III
DATA OF SUBSTATIONS AND CONDUCTORS

Substation data				
Ω_s	$Sg'_{i,c}$ (kVA)	$Rg'_{i,c}$ (kVA)	$c_{i,c}^s$ (US)	$c_{i,c}^r$ (US)
21	12000	7000	0.00	1000×10^3
22	15000	0.00	0.00	0.00
23	20000	0.00	3000×10^3	0.00
24	20000	0.00	3000×10^3	0.00
Conductor data				
Ω_a	R_a (Ω/km)	X_a (Ω/km)	\bar{I}_a (A)	$c_{i,j,a}^f$ (US/km)
1	0.614	0.399	197	25×10^3
2	0.307	0.380	314	35×10^3

energy generated by the DGs was 0.04 US\$/kWh, and the load power factor was equal to 0.9 and 0.95 for DGs.

A. Case Studies

Six different cases were carried out for the expansion planning of the 24-node system: 1) a multistage test (MS); 2) a multistage test with CBs (MSCB); 3) a multistage test with VRs (MSVR); 4) a multistage test with DGs (MSDG); 5) a multistage test with both CBs and VRs (MSVRCB); and 6) a multistage test with CBs, VRs, and DGs (MSVRCBDG). The topologies obtained for all cases at each stage are shown in Figs. 3 and 4. In the figures, black lines and blue lines represent circuits built

with types 1 and 2, respectively. The \oplus symbol represents

the allocation of a VR, the \oplus symbol represents the allo-

cation of a CB, and the \oplus symbol represents the allocation of a DG. The results, summarized in Table IV, show that the installation of control devices, such as VRs and CBs, and DGs, can lead to better solutions. For all cases, the parameter for the piecewise linearization Y was equal to 20. The active power losses were compared to the operation point for the solution of the DSEP problem using a load flow sweep method. The results are summarized in Table V. Note that the approximation errors are negligible, showing the accuracy of the proposed model.

1) *Multistage Test*: This case was solved in 30.03 min and the solution found had an objective function of US\$ 83,970,980.54. In Stage 1, circuits 4–9 and 4–16 were built with conductor type 1, while circuits 4–15, 10–16, 15–17, and 17–22 were built with conductor type 2; circuits 1–21, and 8–22 were reconducted. In Stage 2, substation 23 was constructed to supply loads that were transferred from substations 21 (node 3) and 22 (nodes 4, 7, 9, 10, and 16). Additionally, circuits 2–12 and 6–13 were built with conductor type 1, and circuits 1–14, 3–23, 7–23, 10–23, and 11–23 were built with conductor type 2. In Stage 3, substation 24 was built to supply new loads. Circuits 7–19 and 13–20 were built with conductor type 1, and circuits 14–18, 18–24, and 20–24 were constructed with conductor type 2. As shown in Fig. 3, considering the conditions proposed in [12] for transfer nodes, in some cases it is possible to avoid constructing circuits to connect nodes without loads, which can lead to a reduction in investment costs. Note that circuits 2–3, 7–8, and 4–15 were

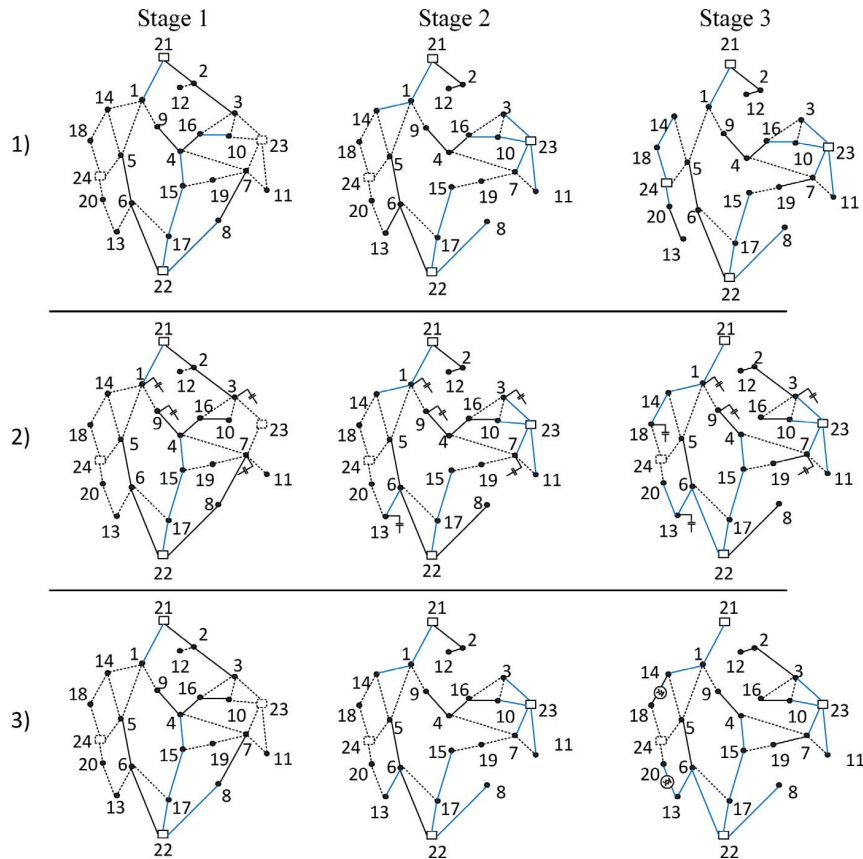


Fig. 3. Topologies For Cases 1–3 of the 24-node Distribution System.

opened in Stage 2; thus, nodes 3, 4, 7, 9, 10, and 16 were transferred to substation 23 through the construction of circuits 3–23, 7–23, and 10–23. In Stage 1, node 16 was used as a transfer node. In Stage 3, circuit 6–13 was opened, and thus node 13 was transferred to substation 24 through the construction of circuits 24–20 and 20–13. Note that, due to reconfigurations between stages, the system topologies for all of the cases change at each stage, which contributes to the reduction in total cost.

2) *Multistage Test With CBs*: This case was solved in 9.91 min, and the solution found had an objective function of US\$ 82,903,536.95 – a lower cost than for the MS case. In Stage 1, circuits 4–9, 4–16, and 10–16 were built with conductor type 1; circuits 4–15, 15–17, and 17–22 were built with conductor type 2; and circuit 1–21 was reconducted. CBs with 1200 kVAR were allocated at nodes 1, 3, and 7, and one CB with 900 kVAR was allocated at node 9. In Stage 2, substation 23 was constructed to supply loads that were transferred from substations 21 (node 3) and 22 (node 4, 7, 9, 10, and 16). Additionally, circuit 2–12 was built with conductor type 1; circuits 1–14, 3–23, 6–13, 7–23, 10–23, and 11–23 were built with conductor type 2, and a CB with 900 kVAR was allocated at node 13. In Stage 3, circuit 7–19 was built using conductor type 1; circuits 13–20 and 14–18 were built using conductor type 2; and circuit 6–22 was reconducted. One CB with 1200 kVAR was installed at node 18, and the capacity of CBs allocated at nodes 9 and 13 was increased to 1200 kVAR. In Stage 2, circuits 2–3, 7–8, and 4–15 were opened, and nodes 3, 4, 7, 9, 10, and

16 were transferred to substation 23 by constructing circuits 3–23, 7–23, and 10–23. In Stage 3, circuit 2–3 was closed, and nodes 2 and 12 were transferred to substation 23 by opening circuit 2–21.

Finally, circuit 4–16 was opened, and nodes 4 and 9 were transferred to substation 22 by closing circuit 4–15. Table VI presents the variation in the number of CB modules over the planning horizon. Comparing the MS and MSCB cases shows that both cases have the same topology for the first stage. However, in the MSCB case, circuits 8–22 and 10–16 operate with conductor type 1. This difference represents a decreased investment for the construction and reconducting of circuits, compensated by the allocation of the CBs at nodes 1, 3, 7, and 9. In Stage 2, both case studies present the same topologies of operation, except in terms of the conductor type used for circuits 8–22, 10–16, and 6–13. In Stage 3, substation 24 is built in the MS case to supply nodes 13, 14, 18, and 20, whereas in the MSCB case, these nodes are fed as follows: substation 21 feeds nodes 14 and 18, and; substation 22 feeds nodes 13 and 20. The cost difference between the MS and MSCB cases is US\$ 1,067,443.59, which represents a 1.30% reduction in total investment costs.

3) *Multistage Test With VRs*: This case was solved in 8.7 min, and the solution found had an objective function of US\$ 83,153,544.79 – a lower cost than for the MS case. In Stage 1, circuits 4–9, 4–16, and 10–16 were built with conductor type 1, while circuits 4–15, 15–17, and 17–22 were built with con-

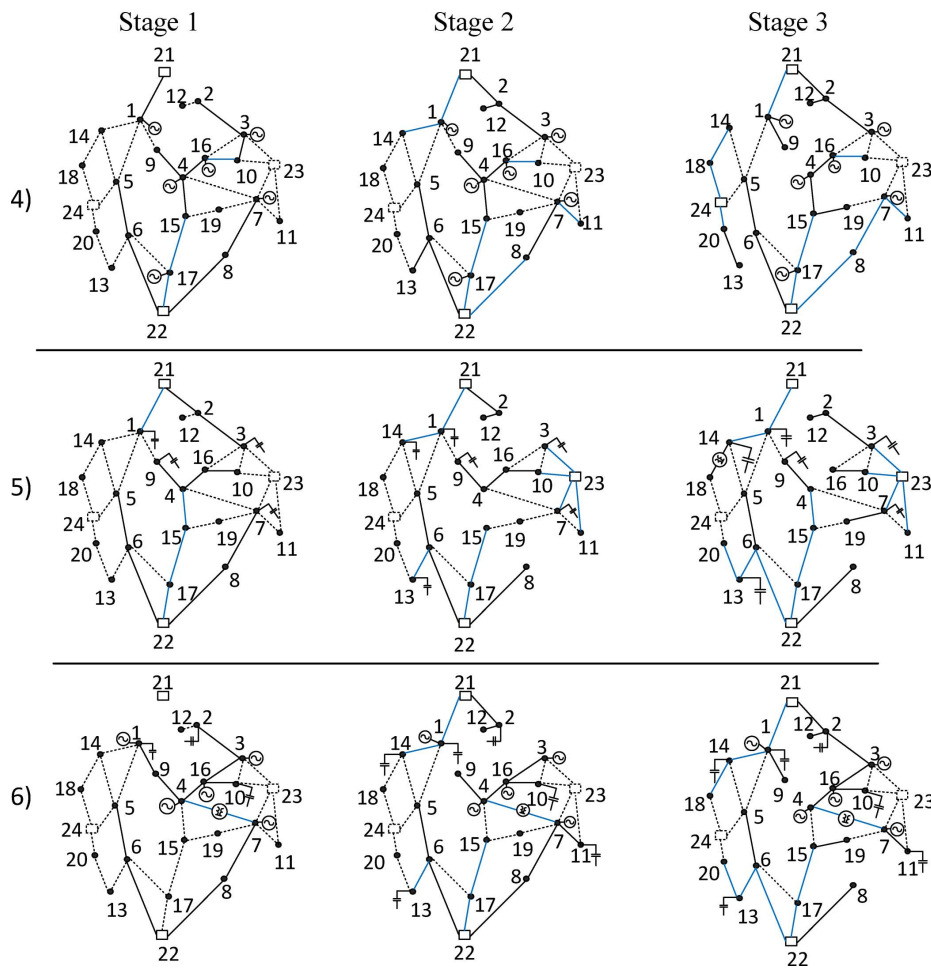


Fig. 4. Topologies for cases 4–6 of the 24-node distribution system.

TABLE IV
RESULTS SUMMARY (COST IN 10³ US\$)

Cost/Cases	1	2	3	4	5	6
IS	3019.4	1862.8	1862.8	1156.6	1862.8	385.5
CES	79846.8	80024.4	80174.7	31856.4	80020.8	31944.4
IC	1104.8	994.2	1109.9	946.6	987.4	886.4
IDG	0.0	0.0	0.0	15000.0	0.0	15000.0
CEDG	0.0	0.0	0.0	18989.3	0.0	18989.3
ICB	0.0	22.3	0.0	0.0	23.4	19.3
IVR	0.0	0.0	6.2	0.0	3.1	8.0
TC	83971.0	82903.5	83153.5	67948.9	82897.4	67233.0

TABLE V
APPROXIMATION ERROR OF THE POWER LOSSES

Cases	Load Flow (kW)	Proposed Model (kW)	Error (%)
1	1206.45	1209.66	-0.27
2	1516.66	1521.99	-0.35
3	1705.15	1701.5	0.21
4	863.46	864.52	-0.12
5	1515.31	1513.51	0.12
6	1086.37	1079.4	0.65

TABLE VI
VARIATION IN THE NUMBER OF CB MODULES OVER THE PLANNING HORIZON FOR THE MSCB CASE

Stage/ node	1	3	7	9	13	18
1	4	4	4	3	0	0
2	4	4	4	3	3	0
3	4	4	4	4	4	4

ductor type 2. Circuits 1–21 and 8–22 were reconducted with conductor type 2. In Stage 2, substation 23 was constructed to feed loads that were transferred from substations 21 (node 3)

and 22 (nodes 4, 7, 9, 10, and 16). In addition, in Stage2, circuit 2–12 was built with conductor type 1, and circuits 1–14, 3–23, 6–13, 7–23, 10–23, and 11–23 were built with conductor type 2. In Stage 3, loads were transferred from substations 21 (nodes 2 and 12) to substation 23, and loads were transferred from substations 23 (nodes 4 and 9) to substation 22. Circuits 7–19 and 14–18 were built with conductor type 1; circuit 13–20 was built with conductor type 2; and circuit 6–22 was reconducted with conductor type 2. VRs were allocated to circuits 14–18 and 13–20, both in position 1 of the tap. In Stage 2, circuits 2–3, 4–15, and 7–8 were opened; nodes 3, 4, 7, 9, 10, and 16 were transferred to substation 23 by constructing circuits 3–23, 10–23, and 7–23. Note that, in Stages 1 and 2, node 16 was used as a transfer node. In Stage 3, circuit 4–16 was opened and nodes 4 and 9 were transferred to substation 22 by connecting circuit 4–15; circuit 2–21 was opened and nodes 2

and 12 were transferred to substation 23 by connecting circuit 2–3. Comparing the MS and MSVR cases shows that the first and second stages have the same topologies. However, in the MSVR case, circuits 6–13 and 10–16 operate with conductor type 2 and 1, respectively; whereas in the MS case these same circuits operate with conductor type 1 and 2, respectively. In Stage 3, the allocation of the VRs makes the allocation of a new substation at node 24 unnecessary, as in the MS case. Therefore, nodes 14 and 18 are fed by substation 21, while nodes 20 and 13 are fed by substation 22. In the MS case, the same nodes are fed by substation 24. Comparing the MSCB and MSVR cases reveals that the same topologies are obtained in all stages, with the exception of the conductor type of circuits 8–22 and 14–18. The cost difference between the MSVR and MSCB cases is US\$ 817,435.75, which represents a 0.97% reduction in total investment cost.

4) *Multistage Test With DGs*: This case was solved in 600 min, and the solution found had an objective function of US\$ 67,948,943.57 – a lower cost than for the MS case. In Stage 1, circuits 3–10, 4–9, 4–15, and 4–16 were built with conductor type 1, while circuits 10–16, 15–17, and 17–22 were built with conductor type 2. DGs were allocated at nodes 1, 3, 7, 16, and 17. In Stage 2, circuits 2–12 and 6–13 were built with conductor type 1, while circuits 1–14 and 7–11 were built with conductor type 2; circuits 1–21 and 8–22 were reconducted. In Stage 3, substation 24 was constructed to supply new loads (nodes 18 and 20) and the loads that were transferred from substation 22 (node 13) and substation 21 (node 14). Circuits 1–9, 13–20, and 15–19 were built with conductor type 1; circuits 14–18, 18–24, and 20–24 were built with conductor type 2; and circuit 7–8 was reconducted. For this test, circuit 2–21 was opened in Stage 1, and nodes 2 and 3 were transferred to substation 22 through the construction of circuit 3–10. In Stage 2, circuit 3–10 was opened and nodes 2, 3, and 12 were transferred to substation 21 through the operation of circuit 2–21. In Stage 3, circuit 1–14 was opened and the load from node 14 was transferred to substation 24 by connecting circuits 18–24 and 14–18. Circuit 6–13 was opened, and the load from node 13 was transferred to substation 24 by connecting circuits 20–24 and 13–20. Circuit 4–9 was opened, and the load from node 9 was transferred to substation 21 by connecting of the circuit 1–9. Note that in all stages, node 16 was used as a transfer node. Comparing the MSDG and MS cases shows that, in the first stage of the MSDG case, all of the nodes are fed jointly by substation 22 and the 5 DGs that were allocated at this stage, except for node 1, which is served by substation 21. In the MS case, substations 21 and 22 are used to feed all of the nodes. The main difference observed in Stage 2 of this case is the building of substation 23, which is built to serve loads 3, 4, 7, 9, 10, and 11. In the MSDG case, these loads are fed by substations 21 and 22, and 5 DGs. In Stage 3 of both cases, substation 24 is built to feed nodes 18, 13, 14, and 20. The cost difference between the MS and MSDG cases is US\$ 16,022,036.97, which represents a 19.08% reduction in total investment cost. This reduction is explained by the lower cost of the energy generated by the DGs.

5) *Multistage Test With CBs and VRs*: This case was solved in 10.96 min, and the solution found had an objective function of

TABLE VII
VARIATION OF THE NUMBER OF CB MODULES IN THE PLANNING HORIZON FOR THE MSVR CB CASE

Stage/ node	1	3	7	9	13	14
1	4	4	4	3	0	0
2	4	4	4	3	3	4
3	4	4	4	4	4	4

US\$ 82,897,393.01 – a lower cost than for the MS case. In Stage 1, circuits 4–9, 4–16, and 10–16 were built with conductor type 1; circuits 4–15, 15–17, and 17–22 were built with conductor type 2; and circuit 1–21 was reconducted. In addition, CBs with 1200 kVAr were allocated at nodes 1, 3, and 7, and one CB with 900 kVAr was allocated at node 9. In Stage 2, substation 23 was constructed to feed loads that were transferred from substations 21 (node 3) and 22 (nodes 4, 7, 9, 10, and 16). Circuit 2–12 was built with conductor type 1, while circuits 1–14, 3–23, 6–13, 7–23, 10–23, and 11–23 were built with conductor type 2. CBs with a capacity of 900 kVAr and 1200 kVAr, respectively, were allocated at nodes 13 and 14. In Stage 3, circuits 7–19 and 14–18 were built with conductor type 1; circuit 13–20 was built with conductor type 2; and circuit 6–22 was reconducted. The capacity of CBs allocated at nodes 9 and 13 was increased to 1200 kVAr. Table VII presents the variation in the number of CB modules over the planning horizon. In addition, one VR was allocated to circuit 14–18 with a tap position of 1. Note that the cost difference between the MS and MSVR CB cases is US\$ 1,073,587.57, which represents a 1.28% reduction in total investment cost. Comparing the MS and MSVR CB cases shows that both cases have the same topology for the first stage. However, in the MSVR CB case, circuits 8–22 and 10–16 operate with conductor type 1. This difference represents a decreased investment for the construction and reconducting of circuit, compensated by the location of the CBs at nodes 1, 3, 7, and 9. In Stage 2, both case studies present the same topologies of operation, except for the conductor type used in circuits 8–22, 10–16, and 6–13. In Stage 3, of the MS case, substation 24 is built to supply nodes 13, 14, 18, and 20. In the MSVR CB case, these nodes are fed as follows: substation 21 feeds nodes 14 and 18, and substation 22 feeds nodes 13 and 20. Comparing the MSCB and MSCBVR cases, the topologies of Stages 1 and 2 are the same. However, in Stage 2 of the MSCBVR case, there is one more CB at node 14. In Stage 3, there are only two differences between the two cases, in the MSVR CB case, one VR is allocated to circuit 14–18, allowing for circuit 14–18 to be constructed with a lower conductor capacity. In the MSCB case, circuit 14–18 is constructed with a conductor type of greater capacity, and a CB is allocated at node 18.

6) *Multistage Test With CBs, VRs, and DGs*: This case was solved in 600 min, and the solution found had an objective function of US\$ 67,233,023.41 – a lower cost than for the MS case. This solution had the lowest cost. The characteristics shown in Fig. 4 emphasize the following facts: in Stage 1, circuits 1–9, 3–16, 4–9, 4–16, and 10–16 were built with conductor type 1, and circuit 4–7 was built with conductor type 2. In addition, CBs with capacities of 900 kVAr, 300 kVAr, and 300 kVAr, respectively, were allocated at nodes 1, 2 and 10. One VR was allocated to circuit 4–7 with a tap position of 1. DGs were allocated

at nodes 1, 3, 4, 7, and 16. In Stage 2, substation 21 was used to feed loads that were transferred from substation 22 (nodes 1 and 2), along with new loads (nodes 12 and 14). In addition, circuits 2–12 and 7–11 were built with conductor type 1; circuits 1–14, 6–13, 15–17, and 17–22 were built with conductor type 2, and circuit 1–21 was reconducted. CBs with capacities of 1200 kVAR, 900 kVAR and 1200 kVAR, respectively, were allocated at nodes 11, 13, and 14. The capacity of CBs allocated at nodes 2 and 10 was increased to 900 kVAR, and the CB allocated at node 1 was increased to 1200 kVAR. In Stage 3, circuit 15–19 was built with conductor type 1; circuits 13–20 and 14–18 were built with conductor type 2; and circuit 6–22 was reconducted. Additionally, all of the CBs allocated in the system were increased to 1200 kVA. Table VIII presents the variation in the number of CB modules over the planning horizon. For this test, circuits 1–21 and 2–21 were opened in Stage 1, and nodes 1, 2 and 3 were transferred to substation 22 by constructing circuits 1–9 and 3–16. In Stage 2, circuits 1–9 and 2–3 were opened, and nodes 1, 2, and 12 were transferred to substation 21, through the operation of circuits 1–21 and 2–21. In Stage 3, circuit 4–9 and 7–8 were opened, and nodes 3, 4, 7, 9, 10, 11, and 16 were transferred to substation 21 through of the operation of circuits 1–9 and 2–3. Comparing the solutions for all of the different cases, one can see that if more types of equipment are considered in the DSEP problem, better solutions can be obtained and unnecessary investments avoided. Note that the cost difference between the MS and MSVRCBDG cases is US\$ 16,737,957.13, which represents a 19.93% reduction in total investment cost. Comparing the MSDGVRCB and MSDG cases, in all three stages the solutions have very different topologies. In the first stage of the MSDGVRCB case all nodes are fed by substation 22 and the 5 DGs installed at this stage; for the MSDG case, substation 21 is used along with substation 22 and 5 DGs to feed node 1, and an additional DGs is allocated at node 17. Naturally, in the MSDGVRCB case, there are allocations of CBs and RTs that are not present in the MSDG case. Furthermore, in the MS-DGVRCB case, node 4 is transferred to substation 22 through circuit 4–7; in the MSDG case, the same node is connected to the same substation through circuit 4–15. Similarly, in the MS-DGVRCB case, node 3 is transferred to substation 22 through circuit 3–16, while in the MSDG case, the same node is connected through circuit 3–10. In Stage 2 of the MSDGVRCB case, nodes 1 and 2 are transferred to substation 21, while in the MSDG case, nodes 2 and 3 are transferred to the same substation. Additionally, in the MSDGVRCB case, circuit 6–13 is built with conductor type 2, while in the MSDG case, circuit 6–13 is built with conductor type 2. For Stage 3 of the MSDGVRCB case, circuits 14–18 and 13–20 are built to serve the new loads (nodes 18 and 20), and nodes 3, 4, 7, 9, 10, 11, and 16 are transferred to substation 21. On the other hand, for the MSDG case, substation 24 is built to serve both the new loads and node 13. The cost difference between the MSDG and MSVRCBDG cases is US\$ 715,920.16, which represents a 1.05% reduction in total investment cost. In this test, the solution obtained is the only one that does not require the construction of new substations, because the loads are handled by the power from the distributed generators. Compared to the other scenarios, this solution requires the fewest number of larger capacity feeders.

TABLE VIII
VARIATION OF THE NUMBER OF CB MODULES IN THE PLANNING HORIZON
THE MSDGVRCB CASE

Stage/ node	1	2	10	11	13	14
1	3	1	1	0	0	0
2	4	3	3	4	3	4
3	4	4	4	4	4	4

TABLE IX
SOLUTIONS OBTAINED BY A STATIC METHODOLOGY (COST IN 10³ US\$)

Cases	Static
1	140676.18
2	139004.96
3	140684.93
4	123302.65
5	139058.14
6	122728.06

B. Comparing Static and Dynamic Planning Approaches

The model developed in Section V was used to solve the static formulation for the DSEP problem in order to compare static and dynamic planning approaches. In the static formulation, the DSEP problem is solved taking into account the demand in the last stage, but executing the investment decisions in the first year. In order to make a proper comparison with the solutions obtained using the multistage formulation (summarized in Table IV), the performance of the expansion planning found using the static formulation was evaluated in the three stages, with the loads defined by the data in Table I. The results found for these tests are shown in Table IX. It was found that the solutions obtained using the multistage approach (Table IV) had lower costs than those generated using the static approach. This can be explained by the appropriate execution of investments in the multistage formulation.

VI. CONCLUSION

A mixed-integer linear programming model for the multi-stage long-term expansion planning problem of EDSs was presented. The model considered the construction/ reinforcement of substations, the construction/reconducting of circuits, the allocation of capacitor banks, the allocation of voltage regulators, the allocation of distributed generators, and a modification of the radial topology including transfer nodes. The results showed that, when considering multiple expansion alternatives in the planning problem, it is possible to avoid unnecessary large investments for meeting new demand conditions.

The use of an MILP model has the following benefits: 1) a robust mathematical model that is equivalent to the MINLP model; 2) efficient computational behavior with MILP solvers; and 3) convergence to optimality guaranteed by using classical optimization techniques.

The results also showed that power losses can be calculated with greater precision than when using the load flow sweep method; furthermore, taking into account multiple expansion alternatives in the DSEP problem makes it possible to evaluate the most appropriate set of equipment to be implemented in the EDS at minimum cost. These results demonstrate the importance of taking into account all expansion alternatives that can be deployed in a network when choosing the expansion plan.

TABLE X
CHARACTERISTICS OF BIBLIOGRAPHIC REFERENCES

Reference	Methodology	Multiojective Planning	Static Planning	Pseudo-dynamic Planning	Dynamic Planning	IC + IS	IC	ICB	IVR	ICB + VR	IC + IS + ICB	IDG	IDG + IC + IS	MILP	MIQP	MINLP	Test Systems (bus)
[3]	1			X		X								X			36
[4]	1				X								X	X			18
[5]	1				X								X	X			27
[6]	2				X	X											54
[7]	2	X			X								X			X	33
[8]	1	X			X	X											100
[9]	2	X			X								X				18
[10]	2				X	X											26
[11]	1				X	X							X	X			135
[12]	1		X										X			X	23
[13]	1		X			X											136
[14]	1		X								X				X		54
[15]	2				X	X									X		59
[16]	2		X			X											387
[17]	2		X			X											136
[18]	2		X			X											57
[19]	2		X			X											201
[20]	2		X			X										X	23
[21]	2		X				X										60
[22]	2		X				X										24
[23]	2		X			X											54
[24]	2	X			X	X											100
[25]	2		X					X									135
[26]	2		X					X								X	94
[27]	2		X					X								X	70
[28]	2		X					X								X	70
[29]	2		X						X								229
[30]	2		X						X								229
[31]	2	X	X						X							X	229
[32]	1		X							X							70
[33]	2		X							X							310
[34]	2	X	X							X						X	95
[35]	2		X							X							11
[36]	2		X										X				9
[37]	2		X										X				9
[38]	2		X									X					26
[39]	2		X									X					26
[41]	1				X	X								X			24

Where 1: Classical optimization techniques and 2: Heuristic optimization techniques, including metaheuristics.
MIQP – Mixed Integer Quadratic Problem

Future works should consider reliability constraints in the proposed model.

APPENDIX

Table X shows a summary of the technical characteristics of the bibliographic references.

REFERENCES

[1] N. C. Sahoo, S. Ganguly, and D. Das, "Recent advances on power distribution system planning: A Stage-of-the-art survey," *Energy Syst.*, vol. 4, no. 2, pp. 165–193, Jan. 2013.

[2] H. Fletcher and K. Strunz, "Optimal distribution system horizon planning—Part I: Formulation," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 22, no. 2, pp. 791–799, May 2007.

[3] I. Ramirez-Rosado and T. Gonen, "Pseudodynamic planning for expansion of power distribution systems," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 6, no. 1, pp. 245–254, Feb. 1991.

[4] S. Haffner, L. Pereira, L. Pereira, and L. Barreto, "Multistage model for distribution expansion planning with distributed generation – Part I: Problem formulation," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 23, no. 2, pp. 915–923, Apr. 2008.

[5] R. Lotero and J. Contreras, "Distribution system planning with reliability," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 26, no. 4, pp. 2552–2562, Oct. 2011.

[6] V. Miranda, J. V. Ranito, and L. M. Proença, "Genetic algorithm in optimal multistage distribution network planning," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 9, no. 4, pp. 1927–1933, Nov. 1994.

[7] J. Aghaei, K. M. Muttaqi, A. Azizvahed, and M. Gitizadeh, "Distribution expansion planning considering reliability and security of energy using modified PSO (Particle Swarm Optimization) algorithm," *Energy*, vol. 65, no. 1, pp. 398–411, Feb. 2014.

[8] S. Ganguly, N. Sahoo, and D. Das, "Multi-objective planning of electrical distribution systems using dynamic programming," *Int. J. Electr. Power & Energy Syst.*, vol. 46, pp. 65–78, Mar. 2013.

[9] M. Gitizadeh, A. Azizi, and J. Aghaei, "Multistage distribution system expansion planning considering distributed generation using hybrid evolutionary algorithms," *Appl. Energy*, vol. 101, pp. 655–666, Jan. 2013.

[10] S. N. Ravadanegh and R. G. Roshanagh, "On optimal multistage electric power distribution networks expansion planning," *Electr. Power Energy Syst.*, no. 54, pp. 487–497, Jan. 2014.

[11] G. Muñoz-Delgado, J. Contreras, and J. M. Arroyo, "Joint expansion planning of distributed generation and distribution networks," *IEEE Trans. Power Syst.*, to be published.

[12] M. Lavorato, J. F. Franco, M. J. Rider, and R. Romero, "Imposing radiality constraints in distribution system optimization problem," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 27, no. 1, pp. 172–180, Feb. 2012.

[13] R. A. Jabr, "Polyhedral formulations and loop elimination constraints for distribution network expansion planning," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 28, pp. 1888–1897, May 2013.

- [14] J. F. Franco, M. J. Rider, and R. Romero, "A mixed-integer quadratically constrained programming model for the distribution system expansion planning," *Electr. Power Ener. Syst.*, vol. 62, pp. 265–272, Apr. 2014.
- [15] K. Nara, T. Satoh, H. Kuwabara, K. Aoki, M. Kitagawa, and T. Ishihara, "Distribution systems expansion planning by multi-stage branch exchange," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 7, no. 1, pp. 208–214, Feb. 1992.
- [16] E. Míguez, J. Cidrás, E. Díaz-Dorado, and J. García-Dornelas, "An improved branch-exchange algorithm for large-scale distribution network planning," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 17, no. 4, pp. 931–936, Nov. 2002.
- [17] M. Lavorato, M. Rider, A. V. Garcia, and R. Romero, "A constructive heuristic algorithm for distribution system planning," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 25, no. 3, pp. 1734–1742, Aug. 2010.
- [18] G. Yang, Z. Dong, and K. Wong, "A modified differential evolution algorithm with fitness sharing for power system planning," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 23, no. 2, pp. 514–522, May 2008.
- [19] I. Ramirez-Rosado and J. Bernal-Augustín, "Genetic algorithms applied to the design of large power distribution systems," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 13, no. 2, pp. 696–703, May 1998.
- [20] J. Gómez, H. Khodr, P. Oliveira, L. Ocque, J. Yusta, R. Villasana, and A. Urdaneta, "Ant colony system algorithm for the planning of primary distribution circuits," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 19, no. 2, pp. 996–1004, May 2004.
- [21] V. Parada, J. Ferland, M. Arias, and K. Daniels, "Optimization of electrical distribution feeders using simulated annealing," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 19, no. 3, pp. 1135–1141, Jul. 2004.
- [22] J. M. Nahman and D. M. Peric, "Optimal planning of radial distribution networks by simulated annealing technique," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 23, no. 2, pp. 790–795, May 2008.
- [23] R. Ranjan, B. Vekatesh, and D. Das, "A new algorithm for power distribution system planning," *Electr. Power Energy Syst.*, vol. 62, no. 1, pp. 55–65, May 2002.
- [24] S. Ganguly, N. Sahoo, and D. Das, "Mono- and multi-objective planning of electrical distribution networks using particle swarm optimization," *Appl. Soft Computing*, vol. 11, no. 2, pp. 2391–2405, Mar. 2011.
- [25] R. Gallego, J. Monticelli, and R. Romero, "Optimal capacitor placement in radial distribution networks," *IEEE Trans. on Power Syst.*, vol. 16, no. 4, pp. 630–637, Nov. 2001.
- [26] D. F. Pires, A. G. Martins, and C. H. Antunes, "A multiobjective model for VAR planning in radial distribution networks based on tabu search," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 20, no. 2, pp. 1089–1094, May 2005.
- [27] I. C. Silva Junior, S. Carneiro Junior, E. J. Oliveira, J. S. Costa, J. L. R. Pereira, and P. A. N. Garcia, "A heuristic constructive algorithm for capacitor placement on distribution system," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 23, no. 4, pp. 1619–1626, Nov. 2008.
- [28] J. Y. Park, J. M. Sohn, and J. K. Park, "Optimal capacitor allocation in a distribution system considering operation costs," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 24, no. 1, pp. 462–468, Feb. 2009.
- [29] C. A. N. Pereira and C. A. Castro, "Optimal placement of voltage regulators in distribution systems," in *Proc. IEEE Bucharest Power Tech*, Bucharest, Romania, 2009, pp. 1–5.
- [30] A. S. Safigianni and G. J. Salis, "Optimum voltage regulator placement in a radial power distribution network," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 15, no. 2, pp. 879–886, May 2000.
- [31] J. Mendoza, D. Morales, R. López, J. Vannier, and C. Coello, "Multi-objective location of automatic voltage regulators in radial distribution network using a micro genetic algorithm," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 22, no. 1, pp. 404–412, Feb. 2007.
- [32] J. F. Franco, M. J. Rider, M. Lavorato, and R. A. Romero, "A mixed-integer LP model for the optimal allocation of voltage regulators and capacitors in radial distribution systems," *Electr. Power Ener. Syst.*, vol. 48, pp. 123–130, Jun. 2013.
- [33] E. P. Madruga and L. N. Canha, "Allocation and integrated configuration of capacitor banks and voltage regulators considering multi-objective variables in smart grid distribution system," in *Proc. Int. Conf. Industry Applic.*, São Paulo, Brazil, Nov. 2010, pp. 1–6.
- [34] B. A. de Souza and A. M. F. de Almeida, "Multiobjective optimization and fuzzy logic applied to planning of the volt/var problem in distributions systems," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 25, no. 3, pp. 1274–1281, Aug. 2010.
- [35] J. Sugimoto, R. Yokoyama, Y. Fukuyama, V. V. R. Silva, and H. Sasaki, "Coordinated allocation and control of voltage regulators based on reactive tabu search," in *2005 IEEE Russian Power Tech*, St. Petersburg, Russia, Jun. 27–30, 2005, pp. 1–6.
- [36] W. El-Khattam, Y. G. Hegazy, and M. M. A. Salama, "An integrated distributed generation optimization model for distribution system planning," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 20, no. 2, pp. 1158–1165, May 2005.
- [37] E. Naderi, H. Seifi, and M. S. Sepasian, "A dynamic approach for distribution system planning considering distributed generation," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 27, no. 3, pp. 1313–1322, Jul. 2012.
- [38] M. E. Samper and A. Vargas, "Investment decisions in distribution networks under uncertainty with distributed generation-Part I: Model formulation," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 28, no. 3, pp. 2331–2340, Aug. 2013.
- [39] M. E. Samper and A. Vargas, "Investment decisions in distribution networks under uncertainty with distributed generation-Part II: Implementation and results," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 28, no. 3, pp. 2341–2351, Aug. 2013.
- [40] J. F. Franco, M. J. Rider, M. Lavorato, and R. Romero, "A mixed-integer LP model for the reconfiguration of radial electric distribution systems considering distributed generation," *Electric Power Systems Research*, vol. 97, pp. 51–60, Apr. 2013.
- [41] I. Gönen and I. Ramirez-Rosado, "Review of distribution system planning models: A model for optimal multi-stage planning," *IEE Proc. Gen., Trans. and Dist.*, vol. 133, no. 7, pp. 397–408, Nov. 1986.
- [42] R. Fourer, D. M. Gay, and B. W. Kernighan, *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*, 2nd ed. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole-Thomson Learning, 2003.
- [43] "IBM ILOG CPLEX V12.1 User's Manual for CPLEX," CPLEX Division, ILOG Inc., Incline Village, NV, USA, 2009.

Alejandra Tabares received the B.Sc. degree in production engineering from the Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia in 2012. She is currently working toward the M.Sc. degree in electrical engineering at São Paulo State University (UNESP), Ilha Solteira, Brazil.

Her areas of research are the development of methodologies for the optimization, planning, and control of electrical power systems.

John F. Franco (S'11–M'13) received the B.Sc. and M.Sc. degrees in electrical engineering from the Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia, in 2004 and 2006, respectively, and the Ph.D. degree from São Paulo State University (UNESP), Ilha Solteira, Brazil, in 2012.

Currently, he is carrying out postdoctoral research with the FEIS-UNESP, Ilha Solteira, Brazil. His areas of research are the development of methodologies for the optimization, planning, and control of electrical power systems.

Marina Lavorato (S'07) received the B.Sc. and M.Sc. degrees from the Federal University of Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brazil, in 2002 and 2004, respectively, and the Ph.D. degree from the University of Campinas, Campinas, Brazil, in 2010, all in electrical engineering.

Currently, she is a Researcher with the Electrical Engineering Department, São Paulo State University (FEIS-UNESP), Ilha Solteira, Brazil. Her areas of research are the development of methodologies for the optimization, planning, and control of electrical power systems.

Marcos J. Rider (S'97–M'06) received the B.Sc. (Hons.) and P.E. degrees from the National University of Engineering, Lima, Perú, in 1999 and 2000, respectively, the M.Sc. degree from the Federal University of Maranhão, Maranhão, Brazil in 2002, and the Ph.D. degree from the University of Campinas (UNICAMP), Campinas, Brazil, in 2006, all in electrical engineering.

Currently, he is a Professor with the Department of Systems and Energy, University of Campinas, Campinas, Brazil. His areas of research are the development of methodologies for the optimization, planning, and control of electrical power systems, and applications of artificial intelligence in power systems.

Robust Joint Expansion Planning of Electrical Distribution Systems and EV Charging Stations

Nataly Bañol Arias, Alejandra Tabares, John F. Franco [✉], *Member, IEEE*, Marina Lavorato, *Member, IEEE*, and Rubén Romero [✉], *Senior Member, IEEE*

Abstract—Electrical distribution systems (EDSs) should be prepared to cope with demand growth in order to provide a quality service. The future increase in electric vehicles (EVs) represents a challenge for the planning of the EDS due to the corresponding increase in the load. Therefore, methods to support the planning of the EDS, considering the uncertainties of conventional loads and EV demand, should be developed. This paper proposes a mixed-integer linear programming (MILP) model to solve the robust multistage joint expansion planning of EDSs and the allocation of EV charging stations (EVCSs). Chance constraints are used in the proposed robust formulation to deal with load uncertainties, guaranteeing the fulfillment of the substation capacity within a specified confidence level. The expansion planning method considers the construction/reinforcement of substations, EVCSs, and circuits, as well as the allocation of distributed generation units and capacitor banks along the different stages in which the planning horizon is divided. The proposed MILP model guarantees optimality by applying classical optimization techniques. The effectiveness and robustness of the proposed method is verified via two distribution systems with 18 and 54 nodes. Additionally, Monte Carlo simulations are carried out, aiming to verify the compliance of the proposed chance constraint.

Index Terms—Chance constraint, electrical distribution systems, electric vehicle charging stations, mixed-integer linear programming, multistage expansion planning.

I. INTRODUCTION

THE use of Electric Vehicles (EVs) is expected to increase in the next few years as an option for resolving environment problems, such as climate change [1]. The adoption of EVs contributes to the reduction of air pollutant emissions and could take advantage of renewable energy sources when the EV batteries need to be charged. However, the electrical distribution system (EDS) should be prepared to contend with an increase in demand related to EV charging.

Manuscript received February 3, 2017; revised September 2, 2017; accepted October 13, 2017. Date of publication October 18, 2017; date of current version March 20, 2018. This work was supported by the Brazilian institutions CAPES, FAPESP, and CNPq Process 152002/2016-2. Paper no. TSTE-00107-2017. (*Corresponding author: John F. Franco.*)

N. Bañol Arias, A. Tabares, and R. Romero are with the Department of Electrical Engineering, São Paulo State University (UNESP), Ilha Solteira 15385-000, Brazil (e-mail: natycanta@gmail.com; tabares.1989@gmail.com; ruben@dee.feis.unesp.br).

J. F. Franco is with São Paulo State University (UNESP), Rosana 19274-000, Brazil (e-mail: j.f.franco@ieee.org).

M. Lavorato is with the CEATEC—Pontifical Catholic University of Campinas, Campinas 13086-900, Brazil (e-mail: marina.oliveira@pu-campinas.edu.br).

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TSTE.2017.2764080

Household charging is the first choice for EV owners, although the corresponding slow charging mode is time-consuming [2]. On the other hand, electric vehicle charging stations (EVCSs) are a suitable option for EV charging, as they could avoid overloading residential distribution networks, while allowing both slow (preserving battery lifespan) and fast charging modes. EVCSs could also offer lower energy prices and reduce charging time (similar to the refueling of conventional vehicles) when compared to residential charging. These benefits will potentially encourage the use of EVs.

A high penetration of EVs in residential and commercial areas could result in operational problems, such as overloads, voltage issues, and excessive energy losses [3]. Therefore, the EDS expansion planning should satisfy the energy requirements of upcoming EV penetration for both household charging and EVCSs.

The solution of the EDS expansion planning problem identifies the investments needed to supply the future loads while satisfying operational constraints. This optimization problem is highly complex and *NP-hard*, due to the binary variables that represent the construction and/or allocation of new equipment and the high number of continuous variables used to represent the steady-state operation of the network. This problem has been widely studied, using different mathematical models and solution techniques. Nonetheless, the expansion planning of the EDS, considering the high penetration of EVs, needs to be studied further. A complete literature review of the EDS expansion planning problem can be found in [4].

Methods based on evolution algorithms and Mixed-Integer Linear Programming (MILP) have been developed to solve the EDS expansion planning problem considering the integration of EVs [5]–[8]. The allocation of EV battery charging/swapping stations is carried out in [5] to minimize the costs related to reinforcement and adaption (construction costs necessary to cover the insufficiency of the plan). A method to solve the multistage EDS expansion planning problem, which takes into account the allocation and sizing of EVCSs, is proposed in [6]. Similarly, in [7] and [8], the joint expansion planning of EDS and EVCSs is addressed. In [7], the authors establish a bi-objective deterministic collective planning model for EDS that considers EVCSs, although the stochastic behavior of EV users, along with different EV charging modes, is disregarded. Moreover, the increase in the annual demand, impacts of the geographic locations, and time periods of fast- and slow-charging modes, in the expansion planning are not considered. In order to overcome those

limitations, the authors in [8] propose a stochastic multistage collaborative planning model for EDS that considers EVCSs, slow- and fast-charging modes, and battery exchange. Nevertheless, the metaheuristic technique used to solve the problem does not provide information related to the quality of the solution (e.g., the distance from the obtained solution to the optimal solution), and there is not a way to define the level of confidence to address uncertainties related to demand profiles. On the other hand, the allocation of Distributed Generation (DG) units and Capacitor Banks (CB), is also disregarded in [5]–[8]. The installation of these equipment's should also be included in the expansion planning, as they could defer reinforcement, resulting in the reduction of investments [9].

The allocation and sizing problem of EVCSs is studied in [10]–[17]; nevertheless, these approaches solve the problem without considering the joint expansion planning of the whole grid. Reference [10] models the EVCS behavior, taking into account market interactions (reserve and energy markets), DG units operation and enforce network constraints in a two-stage approach. However, the proposed methodology in [10] is mostly focused on the EVCS operation planning. Similarly, in [11], a two-stage methodology to solve the optimal planning of EVCSs was proposed. Environmental factors, service radius, and different charger types are included in the proposed method; however, the authors disregarded the operation of both CBs and DG units, and the inclusion of different types of EVs. Metaheuristic techniques, such as genetic algorithms [12]–[14] and particle swarm optimization [16], [17], have also been used to solve the optimal allocation and sizing of EVCSs. From those works, only [17] considers the operation of DG units within the method. Moreover, in contrast to classical optimization techniques (such as those used in this paper), the main disadvantage of the metaheuristic techniques is that they do not guarantee optimal solutions.

Different from the previous works, authors in [18] present a new methodology for the optimal allocation of EVCSs based on a sustainability perspective. A multicriteria decision-making (MCDM) method, along with a fuzzy TOPSIS method, are used to take into account aspects related to economic growth, social development, and environmental protection. The EVCS allocation decision is carried out based on the criteria of five groups of expert panels, without considering mathematical models to represent the problem. This methodology allows for the consideration of quantitative and qualitative criteria, which are important in the allocation and sizing of EVCSs. However, from the EDS point of view, technical aspects of the grid operation should be verified.

Uncertainties associated with the growth of conventional loads and EV demand should be considered in the EDS expansion planning problem in order to reduce risks and avoid underinvestment, which could lead to operational problems. From the aforementioned references, [5], [10], [13], and [17] consider both the uncertain behavior of EVs as well as the operational constraints of the EDS, whereas [14] only considers the uncertain behavior of EVs. In [5], the uncertainty associated with EV demand is addressed using a geometric Brownian motion approach, while in [10], it is dealt with a two-stage stochastic

programming model, along with an approach for generation of scenarios. Moreover, in [13] and [14], the authors represent the uncertainties of the EVs through probabilistic parameters and probability distribution functions for the arrival and SOC data, while in [17], the hourly aggregated load demand of EVs is estimated using a non-Gaussian multivariate stochastic model provided by copula functions. Nevertheless, none of those studies considers the uncertainty associated with the conventional loads.

Most of the aforementioned methods focus on modeling the allocation and sizing of the EVCSs based on their planning operation. In contrast to them, the main purpose of the proposed method is to consider the allocation and sizing of the EVCSs within the expansion planning of the EDS, in order to illustrate the impact of the EV integration in distribution systems, according to the EV connection point.

This paper presents a MILP model used to solve the robust multistage joint expansion planning of EDSs and the allocation of EVCSs. The proposed robust formulation uses chance constraints to deal with the uncertainties related to conventional loads and EV demand, guaranteeing the fulfillment of the substation capacity within a specified confidence level. The expansion planning method considers the construction/reinforcement of substations, EVCSs, and circuits, as well as the allocation of DG units and CBs along the different stages in which the planning horizon is divided. Similarly to [9], piecewise linearization was used to represent the square of active and reactive powers in the equations that model the steady-state operation of the EDS. Therefore, the proposed method is a MILP formulation that can be solved guaranteeing optimality using commercial solvers such as CPLEX. The main contributions of this paper relies on the application of

- 1) A chance constraint stochastic programming framework [19], which is suitable for addressing the uncertainties related to conventional loads and EV demand in the EDS expansion planning. This approach ensures the fulfillment of the substation capacity (the most important equipment of the network) within a confidence level, as was done in [20];
- 2) Linearizations and simplifications, formulated in order to consider the stochastic behavior of conventional loads and EV demand in the EDS expansion planning problem. In contrast to other works, which use methods based on chance constraint stochastic programming, the proposed formulation makes it possible to incorporate different network equipment, such as DG units and CBs;
- 3) A mixed-integer linear formulation for the EDS expansion planning, which guarantees finite convergence to optimality while providing a measure of the distance to the optimum solution [21], and for which efficient software is available [22];
- 4) A novel analysis of the EV integration in distribution systems, which examines the impact of EV demand on the multistage expansion planning of EDS according to the connection point, along with a comparative analysis, which shows the benefits of including the uncertainty of

the conventional loads and EV demand in the distribution planning when compared with deterministic models.

The effectiveness and robustness of the proposed method is verified via a 18-node and 54-node test system. Additionally, Monte Carlo simulations are carried out, aiming to verify the compliance of the proposed chance constraint.

II. MULTISTAGE EXPANSION PLANNING OF EDSS, CONSIDERING EVCSs

As discussed in the previous section, the main goal of the EDS expansion planning is to adequately meet the load growth with a minimum total cost, subject to a set of technical and operational constraints. The complexity of the distribution planning has been increased over the past few years, due to the emergence of new network elements and the stochastic behavior of new loads (e.g., plug-in electric vehicles). In this context, the proposed method defines the investments needed to satisfy the load growth while keeping a suitable operation. The construction/reinforcement of substations and circuits is analyzed along different stages of the planning horizon, in an attempt to minimize the total investment and operational cost. In addition, DG units and CBs are considered, in order to improve the operation.

The expansion planning of the EDS should also take into account the allocation and sizing of EVCSs (from a set of suitable candidate nodes), which provide the energy required to charge EVs. Since previous works have focused on the operation of EVCSs without considering the expansion of the network [10]–[17], the proposed model is aimed toward a joint expansion planning of EDS and EVCSs. For this purpose, the operation of an EVCS and the corresponding EV charging process should be represented. However, the formulation of this charging process within the expansion planning is complex. Due to this fact, some details related to the operation of an EVCS are simplified within the formulation of the expansion planning. For instance, the EVCS operation issues (i.e., difference in the EV arrivals, waiting/idle times, and charging coordination) are simplified, assuming that the corresponding power is demanded in a typical day during a specific period of time (e.g., 12 hours), represented by dw^{cs} .

It is assumed that not all the EVs arrive at the EVCS at the same time; it is further assumed that the charging operation follows a “first come, first served” sequence. Thus, if an EV arrives while all of the chargers are in use, it has to wait until the next charger becomes available. The fact that the EVs have different states of charge (SOC) at arrival is represented by the factor ϕ_{soc} , which depends on each EV type, the daily distance driven, and other aspects related to the behavior of the EV owners. This factor is considered as the mean value of the SOC, which usually is represented by a Gaussian distribution function.

The proposed formulation identifies the optimal solution for the EVCSs, i.e., their location and the minimum number of chargers of each type required to meet the EV demand in each stage along the planning horizon. In order to represent the worst case for the EDS operation, it is assumed that the chargers are connected simultaneously and are demanding their rated power from the grid.

The following assumptions are made in order to formulate a mathematical model for the multistage EDS expansion planning problem considering EVCSs:

- 1) Given an EV penetration for each stage, the allocation and sizing of EVCSs is proposed by the distribution system operator, as considered in [5], [6], [10], [11]. This idea stems from the fact that the EDS must be prepared to satisfy the charging requirements resulting from the expected increase of the EV demand;
- 2) A fraction of the EVs are charged in the EVCSs, while the rest are charged at home, therefore, increasing the conventional load;
- 3) The EVs can be recharged using two charger types (fast or slow chargers).

Uncertainties related to the growth of conventional loads and EV demand are handled in the proposed model through chance constraints (see Section III-G), which guarantee the fulfillment of the substation capacity within a specified confidence level. It is assumed that the power related to the conventional loads and the number of EVs connected in the EDS are independent normal variables, as discussed in [23], i.e., there is not a correlation between the variables, which facilitates the calculation of the mean value and the standard deviation of the substation’s apparent power.

III. MATHEMATICAL MODEL

The multistage EDS expansion planning problem can be mathematically formulated as a mixed-integer nonlinear programming (MINLP) model, which is highly complex to solve [24], [25]. Thus, linearization techniques can be used in order to transform the formulation into an MILP model. The proposed MILP formulation, which is based on [9], is used for solving the robust multistage joint expansion planning of EDSs and the allocation of EVCSs.

Due to the complexity of the EDS expansion planning and the relatively high substation investment cost, the proposed robust formulation uses chance constraints, which consider uncertainties related to conventional loads and EV demand, to enforce the capacities of the substations. The uncertainty of the conventional load and EV demand is modeled through a known normal distribution variable for the loads, as well as for the number of EVs that should be charged in each stage of the planning horizon. On the other hand, voltage and current limits are imposed in a deterministic way, i.e., mean values are assumed for the demands.

Equations that represent the influence of EVCSs on the EDS expansion planning, are presented in this section. Due to the lack of space, equations related to the operational limits of CBs and DG units, as well as the radiality conditions, are not shown. However, a complete definition of these constraints can be found in [9].

The following index will be used to represent the corresponding sets: a, b, c for conductor types; i for nodes; h, t, r for substation alternatives; e for charger types; g for DG unit alternatives; s for substation nodes; ij, kj for circuits; u, k for stages; v for EV types; p for EVCS nodes; and m for DG unit nodes.

A. Objective Function

The objective function minimizes the total expansion planning cost, comprising the investment, the operational, and the energy loss costs along the planning horizon. The investment costs in the circuits (IC), substations (IS), capacitors banks (ICB), and DG units (IDG) are calculated by (1)–(4), respectively. This set of equations is written in terms of the variables that represent the investment decisions. Thus, the binary investment variable $x_{ij,a,b,u}^{cir}$ that represents the construction/reinforcement (using conductor type b and assuming initial type a) is used to calculate the investment in the circuit, considering the conductor type cost ($c_{ij,a,b}^c$) and its length (l_{ij}). In a similar way, the cost related to the substations is calculated by using the binary variable for construction/reinforcement $x_{s,h,t,u}^{sub}$ (using substation type t and assuming initial type h) and the corresponding cost $c_{s,h,t}^s$. Moreover, the cost of CBs depends on the decision variables (binary for installation, $x_{i,u}^{cb}$, and integer for the number of standard capacitor units, $n_{i,u}^{cb}$) and the corresponding costs (c^{cb} for installation and c^{mod} per module). The investment in DG units is calculated according to the binary installation variable $x_{m,g,u}^{dg}$ and the installation cost c_g^{dg} .

The cost associated with the EVCS (ICS) is calculated by (5) in terms of the decision variables (binary for the allocation and integer for the number of chargers, $x_{p,u}^{cs}$ and $n_{p,e,u}^{chi}$, respectively) and the installation costs (parameters c_e^{cs} and c_e^c for the EVCS and the chargers, respectively). Note that the maintenance cost and operational cost of the EVCS are not considered explicitly, although they can be included within the installation costs.

$$IC = \sum_{ij} \sum_a \sum_b c_{ij,a,b}^c x_{ij,a,b,u}^{cir} l_{ij} \quad (1)$$

$$IS = \sum_s \sum_h \sum_t c_{s,h,t}^s x_{s,h,t,u}^{sub} \quad (2)$$

$$ICB = \sum_i (c^{cb} x_{i,u}^{cb} + c^{mod} n_{i,u}^{cb}) \quad (3)$$

$$IDG = \sum_m \sum_g c_g^{dg} x_{m,g,u}^{dg} \quad (4)$$

$$ICS = \sum_p \sum_e (c_e^{cs} x_{p,u}^{cs} + c_e^c n_{p,e,u}^{chi}) \quad (5)$$

The energy cost (EC) and the operational cost of substations (OS) are calculated by (6) and (7). The EC is written in terms of the cost of the energy imported by the substation (c^e), the energy cost of the DG units (c_g^{edg}), and the corresponding active powers $P_{s,u}^S$ and $P_{m,u}^{DG}$, multiplied by the number of hours in one year (α) and the load factor (ϕ_l). The OS is calculated using the apparent power supplied by the substation that depends on the square approximation of the active and reactive power ($P_{i,u}^S$ and $Q_{i,u}^S$, respectively), the operation cost (c_s^v), and the loss factor ϕ_s . Moreover, the function $f(\rho, \bar{\rho}, \Gamma)$ represents a piecewise linearization of the square value of a variable ρ , and it is written in terms of its maximum value $\bar{\rho}$ and the number of discretization intervals Γ , as described in the appendix.

The function $\zeta(\tau, K) = (1 - (1 + \tau)^{-K})\tau^{-1}$ in (6) and (7) is used to calculate the present value of an annualized cost that has a duration of K years in terms of the interest rate τ . Thus, K represents the number of years of each stage.

$$EC = \alpha \phi_l \left(\sum_s c^e P_{s,u}^S + \sum_m \sum_g c_g^{edg} P_{m,u}^{DG} \right) \zeta(\tau, K) \quad (6)$$

$$OS = \sum_s \alpha \phi_s c_s^v \sum_t [f(P_{s,u}^S, \bar{S}_t, \Gamma) + f(Q_{s,u}^S, \bar{S}_t, \Gamma)] \zeta(\tau, K) \quad (7)$$

Therefore, the objective function is defined as

$$\min \sum_u \frac{IC + IS + ICB + IDG + ICS + EC + OS}{(1 + \tau)^{-(u-1)K}} \quad (8)$$

B. Fundamental Constraints of the EDS

The set of equations (9)–(12) corresponds to Kirchhoff's laws and represents the operation of radial EDSs [9]. Constraints (9) and (10) represent the active and reactive power balance, which guarantee that all loads are supplied, i.e., Kirchhoff's first law. Constraint (11) calculates the current magnitude throughout the circuit ij , while constraint (12) defines the voltage drop in the circuit ij in terms of its connection status (represented by the binary variable $y_{ij,a,u}^{cir}$), the active and reactive power flows ($P_{ij,a,u}$ and $Q_{ij,a,u}$), and the square of the current ($I_{ij,a,u}^{sqr}$). These variables are different from zero only if the corresponding conductor type a is chosen, i.e., $y_{ij,a,u}^{cir}$ is equal to one. Thus, (11) and (12) represent Kirchhoff's second law for each fundamental loop.

$$\sum_{kj} \sum_a P_{kj,a,u} - \sum_{ij} \sum_a (P_{ij,a,u} + R_a l_{ij} I_{ij,a,u}^{sqr}) + P_{i,u}^S + \sum_g P_{i,g,u}^{DG} = P_{i,u}^D + \sum_e n_{i,e,u}^{cho} P_e^{ch} \quad \forall i, u \quad (9)$$

$$\sum_{kj} \sum_a Q_{kj,a,u} - \sum_{ij} \sum_a (Q_{ij,a,u} + X_a l_{ij} I_{ij,a,u}^{sqr}) + n_{i,u}^{bco} Q^{cb} + Q_{i,u}^S + \sum_g Q_{i,g,u}^{DG} = Q_{i,u}^D \quad \forall i, u \quad (10)$$

$$V_{j,u}^2 I_{ij,a,u}^{sqr} = f(P_{ij,a,u}, \bar{V}_a, \Gamma) + f(Q_{ij,a,u}, \bar{V}_a, \Gamma) \quad \forall ij, a, u \quad (11)$$

$$|V_{i,u}^{sqr} - V_{j,u}^{sqr} - \sum_a [2(R_a P_{ij,a,u} + X_a Q_{ij,a,u}) l_{ij} + Z_a^2 l_{ij}^2 I_{ij,a,u}^{sqr}]| \leq (\bar{V}^2 - \underline{V}^2) \sum_a (1 - y_{ij,a,u}^{cir}) \quad \forall ij, u \quad (12)$$

The EV demand is represented on the right-hand side of (9) as the product of the rated active power of each charger type (P_e^{ch}) and the number of chargers operating in the corresponding EVCS ($n_{i,e,u}^{cho}$). The set of equations above uses the

following variables and parameters: $P_{i,u}^D$ and $Q_{i,u}^D$ are the active and reactive power demands at node i ; R_a , X_a , and Z_a are the resistance, reactance, and impedance per length of conductor type a , respectively; $n_{i,u}^{cb}$ is the number of standard capacitor units operating at node i , while Q^{cb} is the reactive power of each capacitor unit; $Q_{i,g,u}^{DG}$ is the reactive power supplied by the DG unit at node i . \underline{V} and \bar{V} are the lower and upper voltage limits, respectively, while \bar{I}_a is the current limit of conductor type a . The parameter $V'_{j,u}$ is the estimated voltage at node i , and it is used to obtain a linear expression on the left-hand side of (11), as proposed in [9].

Operational constraints, such as voltage and current limits in the system, are defined by (13) and (14), respectively.

$$\underline{V}^2 \leq V_{i,u}^{sqr} \leq \bar{V}^2 \quad \forall i, u \quad (13)$$

$$0 \leq I_{ij,a,u}^{sqr} \leq \bar{I}_a^2 y_{ij,a,u}^{cir} \quad \forall ij, a, u \quad (14)$$

C. Logical Constraints Associated With Substations

Constraints (15)–(19) allow for the coordination of the investment and operation of the substations along the planning horizon. The investment types correspond to the available apparent power capacities for the construction/reinforcement of the substations. In this way, the binary variable $x_{s,h,t,u}^{sub}$ represents the option to construct/reinforce a substation using type t from initial type h (only transitions in which $t > h$ are allowed). Moreover, the substation types are sorted incrementally, according to the power capacity and the investment costs. Constraint (15) avoids the execution of more than one type of investment in the same stage (i.e., only one of the available power capacities can be chosen for construction/reinforcement), while (16) guarantees that a specific investment in a substation (from h to t) can be carried out only one time along the planning horizon. In addition, (17) establishes that the reinforcement of a substation using initial type h can be done only if that type was used to construct/reinforce the substation in previous stages. The binary parameter $\theta_{s,h}^{sub}$ represents the initial state of the substation at the beginning of the planning horizon, i.e., it is 1 if the substation was constructed and 0 otherwise. Finally, (18) guarantees that the operation of a substation is enabled only if the corresponding investment was carried out, while (19) allows for the operation of the substation using only one type of investment in each stage, following the same logic as (15) for the operation state.

$$\sum_h \sum_t x_{s,h,t,u}^{sub} \leq 1 \quad \forall s, u \quad (15)$$

$$\sum_u x_{s,h,t,u}^{sub} \leq 1 \quad \forall s, h, t \quad (16)$$

$$x_{s,h,t,u}^{sub} \leq \theta_{s,h}^{sub} + \sum_{k=1}^{u-1} \sum_r x_{s,r,h,k}^{sub} \quad \forall s, h, t, u \quad (17)$$

$$y_{s,t,u}^{sub} \leq \theta_{s,t}^{sub} + \sum_{k=1}^u \sum_h x_{s,h,t,k}^{sub} \quad \forall s, t, u \quad (18)$$

$$\sum_t y_{s,t,u}^{sub} \leq 1 \quad \forall s, u \quad (19)$$

D. Logical Constraints Associated With Circuits

Constraints (20)–(24) enable the coordination of the investment and operation of the circuits along the planning horizon. This set of equations follows the same logical structure of the constraints related to the coordination of the investment and operation of the substations. The investment types correspond to the available current capacities for the construction/reinforcement of the circuits. In this way, the construction/reinforcement of a circuit using type b from initial type a is represented by the binary variable $x_{ij,a,b,u}^{cir}$ (only transitions in which $b > a$ are allowed). The operation of a circuit using type b is represented by the binary variable $y_{ij,b,u}^{cir}$, and the binary parameter $\theta_{ij,a}$ represents the initial state of the circuit at the beginning of the planning horizon, i.e., it is 1 if the circuit was constructed and 0 otherwise.

$$\sum_a \sum_b x_{ij,a,b,u}^{cir} \leq 1 \quad \forall ij, u \quad (20)$$

$$\sum_u x_{ij,a,b,u}^{cir} \leq 1 \quad \forall ij, a, b \quad (21)$$

$$x_{ij,a,b,u}^{cir} \leq \theta_{ij,a}^{cir} + \sum_{k=1}^{u-1} \sum_c x_{ij,c,a,k}^{cir} \quad \forall ij, a, b, u \quad (22)$$

$$y_{ij,b,u}^{cir} \leq \theta_{ij,b}^{cir} + \sum_{k=1}^u \sum_a x_{ij,a,b,u}^{cir} \quad \forall ij, b, u \quad (23)$$

$$\sum_b y_{ij,b,u}^{cir} \leq 1 \quad \forall ij, u \quad (24)$$

E. Mathematical Modeling of EVCSs

The set of equations (25)–(28) used to model the EVCSs was developed according to the assumptions established in Section II. Constraint (25) guarantees that an EVCS can be allocated only one time in a node along the planning horizon. In addition, (26) allows the installation of chargers (considering the maximum number \bar{C}_p) only if an EVCS was already allocated. Constraint (27) limits the number of chargers operating in each stage such that they do not exceed the number of chargers already installed.

$$\sum_u x_{p,u}^{cs} \leq 1 \quad \forall p \quad (25)$$

$$\sum_e \sum_{k=1}^u n_{p,e,k}^{chi} \leq \bar{C}_p \sum_{k=1}^u x_{p,k}^{cs} \quad \forall p, u \quad (26)$$

$$n_{p,e,u}^{cho} \leq \sum_{k=1}^u n_{p,e,k}^{chi} \quad \forall p, e, u \quad (27)$$

Equation (28) relates the number of EVs of type v that need to be charged ($N_{v,u}^{EV}$) with the number of EVs that are assigned to different charger types ($n_{e,v,u}^{ev}$). The term on the right-hand side of (28) is used to consider the stochastic behavior associated with the number of EVs, and it depends on the robustness factor $\phi(\varepsilon)$ corresponding to the area under a normal distribution curve for a confidence level of $1 - \varepsilon$ and the standard deviation of the number of EVs ($\sigma_{v,u}^{EV}$). Moreover, (29) establishes that

the energy that can be supplied by the chargers during their operating time dw^{cs} should satisfy the energy required by the EVs. It is written in terms of the rated power of the charger type e (P_e^{ch}), the energy required by an EV of type v (E_v^{req}), the difference between the maximum EV SOC (ϕ_{soc}^{max}), and a factor that represents the EV SOC at arrival (ϕ_{soc}).

$$\sum_e n_{e,v,u}^{ev} = N_{v,u}^{EV} + \phi(\varepsilon)\sigma_{v,u}^{EV} \quad \forall v, u \quad (28)$$

$$\sum_p P_e^{ch} n_{p,e,u}^{cho} dw^{cs} \geq \sum_v n_{e,v,u}^{ev} E_v^{req} (\phi_{soc}^{max} - \phi_{soc}) \quad \forall e, u \quad (29)$$

F. Chance Constraints for the Substation Capacity

Chance constrained programming is a type of robust programming that incorporates randomness in the model via a probabilistic measure over uncertain constraints [19]. The constraints, which contain stochastic parameters, are guaranteed to be satisfied with a certain probability at the optimum solution point. Thus, the chance constraint (30) considers the stochastic behavior of the conventional loads and EV demand, and it guarantees the fulfillment of the substation capacity within a determined confidence level. This constraint is written in terms of the stochastic apparent power supplied by the substation ($\tilde{S}_{s,u}$), the capacity (\bar{S}_t), and the investment variables. It guarantees that the substation capacity is satisfied considering a robustness probability (related to the robustness parameter ε).

$$Prob\left\{\tilde{S}_{s,u} \leq \sum_t \bar{S}_t y_{s,t,u}^{sub}\right\} \geq 1 - \varepsilon \quad \forall s, u \quad (30)$$

Chance constraint (30) can be represented by the linear constraint (31), as proposed in [19], in which $S_{s,u}$ and $\sigma_{s,u}$ are, respectively, the mean value and the standard deviation of the apparent power supplied by the substation.

$$S_{s,u} + \phi(\varepsilon)\sigma_{s,u} \leq \sum_t \bar{S}_t y_{s,t,u}^{sub} \quad \forall s, u \quad (31)$$

It is necessary to obtain an expression relating the uncertain load with the apparent power supplied by the substations. Since there is not an explicit relationship between the active power demand and the apparent power of the substation, and due to the nonlinear relationship between active, reactive, and apparent power (given by $S_{i,u} = \sqrt{P_{s,u}^2 + Q_{s,u}^2}$), the calculation of the mean and the standard deviation of $\tilde{S}_{s,u}$ is complex. Therefore, these values are calculated by estimating the active power and assuming a power factor for the power supplied by the substation (ϕ_{pf}). For this purpose, the active power supplied by the substation can be expressed in terms of the uncertain demands ($\tilde{P}_{i,u}^D$), the EV demand represented by the number of chargers ($n_{i,e,u}^{cho}$) with its corresponding rated power (P_e^{ch}), the power injected by the DG units, and the power losses, as shown in (32). Moreover, it is assumed that the power losses correspond to a percentage of the total active power supplied by the

substation ($\%P^{loss}$).

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{s,u} = & \sum_i \omega_{s,i,u}^{sub} \left[(1 + \%P^{loss}) (\tilde{P}_{i,u}^D + \sum_e n_{i,e,u}^{cho} P_e^{ch}) \right. \\ & \left. - \sum_g P_{i,g,u}^{DG} \right] \phi_{pf}^{-1} \quad \forall s, u \end{aligned} \quad (32)$$

The binary variable $\omega_{s,i,u}^{sub}$ indicates whether the node i is connected to the substation s ; it is obtained from the analytical formulation that finds the shortest path through a radial graph between each node and its corresponding source, as explained in [26].

Since it is assumed that the loads are independent normal variables, the mean value for the apparent power is obtained from (32) by taking the mean values of the demands, as shown in (33).

$$\begin{aligned} S_{s,u} = & \sum_i \omega_{s,i,u}^{sub} \left[(1 + \%P^{loss}) (P_{i,u}^D + \sum_e n_{i,e,u}^{cho} P_e^{ch}) \right. \\ & \left. - \sum_g P_{i,g,u}^{DG} \right] \phi_{pf}^{-1} \quad \forall s, u \end{aligned} \quad (33)$$

On the other hand, the standard deviation for the apparent power is calculated by (34)–(35), considering that, for normal distribution functions, the variance of the apparent power ($\sigma_{s,u}^{sq}$) corresponds to the sum of the load variances ($\sigma_{i,u}^D$) and that the variance ($\sigma_{s,u}^{sq}$) is the square of the standard deviation ($\sigma_{s,u}$), (approximated using the function f and a maximum value $\bar{\sigma}_{s,u}$).

$$\sigma_{s,u}^{sq} = \left[(1 + \%P^{loss}) \phi_{pf}^{-1} \right]^2 \sum_i \sigma_{i,u}^D \omega_{s,i,u}^{sub} \quad \forall s, u \quad (34)$$

$$\sigma_{s,u}^{sq} = f(\sigma_{s,u}, \bar{\sigma}_{s,u}, \Gamma) \quad \forall s, u \quad (35)$$

Thus, the proposed MILP model, described by (1)–(29), (31), and (33)–(35), is a robust formulation for the multistage joint expansion planning of EDSs and EVCSs, which considers the stochastic behavior of the conventional loads and EV demand. This MILP model can be solved using classical optimization techniques to find the optimal solution that guarantees the fulfillment of the substation capacity within a robustness level.

IV. TEST AND RESULTS

The mathematical model described in Section III was implemented in AMPL [21] and solved via CPLEX [22]. The application of the proposed model is illustrated using a didactic 18-node distribution system adapted from [9] and 54-node distribution system [27].

A. Expansion Planning for the 18-Node Distribution System

The didactic 18-node distribution system has 4 substations, 14 load nodes, and 26 circuits, and a nominal voltage of 20 kV. Two substations of type 1 are constructed in nodes 15 and 16 at the beginning of the planning horizon, as shown in Fig. 1. Furthermore, continuous lines represent constructed circuits, while dashed lines represent circuits for expansion and red numbers correspond to the circuit length. Three planning stages are

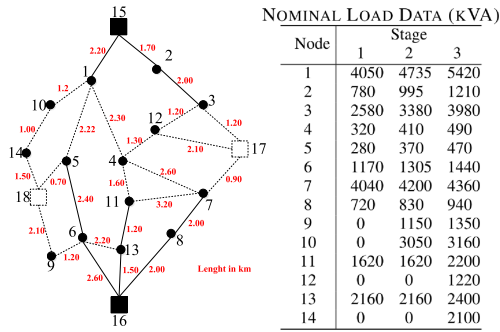


Fig. 1. Initial Topology of the 18-node System.

TABLE I
SUBSTATION AND CIRCUIT COSTS (10^3 \$)

Initial type	Substations		Circuits	
	Final type		Final type	
1	1	2	1	2
0 (not build)	1000	1800	25	35
1	-	800	-	30

considered, each one with a duration of 5 years; the load data for each stage is shown in Fig. 1.

Two substation types are available for this system, with capacities of 8 MVA and 12 MVA, while two circuit types are considered, with capacities of 197 A and 314 A [9], [20]. The construction and reinforcement costs of the substations and circuits are shown in Table I. The interest rate is defined as 10%. c_s^v is 0, i.e., the operational costs of the substations are neglected. One type of DG unit is considered, with a cost equal to $\$ 2200 \cdot 10^3$, a capacity of 3000 kVA, and a power factor of 0.95. The candidate nodes for allocating DG units are $\{1, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, and a limit of 35% for the DG penetration is adopted. The capacitor allocation considers a limit of six CBs, with at most four modules per bank; parameters c^{cb} , c^{mod} , and Q_{bc}^{esp} are $\$ 1000$, $\$ 900$, and 300 kVar, respectively.

Two types of EVs are considered to represent the whole EV population: a Tesla and a Nissan Leaf, with battery capacities of 50 kWh and 25 kWh. Moreover, the factor ϕ_{soc} is assumed to be 0.5, based on the probability distribution function for the initial EV SOC presented in [28]. The EV penetration level, i.e., the percentage of users with an EV, is 2%, 11%, and 30% for each stage of the planning horizon [15]. It is also assumed that 20% of the EVs are charged at home, while the other 80% are charged in public EVCSs. Therefore, 210, 1688, and 5521 EVs along the three stages are charged in the EVCSs.

The installation cost of an EVCS, including the operational cost, is defined as $c^{cs} = \$ 500$ (the operational cost is considered to be 10% of the installation cost [29]). The operation time of the EVCSs is defined as 12 hours per day. The candidate nodes for allocating EVCSs are $\{3, 8, 9, 10, 11\}$. These locations should have suitable characteristics related to the space and support from nearby residents, as mentioned in [5]. Two types

TABLE II
SUMMARY INVESTMENT AND OPERATIONAL COSTS (10^3 \$)

COST	Case A	Case B	Case C
IS	1,006.46	385.54	1,006.46
IC	397.74	355.32	339.11
ICB	21.79	23.39	24.22
IDG	7,462.42	5,766.03	5,766.03
ICS	0.00	2,324.73	2,875.22
EC	67,111.42	58,318.91	59,326.24
Total	75,999.83	67,173.91	69,337.29

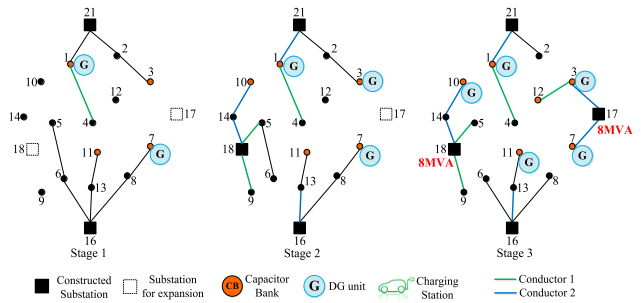


Fig. 2. Multistage EDS expansion planning for Case A.

of chargers, denoted as FC (fast charger), with $c_e^c = 60$ US \$ and $P_e^{ch} = 50$ kW, and SC (slow charger), with $c_e^c = 9$ US \$ and $P_e^{ch} = 10$ kW, are used in the EVCSs [29], [30].

The results for the EDS expansion planning are analyzed considering a deterministic and robust approach. First, the proposed model is evaluated using deterministic values for the demands, i.e., the corresponding standard deviations are zero. Then, future uncertainties related to the demands are taken into account by the robust formulation.

1) *Deterministic Approach:* In order to analyze the multi-stage joint expansion planning of EDSs and EVCSs from a deterministic approach, two cases are evaluated: expansion planning without EVCSs (Case A) and expansion planning considering the allocation and sizing of EVCSs (Case B). In Case A, it is assumed that all of the EVs are charged in homes (i.e., home charging mode) at the peak hour, assuming the worst case for the EDS operation. Table II shows a summary of the investment and operational costs for each case. It can be noted that there is a positive impact on the EDS, due to the allocation of EVCSs. When the EV demand is distributed in each node of the EDS (i.e., Case A), the conventional load is increased, and additional investments are required to meet the total demand. Indeed, Case A presents higher investment costs in substations, circuits, and DG units, as well as in the the energy cost supplied by the substations and the DG units along the planning horizon. In Case B, wherein the EV demand is concentrated in some nodes of the system (i.e., EV charging in EVCSs), the investment and operational costs are reduced by 3.12% approximately, resulting in a positive impact for the EDS in comparison with Case A. The expansion plans for both cases are illustrated in Figs. 2 and 3 (topology in operation is shown). Note that, without EVCSs (Fig. 2), the

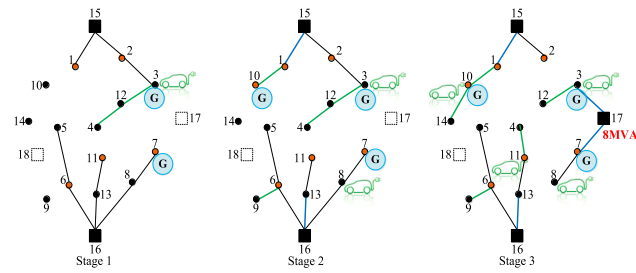


Fig. 3. Multistage EDS expansion planning for Case B.

TABLE III
NUMBER OF CHARGERS: DETERMINISTIC APPROACH

Stage	1		2		3	
	FC	SC	FC	SC	FC	SC
3	2	9	14	7	23	187
8	-	-	7	1	-	-
14	-	-	-	-	1	3
15	-	-	-	-	-	23
Total	2	9	21	8	24	213

TABLE IV
NUMBER OF CHARGERS: ROBUST APPROACH

Stage	1		2		3	
	FC	SC	FC	SC	FC	SC
3	-	-	6	-	-	52
8	3	8	2	-	16	41
13	-	-	-	-	3	214
14	-	-	20	1	2	6
Total	3	8	28	1	21	313

substations at nodes 17 and 18 are constructed in Stage 3, and most of the circuits are built with higher capacity conductors.

In Case B, when EVCSs are considered, the topology of the network is different. Substation 17 is constructed in Stage 3, and different circuits are constructed/reinforced using, mostly, conductors with lower capacity (see Fig. 3). Furthermore, the allocation of the DG units and CBs is also different when the EVCSs are considered in the expansion planning. Only three DG units are installed in Stage 3 for Case B, while for Case A, five DG units are required in the same stage. The EVCSs are mainly allocated at nodes near the DG units and CBs, in an attempt to maintain a suitable operation of the EDS. For instance, one EVCS is located at node 3, along with a DG unit in Stage 1, and another EVCS and a CB are located at node 11 in Stage 3.

Table III shows the number of each type of charger allocated in each node and each stage for Case B. Four EVCSs and 277 chargers (47 FCs and 230 SCs) are necessary to meet the power demand of the EVs during the planning horizon.

Finally, it must be highlighted that, in both cases, some circuits are disconnected in order to maintain the radial operation of the EDS.

TABLE V
FAILURE RATE OF THE SUBSTATION CAPACITY (%)

Substation	Stage 1				Stage 2				Stage 3			
	15	16	17	18	15	16	17	18	15	16	17	18
Case B	0.0	0.2	-	-	3.9	67.9	-	-	43.8	36.6	0.4	-
Case C	0.0	1.4	-	-	0.0	0.0	0.2	-	0.0	2.6	2.2	1.0

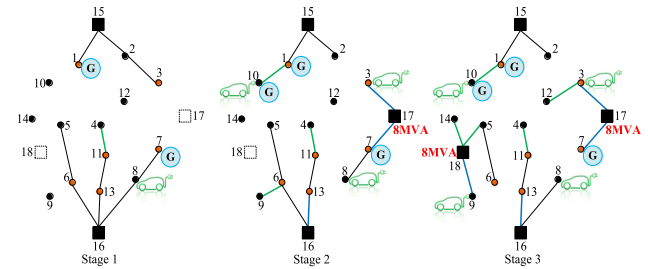


Fig. 4. Multistage EDS expansion planning for Case C.

2) *Robust Approach*: The multistage joint expansion planning of the EDS and EVCSs is analyzed considering the stochastic behavior of the conventional loads and EV demand. Case B is extended, and the expansion planning, considering allocation and sizing of the EVCSs, is solved using the proposed robust formulation (Case C). It is assumed that the conventional load and the number of EVs follow a normal distribution. The mean values for the loads are the ones shown in Fig. 1, while the mean values for the number of EVs are the same as those in Case B. Moreover, the standard deviations are equal to 15% of the corresponding mean values.

The robustness parameter used in the chance constraint for the substation capacity and the estimation of the number of EVs is 5%, i.e., $\phi(\varepsilon)$ is equal to 1.645. This value guarantees the accomplishment of the substation capacity constraint with a probability of 95%. Furthermore, it covers 95% of the area under the normal distribution curve for the EV penetration.

The investment and operational costs for Case C are shown in Table II. It should be noted that the total cost of the robust solution is higher than the total cost of the deterministic solution (Case B), a difference of approximately 4%. This fact is due to the additional investments required to guarantee enough capacity of the substations, in order to account for uncertainties in the demand.

In Case C, two new substations are constructed along the planning horizon: Substations 17 and 18 in Stages 2 and 3, respectively (see Fig. 4). It must be highlighted that, in comparison with Case B, one additional substation should be built to avoid possible overloads related to demand growth that may be larger than expected. It should also be noted that the investments in the circuits and the topology of the EDS are different in comparison with Case B, i.e., circuits of higher capacities are used. For instance, conductors of type 2 are necessary to connect some EVCSs.

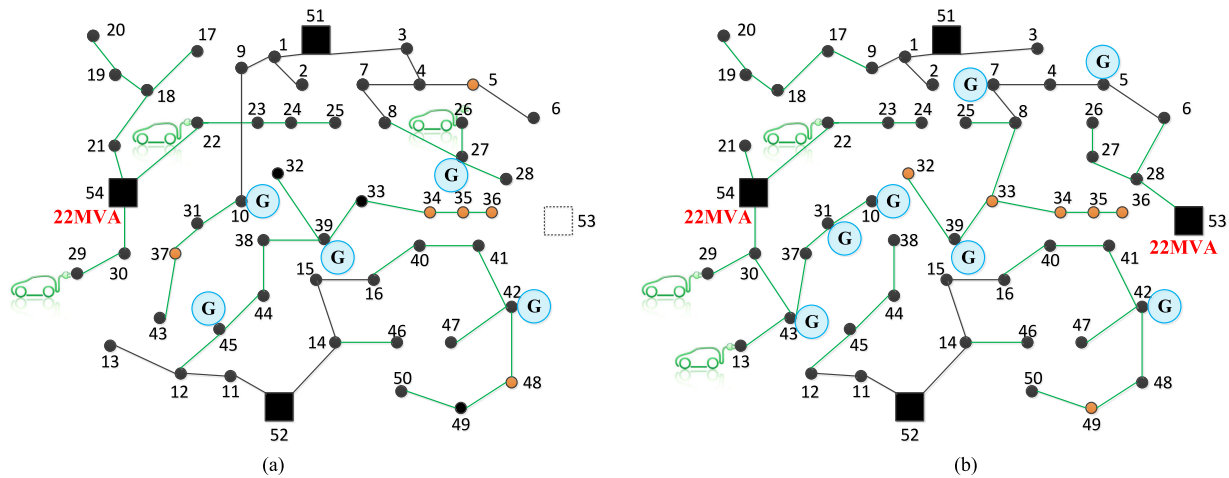


Fig. 5. Multistage EDS expansion planning for 54-node system at stage 3. (a) Case B and (b) Case C.

The allocation of DG units and CBs is also different along the expansion horizon when uncertainty is considered. The CBs are allocated at the same nodes as in Case A. However, three DG units are allocated at nodes 1, 7, and 10. The allocation and sizing of the EVCSs for Case C are shown in Table IV. Four EVCSs with 374 chargers (52 FCs and 322 SCs) are necessary to meet the power demand of the EVs during the planning horizon. As in Case B, most of the EVCSs are allocated at nodes close to energy sources and CBs.

The results show that the expansion plans for the deterministic and robust approaches (Case B and C, respectively) are different in terms of the investment costs in substations, circuits, CBs, and EVCSs. Those costs are increased in order to provide a robust solution for the EDS expansion planning. In all cases, the results show changes in the topology of the network, in the reinforcement of circuits, and in the construction of new substations. These investments are proposed to satisfy the conventional loads and EV demand requirements.

Additionally, Monte Carlo simulations are carried out in order to evaluate the robustness of the expansion plan, considering the substation capacity. The simulations are made taking into account the normal distribution of the stochastic demands. Table V shows the failure rate of the substation capacity for Cases B and C at each stage of the planning horizon. The results obtained after 1,000 Monte Carlo simulations show that the deterministic approach (Case B) has the worst performance, with violations in the substation capacities, greater than 10%. Specifically, at node 16, the violation is higher than 65% in Stage 2 and almost 37% in Stage 3. Although the solution for Case C has a larger cost, the failure rate of the substation capacity is maintained below the limit defined by the robustness parameter, i.e., lower than 5%.

The results show that, considering only economic aspects, the best expansion plan is the one obtained using the deterministic approach, i.e., Case B. However, under uncertain conventional load and EV demand, this plan presents a large substation capacity failure rate. On the other hand, the more expensive investment plan, found by the robust approach (Case C), is robust enough to deal with the uncertainty associated with the demands.

B. Expansion Planning for the 54-Node Distribution System

An additional test using a 54-node distribution system, adapted from [27] was used in order to verify the scalability of the proposed mathematical model. It was verified that the proposed model is able to solve the complex expansion planning for this distribution system. The results for the EDS expansion planning are analyzed considering the allocation and sizing of the EVCSs, i.e., Case B and Case C (the deterministic and robust approach, respectively).

The investment and operational costs for Case B and Case C are $\$83,156.71 \times 10^3$ and $\$88,668.59 \times 10^3$, respectively. As in the 18-node test system, it should be noted that the total cost of the robust solution is higher than the total cost of the deterministic solution (a difference of approximately 6%). This fact is due to the additional investments required to guarantee enough capacity of the substations to deal with the uncertainties in the demand. In Case B, Substation 54 is built in Stage 1, and different circuits are constructed using only one conductor type. Furthermore, only five DG units are installed in Stage 3 for Case B, while for Case C, seven DG units are required in the same stage (see Fig. 5). The EVCSs are mainly allocated at nodes near the DG units and CBs, in an attempt to maintain a suitable operation of the EDS. In Case C, two new substations are constructed along the planning horizon: Substations 54 and 53 in Stages 2 and 3, respectively. In comparison with Case B, one additional substation should be built to avoid possible technical problems caused by the unexpected demand growth.

The investments in the circuits and the topology of the EDS are also different for both cases. It must be highlighted that, in comparison with Case B, the investment in the circuits in Case C is also higher. The allocation of DG units and CBs, as well as the EVCSs, is also different along the expansion horizon when uncertainty is considered. For instance, three EVCSs with 792 SCs are necessary to meet the power demand of the EVs during the planning horizon in Case B, whereas in Case C, three EVCSs with 979 chargers (2 FCs and 977 SCs) are installed. As in the previous test, most of the EVCSs are allocated at nodes close to energy sources and CBs. In addition, the robustness of the expansion plan is evaluated for Case C through Monte

Carlo simulations. Similar to the previous test system results, the failure rate of the substation capacity is maintained below the limit defined by the robustness parameter.

V. CONCLUSION

A novel mixed-integer linear programming (MILP) model for the robust multistage joint expansion planning problem of electrical distribution systems (EDS) and the allocation and sizing of Electric Vehicles Charging Stations (EVCSs) has been developed. The proposed formulation defines the construction/reinforcement of substations, EVCSs, and circuits, and the allocation of distributed generation units and capacitor banks. Chance constraints were used in the robust formulation to consider the uncertainties associated with the conventional loads and EV demand, guaranteeing the fulfillment of the substation capacity and the EV requirements within a specified confidence level.

The results demonstrate that the allocation of EVCSs results in a positive impact on the expansion plan for the EDS. The impact is mainly reflected by the differences between the substation and the circuit investments, as well as in the topology of the network. Thus, there is a reduction in the total cost of the investment plan when EVCSs are considered in the EDS expansion planning.

The solution provided by a deterministic approach, considering EVCSs, leads to more economic expansion plans. However, under uncertain conventional load and EV demand, it could present high failure rates for the substation capacity. On the other hand, the robust solution provides an investment plan with a larger cost, but it is robust enough to deal with the uncertainty associated with the demands.

In this way, the decision-maker can choose an expansion plan according to a given risk level associated with the demand variations in the EDS operation.

Monte Carlo simulations were carried out in order to verify the compliance of the proposed chance constraint in the robust formulation. It was found that the proposed robust formulation provides a solution in which the substation capacity and the EV requirements are satisfied within a specified confidence level.

APPENDIX

A piecewise approximation is used to define a function f , which calculates the square value of a variable ρ , limited by the interval $[0, \bar{\rho}]$. If the interval is partitioned into Γ equally sized blocks, the partition set $\mathcal{P} = \{0, \bar{\rho}/\Gamma, 2\bar{\rho}/\Gamma, \dots, \bar{\rho}\}$ would be defined so that every block would have an equal length of $\bar{\rho}/\Gamma$. Considering that $\Delta_{\rho,\gamma}$ is a continuous variable that defines the value of the n -th block in partition \mathcal{P} , the piecewise linear approximation of ρ^2 is given by (36)–(40). This type of function has a general structure, as follows:

$$f(\rho, \bar{\rho}, \Gamma) = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} m_{\rho,\gamma} \Delta_{\rho,\gamma} \quad (36)$$

$$\rho^+ - \rho^- = \rho \quad (37)$$

$$\rho^+ + \rho^- = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \Delta_{\rho,\gamma} \quad (38)$$

$$0 \leq \Delta_{\rho,\gamma} \leq \bar{\rho}/\Gamma \quad \forall \gamma = 1, \dots, \Gamma \quad (39)$$

$$m_{\rho,\gamma} = (2\gamma - 1)/\Gamma \quad \forall \gamma = 1, \dots, \Gamma \quad (40)$$

where Γ is the number of discretizations used in the function f ; $m_{\rho,\gamma}$ is the slope of the γ th block of the piecewise discretization of ρ ; $\Delta_{\rho,\gamma}$ is the value of the γ th auxiliary variable used in the discretization of ρ ; and ρ^+ and ρ^- are positive auxiliary variables used in the calculation of $|\rho|$.

REFERENCES

- [1] H. Bulkeley, M. Paterson, and J. Stripple, *Towards a Cultural Politics of Climate Change: Devices, Desires and Dissent*. Cambridge U.K.: Cambridge Univ. Press, 2016.
- [2] M. C. Falvo, D. Sbordone, I. S. Bayram, and M. Devetsikiotis, "EV charging stations and modes: International standards," in *Proc. Int. Symp. Power Electron., Elect. Drives, Autom. Motion*, Jun. 2014, pp. 1134–1139.
- [3] K. Clement-Nyns, E. Haesen, and J. Driesen, "The impact of charging plug-in hybrid electric vehicles on a residential distribution grid," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 25, no. 1, pp. 371–380, Feb. 2010.
- [4] P. S. Georgilakis and N. D. Hatziargyriou, "A review of power distribution planning in the modern power systems era: Models, methods and future research," *Elect. Power Syst. Res.*, vol. 121, pp. 89–100, 2015.
- [5] Y. Zheng, Z. Y. Dong, Y. Xu, K. Meng, J. H. Zhao, and J. Qiu, "Electric vehicle battery charging/swap stations in distribution systems: Comparison study and optimal planning," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 29, no. 1, pp. 221–229, Jan. 2014.
- [6] Z. Hu and Y. Song, "Distribution network expansion planning with optimal siting and sizing of electric vehicle charging stations," in *Proc. 47th Int. Conf. Univ. Power Eng.*, Sep. 2012, pp. 1–6.
- [7] W. Yao *et al.*, "A multi-objective collaborative planning strategy for integrated power distribution and electric vehicle charging systems," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 29, no. 4, pp. 1811–1821, Jul. 2014.
- [8] S. Wang *et al.*, "A stochastic collaborative planning approach for electric vehicle charging stations and power distribution system," in *Proc. 2016 IEEE Power Energy Soc. Gen. Meet.*, Jul. 2016, pp. 1–5.
- [9] A. Tabares, J. Franco, M. Lavorato, and M. Rider, "Multistage long-term expansion planning of electrical distribution systems considering multiple alternatives," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 31, no. 3, pp. 1900–1914, May 2016.
- [10] N. Neyestani, M. Damavandi, M. Shafie-khah, J. Contreras, and J. Catalao, "Allocation of plug-in vehicles' parking lots in distribution systems considering network-constrained objectives," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 30, no. 5, pp. 2643–2656, Sep. 2015.
- [11] Z. Liu, F. Wen, and G. Ledwich, "Optimal planning of electric-vehicle charging stations in distribution systems," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 28, no. 1, pp. 102–110, Jan. 2013.
- [12] M. Moradijoo, M. P. Moghaddam, M. Haghifam, and E. Alishahi, "A multi-objective optimization problem for allocating parking lots in a distribution network," *Int. J. Elect. Power Energy Syst.*, vol. 46, pp. 115–122, 2013.
- [13] F. Fazelpour, M. Vafaeipour, O. Rahbari, and M. A. Rosen, "Intelligent optimization to integrate a plug-in hybrid electric vehicle smart parking lot with renewable energy resources and enhance grid characteristics," *Energy Convers. Manage.*, vol. 77, pp. 250–261, 2014.
- [14] M. Amini and A. Islam, "Allocation of electric vehicles' parking lots in distribution network," in *Proc. IEEE PES Conf. Innov. Smart Grid Technol.*, Feb. 2014, pp. 1–5.
- [15] I. Frade, A. Ribeiro, G. Gonçalves, and A. Antunes, "Optimal location of charging stations for electric vehicles in a neighborhood in Lisbon, Portugal," *Transp. Res. Rec. J. Transp. Res. Board*, vol. 2252, no. 12, pp. 91–98, 2011.
- [16] L. Zi-fa, W. Zhang, J. Xing, and L. Ke, "Optimal planning of charging station for electric vehicle based on particle swarm optimization," in *Proc. IEEE Innov. Smart Grid Technol. Asia*, May 2012, pp. 1–5.
- [17] E. Pashajavid and M. A. Golkar, "Optimal placement and sizing of plug in electric vehicles charging stations within distribution networks with high penetration of photovoltaic panels," *J. Renew. Sustain. Energy*, vol. 5, no. 5, 2013, Art. no. 053126.
- [18] S. Guo and H. Zhao, "Optimal site selection of electric vehicle charging station by using fuzzy TOPSIS based on sustainability perspective," *Appl. Energy*, vol. 158, pp. 390–402, 2015.

- [19] A. Charnes and W. Cooper, "Deterministic equivalents for optimizing and satisficing under chance constraints," *Oper. Res.*, vol. 11, no. 1, pp. 18–39, Jan. 1963.
- [20] J. Franco, M. Rider, and R. Romero, "Robust multi-stage substation expansion planning considering stochastic demand," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 31, no. 3, pp. 2125–2134, May 2016.
- [21] R. Fourer, D. M. Gay, and B. W. Kernighan, *AMPL: A modeling language for mathematical programming*, 2nd ed. Pacific Grove, CA, USA: Brooks/Cole-Thomson Learn., 2003.
- [22] *CPLEX Optimization Subroutine Library Guide and Reference*, CPLEX Division ed., ILOG, Inc., Incline Village, NV, USA, 2008.
- [23] Z. Liu, F. Wen, and G. Ledwich, "Optimal siting and sizing of distributed generators in distribution systems considering uncertainties," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 26, no. 4, pp. 2541–2551, Oct. 2011.
- [24] S. Miloca, N. Volpi, J. Yuan, and C. Pinto, "Expansion planning problem in distribution systems with reliability evaluation: An application in real network using georeferenced database," *Int. J. Elect. Power Energy Syst.*, vol. 70, pp. 9–16, 2015.
- [25] H. Xing, H. Cheng, L. Zhang, S. Zhang, and Y. Zhang, "Second-order cone model for active distribution network expansion planning," in *Proc. 2015 IEEE Power Energy Soc. Gen. Meet.*, Jul. 2015, pp. 1–5.
- [26] J. C. López, M. Lavorato, J. F. Franco, and M. J. Rider, "Robust optimisation applied to the reconfiguration of distribution systems with reliability constraints," *IET Gener., Transmiss., Distrib.*, vol. 10, no. 4, pp. 917–927, 2016.
- [27] M. Lavorato, M. J. Rider, A. V. Garcia, and R. Romero, "A constructive heuristic algorithm for distribution system planning," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 25, no. 3, pp. 1734–1742, Aug. 2010.
- [28] J. Quirós-Tortós, L. F. Ochoa, and B. Lees, "A statistical analysis of EV charging behavior in the UK," in *Proc. 2015 IEEE PES Innov. Smart Grid Technol. Latin Amer.*, Oct. 2015, pp. 445–449.
- [29] "How much do public and home EV charging stations really cost?" Inside EVs. 2014. [Online]. Available: <http://insideevs.com/how-much-do-public-and-home-ev-charging-stations-really-cost/>
- [30] Model charging, Tesla Motors, San Carlos, CA, USA. 2017. [Online]. Available: <http://www.teslamotors.com/models-charging#/basics>

Nataly Bañol Arias received the B.Sc. degree in production engineering from the Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia, in 2012, and the M.Sc. degree in electrical engineering, in 2015, from São Paulo State University, Ilha Solteira, Brazil, where she is currently working toward the Ph.D. degree in electrical engineering. Her research interests include development of methodologies for the optimization, planning, and control of electrical power systems.

Alejandra Tabares received the B.Sc. degree in production engineering from the Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia, in 2012, and the M.Sc. degree in electrical engineering, in 2015, from São Paulo State University, Ilha Solteira, Brazil, where she is currently working toward the Ph.D. degree in electrical engineering. Her research interests include the development of methodologies for the optimization, planning, and control of electrical power systems.

John F. Franco (S'11-M'13) received the B.Sc. and M.Sc. degrees from the Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia, in 2004 and 2006, respectively, and the Ph.D. degree from São Paulo State University (UNESP), Ilha Solteira, Brazil, in 2012, all in electrical engineering. He is currently a Professor at UNESP, Rosana, Brazil. His research interests include development of methodologies for the optimization, planning, and control of electrical power systems.

Marina Lavorato (S'07-M'11) received the B.Sc. and M.Sc. degrees from the Federal University of Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brazil, in 2002 and 2004, respectively, and the Ph.D. degree from the University of Campinas, Campinas, Brazil, in 2010, all in electrical engineering. She is currently a Professor in the Electrical Engineering Faculty, Pontifical Catholic University of Campinas, Campinas, Brazil. Her research interests include the development of methodologies for the optimization, planning, and control of electrical power systems.

Rubén Romero (M'93-SM'08) received the B.Sc. and P.E. degrees from the National University of Engineering, Lima, Perú, in 1978 and 1984, respectively, and the M.Sc. and Ph.D. degrees from the University of Campinas, Campinas, Brazil, in 1990 and 1993, respectively, all in electrical engineering. He is currently a Professor in the Electrical Engineering Department, São Paulo State University, Ilha Solteira, Brazil. His research interests include electrical power systems planning.

Anexo B – ARTIGOS ACEITOS PARA PUBLICAÇÃO EM REVISTAS

1. **TABARES, A.**, MUÑOZ-DELGADO, G.,FRANCO, J.F., ARROYO, J.M., CONTRERAS,J. An enhanced algebraic approach for the analytical reliability assessment of distribution systems. *IEEE Trans. Power Syst.*, Jan. 2019. No prelo (Pág. [149](#))

An Enhanced Algebraic Approach for the Analytical Reliability Assessment of Distribution Systems

Alejandra Tabares, Gregorio Muñoz-Delgado, *Member, IEEE*, John F. Franco, *Member, IEEE*,
José M. Arroyo, *Senior Member, IEEE*, and Javier Contreras, *Fellow, IEEE*

Abstract—The calculation of standard reliability indices is critical for assessing quality service and guiding the planning and operation of distribution systems. Traditionally, such calculation has relied on the application of analytical methods based on simulation techniques, which preclude the use of exact methodologies when reliability assessment is incorporated into operation and planning models. This shortcoming has been recently addressed by the development of two optimization-based approaches for the analytical reliability assessment of distribution systems. Unfortunately, both methods are either incomplete or computationally expensive as compared with those based on simulation. In order to overcome these issues, this paper presents a novel and efficient algebraic approach to calculate the standard network-dependent reliability indices of distribution systems. As a distinctive feature over previous non-simulation-based methods, no optimization process is involved. Thus, the proposed approach relies on the solution of a set of linear equations for which effective algorithms are available. Several benchmarks including a real-life 1080-node system have been used to demonstrate the computational superiority of the proposed method. The successful numerical experience supports the suitability of the proposed algebraic model for reliability-constrained distribution system operation and planning.

Index Terms—Analytical reliability assessment, distribution system, linear equation system, non-simulation-based approach.

NOTATION

Indices:

b Index for load levels.
 i, j Indices for nodes.
 ij, ji, jk Indices for branches.

Sets:

B Set of load levels.
 Υ Set of branches.
 Υ_i^{DW} Set of branches downstream of node i .

The work of A. Tabares and J. F. Franco was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001 (process No. 88881.134450/2016-01), FAPESP (grant 2017/02831-8), and CNPq (processes No. 152002/2016-2 and 313047/2017-0). The work of G. Muñoz-Delgado, J. M. Arroyo, and J. Contreras was supported by the Ministry of Economy and Competitiveness of Spain under Project ENE2015-63879-R (MINECO/FEDER, UE).

A. Tabares is with the Department of Electrical Engineering, São Paulo State University (UNESP), 15385-000, Ilha Solteira, São Paulo, Brazil (e-mail: tabares.1989@gmail.com). J. F. Franco is with the School of Energy Engineering, São Paulo State University (UNESP), 19274-000, Rosana, São Paulo, Brazil (e-mail: j.f.franco@ieec.org). G. Muñoz-Delgado, J. M. Arroyo, and J. Contreras are with the Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Castilla-La Mancha, 13071 Ciudad Real, Spain (e-mail: gregorio.munoz.delgado@gmail.com; JoseManuel.Arroyo@uclm.es; Javier.Contreras@uclm.es).

Υ_i^F Set of branches connected to the feeder at which node i is located.
 Υ_i^{UP} Set of branches upstream of node i .
 Ω^D Set of load nodes.
 Ω^R Set of load nodes directly connected to a substation node (root nodes).
 Ω^S Set of substation nodes.

Parameters:

$ASAI$ Average system availability index.
 $EENS$ Expected energy not supplied.
 ℓ_{ij} Length of branch ij .
 L_{ib} Demand at node i for load level b .
 NC_i Number of customers at node i .
 $SAIDI$ System average interruption duration index.
 $SAIFI$ System average interruption frequency index.
 Δ_b Duration of load level b .
 λ_{ij} Unitary failure rate of branch ij .
 τ_{ij}^{RS} Duration of the repair-and-switching interruptions associated with the failure of branch ij .
 τ_{ij}^{SO} Duration of the switching-only interruptions associated with the failure of branch ij .

Variables:

f_{ij}^Γ Flow through branch ij of the fictitious system used to calculate the expected durations of switching-only interruptions affecting the root nodes.
 f_{ij}^Π Flow through branch ij of the fictitious system used to calculate the expected rates of switching-only interruptions affecting the root nodes.
 $\alpha_{ij}^+, \alpha_{ij}^-$ Variables used to identify the direction of the flow through branch ij .
 Γ_i^{RS} Expected duration of repair-and-switching interruptions affecting node i .
 Γ_i^{SO} Expected duration of switching-only interruptions affecting node i .
 Π_i^{RS} Expected rate of repair-and-switching interruptions affecting node i .
 Π_i^{SO} Expected rate of switching-only interruptions affecting node i .

I. INTRODUCTION

DISTRIBUTION companies are responsible for satisfying the electric demand at the lowest cost while meeting an acceptable level of reliability. Reliability is defined as the ability to continuously meet the electricity needs of end users with the required quantity and quality [1]. Reliability and economics are conflicting drivers for the operation and planning of distribution systems and, hence, a tradeoff is needed. Note that attaining 100% reliability is economically infeasible due to the exposure of system components to internal and external events. As a result, random failures are characterized by uncertain parameters that are challenging to predict. Thus, reliability assessment is essential when designing new systems, expanding the existing ones, planning maintenance schedules, and adding alternative supply sources [2].

Utility statistics show that failures in distribution systems account for 80% of all customer interruptions [3], [4]. Moreover, most of the consumers are connected at the distribution level, which features the largest share of investment expenditure. Consequently, improving the reliability at the distribution level may significantly enhance the reliability of the entire power system. Thus, the development of computationally efficient techniques for reliability assessment of distribution systems is of utmost practical interest. The relevance of distribution reliability assessment is further stressed in the new context involving smart grids [5], [6], microgrids [7], [8], renewable distributed generation [9], [10], energy storage [11], and electric vehicles [12]. Two relevant reviews of the state of the art can be found in [13] and [14].

According to [3], [4], [15], and [16], the reliability of distribution systems is quantitatively assessed using several standard indices. Such indices mainly rely on probabilistic metrics, unsupplied power, and the frequency and duration of plausible failure events. Reliability indices characterize the duration and frequency impact of interruptions along a given time span, usually of one year. The calculation of reliability indices thus provides an estimate of the capability of the distribution system to maintain steady-state operation continuity over a specific period of time.

The most used reliability indices are 1) the system average interruption frequency index (SAIFI), 2) the system average interruption duration index (SAIDI), 3) the average system availability index (ASAI), 4) the expected energy not supplied (EENS), 5) the momentary average interruption frequency index (MAIFI), and 6) the momentary average interruption event frequency index (MAIFI_E). SAIFI, SAIDI, ASAI, and EENS are related to sustained interruptions, i.e., those lasting 5 minutes or longer. On the other hand, MAIFI and MAIFI_E correspond to momentary interruptions, i.e., those lasting less than 5 minutes. This work is focused on sustained interruptions since such disturbances affect all users connected to the faulty section of the system.

Reliability assessment has been widely implemented by using analytical methods [1], [3], [4], [16]. Thus, for a given network topology, the impact of a pre-specified set of events on service continuity is quantified by analyzing network component interruptions, one at a time [17]. Note that the

analytical reliability assessment is topology dependent. This factor and the use of simulation have led to the widespread use of approximate methods for the incorporation of reliability in operational and planning models [13], [14], [18]. Unfortunately, such approximate methods do not allow determining whether the optimal solution is found.

Recently, non-simulation-based methods for analytical reliability assessment have been presented in [19] and [20]. Such a research effort is intended to prevent the use of approximate techniques for reliability-constrained optimization models, as shown in [21]. Both works [19] and [20] rely on the use of optimization to mathematically characterize the shortest path between each load node and the substation to which it is connected. In [19], the reliability assessment only considers the effects of failures occurring in the shortest upstream path between each load node and the corresponding substation. In [20], faults occurring outside the shortest upstream path are also accounted for. Despite being equivalent to simulation-based reliability assessment, the approach presented in [20] is more time consuming. This undesired aspect stems from the use of a large optimization problem, namely an instance of linear programming, to model the shortest path methodology.

Following the way paved by [19] and [20], this paper presents a novel non-simulation-based approach for the analytical reliability assessment of distribution systems [1], [3], [4], [16], [17]. Here, the impact of the failure set considered in [20], which is broader than that analyzed in [19], is equivalently modeled. To that end, new linear expressions are developed. More specifically, expected interruption rates and durations for each load node are algebraically expressed in terms of the values of those magnitudes for the adjacent nodes. It should be noted that the resulting expressions are similar to those used for load flow calculation in radial distribution systems [22]. In addition, based on [23], linear equalities are also used to explicitly model radial operation. Thus, unlike [19] and [20], the proposed approach involves the solution of a system of linear equations rather than the solution of an optimization problem. It is worth mentioning that the resulting algebraic model features two relevant aspects. First, it is suitable for the explicit incorporation of reliability in operational and planning models. Second, it allows the solution of the resulting reliability-constrained optimization problems by sound mathematical programming techniques with well-known properties and for which off-the-shelf software is readily available. Note, however, that the analysis of those reliability-constrained models is beyond the scope of this paper.

The main contribution of this work is the development of a novel approach for the analytical reliability assessment of distribution systems [1], [3], [4], [16], [17]. For the first time in the literature, an equivalent and computationally inexpensive method based on linear algebra is presented. The resulting model is a system of linear equations. Hence, no simulation or optimization process is involved and effective dedicated algorithms are readily available. The practical significance of this contribution is backed by the computational superiority over the approach presented in [20] while keeping the enhanced modeling capability as compared with [19]. Note that solving

the proposed system of linear equations is faster than solving the linear program corresponding to [20].

The remainder of this paper is organized as follows. Section II presents the main aspects of the analytical reliability evaluation. Section III is devoted to the proposed approach. In Section IV, numerical results from several case studies are reported and analyzed. Relevant conclusions are drawn in Section V. Finally, the simulation-based algorithm customarily used for analytical reliability assessment is outlined in the Appendix.

II. ANALYTICAL RELIABILITY ASSESSMENT

This paper addresses the analytical predictive reliability assessment described in [1], [3], [4], [16], and [17] for a given network topology under a particular loading condition. Within this framework, the impact of a pre-specified set of faults on service continuity is quantified in terms of the number of affected users. The analytical method relies on the analysis of component outages, one at a time. As a result, standard metrics such as SAIFI, SAIDI, ASAI, and EENS [15] are computed using two pieces of information, namely failure rates and interruption durations. Such reliability indices can be determined using simulation [17], as described in the Appendix. Alternatively, recent optimization-based approaches have been presented in [19] and [20]. This section describes the modeling framework and an example that will be useful to illustrate the novel approach proposed in this paper.

A. Modeling Framework

As done in [19] and [20], a radially-operated distribution system and sustained interruptions due to single-branch outages are considered. In such a distribution system, each branch connected to a substation is equipped with a circuit breaker without a recloser at the output of the substation. Moreover, all branches are equipped with a switch. Thus, the demand of the healthy portion of the system can be met after isolating the part of the system downstream of the fault.

Once a fault has occurred, the first circuit breaker upstream of the fault trips, thereby curtailing all downstream load demands. Subsequently, the system topology is reconfigured by operating switches and circuit breakers to reduce the non-supplied energy. To that end, the first switch upstream of the fault is opened to isolate the fault. Then the circuit breaker is closed so that the supply to all load demands between the circuit breaker and the switch is restored. Finally, after clearing the isolated fault, the corresponding switch is closed, and complete service is reestablished.

Load nodes are thus affected by repair-and-switching interruptions and switching-only interruptions [20]. For repair-and-switching interruptions, the supply is not restored until the damage is repaired. Switching-only interruptions are associated with the network reconfiguration implemented to clear a faulty component. Both types of nodal interruption are characterized by the corresponding expected rates and expected durations. Such magnitudes solely depend on branch-related information, namely lengths, failure rates, and durations of repair-and-switching and switching-only interruptions

[20]. Based on the findings of [20], expected nodal interruption rates and durations can be cast in a compact way as follows:

$$\Pi_i^{RS} = \sum_{jk \in \Upsilon_i^{UP}} \lambda_{jk} \ell_{jk}; \forall i \in \Omega^D \quad (1)$$

$$\Gamma_i^{RS} = \sum_{jk \in \Upsilon_i^{UP}} \tau_{jk}^{RS} \lambda_{jk} \ell_{jk}; \forall i \in \Omega^D \quad (2)$$

$$\Pi_i^{SO} = \sum_{jk \in \Upsilon_i^F} \lambda_{jk} \ell_{jk} - \sum_{jk \in \Upsilon_i^{UP}} \lambda_{jk} \ell_{jk}; \forall i \in \Omega^D \quad (3)$$

$$\Gamma_i^{SO} = \sum_{jk \in \Upsilon_i^F} \tau_{jk}^{SO} \lambda_{jk} \ell_{jk} - \sum_{jk \in \Upsilon_i^{UP}} \tau_{jk}^{SO} \lambda_{jk} \ell_{jk}; \forall i \in \Omega^D \quad (4)$$

where Υ_i^{UP} and Υ_i^F are branch sets implicitly modeling the topology of the network under radial operation.

Note that, by definition, expected interruption rates and durations at substation nodes are equal to 0, i.e.:

$$\Pi_i^{RS} = 0; \forall i \in \Omega^S \quad (5)$$

$$\Pi_i^{SO} = 0; \forall i \in \Omega^S \quad (6)$$

$$\Gamma_i^{RS} = 0; \forall i \in \Omega^S \quad (7)$$

$$\Gamma_i^{SO} = 0; \forall i \in \Omega^S. \quad (8)$$

Using the expected nodal interruption rates and durations, the standard reliability indices can be computed as follows [20]:

$$SAIFI = \frac{\sum_{i \in \Omega^D} NC_i (\Pi_i^{RS} + \Pi_i^{SO})}{\sum_{i \in \Omega^D} NC_i} \quad (9)$$

$$SAIDI = \frac{\sum_{i \in \Omega^D} NC_i (\Gamma_i^{RS} + \Gamma_i^{SO})}{\sum_{i \in \Omega^D} NC_i} \quad (10)$$

$$ASAI = 1 - \frac{SAIDI}{8760} \quad (11)$$

$$EENS = \frac{\sum_{b \in B} \sum_{i \in \Omega^D} \Delta_b L_{ib} (\Gamma_i^{RS} + \Gamma_i^{SO})}{8760}. \quad (12)$$

It is worth mentioning that considering a full reliability assessment involves additional elements that are not discussed in this paper. Note, however, that the above modeling framework has been widely adopted for distribution system operation and planning [24].

B. Illustrative Example

To facilitate the understanding of the rationale of the novel model described in the next section, an illustrative example is analyzed. Using expressions (1)–(4), the expected nodal rates and durations of repair-and-switching and switching-only interruptions are calculated for the toy system shown in Fig. 1. This benchmark comprises five load nodes, represented by circles; one substation node depicted as a square; and five branches, indicated by solid lines. For the sake of simplicity, branch lengths, failure rates, and interruption durations are all equal to 1. Hence, for each node, the expected rate and the expected duration of repair-and-switching interruptions are

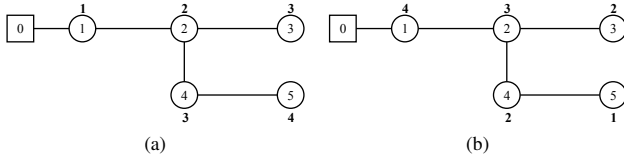


Fig. 1. Illustrative example – Expected nodal interruption rates and durations. (a) Repair-and-switching interruptions. (b) Switching-only interruptions.

identical, as shown in Fig. 1(a) next to each load node. Likewise, the same result holds for switching-only interruptions, as depicted in Fig. 1(b) beside each load node. Note that the use of simulation [17] and optimization [20] yields identical results.

As can be observed, the expected nodal rates and durations of repair-and-switching interruptions increase as the distance to the substation grows. In contrast, the opposite effect is experienced by the expected nodal rates and durations of switching-only interruptions. Moreover, for each branch connecting two load nodes, two results are relevant:

1. For repair-and-switching interruptions, the difference between the expected rates for the receiving and sending nodes is equal to the corresponding branch failure rate. Similarly, the difference between the expected durations for the receiving and sending nodes is equal to the product of the corresponding branch failure rate and interruption duration.
2. For switching-only interruptions, the same results are respectively attained when subtracting the expected rates and expected durations for the receiving nodes from those for the sending nodes.

III. PROPOSED ALGEBRAIC MODEL FOR ANALYTICAL RELIABILITY ASSESSMENT

This section presents an algebraic and hence non-optimization-based model for analytical reliability assessment. First, we describe the transformation of expressions (1)–(8) to an equivalent recursive formulation upon which the proposed methodology relies. Subsequently, the algebraic reliability assessment is provided.

A. Alternative Recursive Model

Expressions (1)–(4) cast expected nodal interruption rates and durations in terms of summations of branch-related information over the branches included in Υ_i^{UP} and Υ_i^F . Thus, expected nodal interruption rates and durations can be equivalently expressed in a recursive way using node-related information, as described below.

1) *Expected Nodal Rates of Repair-and-Switching Interruptions:* According to (1) and (5), the expected rates of repair-and-switching interruptions for load nodes can be computed as:

$$\Pi_j^{RS} = \sum_{i \in \Omega^D | ij \in \Upsilon_j^{UP}} \Pi_i^{RS} + \sum_{ij \in \Upsilon_j^{UP}} \lambda_{ij} \ell_{ij}; \forall j \in \Omega^D. \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Pi_0^{RS} &= 0 & \Pi_1^{RS} &= \Pi_0^{RS} + \lambda_{01} \ell_{01} = 1 & \Pi_2^{RS} &= \Pi_1^{RS} + \lambda_{12} \ell_{12} = 2 \\ \lambda_{01} \ell_{01} &= 1 & \lambda_{12} \ell_{12} &= 1 & \lambda_{23} \ell_{23} &= 1 \\ \lambda_{24} \ell_{24} &= 1 & \lambda_{45} \ell_{45} &= 1 & \Pi_3^{RS} &= \Pi_2^{RS} + \lambda_{23} \ell_{23} = 3 \\ \Pi_4^{RS} &= \Pi_2^{RS} + \lambda_{24} \ell_{24} = 3 & \Pi_5^{RS} &= \Pi_4^{RS} + \lambda_{45} \ell_{45} = 4 \end{aligned}$$

Fig. 2. Illustrative example – Application of the recursive model for the expected nodal rates of repair-and-switching interruptions.

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{RS} &= 0 & \Gamma_1^{RS} &= \Gamma_0^{RS} + \tau_{01}^{RS} \lambda_{01} \ell_{01} = 1 & \Gamma_2^{RS} &= \Gamma_1^{RS} + \tau_{12}^{RS} \lambda_{12} \ell_{12} = 2 \\ \tau_{01}^{RS} \lambda_{01} \ell_{01} &= 1 & \tau_{12}^{RS} \lambda_{12} \ell_{12} &= 1 & \tau_{23}^{RS} \lambda_{23} \ell_{23} &= 1 \\ \tau_{24}^{RS} \lambda_{24} \ell_{24} &= 1 & \tau_{45}^{RS} \lambda_{45} \ell_{45} &= 1 & \Gamma_3^{RS} &= \Gamma_2^{RS} + \tau_{23}^{RS} \lambda_{23} \ell_{23} = 3 \\ \Gamma_4^{RS} &= \Gamma_2^{RS} + \tau_{24}^{RS} \lambda_{24} \ell_{24} = 3 & \Gamma_5^{RS} &= \Gamma_4^{RS} + \tau_{45}^{RS} \lambda_{45} \ell_{45} = 4 \end{aligned}$$

Fig. 3. Illustrative example – Application of the recursive model for the expected nodal durations of repair-and-switching interruptions.

For each load node, the first term in the right-hand side of (13) represents the expected rate of repair-and-switching interruptions affecting the upstream node to which it is connected. In turn, the second term in the right-hand side of (13) corresponds to the failure rate of the branch connecting both nodes. The application of (13) to the illustrative example of Fig. 1 is shown in Fig. 2.

2) *Expected Nodal Durations of Repair-and-Switching Interruptions:* The recursive model for expected nodal durations of repair-and-switching interruptions is similarly derived from (2) and (6). Thus, the expected durations of repair-and-switching interruptions for load nodes are cast as:

$$\Gamma_j^{RS} = \sum_{i \in \Omega^D | ij \in \Upsilon_j^{UP}} \Gamma_i^{RS} + \sum_{ij \in \Upsilon_j^{UP}} \tau_{ij}^{RS} \lambda_{ij} \ell_{ij}; \forall j \in \Omega^D. \quad (14)$$

For each load node, the first term in the right-hand side of (14) represents the expected duration of repair-and-switching interruptions affecting the upstream node to which it is connected. Analogously, the second term in the right-hand side of (14) is the product of the failure rate and the repair-and-switching-interruption duration of the branch connecting both nodes. Fig. 3 depicts the application of (14) to the illustrative example.

3) *Expected Nodal Rates of Switching-Only Interruptions:* From (3) and (7), for the load nodes different from the root nodes¹, the expected rates of switching-only interruptions are expressed as:

$$\Pi_j^{SO} = \sum_{i \in \Omega^D | ij \in \Upsilon_j^{UP}} \Pi_i^{SO} - \sum_{ij \in \Upsilon_j^{UP}} \lambda_{ij} \ell_{ij}; \forall j \in (\Omega^D \setminus \Omega^R). \quad (15)$$

For each load node, the first term in the right-hand side of (15) models the expected rate of switching-only interruptions

¹The term root node refers to the load node directly connected to a substation node.

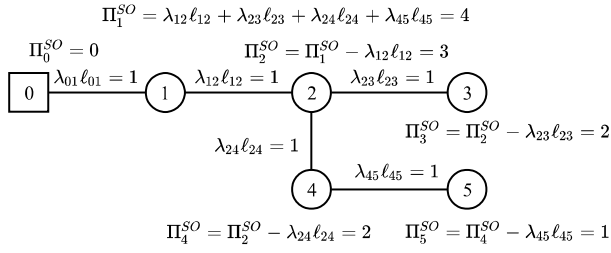


Fig. 4. Illustrative example – Application of the recursive model for the expected nodal rates of switching-only interruptions.

affecting the upstream node to which it is connected. In turn, the second term in the right-hand side of (15) is the failure rate of the branch connecting both nodes.

For the root nodes, expression (3) can be alternatively formulated as:

$$\Pi_j^{SO} = \sum_{ij \in \Upsilon_j^{PW}} \lambda_{ij} \ell_{ij}; \forall j \in \Omega^R. \quad (16)$$

Thus, the expected rate of switching-only interruptions for each root node is equal to the sum of the failure rates of all branches downstream of this node. Fig. 4 shows the application of (15) and (16) to the illustrative example.

4) *Expected Nodal Durations of Switching-Only Interruptions:* From (4) and (8), for the load nodes different from the root nodes, the expected durations of switching-only interruptions are formulated as:

$$\Gamma_j^{SO} = \sum_{i \in \Omega^D | ij \in \Upsilon_j^{UP}} \Gamma_i^{SO} - \sum_{ij \in \Upsilon_j^{UP}} \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} \ell_{ij}; \forall j \in (\Omega^D \setminus \Omega^R). \quad (17)$$

For each load node, the first term in the right-hand side of (17) models the expected duration of switching-only interruptions affecting the upstream node to which it is connected. In turn, the second term in the right-hand side of (17) represents the product of the failure rate and the switching-only-interruption duration of the branch connecting both nodes.

Using (4), the expected durations of switching-only interruptions for the root nodes can be expressed as:

$$\Gamma_j^{SO} = \sum_{ij \in \Upsilon_j^{PW}} \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} \ell_{ij}; \forall j \in \Omega^R. \quad (18)$$

For each root node, the right-hand-side term of (18) represents the sum of the products of the failure rate and the switching-only-interruption duration of all branches downstream of this node. The application of (17) and (18) to the illustrative example is depicted in Fig. 5.

In summary, the original model (1)–(8) is equivalently cast as (5)–(8) and (13)–(18). Note that the resulting algebraic model is similar to the formulation used for load flow calculation in radial distribution systems [22].

B. Proposed Algebraic Model

Expressions (13)–(18) rely on topology-related sets Υ_j^{UP} and Υ_j^{DW} . As a consequence, such expressions cannot be

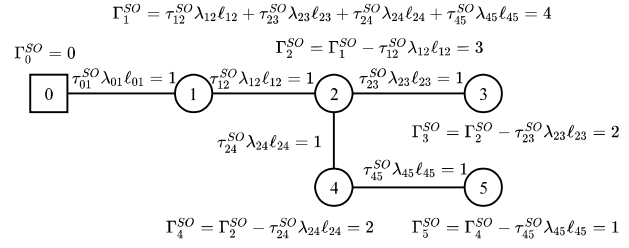


Fig. 5. Illustrative example – Application of the recursive model for the expected nodal durations of switching-only interruptions.

readily used to incorporate reliability assessment into existing optimization models for distribution operation and planning. In order to sort out this shortcoming, we propose an alternative algebraic model built on (13)–(18) wherein such sets are dropped. The proposed model features two key aspects. First, the network topology is explicitly characterized through a set of additional mathematical expressions. Second, a load flow model for a fictitious system is formulated.

The proposed algebraic model for analytical reliability assessment is cast as the following system of linear equations:

$$\sum_{ji \in \Upsilon} \alpha_{ji}^+ + \sum_{ij \in \Upsilon} \alpha_{ij}^- = 0; \forall i \in \Omega^S \quad (19)$$

$$\sum_{ji \in \Upsilon} \alpha_{ji}^+ + \sum_{ij \in \Upsilon} \alpha_{ij}^- = 1; \forall i \in \Omega^D \quad (20)$$

$$\alpha_{ij}^+ + \alpha_{ij}^- = 1; \forall ij \in \Upsilon \quad (21)$$

$$\Pi_i^{RS} = \Pi_j^{RS} + \lambda_{ij} \ell_{ij} \alpha_{ij}^- - \lambda_{ij} \ell_{ij} \alpha_{ij}^+; \forall ij \in \Upsilon \quad (22)$$

$$\Gamma_i^{RS} = \Gamma_j^{RS} + \tau_{ij}^{RS} \lambda_{ij} \ell_{ij} \alpha_{ij}^- - \tau_{ij}^{RS} \lambda_{ij} \ell_{ij} \alpha_{ij}^+; \forall ij \in \Upsilon \quad (23)$$

$$\Pi_i^{SO} = \Pi_j^{SO} + \lambda_{ij} \ell_{ij} \alpha_{ij}^+ - \lambda_{ij} \ell_{ij} \alpha_{ij}^-; \forall ij \in \Upsilon | i, j \notin \Omega^S \quad (24)$$

$$\Gamma_i^{SO} = \Gamma_j^{SO} + \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} \ell_{ij} \alpha_{ij}^+ - \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} \ell_{ij} \alpha_{ij}^-; \forall ij \in \Upsilon | i, j \notin \Omega^S \quad (25)$$

$$\sum_{ji \in \Upsilon | j \notin \Omega^S} f_{ji}^{\Pi} - \sum_{ij \in \Upsilon | j \notin \Omega^S} f_{ij}^{\Pi} + \Pi_i^{SO} = 0; \forall i \in \Omega^R \quad (26)$$

$$\sum_{ji \in \Upsilon | j \notin \Omega^S} f_{ji}^{\Pi} - \sum_{ij \in \Upsilon | j \notin \Omega^S} f_{ij}^{\Pi} = \sum_{ji \in \Upsilon} \lambda_{ji} \ell_{ji} \alpha_{ji}^+ + \sum_{ij \in \Upsilon} \lambda_{ij} \ell_{ij} \alpha_{ij}^-; \forall i \in (\Omega^D \setminus \Omega^R) \quad (27)$$

$$\sum_{ji \in \Upsilon | j \notin \Omega^S} f_{ji}^{\Gamma} - \sum_{ij \in \Upsilon | j \notin \Omega^S} f_{ij}^{\Gamma} + \Gamma_i^{SO} = 0; \forall i \in \Omega^R \quad (28)$$

$$\sum_{ji \in \Upsilon | j \notin \Omega^S} f_{ji}^{\Gamma} - \sum_{ij \in \Upsilon | j \notin \Omega^S} f_{ij}^{\Gamma} = \sum_{ji \in \Upsilon} \tau_{ji}^{SO} \lambda_{ji} \ell_{ji} \alpha_{ji}^+ + \sum_{ij \in \Upsilon} \tau_{ij}^{SO} \lambda_{ij} \ell_{ij} \alpha_{ij}^-; \forall i \in (\Omega^D \setminus \Omega^R) \quad (29)$$

$$\text{Expressions (5)–(8)} \quad (30)$$

where α_{ij}^+ , α_{ij}^- , Π_i^{RS} , Π_i^{SO} , Γ_i^{RS} , Γ_i^{SO} , f_{ji}^{Π} , and f_{ji}^{Γ} are the variables.

Based on [23], two new continuous albeit binary-valued variables are used for each branch ij , namely α_{ij}^+ and α_{ij}^- . Such variables allow characterizing the graph formed by substations, branches, and load nodes. The direction of the flow through a particular branch ij is modeled by limiting the

values of variables α_{ij}^+ and α_{ij}^- to two possible combinations. Thus, the combination $\alpha_{ij}^+ = 1$ and $\alpha_{ij}^- = 0$ is used to identify that node i is upstream of node j and, hence, the flow is from i to j . Conversely, the combination $\alpha_{ij}^+ = 0$ and $\alpha_{ij}^- = 1$ is used to identify that node i is downstream of node j and, hence, the flow is from j to i .

Mathematically, the characterization of sending and receiving nodes is formulated in (19)–(21). Note that such expressions feature a unimodular matrix structure (see [25], proposition 3.2). Moreover, their right-hand-side terms are either 0 or 1. As a consequence, continuous variables α_{ij}^+ and α_{ij}^- can only take two values, namely 0 and 1. Bearing in mind the integrality of α_{ij}^+ and α_{ij}^- , the necessary conditions for radial operation [26], [27] are modeled in (19) and (20). Thus, expressions (19) ensure that, for those branches connecting load nodes with substations, the substation node is the sending node. In addition, expressions (20) guarantee that each load node is the receiving node of a single branch. As per (21), for each branch ij , α_{ij}^+ and α_{ij}^- are not allowed to take identical values. Therefore, their values are limited to the two aforementioned combinations. As a consequence, the sending and receiving nodes of each branch are identified, as desired.

Expressions (22) and (23) equivalently correspond to (13) and (14), respectively. Note that the use of variables α_{ij}^+ and α_{ij}^- precludes the need for the topology-dependent sets Υ_j^{UP} . The equivalence is shown for a given branch ij as follows. If the flow is from i to j , i.e., $\alpha_{ij}^+ = 1$ and $\alpha_{ij}^- = 0$, then expressions (22) and (23) respectively become $\Pi_i^{RS} = \Pi_j^{RS} - \lambda_{ij}\ell_{ij}$ and $\Gamma_i^{RS} = \Gamma_j^{RS} - \tau_{ij}^{RS}\lambda_{ij}\ell_{ij}$. Both expressions are consistent with (13) and (14), respectively. On the other hand, if the flow is from j to i , i.e., $\alpha_{ij}^+ = 0$ and $\alpha_{ij}^- = 1$, then expressions (22) and (23) respectively become $\Pi_i^{RS} = \Pi_j^{RS} + \lambda_{ij}\ell_{ij}$ and $\Gamma_i^{RS} = \Gamma_j^{RS} + \tau_{ij}^{RS}\lambda_{ij}\ell_{ij}$. Such expressions are also consistent with (13) and (14), respectively.

Expressions (24) and (25) respectively correspond to (15) and (17). Similar to (22) and (23) for repair-and-switching interruptions, variables α_{ij}^+ and α_{ij}^- are used to compute the expected nodal rates and durations of switching-only interruptions. Note, however, that, unlike (22) and (23), expressions (24) and (25) do not involve the nodes of the branches connected to substations. This is consistent with the original expressions (15) and (17), which are only related to load nodes other than root nodes.

The expected rates and durations of switching-only interruptions for the root nodes are respectively determined by (26)–(27) and (28)–(29). Thus, expressions (26) and (27) correspond to (16) whereas expressions (28) and (29) are associated with (18). It is worth emphasizing that, unlike (16) and (18), expressions (26)–(29) do not rely on the topology-dependent sets Υ_j^{DW} . Such sets are used in (16) and (18) to identify the branches downstream of the corresponding root node. Alternatively, the required topological information is equivalently characterized in (26)–(29) by modeling the operation of a fictitious system under two different loading conditions. Built on the original radially-operated network, the fictitious system is obtained as follows. First, substation nodes and the branches connecting them with the root nodes

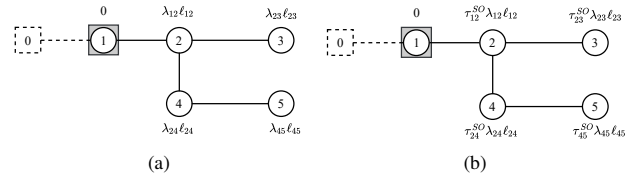


Fig. 6. Fictitious system associated with the illustrative example. (a) Loading condition for the expected rate of switching-only interruptions affecting the root node. (b) Loading condition for the expected duration of switching-only interruptions affecting the root node.

are removed. Thus, the root nodes in the original system become the source nodes in the fictitious system. Moreover, all branches in the fictitious system are respectively identical to the corresponding branches in the original system. Fig. 6 depicts the fictitious system associated with the illustrative example described in Section II. In Fig. 6, the removed assets are shown using dashed lines and the original root node is enclosed by a square to indicate its role as a source node in the fictitious system.

The first loading condition consists in setting the demands for the source nodes in the fictitious system equal to 0. In addition, for each load node in the fictitious system, the demand is set equal to the failure rate of the branch connecting this node with the node upstream. Fig. 6(a) shows this loading condition for the fictitious system associated with the illustrative example. Under such a loading condition, the expected rates of switching-only interruptions for the root nodes of the original system are equal to the generation levels at the corresponding source nodes in the fictitious system. Using variables α_{ij}^+ and α_{ij}^- , power balance equations (26) and (27) represent the operation of the fictitious system for this loading condition. Note that the power flow through branch ij in the fictitious system is modeled by f_{ij}^{Π} . Expressions (26) correspond to the source nodes of the fictitious system, i.e., the root nodes of the original system. Analogously, expressions (27) are related to the remaining load nodes in the fictitious system, i.e., the load nodes other than the root nodes in the original system.

The second loading condition only involves changes in the load nodes of the fictitious system. For each such node, the demand is set equal to the product of the failure rate and the switching-only-interruption duration of the branch connecting this node with the node upstream. Fig. 6(b) shows this loading condition for the fictitious system associated with the illustrative example. Under such a loading condition, the expected durations of switching-only interruptions for the root nodes of the original system are equal to the generation levels at the corresponding source nodes in the fictitious system. Similar to (26) and (27), power balance equations (28) and (29) model the operation of the fictitious system under this loading condition. Note that variables f_{ij}^{Γ} in (28) and (29) represent the power flows through the branches of the fictitious system under this second loading condition.

Finally, the null expected interruption rates and durations for substation nodes modeled in (5)–(8) are imposed in (30).

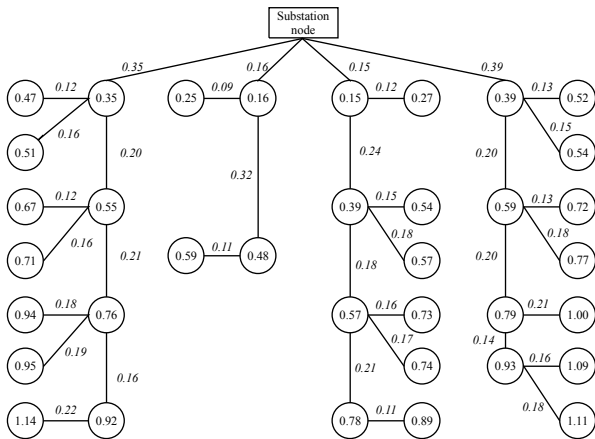


Fig. 7. Results for the expected nodal rates of repair-and-switching interruptions (Π_i^{RS}) for the 37-node system.

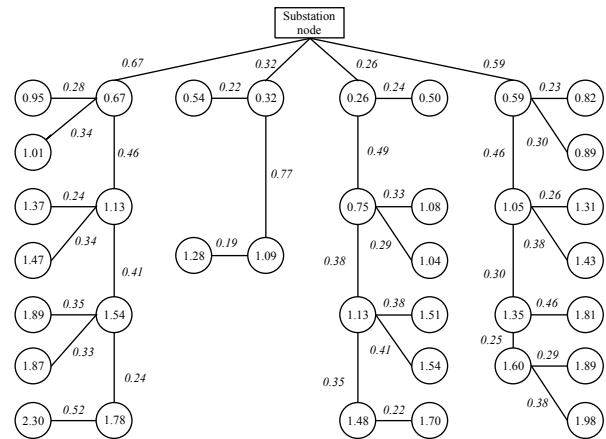


Fig. 9. Results for the expected nodal durations of repair-and-switching interruptions (Γ_i^{RS}) for the 37-node system.

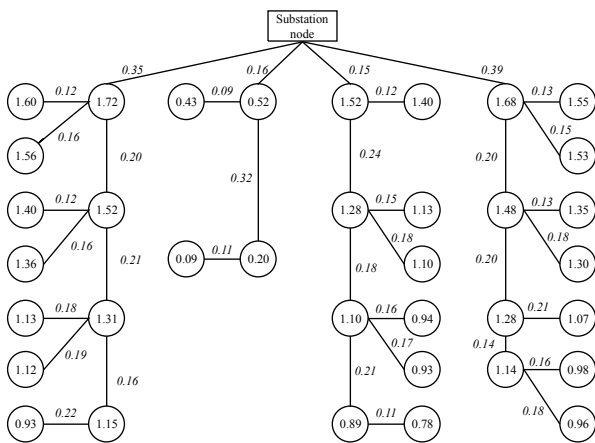


Fig. 8. Results for the expected nodal rates of switching-only interruptions (Π_i^{SO}) for the 37-node system.

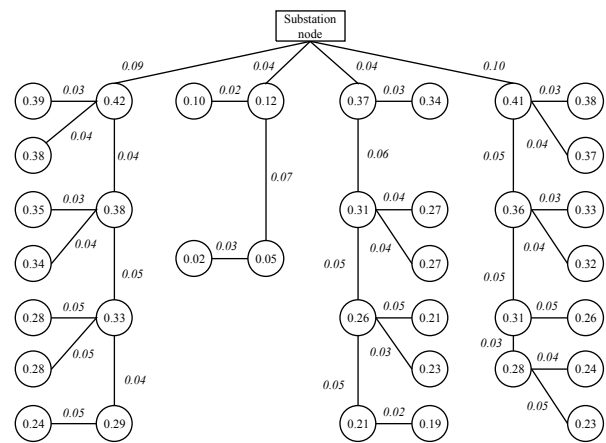


Fig. 10. Results for the expected nodal durations of switching-only interruptions (Γ_i^{SO}) for the 37-node system.

The proposed model features two relevant advantageous aspects as compared with the non-simulation-based approach previously reported in [20]:

1. It is worth highlighting that the mathematical complexity is drastically reduced in two respects. First, the resulting set of linear equations does not involve an optimization process. Second, the dimension in terms of the number of variables and equations is significantly smaller.
2. Variables α_{ij}^+ and α_{ij}^- are analogous to the binary operation-related variables that are widely used in operational and planning optimization models for distribution systems [21], [26]–[31].

Thus, the proposed formulation is a suitable alternative to the model described in [20] for incorporating reliability into distribution system operation and planning. Such an application will be addressed in our future work.

IV. NUMERICAL RESULTS

Results from several case studies are presented in this section. First, the proposed approach has been applied to a 37-node test system based on that analyzed in [32]. The

scalability of the proposed approach has been validated with five additional case studies comprising 85, 137, 288, 417, and 1080 nodes, which are based on those described in [33]–[35], [28], and [36], respectively. Note that the 288-node test system is based on the distribution-level portion of the Roy Billinton Test System [35]. Data for the six case studies can be downloaded from [37].

Simulations have been implemented on a Gigabyte R280-A3C X64 with two Intel® Xeon® E5-2698 v3 processors at 2.30 GHz and 256 GB of RAM using CPLEX 12.6 [38] and GAMS 24.7 [39].

A. 37-Node Case Study

The first benchmark is a 13.2-kV test system comprising 36 load nodes and 1 substation node. As done in [40], all branches are characterized by 0.1 failures per year and km. Therefore, branch failure rates are set so that $\lambda_{ij} = 0.1l_{ij}, \forall ij \in \Upsilon$. Additional data can be found in [37].

The proposed algebraic approach required 0.02 s to determine the values for Π_i^{RS} , Π_i^{SO} , Γ_i^{RS} , and Γ_i^{SO} , which are identical to those provided in [20]. Figs. 7 and 8 show

TABLE I
RESULTS

	Number of nodes					
	37	85	137	288	417	1080
SAIFI (interruptions/year)	1.81	1.97	1.79	0.52	1.67	1.99
SAIDI (h/year)	1.53	2.41	1.65	1.13	0.99	1.21
ASAI (%)	99.98	99.97	99.98	99.99	99.99	99.99
EENS (MWh/year)	69.51	48.90	48.13	85.36	91.16	106.53
Time for the simulation-based algorithm (s)	0.01	0.05	0.16	0.52	1.16	25.39
Time for the optimization-based approach (s)	2.94	8.36	13.63	28.18	57.38	799.72
Time for the proposed algebraic approach (s)	0.02	0.03	0.03	0.08	0.11	0.31

the resulting Π_i^{RS} and Π_i^{SO} , respectively. Such results are provided inside the circles representing the load nodes. For validation purposes, both figures also show the branch failure rates next to the solid lines representing the corresponding branches. As can be seen in Fig. 7, the expected nodal rates of repair-and-switching interruptions grow as the distance to the substation increases. In contrast, the expected nodal rates of switching-only interruptions experience the opposite effect, as shown in Fig. 8.

Figs. 9 and 10 show the resulting Γ_i^{RS} and Γ_i^{SO} . For a comprehensive validation of results, Fig. 9 also presents the product of the failure rate and the repair-and-switching-interruption duration for every branch. This piece of information is provided beside the line representing the corresponding branch. In a similar fashion, Fig. 10 also shows the products of failure rates and switching-only-interruption durations for all branches. As can be observed, the expected nodal durations of repair-and-switching and switching-only interruptions behave similarly to the respective expected nodal rates.

Using the above expected nodal interruption rates and durations, system reliability indices SAIFI, SAIDI, ASAI, and EENS are computed. Table I reports the values of such reliability metrics, which are identical to those achieved by the conventional simulation-based algorithm outlined in the Appendix and the optimization-based method recently presented in [20]. Table I also lists the computing times required by the three methods. Note that, similar to the simulation-based algorithm, the proposed approach is two orders of magnitude faster than the non-simulation-based method described in [20].

B. Real-Sized Case Studies

Five real-sized case studies have been analyzed. Due to space limitations, the results achieved by the three methods are summarized in Table I. For the sake of completeness, the values for Π_i^{RS} , Π_i^{SO} , Γ_i^{RS} , and Γ_i^{SO} for all case studies are available in [37]. Similar to the 37-node case study, the resulting system reliability indices are identical for all methodologies, as expected. In addition, the comparison of the running times reported in Table I reveals the computational superiority of the proposed approach. Note that, for both the 288-node benchmark based on the Roy Billinton Test System and the 1080-node system, the computational effort required by the proposed approach is two and three orders of magnitude lower than those associated with the simulation-based algorithm and the optimization-based approach, respectively. Therefore, this is a promising result for the subsequent integration of the

proposed system of linear equations in reliability-constrained optimization models for distribution systems.

V. CONCLUSION

A new approach is presented for the analytical predictive reliability assessment of distribution systems. As a major salient feature, reliability is equivalently assessed using algebraic expressions. Thus, unlike previous approaches, neither simulation nor optimization are required, which is computationally advantageous.

The proposed approach has been applied to several case studies comprising large-scale test systems with up to 1080 nodes, including a 288-node benchmark based on the Roy Billinton Test System. Numerical simulations show that identical results are attained with less computational effort as compared with existing techniques relying on simulation and optimization. Such results reveal the superiority of the proposed algebraic method.

Ongoing research is focused on the implementation of the algebraic approach in operational and planning models for distribution systems. Further work will explore the consideration of additional practical reliability aspects that are of utmost interest within the context of active distribution networks. Such an avenue of research will include the development of alternative models for the integration of distributed generation and the consideration of network reconfiguration to restore service after failure.

APPENDIX

For a given network topology, the conventional simulation-based algorithm [17] analyzes the outages of system branches one at a time. For each branch, the expected interruption rates for those nodes affected by a fault in such a branch are increased by the corresponding branch failure rate. Similarly, the expected interruption durations for those nodes affected by a fault in such a branch are increased by the product of the corresponding branch failure rate and interruption duration. This algorithm is outlined as follows:

Set Π_i^{RS} , Π_i^{SO} , Γ_i^{RS} , and Γ_i^{SO} equal to 0 for all load nodes
Loop over all branches ij

Loop over all load nodes i

If node i experiences a repair-and-switching interruption due to a fault in branch ij

$$\begin{aligned}\Pi_i^{RS} &\leftarrow \Pi_i^{RS} + \lambda_{ij}\ell_{ij} \\ \Gamma_i^{RS} &\leftarrow \Gamma_i^{RS} + \lambda_{ij}\ell_{ij}\tau_{ij}^{RS}\end{aligned}$$

Elseif node i experiences a switching-only interruption due to a fault in branch ij

$$\begin{aligned}\Pi_i^{SO} &\leftarrow \Pi_i^{SO} + \lambda_{ij} \ell_{ij} \\ \Gamma_i^{SO} &\leftarrow \Gamma_i^{SO} + \lambda_{ij} \ell_{ij} \tau_{ij}^{SO}\end{aligned}$$

End if

End loop

End loop

Once Π_i^{RS} , Π_i^{SO} , Γ_i^{RS} , and Γ_i^{SO} are determined, reliability indices can be readily computed using (9)–(12).

REFERENCES

- [1] H. L. Willis, *Power Distribution Planning Reference Book, 2nd ed.* New York, NY, USA: Marcel Dekker, Inc., 2004.
- [2] T. Gönen, *Electric Power Distribution Engineering, 3rd ed.* Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2014.
- [3] R. Billinton and R. N. Allan, *Reliability Evaluation of Power Systems.* New York, NY, USA: Plenum Press, 1996.
- [4] A. A. Chowdhury and D. O. Koval, *Power Distribution System Reliability: Practical Methods and Applications.* Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2009.
- [5] K. Moslehi and R. Kumar, "A reliability perspective of the smart grid," *IEEE Trans. Smart Grid*, vol. 1, no. 1, pp. 57–64, Jun. 2010.
- [6] A. L. A. Syri and P. Mancarella, "Reliability and risk assessment of post-contingency demand response in smart distribution networks," *Sustain. Energy Grids Netw.*, vol. 7, pp. 1–12, Sep. 2016.
- [7] P. M. Costa and M. A. Matos, "Assessing the contribution of microgrids to the reliability of distribution networks," *Electr. Power Syst. Res.*, vol. 79, no. 2, pp. 382–389, Feb. 2009.
- [8] P. Paliwal, N. P. Patidar, and R. K. Nema, "A novel method for reliability assessment of autonomous PV-wind-storage system using probabilistic storage model," *Int. J. Electr. Power Energy Syst.*, vol. 55, pp. 692–703, Feb. 2014.
- [9] S. Conti, R. Nicolosi, and S. A. Rizzo, "Generalized systematic approach to assess distribution system reliability with renewable distributed generators and microgrids," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 27, no. 1, pp. 261–270, Jan. 2012.
- [10] T. Adefarati and R. C. Bansal, "Reliability assessment of distribution system with the integration of renewable distributed generation," *Appl. Energy*, vol. 185, part 1, pp. 158–171, Jan. 2017.
- [11] Y. Chen, Y. Zheng, F. Luo, J. Wen, and Z. Xu, "Reliability evaluation of distribution systems with mobile energy storage systems," *IET Renew. Power Gener.*, vol. 10, no. 10, pp. 1562–1569, Nov. 2016.
- [12] H. Farzin, M. Moeini-Aghtaie, and M. Fotuhi-Firuzabad, "Reliability studies of distribution systems integrated with electric vehicles under battery-exchange mode," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 31, no. 6, pp. 2473–2482, Dec. 2016.
- [13] C. L. T. Borges, "An overview of reliability models and methods for distribution systems with renewable energy distributed generation," *Renew. Sust. Energ. Rev.*, vol. 16, no. 6, pp. 4008–4015, Aug. 2012.
- [14] J. Lin, L. Cheng, Y. Chang, K. Zhang, B. Shu, and G. Liu, "Reliability based power systems planning and operation with wind power integration: A review to models, algorithms and applications," *Renew. Sust. Energ. Rev.*, vol. 31, pp. 921–934, Mar. 2014.
- [15] *IEEE Guide for Electric Power Distribution Reliability Indices*, IEEE Standard 1366-2012, May 2012.
- [16] R. E. Brown and A. P. Hanson, "Impact of two-stage service restoration on distribution reliability," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 16, no. 4, pp. 624–629, Nov. 2001.
- [17] R. E. Brown, *Electric Power Distribution Reliability, 2nd ed.* Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2008.
- [18] P. S. Georgilakis and N. D. Hatziargyriou, "A review of power distribution planning in the modern power systems era: Models, methods and future research," *Electr. Power Syst. Res.*, vol. 121, pp. 89–100, Apr. 2015.
- [19] J. C. López, M. Lavorato, and M. J. Rider, "Optimal reconfiguration of electrical distribution systems considering reliability indices improvement," *Int. J. Electr. Power Energy Syst.*, vol. 78, pp. 837–845, Jun. 2016.
- [20] G. Muñoz-Delgado, J. Contreras, and J. M. Arroyo, "Reliability assessment for distribution optimization models: A non-simulation-based linear programming approach," *IEEE Trans. Smart Grid*, vol. 9, no. 4, pp. 3048–3059, Jul. 2018.
- [21] G. Muñoz-Delgado, J. Contreras, and J. M. Arroyo, "Distribution network expansion planning with an explicit formulation for reliability assessment," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 33, no. 3, pp. 2583–2596, May 2018.
- [22] R. G. Cespedes, "New method for the analysis of distribution networks," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 5, no. 1, pp. 391–396, Jan. 1990.
- [23] J. A. Taylor and F. S. Hover, "Convex models of distribution system reconfiguration," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 27, no. 3, pp. 1407–1413, Aug. 2012.
- [24] A. R. Jordehi, "Optimisation of electric distribution systems: A review," *Renew. Sust. Energ. Rev.*, vol. 51, pp. 1088–1100, Nov. 2015.
- [25] L. Wolsey, *Integer Programming.* New York, NY, USA: Wiley Inter-Science, 1998.
- [26] R. A. Jabr, "Polyhedral formulations and loop elimination constraints for distribution network expansion planning," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 28, no. 2, pp. 1888–1897, May 2013.
- [27] G. Muñoz-Delgado, J. Contreras, and J. M. Arroyo, "Multistage generation and network expansion planning in distribution systems considering uncertainty and reliability," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 31, no. 5, pp. 3715–3728, Sep. 2016.
- [28] M. Lavorato, J. F. Franco, M. J. Rider, and R. Romero, "Imposing radiality constraints in distribution system optimization problems," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 27, no. 1, pp. 172–180, Feb. 2012.
- [29] J. F. Franco, M. J. Rider, M. Lavorato, and R. Romero, "A mixed-integer LP model for the reconfiguration of radial electric distribution systems considering distributed generation," *Electr. Power Syst. Res.*, vol. 97, pp. 51–60, Apr. 2013.
- [30] J. F. Franco, M. J. Rider, and R. Romero, "A mixed-integer quadratically-constrained programming model for the distribution system expansion planning," *Int. J. Electr. Power Energy Syst.*, vol. 62, pp. 265–272, Nov. 2014.
- [31] A. Tabares, J. F. Franco, M. Lavorato, and M. J. Rider, "Multistage long-term expansion planning of electrical distribution systems considering multiple alternatives," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 31, no. 3, pp. 1900–1914, May 2016.
- [32] M. E. Samper and A. Vargas, "Investment decisions in distribution networks under uncertainty with distributed generation—Part II: Implementation and results," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 28, no. 3, pp. 2341–2351, Aug. 2013.
- [33] C.-T. Su and C.-S. Lee, "Network reconfiguration of distribution systems using improved mixed-integer hybrid differential evolution," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 18, no. 3, pp. 1022–1027, Jul. 2003.
- [34] M. Lavorato, M. J. Rider, A. V. Garcia, and R. Romero, "A constructive heuristic algorithm for distribution system planning," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 25, no. 3, pp. 1734–1742, Aug. 2010.
- [35] R. Billinton and S. Jonnavithula, "A test system for teaching overall power system reliability assessment," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 11, no. 4, pp. 1670–1676, Nov. 1996.
- [36] Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica. 1080 buses test system. [Online]. Available: http://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/engenhariaeletrica/lapsee/system_1080_distribution_feeder.rar
- [37] A. Tabares, G. Muñoz-Delgado, J. F. Franco, J. M. Arroyo, and J. Contreras. An enhanced algebraic approach for the analytical reliability assessment of distribution systems—Data and results for the case studies. [Online]. Available: https://drive.google.com/file/d/1sle7rVD_2rSga-2u-ll3QBaitvYKZ2Qd/view?usp=sharing
- [38] IBM ILOG CPLEX, 2019. [Online]. Available: <https://www.ibm.com/analytics/cplex-optimizer>
- [39] GAMS Development Corporation, 2019. [Online]. Available: <http://www.gams.com>
- [40] R. C. Lotero and J. Contreras, "Distribution system planning with reliability," *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 26, no. 4, pp. 2552–2562, Oct. 2011.



Alejandra Tabares received the B.Sc. degree in production engineering from the Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia, in 2012, and the M.Sc. degree in electrical engineering from the São Paulo State University (UNESP), Ilha Solteira, Brazil, in 2015. She is currently pursuing the Ph.D. degree in electrical engineering.

Her area of research is the development of methodologies for the optimization, planning, and control of electrical power systems.



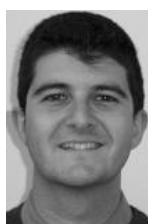
Gregorio Muñoz-Delgado (S'14–M'18) received the Ingeniero Industrial degree, the M.Sc. degree, and the Ph.D. degree from the Universidad de Castilla-La Mancha, Ciudad Real, Spain, in 2012, 2013, and 2017, respectively.

He is currently an Assistant Professor at the Universidad de Castilla-La Mancha. His research interests are in the fields of power systems planning, operations, and economics.



John F. Franco (S'11–M'13) received the B.Sc. and M.Sc. degrees in electrical engineering from the Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia, in 2004 and 2006, respectively, and the Ph.D. degree in electrical engineering from the São Paulo State University (UNESP), Ilha Solteira, Brazil, in 2012. Currently, he is a Professor at the São Paulo State University, Rosana, Brazil.

His area of research is the development of methodologies for the optimization, planning, and control of electrical power systems.



José M. Arroyo (S'96–M'01–SM'06) received the Ingeniero Industrial degree from the Universidad de Málaga, Málaga, Spain, in 1995, and the Ph.D. degree in power systems operations planning from the Universidad de Castilla-La Mancha, Ciudad Real, Spain, in 2000.

He is currently a Full Professor of electrical engineering at the Universidad de Castilla-La Mancha. His research interests include operations, planning, and economics of power systems, as well as optimization.



Javier Contreras (SM'05–F'15) received the B.S. degree in electrical engineering from the University of Zaragoza, Zaragoza, Spain, in 1989, the M.Sc. degree from the University of Southern California, Los Angeles, CA, USA, in 1992, and the Ph.D. degree from the University of California, Berkeley, CA, USA, in 1997.

He is a Professor at the Universidad de Castilla-La Mancha, Ciudad Real, Spain. His research interests include power systems planning, operations, and economics, as well as electricity markets.