

# RESSALVA

Atendendo solicitação da autora,  
o texto completo desta tese será  
disponibilizado somente a partir  
de 22/03/2021

Paola Geovanna Patzi Aquino

*Condições de Otimalidade para Problemas de  
Controle Ótimo Minimax*

Tese de Doutorado  
Pós-Graduação em Matemática

Paola Geovanna Patzi Aquino

*Condições de Otimalidade para Problemas  
de Controle Ótimo Minimax*

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

São José do Rio Preto

2019

A657c

Aquino, Paola Geovanna Patzi

Condições de otimalidade para problemas de controle ótimo minimax /

Paola Geovanna Patzi Aquino. -- São José do Rio Preto, 2019

116 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Geraldo Nunes Silva

1. Matemática aplicada. 2. Teoria do controle. 3. Otimização (Matemática).  
4. Equações de Hamilton-Jacobi. 5. Princípios de máximo (Matemática). I.  
Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Paola Geovanna Patzi Aquino

*Condições de Otimalidade para Problemas  
de Controle Ótimo Minimax*

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

COMISSÃO EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva  
UNESP - São José do Rio Preto  
Orientador

---

Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira  
UNESP - São José do Rio Preto

---

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita  
UNESP - São José do Rio Preto

---

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Lucelina Batista Santos  
UFPR - Curitiba

---

Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa  
USP - São Carlos

São José do Rio Preto, 22 de março de 2019.

Aos meus amados pais,  
Vitaliano (*in memoriam*) e Juana.  
Aos meus queridos irmãos,  
Juan José, Luis e Lizeth.  
*Dedico.*

## Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, por me proteger, cuidar, iluminar, guiar-me ao longo de meu caminho e por me dar a força para superar os obstáculos e as dificuldades que surgiram em minha vida.

Ao meu pai Vitaliano (in memoriam), que não pode estar presente neste momento da minha vida, muito obrigada por todo o apoio e o amor que me deste em vida, por me ensinar a não desanimar e não ceder diante de nada. Saudades eternas!. À minha mãe Juana por me dar apoio incondicional e incentivo nas horas difíceis. Amo muito você!

Aos meus irmãos Juan José, Luis e Lizeth pelo carinho, apoio, força e amor incondicional que me deram durante todo este tempo. Obrigada por suas palavras de incentivo quando eu mais precisava.

Ao meu orientador Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva, por todos os sábios conselhos que me deu, pelo tempo e paciência que teve para mim durante meu trabalho.

Agradeço a todos os meus professores da graduação, mestrado e doutorado. Em especial, agradeço ao meu Professor Rolando Condori pelas palavras de encorajamento para continuar, apesar dos momentos difíceis que passei na minha vida.

Agradeço aos colegas de pós-graduação, em especial aos da “salinha” do Departamento de Matemática Aplicada. Agradeço a minhas amigas brasileiras Tatiane e Nathalia, por sua linda amizade, por compartilhar tantas vivências. Vou sentir muita saudade de vocês!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

## Resumo

Neste trabalho consideramos problemas de controle minimax em que as funções envolvidas dependem de parâmetros desconhecidos. Essa dependência aparece tanto na dinâmica, quanto na função custo, e minimizamos com respeito aos controles a maximização da função de custo em relação aos parâmetros.

O trabalho é dividido em duas partes principais. Na primeira fornecemos condições necessárias e suficientes de otimalidade para problemas de controle minimax sem restrições, usando a teoria de Programação Dinâmica via equações de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Caracterizamos a função de valor do problema minimax como o máximo de funções de valor de problemas parametrizados sobre o conjunto de parâmetros e mostramos que a função de valor é solução da equação HJB.

Na segunda parte, consideramos problemas de controle ótimo minimax com restrições de igualdade e desigualdade, para o qual proporcionamos condições necessárias de otimalidade no sentido do Princípio do Máximo (de Pontryagin).

**Palavras-chave:** controle ótimo minimax, equações de Hamilton-Jacobi-Bellman, função de valor, análise não suave, Princípio do Máximo.



## Abstract

In this work we consider minimax control problems in which the functions involved depend on unknown parameters. This dependence appears in both the dynamics and the cost function and we minimize over the controls the maximization of the cost function in relation to the parameters.

The work is divided in two main parts. In the first one we provide necessary and sufficient conditions of optimality for unconstrained minimax optimal control problems using the theory of Dynamic Programming via Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equations. We characterize the value function of the minimax problem as the maximum of value functions of parametrized problem on the parameter set and show that the value function is solution of the HJB equation.

In the second part we consider minimax optimal control problems with equality and inequality restrictions, for which we provide necessary conditions of optimality in the sense of Pontryagin's Maximum Principle.

**Keywords:** minimax optimal control, Hamilton-Jacobi-Bellman equations, value function, nonsmooth analysis, Maximum Principle.

## Lista de Símbolos

$L^1([S, T]; \mathbb{R}^p)$	Espaço das funções integráveis de $[S, T]$ a $\mathbb{R}^p$ .
$L^\infty([S, T]; \mathbb{R}^p)$	Espaço das funções essencialmente limitadas de $[S, T]$ a $\mathbb{R}^p$ .
$ x $	Norma Euclideana de $x$ .
<b>B</b>	Bola unitária fechada centrada no origem no espaço Euclideano.
$\mathbf{B}(x, r)$	Bola fechada de centro $x$ e raio $r$ no espaço Euclideano.
$d_C(x)$	Distância Euclideana de $x$ ao conjunto $C$ .
$\mathcal{C}(X, M)$	Espaço de funções contínuas.
$C(A)$	Espaço de funções contínuas de valores reais sobre $A$ .
$C^*(A)$	Dual topológico de $C(A)$ .
$\text{dom}f$	Domínio (efetivo) de $f$ .
$\text{epi}f$	Epígrafo de $f$ .
$\text{Gr}F$	Gráfico de $F$ .
$N_C^P(x)$	Cone normal proximal a $C$ em $x$ .
$N_C(x)$	Cone normal limite a $C$ em $x$ .
$\partial^P f(x)$	Subdiferencial proximal de $f$ em $x$ .
$\partial^L f(x)$	Subdiferencial limite de $f$ em $x$ .
$\text{supp}\mu$	Suporte da medida $\mu$ .
$\text{bdy}C$	Fronteira de $C$ .

$\text{int}C$	Interior de $C$ .
$\overline{C}$	Clausura ou fecho de $C$ .
$W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^p)$	Espaço das funções absolutamente contínuas de $[S, T]$ a $\mathbb{R}^p$ .
$\Gamma : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$	Multifunção de $\Omega$ no espaço de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ .
$\text{meas}\{D\}$	Medida do conjunto $D$ .
$x_i \xrightarrow{C} x$	$x_i \rightarrow x$ e $x_i \in C$ , para todo $i$ .
$x_i \xrightarrow{f} x$	$x_i \rightarrow x$ e $f(x_i) \rightarrow f(x)$ , para todo $i$ .
$\text{co}A$	Envoltório convexo do conjunto $A$ .
$\nabla f(x)$	Vetor gradiente de $f$ em $x$ .
q.t.p.	quase todo punto.
HJB	Hamilton-Jacobi-Bellman.

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 11
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	p. 18
2.1	Multifunções . . . . .	p. 18
2.2	Inclusões Diferenciais . . . . .	p. 21
2.3	Análise não suave . . . . .	p. 23
2.4	Monotonicidade de Inclusões Diferenciais . . . . .	p. 24
2.5	Programação Dinâmica . . . . .	p. 26
2.6	Princípio do Máximo . . . . .	p. 30
<b>3</b>	<b>Existência de trajetórias ótimas para problemas de controle</b>	p. 32
3.1	Existência de trajetórias para inclusões diferenciais . . . . .	p. 32
3.1.1	Sistemas de Controle . . . . .	p. 36
3.1.2	Existência de uma família de trajetórias . . . . .	p. 37
3.2	Existência de uma família de trajetórias ótimas . . . . .	p. 42
3.2.1	Problemas de Controle Ótimo Minimax . . . . .	p. 44
<b>4</b>	<b>Equações de Hamilton-Jacobi-Bellman para problemas de controle ótimo minimax</b>	p. 51

4.1	Definições . . . . .	p. 51
4.2	Condições Necessárias para o problema (P) . . . . .	p. 53
4.2.1	Caso de um conjunto de parâmetros finito . . . . .	p. 53
4.2.2	Caso de um conjunto de parâmetros infinito . . . . .	p. 57
4.2.3	Demonstração do Teorema 4.2.1 . . . . .	p. 59
4.3	Condições suficientes para o problema (P) . . . . .	p. 68
4.4	Função de Valor . . . . .	p. 69
<b>5</b>	<b>Condições necessárias de otimalidade para problemas de controle ótimo minimax com restrições de igualdade e desigualdade</b>	<b>p. 81</b>
5.1	Definições . . . . .	p. 82
5.2	Qualificações de Restrições . . . . .	p. 84
5.2.1	Condição tipo Posto Completo . . . . .	p. 84
5.2.2	Condição tipo Mangasarian-Fromowitz . . . . .	p. 84
5.3	Resultados Auxiliares . . . . .	p. 85
5.4	Condições necessárias para o problema (PR) . . . . .	p. 87
5.4.1	Caso em que $\mathcal{A}$ é um conjunto finito . . . . .	p. 88
5.4.2	Caso em que $\mathcal{A}$ é um conjunto infinito . . . . .	p. 94
5.4.3	Demonstração do Teorema 5.4.2 . . . . .	p. 98
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>p. 109</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>p. 110</b>
	<b>Anexo A</b>	<b>p. 113</b>
A.1	Algumas Definições . . . . .	p. 113
A.2	Resultados Auxiliares . . . . .	p. 115

## Introdução

Neste trabalho consideramos o seguinte problema de controle ótimo

$$(P) \begin{cases} \text{Minimizar } \max_{\alpha \in \mathcal{A}} g(x(T; \alpha), \alpha) \\ \text{s.a funções mensuráveis } u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ tal que } u(t) \in \Omega(t) \text{ q.t.p. } t \in [S, T] \\ \text{e arcos } \{x(\cdot; \alpha) : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \text{ tal que, para cada } \alpha \in \mathcal{A} \\ \dot{x}(t; \alpha) = f(t, x(t, \alpha), u(t), \alpha), \quad \text{q.t.p. } t \in [S, T] \\ x(S, \alpha) = x_0. \end{cases}$$

Aqui  $(\mathcal{A}, \rho_{\mathcal{A}})$  é um espaço métrico abstrato,  $\mathbb{R}^k$  denota o espaço Euclidiano  $k$ -dimensional,  $f : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g : \mathbb{R}^n \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções dadas,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^m$ ,  $S \leq t \leq T$ , é um conjunto dependente do tempo.

A otimização de sistemas dinâmicos, onde o critério de avaliação é o valor máximo de uma função, é um problema de ocorrência frequente na tecnologia, economia e indústria. Este problema aparece, em particular, quando se deseja minimizar o desvio máximo de trajetórias controladas em relação a uma dada trajetória como modelo. Os problemas do tipo minimax diferem daqueles normalmente considerados na literatura de controle ótimo, onde um custo cumulativo é minimizado. Observe que esta formulação do problema leva em conta as incertezas dos parâmetros tanto na função custo quanto nas restrições do sistema de controle. A minimização é tomada no cenário do pior caso, considerando todos os parâmetros possíveis, ou seja, minimizamos os controles admissíveis ou factíveis enquanto maximizamos os parâmetros definidos.

Este problema foi recentemente abordado na literatura em [39], onde R. B. Vinter obtém condições necessárias de otimalidade na forma do Princípio do Máximo. Os resultados de Vinter são estendidos por Karamzin et. al. em [18], onde fornecem condições necessá-

rias para problemas de controle ótimo minimax com restrições de estado. No entanto, a teoria desenvolvida pelos trabalhos anteriormente citados fornecem condições necessárias para a otimização de um processo de controle, i.e., o processo de controle candidato a mínimo deve satisfazer um conjunto de condições principais.

Para que as condições associadas ao princípio de máximo sejam suficientes para a otimização dos processos, é necessário impor algum tipo de convexidade (generalizada) ao problema, que geralmente não são verificáveis na prática. Assim, outra abordagem, que é agora amplamente usada, é a Programação Dinâmica introduzida por Bellman em [4] e mais tarde desenvolvida por outros autores. No entanto, até onde sabemos, não existe uma teoria de programação dinâmica adequada desenvolvida para problemas de controle minimax com as formulações apresentadas aqui.

Por isso propusemos: **a)** obter condições necessárias e suficientes para o problema ( $P$ ) usando a teoria de programação dinâmica ligada às equações de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). E além disso **b)** fornecer condições de otimalidade na forma do Princípio do Máximo de Pontryagin para o problema ( $P$ ) introduzindo também restrições mistas no estado e no controle estendendo a teoria realizada em [18] e [39]. A seguir contextualizamos cada parte.

Com relação à teoria de HJB para problemas de controle ótimo minimax, existe pouca literatura, entre eles podemos citar Di Marco e González [20, 21, 22]. No entanto, Di Marco e González consideram a minimização realizada sobre a maximização da função custo em relação à variável tempo e não há dependência de parâmetros nas funções envolvidas. Assim os problemas minimax são diferentes dos tratados nesta Tese e não podem ser comparados.

Um caso particular do problema de controle minimax ( $P$ ) é quando o conjunto de parâmetros  $\mathcal{A}$  é unitário. Nessa situação, obtemos o problema de controle a seguir, para o qual a teoria de Hamilton-Jacobi está bem estabelecida,

$$(P') \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } g(x(T)) \\ \text{s.a. funções mensuráveis } u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ tal que } u(t) \in \Omega(t) \text{ q.t.p. } t \in [S, T] \\ \text{e arcos } x : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ tal que} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \text{ q.t.p. } t \in [S, T] \\ x(0) = x_0. \end{array} \right.$$

A função de valor para este problema é definida como o ínfimo do problema parametrizado

$(P'_{t,z})$ , i.e.,

$$V(t, z) := \inf(P'_{t,z})$$

para todo  $(t, z) \in [S, T] \times \mathbb{R}^n$ , onde

$$(P'_{t,z}) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } g(x(T)) \\ \dot{x}(s) = f(s, x(s), u(s)), \text{ q.t.p. } s \in [t, T] \\ x(t) = z. \end{cases}$$

Uma função diferenciável  $\phi$  é solução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) se:

$$\begin{aligned} \phi_t(t, z) + \inf_{u \in \Omega(t)} \phi_x(t, z) \cdot f(t, z, u) &= 0, \quad \forall (t, z) \in [S, T] \times \mathbb{R}^n, \\ \phi(T, z) &= g(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Se a função de valor fosse continuamente diferenciável,  $V$  seria a única solução da equação de HJB. Mas nem sempre a função de valor é continuamente diferenciável. Assim vários autores apresentam conceitos que chamam de solução adequada para a equação de HJB. Por exemplo, Crandall e Lions [11] introduziram no início do ano 1980 o conceito de soluções de viscosidade e mostraram que a função de valor é a única solução de viscosidade para a equação Hamilton-Jacobi na classe de funções uniformemente contínuas. Em seu trabalho, a derivada é substituída por superdiferenciais e subdiferenciais, que coincidem com a derivada usual quando ela existe. Outros tipos de soluções contínuas, como soluções de Dini, Soluções Proximais, podem ser encontradas em [7] ou [38]. Por exemplo, (a seguinte definição encontra-se no Capítulo 2)  $\phi$  é uma solução proximal da equação de HJB se: para todo  $(t, z) \in ([S, T] \times \mathbb{R}^n) \cap \text{dom}\phi$ , tal que  $\partial^P \phi(t, z) \neq \emptyset$ , tem-se

$$\xi + \inf_u \eta \cdot f(t, z, u) = 0 \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in \partial^P \phi(t, z), \quad (1.1)$$

$$\phi(T, z) = g(z) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Aqui  $\partial^P \phi(t, z)$  denota a subdiferencial proximal de  $\phi$  em  $(t, z)$ . Em [10] é introduzida a conhecida solução generalizada envolvendo a noção de gradientes generalizados. O gradiente generalizado coincide com a derivada quando a função é estritamente diferenciável. O enfoque utilizado em [10] permite uma técnica de verificação mesmo quando a equação HJB não possui uma solução clássica. A referência [15] fornece uma comparação entre as soluções de viscosidade e as soluções generalizadas e mostra que uma função localmente Lipschitz é uma solução de viscosidade da equação HJB se, e somente se, a função é uma solução generalizada. Em [16] os autores caracterizam a função de valor para problemas de controle ótimo tipo Bolza com restrições de estado, como a única solução semicontínua



das equações de Hamilton-Jacobi-Bellman. No entanto, independentemente do tipo de solução, é sempre possível, sob hipóteses adequadas, provar que a função de valor  $V$  é uma solução da equação HJB.

A função  $\phi$  é chamada função de verificação se as equações (1.1)-(1.2) satisfizerem apenas as desigualdades “ $\geq$ ” e “ $\leq$ ”, respectivamente. Aqui fornecemos condições necessárias e suficientes para o problema  $(P)$ , no sentido da existência de funções de verificação, vinculadas às subdiferenciais proximais e subdiferenciais limite, veja [7] e [38]. Permitiremos que o conjunto de parâmetros  $\mathcal{A}$  seja um espaço métrico compacto arbitrário. A presença de um número infinito de elementos em  $\mathcal{A}$  é a principal fonte de dificuldade na derivação das condições de otimalidade para problemas de controle ótimo minimax. Quando  $\mathcal{A}$  é um conjunto finito o problema pode ser escrito como um problema de controle ótimo padrão, ao qual aplicamos técnicas já conhecidas de programação dinâmica e obtemos os resultados desejados para posteriormente poder tratar o problema geral de controle ótimo minimax. A importância de lidar primeiro o caso finito é que o problema de controle geral, cujo conjunto  $\mathcal{A}$  é um espaço métrico compacto, pode ser aproximado por problemas com conjuntos finitos  $\mathcal{A}_i$ . Em seguida, com uma análise de convergência adequada os resultados são fornecidos para o problema geral.

Utilizando a mesma técnica de aproximação, obtemos condições necessárias de otimalidade no sentido do Princípio do Máximo (de Pontryagin) para problemas de controle ótimo minimax com restrições de igualdade e desigualdade

$$(PR) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \max_{\alpha \in \mathcal{A}} g(x(T; \alpha), \alpha) \\ \text{s.a } u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^{k_u}, v : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^{k_v} \text{ tais que } v(t) \in V(t) \text{ q.t.p. } t \in [S, T] \\ \text{e arcsos } \{x(\cdot; \alpha) : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n | \alpha \in \mathcal{A}\} \text{ tais que, para cada } \alpha \in \mathcal{A} \\ \dot{x}(t; \alpha) = f(t, x(t, \alpha), u(t), v(t), \alpha), \quad \text{q.t.p. } t \in [S, T] \\ 0 = b(t, x(t, \alpha), u(t), v(t), \alpha) \\ 0 \geq l(t, x(t, \alpha), u(t), v(t), \alpha) \\ x(S, \alpha) = x_0 \\ x(T, \alpha) \in C(\alpha). \end{array} \right.$$

Aqui  $g : \mathbb{R}^n \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(f, b, l) : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k_u} \times \mathbb{R}^{k_v} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_b} \times \mathbb{R}^{m_l}$ , são funções dadas,  $V(t) \subset \mathbb{R}^{k_v}$  para todo  $t \in [S, T]$  é um conjunto dependente do tempo,  $C(\alpha) \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto fechado e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , com  $m := m_b + m_l$ ,  $k := k_u + k_v$  e  $k \geq m$ .

As condições necessárias de otimização são utilizadas para encontrar o melhor controle possível para levar um sistema dinâmico de um estado para outro satisfazendo as restri-

ções. O Princípio do Máximo para o problema  $(\tilde{P})$  no caso suave foi formulado em 1956 pelo matemático russo Lev Semenovich Pontryagin e sua prova é dada por Boltyanskii; veja [5, 34]. Depois o princípio foi generalizado para dados não suaves (veja, por exemplo [7, 38]).

O problema (PR) colocado dessa forma, onde  $\mathcal{A}$  é um conjunto unitário, tem sido foco de atenção por muitos anos (veja, por exemplo, [17], [23], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [36], [37]). Em [29], Pinho, Vinter e Zheng proporcionam condições necessárias para este tipo de problemas quando o conjunto  $\mathcal{A}$  é unitário, com suposições essenciais sobre os dados, a saber, uma condição de convexidade e outra de interioridade. Em [17, 23, 26, 28, 30, 31] as condições necessárias para problemas com restrições são fornecidas supondo que certa matriz  $F(t)$ , a saber, a matriz Jacobiana das restrições com respeito ao controle, tenha posto completo no sentido que  $\det F(t)F(t)^\top \geq L$  para quase todo  $t \in [S, T]$  e para algum  $L > 0$ . Por exemplo, em [17, 23], a condição de posto completo é imposta na matriz

$$\Upsilon_1(t) = \begin{pmatrix} b_u(t, \bar{x}(t), \bar{w}(t)) \\ l_u(t, \bar{x}(t), \bar{w}(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_u b(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) \\ \nabla_u l(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) \end{pmatrix}.$$

Em [26] a condição de posto completo é imposta na matriz

$$\Upsilon_2(t) = \begin{pmatrix} \nabla_u b(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) \\ \nabla_u l^{\mathcal{I}_b(t)}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) \end{pmatrix},$$

onde  $\mathcal{I}_b(t) = \{i \in \{1, \dots, m_l\} \mid l_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) \geq -b\}$  e  $\nabla_u l^{\mathcal{I}_b(t)}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t))$  denota a matriz que obtemos depois de remover de  $\nabla_u l(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t))$  todas as linhas de índice  $i \notin \mathcal{I}_b(t)$ . Também pode-se ver em [27] e [30] que esta condição é dada na matriz

$$\Upsilon_3(t) = \begin{pmatrix} \nabla_u b(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) & 0 \\ \nabla_u l(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) & \text{diag}\{-l_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t))\}_{i \in \{1, \dots, m_l\}} \end{pmatrix}.$$

Em [30], os autores mostram que a condição de posto completo imposta nas matrizes acima estão relacionadas entre si e são suficientes para que a matriz

$$F(t) = \begin{pmatrix} \nabla_u b(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) \\ \nabla_u l^{\mathcal{I}_a(t)}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) \end{pmatrix}$$

tenha posto completo. Onde  $\mathcal{I}_a(t) = \{i \in \{1, \dots, m_l\} \mid l_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) = 0\}$ .

Um outro enfoque pode ser encontrado em [32], onde são fornecidas condições necessárias supondo uma hipótese tipo Mangasarian-Fromowitz. Na referência [33], se estuda este tipo de problemas no caso em que as restrições mistas são não suaves.

Para obtermos as condições necessárias para o nosso problema (PR), vamos impor hipóteses de regularidade nas restrições de igualdade e desigualdade, a saber, duas condições tipo posto completo e uma condição tipo Mangasarian-Fromowitz. Permitiremos dados não suaves e expressaremos condições necessárias em termos de subdiferenciais limite e outras construções de análise não suave. Enfatizamos que o fato de assumir que  $\mathcal{A}$  é um espaço métrico arbitrário e compacto é a característica mais significativa de nossa análise.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

No **Capítulo 2** serão apresentadas algumas definições e resultados importantes sobre: multifunções, inclusões diferenciais e análise não suave que serão utilizados em todo o desenvolvimento do trabalho. Na Seção 2.5, apresentaremos a teoria de Programação Dinâmica introduzida por R. Bellman (função de valor e as equações de HJB). Na Seção 2.6, será descrito o Princípio do Máximo de Pontryagin para o caso não suave.

No **Capítulo 3** serão apresentados resultados novos para inclusões diferenciais que dependem de parâmetros. Na Seção 3.2 se proporcionará condições sobre os dados para que uma inclusão diferencial, que depende de parâmetros, possua ou admita soluções. Na Seção 3.3 mostraremos, que sobre uma hipótese de convexidade na inclusão diferencial, um problema de controle que depende de parâmetros tem trajetórias mínimas, finalmente será mostrado que problemas de controle minimax onde todos os dados dependem de um vetor de parâmetros desconhecido possui processos factíveis ótimos.

No **Capítulo 4**, Seção 4.2, forneceremos condições necessárias e suficientes de otimalidade, via as equações de HJB para o problema (P), o resultado será proporcionado pela introdução de um novo subdiferencial que depende de parâmetros. Na Seção 4.3 definiremos a função de valor para problemas de controle ótimo minimax e mostraremos que a função de valor é Lipschitz, e pode ser escrito como o máximo de funções de valor de um problema parametrizado, além de mostrar que é solução da equação de HJB. Generalizando o conceito de função de valor para problemas de controle ótimo padrão.

O **Capítulo 5** está dedicado aos problemas de controle minimax com restrições mistas. Na Seção 5.2 introduzimos hipóteses de regularidade nas restrições do problema (PR), a saber, duas condições de restrições tipo posto completo e uma condição de restrição tipo Mangasarian-Fromowitz. Na primeira parte da Seção 5.4 proporcionarmos condições necessárias para o problema (PR) quando o conjunto  $\mathcal{A}$  é finito. Seguidamente apresentaremos um exemplo minimax onde o conjunto  $\mathcal{A}$  é um intervalo e mostraremos que o Princípio do Máximo obtido deixa de ser válido quando  $\mathcal{A}$  é um conjunto infinito, o que deixa explícita a necessidade de obter novas condições necessárias para quando  $\mathcal{A}$

---

seja um espaço métrico arbitrário. Finalmente nesta mesma seção mostramos o resultado principal do Capítulo 5, condições necessárias para problemas de controle minimax com restrições, quando  $\mathcal{A}$  seja um espaço métrico arbitrário.

Enfatizamos que os nossos resultados (inéditos) estão enunciados na Tese sem referências enquanto que os resultados existentes na literatura estarão referenciados para conveniência do leitor.

## Considerações Finais

Neste trabalho fornecemos condições necessárias e suficientes de otimalidade para problemas de controle minimax, definindo um novo subdiferencial que depende de parâmetros. Definimos a função de valor do problema de controle ótimo minimax e mostramos que, com certas hipóteses sobre os dados, esta é Lipschitz e é solução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. Os resultados obtidos ampliam a teoria de controle ótimo para a teoria de Programação Dinâmica.

Posteriormente, obtemos condições necessárias para problemas de controle ótimo minimax com restrições de igualdade e desigualdade na forma do Princípio do Máximo (Teorema 5.4.2), introduzindo qualificações de restrições (tipo posto completo e tipo Mangasarian-Fromowitz), a qual é aplicada a minimizadores locais fracos. E mostramos com um exemplo, que o Teorema 5.4.1 que enuncia as condições necessárias para problemas com restrições mistas no estado e no controle, para o caso em o conjunto  $\mathcal{A}$  é finito, deixa de ser válido se o conjunto de parâmetros é um infinito. Também com um exemplo vimos que as hipóteses tipo Mangasarian-Fromowitz são menos restritivas que a hipóteses de posto completo, estendendo os resultados que temos na teoria clássica.

Há muito por trabalhar ainda na teoria de controle para problemas minimax, por exemplo entre os possíveis trabalhos futuros estão obter: **a)** Condições necessárias e suficientes para o problema  $(PR)$  via as equações de HJB ; **b)** Condições necessárias para o problema  $(PR)$ , onde são considerados minimizadores locais fortes; **c)** Condições de otimalidade para problemas de controle ótimo multiobjetivos; **d)** Dualidade para problemas de controle minimax e **e)** Condições suficientes de otimalidade para problemas de controle minimax com restrições, utilizando alguma condição de convexidade generalizada sobre os dados, tal como MP pseudo-invexidade, introduzida em [24] e [25].

## Referências Bibliográficas

- [1] AUBIN, J. P.; CELLINA, A. *Differential Inclusions*, Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [2] BARRON, E. N.; JENSEN, R. The Pontryagin maximum principle from dynamic programming and viscosity solutions to first order partial differential equations, *Transactions of the American Mathematical Society*, v.298, n.2, p.635-641, december 1986.
- [3] BELLMAN, R. E. The theory of dynamic programming, *Bull. Amer. Math. Soc.*, v.60, p.503-515, 1954.
- [4] BELLMAN, R. E. *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957.
- [5] BOLTYANSKII, V. G. The maximum principle in the theory of optimal processes, *Doklady Akademii Nauk SSSR (Reports of the Academy of Sciences USSR)*, Moscow, v.119, n.6, p.1070-1073, 1958.
- [6] CASTAING, C.; VALADIER, M. *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, New York, v.580, 1977.
- [7] CLARKE, F. H. ET AL. *Nonsmooth analysis and control theory*. New York: Springer, 1998.
- [8] CLARKE, F. H. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Wiley- Interscience, New York, 1983; reprinted as v.5 of Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1990.
- [9] CLARKE, F. H. *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*, Springer, Verlag London, 2013.
- [10] CLARKE, F. H.; VINTER R. B. Local Optimality Conditions and Lipschitzian Solutions to the HamiltonJacobi Equation, *SIAM Journal on Control and Optimization*,, v.21, n.6, p.856-870, 1983.
- [11] CRANDALL, M. G.; LIONS, P. L. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Transactions of the American Mathematical Society*, v.277, p.1-42, 1983.

- [12] DEIMLING, K. *Multivalued Differential Equations*, de Gruyter, Berlin, 1992.
- [13] DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J. T. *Linear Operators. Part I: General Theory*, Interscience, London, 1958, reissued by Wiley-Interscience (Wiley Classics Library), 1988.
- [14] FOLLAND, G. B. *Real Analysis-Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley and Sons, 1999.
- [15] FRANKOWSKA, HÉLÈNE, Hamilton-Jacobi equations: Viscosity solutions and generalized gradients, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v.141, n.1, p.21-26, 1989.
- [16] FRANKOWSKA, H.; PLASKACZ S. Semicontinuous Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations with Denegenerate State Constraints, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v.251, p.818-838, 2000.
- [17] HESTENES, M. R. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. Wiley, New York, 1966.
- [18] KARAMZIN D., ET AL. Minimax optimal control problem with state constraints, *European Journal of Control*, 2016.
- [19] LIMA, ELON LAGES. *Elementos de Topologia Geral*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.
- [20] DI MARCO, SILVIA C.; GONZALEZ, ROBERTO L. V. Supersolutions and subsolutions techniques in a minimax optimal control problem with infinite horizon, *Indian J. Pure Appl. Math.* India, v.29, n.10, p.1083-1098, 1998
- [21] DI MARCO, SILVIA C.; GONZALEZ, ROBERTO L. V. Minimax optimal control problems. Numerical analysis of the finite horizon case, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, Dunod, v.33, n.1, p.23-54, 1999.
- [22] DI MARCO, SILVIA C.; GONZALEZ, ROBERTO L. V. Minimax optimal control problem with infinite horizon, *Research Report*, RR-2945, INRIA. 1996. <inria-00073754>, 2006.
- [23] NEUSTADT, L. W. *Optimization, A Theory of Necessary Conditions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976.
- [24] DE OLIVEIRA, V. A.; SILVA, G. N.; ROJAS-MEDAR, M. A., A class of multiobjective control problems, *Optim, Control Appl. Meth.*, v.30, p.77-86, 2009.
- [25] DE OLIVEIRA, V. A.; SILVA, G. N., New optimality conditions for nonsmooth control problems *J. Glob. Optim.*, v.57, p.1465-1484, 2013.
- [26] OSMOLOVSKII, N. P. Second order conditions for a weak local minimum in an optimal control problem (necessity and sufficiency), *Soviet Math. Dokl.*, v.16, p.1480-1484, 1975.

- [27] PALES, Z; ZEIDAN V. First and second order necessary conditions for control problems with constraints, *Transactions of the American Mathematical Society*, v.346, n.2, p.421-453, 1994.
- [28] DE PINHO, M. R.; VINTER, R. B. Necessary conditions for optimal control problems involving nonlinear differential algebraic equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v.212, p.493-516, 1997.
- [29] DE PINHO, M. R.; VINTER, R.B. AND ZHENG, H. A maximum principle for optimal control problems with mixed constraints, *IMA Journal Mathematical Control and Informations* v.18, p.189-205, 2001.
- [30] DE PINHO, M. R.; ILCHMANN, A. Weak maximum principle for optimal control problems with mixed constrained, *Nonlinear Analysis*, v.48, p.1179-1196, 2002.
- [31] DE PINHO, M. R., Mixed constrained control problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v.278, p.293-307, 2003.
- [32] DE PINHO, M. R.; ROSENBLUETH, J. F. Necessary conditions for constrained problems under Mangasarian-Fromowitz conditions, *SIAM Journal on Control and Optimization* v.47, n.1, p.535-552, 2008.
- [33] DE PINHO, M. R., ET AL. A Weak Maximum Principle for Optimal Control Problems with Nonsmooth Mixed Constraints, *Set Valued and Variational Analysis*, v.17, p.203-221, 2009.
- [34] PONTRYAGIN, L. S. ET AL. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Wiley, New York, 1962.
- [35] REED, M.; SIMON, B. *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis*. Academic Press, 1970.
- [36] STEFANI, G.; ZEZZA, P. L. Optimality conditions for constrained control problems, *SIAM Journal on Control and Optimization* v.34, p.635-659, 1996.
- [37] VINTER, R. B.; ZHENG, H. Necessary conditions for optimal control problems with state constraints, *Transactions of the American Mathematical Society*, v.350, p.1181-1204, 1998.
- [38] VINTER, R. B. *Optimal Control*. Boston: Birkhäuser, 2000.
- [39] VINTER, R. B. Minimax optimal control, *SIAM Journal on Control and Optimization* v.44, n.3, p.939-968, 2005.
- [40] WAGNER, D. H. Survey of measurable selection theorems, *SIAM. Journal on Control and Optimization*, v.15, p.859-903, 1977.