

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

THIAGO VINÍCIUS MOREIRA GUIMARÃES

Modelo cosmológico unificado com espinores de dimensão de massa um

Guaratinguetá

2019

Thiago Vinícius Moreira Guimarães

**Modelo cosmológico unificado com espinores de dimensão
de massa um**

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade
de Engenharia do Campus de Guaratinguetá,
Universidade Estadual Paulista, para a ob-
tenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira

GUARATINGUETÁ
2019

Guimarães, Thiago Vinícius Moreira
G963m Modelo cosmológico unificado com espinores de dimensão de massa
um / Thiago Vinícius Moreira Guimarães – Guaratinguetá, 2019
196 f. : il.
Bibliografia: f. 170-182

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2019.
Orientador: Prof. Dr Saulo Henrique Pereira
Coorientador: Prof. Dr. Elias Leite Mendonça

1. Cosmologia 2. Matéria escura (Astronomia) 3. Energia escura
(Astronomia) I.Título

CDU 524.82(043)

Ana Cristina Figueiredo Loureiro
Bibliotecária CRB 8/7094

THIAGO MOREIRA GUIMARÃES

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. Konstatin Georgiev Kostov
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. SAULO HENRIQUE PEREIRA
Orientador / UNESP/FEG


Prof. Dr. JOSÉ FERNANDO DE JESUS
UNESP/ITAPEVA


Prof. Dr. MARCO ANDRÉ FERREIRA DIAS
UNIFESP


Prof. Dr. LUIZ CLEBER TAVARES DE BRITO
UFLA


Prof. Dr. ALEXIS ROA AGUIRRE
UNIFEI

Abril de 2019

DADOS CURRICULARES

Thiago Vinícius Moreira Guimarães

NASCIMENTO 29.11.1988 – Caçapava / Brasil

FILIAÇÃO Eduardo Luiz Guimarães Júnior
Sílvia de Fátima Alves Moreira Lima

2008/2013 Curso de Graduação Licenciatura em Física
Universidade Estadual de Maringá-UEM

2013/2015 Curso de Pós-Graduação em Física, Nivel de Mestrado
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista-UNESP

2015/2019 Curso de Pós-Graduação em Física, Nivel de Doutorado
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista-UNESP

Dedico este trabalho aos meus velhos e indivisíveis.

AGRADECIMENTOS

É difícil resumir os agradecimentos de toda uma jornada em apenas uma página sem correr o risco de ser injusto. Muitos contribuíram para essa pesquisa e para minha formação como físico, mas como isso há de ser feito não caberá aqui omissões óbvias. O principal agradecimento é sem dúvida a meus pais, Sílvia e Euclides, e aos meus segundos pais, meu avô Jaime e Amadeu, aos quais devo o surgimento de minha curiosidade científica e em memória deles dedico esse trabalho. Devo agradecer sem sombra de dúvidas a minha namorada Rúbia, pelo apoio e amor dedicados... e também por entender a minha falta de tempo. Ainda agradeço as minhas avós e todos os meus 6 irmãos de sangue. Agradeço ao meu orientador, Saulo Pereira, pela paciência e ajuda. Não posso esquecer, é claro, dos amigos que fiz aqui em Guaratinguetá que ajudaram a fazer essa caminhada parecer mais amena, dos quais cito: ~~Dino~~, Gabriel, Barbara e Rafael... e claro, meus amigos do Paraná: Adriano, Rizzo e Ghiovani. Enfim, agradeço a todos!

...for the rainbow hair girl...

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- Brasil (**CAPES**) - código de financiamento 001.

*“The universe works on a math equation that never even ever really
ends in the end”*

Modest Mouse

RESUMO

Neste trabalho é construída a evolução completa do Universo impulsionada pelo espinor escuro com dimensão de massa um, chamado MDO. O modelo começa pela inflação cósmica, passando pela era dominada pela matéria escura, terminando com a recente expansão acelerada. Além disso, é feita uma primeira aproximação à teoria de perturbação escalar. Foi mostrado que a dinâmica do campo fermiônico MDO, respeitando um potencial com quebra de simetria, pode reproduzir todas as fases do Universo de uma maneira natural e elegante. As equações dinâmicas em geral e as condições de *Slow-Roll*, no limite $H \ll m_p$, também são apresentadas para o referido sistema. A análise numérica para o número de *e-folds* durante a inflação, densidade de energia após este período, o tempo presente e o tamanho real do Universo estão de acordo com o modelo padrão de cosmologia. Uma interpretação da fase inflacionária como resultado do princípio de exclusão de Pauli também é possível se o campo de MDO for tratado como um valor médio de seu análogo quântico.

PALAVRAS-CHAVE: MDO. Cosmologia. Inflação. Matéria escura. Λ CDM. Energia escura.

ABSTRACT

In this work we construct the complete evolution of the Universe driven by the mass dimension one dark spinor called MDO, starting with inflation, passing by the matter dominated era, finishing with the recent accelerated expansion and a first approximation to a scalar perturbation theory. The dynamic of the fermionic MDO field with a symmetry breaking type potential can reproduce all phases of the universe in a natural and elegant way. The dynamical equations in general case and slow-roll conditions in the limit $H \ll m_{pl}$ are also presented for the MDO system. Numerical analysis for the number of e-foldings during inflation, energy density after inflation and for present time and also the actual size of the universe are in good agreement with the standard model of cosmology. An interpretation of the inflationary phase as a result of Pauli exclusion principle is also possible if the MDO field is treated as an average value of its quantum analogue.

KEYWORDS: MDO. Cosmology. Inflation. Dark Matter. Λ CDM.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Universo evoluindo com $a(t) \sim t^{1/2}$ (curva azul) e posteriormente evoluindo com $a(t) \sim t^{2/3}$ (curva amarela). O tempo t^* marca a transição entre as fases.	22
Figura 2 -	A esfera vermelha representa um campo escalar rolando para o vácuo do potencial V e oscilando em torno dele.	44
Figura 3 -	A curva amarela representa o campo escalar ϕ por t , o qual desce para o vácuo do potencial a medida que a inflação ocorre. A curva azul representa o fator de escala, o qual se expande de maneira quase exponencial.	50
Figura 4 -	Durante a inflação cósmica o valor da densidade de energia é constante, enquanto que a densidade de pressão é também constante porém negativa, garantindo que haja expansão acelerada.	51
Figura 5 -	Evolução do parâmetro ω para toda a idade do Universo.	58
Figura 6 -	Evolução de Ω_{DM} para toda a idade do Universo.	58
Figura 7 -	Na primeira figura é dada uma seção do espaço-tempo, enquanto na segunda é dada uma seção perturbada do espaço-tempo.	62
Figura 8 -	Cortes no cone de luz e a definição de espinor.	89
Figura 9 -	Mapeamento dos pontos da esfera em um plano complexo.	89
Figura 10 -	Os gráficos foram gerados assumindo os parâmetros: $\varphi(0) = 5 \times 10^2 m_p$, $\lambda = (5 \times 10^{-6} m_p)^8$ e $\varphi_c = 1 m_p$, o método de integração utilizado foi Runge-Kutta Fehlberg de quarta ordem implementado no Software Mathematica [®] . A figura a) mostra o campo escalar efetivo $\varphi(t)$ saindo do valor inicial, $\varphi_i \gtrsim m_p$, no começo da inflação, e então rolando para o vácuo do potencial, enquanto que a Figura b) mostra a evolução do fator de escala $a(t)$	101
Figura 11 -	Comportamento de ρ (figura a)) e H (figura b)) guiados pelo campo φ durante a inflação. O valor $t_f = 2,7 \times 10^{-33} s$ marca o fim deste processo e como pode ser visto tanto ρ quanto H variam muito pouco durante este período e, uma vez que permanecem na escala de energia de $10^{43} s^{-1}$, podem ser tratados como constantes durante o período de inflação.	101

Figura 12 - A curva em cor azul mostra o comportamento de ϵ , que é muito menor que 1 para o início do Universo, seu valor aumenta até 1 em $t_f = 2,7 \times 10^{-33} s$ que marca o fim da inflação cósmica, comportamento semelhante pode ser visto para o parâmetro η dado pela curva amarela.	102
Figura 13 - Solução para ω em função do tempo, note que $\langle \omega \rangle = 0$.	103
Figura 14 - Em laranja tracejado é dada uma curva de comparação $t^{2/3}$, em azul sólido é dado o comportamento de $a(t)$ guiado pelo espinor MDO após a inflação.	104
Figura 15 - Potencial (422) (em unidade de m_p^4) construído com $v_0 = 0$ (linha preta) ou deslocado por $v_0 = 3.0 \times 10^{-22}$ (linha vermelha).	122
Figura 16 - Gráfico para o comportamento do campo φ para diferentes valores iniciais. Em vermelho é dado $\varphi_i = 2,5m_p \simeq 4.6 \times 10^{43} s^{-1}$, em azul tem-se $\varphi_i = 2,1m_p \simeq 3.9 \times 10^{43} s^{-1}$. Por sua vez, $\varphi_i = 1,5m_p \simeq 2.8 \times 10^{43} s^{-1}$ é dada em verde e por último $\varphi_i = 0,5m_p \simeq 9,5 \times 10^{42} s^{-1}$, é dado em magenta. Em todos os casos foi considerado $\dot{\varphi}_i = 0$.	126
Figura 17 - Comportamento do campo $\varphi(t)$ (em unidade de s^{-1}) usando os valores iniciais acima e também $d\varphi(0)/dt \equiv \dot{\varphi}_i = 0$ para a equação (406) na presença do último termo (linha preta) e na ausência deste mesmo termo (linha vermelha).	127
Figura 18 - Em azul é dada a curva de ϵ utilizando a equação (426), enquanto a curva amarela descreve o comportamento de η dado pela equação (427).	127
Figura 19 - Resultados numéricos para $a(t)$, $\varphi(t)$, $H(t)$ e $H(t)^{-1}/a(t)$ durante a fase inflacionária, de $t_i = 1.0 \times 10^{-35} s$ até $t_f = 3.0 \times 10^{-32} s$, obtidos usando $\varphi_i = 2.1m_p$, $\varphi_c = 1.0m_p$, $\Lambda = 5 \times 10^{-6} m_p \simeq 6.1 \times 10^{13} GeV$ e $v_0 = 0$. (a) - Evolução do fator de escala $a(t)$ com a condição inicial $a_i = 1$. (b) Evolução de $H(t)$ (em unidades de s^{-1}). (c) Evolução de $H(t)^{-1}/a(t)$.	129
Figura 20 - Resultado numérico para o fator de escala integrando por um longo tempo (linha preta). Em vermelho está plotada a função $a(t) = a_0 t^{2/3}$ para comparação, com $a_0 = 1.30 \times 10^{62}$.	130
Figura 21 - Análise numérica para $\omega(t)$ a partir de (434). A média das oscilações é em torno $\omega = 0$.	131
Figura 22 - Resultado numérico para o fator de escala integrando por um longo tempo (linha preta). Em vermelho está plotada a função $a(t) = a_0 t^{2/3}$ para comparação, com $a_0 = 1.30 \times 10^{62}$.	132

- Figura 23 - (a) Comportamento da densidade de energia ρ plotado a partir da equação (407) para diferentes valores de φ_i , a saber: $\varphi_i = 2.3m_p$ em azul, $\varphi_i = 2.1m_p$ em vermelho, $\varphi_i = 1.5m_p$ em verde e $\varphi_i = 0.5m_p$ em magenta. Note que, no início do processo inflacionário em todos os casos o decaimento de ρ é muito lento, sendo acentuado ao final deste período. (b) Decaimento de ρ após a inflação considerando os valores citados no item (a). (c) Comportamento da densidade de energia para $\Lambda = 5 \times 10^{-5}m_p$.(d) Comportamento para densidade de energia para $\Lambda = 5 \times 10^{-6}m_p$. (e) Comportamento da densidade de energia para $\Lambda = 5 \times 10^{-7}m_p$. Perceba que, as curvas (c),(d) e (e) mostram que o valor de Λ afeta o valor inicial da densidade de energia bem como o tempo de inflação.(f) Comportamento da pressão p para o campo MDO utilizando a equação (408), novamente é visto um comportamento de lenta variação durante o início da inflação, além disso seu valor é negativo o que garante que o Universo seja expandido. 133
- Figura 24 - Resultados numéricos para a evolução da densidade de energia (407) durante a inflação (linha preta) e a extrapação até o tempo presente (linha vermelha tracejada) (em unidades de s^{-4}). 134
- Figura 25 - Evolução do fator de escala contendo o termo v_0 (linha preta) e evolução proporcional a $t^{2/3}$ (linha vermelha), para comparação. O cruzamento das curvas ocorre em t^* que vai para o infinito quando $v_0 \rightarrow 0$ 135
- Figura 26 - Evolução de $\varphi(t)$ durante e após a inflação. O gráfico interno mostra em detalhes as primeiras oscilações do campo. 140
- Figura 27 - (a) - Evolução do parâmetro de Hubble, H , da função de torção h , do parâmetro de *Slow-Roll* ϵ e η , e o campo φ como função do número de e-folds durante a inflação. Quando a inflação termina $\epsilon = 1$, levando a $N \simeq 71$. Todas essas quantidades foram obtidas usando $\varphi_c = 1.3 m_p$. (b) Evolução de H como função do tempo cósmico t . O tamanho do “solavanco” no final da inflação depende fortemente do valor de φ_c (especificada na legenda em unidades da massa de Planck). Este “solavanco” é relacionado com a função da torção $h(t)$, a qual também é mostrada na figura. 142

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	MODELO ΛCDM	19
2.1	MATÉRIA ESCURA	24
2.2	ENERGIA ESCURA	25
2.3	O MODELO Λ CDM	27
2.4	PROBLEMAS COM O MODELO Λ CDM	29
2.4.1	Problema da planura do Universo	29
2.4.2	Problema do horizonte cosmológico	30
2.4.3	Problema das relíquias	33
3	COSMOLOGIA DO CAMPO ESCALAR	35
3.1	O CAMPO ESCALAR	36
3.2	INFLAÇÃO CÓSMICA	38
3.2.1	Condições de Slow-Roll	41
3.2.2	Inflação caótica	46
3.2.3	Resolvendo os três problemas do modelo ΛCDM	52
3.3	MATÉRIA ESCURA	56
3.4	UM MODELO COSMOLÓGICO COMPLETO	59
4	PERTURBAÇÕES COSMOLÓGICAS	61
4.1	ESCOLHA DO GAUGE	63
4.2	LINEARIZAÇÃO DO TENSOR ENERGIA-MOMENTO	67
4.3	LINEARIZAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM	70
4.3.1	Perturbações tensoriais (helicidade 2)	71
4.3.2	Perturbações vetoriais (helicidade 1)	72
4.3.3	Perturbações Escalares (helicidade 0)	73
4.4	MODOS ADIABÁTICOS EM REGIME DE SUPERHORIZONTES	77
4.5	PERTURBAÇÕES COSMOLÓGICAS ESTATÍSTICAS	84
5	SPINOR MDO	88
5.1	DEFINIÇÃO GERAL DE ESPINORES	89
5.2	ÁLGEBRA DO ESPINOR MDO	91
5.2.1	Lagrangiana do espinor MDO	95
5.3	MDO COSMOLÓGICO	97
5.3.1	Inflação Guiada pelo espinor MDO	99
5.3.2	Espinor MDO atuando como matéria e energia escura.	103

5.4	MDO COSMOLÓGICO COM TORÇÃO	105
5.4.1	Densidade Lagrangiana do espinor MDO com torção	106
5.4.2	Discussões sobre o tensor energia momento	108
5.4.2.1	Componentes do tensor energia-momento	110
5.4.3	Determinando as equações de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble	112
5.4.3.1	Equações de movimento para a ação efetiva	113
5.4.4	Potencial cosmológico	118
6	MODELO COSMOLÓGICO UNIFICADO UTILIZANDO O CAMPO MDO COM TORÇÃO	120
6.1	INFLAÇÃO CÓSMICA	120
6.1.1	Condição de Slow-Roll	123
6.1.2	Análise numérica	124
6.1.2.1	Evolução da matéria escura sem campos de matéria	129
6.1.2.2	Aceleração cósmica recente	134
6.2	MATÉRIA ESCURA E ENERGIA ESCURA COM O CAMPO MDO E MATÉRIA BARIÔNICA	136
6.2.1	Inflação revisitada	139
6.2.2	Reaquecimento	143
7	PERTURBAÇÕES COSMOLÓGICAS NO MODELO MDO COM TOR- ÇÃO	146
7.1	PERTURBAÇÃO DAS EQUAÇÕES ECSK	147
7.2	PERTURBANDO O CAMPO MDO COM TORÇÃO	151
7.3	ANÁLISE DO ESPECTRO DE POTÊNCIA	159
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	165
8.1	PERSPECTIVAS FUTURAS	169
	REFERÊNCIAS	170
	APÊNDICE A - ÁLGEBRA DAS MATRIZES γ	183
	APÊNDICE B - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO CAMPO COM TORÇÃO	184
	APÊNDICE C - DETERMINAÇÃO DA CONEXÃO AFIM E DO ES- CALAR DE CURVATURA COM TORÇÃO	188
	APÊNDICE D - DETERMINAÇÃO DA PERTURBAÇÃO ESCALAR NA CONEXÃO AFIM E NO TENSOR DE CURVATURA	191

1 INTRODUÇÃO

Um modelo capaz de descrever corretamente toda a evolução do Universo é um dos principais desafios da cosmologia moderna (LIDDLE, 2003). Na visão cosmológica padrão, o Universo tem seu início em uma fase muito quente e densa chamada *Big Bang*, a qual é dominada por efeitos quânticos, enquanto a densidade de energia é maior que a energia de Planck. Então o Universo sofre uma expansão abrupta conhecida como *inflação* e evolui dominado por seu conteúdo material, primeiro pela radiação, seguido por uma fase de domínio da matéria escura e finalmente algum tipo de energia escura toma lugar em tempos tardios, levando à aceleração cósmica recente. Todos os cenários que descrevem estas fases podem ser testados com grande precisão após os resultados recentes da missão Planck (PLANCK-COLLABORATION, 2018). Em particular, dezenas de modelos inflacionários baseados em um único campo escalar foram considerados em Martin; Ringeval; Vennin (2013); Martin et al. (2014) usando análise estatística Bayesiana e surpreendentemente foi descoberto que a melhor abordagem é descrita pela versão mais simples da inflação, ou seja, algum modelo no qual um campo escalar rola para o vácuo de um potencial cosmológico. Uma questão natural que aparece é: o que acontece com o campo escalar depois da inflação, já que o Universo deve entrar numa fase dominada pela matéria? A resposta vinda do modelo padrão é que o Universo passa para uma fase de reaquecimento, em que a oscilação do campo escalar transfere energia para a radiação, e depois para a era dominada pela matéria. Deste modo, qualquer abordagem que seja uma alternativa à evolução do Universo deve descrever satisfatoriamente todas essas fases.

Os modelos usuais da cosmologia inflacionária utilizam um campo escalar como agente responsável pela inflação, entretanto a natureza desse campo é desconhecida, uma vez que o único campo escalar fundamental predito pelo modelo padrão da física de partículas é o campo de Higgs, o qual não se mostrou um bom candidato para essa tarefa (FAIRBAIRN; GROTHAUS; HOGAN, 2014). Por esse motivo, muitos cenários alternativos surgiram, nos quais a inflação é guiada por um outro campo que não o escalar, como campos vetoriais e espinoriais, por exemplo.

A classe de espinores de Dirac foi amplamente estudada no contexto cosmológico, e mostraram resultados interessantes do ponto de vista de sua atuação como inflaton e matéria escura (SAHA, 1997, 2004, 2006; GRAMS, 2014). No entanto uma nova classe de espinores surgiu nas últimas décadas, a qual é composta por um campo fermiônico com dimensão de massa um e spin semi inteiro. Tal espinor foi proposto por Ahluwalia e Grumiller (AHLUWALIA-KHALILOVA, 2005; AHLUWALIA-KHALILOVA; GRUMIL-

LER, 2005; AHLUWALIA, 2011), e são construídos por meio dos autoespinores do operador de conjugação de carga. Em sua primeira formulação, as somas de spin dos campos quânticos violavam a simetria de Lorentz devido à definição intrínseca de seus duais, o que levantou várias dúvidas sobre a aplicabilidade desse novo campo. Essa formulação foi denominada de *campo Elko*¹, no entanto, recentemente (AHLUWALIA, 2017B, 2013) uma deformação sutil na estrutura do dual deste campo resolveu os problemas de violação de Lorentz, colocando a teoria em bases sólidas do ponto de vista da teoria quântica de campos. Esses novos campos foram denominados apenas de campos fermiônicos com dimensão de massa um (do inglês *Mass Dimension One* - MDO). Nesta tese se está interessado apenas no análogo clássico dos campos fermiônicos MDO, portanto, pode-se usar o campo Elko ou MDO sem perda de generalidade.

Os campos fermiônicos construídos a partir de autospinores do operador conjugação de carga são candidatos naturais para descrever partículas de matéria escura, já que são neutros e têm dimensão canônica de massa, o que os faz se acoplarem fracamente à outras partículas do modelo padrão. De fato, os únicos acoplamentos admissíveis são com campos escalares e campos de Higgs (ALVES, 2014A; DIAS, 2016; ALVES, 2014B), além de se acoplar fracamente a campos eletromagnéticos (ALVES, 2018), restando por último o auto-acoplamento de quarta ordem.

Várias aplicações cosmológicas deste novo campo foram feitas, primeiro em estruturas livres de torção (FABBRI, 2011; BÖHMER, 2008, 2010; GREDAT; SHANKARARAYANAN, 2010; BASAK, 2011) e, mais recentemente, considerando seu acoplamento à torção (KOUNN, 2013; PEREIRA; GUIMARÃES, 2017; PEREIRA; HOLANDA; S., 2017) em um framework de Einstein-Cartan, que torna o sistema de equações mais rico do que o caso anterior, especialmente para aplicações inflacionárias. Em particular, nas referências Pereira; Guimarães (2017); Pereira; Holanda; S. (2017) os resultados numéricos que descrevem a inflação e a evolução da matéria escura foram apresentados juntamente com a evolução da densidade de energia, em boa concordância com o número necessário de *e-fold* do período inflacionário e com a densidade de energia esperada para o componente de matéria escura.

Na presente tese, será considerado o campo fermiônico MDO como um candidato para conduzir a evolução completa do Universo. Um potencial com quebra de simetria é responsável pela fase inflacionária, enquanto um mecanismo semelhante ao reaquecimento leva o campo à fase de radiação. A massa efetiva do campo desempenha um papel essencial no processo de transferência de energia. Depois que o campo desce até o vácuo verdadeiro do potencial, o sistema segue a evolução da matéria escura devido a um acoplamento natural (gravitacional) entre o campo MDO e a densidade de energia bariônica (PEREIRA; ALVES; GUIMARÃES, 2018). Finalmente, uma fase acelerada de energia escura pode ser obtida a partir de um termo quadrático de massa presente no potencial,

¹ Sigla para *Eigenspinoren des ladungskonjugationsoperatoros*, ou auto-spinor do operador conjugação de carga em português.

que age exatamente como uma constante cosmológica (PEREIRA; GUIMARÃES, 2017). Todas as diferentes fases estão conectadas e os parâmetros livres podem ser limitados por dados observacionais e por algumas suposições físicas razoáveis. O problema da coincidência cósmica também pode ser entendido naturalmente em tal cenário.

Vale ressaltar que a busca por uma teoria cosmológica unificada é uma tarefa antiga e a maioria das abordagens é baseada em um único campo escalar (LIDDLE, 2006, 2008; BASTERO-GIL, 2016). A vantagem de usar campos escalares é que a fase inflacionária e a geração de perturbações primordiais estão de acordo com as observações (LIDDLE; LYTH, 2000; LINDE, 2014; KOLB, 1990). Após o reaquecimento, se o decaimento do campo escalar estiver incompleto, ele pode atuar como matéria escura, enquanto sua energia de ponto zero atua como energia escura. Embora esta seja uma estrutura padrão do modelo, os campos escalares não fornecem nenhuma interpretação física para a inflação e também nenhum campo escalar fundamental foi observado, exceto o bóson de Higgs.

Neste espírito, o objetivo dessa pesquisa é mostrar que o espinor MDO é um campo físico mais razoável para conduzir a inflação e os estágios subsequentes de evolução do Universo de forma unificada. Sendo neutro e não interagindo com outras partículas do modelo padrão, é um bom candidato para descrever a matéria escura sem a necessidade de supor um decaimento incompleto durante o reaquecimento.

A estrutura dessa tese está dividida da seguinte maneira: Nos quatro primeiros capítulos é feita uma revisão bibliográfica do conteúdo já bem consolidado na literatura. A saber, no capítulo 2 é feita uma breve discussão acerca das principais características do modelo padrão da cosmologia, conhecido como Λ CDM. Nesse capítulo será entendido a formulação de Universo que se espera descrever com a pesquisa final apresentada nessa tese, em que o Universo começa em um *Big Bang* quente, passa para uma fase dominada pela radiação, posteriormente por matéria escura e por último por energia escura ou uma constante cosmológica (WEINBERG, 2008). No Capítulo 3, é introduzido a dinâmica de um campo escalar qualquer que poderia ser responsável pelas diferentes fases do Universo já citadas, nele é mostrado que tais campos são os principais candidatos à gerar a inflação cósmica (LINDE, 1990) e mesmo modelos cosmológicos unificados. Neste sentido, o campo escalar atuaria como inflaton durante o estágio inflacionário, após isso, o mesmo daria origem as demais partículas do modelo padrão através do processo de reaquecimento e então atuaria como matéria escura, nesse contexto ainda é possível que tais campos evoluam e se tornem algum tipo de energia escura conhecido como quintessência (TSUJIKAWA, 2013). No Capítulo 4 é construída uma teoria de perturbação cosmológica geral, a qual é fundamental para conectar as teorias inflacionárias aos dados observados pelas sondas que mapeiam a Radiação Cósmica de Fundo em Micro-Ondas (MUKHANOV, 1992). Portanto, remetemos o leitor já familiarizado ao assunto a focar-se nos capítulos posteriores, nos quais são desenvolvidos novos aspectos acerca de uma cosmologia unificada utilizando o campo espinorial MDO com torção.

O Capítulo 5 é dedicado a estruturação de modelos cosmológicos para o espinor MDO com e sem torção, nele serão construídas e discutidas suas equações de movimento no âmbito cosmológico, para então, no Capítulo 6 ser construído um modelo cosmológico no qual o campo MDO é capaz de realizar a inflação cósmica motivada pelo princípio de exclusão de Pauli. Posteriormente, é possível que o campo decaia em demais partículas do modelo padrão e então atue como matéria escura. Também é necessário ressaltar que, no cenário em questão, existe um elemento constante no potencial cosmológico, o qual atua como constante cosmológica nos tempos atuais.

Por fim, no Capítulo 7 é feita uma primeira aproximação para as perturbações escalares no campo MDO com torção, nela é visto que é possível encontrar equações muito similares às aquelas obtidas para o caso sem torção, sendo possível que a anisotropia do campo MDO descreva a polarização da radiação cósmica de fundo observada hoje, entretanto uma teoria de perturbação mais consistente precisa ser construída.

2 MODELO Λ CDM

Antes de criar uma cosmologia cujo componente responsável pela dinâmica do Universo seja um campo físico, é necessário construir e discutir alguns aspectos básicos que concernem ao modelo padrão da cosmologia, o qual descreve um Universo fisicamente equivalente ao nosso. Tal modelo é conhecido como Λ CDM, no qual Λ representa uma atual expansão acelerada do fator de escala, hoje atribuída à existência de energia escura, ou alguma constante cosmológica, enquanto que CDM denota a matéria escura fria (do inglês *Cold Dark Matter*).

De maneira generalista, o modelo Λ CDM considera um Universo cuja gênese se dá no *Big Bang*, seguido por um período no qual o conteúdo material existente era apenas a radiação, perdurando por cerca de 380 mil anos de sua história. Após esse período o Universo passa a ser dominado por algum tipo de matéria escura fria¹ e em tempos tardios passa para a fase dominada por algum tipo de energia capaz de produzir certa pressão negativa, levando a uma expansão acelerada do fator de escala (PETER COLES, 2002).

Ao mirar em uma descrição matemática do modelo Λ CDM, é necessário construir as equações de Friedmann, as quais mostram como a dinâmica do Universo é guiada pela densidade de energia e pressão. O ponto de partida é a definição da métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right), \quad (1)$$

com $a(t)$ sendo o fator de escala do Universo e k é a curvatura do espaço, com $k = -1, 0, +1$, para um Universo cuja geometria é aberta, plana e fechada, respectivamente. Por sua vez, as equações dinâmicas podem ser obtidas a partir das equações de Einstein (WALD, 1984), dadas por

$$\Lambda g^{\mu\nu} + R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa^2 T^{\mu\nu}, \quad (2)$$

sendo Λ a constante cosmológica proposta inicialmente por Einstein, $\kappa^2 \equiv 8\pi G = \frac{\pi}{m_p^2}$, em que G é a constante gravitacional e m_p é a massa Planck. As componentes tt e ij das

¹O termo “fria” se refere a ser não relativística.

equações de Einstein são respectivamente (DAS, 2011)

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa^2}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3)$$

$$2\dot{H} + H^2 = -\kappa^2 p + a^2\Lambda, \quad (4)$$

nas quais ρ é a densidade de energia da matéria, p é a pressão e $H^2 \equiv \frac{\dot{a}^2}{a^2}$.

É sumariamente importante para este trabalho compreender a equação (3) em sua completude, ou seja, busca-se compreender o comportamento de H , ρ e p para as diferentes fases do Universo. Assumindo que $\Lambda = 0$ nos estágios iniciais, logo após o *Big Bang* H e ρ são arbitrariamente grandes, tendo em vista que o volume total do Universo é pequeno (LEMOINE, 2007). A densidade de energia total é assumida, nessa ocasião, como sendo da ordem de $m_p^4 \sim 10^{94} \text{ g/cm}^3$, fazendo com que os efeitos quânticos sejam altamente significativos, pois as flutuações quânticas da métrica, $g_{\mu\nu}$, excedem o seu valor clássico, trazendo a necessidade de uma teoria de gravitação quântica até então desconhecida (ZELDOVICH; NOVIKOV, 1983). Por conta disso, todo este trabalho irá se restringir à discussão de fenômenos que acontecem na escala de energia $\rho \lesssim m_p^4$ e $H < m_p$, uma vez que as correções quânticas para a equação de Einstein devem ser insignificantes para valores abaixo de $\rho \sim 10^{90} - 10^{92} \text{ g/cm}^3$ (LINDE, 1990).

Para encontrar como o Universo evolui com o tempo, é necessário conhecer a chamada equação de estado, a qual relaciona a densidade de energia ρ com a pressão p . Assume-se inicialmente que a equação de estado para a matéria no Universo possui a forma (MISNER. W, 2017)

$$\omega = \frac{p}{\rho}. \quad (5)$$

Como não se conhece o comportamento de ρ e p claramente, é possível utilizar essa equação para construir a evolução da densidade de energia, $\rho(t)$, referente ao parâmetro ω , o qual é conhecido para diferentes épocas da história do Universo. Para tanto é necessário tomar a quadri-divergência do tensor energia-momento, $T^{\mu\nu}$, encontrando uma equação diferencial de primeira ordem para ρ , da seguinte forma:

$$\nabla_\mu T^\mu_t = \dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (6)$$

a qual é a equação da continuidade para modelo estudado. Substituindo (5) em (6), a equação diferencial acima se torna uma equação puramente de $\rho(t)$ e $a(t)$:

$$\dot{\rho} + 3H(\omega + 1)\rho = 0, \quad (7)$$

a qual pode ser facilmente resolvida por separação de variáveis, levando a uma solução da forma (WEINBERG, 2008)

$$\rho \sim a^{-3(1+\omega)}. \quad (8)$$

Agora é necessário impor valores sobre ω a fim de obter um perfil de decaimento para a densidade de energia em diferentes fases do Universo. Por exemplo, em uma era em que a matéria se comporta como poeira, a pressão é nula, $p = 0 \rightarrow \omega = 0$, levando à

$$\rho \sim a^{-3}. \quad (9)$$

Ou seja, nessa fase a densidade de energia decai com o cubo do fator de escala e é dominada por matéria não relativística, como a matéria escura fria. Por outro lado, em uma fase dominada por radiação, como no final da inflação cósmica, o parâmetro ω vale $\frac{1}{3}$, assim

$$\rho \sim a^{-4}. \quad (10)$$

A densidade de energia de radiação decai com a quarta potência do fator de escala, em comparação com a fase dominada pela matéria, nota-se que nesse caso o Universo se expande mais vagarosamente devido a atuação de uma pressão não nula sobre o sistema. Termodinamicamente, devido a existência da pressão, quando o Universo se expande há realização de trabalho dado por pdV , em que V é o volume do Universo, o qual diminui a densidade de energia de radiação (LIDDLE, 2003).

Já para descrever a fase em que a energia escura domina, é necessário que $\omega < -1/3$, indicando uma pressão negativa (LINDE, 1990; WEINBERG, 2008).

É possível encontrar, ainda, uma forma explícita para a evolução de $a(t)$, isso pode ser feito considerando $a(t)$ para as diferentes eras, desprezando os termos da constante cosmológica e de curvatura e substituindo (8) em (3), de forma a obter

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \sim a^{-3(1+\omega)}, \quad (11)$$

cuja solução possui a forma

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}. \quad (12)$$

Portanto, em um Universo dominado por matéria escura fria, o fator de escala deve evo-

luir proporcional a

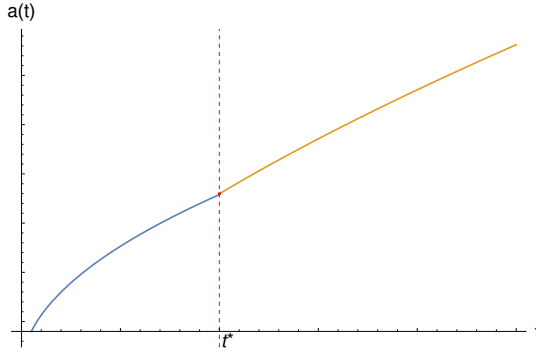
$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}}. \quad (13)$$

Enquanto que durante a fase dominada por radiação, sua evolução é proporcional a (CHENG, 2010)

$$a(t) \sim t^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

A figura abaixo ilustra as duas fases citadas, inicialmente o Universo passa por um período de inflação exponencial, o qual não está representado na imagem, por conseguinte inicia-se a fase dominada por radiação (curva azul), em que o fator de escala evolui proporcional a $t^{1/2}$, em um instante t^* tem início a era dominada por matéria (curva amarela), na qual $a(t)$ evolui proporcional a $t^{2/3}$.

Figura 1: Universo evoluindo com $a(t) \sim t^{1/2}$ (curva azul) e posteriormente evoluindo com $a(t) \sim t^{2/3}$ (curva amarela). O tempo t^* marca a transição entre as fases.



Fonte: Produção do própria do autor.

É possível buscar vínculos com as medições atuais. Embora exista uma problemática na determinação do valor de H no momento presente, pode-se escrever $H(t_{hoje}) \equiv H_0 = 100 h$ km/s Mpc, em que h é o fator adimensional para a taxa de expansão de Hubble, ou seja, quanto menor o valor de h , mais lentamente o Universo expande. A medição dada pela sonda Planck fixou $h = 0.6719$ (PLANCK-COLLABORATION, 2018).

A estimativa de H_0 é importante para a cosmologia, pois ele determina tanto t_0 quanto o horizonte cosmológico do Universo. O primeiro é facilmente percebido, uma vez que é esperado que a fase dominada pela radiação tenha durado cerca de 380 mil anos, logo a maior contribuição para a idade do Universo, t_0 , vem da equação (13), com isso

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \sim \frac{2}{3h} \times 10^{10} \text{ anos}. \quad (15)$$

Por sua vez, o conceito de horizonte pode ser separado em dois: horizonte de partícula

e horizonte de eventos. O primeiro é entendido como uma esfera centrada em nós, cujo raio é igual a distância que a luz pôde viajar da *superfície de último espalhamento*² até hoje, ou seja, isso é o mesmo que dizer que o horizonte de partículas é a distância máxima que uma partícula pôde ter viajado até atingir um observador em repouso (MUKHANOV, 2005). Por outro lado, o horizonte de eventos também pode ser entendido como uma esfera centrada em nós, a diferença é que essa esfera contém todos os pontos presentes nos quais os fótons emitidos por uma fonte hoje podem chegar até nós no futuro, isto é, a luz emitida em qualquer ponto fora dessa esfera não está causalmente conectada com nosso Universo observável (RYDEN, 2016).

Além disso, uma estimativa para a densidade crítica de energia do Universo pode ser encontrada escrevendo a equação (3) para o presente momento com $\Lambda = 0$ e $k = 0$, da seguinte forma (GORBUNOV, 2011):

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{\kappa^2}, \quad (16)$$

$$\rho_c \approx 1,88 \times 10^{-29} h^2 \text{ g/cm}^3, \quad (17)$$

na qual foi usado $G = 6,67259 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ e note que, uma vez que H varia com o tempo, a densidade crítica também varia. A equação (16) mostra algo mais sutil, como ela foi determinada para $k = 0$, uma medição na densidade de energia do Universo que mostre a existência de um pouco mais de matéria do que essa quantidade aparentemente pequena, já seria o suficiente para o Universo ser fechado, $k > 0$. Assim, apenas uma densidade muito pequena de matéria seria o suficiente para fornecer atração gravitacional suficiente para parar e reverter a expansão do Universo (LIDDLE, 2003).

É importante notar que a densidade crítica não é a densidade real da matéria do Universo, já que ela é calculada para o caso $k = 0$, portanto é conveniente trabalhar com a razão entre a densidade de energia e a densidade crítica, a partir de um parâmetro adimensional conhecido como parâmetro de densidade Ω , dado por

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (18)$$

note que Ω representa o parâmetro de densidade para a energia total do Universo, o que inclui matéria bariônica, Ω_b , matéria escura Ω_{DM} , energia escura, Ω_Λ e demais campos físicos que possam existir, como um campo escalar ϕ , dado por Ω_ϕ . A equivalência (18) permite que a equação (3) possa ser escrita como (WEINBERG, 2008)

²A medida que o Universo esfria para a temperatura de aproximadamente 3000K, os espalhamentos entre matéria e radiação diminuem e começa o processo de recombinação, formando átomos neutros. Ao fim desse processo os fótons podem vagar livremente pelo Universo e chegam até nós hoje, observacionalmente esses fótons parecem vir de uma superfície distante chamada de Superfície de Último Espalhamento (RYDEN, 2016; LESGOURGUES, 2006).

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (19)$$

A condição $k = 0$ força $\Omega = 1$ para todas as fases do Universo, independente do seu conteúdo material (MUKHANOV, 2005). Para um caso em que $k \neq 0$, pode-se escrever um parâmetro de densidade, Ω_k , associado ao termo de curvatura, com isso

$$\Omega + \Omega_k = 1, \quad (20)$$

na qual $\Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2 H^2}$. Segundo medições recentes, o parâmetro de densidade possui o valor $\Omega = 1,001 \pm 0,0056$ (PLANCK-COLLABORATION, 2018), logo $k \approx 0$, assegurando que o Universo é quase perfeitamente plano.

2.1 MATÉRIA ESCURA

Após o período de domínio da radiação, no qual o Universo evolui com $a(t) \sim t^{1/2}$, toma lugar uma era dominada pela matéria. Haja vista a enorme discrepância entre a quantidade de matéria bariônica e matéria escura, esse período é considerado como de domínio desta última. Além disso, é necessário que o parâmetro de densidade da matéria não relativística Ω_m deva ser muito próximo de 1 (MATARRESE, 2011), uma vez que a contribuição da radiação e da curvatura são muito pequenos nessa ocasião.

Considerando que o comportamento da matéria escura fria deva ser muito similar ao da matéria bariônica, pode-se escrever uma equação geral para este período utilizando o parâmetro de densidade $\Omega_m \equiv \Omega_b + \Omega_{DM}$, em que os subscritos b e DM indicam “matéria bariônica” e “matéria escura” respectivamente. No caso a equação (3) pode ser escrita como

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} (\rho_{DM} + \rho_b), \quad (21)$$

a qual, a partir da utilização do parâmetro de densidade Ω_m , se torna

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_m}{a^3}. \quad (22)$$

Essa equação mostra que a medida que o fator de escala $a(t)$ aumenta, a densidade de energia da matéria não relativística deve decair proporcional a a^{-3} . Conhecendo o decaimento da matéria, um importante vínculo observacional para o modelo Λ CDM seria concordar com o valor estimado para a matéria hoje. Um dos métodos para estimar a contribuição da matéria bariônica conhecida, Ω_b , é a partir da *matéria visível*, que é nada

mais do que estrelas e gás intergalático. Estimativas atuais para o parâmetro de densidade $\Omega_{0,b}$ levam ao pequeno valor de (PLANCK-COLLABORATION, 2018)

$$\Omega_{0,b} = 0,0222 \pm 0,0005,$$

o subscrito 0 indica o tempo presente. Em um Universo sem a necessidade de matéria escura esse valor deveria ser o suficiente para descrever os fenômenos observados, entretanto, a velocidade de rotação das galáxias é muito mais rápida do que o esperado, além disso o comportamento de galáxias em clusters mostra que deve haver muito mais matéria do que apenas a *matéria visível* (BERTONE, 2016; RUBIN, 1970, 1978). Por esse motivo há a necessidade de considerar a existência de algum tipo de matéria que não interaja eletromagneticamente, chamada de *matéria escura*. A partir de observações gravitacionais, é constatado que o parâmetro de densidade da matéria bariônica acrescida da matéria escura é hoje

$$\Omega_{0,m} = \Omega_{0,b} + \Omega_{0,DM} \simeq 0,303. \quad (23)$$

Ou seja, é estimado que a matéria escura corresponde a cerca de 28% de todo conteúdo presente no Universo hoje (CLOWE, 2006) e a matéria bariônica corresponde a cerca 2%, o que permite afirmar que uma era dominada por matéria seria majoritariamente guiada pela matéria escura, como dito anteriormente.

É importante notar que somando todos os parâmetros de densidade para a matéria, radiação e curvatura é necessário obter 100% do conteúdo material do Universo, uma vez que

$$\Omega_{0,m} + \Omega_{0,r} + \Omega_{0,k} = 1. \quad (24)$$

Como a densidade de energia da radiação e de curvatura são desprezíveis hoje e $\Omega_{0,m} < 1$, a equação (24) carece de um termo adicional que contribua com cerca 70% da densidade de energia do Universo. Essa quantidade exorbitante de energia é desconhecida, por conta disso recebe o nome de *energia escura* e será estudada na próxima seção.

2.2 ENERGIA ESCURA

Na formulação original da cosmologia moderna, feita por Einstein usando a Teoria da Relatividade Geral, acreditava-se que o Universo era estático e a matéria não colapsava devido a uma pressão negativa causada por um parâmetro constante Λ acrescentado a mão (MATARRESE, 2011):

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (25)$$

No contexto atual, sabe-se que as equações de Einstein naturalmente levam a um Universo expansivo e não estático, como mostrado por Friedmann (FRIEDMANN, 1922, 1923). Entretanto essa expansão não é acelerada como é vista hoje, necessitando novamente de um termo adicional de energia Λ . A princípio é possível construir modelos cosmológicos com Λ sendo negativo, nulo ou positivo, com $\Lambda > 0$ mais comum nos modelos tradicionais de cosmologia. A componente espacial da equação de Einstein, nesse contexto, fornece (DAS, 2011)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (26)$$

Uma vez que Λ é positivo, ele contribui como pressão negativa, fazendo com que \ddot{a} aumente em algum momento da história do Universo, levando à aceleração cósmica observada hoje.

Por fim, é pertinente criar uma descrição de Λ como um fluido. Dessa forma considere-se sua densidade de energia como (MORTONSON, 2013; ARUNAB, 2017)

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{\kappa^2}, \quad (27)$$

permitindo escrever a equação (25) da seguinte forma:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho_\Lambda - \frac{k}{a^2}. \quad (28)$$

Claramente, essa equação leva em consideração que a única contribuição para a dinâmica do Universo vem da constante cosmológica Λ . A pressão associada à Λ pode ser encontrada fazendo uso da equação da continuidade, que fornece (LIDDLE, 2003)

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3H(\rho_\Lambda + p_\Lambda) = 0, \quad (29)$$

como Λ é constante por definição, $\dot{\rho}_\Lambda = 0$, a pressão é dada por

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda, \quad (30)$$

já que ρ_Λ é positivo, a pressão da energia escura é negativa, como deveria ser. Isso sig-

nifica que a medida que o Universo se expande é realizado trabalho sobre o fluido Λ , permitindo que a densidade de energia permaneça constante a medida que o volume do Universo aumenta (PETER COLES, 2002).

Uma interpretação de Λ muito pertinente a este trabalho é dada pela mecânica quântica. Neste cenário, a constante cosmológica pode ter sua origem como um tipo de *energia de ponto zero*, a qual existe mesmo que nenhuma partícula esteja presente. Embora essa explicação seja razoável, ela sofre de problemas, uma vez que os modelos atuais levam a altos valores para essa constante quando comparados ao observado, dando origem ao problema conhecido como *problema da constante cosmológica* (PADILLA, 2015; STRAUMANN, 2002; WONDRAK, 2017; WEINBERG, 2000).

2.3 O MODELO Λ CDM

O modelo Λ CDM é inteiramente dado considerando que a fonte de curvatura do Universo é a soma de todas as contribuições de energia que possam existir, ou seja: radiação, matéria bariônica, matéria escura, curvatura e constante cosmológica (energia escura) (WEINBERG, 2008). Assim a equação de Friedmann (3) se torna

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} (\rho_r + \rho_k + \rho_{DM} + \rho_b + \rho_\Lambda), \quad (31)$$

em que o subscrito r indica a densidade de energia da radiação, k a densidade de energia de curvatura, DM da matéria escura, b da matéria bariônica e Λ representa a contribuição da constante cosmológica, ou de algum tipo de energia escura. Dividindo a equação (31) por $H^2(t_0) \equiv H_0^2$, é possível escrever a equação para os parâmetros de densidade (LIDDLE, 2003; RYDEN, 2016; DODELSON, 2003):

$$\frac{H^2}{a_0^2 H_0^2} = \frac{\Omega_k}{a^2} + \frac{\Omega_{DM} + \Omega_b}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4} + \Omega_\Lambda. \quad (32)$$

na qual $\Omega_k \approx 0$, garantindo que o Universo é plano hoje e assegurando a condição

$$\Omega_r + \Omega_b + \Omega_{DM} + \Omega_\Lambda = 1. \quad (33)$$

A partir da equação (3) e (33) é possível escrever

$$dt = \frac{dx}{H_0 x \sqrt{\Omega_r x^{-4} + \Omega_b x^{-3} + \Omega_{DM} x^{-3} + \Omega_\Lambda}} \quad (34)$$

em que $x = a/a_0$. Logo o horizonte para o Universo hoje é dado por

$$d_H(t_0) = \frac{1}{H_0} \int_{a(t)}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_r x^{-4} + \Omega_b x^{-3} + \Omega_{DM} x^{-3} + \Omega_\Lambda}}, \quad (35)$$

Uma vez que a densidade de radiação é muito pequena no presente momento, pode-se considerar que o horizonte é definido apenas pela densidade de matéria (matéria escura e bariônica) e a densidade de energia escura. Levando em conta que a equação para o horizonte é (RYDEN, 2016)

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (36)$$

em um tempo futuro, $t \rightarrow \infty$, o raio máximo, r_{max} , do horizonte é dado pela equação (LESGOURGUES, 2006)

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (37)$$

com isso o raio de Hubble para o horizonte de eventos nessa ocasião é

$$d_{max} = a(t_0) \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{a(t)} = a(t_0) \int_0^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (38)$$

Note que na ausência da constante cosmológica, $a(t)$ evolui como $t^{2/3}$ e essa integral diverge, levando a não existência do horizonte de eventos. Mas se existe uma constante cosmológica dominando a dinâmica do Universo, então $a(t)$ deve evoluir como $a(t) \sim e^{Ht}$, em que $H = H_0 \Omega_\Lambda^{1/2}$ é uma constante, com isso o horizonte de eventos se torna (WEINBERG, 2008; LIDDLE, 2003)

$$d_H = \frac{1}{H}.$$

Logo a determinação de um horizonte de eventos fica necessariamente atrelada a existência de uma constante cosmológica atual (RYDEN, 2016; GORBUNOV, 2011; LESGOURGUES, 2006).

Assim foram expostos os rudimentos para a construção de uma teoria cosmológica padrão dentro dos preceitos do modelo Λ CDM, no qual o Universo hoje é dominado por matéria e energia escura (ou Λ), cuja natureza ainda é desconhecida. Um importante fato que deve ser mencionado, é que o momento presente da história cósmica é de certa forma especial, pois a densidade de energia da matéria escura é da mesma ordem de grandeza da energia escura. Esse fato é uma grande coincidência uma vez que a matéria escura

decai rapidamente com a^{-3} , o que requer um grande ajuste fino nas condições iniciais do Universo, já que no passado e no futuro a diferença entre ambas deve ter sido de muitas ordens de magnitude, esse problema recebe o nome de *coincidência cósmica* (VELTEN, 2014).

Além do problema da constante cosmológica e da coincidência, existem outros problemas em aberto no modelo padrão da cosmologia, entretanto 3 deles são de fundamental interesse desta tese, uma vez que encontram uma elegante solução na teoria inflacionária. A próxima seção se dedicará exclusivamente a discutir tais problemas.

2.4 PROBLEMAS COM O MODELO Λ CDM

O modelo cosmológico padrão Λ CDM vem ao longo dos anos mostrando sua robustez frente aos dados observacionais, sendo considerado um modelo altamente preditivo e explicativo, provendo um largo entendimento de características fundamentais do Universo, como a formação de estrutura em larga escala, o estado do Universo primordial e a formação de elementos leves. Entretanto, tal modelo também sofre com problemas em aberto (LOPEZ-CORREDOIRA, 2017), dois dos quais são sobre a natureza dos principais constituintes do Universo, a dizer; matéria escura fria (CDM) e energia escura (ou Λ) (WONDRAK, 2017). No âmbito experimental, um campo físico responsável pela manifestação de uma física *além do modelo padrão* que poderia estar associado à partículas de matéria escura é desconhecido. O caso da energia escura é ainda mais delicado, já que não se conhece sua natureza e seu valor esperado é muito pouco natural.

Uma vez que o modelo Λ CDM por si só não necessita de um mecanismo inflacionário durante os instantes iniciais de sua evolução, alguns outros problemas acabam por ficar sem explicação. Nesta tese focar-se-á em apenas três problemas fundamentais que são perfeitamente resolvidos no âmbito de uma teoria inflacionária, são eles: o problema da planura do Universo, do horizonte cosmológico e das relíquias.

2.4.1 Problema da planura do Universo

O prelúdio do problema da planura já foi feito na discussão da equação (19). Como foi dito, o valor de Ω_k é muito próximo de zero, a saber este parâmetro é medido como sendo da ordem 10^{-2} , enquanto que o parâmetro de densidade da radiação, Ω_r , é da ordem 10^{-4} (LIDDLE; LYTH, 2000). Uma vez que ρ_k evolui com a^{-2} , enquanto a radiação evolui com a^{-4} , a hierarquia entre ρ_r e ρ_k aumenta a medida que se retrocede no tempo. Definindo t_i como algum tempo inicial, t_0 como sendo hoje, e assumindo que a razão $\rho_k/\rho_r \simeq 1$ atualmente, a seguinte razão pode ser obtida:

$$\frac{\rho_k(t_i)}{\rho_r(t_i)} \leq \left(\frac{a(t_i)}{a(t_0)} \right)^2 = \left(\frac{\rho_r(t_0)}{\rho_r(t_i)} \right)^{1/2}. \quad (39)$$

Se for tentado construir um mecanismo de criação de um Universo clássico, é necessário confrontar o problema da predição da ordem de magnitude inicial da matéria, da curvatura espacial e da taxa de expansão do Universo. Embora a equação de Friedmann relacione essas três quantidades, a questão da curvatura espacial em respeito a densidade de energia total, i.e, a questão da hierarquia entre ρ_k e ρ_r , é uma questão aberta (LIDDLE, 2003).

O problema da planura pode claramente ser visto ao analisar a razão $\Omega_k \equiv \rho_k/\rho_{crit}$. Uma vez que devido ao fato de ρ_{crit} ser muito grande nas fases iniciais do Universo, essa razão deve aumentar com o tempo, logo um Universo plano é uma solução instável da equação de Friedmann. Entretanto, um parâmetro de densidade total muito próximo de 1 hoje implica que o mesmo deve ser verdade para a era da recombinação e nucleossíntese, isso é o mesmo que afirmar que o Universo é plano porque assim o foi durante praticamente toda a sua existência, caracterizando que $k \approx 0$ como uma solução que não parece tão instável como deveria ser (KINNEY, 2009; HELBIG, 2011).

Uma das soluções iniciais para esse problema era aceitar que o valor da constante k seria naturalmente zero, mostrando que o modelo padrão Λ CDM precisa de um ajuste fino no valor de k de maneira a descrever o Universo observado (CARROLL, 2014).

2.4.2 Problema do horizonte cosmológico

O problema do horizonte cosmológico é um dos mais importantes problemas do modelo cosmológico Λ CDM e está relacionado à comunicação entre regiões distintas do Universo.

Mais especificamente, o horizonte $d_H(t_1, t_2)$ representa a distância causal no Universo, como já foi abordado. Agora suponha que um mecanismo físico qualquer seja acionado no tempo t_1 , uma vez que a informação não pode viajar mais rápido que a velocidade da luz, o mecanismo físico não pode afetar distâncias maiores que d_H em um tempo t_2 . Ou seja, qualquer região fora do horizonte d_H está causalmente desconectada da região cujo mecanismo físico pode atuar (WEINBERG, 2008; RYDEN, 2016; MUKHANOV, 2005).

Imagine que em um tempo t_1 duas partículas são emitidas na velocidade da luz a partir de dois pontos antipodais na *superfície de último espalhamento*, na mesma direção, porém em sentidos opostos. A partir da distância viajada por essas partículas é possível criar uma esfera centrada no ponto de encontro das mesmas, cujo raio, $r(t_2)$, é igual a distância viajada por uma dessas partículas até o instante de tempo t_2 . A distância física total entre o instante t_1 e t_2 pode ser obtida integrando todos os elementos de distância dl , entre $r(t_1) = 0$ até $r(t_2)$ de qualquer uma das duas partículas, ou seja (LESGOURGUES, 2006)

$$\begin{aligned}
d_H(t_1, t_2) &= \int_{r_1}^{r_2} dl, \\
&= 2 \int_0^{r_2} \frac{a(t_2)}{\sqrt{1 - kr^2}} dr.
\end{aligned} \tag{40}$$

Como a equação da geodésica para partículas ultra-relativísticas fornece $dt = \frac{a(t_2)}{\sqrt{1 - kr^2}} dr$, que pode ser integrado ao longo da trajetória das partículas, tem-se

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \tag{41}$$

a qual é substituída na equação para d_H , levando a

$$d_H(t_1, t_2) = 2a(t_2) \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)}, \tag{42}$$

e uma vez que $dt = da/(aH)$, a equação acima pode ser escrita como

$$d_H(a(t_1), a(t_2)) = 2a(t_2) \int_{a(t_1)}^{a(t_2)} \frac{da}{a(t)^2 H(a)}. \tag{43}$$

Assim, o horizonte cosmológico d_H é escrito em termos do parâmetro de Hubble. Uma vez que o último espalhamento dos fótons da radiação cósmica de fundo ocorreu há muito tempo no passado, a distância própria até a superfície de último espalhamento é apenas um pouco menor que o horizonte atual. Isso tudo é facilmente visto na aplicação da escala do horizonte durante a era dominada por radiação. Como já foi abordado, durante essa era, o parâmetro de Hubble é dado por $H \propto a^{-2}$, equação (14), o que permite reparametrizar $H(a)$ como (LESGOURGUES, 2006; MUKHANOV, 2005)

$$H(a) = H(t_2) \left(\frac{a(t_2)}{a(t)} \right)^2, \tag{44}$$

forneendo

$$\begin{aligned}
d_H(a(t_1), a(t_2)) &= 2a(t_2) \int_{a(t_1)}^{a(t_2)} \frac{da}{a(t_2)^2 H(a(t_2))}, \\
&= \frac{2}{H(a(t_2))} \frac{a(t_2) - a(t_1)}{a(t_2)}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Considerando um intervalo de tempo muito grande, leva-se a $a(t_2) \gg a(t_1)$, de forma que

$$d_H(a(t_1), a(t_2)) = \frac{2}{H(a(t_2))}, \quad (46)$$

uma vez que o raio de Hubble é dado por $1/H(a) \equiv R_H$, então

$$d_H(a(t_1), a(t_2)) = 2R_H(t_2), \quad (47)$$

ou seja, o horizonte cosmológico é duas vezes o raio de Hubble. Pelo modelo de concordância³ a distância própria até a superfície de último espalhamento é de $d_p(t_0) = 0,98d_H(t_0)$, fazendo com que dois pontos antipodais nessa superfície estejam a uma distância própria de $1,96d_H(t_0)$ (RYDEN, 2016), logo os pontos antipodais estão causalmente desconectados e, portanto, não tiveram tempo suficiente para entrar em equilíbrio térmico.

Em um cenário cosmológico no qual um Universo clássico emerge de um estado dominado pela gravidade quântica com valores randômicos para a densidade de energia local ρ , deve-se esperar que antes do Universo se tornar transparente, ou seja, antes do desacoplamento dos fótons, a temperatura de Planck dos fótons em um dado ponto dependia da sua densidade local. Devido aos valores randômicos para ρ , as regiões que podem ter trocado informação e entrado em equilíbrio térmico devem respeitar o horizonte cosmológico d_H . Assim para a era dominada pela radiação, as regiões delimitadas pelos tempos t_1 e t_2 com densidade de energia homogênea não poderiam exceder $d_H = 2R_H(t_2)$ (RYDEN, 2016; LINDE, 1990).

A temperatura dos fótons na *superfície de último espalhamento* deve refletir a característica de que o Universo deve ser homogêneo numa escala de $2R_H(t_{des})$, em que t_{des} é o tempo até o desacoplamento dos fótons. Uma vez que a distância de Hubble nessa superfície era de $H^{-1}(t_{des}) \approx 0,2 \text{ Mpc}$, a distância do horizonte era de apenas $d_H \approx 0,4 \text{ Mpc}$, logo quaisquer dois pontos há uma distância maior que $0,4 \text{ Mpc}$ não estariam em contato causal, levando a uma superfície de último espalhamento com incontáveis regiões causalmente desconectadas que deveriam gerar anisotropia. A fim de descobrir o tamanho dessa anisotropia, é necessário calcular a distância de diâmetro angular, d_D , para a superfície de último espalhamento (PETER, 2005; LESGOURGUES, 2006), no caso

$$d_D \approx \frac{d_H(t_0)}{z_{des}}, \quad (48)$$

em que $d_H(t_0)$ é o tamanho do horizonte hoje e z_{des} é o redshift da superfície de último

³O modelo de concordância (*Benchmark Model*, do inglês) (FATIMA, 2016) é um dos modelos que contém tanto matéria e constante cosmológica que é mais bem ajustado aos dados observacionais.

espalhamento. Novamente, evocando o modelo de concordância, $d_H(t_0) \approx 14.000 \text{ Mpc}$ e $z_{des} = 1100$, é obtido (RYDEN, 2016)

$$d_D \approx 13 \text{ Mpc}. \quad (49)$$

Portanto, pontos na superfície de último espalhamento separados pela distância do horizonte de Hubble na ocasião, terão a separação angular vista da Terra de

$$\theta_H = \frac{d_H(t_{des})}{d_D} \approx 2^\circ. \quad (50)$$

Esse valor levaria a uma grande anisotropia na radiação cósmica de fundo observada hoje, já que qualquer região separada por uma distância um pouco maior que 2° estaria causalmente desconectada. Entretanto todos os dados provenientes de mapeamentos da radiação cósmica de fundo medidos por diversas sondas (PLANCK-COLLABORATION, 2018; HINSHAW; ET AL, 2012), mostram que a anisotropia dessa radiação é da ordem de 10^{-5} , o que faz a superfície de último espalhamento ser extremamente homogênea, criando um verdadeiro paradoxo no cenário de uma Teoria do Big Bang quente.

2.4.3 Problema das relíquias

Embora não seja do escopo desta tese tratar precisamente do *problemas das relíquias*, se faz importante ao menos uma breve menção, já que este é um dos principais problemas resolvidos pelo modelo inflacionário.

Um dos questionamentos sem resposta dentro do cenário de uma Teoria do Big Bang quente é: uma transição de fase no Universo primordial deve levar ao surgimento de defeitos topológicos, como monopolos magnéticos, paredes de domínios, cordas cósmicas e texturas, porém nenhum desses objetos cosmológicos foram encontrados, o que leva a crer que nunca foram produzidos, ou foram de alguma forma diluídos, ou ainda foram produzidos numa escala muito menor do que o esperado (VACHASPATI, 2001). Entretanto essas três opções são igualmente improfícuas, pois um Universo quente, no qual um campo escalar ϕ atua nos estágios iniciais, deve levar à formação dessas relíquias após uma transição de fase. Ainda, se espera que algumas dessas relíquias, como monopolos magnéticos, deveriam dominar a densidade de energia total do Universo e, uma vez que são partículas não relativísticas, deveriam decair proporcionais à a^{-3} , fazendo com que nunca fossem diluídas, impedindo que o Universo passasse para uma fase dominada por radiação e posteriormente para uma era dominada pela matéria usual (GANGUI, 2001).

Os três problemas apresentados são um óbice na consolidação do modelo padrão Λ CDM, entretanto eles encontram uma solução elegante na formulação de uma teoria

inflacionária, como será abordado no próximo capítulo.

3 COSMOLOGIA DO CAMPO ESCALAR

Na literatura, toda sorte de campos físicos já foi testada em âmbito cosmológico (BÖHMER; MOTA, 2008; SHANKARANARAYANAN, 2010; GOLOVNEV; MUKHANOV; VANCHURIN, 2008; PEREIRA; GUIMARÃES, 2017; LINDE, 2014; GUTH, 1981), sendo a tentativa que tem se mostrado mais simples e frutífera é a que faz uso de campos escalares (MARTIN; RINGEVAL; VENNIN, 2013; MARTIN et al., 2014). Historicamente, a motivação para esses modelos reside no fato de que campos escalares desempenham um papel fundamental nas teorias de unificação das interações fraca, forte e eletromagnética, além de que, no âmbito matemático, são teorias mais simples do que a dos campos espinoriais e vetoriais. Por fim, nas últimas décadas surgiu um considerável interesse na possibilidade de que uma fração significativa da energia do Universo hoje esteja associada a um campo escalar minimamente acoplado com a gravidade (KAMENSHCHIK, 2018).

Pensando-se em um cenário cosmológico em que uma *Teoria de Tudo* (TOE, do inglês *Theory of Everything*) se faz presente, é considerado que no início do Universo as quatro forças fundamentais estavam unificadas. Logo após o *Big Bang*, a força gravitacional é a primeira a se desacoplar das demais, de maneira que as forças forte, fraca e eletromagnética continuariam unificadas, já que nesse momento todos os mésons vetoriais eram não massivos e não haviam diferenças fundamentais entre essas interações remanescentes (WEINBERG, 2008; LINDE, 1990; MUKHANOV, 2005). Em algum momento, um campo escalar homogêneo sobre todo o espaço, conhecido como campo de Higgs, toma lugar e devido à quebra espontânea de simetria no grupo de gauge, alguns dos bósons vetoriais adquiriram massa. Tal fato fez com que as interações ainda unificadas se tornassem de curto alcance, levando ao desacoplamento das mesmas (LINDE, 1990).

Um importante exemplo é o modelo de Glashow-Weinberg-Salam (GWS), o qual possui simetria de gauge $SU(2) \times U(1)$. A lagrangiana do citado modelo inicialmente era invariante sobre transformações de gauge e descrevia elétrons, bósons W e Z, neutrinos, múons e fótons, todos não massivos. Com a inserção de um campo de Higgs cujo valor de vácuo é não nulo, o sistema era levado a uma quebra de simetria que dava massa ao elétron, aos bóson Z, W e ao múon, porém mantinha o fóton e neutrino não massivos. Com isso a força fraca se tornava de curto alcance e se desacoplava da força eletromagnética (BILENKY, 1982).

Modelos usando o campo escalar de Higgs foram sistematicamente aplicados em cosmologia, inclusive inicialmente se pensava que o provável candidato a inflaton seria o próprio bóson de Higgs (GUTH, 1981), embora abandonado por Guth, muitos trabalhos

ainda discutem modelos inflacionários cuja dinâmica é guiada por tal campo (BEZRUKOV, 2008). Além disso, é possível discutir uma cosmologia para um campo escalar qualquer, não necessariamente para o campo de Higgs, entretanto este é o único campo escalar fundamental previsto até o presente momento pelo Modelo Padrão da Física de Partículas, o que justifica a ênfase dada a ele nas linhas anteriores.

3.1 O CAMPO ESCALAR

Uma vez discutidas as equações de Friedmann no capítulo anterior, é momento de se abordar algumas propriedades básicas que fazem os campos escalares possuírem papel central na cosmologia atual e como podem ser usados para guiar as equações dinâmicas.

Inicialmente se considera a densidade Lagrangiana de um sistema muito simples, contendo apenas um campo escalar ϕ qualquer:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (51)$$

O potencial $V(\phi)$ pode assumir uma forma arbitrária, a depender do que se propõe descrever. Pelo fato de ϕ ser um campo escalar, ele satisfaz unicamente a equação de Klein-Gordon, ou seja (ZELDOVICH; NOVIKOV, 1983; PETER COLES, 2002; CHENG, 2010)

$$\ddot{\phi} - \Delta\phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (52)$$

em que a derivada temporal é indicada por ponto e $\Delta \equiv \partial_i \partial^i$. Como é sabido, para $V = 0$ a solução para essa equação é uma superposição de ondas planas que correspondem à propagação de partículas livres.

Uma vez que se acredita que uma parcela significativa da energia do Universo possa estar relacionada com um campo escalar, é necessário analisar o tensor energia-momento deste campo, dado por

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (53)$$

cujas componentes não nulas são (WEINBERG, 2008)

$$T^t_t = \rho = \frac{1}{2} \left[\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right], \quad (54)$$

$$-T^i_j = p = \frac{1}{2} \left[\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] \delta_j^i, \quad (55)$$

Como o campo escalar foi anteriormente descrito como espacialmente constante, o gradi-

ente do campo deve ser zero, $\nabla\phi = 0$. O componente T^i_j é naturalmente simétrico para o campo escalar, contudo modelos mais sofisticados, como o espinorial apresentado mais adiante, necessitam de uma simetrização do tensor energia-momento, uma vez que em uma teoria cosmológica, as equações de Einstein não comportam um tensor energia momento assimétrico (WALD, 1984). Além disso as componentes T^{ti} , T^{it} também devem ser zero, significando que o fluxo de densidade de energia para fora do volume na qual a densidade lagrangiana é delimitada, é nulo (BOJOWALD, 2011). Portanto, as equações que descrevem a densidade de energia e pressão do sistema são, respectivamente:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}V(\phi), \quad (56)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}V(\phi). \quad (57)$$

Substituindo as equações (56) e (57) nas equações de Einstein (3) e (4), com $\Lambda = 0$, finalmente se obtém as equações de Friedmann para um Universo cuja dinâmica é guiada por um campo escalar (LESGOURGUES, 2006)

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right), \quad (58)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right). \quad (59)$$

Essas equações mostram como o campo ϕ afeta a dinâmica do fator de escala $a(t)$. A divergência do tensor-energia momento (53) leva à equação de conservação (6). Como já discutido, considerando (56) e (57) é possível encontrar uma equação diferencial de segunda ordem para a evolução do campo escalar ϕ :

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (60)$$

claramente, essa é a equação de Klein-Gordon para o campo ϕ .

Não se sabe ao certo o comportamento dos campos escalares que possam existir no Universo, além do campo de Higgs, e conseqüentemente não se sabe como podem guiar sua evolução em diferentes fases. Todavia, acredita-se que um campo escalar desconhecido guiou a dinâmica da inflação cósmica nos instantes iniciais da sua história e então decaiu completamente em outras partículas, ou decaiu parcialmente atuando, a posteriori, como matéria escura. Uma resposta precisa para isso ainda é desconhecida.

3.2 INFLAÇÃO CÓSMICA

Os problemas citados na subseção 2.4 podem ser resolvidos no âmbito de um Universo que, nos seus momentos iniciais, passa por uma abrupta expansão (GUTH, 1981). Para compreender corretamente essa ideia é necessário fazer uma incursão histórica pela concepção cosmológica da Teoria da Relatividade Geral.

Em 1917, bem antes do surgimento da teoria de Friedmann sobre o Universo em expansão, de Sitter (1917, 1918) mostrou que as equações de Einstein (3) e (4) poderiam levar à Universos expansivos. Por exemplo, no caso de $k = +1$, a solução da equação (3) implica em (LINDE, 1990)

$$a(t) = H^{-1} \cosh(Ht), \quad (61)$$

que é a solução para um Universo fechado. Para um Universo plano, $k = 0$, é obtido

$$a(t) = H^{-1} e^{Ht}. \quad (62)$$

Por último, a condição de Universo aberto, $k = -1$, leva à solução:

$$a(t) = H^{-1} \sinh(Ht). \quad (63)$$

Nas equações acima $H = \sqrt{\frac{\kappa^2}{3}\rho}$. Em respeito a acurácia histórica, cabe ressaltar que de Sitter não obteve as soluções na forma exposta acima, mas sim em uma maneira bastante nebulosa que, por muito tempo, teve seu significado físico incompreendido. As equações (61) - (63), só foram obtidas da forma apresentada por Friedmann, anos depois. Em 1922 no trabalho *Über die Krümmung des Raumes* (FRIEDMANN, 1922), foi mostrado claramente que as equações FLRW comportam soluções expansivas e até exponenciais para os estágios de evolução do Universo.

A partir de trabalhos desenvolvidos desde 1965 por Sakharov (1965) e Gliner (1965), em 1975 este último sugere a possibilidade de que o Universo possa se expandir exponencialmente durante os momentos iniciais de sua evolução, e ser preenchido com matéria superdensa com a equação de estado $p = -\rho$ (GLINER, 1975). No entanto, esses trabalhos não despertaram muito interesse. Seis anos mais tarde, em 1981, Linde (1983), Mukhanov (1981), construíram um modelo cosmológico no qual a energia armazenada em um campo escalar constante ϕ é transformada em energia térmica, levando à um Universo quente descrito pelas equações de Friedmann. Nesse modelo a magnitude do campo ϕ depende da temperatura de um Universo em expansão, o qual faz papel de estado de vácuo com densidade de energia $V(\phi)$. Quando a transição de fase acontece o Universo

passa de um meta-estado de vácuo superfrio para um estado quente.

Praticamente na mesma época, uma importante contribuição para o desenvolvimento de modelos inflacionários surgiu a partir do trabalho de Starobinsky (1980), o qual descrevia um modelo de Universo baseado nas observações de Dowker e Critchley, em 1976 (DOWKER, 1976), de que a métrica do espaço de Sitter é solução das equações de Einsteins com correções quânticas, a instabilidade dessa solução levava o espaço de Sitter (61)-(63) à um Universo de Friedmann quente (LINDE, 1982).

O modelo de Starobinsky, embora tenha sido formulado e reformulado para resolver o problema da singularidade cosmológica inicial, foi amplamente estudado e usado para desenvolver cenários inflacionários. Em 1981, Guth (GUTH, 1981) reconhece a necessidade de se construir um modelo de Universo em que exista uma fase de expansão quase-inflacionária após o *Big Bang*, de forma a corrigir os problemas discutidos na seção 2.4. Inicialmente Guth propôs os seguintes aspectos fundamentais:

1. Como foi sugerido por Kirzhnits e Linde (KIRZHNITS, 1972), em altas temperaturas os campos de Higgs, de qualquer teoria de gauge com simetria que foi quebrada espontaneamente, devem perder seus valores esperados, resultando em uma restauração da simetria de gauge desses campos, $\phi_{(T)} = 0$, em que o subscrito (T) indica que ϕ depende da temperatura do Universo.

2. O potencial cosmológico $V(\phi)$ respeita a condição de Coleman-Weinberg (COLEMAN, 1973), isto é, a derivada segunda do potencial em relação a ϕ deve ser zero em $\phi = 0$, portanto esse ponto deve ser um mínimo mesmo para baixas temperaturas, fazendo com que o Universo se mantenha em um estado de vácuo superfrio por muito tempo. Quando a temperatura do Universo cai, o tensor energia-momento se torna $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}V(0)$, e então o Universo se expande exponencialmente por um longo tempo.

3. A inflação continua até o fim da transição de fase para um estado estável $\phi_0 \neq 0$. A transição se dá pela formação randômica de bolhas contendo o campo $\phi = \phi_0$ (COLEMAN, 1977) e, a medida que as paredes dessas bolhas colidem, ocorre a formação de partículas, o Universo se aquece e se torna não homogêneo.

Embora essas considerações pareçam resolver os problemas apresentados, elas foram rapidamente abandonadas por levarem à problemas com homogeneidade e isotropia do Universo (HAWKING, 1982; GUTH, 1983; LINDE, 1990), entretanto, a ideia de uma expansão quase-exponencial nos instantes iniciais se manteve.

O advento da nova inflação cósmica se deu com os trabalhos publicados em 1982 por Linde (1982), Albrecht (1982) e Steinhardt (1983). Neste novo modelo, as considerações (2) e (3) foram abandonadas, todavia a consideração (1) foi flexibilizada, agora a inflação poderia ocorrer não apenas em um estado superfrio $\phi = 0$, mas também durante o crescimento do campo escalar ϕ até atingir vagarosamente seu valor de equilíbrio ϕ_0 (STEINHARDT, 1983), além disso, a formação de bolhas não era mais necessária. Caso o potencial efetivo seja suficientemente plano próximo de $\phi = 0$, o tempo esperado para que o campo role até o vácuo será muito maior que $1/H$, garantindo que a inflação ocorra por

um período de tempo suficientemente grande para que as paredes das bolhas de campo ϕ , nas quais toda energia do campo está contida, sejam separadas por uma distância grande o suficiente para que não gerem nenhuma inomogeneidade na parte observável do Universo. Os requisitos aqui apresentados podem ser assegurados pelas condições de *Slow-Roll* que serão discutidas na próxima subseção.

Uma vez descartada a colisão entre as paredes das bolhas de campo ϕ , caso as mesmas existam, a criação de partículas elementares após a inflação, no período conhecido como reaquecimento, se dá pelo campo ϕ executando oscilações amortecidas sobre o mínimo de $V(\phi)$ (SATO, 1981), assim decaindo nas demais partículas. Além disso, a pequena anisotropia da radiação cósmica de fundo é causada por inomogeneidades no próprio campo escalar.

Embora o sucesso do novo modelo inflacionário seja notável ao propor soluções para diversos problemas do modelo Λ CDM, ainda restam alguns outros problemas. Por exemplo, o requerimento de que o potencial necessita ser praticamente plano na região próxima a $\phi = 0$, mas requer que a sua curvatura próxima de seu mínimo em $\phi = \phi_0$ seja grande o suficiente para fazer o campo escalar oscilar em alta frequência após a inflação, aquecendo o Universo a uma temperatura bastante alta T , é muito pouco realista no âmbito de uma física de partículas e sugere um ajuste fino dos parâmetros do potencial. Já outro problema persiste desde o modelo antigo de inflação, nele a inflação deverá começar quando a temperatura do Universo cair para $T^4 \lesssim V(0)$. No entanto, há uma restrição no valor de $V(\phi)$ nos últimos estágios da inflação, que no novo cenário de Universo inflacionário é praticamente igual a $V(0)$ (ZELDOVICH; NOVIKOV, 1983)

$$V(0) \lesssim 10^{-13} m_p^4. \quad (64)$$

Isto significa que a inflação começará quando $T^2 \lesssim 10^{-7} m_p^2$, ou seja, no instante t após o início da expansão do Universo que excede o tempo de Planck $t_p \sim m_p^{-1}$ em 6 ordens de grandeza. Além disso, para um Universo quente e fechado durar tanto tempo, sua entropia total, dada pela equação (LINDE, 1990)

$$t_c \sim S^{\frac{2}{3}} \times 10^{-43} \text{ seg} \quad (65)$$

em que S é a entropia do Universo, a qual deve ser maior que $S \sim 10^9$ logo após o *Big Bang*. Assim, o problema da planura para um Universo fechado não foi resolvido no novo cenário do Universo inflacionário.

Uma forma de evadir esses problemas está em uma outra versão da teoria do Universo inflacionário, chamada de inflação caótica (LINDE, 1983). Em vez de se basear na teoria das transições de fase de alta temperatura, ela está simplesmente preocupada com a evolução de um Universo preenchido com um campo escalar distribuído caoticamente. Mas antes desse cenário ser abordado, faz-se necessário uma rápida discussão sobre o meca-

nismo de *Slow-Roll*, o qual colocará restrições sobre o potencial e o comportamento do campo ϕ afim de assegurar a inflação.

3.2.1 Condições de Slow-Roll

Como citado anteriormente, o novo modelo inflacionário parte da ideia de que um campo escalar conhecido como inflaton deve descer lentamente para o vácuo do potencial, em um tempo maior que H^{-1} , enquanto o Universo expande de maneira quase exponencial, necessitando para tanto que o potencial seja plano suficiente para assegurar esse formato de expansão. Um mecanismo capaz de assegurar essas propriedades é chamado de “condições de *Slow-Roll*” (WEINBERG, 2008), que pode ser obtido a partir das equações de Friedmann. Uma vez que $k \approx 0$ e $\Lambda = 0$, a equação (3), fornece

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho, \quad (66)$$

cuja derivada temporal é

$$2\dot{H}H = \frac{\kappa^2}{3}\dot{\rho}, \quad (67)$$

a qual, substituindo a equação da continuidade (6), toma a forma

$$2\dot{H}H = -\kappa^2 H(\rho + p), \quad (68)$$

levando em consideração as equações (56) e (57), tem-se que $\rho + p = \dot{\phi}^2$, portanto a equação acima se torna

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2}\dot{\phi}^2. \quad (69)$$

Essa equação é consistente com o fato de que o parâmetro de Hubble sempre decresce. De maneira a obter uma expansão quase exponencial, a variação no parâmetro de Hubble no tempo de Hubble, $|\dot{H}|/H^2$, deve ser muito pequena, assim (PETER COLES, 2002)

$$\begin{aligned} \frac{|\dot{H}|}{H^2} &\ll 1, \\ \therefore |\dot{H}| &\ll H^2. \end{aligned} \quad (70)$$

Utilizando (58) e (69), essa condição leva diretamente à

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad (71)$$

que implica que a energia cinética do campo escalar deve ser muito menor que sua energia potencial. Com isso, as equações (56) e (57) se tornam $p \simeq -\rho \simeq -V(\phi)$, dessa forma H pode ser dado por

$$H = \sqrt{\frac{\kappa^2}{3} V(\phi)}. \quad (72)$$

Por sua vez a equação (60) também traz uma contribuição importante para o sistema, no sentido de estabelecer parâmetros sobre a teoria. No caso, um análogo mecânico dessa equação forneceria a descrição de uma partícula que desce em direção ao vácuo do potencial V com um coeficiente de atrito dado por $3H$ (LIDDLE, 2003). No âmbito da inflação, o termo $3H\dot{\phi}$ atua exatamente como um coeficiente de atrito, fazendo com que o campo do inflaton, ϕ , role lentamente (do inglês *Slow Roll*) até o vácuo do potencial, assim o termo $3H\dot{\phi}$ deve dominar sobre o termo da aceleração do campo, $\ddot{\phi}$, ou seja

$$\left| \frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} \right| \ll 1, \quad (73)$$

fazendo que a equação (60) possa ser escrita como

$$3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (74)$$

$$\therefore \dot{\phi} = -\frac{V_{,\phi}}{3H}, \quad (75)$$

em que $V_{,\phi} \equiv \frac{\partial V}{\partial \phi}$. A equação (75) tem um significado importante, uma vez que ela possui solução do tipo atrator, com isso diferentes condições iniciais devem levar ao mesmo comportamento para o Universo pós inflacionário, se assim não fosse, o modelo sofreria severamente com problemas de ajuste fino nas condições iniciais para $\phi(t)$ e $a(t)$ (CAR-RASCO, 2018).

As equações (70) e (73) são chamadas de condição de *Slow-Roll*, sendo que a primeira garante que o fator de escala $a(t)$ cresça de maneira aproximadamente exponencial durante a inflação, enquanto que a segunda condição garante que o campo do inflaton role lentamente até o vácuo do potencial cosmológico $V(\phi)$. Assim, é possível chamar essas condições como (PETER, 2005)

$$\epsilon_H \equiv \frac{|\dot{H}|}{H^2}, \quad (76)$$

$$\eta_H \equiv \left| \frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} \right|, \quad (77)$$

logo $\epsilon_H \ll 1$ e $\eta_H \ll 1$, em que o subscrito H indica que o parâmetro é dado em termos da função de Hubble.

Outra maneira particularmente importante de fixar as condições de *Slow-Roll* é em termos do potencial V , uma vez que essa se torna uma importante forma de selecionar quais potenciais podem levar corretamente a modelos inflacionários. Utilizando as equações (69), (72) e (75) diretamente em (70), obtém-se

$$\epsilon_V \equiv \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2, \quad (78)$$

em que $\epsilon_V \ll 1$ e o subscrito V indica que o parâmetro é dado em termos do potencial cosmológico. Por sua vez, tomando a derivada temporal da equação (75),

$$\ddot{\phi} = -\frac{V_{,\phi,\phi}}{3H}\dot{\phi} + \frac{V_{,\phi}}{3H^2}\dot{H}$$

substituindo (75) e (69) na equação acima, leva-se a

$$\ddot{\phi} = \left(\frac{V_{,\phi,\phi}}{9H^2} - \frac{V_{,\phi}^2}{6\kappa^2 V^2} \right) V_{,\phi}.$$

Uma vez que condição de *Slow-Roll* (73) implica em $|\ddot{\phi}| \ll |V_{,\phi}|$, é necessário que

$$\left(\frac{V_{,\phi,\phi}}{9H^2} - \frac{V_{,\phi}^2}{6\kappa^2 V^2} \right) \ll 1.$$

Como a condição de *Slow-Roll* (78) já impõe que o segundo termo dessa inequação deve ser muito menor que 1, resta apenas

$$\frac{|V_{,\phi,\phi}|}{9H^2} \ll 1,$$

e uma vez que H^2 é dado pela equação (72), a equação acima finalmente fornece

$$\frac{1}{3\kappa^2} \left| \frac{V_{,\phi,\phi}}{V} \right| \ll 1.$$

Assim, a condição de *Slow-Roll* (73) pode ser escrita em termos do potencial, como (WEINBERG, 2008)

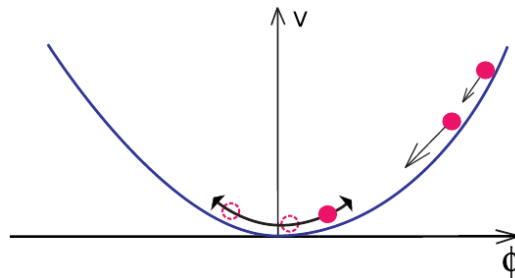
$$\eta_V = \epsilon_V + \frac{1}{3\kappa^2} \left| \frac{V_{,\phi,\phi}}{V} \right|. \quad (79)$$

Note que as condições ϵ_H e ϵ_V são iguais apenas quando forem muito pequenas, portanto são obtidas as relações

$$\begin{aligned} \epsilon_V &\approx \epsilon_H, \\ \eta_V &\approx \epsilon_H + \eta_H. \end{aligned}$$

Antes de prosseguir, é necessário uma discussão mais aprofundada do significado físico das condições de *Slow-Roll*. Como visto, os parâmetros ϵ e η asseguram, respectivamente, que o fator de escala cresça de maneira quase exponencial e que também o campo ϕ desça para o vácuo do potencial lentamente, porém elas também permitem uma análise mais detalhada do potencial cosmológico responsável pela inflação. Os parâmetros ϵ e η controlam o desvio do potencial inflacionário a partir da planura perfeita, que seria um potencial representando uma constante cosmológica, e, portanto, são dados pelas derivadas do potencial em relação ao campo, isso faz com que ϵ_V mensure diretamente o coeficiente angular do potencial V , enquanto que η_V descreve a curvatura do mesmo (LEMOINE, 2007).

Figura 2: A esfera vermelha representa um campo escalar rolando para o vácuo do potencial V e oscilando em torno dele.



Fonte: Gorbunov (2011).

Além das condições de *Slow-Roll* outra quantidade importante a ser conhecida é chamada de *número de e-folds*, que designa a “quantidade de inflação” e normalmente é dada

pelo logaritmo da razão a_f/a_i , ou seja

$$N \equiv \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right). \quad (80)$$

Como $H = \frac{\dot{a}}{a}$, tem-se que

$$\frac{da}{a} = H dt, \quad (81)$$

cuja integral entre um tempo inicial t_i e final t_f quaisquer, fornece

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_f} \frac{da}{a} &= \int_{t_i}^{t_f} H dt \rightarrow \\ \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right) &= \int_{t_i}^{t_f} H dt, \end{aligned} \quad (82)$$

essa igualdade mostra que o número de *e-folds* também pode ser expresso em termos do parâmetro de Hubble;

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt. \quad (83)$$

Porém, é interessante expressar N em termos do potencial cosmológico V , para tanto considere $dt = dt \frac{d\phi}{\dot{\phi}} = \frac{d\phi}{\dot{\phi}}$, então a expressão acima se torna (LEMOINE, 2007; WEINBERG, 2008)

$$N = \int_{t_i}^{t_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi, \quad (84)$$

uma vez que $H^2 \simeq \frac{\kappa^2}{3} V(\phi)$ e $\dot{\phi}^2 = \frac{V_{,\phi}^2}{3\kappa^2 V}$, a expressão para N toma a forma

$$N = - \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{\kappa^2 V}{V_{,\phi}} d\phi. \quad (85)$$

Em termos do fator de escala, essa equação pode ser escrita como (LESGOURGUES, 2006)

$$a_f = a_i \exp \left[- \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{\kappa^2 V}{V_{,\phi}} d\phi \right]. \quad (86)$$

Nesse intervalo de integração, o potencial é positivo e decresce a medida que $\phi(t)$ vai de ϕ_i para ϕ_f , então o argumento da exponencial é positivo. A condição $|V_{,\phi}/V| \ll \kappa$ garante que o potencial é plano suficiente para gerar um grande número de *e-folds* num intervalo de tempo no qual o campo escalar ϕ varia por uma quantidade no mínimo tão grande quanto $\frac{\sqrt{2}}{\kappa} = 3,4 \times 10^{18}$ GeV (WEINBERG, 2008).

3.2.2 Inflação caótica

Faz-se necessário abordar uma discussão por traz de um dos modelos mais contumazes do cenário inflacionário, conhecido como *modelo inflacionário caótico*, para tanto essa subseção se baseará majoritariamente nos Trabalhos de Linde (1983, 1990, 2014). Neste âmbito, para estudar um Universo preenchido caoticamente por um campo escalar ϕ , é necessário fixar uma série de características básicas acerca do campo escalar ϕ e da geometria do espaço, como por exemplo: o valor inicial de ϕ e de sua derivada, bem como a topologia do espaço-tempo e sua métrica em consonância com os valores do campo escalar.

Inicialmente se considera que o campo ϕ , caoticamente distribuído por todo espaço, se acopla minimamente com a gravidade e a inflação cósmica ocorre se ϕ for suficientemente homogêneo e grande, satisfazendo $\phi \geq m_p \sim 10^{19}$ GeV (LINDE, 1983). Em particular, o potencial efetivo $V(\phi)$ cresce mais lentamente que $\exp\left(\frac{4\sqrt{\pi}\phi}{m_p}\right)$, assegurando a planura do potencial. Felizmente esse requerimento é suprido facilmente por qualquer potencial que siga uma lei de potências.

Tendo em vista que se conhece uma forma arbitrária para o potencial, a densidade Lagrangiana que descreve o modelo é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \quad (87)$$

em que a métrica é dada por (1) e uma forma muito recorrente para $V(\phi)$ é do tipo

$$V(\phi) = \frac{\lambda\phi^n}{nm_p^{n-4}}, \quad (88)$$

de maneira geral $0 < \lambda \ll 1$ e $n > 0$, entretanto, para assegurar a renormalização da energia do sistema, fixa-se $0 < n \leq 4$. Em virtude do *princípio de incerteza de Heisenberg*, a densidade de energia ρ do Universo no tempo de Planck t_p é estimada da ordem de m_p^4 , logo é natural estimar as seguintes condições iniciais (LINDE, 2014, 1983)

$$V(\phi) \sim m_p^4, \quad (89)$$

$$\dot{\phi}^2(\phi) \sim m_p^4, \quad (90)$$

$$R^2 \sim m_p^4. \quad (91)$$

Em que R é o escalar de curvatura, o qual varia rapidamente de ponto a ponto no início do Universo, durante o período $t \lesssim m_p^{-1}$, depois disso o Universo se torna homogêneo e isotrópico (ZELDOVICH; NOVIKOV, 1983). A condição (89), mostra que o valor inicial do campo escalar, ϕ_0 , no início do Universo é extremamente grande, além de expor que o horizonte é inicialmente muito pequeno, com $H^{-1} \sim m_p^{-1}$, entretanto ainda pode ser descrito em termos de espaço-tempo clássico.

O Universo se comporta como um espaço de de Sitter apenas em pequenas regiões esféricas delimitadas pelo horizonte de Hubble, qualquer partícula ou inhomogeneidade fora dessa esfera não afeta os eventos dentro do horizonte, portanto as propriedades geométricas internas a essas regiões, bem como o tensor energia momento $T_{\mu\nu} \approx g_{\mu\nu}V(\phi)$, aproximam-se do espaço de de Sitter a uma taxa exponencialmente alta, isso significa que o Universo se torna homogêneo e isotrópico dentro dessas regiões, as quais se expandem exponencialmente (RYDEN, 2016). Como já abordado no *problema do horizonte*, para que a homogeneidade e isotropia sejam atingidas, o tamanho do domínio no qual a expansão ocorre deve exceder $2H^{-1}$. Além disso, é necessário que a expansão seja aproximadamente exponencial para que o horizonte de eventos $H^{-1}(t)$ retroceda lentamente e para que a homogeneidade, no momento da expansão, escape para além do horizonte sem gerar qualquer influência na expansão interna ao mesmo. Essa condição será satisfeita se a condição de *Slow-Roll* (70) for também satisfeita durante o estágio de inflação.

Assim, para avaliar a possibilidade de regiões inflacionárias surgirem em um Universo com condições iniciais (89) - (91), é suficiente considerar se o comportamento inflacionário poderia surgir na época de Planck em uma região isolada do Universo, com o tamanho mínimo l que ainda poderia ser tratado em termos de espaço-tempo clássico, $l \sim H^{-1}(\phi) \sim m_p^{-1}$ (KINNEY, 2009). Com isso, pode-se tentar criar uma região de Universo com grau relativamente baixo de anisotropia e inhomogeneidade, permitindo tratar cada um deles como sendo um espaço local de Friedmann, com uma métrica do tipo (1) e governado pela equação (58). Inicialmente essa região possui tamanho inicial igual a m_p^{-1} , na qual o escalar de curvatura pode ser menor que $V(\phi) \sim m_p^4$ e a condição de *Slow-Roll* (78) é respeitada. Uma vez que essas quantidades são inicialmente da mesma ordem de magnitude de acordo com (89)-(91), a chance de um Universo com as características citadas existir é aproximadamente uma unidade (LINDE, 1990).

A dinâmica desse Universo é guiada pela equação

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right), \quad (92)$$

cuja equação da continuidade (60) fornece o comportamento do campo escalar ϕ

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0. \quad (93)$$

Segundo as condições de *Slow-Roll*, um campo uniforme ϕ que varia lentamente, reduz as duas equações de movimento à

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{3} V(\phi), \quad (94)$$

$$3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} = -V_{,\phi}. \quad (95)$$

Definindo uma forma para o potencial efetivo $V(\phi)$, é possível extrair soluções inflacionárias dessas equações, ou seja, soluções nas quais o fator de escala expanda de maneira (quasi-)exponencial, enquanto o campo escalar atinge seu limite assintótico no vácuo do potencial. Da equação (95) segue-se que

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{1}{6\kappa^2 V} \left(\frac{dV}{d\phi} \right)^2. \quad (96)$$

A forma arbitrária mais simples que se pode colocar sobre esse potencial é $V(\phi) \sim \phi^n$, com isso tem-se

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{n^2}{6\kappa^2 \phi^2} V(\phi), \quad (97)$$

uma vez que a condição (78) é satisfeita, o valor inicial do campo ϕ antes da inflação é

$$\phi \gg \frac{n}{4\sqrt{3}\pi} m_p. \quad (98)$$

Logo, a condição para o campo escalar é satisfeita e assegura que o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ é determinado quase inteiramente por $g_{\mu\nu}V(\phi)$, forçando $p \approx -\rho$, o que garante uma pressão negativa no sistema, causando a expansão acelerada do Universo.

No final do período inflacionário

$$\phi \lesssim \frac{n}{4\sqrt{3}\pi} m_p, \quad (99)$$

e o campo escalar oscila no vácuo do potencial transferindo energia térmica para as demais partículas, aquecendo o Universo. A medida que o campo ϕ desce em direção ao vácuo de V , em um intervalo de tempo $\Delta t \leq \frac{H}{H}$, o Universo parece aproximadamente de Sitter uma vez que a solução para o fator de escala $a(t)$, a partir da equação (94), é (LINDE, 1990)

$$a(t) \sim e^{Ht}. \quad (100)$$

Soluções para ϕ podem ser obtidas fixando um valor para n , porém, no âmbito desta tese é pertinente tomar um exemplo em que será considerado um potencial de quarta ordem com quebra de simetria do tipo

$$V = \lambda(\phi^2 - m^2)^2, \quad (101)$$

em que m e λ são constantes. Fazendo uso desse potencial, as equações (72) e (75) fornecem respectivamente

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} V \rightarrow H = \sqrt{\kappa^2 \frac{\lambda}{3}} (\phi^2 - m^2), \quad (102)$$

$$3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 \rightarrow \sqrt{3\kappa^2} \dot{\phi} + 4\lambda\phi = 0. \quad (103)$$

Das quais as soluções são, respectivamente

$$a(t) = a_i \exp \left[\frac{\kappa^2}{8} \phi_i^2 + \sqrt{\frac{\kappa^2}{3}} \left(-m^2 t + \sqrt{\frac{3\kappa^2}{64\lambda}} \phi_i \exp \left(\sqrt{\frac{\kappa^2}{3}} t \right) \right) \right], \quad (104)$$

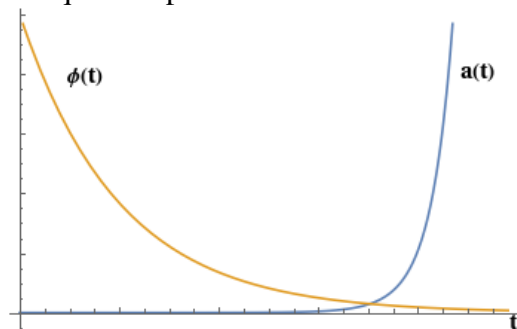
$$\phi(t) = \phi_i \exp \left[-\sqrt{\frac{16\lambda}{3\kappa^2}} t \right], \quad (105)$$

em que a_i é o valor inicial do fator de escala e ϕ_i é o valor inicial do campo escalar. Note que a solução para ϕ é decrescente, enquanto que o fator de escala evolui de maneira quasi-exponencial. A solução para $a(t)$ mostra que a maior parte do volume físico do Universo surge não em virtude da expansão de regiões que inicialmente, e aleatoriamente, continham um pequeno campo ϕ , mas como resultado da inflação de regiões de um tamanho que excede o raio do horizonte de eventos $H^{-1}(\phi)$, que foram inicialmente

preenchidos com um campo extremamente grande, suficientemente homogêneo e que varia lentamente. A única restrição fundamental na magnitude do campo homogêneo e de variação lenta ϕ é $V(\phi) \leq m_p^4$. Como já mencionado, a probabilidade de que domínios de tamanho $\Delta l \geq H^{-1}(\phi) \sim m_p^{-1}$ existam no Universo primordial, com $\dot{\phi}^2 \leq V(\phi) \sim m_p^{-1}$, é relevante. Em conjunção com a equação acima, isso leva a crer que a maior parte do volume físico do Universo atual surgiu precisamente como resultado da expansão exponencial de regiões do tipo anteriormente mencionado (WEINBERG, 2008; LINDE, 1990; RYDEN, 2016).

O perfil das curvas das soluções estão dispostas no gráfico abaixo (fora de escala).

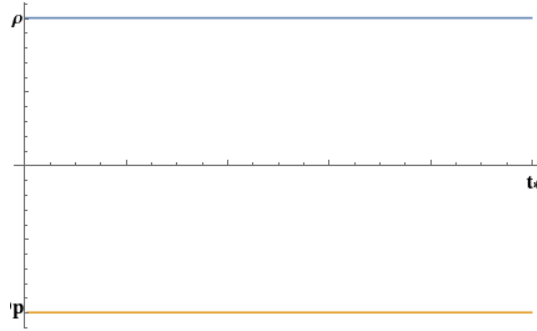
Figura 3: A curva amarela representa o campo escalar ϕ por t , o qual desce para o vácuo do potencial a medida que a inflação ocorre. A curva azul representa o fator de escala, o qual se expande de maneira quase exponencial.



Fonte: Produção do próprio autor.

Para o período inflacionário, a densidade de energia fornece o gráfico abaixo, o qual mostra que durante a inflação a densidade de energia é constante, como deveria ser, uma vez que $\rho \approx V(\phi)$ e a condição de planura do potencial assegura que $V(\phi) \sim \text{constante}$ durante esse período, da mesma forma, a pressão é $p \approx -V(\phi)$, logo o Universo está sofrendo a ação de uma força repulsiva que o faz expandir exponencialmente (MUKHANOV, 2005; DODELSON, 2003).

Figura 4: Durante a inflação cósmica o valor da densidade de energia é constante, enquanto que a densidade de pressão é também constante porém negativa, garantindo que haja expansão acelerada.



Fonte: Produção do próprio autor.

Por completude, é fundamental analisar as condições de *Slow-Roll* e o número de *e-folds*. As condições (78) e (79), fornecem respectivamente

$$\epsilon = \frac{8}{\kappa^2} \frac{\phi^2}{(\phi^2 - m^2)^2}, \quad (106)$$

$$\eta = \frac{4}{3\kappa^2(\phi^2 - m^2)} \left[\frac{3\phi^2 - m^2}{(\phi^2 - m^2)^2} \right]. \quad (107)$$

O número *e-folds*, dado pela equação (85) é

$$N = \frac{\kappa^2}{8} \left[(\phi_i^2 - \phi_f^2) + 2m^2 \ln \left(\frac{\phi_f}{\phi_i} \right) \right]. \quad (108)$$

Como no fim da inflação $\phi \rightarrow m$, ou seja, ϕ ganha massa no vácuo do potencial, caso $m \ll \phi_i$, a quantidade de expansão fica então dependente do valor inicial do campo ϕ_i :

$$N \approx \frac{\kappa^2}{8} \phi_i^2. \quad (109)$$

A condição de *Slow-Roll* (78) pode fornecer uma estimativa para o fim do regime inflacionário, que ocorre quando $\epsilon = 1$ e $\phi \lesssim m_p$, assim é possível encontrar o valor final ϕ_f do campo escalar

$$1 = \frac{8}{\kappa^2} \frac{\phi_f^2}{(\phi_f^2 - m^2)^2}, \quad (110)$$

$$\therefore \phi_f^2 = \frac{4 + m^2\kappa^2 \pm 2\sqrt{4 + 2\kappa^2 m^2}}{\kappa^2}.$$

Depois que o campo ϕ diminui em magnitude para um valor de ordem m_p , a quantidade H , que desempenha o papel de um coeficiente de atrito na equação (60), não é mais grande o suficiente para impedir que o campo ϕ desça rapidamente até o mínimo do potencial efetivo. O campo ϕ inicia suas oscilações próximo ao mínimo de $V(\phi)$ e, como resultado, sua energia é transferida para as partículas, as quais colidem umas com as outras e se aproximam de um estado de equilíbrio termodinâmico (Zeldovich1975). Se este reaquecimento ocorrer com rapidez suficiente (durante o tempo $\Delta t \leq H^{-1}(\phi \sim m_p)$), virtualmente toda a energia do campo será transformada em energia térmica. Em uma versão realista do cenário inflacionário, a temperatura do Universo após o reaquecimento deve ser algumas ordens de magnitude menor que $V^{1/4}(\phi \sim m_p)$ devido a ineficiência do processo de reaquecimento que resulta da interação fraca do campo ϕ com ele próprio e com outros campos (LINDE, 1990).

Por fim, cabe destacar que tanto o valor quanto o comportamento do campo ϕ próximo ao vácuo do potencial, i.e $\phi \sim m_p$, são independentes de seu valor inicial $\phi_i \gg m_p$. Isso significa que a temperatura inicial do Universo após o reaquecimento não depende nem das condições iniciais durante o estágio inflacionário nem da sua duração. Assim a inflação tem efeito apenas sobre o fator de escala $a(t)$, o qual cresce exponencialmente. Esta é precisamente a circunstância que permite resolver a maioria dos problemas relatados na seção 2.4.

3.2.3 Resolvendo os três problemas do modelo Λ CDM

O problema da planura: A inflação cósmica pode ser geralmente definida como um estágio inicial durante o qual a expansão é acelerada e longa suficiente para que $|\Omega_k|$ seja levado para muito próximo de zero, de maneira que a evolução do Universo desde a inflação até os dias de hoje ainda não permitiu que $|\Omega_k|$ se aproxime de 1.

A fim de encontrar a quantidade mínima que o Universo precisa se expandir para resolver o problema da planura, se considera que a inflação ocorre entre um tempo inicial t_i e um tempo final t_f , nos quais $|\Omega_k| \sim 0$ em t_i e hoje, t_0 . Assumindo que o fator de escala parte de $a_i \equiv a(t_i)$ até $a_f \equiv a(t_f)$ e que a expansão é exatamente de Sitter com o parâmetro de Hubble $H(t_i)$ constante, com isso a densidade de energia total ρ é constante durante a inflação, como mostrado na curva azul da Fig. (4). Além disso, assumindo que no final da inflação toda a densidade de energia ρ é convertida em densidade de energia de radiação, ρ_r , a qual decresce com a^{-4} entre t_f e t_0 , e também que ρ_k é igual a ρ em t_i e a ρ_r em t_0 , é possível escrever (LESGOURGUES, 2006)

$$\begin{aligned} \frac{\rho_k(a_0)}{\rho_k(a_i)} &= \left(\frac{a_i}{a_0}\right)^2, \\ &= \frac{\rho_r(a_0)}{\rho_r(a_f)}, \end{aligned} \quad (111)$$

$$= \left(\frac{a_f}{a_0}\right)^4, \quad (112)$$

que fornece a relação

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_i}{a_0}\right)^2 &= \left(\frac{a_f}{a_0}\right)^4, \\ \therefore \frac{a_f}{a_i} &= \frac{a_0}{a_f}. \end{aligned} \quad (113)$$

Entretanto, deve haver mais expansão durante a inflação do que após ela, assim a igualdade acima pode ser flexibilizada para

$$\frac{a_f}{a_i} \geq \frac{a_0}{a_f}. \quad (114)$$

Como o número de *e-fold*, N , é uma forma extremamente conveniente de se medir quantas vezes o fator de escala cresce exponencialmente, pode-se usar a relação (114) para calcular o número de *e-folds* necessários para resolver o problema da planura. No caso, utilizando a equação (80), entre os tempos t_1 e t_2 , e assumindo que o número total de *e-folds* da inflação é dado por N_{inf} e após a inflação é dado por N_{pos} , chega-se a

$$N_{inf} \geq N_{pos}. \quad (115)$$

Isso significa que o número de *e-folds* durante a inflação deve ser maior ou igual ao número de *e-folds* para o período pós inflacionário. O valor inicial do campo escalar ϕ é responsável diretamente pelo número N e também pelo valor inicial da densidade de energia, portanto é interessante expressar o número de *e-folds* em termos de ρ_r , afim de obter uma estimativa para o mínimo de inflação necessária para resolver o problema da planura (GORBUNOV, 2011). No caso, utilizando (111), obtem-se

$$N_{pos} = \ln \left(\frac{\rho_r(a_f)}{\rho_r(a_0)} \right)^{1/4}. \quad (116)$$

Considerando que a densidade de radiação hoje é da ordem de $\rho_r(a_0) \sim (10^{-4} \text{ eV})^4$ e no

período após a inflação era de $\rho_r(a_f) \sim (10^{15} \text{ GeV})^{-3}$ (LIDDLE, 2003; LIDDLE; LYTH, 2000), a equação acima fornece

$$N_{inf} \geq \ln 10^{29} \sim 64, \quad (117)$$

com isso, o mínimo de e -folds necessário para que a inflação corrija o problema da planura é de cerca 64 e -folds.

Resolvendo o problema do horizonte: O problema do Horizonte, o qual se baseia no fato de que a anisotropia da radiação na superfície de último espalhamento é muito menor do que deveria ser, pode ser contornada no contexto de um Universo inflacionário de maneira relativamente simples, uma vez que uma expansão cósmica quasi-exponencial pode levar a um valor arbitrariamente grande para o horizonte cosmológico. Entretanto é necessário que o horizonte aumente por um fator de aproximadamente 10^3 em relação ao raio de Hubble, o que pode ser conseguido com uma pequena quantidade de expansão acelerada, ou seja, é possível encontrar um número mínimo de e -folds para esse problema ser resolvido (WEINBERG, 2008).

A fim de encontrar o número de e -folds para corrigir o problema, é necessário assumir que dois fótons foram emitidos no início da inflação, t_i , assim o horizonte durante a inflação é dado por

$$d_H(t_i, t_f) = 2a(t_f) \int_{a(t_i)}^{a(t_f)} \frac{da}{a^2 H(a(t_i))} = \frac{2}{H_i} \left(\frac{a_f}{a_i} - 1 \right), \quad (118)$$

em que t_f é o fim da inflação, quando o Universo é novamente dominado por radiação, $a_i \equiv a(t_i)$, $a_f \equiv a(t_f)$ e $H_i \equiv H(a(t_i))$. Utilizando a equação (111), a equação acima pode ser escrita como

$$d_H(t_i, t) = d_H(t_i, t_f) + 2R_H(t). \quad (119)$$

Para resolver o problema do horizonte é necessário garantir que toda a superfície de último espalhamento esteja em contato causal. É necessário, portanto, conhecer inicialmente o tamanho dessa superfície, para tanto considere que dois fótons são emitidos a partir da superfície de último espalhamento, no tempo t_{des} , em direção ao nosso planeta, vindos na mesma direção, mas em sentidos opostos chegando até nós hoje, t_0 . A coordenada comóvel r_{des} dos fótons na citada superfície pode ser calculada de maneira semelhante a $d_H(t_1, t_2)$ nas equações (40)-(42), como seguem (BAUMANN, 2012; RYDEN, 2016)

$$d_H = -2 \int_0^{r_{des}} \frac{a(t_0) dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (120)$$

$$\int_{t_{des}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_{des}}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (121)$$

$$\therefore d_H(t_{des}, t_0) = 2a(t_0) \int_{t_{des}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (122)$$

Portanto, o diâmetro físico da superfície de último espalhamento é $d_H(t_{des}, t_0)$. É possível integrar $d_H(t_{des}, t_0)$ usando o fato de que $a \propto t^{2/3}$ durante a era dominada pela matéria, e descobrir que $d_H(t_{des}, t_0) \sim R_H(t_0)$ é um fator numérico de ordem um. Mesmo considerando uma fase dominada pela energia escura, a diferença entre $d_H(t_{des}, t_0)$ e $R_H(t_0)$ é insignificante. Assim, o valor atual do raio de Hubble fornece a ordem de magnitude da maior escala observável hoje, ou seja, o diâmetro da superfície de último espalhamento (BAUMANN, 2012).

Com isso, o problema do horizonte pode ser resolvido se o horizonte comóvel no final da inflação for pelo menos igual ao diâmetro comóvel da superfície de último espalhamento, o que pode ser escrito como

$$\frac{d_H(t_i, t_f)}{a_f} \geq \frac{R_H(t_0)}{a_0}. \quad (123)$$

Uma vez que o parâmetro de Hubble é constante durante a inflação, $H_i = H_f$, considerando o limite $a_f \gg a_i$, tem-se a condição

$$\frac{a_f}{a_i} \geq \frac{a_f H_f}{a_0 H_0}. \quad (124)$$

Como o número de *e-folds* durante este período é muito maior do que em qualquer outro, pode-se aproximar o razão $(a_f H_f)/(a_0 H_0)$ para a_0/a_f , fornecendo finalmente

$$\frac{a_f}{a_i} \geq \frac{a_0}{a_f}. \quad (125)$$

Claramente, esta condição assegura que o número mínimo para que o problema do horizonte seja resolvido é de pelo menos cerca de 64 *e-folds*, uma vez que esta condição é exatamente a mesma do problema de planura. Quanto maior o número de *e-folds* desse período, menor será o tamanho do Universo observável em relação ao horizonte causal, levando a anisotropias na radiação cósmica de fundo ainda menores (LESGOURGUES, 2006; RYDEN, 2016).

Resolvendo o problema das relíquias: No contexto da inflação cósmica, as relíquias não relativísticas (decaem com a^{-3}) e relativísticas (decaem com a^{-4}) podem ser diluídas por um fator $(a_f/a_i)^3$ enquanto a energia do vácuo é quase constante, por esse motivo tais objetos devem ser criados antes da inflação. A quantidade necessária de inflação para que as relíquias sejam diluídas até quantidades irrelevantes hoje é muito menor do que a quantidade necessária para resolver o problema da planura e do horizonte, já que as relíquias decaem mais rápido que a densidade de curvatura efetiva ($\rho_k \propto a^{-2}$) (PRESKILL, 1979). Assim, basta que os dois primeiros problemas sejam resolvidos que se terá as condições adequadas para resolver o problema da relíquias.

3.3 MATÉRIA ESCURA

Além dos problemas citados anteriormente, existem outros que não podem ser sanados no âmbito de uma teoria inflacionária, como a existência de galáxias cuja curva de rotação não podem ser explicadas por sua massa (RUBIN, 1970, 1978), a observação de *galáxias de disco puro* em grandes quantidades (SACHDEVA, 2016), a velocidade de colisão do *Cluster Bullet* em R200 (LEE, 2010), dentre outros.

Existem vários cenários nos quais esse problemas cosmológicos são resolvidos de diferentes formas, partindo de modelos mais tradicionais fazendo uso de considerações específicas sobre o tipo de matéria escura (RUBIN, 1970, 1978), que no caso seria apenas algum tipo de matéria desconhecida que possui apenas interação gravitacional, até modelos que usam Teoria de Gravidade Modificada (MOFFAT, 2011). Uma das abordagens que recebeu bastante atenção nas últimas décadas é a que considera a Matéria Escura como um campo escalar *condensado*. Tal abordagem é simples e natural, uma vez que já se espera que a fase inflacionária seja guiada por um campo escalar, o qual poderia atuar como matéria escura após esse período. A simplicidade desses modelos reside no fato de que a dinâmica da matéria escura pode ser completamente determinada por um campo escalar ϕ .

Para determinar a dinâmica do campo escalar ϕ , claramente é preciso fixar um potencial $V(\phi)$ adequado da mesma forma que foi feito no período inflacionário. Na literatura muitos potenciais foram considerados (MARTIN et al., 2014; LINDE, 2014), alguns excelentes candidatos, como o caso do potencial

$$V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad (126)$$

em que m é a massa efetiva do campo escalar e λ é um parâmetro de auto-interação. Este potencial é notável, pois seu termo quadrático em ϕ emula exatamente um Universo cuja evolução é predita pelo modelo Λ CDM, enquanto que o termo de quarta ordem fornece a auto-interação do campo, que pode ser regulada a partir do parâmetro λ (ARBEY, 2006; DE LA MACORRA, 2009).

Uma vez que a densidade Lagrangiana do campo escalar é dada pela equação (51), a densidade de energia e pressão da matéria escura são descritas pelas equações (56) e (57) respectivamente, com isso é possível escrever o parâmetro ω da equação de estado, dado por

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V}. \quad (127)$$

Considerando um cenário no qual apenas a contribuição da matéria escura existe como fonte da curvatura do espaço-tempo, a equação de Friedmann (3) fornece

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho_{DM}, \quad (128)$$

em que ρ_{DM} é a densidade de energia da matéria escura não bariônica. Note que até o momento a densidade de energia escura não foi considerada, isso será feito na próxima seção. Escrevendo a equação (128) em termos dos parâmetros de densidade se obtém

$$\Omega_{DM} = 1, \quad (129)$$

em que $\Omega_{DM} \equiv \frac{\rho_{DM}}{\rho_c}$. Considerando um caso simples de Universo puramente dominado pela matéria escura e levando em conta que ρ_{DM} é dada pela equação (56) juntamente com o potencial (126), é possível escrever a equação (128) como

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \right), \quad (130)$$

isso mostra claramente o comportamento do parâmetro de Hubble é completamente ditado pela matéria escura, como deveria ser. Fazendo o termo de auto interação igual a zero, $\lambda = 0$, e considerando que na era dominada pela matéria escura $m \gg H$, é possível obter soluções analíticas para ϕ , uma vez que a equação (130) se torna apenas

$$\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2 \approx 0, \quad (131)$$

cuja solução é dada por

$$\phi(t) = \phi_0^* e^{imt} + \phi_0 e^{-imt}. \quad (132)$$

Segundo Magaña (2012) pode-se fazer $\phi_0 = \sqrt{\rho_0}e^{iS}$, sendo S uma constante e ρ_0 a densidade de energia do fluido, ambos definidos no *background*. Assim a equação (132) se torna

$$\phi(t) = 2\sqrt{\rho_0} \cos(S - mt). \quad (133)$$

Com isso, o parâmetro ω da equação de estado é dado na figura abaixo

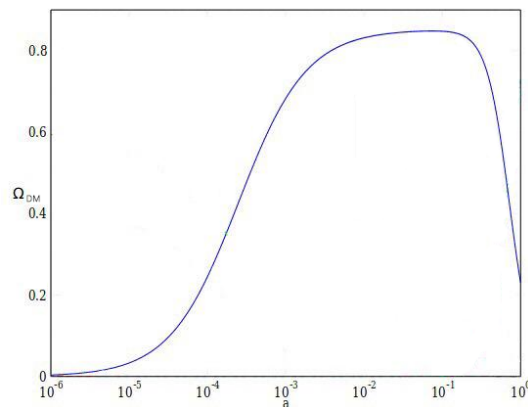
Figura 5: Evolução do parâmetro ω para toda a idade do Universo.



Fonte: Produção do próprio autor.

No gráfico (5) nota-se que a ω oscila no tempo, entretanto a média temporal $\langle \omega \rangle = 0$, com isso é possível afirmar que o campo ϕ se comporta como um fluido sem pressão, exatamente como requer o modelo Λ CDM (WEINBERG, 2008; RYDEN, 2016; MORTONSON, 2013; ARUNAB, 2017). Já a evolução do parâmetro de densidade é dada pela seguinte figura

Figura 6: Evolução de Ω_{DM} para toda a idade do Universo.



Fonte: imagem adaptada de Magaña (2012)

Na figura acima, (6), nota-se que durante os momentos iniciais do Universo, a matéria escura não domina sua dinâmica, posteriormente há uma transição para a fase dominada

pela matéria escura, Ω_{DM} . Em seguida há um grande declínio de Ω_{DM} dando lugar a um Universo dominado por outro conteúdo material. Tal resultado é exatamente o esperado no modelo Λ CDM (RYDEN, 2016).

Disso tudo, pode-se concluir que um modelo fazendo uso de um campo escalar condensado atuando como matéria escura é viável, levando ao comportamento esperado para um Universo dominado por este tipo de componente material. Entretanto, no âmbito de uma teoria unificada, é necessário verificar cuidadosamente o mecanismo de decaimento do campo inflaton em partículas de matéria escura, tal análise não será feita no âmbito desta tese.

3.4 UM MODELO COSMOLÓGICO COMPLETO

Dentro do modelo Λ CDM, é possível imaginar um cenário geral no qual é possível construir uma cosmologia unificada fazendo uso de um campo escalar ϕ , cuja existência está associada diretamente a todas as fases de evolução do Universo.

Esse modelo Unificado, para o propósito dessa tese, pode ser pensando em um Universo de Friedmann, começando com um *Big Bang* quente que dá origem a um Universo não necessariamente homogêneo do ponto de vista térmico. Logo após os instantes iniciais, um campo escalar ϕ caoticamente distribuído sobre todo o espaço se faz presente e, a medida que ele desce para o vácuo de seu potencial, o fator de escala se expande exponencialmente. Nesse ponto, um dos poucos requerimentos é que o potencial, a qual este campo está associado, seja plano o suficiente em algumas regiões para assegurar as condições de *Slow-Roll*. Após o regime inflacionário, o campo deve oscilar no vácuo do potencial de maneira a criar pares de partículas fundamentais, levando ao período de reaquecimento. Em uma situação em que o campo ϕ não decaia completamente em outras partículas, após o reaquecimento ele pode atuar como matéria escura. Por sua vez, após o decaimento de ϕ é possível que haja uma pequena parte remanescente do potencial ao qual o campo escalar está sujeito, que por sua vez poderia atuar como energia escura nos tempos atuais da história do Universo. Claramente essa descrição é a mais coerente para o que segue neste trabalho.

Embora a tarefa de se criar um modelo cosmológico unificado pareça simples a grosso modo, a realidade se mostra adversa. Muitos empecilhos existem na implementação de tais teorias. Inicialmente não é conhecido nenhum campo escalar fundamental além do campo de Higgs que poderia fazer papel de inflaton, caso exista será necessário buscar diversos potenciais ad-hocs que possam satisfazer as condições de *Slow-Roll*, além de que esse campo escalar precisará ser encontrado em colisores de partículas, em algum momento. Ainda, é necessário buscar a descrição do mecanismo físico por trás do decaimento desse campo de forma que o mesmo atue na criação de pares de partículas, restando uma densidade de energia suficientemente grande para atuar como matéria escura. E mais, as inomogeneidades no campo do inflaton devem levar a anisotropia da radiação cósmica de fundo a valores muito próximos do observado hoje. Por fim, após o campo escalar

atingir o vácuo do potencial, é necessário que de alguma forma um termo constante e muito pequeno sobreviva em $V(\phi)$ podendo atuar hoje como uma constante cosmológica, ou que próprio o campo ϕ atue como energia escura, como é descrito em modelos de quintessência (TSUJIKAWA, 2013). Embora este contexto todo pareça um tanto não natural, seu estudo é muito oportuno, seja como teoria física realizável ou mesmo como toymodel.

4 PERTURBAÇÕES COSMOLÓGICAS

O objetivo deste capítulo é formar um arcabouço teórico e matemático acerca das perturbações cosmológicas, uma vez que esta teoria é um dos grandes trunfos da cosmologia atual. As próximas seções do presente capítulo se basearão majoritariamente na referência Gorbunov (2011).

No âmbito da teoria de perturbações, é possível separá-las em modos escalares, vetoriais e tensoriais, os quais serão discutidas adiante. O principal interesse para esta tese reside em perturbações escalares, pois elas estão intimamente ligadas à inflação cósmica e podem ser conectadas com os valores observados atualmente para o espectro de potência da Radiação Cósmica de Fundo em Micro-Ondas (RCFMO) (MUKHANOV, 1992). Ao longo das últimas décadas, novos métodos foram desenvolvidos para estudar perturbações gravitacionais linearizadas, a que será usada aqui é a abordagem invariante por gauge, devido a sua maior facilidade de aplicação.

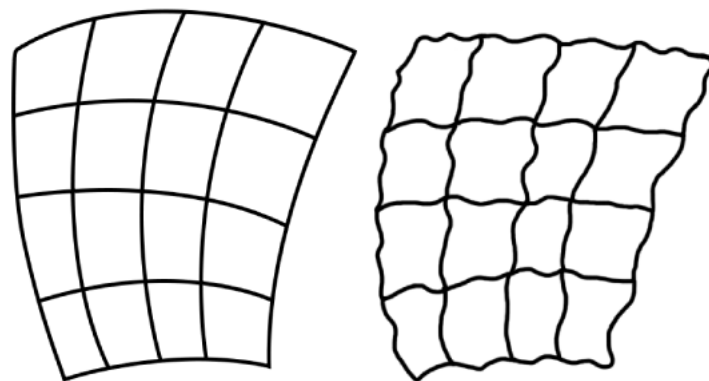
Existem boas evidências observacionais que sustentam a visão de que nos momentos iniciais o Universo era bastante homogêneo e isotrópico em todas as escalas (WEINBERG, 2008). Todavia, pequenas perturbações iniciais que pudessem existir naquela época aumentaram lentamente devido à instabilidade gravitacional, levando a formação de estruturas como se conhece hoje (UNRUH, 1986). Uma vez que a evolução dessas pequenas perturbações iniciais é fundamental para explicar características do Universo observado, o seu estudo caracteriza um grande vínculo entre modelos que tentam descrever o Universo primordial e os dados observacionais colhidos atualmente. Uma forma de realizar tais estudos é por meio da aplicação da teoria de perturbação gravitacional linearizada, a qual será discutida agora.

A melhor evidência de homogeneidade e isotropia no início Universo vem da isotropia da RCFMO. Os limites superiores presentes nas flutuações de temperatura são inferiores a 1 parte em 10^4 em todas as escalas angulares. Em muitos modelos cosmológicos, as atuais flutuações de temperatura estão diretamente relacionadas às perturbações de densidade de energia no período da recombinação, proporcionando assim um limite superior na amplitude das flutuações naquele momento (SASAKI, 2012). No entanto, para explicar a existência de estruturas não-lineares na escala de galáxias e clusters, é preciso que hajam perturbações iniciais que começam muito cedo, com uma pequena amplitude, e crescem gradualmente com tempo. Espera-se que a inflação cósmica tenha amplificado essas perturbações de maneira a gerar pontos de maior densidade possibilitando a formação de estruturas (MUKHANOV, 1992).

O crescimento de perturbações em um Universo em expansão é uma consequência direta da instabilidade gravitacional, já que pequenas variações na densidade de energia podem exercer uma força gravitacional atrativa maior sobre a matéria circundante, causando aumento das perturbações (MUKHANOV, 1992). Em um Universo não expansivo as perturbações deveriam evoluir de forma exponencial, em contra partida, em um cenário no qual a expansão se faz presente, o aumento de força é parcialmente equilibrado pela expansão, resultando em uma evolução das perturbações que segue uma lei de potência. Matematicamente, o problema de descrever o crescimento de pequenas perturbações no contexto da Teoria da Relatividade Geral, reduz-se a resolver as equações de Einstein linearizadas sobre um *background* em expansão (SIMMONDS, 1997), como será feito a seguir.

Em uma teoria de perturbação cosmológica, tem-se o interesse em perturbações na métrica do espaço-tempo e também no tensor energia-momento. A primeira leva a uma Teoria da Relatividade Geral perturbada, na qual o espaço-tempo difere do usual apenas por pequenas perturbações, como ilustrado na Figura 7. Já o segundo é engendrado pelo fato de que na era do desacoplamento ($T \approx 10^{32} K$) o Universo era aproximadamente homogêneo, com inhomogeneidades muito pequenas da ordem de 10^{-5} (LIDDLE; LYTH, 2000).

Figura 7: Na primeira figura é dada uma seção do espaço-tempo, enquanto na segunda é dada uma seção perturbada do espaço-tempo.



Fonte: Produção do própria do autor.

Uma vez que se está introduzindo perturbações lineares em quantidades físicas, é natural se pensar em separar a parte do *background* sem perturbação da parte perturbada (LYTH, 2009), no caso, considerando uma quantidade qualquer $\mathbf{Z}(t, \vec{x})$ é possível separá-la em $\bar{\mathbf{Z}}(t)$, dependente apenas do tempo cósmico, e outra parte sendo uma perturbação espacialmente dependente, $\delta\mathbf{Z}(\vec{x})$, tal que

$$\mathbf{Z}(t, \vec{x}) = \bar{\mathbf{Z}}(t) + \delta\mathbf{Z}(\vec{x}), \quad (134)$$

sendo $\bar{\mathbf{Z}}(t) \gg \delta\mathbf{Z}(\vec{x})$ para garantir que as perturbações sejam pequenas. Assim, nota-se que a quantidade $\bar{\mathbf{Z}}(t)$ possui apenas variação temporal, enquanto que sua perturbação espacial é estática (BAUMANN, 2012).

Uma vez que as quantidades de interesse são a métrica $g_{\mu\nu}$ e o tensor energia momento $T^{\mu\nu}$, deve-se separá-las em uma parte não perturbada e outra perturbada:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad T^{\mu\nu} = \bar{T}^{\mu\nu} + \delta T^{\mu\nu}. \quad (135)$$

Como as perturbações são muito pequenas, é possível expandir as equações de Einstein à primeira ordem nessas perturbações e obter um conjunto soluções não-lineares de grande acurácia que as descrevem (GORBUNOV, 2011), portanto

$$\bar{G}_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu} = \kappa^2(\bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}), \quad (136)$$

assim, apenas a parte perturbada da equação (136) é

$$\delta G_{\mu\nu} = \kappa^2 \delta T_{\mu\nu}. \quad (137)$$

O propósito agora será encontrar uma forma explícita para as equações de Einstein linearizadas e para a perturbação da equação covariante de conservação de energia $\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0$, para posteriormente construir quantidades mensuráveis e comparáveis com os dados obtidos por sondas como a Planck, WMAP e COBE (PLANCK-COLLABORATION, 2018; HINSHAW; ET AL, 2012; WRIGHT, 1996). Para tanto será adotado durante todo este capítulo o tempo conformal, $d\eta$, e não mais o tempo cósmico dt , de forma que $dt = a(\eta)d\eta$. Em coordenadas conformais a métrica espacialmente plana é

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - dx^i dx^i] = a^2(\eta) \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (138)$$

com $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ sendo a pseudo métrica Minkowski.

4.1 ESCOLHA DO GAUGE

Como foi especificado na equação (134), a quantidade $\delta\mathbf{Z}$ é tida como a diferença entre a quantidade \mathbf{Z} , definida num espaço-tempo perturbado, e a quantidade $\bar{\mathbf{Z}}$ que é definida num espaço-tempo não perturbado. Para tornar significativa a comparação dessas quantidades é necessário criar um mapeamento entre os pontos do espaço-tempo perturbado e do não perturbado. A escolha desse mapeamento é a liberdade de gauge que a teoria possui, então fixar o gauge leva a arbitrariedades no valor da perturbação da quantidade

\mathbf{Z} em um ponto dado do espaço-tempo¹ (GORBUNOV, 2011).

Com o intuito de fixar o gauge, o espaço-tempo será fatiado em duas partes, a primeira fatia é a hipersuperfície tipo-espaço ($t = \text{constante}$), a segunda fatia, que é ortogonal a primeira, é a hipersuperfície tipo-tempo ($\mathbf{x} = \text{constante}$) (PETER, 2013). Observadores na hipersuperfície tipo-tempo (dispondo da métrica FLRW) definem a expansão do Universo como isotrópica, enquanto que observadores na hipersuperfície tipo-espaço definem um Universo homogêneo. Quando se passa a considerar perturbações cosmológicas, percebe-se que as superfícies tipo-espaço e tipo-tempo não são únicas e ainda a descrição de um espaço-tempo não homogêneo pode levar a liberdade na escolha de coordenadas, assim ao fixar o gauge da hipersuperfície tipo-tempo e tipo-espaço se está também definindo indiretamente as perturbações cosmológicas (GORBUNOV, 2011). De forma geral, para evitar ambiguidades na interpretação das perturbações advindas da escolha do gauge, precisa-se considerar tanto as perturbações na métrica quanto no campo de matéria, relacionadas por uma transformação de gauge.

O ponto de partida para perturbar as equações de Einstein é construir perturbações no tensor energia-momento, no escalar e no tensor de Ricci. Para tanto precisa-se inicialmente definir uma métrica que inclua uma pequena perturbação (BAUMANN, 2012):

$$ds^2 = a^2(\eta)\gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (139)$$

sendo $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$, em que $h_{\mu\nu}(x)$ é a perturbação na métrica².

Assim como a métrica, o tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$ também é escrito como a soma entre uma parte homogênea associada ao background e uma pequena perturbação:

$$T^\mu{}_\nu = \bar{T}^\mu{}_\nu(\eta) + \delta T^\mu{}_\nu(x). \quad (140)$$

Uma vez que o tensor energia-momento $\bar{T}^\mu{}_\nu$ e a métrica do *background* satisfaçam as equações de Einstein e a equação covariante de conservação, $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$, é possível encontrar um conjunto completo de soluções para as perturbações.

É necessário definir qual métrica irá levar do espaço dual ao usual (e vice-versa) os objetos que descrevem as pequenas perturbações. Esse papel é feito pela métrica de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$:

$$h^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\sigma}h_{\sigma\nu}. \quad (141)$$

Sendo $h_{\mu\nu}$ linear, o tensor inverso a $\gamma_{\sigma\nu}$ é dado por

¹A menos que se esteja trabalhando com quantidades invariantes por gauge.

²É importante ressaltar que a perturbação $h_{\mu\nu}(x)$ se espacialmente homogênea descreveria um Universo homogêneo e anisotrópico.

$$\gamma^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (142)$$

tal que $\gamma^{\mu\sigma}\gamma_{\sigma\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$.

Uma vez que o *background* não é invariante por transformações de Lorentz, mas é por translações espaciais e rotações (GORBUNOV, 2011), decompor-se-á os tensores quadridimensionais em uma parte espacial e outra temporal, como já argumentado anteriormente.

Será considerado então a transformação de difeomorfismo, uma vez que a Relatividade Geral é invariante por ela:

$$g^{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \nabla^{\mu}\xi^{\nu} + \nabla^{\nu}\xi^{\mu}. \quad (143)$$

Com isso pode-se obter uma forma linearizada para a transformação de gauge (143) a partir de

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) \quad \text{e} \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} (\eta^{\mu\nu} - \tilde{h}^{\mu\nu}), \quad (144)$$

que substituída em (143), fornece

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial^{\mu}\xi^{\nu} - \partial^{\nu}\xi^{\mu} - 2\eta^{\mu\nu}\xi^{\sigma}\frac{\partial_{\sigma}a}{a}. \quad (145)$$

Claramente as quantidades com til são quantidades que sofreram a transformação de gauge, ξ^{μ} é uma função arbitrária da posição e deve ser tratada como uma quantidade infinitesimal e de mesma ordem que $h^{\mu\nu}$. As quatro liberdades de gauge engendrada pela transformação (145) permitem impor

$$h_{\eta i} = 0, \quad (146)$$

que por si só já fixa 3 de seus 4 componentes (BARDEEN, 1980). Fisicamente, isso significa que se está fixando a escolha de um referencial. Resta agora fixar a liberdade de gauge residual, que é a invariância sobre transformações de gauge parametrizadas por uma função de coordenadas espaciais e temporal que deve obedecer:

$$\partial_{\eta}\xi_i = -\partial_i\xi_{\eta}. \quad (147)$$

Mesmo com isso, o gauge não está fixado completamente, pois ainda existe uma invariância sobre transformações dependentes de η , com

$$\xi_i = \xi_i(\bar{x}) \quad \text{e} \quad \xi_\eta = 0. \quad (148)$$

No entanto essa liberdade residual poderá ser fixada em momento oportuno.

Como a métrica do *background* é invariante sobre translações espaciais, é conveniente realizar a transformada de Fourier

$$\eta_{\mu\nu}(\eta, \vec{x}) = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \eta_{\mu\nu}(\vec{k}), \quad (149)$$

e também fazer o mesmo para as quantidades $\delta\rho$, δp e v_i . Sendo $\partial_i \leftrightarrow ik_i$, no qual \vec{k} é o momento conformal e o momento físico $q(\eta)$ dependente do tempo conformal é

$$\vec{q}(\eta) = \frac{\vec{k}}{a(\eta)}, \quad (150)$$

nesse caso o *background* é invariante também por rotações espaciais, porém escolher um modo definido do momento conformal \vec{k} explicitamente quebra essa simetria. Com isso permanece a invariância sob rotações em torno do eixo \vec{k} , sendo o grupo de simetria $SO(2)$, e então todo 3-tensor pode ser decomposto numa representação irredutível de $SO(2)$, que acabam por ser tensores de helicidade definida (GORBUNOV, 2011).

Um objeto que não se transforma sob rotações em torno de \vec{k} possui helicidade 1 (combinação linear da helicidade +1 e -1), por sua vez um tensor simétrico transverso sem traço h_{ij}^{TT} possui helicidade 2. A transversalidade e a falta de traço significam que

$$h_{ii}^{TT} = 0, \quad k_i h_{ij}^{TT} = k_j h_{ij}^{TT} = 0. \quad (151)$$

Uma vez que a equação de Einstein linearizada e a equação covariante de conservação de energia envolvem apenas operações do tipo ∂_j e derivadas temporais, essas equações podem ser separadas em conjuntos diferentes para perturbações cosmológicas de helicidade definida (GORBUNOV, 2011). Então tem-se perturbações tensoriais (helicidade 2), vetoriais (helicidade 1) e escalares (helicidade 0), as quais evoluem independentemente.

Compreender o comportamento e a evolução dessas perturbações é a tarefa principal de uma teoria de perturbações linearizadas, para tanto é necessários construir equações diferenciais que ditam a dinâmica das mesmas. O primeiro passo em direção a obtenção dessas equações é fixar uma métrica genericamente perturbada (LESGOURGUES, 2006), como

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\
&= -a^2(1 + 2\Phi)d\eta^2 + 2a^2 B_i dx^i d\eta + a^2 [(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + E_{ij}] dx^i dx^j, \quad (152)
\end{aligned}$$

em que $B_i = ik_i Z + Z_i^T$, $E_{ij} = E^S + E^V + h_{ij}^{TT}$, com $E^S = -2K_i k_j E$ e $E^V = i(k_i W_j^T + k_j W_i^T)$. Com isso a decomposição da perturbação métrica é (LESGOURGUES, 2006; MUKHANOV, 1992; SASAKI, 2012)

$$h_{\eta\eta} = 2\Phi \quad (153)$$

$$h_{\eta i} = ik_i Z + Z_i^T \quad (154)$$

$$h_{ij} = -2\Psi\delta_{ij} - 2k_i k_j E + i(k_i W_j^T + k_j W_i^T) + h_{ij}^{TT} \quad (155)$$

com Φ , Z , Ψ , E escalares, Z_i^T e W_i^T vetores transversos e h_{ij}^{TT} sendo um tensor transverso sem traço. Como foi escolhido $h_{\eta i} = 0$, chega-se a

$$Z = 0 \quad \text{e} \quad Z_i^T = 0. \quad (156)$$

Por sua vez, a velocidade v_i também pode ser decomposta em uma parte transversal e a divergência de uma velocidade potencial v , da seguinte forma

$$v_i = V_i^T + ik_i v. \quad (157)$$

Com isso são obtidos três conjuntos de equações independentes para os modos tensoriais (h_{ij}^{TT}), vetoriais (W_i^T e V_i^T) e escalares (Φ , Ψ , E , v , $\delta\rho$ e δp), respectivamente. A representação da condição de ortogonalidade em coordenadas é

$$\partial^i W_i^T = 0, \quad \partial^i V_i^T = 0. \quad (158)$$

Por último, o tensor simétrico h_{ij} tem 6 componentes independentes e sua decomposição (155) também: 1 para Ψ , 1 para E , 2 para W_i^T e 2 para h_{ij}^{TT} .

4.2 LINEARIZAÇÃO DO TENSOR ENERGIA-MOMENTO

Durante o período inflacionário, a energia do campo do inflaton é dominante, isso acopla as perturbações do campo do inflaton às perturbações da métrica descritas pelas equações de Einstein (MUKHANOV, 1992; SASAKI, 2012). No caso de um fluido ideal, o tensor energia momento é dado por

$$T^\mu{}_\nu = (p + \rho)u^\mu u_\nu - \delta^\mu_\nu p, \quad (159)$$

sendo $p = \bar{p} + \delta p$ e $\rho = \bar{\rho} + \delta \rho$, em que \bar{p} e $\bar{\rho}$ são quantidades não perturbadas, e δp e $\delta \rho$ são pequenas perturbações na pressão e na densidade de energia, respectivamente. Por sua vez a quadri-velocidade, u , também contém uma parte não perturbada, a qual apenas a componente temporal é diferente de zero, e uma parte perturbada, ou seja (GORBUNOV, 2011)

$$u^\mu = \bar{u}^\mu + \delta u, \quad (160)$$

$$u^\eta = a^{-1}(1 + \delta u^\eta), \quad (161)$$

$$u^i = a^{-1}v^i. \quad (162)$$

Sendo δu^η e v^i perturbações lineares representando a quadri-velocidade e a velocidade física do fluido, respectivamente, então de acordo com a definição tem-se

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \equiv \frac{dx^i}{ad\eta}. \quad (163)$$

$$v^i = \frac{\delta l^i}{a\delta\eta} = \frac{\delta adx^i}{ad\eta}, \quad (164)$$

no qual $\delta l^i = adx^i$ é o elemento físico de linha. Ainda, a identidade é satisfeita

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1. \quad (165)$$

Utilizando $g_{\eta\eta} = (1 + h_{\eta\eta})a^2$, $u^\eta u^\eta = a^{-2}(1 + \delta u^\eta)^2$ e $u^i u^i = v^i v^i$, é possível incluir termos de perturbação na igualdade (165), a qual toma a forma

$$\begin{aligned} (1 + h_{\eta\eta})(1 + \delta u^\eta)^2 &= 1, \\ 1 + 2\delta u^\eta + (\delta u^\eta)^2 + h_{\eta\eta} + h_{\eta\eta}(\delta u^\eta + (\delta u^\eta)^2) &= 1. \end{aligned} \quad (166)$$

Excluindo termos de ordem superior a 1 na perturbação, a equação acima leva a

$$\delta u^\eta = -\frac{1}{2}h_{\eta\eta}. \quad (167)$$

Como $u_\mu = \eta_{\mu\nu}u^\nu$, $u_\eta = \eta_{\eta\eta}u^\eta = a^2(1 + h_{\eta\eta})u^\eta$ e $u_\eta = a^{-1}(1 + \delta u^\eta)$, chega-se a

$$u_\eta = a \left(1 + \frac{1}{2} h_{\eta\eta} \right). \quad (168)$$

Com isso é possível linearizar o tensor energia momento $T^{\mu\nu}$. Separando $T^{\mu\nu}$ em uma parte não perturbada e outra perturbada, $T^{\mu\nu} = \bar{T}^{\mu\nu} + \delta T^{\mu\nu}$, tem-se para a componente temporal (BOJOWALD, 2011)

$$\begin{aligned} T^\eta_\eta &= \bar{T}^\eta_\eta + \delta T^\eta_\eta, \\ &= \rho + \delta\rho, \end{aligned} \quad (169)$$

então, extraindo apenas a parte perturbada:

$$\delta T^\eta_\eta = \delta\rho. \quad (170)$$

Por sua vez termo T^η_i fornece

$$\begin{aligned} T^\eta_i &= \bar{T}^\eta_i + \delta T^\eta_i, \\ &= -(\rho v_i + \delta\rho v_i + p v_i + \delta p v_i + \rho \delta u^\eta v_i + p \delta u^\eta v_i). \end{aligned} \quad (171)$$

Como v_i é perturbação de primeira ordem, termos como $\delta\rho v_i$, $\delta p v_i$ e $\delta u^\eta v_i$ serão descartados. Com isso a perturbação de primeira ordem restante é

$$\delta T^\eta_i = -(\rho + p)v_i. \quad (172)$$

Por último, resta encontrar a perturbação sobre a parte espaço-espaço do tensor energia momento:

$$\begin{aligned} T^i_j &= \bar{T}^i_j + \delta T^i_j, \\ &= -\delta^i_j (p + \delta p) + \Sigma^i_j, \end{aligned} \quad (173)$$

em que Σ^i_j é um tensor de stress anisotrópico invariante por transformações de gauge, com isso

$$\delta T^i_j = -\delta^i_j \delta p. \quad (174)$$

Após a determinação das componentes da perturbação do tensor energia-momento, é possível construir uma equação de conservação covariante linearizada, $\delta(\nabla_\mu T^\mu_\nu) = 0$, da seguinte forma (WEINBERG, 2008)

$$\delta[\nabla_\mu(T^\mu_\eta + T^\mu_i)] = 0, \quad (175)$$

com

$$\delta(\nabla_\mu T^\mu_\eta) = \delta(\nabla_\eta T^\eta_\eta) + \delta(\nabla_i T^i_\eta), \quad (176)$$

$$= \partial_\eta \delta\rho + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho + \delta p) + (\rho + p)\left(\partial_i v_i - \frac{1}{2}h'\right) = 0, \quad (177)$$

e por sua vez

$$\delta(\nabla_\mu T^\mu_i) = \delta(\nabla_\eta T^\eta_i) + \delta(\nabla_j T^j_i), \quad (178)$$

$$= \partial_i \delta p + (\rho + p)\left(4\frac{a'}{a}v_i + \frac{1}{2}\partial_i h_{\eta\eta}\right) + [v_i(\rho + p)]' = 0. \quad (179)$$

Com isso as equações advindas da divergência do tensor energia-momento perturbado são (GORBUNOV, 2011)

$$\delta\rho' + 3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta p) + (\rho + p)\left(\partial_i v_i - \frac{1}{2}h'\right) = 0, \quad (180)$$

$$\partial_i \delta p + (\rho + p)\left(4\mathcal{H}v_i + \frac{1}{2}\partial_i h_{\eta\eta}\right) + [v_i(\rho + p)]' = 0, \quad (181)$$

em que $h = h_{ii}$, $l \equiv \frac{\partial}{\partial\eta}$ e $\mathcal{H} = a'/a$.

4.3 LINEARIZAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

Um caráter fundamental das perturbações lineares de primeira ordem para as equações de Einstein é que seus componentes escalares, vetoriais e tensoriais não são acoplados, isso permite que eles possam ser tratados separadamente (LESGOURGUES, 2006). Por exemplo, considere um tensor simétrico qualquer de rank-2 dado por

$$A_{ij} = \underbrace{B\delta_{ij}}_{\text{escalar}} + \underbrace{\partial_{[i}\partial_{j]}C}_{\text{vetor}} + \underbrace{\partial_{(i}D_{j)}}_{\text{vetor}} + \underbrace{E_{ij}}_{\text{tensor}},$$

assim, as perturbações escalares, vetoriais e tensoriais podem ser trabalhadas de maneira independente. Nesta seção será estudada as decomposições no setor de helicidade para as perturbações cosmológicas da equação de Einstein, iniciando por perturbações ten-

soriais, as quais podem estar associadas à ondas gravitacionais primordiais da inflação, passando por uma rápida abordagem por perturbações vetoriais, uma vez que essas não são produzidas no processo inflacionário e terminando com perturbações escalares que são o ponto central deste capítulo por desempenhar papel fundamental na formação de estruturas observadas hoje.

4.3.1 Perturbações tensoriais (helicidade 2)

Se durante a inflação cósmica o único campo significativo é o inflaton, cuja perturbação de primeira ordem do tensor de stress anisotrópico é nula, as perturbações se tornam puramente gravitacionais, representando ondas gravitacionais sem fontes propagando pelo Universo em expansão. Logo deve-se construir uma equação para descrever as perturbações tensoriais durante esse período (LESGOURGUES, 2006; BARDEEN, 1980; LYTH, 2009). Inicialmente é necessário se ater que perturbações tensoriais são descritas pelo tensor transversal sem traço h_{ij}^{TT} . Considerando $h_{\eta\eta} = 0$ e $h_{ij}^{TT} = h_{ij}$, os termos com componentes temporais das equações de Einstein perturbadas são anulados:

$$\delta G_{\eta\eta} = 0, \quad \delta G^{\eta}_{\ i} = 0, \quad (182)$$

pois $h_{\eta\eta} = 0$, $\partial^i h_{ij}^{TT} = \partial^j h_{ij}^{TT} = 0$, que é a condição de transversalidade, além disso $h_{ii}^{TT} = h_{jj}^{TT} = 0$ garante que o tensor não possua traço. Assim, a componente $\delta G^i_{\ j}$ fornece (GORBUNOV, 2011)

$$\delta G_{ij} = \frac{1}{2a^2} \left(\partial_{\eta}^2 h_{ij}^{TT} + 2\frac{a'}{a} \partial_{\eta} h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} \right). \quad (183)$$

Portanto a equação para perturbações tensoriais é

$$\partial_{\eta}^2 h_{ij}^{TT} + 2\frac{a'}{a} \partial_{\eta} h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} = 0. \quad (184)$$

Decompondo o tensor h_{ij}^{TT} em bases de helicidade 2, é obtido

$$h_{ij}^{TT} = \sum_A e_{ij}^{(A)} h^{(A)}, \quad (185)$$

sendo que A indica as polarizações $+$, \times (GORBUNOV, 2011). É possível ver que cada $h^{(A)}$ obedece:

$$\partial_\eta^2 h_{ij}^{(A)} + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta h_{ij}^{(A)} - \Delta h_{ij}^{(A)} = 0, \quad (186)$$

assim a equação (186) se reduz a

$$\square^{(4)} h^{(A)} = 0, \quad (187)$$

em que $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \equiv \square^{(4)}$. Essa equação descreve a propagação de ondas gravitacionais de polarização dupla com a velocidade da luz (MUKHANOV, 1992).

4.3.2 Perturbações vetoriais (helicidade 1)

Como dito, perturbações vetoriais não são produzidas durante a inflação, ainda que fossem deveriam decair muito rapidamente devido a expansão do Universo (BARDEEN, 1980; GORBUNOV, 2011). Entretanto é interessante uma rápida discussão sobre essas perturbações, cujas equações linearizadas podem ser obtidas a partir da fixação de $h_{\eta\eta} = 0$ e $\delta\rho = \delta p = 0$, restando apenas o seguinte componente do tensor energia-momento

$$\delta T_i^\eta = -(\rho + p)v_i, \quad (188)$$

em que v_i é a velocidade vetorial que obedece a condição de transversalidade (158). Com isso, a equação de conservação linearizada (181) fornece diretamente

$$\partial_\eta [(\rho + p)v_i] + 4\mathcal{H}(\rho + p)v_i = 0, \quad (189)$$

e ainda a equação (180) é identicamente satisfeita. O Componente (ηi) da equação de Einstein Linearizada, por sua vez, é dado por

$$a^2\delta G_i^\eta = \frac{1}{2}\partial^i h'_{ii} - \frac{1}{2}\partial^j h'_{ij} + \mathcal{H}\partial_i h_{\eta\eta}, \quad (190)$$

fixando $h_{ij} = \partial_i W_j + \partial_j W_i$, em que W_i também obedece a condição de transversalidade (158), chega-se a (GORBUNOV, 2011; UGGLA, 2011)

$$\begin{aligned}
a^2 \kappa^2 \delta T_i^\eta &= -\frac{1}{2} \partial_j \partial_\eta [\partial_i W_j + \partial_j W_i], \\
a^2 \kappa^2 (\rho + p) v_i &= -\frac{1}{2} \partial_\eta \partial^j \partial_i W_j, \\
\kappa^2 a^2 (\rho + p) v_i &= \frac{1}{2} \partial_\eta \Delta W_i.
\end{aligned} \tag{191}$$

Enquanto que a componente (ij) toma a forma

$$\partial_\eta^2 W_i + 2\mathcal{H} \partial_\eta W_i = -2\kappa^2 a^2 (\rho + p) \Sigma_i, \tag{192}$$

porém essa equação não fornece nada novo comparado com o conjunto de equações anteriores. Já o componente $(\eta\eta)$ é satisfeito identicamente enquanto que a única equação de conservação não nula é dada por

$$\partial_\eta [(\rho + p)v_i] + 4\mathcal{H}(\rho + p)v_i + \Delta \Sigma_i, \tag{193}$$

em que Σ_i é o tensor de stress canônico linearizado.

Note que a solução para a equação (191) contém uma função arbitrária das coordenadas espaciais, $W_i = W_i(x)$, essa solução é um gauge puro e pode ser eliminada pela transformação (BAUMANN, 2012)

$$\xi_i = W_i, \quad \xi_\eta = 0, \tag{194}$$

que é consistente com $h_{\eta i} = 0$. Então, soluções que desaparecem existem na ausência de matéria, ou seja, para o campo gravitacional livre no espaço de Minkowski não há propagação de modos de helicidade 1 (GORBUNOV, 2011).

4.3.3 Perturbações Escalares (helicidade 0)

A partir de agora serão desenvolvidas as equações que guiam a evolução das perturbações escalares, uma vez que essas são de fundamental importância para modelos cosmológicos inflacionários.

A partir da métrica (152) é conveniente fazer uso da liberdade de gauge residual, representada por $\xi^\mu = (\xi^\eta, \xi^i)$, obedecendo a relação $\partial_\eta \xi_i + \partial_i \xi_\eta = 0$, na qual ξ_i é uma perturbação vetorial longitudinal dado por $\xi_i = -\partial_i \sigma(\eta, \vec{x})$, enquanto que $\xi_\eta = \partial_\eta \sigma$. A perturbação vetorial ξ^i pode ser separada em uma quantidade cujo gradiente é zero e outra cujo rotacional é zero, assim (LESGOURGUES, 2006; BAUMANN, 2012)

$$\xi^i = \vec{\xi}_{tr}^i - \nabla \sigma,$$

com $\vec{\xi}_{tr}^i$ sendo o vetor transverso, ou seja, é esta parte a responsável pelas perturbações vectoriais, enquanto que ξ^n e $\nabla\sigma$ estão associadas as perturbações escalares. Uma vez que a perturbação vectorial deve desaparecer com a expansão do Universo, não existe problemas em considerar $\vec{\xi}_{tr}^i = 0$, e ainda a liberdade de gauge permite escolher σ de forma a simplificar h_{ij} (GORBUNOV, 2011; BAUMANN, 2012). Portanto, sob essa transformação de gauge a componente espacial da perturbação da métrica se transforma como

$$\tilde{h}_{ij} = h_{ij} - 2\partial_i\partial_j\sigma - 2\frac{a'}{a}\delta_{ij}\sigma'. \quad (195)$$

Com isso as perturbações $\delta\rho$, δp não desaparecem e é possível fixar o gauge conhecido como *gauge conformal Newtoniano* (MUKHANOV, 2005), no qual

$$h_{\eta\eta} = 2\Phi, \quad (196)$$

$$h_{ij} = -2\Psi\delta_{ij}, \quad (197)$$

$$v_i = \partial_iv, \quad (198)$$

em que Φ e Ψ são conhecidos por potenciais de Bardeen (1980). Com isso a métrica das perturbações escalares (152) se reduz a simples forma

$$ds^2 = a^2(\eta) [(1 + 2\Phi)d\eta^2 - (1 + 2\Psi)d\vec{x}^2]. \quad (199)$$

Sendo Φ um potencial Newtoniano que está conformalmente relacionado ao componente $(\eta\eta)$ da métrica enquanto o Universo se expande (GORBUNOV, 2011).

Uma vez que a métrica perturbada foi definida, é possível encontrar as equações de Einstein perturbadas. Para tanto é necessário construir o escalar e o tensor de Ricci utilizando a conexão afim do espaço-tempo perturbado. A forma perturbada de $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ é dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho, \quad (200)$$

em que (WEINBERG, 2008)

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}\bar{g}^{\rho\sigma} [\partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu} - 2h_{\sigma\lambda}\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}]. \quad (201)$$

Fazendo uso da métrica (199) as componentes não nulas da conexão afim são

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\eta\eta}^{\eta} &= \mathcal{H} + \Phi', & \Gamma_{\eta k}^{\eta} &= \Phi_{,k}, \\
\Gamma_{\eta\eta}^i &= \Phi_{,i}, & \Gamma_{\eta j}^i &= \mathcal{H}\delta_j^i - \Psi'\delta_j^i, \\
\Gamma_{ij}^{\eta} &= \mathcal{H}\delta_{ij} - [2\mathcal{H}(\Phi + \Psi) + \Psi']\delta_{ij}, & \Gamma_{ka}^i &= -(\Psi_{,a}\delta_k^i + \Psi_k\delta_a^i) + \Psi_{,i}\delta_{ka}.
\end{aligned} \tag{202}$$

O tensor de Ricci, considerando as perturbações de primeira ordem, é dado por (LYTH, 2009)

$$\begin{aligned}
R_{\mu\sigma\nu}^{\rho} &= \bar{R}_{\mu\sigma\nu}^{\rho} + \delta R_{\mu\sigma\nu}^{\rho}, \\
&= \bar{R}_{\mu\sigma\nu}^{\rho} + \partial_{\sigma}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \partial_{\mu}\delta\Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} + \delta\Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} + \bar{\Gamma}_{\sigma\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\bar{\Gamma}_{\sigma\nu}^{\lambda} - \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda}.
\end{aligned} \tag{203}$$

Substituindo diretamente as componentes da conexão afim na forma acima, chega-se as seguintes componentes não nulas:

$$R_{\eta\eta} = -\mathcal{H}' + 3\Psi'' + \nabla^2\Psi + 3\mathcal{H}(\Psi' + \Phi'), \tag{204}$$

$$R_{\eta i} = 2\partial_i(\Psi + \mathcal{H}\Phi), \tag{205}$$

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\delta_{ij} + [-\Psi'' + \nabla^2\Psi + \mathcal{H}(5\Psi' + \Phi') - (2\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}^2)(\Psi + \Phi)]\delta_{ij} \\
&\quad + \partial_i\partial_j(\Psi + \Phi).
\end{aligned} \tag{206}$$

O escalar de curvatura, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + h^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu}$, é então (LYTH, 2009)

$$R = \frac{6}{a^2}(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) + \frac{2}{a^2}[-3\Psi'' + \nabla^2(2\Psi + \Phi) - 3\mathcal{H}(\Phi' + 3\Psi') - 6(\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}^2)\Phi] \tag{207}$$

Agora é necessário construir as perturbações no tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Separando a contribuição do background da perturbação de primeira ordem, tem-se

$$G_{\mu\nu} = \bar{G}_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu},$$

em que

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{g}^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}\bar{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\bar{g}^{\alpha\beta}\bar{R}_{\alpha\beta}. \tag{208}$$

Com isso, as componentes das equações de Einstein linearizadas são (LYTH, 2009; MUKHANOV, 1992; PETER, 2013; LESGOURGUES, 2006; BAUMANN, 2012)

$$\delta G^\eta_\eta = \frac{2}{a^2} (-\Delta\Psi + 3\mathcal{H}\Psi' - 3\mathcal{H}\Phi), \quad (209)$$

$$\delta G^m_i = \frac{2}{a^2} (-\partial_i\Psi' + \mathcal{H}\partial_i\Phi), \quad (210)$$

$$\delta G^i_j = \frac{1}{a^2} \partial^i \partial_j (\Phi + \Psi) - \frac{2}{a^2} \left[-\Psi'' + \frac{1}{2} \Delta(\Phi + \Psi) + \mathcal{H}(\Phi' - 2\Psi') + (4\mathcal{H} - 2\mathcal{H}') \Phi \right] \delta^i_j. \quad (211)$$

Uma vez que para um fluido perfeito Σ_{ij} é nulo, é necessário zerar o termo longitudinal proporcional a $\partial^i \partial_j$, assim

$$\Psi = -\Phi, \quad (212)$$

e com isso as equações de Einstein tomam a forma

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho_{tot}, \quad (213)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2 [(\rho + p)v]_{tot}, \quad (214)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p_{tot}. \quad (215)$$

Da mesma maneira como feito na obtenção das equações (180) e (181), é possível obter diretamente as equações de conservação (GORBUNOV, 2011; MUKHANOV, 1992)

$$\delta\rho'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) + (\rho_\lambda + p_\lambda)(\Delta v_\lambda - 3\Phi') = 0, \quad (216)$$

$$\delta p_\lambda + (\rho_\lambda + p_\lambda) \left(4\frac{a'}{a}v_\lambda + \Phi\right) + [v_\lambda(\rho_\lambda + p_\lambda)]' = 0, \quad (217)$$

em que λ indica os componentes do meio cósmico que possam existir além do campo do inflaton. Essas últimas cinco equações fornecem um sistema completo para uma aproximação da perturbação escalar num fluido perfeito no cenário cosmológico. Entretanto cabe aqui uma observação pertinente: a relação $\Psi = -\Phi$ só é válida para fluidos ideais, no caso de campos espinoriais essa relação não é válida (vide seção 7.2).

Para o que segue é conveniente usar perturbações relativas à densidade de energia, $\delta = \frac{\delta\rho}{\rho}$, e com isso

$$\delta\rho = \rho\delta, \quad (218)$$

$$\delta p = u_s^2\rho\delta, \quad (219)$$

$$p = \omega\rho, \quad (220)$$

em que $u_s^2 = \frac{\delta p}{\delta\rho}$. Assim as equações linearizadas ficam

$$\delta' + 3\mathcal{H}(u_s^2 - \omega)\delta - (1 + \omega)k^2v = 3(1 + \omega)\Phi', \quad (221)$$

$$u_s^2\delta + \mathcal{H}v(1 - 3\omega)(1 + \omega) + [v(1 + \omega)]' = -(1 + \omega)\Phi, \quad (222)$$

aqui é considerado que u_s^2 e ω possam depender do tempo e que o quadrado da velocidade do som, u_s^2 , pode não coincidir com o parâmetro ω (KOLB, 1990).

4.4 MODOS ADIABÁTICOS EM REGIME DE SUPERHORIZONTES

O Universo pode ser dividido em regimes de superhorizontes, que corresponde a dividir o Universo em “Universos” homogêneos e independentes, cujo tamanho dos superhorizontes evolui independentemente e são caracterizados por determinados parâmetros. Por sua vez, modos adiabáticos garantem que a composição desses “Universos” seja a mesma, diferindo apenas por densidade de energia e fator de escala (WEINBERG, 2003).

De a gora em diante será considerado um Universo permeado por múltiplos componentes materiais, assim as equações conterão o subscrito λ , indicando todos os possíveis componentes de matéria. Esse quadro sugere que no modo adiabático, as perturbações de cada componente do Universo obedeça o seguinte ansatz (GORBUNOV, 2011):

$$\delta\rho_\lambda = \rho'_\lambda \cdot \epsilon, \quad (223)$$

$$\delta p_\lambda = p_\lambda \cdot \epsilon, \quad (224)$$

em que $\epsilon(\vec{x}, \eta)$ é uma função comum a todos os componentes que dependem do tempo e variam lentamente no espaço. Essa relação é válida também fora do equilíbrio térmico, no qual são vistas como a definição do modo adiabático no gauge Newtoniano conformal (WEINBERG, 2003). Se há equilíbrio térmico local, então a temperatura e também a densidade de energia e pressão gradualmente mudam no espaço, com isso para uma composição homogênea chega-se

$$\delta\rho_\lambda = \frac{\partial\rho_\lambda}{\partial T}\delta T(\vec{x}, \eta), \quad (225)$$

$$\delta p_\lambda = \frac{\partial p_\lambda}{\partial T}\delta T(\vec{x}, \eta), \quad (226)$$

que nada mais é do que a equação (223) e (224) com $\epsilon(\vec{x}, \eta) = \frac{\delta T(\vec{x}, \eta)}{T}$, em que T é a temperatura.

Uma vez fixada a forma das perturbações na energia e na pressão, pode-se construir uma equação para a conservação de energia num regime adiabático. Para tanto, perceba que a equação (214) pode ser vista como a relação que determina a velocidade potencial v_λ para cada componente, enquanto que a velocidade potencial entra na equação (216), na combinação $k^2 v_\lambda$. Por sua vez, o regime de superhorizonte é obtido no limite formal $k \rightarrow 0$. Com tudo isso os valores de v_λ serão irrelevantes para resolver as equações (214)-(216). Pode-se agora considerar que a equação de conservação (216) deve ser assegurada para cada componente λ do meio cósmico (GORBUNOV, 2011). Como

$$\rho' = -3\mathcal{H}(\rho + p) \quad (227)$$

é válida para qualquer componente, a equação de conservação (216) se reduz no limite $k \rightarrow 0$ a uma única e mesma equação para todos os λ , assim

$$(\rho'_\lambda \epsilon)' + 3\mathcal{H}(\rho'_\lambda + p'_\lambda)\epsilon - 3(\rho + p)\Phi' = 0, \quad (228)$$

$$-3(\mathcal{H}\epsilon)'(\rho_\lambda + p_\lambda) - 3(\rho_\lambda + p_\lambda)\Phi' = 0, \quad (229)$$

$$\Phi' = -(\mathcal{H}\epsilon), \quad (230)$$

então

$$\Phi = -\mathcal{H}\epsilon - \zeta(\vec{k}). \quad (231)$$

Claramente ζ surge como uma constante de integração no tempo η , podendo ser função do momento \vec{k} . Usando novamente (223) e $\rho' = -3\frac{a'}{a}(\rho - p)$, chega-se a

$$-3\mathcal{H}\epsilon = \frac{\delta\rho_{tot}}{(\rho_{tot} - p_{tot})}, \quad (232)$$

então

$$\zeta = -\Phi + \frac{\delta\rho_{tot}}{3(\rho_{tot} - p_{tot})}. \quad (233)$$

O lado direito dessa relação é independente do tempo para o modo adiabático no superhorizonte, determinando-os completamente. De maneira geral nota-se que a quantidade

$$\zeta_\lambda = -\Phi + \frac{\delta\rho_\lambda}{3(\rho_\lambda - p_\lambda)}, \quad (234)$$

é independente do tempo para qualquer componente λ no regime de superhorizonte, sendo essa propriedade inerente tanto a modos adiabáticos quanto a isocurvas (LYTH, 2009). Ao invés do parâmetro ζ muitas vezes se usa

$$\mathcal{R} = -\Phi + \mathcal{H}v_{tot}, \quad (235)$$

em que

$$v_{tot} = \frac{\sum(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda}{\sum(\rho_\lambda + p_\lambda)} \equiv \frac{[(\rho + p)v]_{tot}}{[(\rho + p)]_{tot}}. \quad (236)$$

A perturbação de curvatura \mathcal{R} pode ser obtida a partir do escalar de Ricci em 3-D. Em um gauge arbitrário, será trabalhada a curvatura intrínseca da superfície em tempo constante, assim a métrica induzida γ_{ij} nessa superfície é puramente espacial (BAUMANN, 2012) e pode ser escrita como

$$\gamma_{ij} = a^2[(1 - 2\Phi)\delta_{ij} + 2E_{ij}], \quad (237)$$

em que $E_{ij} \equiv \partial_{(i}\partial_{j)}E$ para a permutação escalar. A conexão correspondente a γ_{ij} é

$${}^{(3)}\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\partial_j\gamma_{kl} + \partial_k\gamma_{jl} - \partial_l\gamma_{jk}), \quad (238)$$

em que o inverso da métrica induzida é

$$\gamma^{ij} = a^{-2}[(1 + 2\phi)\delta^{ij} - 2E^{ij}], \quad (239)$$

$$= a^{-2}\delta^{ij} + \mathcal{O}(i). \quad (240)$$

Uma vez que as derivadas são de primeira ordem, apenas termos de ordem zero da métrica

são necessários, assim

$${}^{(3)}\Gamma_{jk}^i = \delta^{il} \partial_j (-\Phi \delta_{kl} + E_{kl}) + \delta^{il} \partial_k (-\Phi \delta_{jl} + E_{jl}) - \delta^{il} \partial_l (-\Phi \delta_{jk} + E_{jk}). \quad (241)$$

A curvatura intrínseca é associada ao escalar de Ricci (BAUMANN, 2012; LESGOURGUES, 2006), dado por:

$$\mathcal{R}_{(3)} = \gamma^{ik} \partial_l^{(3)} \Gamma_{ik}^l - \gamma^{ik} \partial_k^{(3)} \Gamma_{il}^l + \gamma^{ik(3)} \Gamma_{ik}^{l(3)} \Gamma_{lm}^m - \gamma^{ik(3)} \Gamma_{il}^{m(3)} \Gamma_{km}^l, \quad (242)$$

considerando apenas os termos de primeira ordem

$$a^2 \mathcal{R}_{(3)} = \delta^{ik} \partial_l^{(3)} \Gamma_{ik}^l - \delta^{ik} \partial_k^{(3)} \Gamma_{il}^l, \quad (243)$$

sendo

$$\begin{aligned} \delta^{ik(3)} \Gamma_{ik}^l &= \delta^{ik} [-2\delta_{i(j}\partial_{k)}\Phi + \delta_i^l \delta_{jk} \partial_l \Phi + 2\partial_{(j} E_{k)}^i - \delta_i^j \partial^l E_{jk}] \\ &= -2\delta^{kl} \partial_k \Phi + 3\delta^{jl} \partial_j \Phi + 2\partial_j E^{il} - \delta^{jl} \delta_j (\delta^{ik} E_{ik}) \\ &= \delta^{kl} \partial_k \Phi + 2\partial_k E^{kl} \end{aligned} \quad (244)$$

e

$$\begin{aligned} {}^{(3)}\Gamma_{il}^l &= -\delta_i^l \partial_i \Phi - \delta_i^l \partial_l \Phi + \partial_i \Phi + \partial_l E_i^l + \partial_i E_l^l - \partial_l E_i^l \\ &= -3\partial_i \Phi, \end{aligned} \quad (245)$$

finalmente

$$\begin{aligned} a^2 \mathcal{R}_{(3)} &= \partial_l (\delta^{kl} \partial_k \Phi + 2\partial_k E^{kl}) + 3\delta^{ik} \partial_k \partial_i \Phi \\ &= \nabla^2 \Phi + 2\partial_i \partial_j E^{ij} + 3\nabla^2 \Phi \\ &= 4\nabla^2 \Phi + 2\partial_i \partial_j E^{ij}. \end{aligned} \quad (246)$$

Note que essa equação desaparece para perturbações vetoriais e tensoriais, já que $\Phi = 0$ e $\partial_i \partial_j E^{ij} = 0$. Já para perturbações escalares, como $E_{ij} = \partial_{(i} \partial_{j)} E$, chega-se a

$$\begin{aligned}
\partial_i \partial_j E^{ij} &= \delta^{il} \delta^{jm} \partial_i \partial_j \left(\partial_l \partial_m E - \frac{1}{3} \delta_{lm} \nabla^2 E \right) \\
&= \nabla^2 \nabla^2 E - \frac{1}{3} \nabla^2 \nabla^2 E \\
&= \frac{2}{3} \nabla^2 \nabla^2 E.
\end{aligned} \tag{247}$$

Dessa maneira, $a^2 \mathcal{R}_{(3)}$ toma a seguinte forma

$$a^2 \mathcal{R}_{(3)} = 4 \nabla^2 \left(\Phi + \frac{1}{3} \nabla^2 E \right). \tag{248}$$

Agora $\Phi + \frac{1}{3} \nabla^2 E$ será definido como perturbação de curvatura, enquanto que a perturbação de curvatura comóvel \mathcal{R} é tomada no gauge comóvel ($B_i = 0 = q^i$). Considerando as duas quantidades B e v , as quais desaparecem no gauge comóvel (LESGOURGUES, 2006), pode-se adicionar uma combinação linear das mesmas à $\Phi + \frac{1}{3} \nabla^2 E$ para formar uma combinação invariante por gauge:

$$\mathcal{R} = -\Phi - \frac{1}{3} \nabla^2 E + \mathcal{H}(B + v), \tag{249}$$

como no gauge Newtoniano $B = 0 = E$, tem-se

$$\mathcal{R} = -\Phi + \mathcal{H}v_{tot}. \tag{250}$$

É pertinente discutir o significado físico de ζ e \mathcal{R} . Suas definições no gauge $h_{\eta i} = 0$ para um meio arbitrário, não necessariamente um fluido ideal, são (GORBUNOV, 2011)

$$\zeta = \Psi + \frac{\delta \rho_{tot}}{3(\rho_{tot} + p_{tot})}, \tag{251}$$

$$\mathcal{R} = \Psi + \mathcal{H}v_{tot}, \tag{252}$$

para o caso do fluido ideal a igualdade $\Psi = -\Phi$ é verdadeira. Ainda assumindo $h_{\eta i} = 0$, será considerado um referencial em que a densidade de energia é homogênea no espaço em um dado momento do tempo, ou seja, um referencial em que uma hipersuperfície com tempos iguais são hipersuperfícies de densidade de energia constante. Essa escolha de gauge diz que a direção no espaço-tempo ao longo da coordenada η coincide em todo lugar com a normal à superfície de densidade de energia constante (MUKHANOV, 1992). A troca de coordenada do referencial conformal Newtoniano para o referencial da densidade constante de energia é

$$\tilde{\chi}^\mu = \chi^\mu + \zeta^\mu, \quad (253)$$

em que $\zeta^\mu(x^\nu)$ são pequenos parâmetros que obedecem: $\partial_\eta \xi_i + \partial_i \xi_\eta = 0$. Sob essa transformação, $h^{\mu\nu}(x)$ se transforma em $\tilde{h}^{\mu\nu}(x)$ por

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu - 2\eta^{\mu\nu} \xi^\lambda \frac{\partial_\lambda a}{a}. \quad (254)$$

Segue da lei de transformação do tensor energia-momento que a transformação linearizada da densidade de energia é

$$\left(\tilde{\rho} + \tilde{\delta\rho} \right) (\tilde{x}) = (\rho + \delta\rho) (x), \quad (255)$$

ou seja

$$\tilde{\delta\rho}(x) = \delta\rho(x) - \rho' \xi^\eta. \quad (256)$$

Vê-se que a transformação para o referencial da densidade de energia constante, em que $\tilde{\delta\rho}_{tot} = 0$, é dado por

$$\xi^\eta = \frac{\delta\rho_{tot}}{\rho_{tot}}. \quad (257)$$

Agora, comparando a lei de transformação da métrica $(h \rightarrow \tilde{h})$ para h_{ij} é encontrado que a transformação de gauge induz a $E(x)$ diferente de zero e, o que é mais importante, transforma Ψ em

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &= \Psi - \frac{a'}{a} \xi^\eta, \\ &= \Psi + \frac{\delta\rho_{tot}}{3(\rho + p)_{tot}}, \end{aligned} \quad (258)$$

em que se utilizou a lei de conservação $\rho' = -3\frac{a'}{a}(\rho + p)$. Percebe-se da equação (258) que $\zeta(x)$ coincide com o potencial gravitacional $\tilde{\Psi}$ em superfícies de densidade de energia constante ($\delta\rho_{tot} = 0$). Como é sabido, a métrica espacial para a escala de curvatura em três dimensões é dada por

$$dl^2 = a^2 (\delta_{ij} - h_{ij}) dx^i dx^j = \left[\delta_{ij} (1 + 2\tilde{\Psi}) - \partial_i \partial_j E \right] dx^i dx^j, \quad (259)$$

com isso chega-se a

$$R^{(3)} = -a^2 (\partial^i \partial^j h_{ij} - \Delta h) = -\frac{4}{a^2} \Delta \tilde{\Psi}, \quad (260)$$

então, o significado físico de ζ é que ele determina a curvatura espacial da hipersuperfície de densidade de energia constante, sendo esta superfície dada por $R^{(3)} = -\frac{4}{a^2} \Delta \zeta$ (BARDEEN, 1980). O significado físico de \mathcal{R} por sua vez, determina a curvatura de hipersuperfícies de *tempo-igual* no referencial comóvel, ou seja, hipersuperfícies $v_{tot} = 0$ (PETER COLES, 2002), assim

$$R^{(3)} = -\frac{4}{a^2} \Delta \mathcal{R}, \quad (261)$$

essa também é uma propriedade geral das perturbações escalares (UGGLA, 2011). As relações $R^{(3)} = -\frac{4}{a^2} \Delta \mathcal{R}$ e $R^{(3)} = -\frac{4}{a^2} \Delta \zeta$ não se referem ao gauge Newtoniano conformal, mas sugere que existam invariantes de gauge que se reduzem a ζ e \mathcal{R} em um gauge Newtoniano conformal.

Por fim é possível encontrar equações que determinam a evolução das perturbações em um Universo hidrodinâmico. Utilizando a relação (219) em conjunto com as equações (214) e (215), chega-se a

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + u_s^2)\Phi' - u_s^2 \nabla^2 \Phi + [2\mathcal{H}' + (1 + 3u_s^2)\mathcal{H}] \Phi = 0 \quad (262)$$

Segundo Mukhanov (1992) é possível escrever essa equação de uma forma mais simples e útil através da troca de variáveis

$$\Phi = 4\pi G \sqrt{\rho_0 + p_0} u, \quad (263)$$

com isso a equação (262) pode ser simplificada para

$$u'' - u_s^2 \nabla^2 u - \frac{\theta''}{\theta} u = 0, \quad (264)$$

sendo

$$\theta = \left(\frac{\mathcal{H}}{a}\right) \left[\frac{2}{3}(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')\right]^2 = \frac{1}{a} \left(\frac{\rho}{\rho + p_0}\right). \quad (265)$$

As equações (262) e (264) possuem uma fundamental importância para a teoria de perturbações linearizadas, uma vez que determinam a evolução das perturbações em um Universo hidrodinâmico.

4.5 PERTURBAÇÕES COSMOLÓGICAS ESTATÍSTICAS

As perturbações escalares observadas hoje são adiabáticas e, uma vez que o responsável por especificar os modos de perturbações adiabáticos é o campo \mathcal{R} ³, é necessário obter seu espectro potência a fim de caracterizar as perturbações escalares de forma que façam contato com os dados observacionais (MUKHANOV, 1992).

Segundo dados observacionais, \mathcal{R} se comporta como um campo gaussiano randômico (GORBUNOV, 2011), o qual é completamente determinado por uma função de correlação de dois pontos, assim

$$\langle \mathcal{R}(\vec{k}), \mathcal{R}(\vec{k}') \rangle \equiv D(k, k'), \quad (266)$$

e será assumido, sem maiores problemas, que o valor médio desse campo é zero, $\langle \mathcal{R} \rangle = 0$. Uma vez que a relação entre $\mathcal{R}(\vec{x})$ e $\mathcal{R}(\vec{k})$ é dada por

$$\mathcal{R}(\vec{x}) = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \mathcal{R}(\vec{k}), \quad (267)$$

a função de correlação $\langle \mathcal{R}(\vec{k}), \mathcal{R}(\vec{k}') \rangle$ pode ser escrita como

$$\langle \mathcal{R}(\vec{k}), \mathcal{R}(\vec{k}') \rangle = \int \frac{d^3x d^3y}{(2\pi)^6} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \vec{k}'\cdot\vec{y})} D(|\vec{x} - \vec{y}|), \quad (268)$$

$$= \int \frac{d^3z d^3y}{(2\pi)^6} e^{-i(\vec{k} + \vec{k}')\cdot\vec{y}} D(|\vec{z}|), \quad (269)$$

fazendo

$$P(k) = \int d^3z e^{-i\vec{k}\cdot\vec{z}} D(|\vec{z}|), \quad (270)$$

³ \mathcal{R} é definido aqui como um campo randômico gaussiano, para o leitor com maior interesse indicamos a referência: Gorbunov (2011).

chega-se a

$$\langle \mathcal{R}(\vec{k}), \mathcal{R}(\vec{k}') \rangle = \frac{P_{\mathcal{R}}(\vec{k})}{(2\pi)^3} \delta(\vec{k} + \vec{k}'). \quad (271)$$

Embora $P_{\mathcal{R}}(\vec{k})$ seja definido como espectro de potência, é importante analisar uma quantidade intimamente relacionada, seja

$$\langle \mathcal{R}^2(\vec{x}) \rangle = \int d^3k d^3k' e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \langle \mathcal{R}(\vec{k}), \mathcal{R}(\vec{k}') \rangle, \quad (272)$$

$$= \int d^3k \frac{P_{\mathcal{R}}(\vec{k})}{(2\pi)^3}, \quad (273)$$

realizando uma integração angular, chega-se a uma integral sobre o valor absoluto do momento

$$\langle \mathcal{R}^2(\vec{x}) \rangle = \int_0^\infty dk k^2 \frac{P_{\mathcal{R}}(\vec{k})}{2\pi^2}, \quad (274)$$

$$= \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{k}), \quad (275)$$

em que a quantidade $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{k})$ é

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{k}) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(\vec{k}), \quad (276)$$

que também recebe o nome de espectro de potência, entretanto ela determina a contribuição de um intervalo infinitesimal do momento em torno de um dado valor k na flutuação do campo $\mathcal{R}(\vec{x})$ (BAUMANN, 2012).

A meta agora é determinar o espectro de potência $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{x})$. O lado esquerdo da equação (271) é a média sobre um sistema de ensembles de um Universo como o nosso, uma vez que ele é único, as variáveis randômicas como $\mathcal{R}(\vec{x})$ tomam valores definidos que em princípio são desconhecidos (PETER, 2013; UGGLA, 2011). As propriedades do campo randômico podem ser estudadas a partir de observáveis relacionados as funções de correlação $\langle \mathcal{R}(\vec{x}), \mathcal{R}(\vec{x}') \rangle$ para o pontos \vec{x} e \vec{x}' que possuem uma certa distância entre si.

Nota-se que muitas vezes é conveniente usar a notação

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(\vec{k}) \equiv \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{k}), \quad (277)$$

em que o parâmetro $\Delta_{\mathcal{R}}(\vec{k})$ caracteriza a amplitude das perturbações do momento k , em

que $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ fornece o quadrado da amplitude. Segue da observação que o espectro escalar é aproximadamente plano (PLANCK-COLLABORATION, 2018), com isso a parametrização natural é então

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{k}) = A_{\mathcal{R}} \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1}, \quad (278)$$

em que k_* é uma referência arbitrária escolhida convenientemente, o parâmetro $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*) = A_{\mathcal{R}}$ é uma potência para $k = k_*$, e $(n_s - 1)$ é chamado de *índice espectral*. O Espectro plano possui $n_s = 1$, espectro com $n_s < 1$ é chamado de vermelho e $n_s > 1$ é chamado de azul (GORBUNOV, 2011). Dados da sonda Planck fixam o índice espectral como

$$n_s = 0,9649 \pm 0,0042, \quad 65\%CL, \quad (279)$$

o que indica que ele é ligeiramente vermelho. Note que uma teoria cosmológica que pretende descrever corretamente a inflação cósmica, deve prever um índice espectral dentro do valor mensurado (PLANCK-COLLABORATION, 2018).

É possível introduzir outro parâmetro, conhecido como *running index*, dado por $\frac{dn_s}{d \log k} \equiv \frac{dn_s}{d \log k}(k_*)$, escrevendo

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{k}) = A_{\mathcal{R}} \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1 + \frac{dn_s}{d \log k} \log \left(\frac{k}{k_*} \right)}. \quad (280)$$

Nota-se que esse novo parâmetro é a taxa de variação do índice espectral próximo de $k = k_*$ (BAUMANN, 2012). O valor atual para a amplitude da perturbação (PLANCK-COLLABORATION, 2018) é

$$A_{\mathcal{R}} = (2,46 \pm 0,09) \times 10^{-9}, \quad (281)$$

em que foi utilizado $\frac{k_*}{a_0} = 0,002 Mpc^{-1}$. Esses valores são assumidos na ausência de perturbações tensoriais e na consideração de que o índice espectral é invariante por escala. Então, a amplitude escalar primordial é

$$\Delta_{\mathcal{R}} \simeq 5 \times 10^{-5}. \quad (282)$$

Tais resultados sugerem que o espectro pode não ser exatamente plano, mas essa evidência se torna fraca se for considerada a existência de perturbações tensoriais. Assumindo uma dependência do momento no índice espectral, chega-se a

$$-0,07 < \frac{dn_s}{d \log k} < 0,01. \quad (283)$$

com 95% C.L (GORBUNOV, 2011).

Neste capítulo foram estudados os aspectos básicos da teoria de perturbação em modelos cosmológicos. Iniciando por uma discussão sobre a perturbação no tensor energia-momento e nas equações de Einstein, cujas formas linearizadas foram definidas e analisadas. Posteriormente foram discutidas as perturbações tensoriais, que estão intimamente ligadas à inflação por meio das ondas gravitacionais primordiais que devem ter deixado impressões na RCFMO, seguida de uma breve discussão acerca de perturbações vetoriais, as quais não contribuem para o estudo do cenário inflacionário. Posteriormente foi discutido o arcabouço teórico e matemático das perturbações escalares, as quais estão fortemente relacionadas à inflação e formação de estrutura em larga escala hoje. Por fim foram construídas as equações de evolução dessas perturbações e posteriormente, uma teoria estatística estabelecendo ligações com os dados observacionais foi feita.

A teoria de perturbação cosmológica desenvolvida ao longo desse capítulo vem se mostrando uma das ferramentas cosmológicas mais bem aceitas e utilizadas. Por conta disso, é fundamental que um modelo cosmológico que se proponha a descrever a evolução do Universo forneça um modelo perturbado condizendo com os dados observados hoje (UGGLA, 2011). Por esse motivo, nos próximos capítulos será desenvolvida uma teoria cosmológica na qual um espinor com dimensão de massa um é responsável por guiar todas as fases do Universo. Dessa forma, o mesmo deve produzir perturbações escalares condizentes com o esperado pelos dados atuais. É importante mencionar que existem inúmeras abordagens distintas a este tema, entretanto a escolhida para o âmbito desta tese é a que foi usada para criar o modelo perturbado discutido no capítulo 7.

5 SPINOR MDO

Após uma extensa discussão sobre as propriedades cosmológicas de um campo escalar genérico ϕ , vários questionamentos foram levantados e talvez o principal deles seja referente à natureza desse campo. Uma vez que o campo de Higgs é o único campo escalar fundamental previsto pela física de partículas e como sua escala de energia parece inviável para realizar o processo inflacionário (BARVINSKY, 2008; FAIRBAIRN; GROTHAUS; HOGAN, 2014), qual campo poderia assumir seu lugar em um modelo cosmológico? Ainda mais, sistemáticas observações astrofísicas e cosmológicas sugerem fortemente a existência de uma nova forma de matéria, conhecida como matéria escura, que possui pouca ou nenhuma interação com a matéria usual ou com campos de gauge do modelo padrão da física de partículas (BASTERO-GIL, 2016; MATARRESE, 2011; BERTONE, 2016; CLOWE, 2006; ARUNAB, 2017). Esses fatores levantam ainda mais questionamentos, como qual seria a natureza dessa nova matéria pouco interagente e sua possível relação com o também desconhecido campo do inflaton. Tais questionamentos atuam como propulsores de novas ideias, nas quais a dinâmica do Universo em alguma ou todas as suas fases possa ser guiada por um campo de natureza diferente daquela do campo escalar, como campos vetorial ou espinorial, por exemplo.

Modelos cosmológicos que fazem uso de um campo vetorial como fonte da dinâmica do Universo foram amplamente estudados desde sua proposição inicial como inflaton em 1989 (FORD, 1989). Tais modelos são naturalmente anisotrópicos, uma vez que campos vetoriais quebram a simetria de Lorentz. Para contornar este problema pode ser assumido que as componentes espaciais do campo vetorial se anulam e a origem da anisotropia é residual. Haja vista que campos cosmológicos precisam ser de longo alcance, um primeiro candidato razoável seria o campo eletromagnético que, como mostrado por Jiménez (2008), poderia atuar como inflaton e estar relacionado a matéria escura. Uma vez que não é o intuito desta tese discutir campos vetoriais, remetemos o leitor às referências Ford (1989); Jiménez (2008); Himmetoglu (2010); Fróes (2009); Golovnev (2011) para maiores detalhes.

Por sua vez os campos espinoriais vêm ganhando espaço na cosmologia desde a década de 90 (MAGUEIJO, 2013), com trabalhos tentando associar o espinor de Dirac à inflação cósmica e matéria escura fermiônica. Entretanto, antes de entrar exatamente neste assunto se faz prudente uma discussão acerca da natureza dos espinores e posteriormente sobre como modelos espinoriais cosmológicos podem ser construídos.

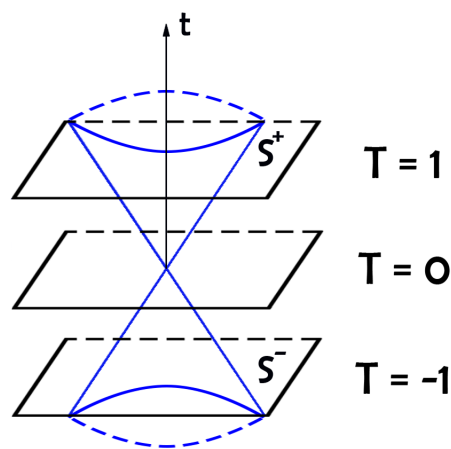
5.1 DEFINIÇÃO GERAL DE ESPINORES

O primeiro passo a ser dado em direção à construção de uma teoria cosmológica espinorial é compreender o que é um espinor. Inicialmente considere que a métrica do espaço de Minkowski é dada simplesmente por

$$s^2 = ct^2 - r^2,$$

a qual define um cone de luz cujo vértice está em $t = 0$ (WALD, 1984).

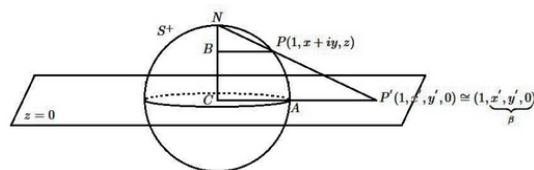
Figura 8: Cortes no cone de luz e a definição de espinor.



Fonte: Produção do própria do autor.

Um corte transversal em $t = 1$ define o hiperplano S^+ em que $r^2 = 1$, o qual pode ser entendido como uma esfera de Riemann. Agora é possível mapear os pontos dessa esfera em um plano $\mathbb{C}(\{x + iy\})$ a partir da projeção estereográfica. As coordenadas (x, y, z) no hiperplano S^+ podem ser substituídas por um número complexo $\alpha = x' + iy'$ e seu conjugado $\alpha^* = x' - iy'$. Pela imagem abaixo, Fig. (9), a semelhança entre os triângulos NP e NP' fornece

Figura 9: Mapeamento dos pontos da esfera em um plano complexo.



Fonte: Silva (2016).

$$\frac{NP'}{NP} = \frac{1}{1+z} = \frac{x'+iy'}{x+iy} = \frac{x'-iy'}{x-iy},$$

utilizando o fato de que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, escreve-se

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \frac{\alpha\alpha^*}{x^2+y^2} = \frac{\alpha\alpha^*}{(1-z)(1+z)}. \quad (284)$$

É necessário por agora expressar o número complexo α em termos de outros dois números complexos, como

$$\alpha = \frac{\phi}{\psi}, \quad (285)$$

sobre os quais pode se impor a condição de unitariedade

$$\psi\psi^* + \phi\phi^* = 1, \quad (286)$$

em que ϕ^* e ψ^* são os conjugados de ϕ e ψ , respectivamente. Com isso a coordenada z pode ser escrita em termos de ϕ , ψ e seus conjugados, a partir das relações (284), (285) e (286) é obtido

$$z = \psi\psi^* - \phi\phi^*, \quad (287)$$

utilizando essa forma para z é fácil mostrar que (HLADIK, 1999)

$$x = \psi\phi^* + \psi^*\phi \quad \text{e} \quad y = i(\psi\phi^* - \psi^*\phi). \quad (288)$$

Entretanto, o polo norte da esfera de Riemann, $\alpha = \infty$, não pode ser projetado por essa formulação, portanto para descrever esse ponto é necessário que

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (289)$$

Assim as coordenadas x, y, z tomam a forma (SILVA, 2016)

$$x = \frac{\psi\phi^* + \psi^*\phi}{\psi\psi^* + \phi\phi^*}, \quad y = i\frac{(\psi\phi^* - \psi^*\phi)}{\psi\psi^* + \phi\phi^*} \quad \text{e} \quad z = \frac{\psi\psi^* - \phi\phi^*}{\psi\psi^* + \phi\phi^*}. \quad (290)$$

Com isso, cada ponto da esfera de Riemann está mapeado por um par de números com-

plexos no plano S^+ e é justamente este par que constitui um espinor unitário. Colocando em palavras mais precisas, os espinores são dados pelas coordenadas projetivas da projeção estereográfica de uma seção de cone de luz no plano complexo (SILVA, 2016). Essa definição levou Cartan a ver os espinores como geradores do espaço-tempo, uma vez que embora a definição tenha sido construída utilizando o cone de luz, a mesma vale para todo o espaço-tempo (PENROSE; RINDLER, 1987).

Munidos da definição precisa do que é um espinor, é possível agora discutir a estrutura matemática do espinor de Dirac e de um tipo particular de espinor conhecido como espinor de *dimensão de massa um* (Mass Dimension One - MDO). Tal espinor é peculiar por possuir traços bosônicos, como sua dimensão de massa ser 1, embora seu spin seja $1/2$ (AHLUWALIA-KHALILOVA, 2005). Essas características engendram uma série de fatores que podem ser interessantes do ponto de vista cosmológico, uma vez que faz seu acoplamento se limitar apenas ao campo de Higgs, tornando-o um candidato natural a matéria escura (AHLUWALIA-KHALILOVA; GRUMILLER, 2005).

5.2 ÁLGEBRA DO ESPINOR MDO

De maneira geral, espinores que são autoespinores do operador paridade¹ $P = m^{-1}\gamma^\mu p_\mu$ são chamados de espinores de Dirac (SPERANÇA, 2014), cuja forma é dada usualmente na representação de Weyl por (WEINBERG, 1995):

$$\psi(p^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}, \quad (291)$$

no qual ϕ_R e ϕ_L são espinores de massa m que representam a componente de mão direita e mão esquerda, os quais se transformam por Lorentz como objetos do grupo de representação $(1/2,0)$ e $(0,1/2)$ respectivamente. A lagrangiana que descreve a dinâmica do espinor de Dirac é dada por (PENROSE; RINDLER, 1987)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad (292)$$

na qual $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ é o dual de ψ , γ^μ representa o conjunto de matrizes de Dirac-Pauli

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ \mathbb{I}_{2 \times 2} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\sigma^i \\ \sigma^i & \mathbb{O} \end{pmatrix} \quad (293)$$

$$\text{e } \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (294)$$

¹Em que m e p_μ são a massa e o momento do espinor respectivamente, enquanto γ^μ é a matriz de Pauli-Dirac.

em que σ^i são as matrizes de Pauli. A equação de Euler-Lagrange para $\bar{\psi}$ fornece a equação de Dirac

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0, \quad (295)$$

na qual m é a massa do férmion descrito em questão e ψ possui dimensão de massa $3/2$. A fim de formular uma teoria cosmológica para o espinor de Dirac, é necessário construir uma derivada covariante fazendo uso de uma conexão afim geral. Na formulação tradicional da lagrangiana (292), mostrada acima, nota-se que apenas ψ contribui para a energia cinética do campo, entretanto $\bar{\psi}$ e ψ são simétricos, fato este que deve demandar uma lagrangiana também simétrica (KIBBLE, 1961), ou seja

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - \mathcal{D}_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi] - m\bar{\psi}\psi, \quad (296)$$

em que D_μ é a derivada covariante do campo espinorial. A aplicação cosmológica do espinor de Dirac se mostrou frutífera, uma vez que leva a um número coerente de *e-folds* durante o processo inflacionário, embora não seja capaz de realizar o processo de reaquecimento por oscilações do campo no vácuo do potencial², como mostrado por Armendariz-Picon (2003). Além disso, grandes discussões sobre o como espinor de Dirac pode atuar como matéria escura fermiônica podem ser encontradas nas referências Chun-Khiang (2017); Hisano (2018); Bhattacharya (2018).

Uma vez que o autoespinor do operador paridade é conhecido como espinor de Dirac, o autoespinor do operador conjugação de carga, C , é conhecido como espinor MDO, o qual possui a representação (AHLUWALIA-KHALILOVA; GRUMILLER, 2005; AHLUWALIA-KHALILOVA, 2005)

$$\lambda(p^\mu) = \begin{pmatrix} \sigma_2 \phi_L^*(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}, \quad (297)$$

a representação de ϕ_R deste espinor será deixada de lado por não trazer nenhuma contribuição física adicional. Como o espinor MDO possui helicidade dual para ϕ_L , $(1/2, 0)$ ou $(0, 1/2)$, pode-se escrever os espinores autoconjugados de forma explícita em termos de suas componentes, como (AHLUWALIA-KHALILOVA, 2005)

$$\lambda_{\{+,-\}}^S = \begin{pmatrix} \pm \sigma_2 \phi_L^{-*} \\ \phi_L^- \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\{-,+\}}^S = \begin{pmatrix} \pm \sigma_2 \phi_L^{+*} \\ \phi_L^+ \end{pmatrix}, \quad (298)$$

²Este fato não exclui o espinor Dirac como inflaton, uma vez que existem vários outros mecanismos de reaquecimento.

e para os anti autoconjugados são obtidos

$$\lambda_{\{-,+\}}^A = - \begin{pmatrix} \mp \sigma_2 \phi_L^{+*} \\ \phi_L^+ \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\{+,-\}}^A = \begin{pmatrix} \mp \sigma_2 \phi_L^{-*} \\ \phi_L^- \end{pmatrix}, \quad (299)$$

sendo que “S” indica *autoconjugado*, “A” indica *anti autoconjugado*, $\{\pm, \mp\}$ mostra que a primeira entrada se refere a helicidade da componente (1/2,0) e a segunda se refere a helicidade da componente (0, 1/2), ainda ϕ_L^\pm é um bi-espinor com helicidade \pm (AHLUWALIA-KHALILOVA, 2005). Uma característica fundamental pode ser notada aqui, o autoespinor de C introduzido acima não é aniquilado pelo operador de Dirac no espaço dos momentos $(\gamma_\mu p^\mu \pm m)$, ou seja, o espinor MDO não respeita a equação de Dirac, apenas a equação de Klein-Gordon, o que faz sua dimensão de massa ser 1 embora seu spin seja 1/2, impedindo o acoplamento entre este espinor e outros campos espinoriais, vetoriais e tensoriais, restando apenas acoplamento com o campo escalar de Higgs (AHLUWALIA, 2017A) e possivelmente com o campo eletromagnético. Assim o campo MDO nasce naturalmente “escuro”.

A definição do dual do espinor MDO é diferente da definição do dual para o espinor de Dirac, a qual é dada por $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$, de maneira que $\bar{\psi}\psi$ é um escalar. Todavia, utilizando este dual para o MDO, a norma de todos os seus componentes ou são identicamente nulas ou imaginárias (ROGÉRIO, 2018). A forma encontrada por Ahluwalia (2017b) para a estrutura do dual do MDO é

$$\bar{\lambda}_{\{\pm, \mp\}}^S(\vec{k}) \equiv \left[\Xi \lambda_{\{\pm, \mp\}}^S(\vec{k}) \right]^\dagger \Upsilon \mathcal{A}, \quad (300)$$

$$\bar{\lambda}_{\{\pm, \mp\}}^A(\vec{k}) \equiv \left[\Xi \lambda_{\{\pm, \mp\}}^A(\vec{k}) \right]^\dagger \Upsilon \mathcal{B}, \quad (301)$$

no qual o operador Ξ e as matrizes Υ , \mathcal{A} e \mathcal{B} são dados por

$$\Xi = m^{-1} G(\phi) \gamma_\mu k^\mu, \quad (302)$$

$$\mathcal{A} = 2 \left(\frac{\mathbb{I}_{4 \times 4} - \tau G(\phi)}{1 - \tau^2} \right), \quad (303)$$

$$\mathcal{B} = 2 \left(\frac{\mathbb{I}_{4 \times 4} + \tau G(\phi)}{1 - \tau^2} \right) \quad (304)$$

e

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi} \\ 0 & 0 & ie^{-i\phi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi} & 0 & 0 \\ ie^{-i\phi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (305)$$

em que $\tau \rightarrow 1$. Essa formulação para o dual garante que $\overline{\lambda}\lambda$ é invariante por transformações de Lorentz, satisfazendo $\overline{\lambda}_\mu^{S/A} \lambda_{\mu'}^{S/A} = \pm 2m \delta_{\mu\mu'}$, em que $\delta_{\mu\mu'}$ é o delta de Kronecker.

Para usar o campo MDO como o conteúdo material do Universo, será utilizada sua formulação clássica, ou em termos de valores médios de seu campo quântico em um contexto clássico. Além disso, em um espaço-tempo curvo, homogêneo e isotrópico, será assumido que o campo MDO preenche todo o espaço de forma homogênea (BÖHMER, 2007; PEREIRA; GUIMARÃES, 2017; GREDAT; SHANKARANARAYANAN, 2010), portanto é possível supor que tal campo possa ser dividido em uma parte dependente do tempo e outra dependente do espaço-tempo, que carrega toda a estrutura do spinor, ou seja,

$$\lambda(x^\mu) = \phi(t)\xi(\mathbf{x}), \quad (306)$$

com ξ representando, por simplificação, uma das quatro componentes do espinor MDO discutidos anteriormente. Por conveniência ξ será escolhido como

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \overline{\xi} = \frac{1}{2} (i \ 0 \ 0 \ \mp 1). \quad (307)$$

Devido a ξ ser normalizado como $\overline{\xi}\xi = \pm 1$, é possível escolher o sinal da norma do espinor, que aqui será o valor positivo por argumento de simplicidade (PEREIRA; GUIMARÃES, 2017; GREDAT; SHANKARANARAYANAN, 2010). Ainda, como o espinor ξ é constante, a partir de agora o campo MDO será referido como

$$\lambda = \phi(t)\xi \equiv \varphi, \quad (308)$$

definindo um campo escalar efetivo com um grau de liberdade, dado por

$$\overline{\lambda}\lambda = \phi^2 \equiv \varphi^2. \quad (309)$$

Com essas informações é possível construir um modelo cosmológico para o espinor MDO.

5.2.1 Lagrangiana do espinor MDO

O grupo de gauge da Teoria da Relatividade Geral é invariante apenas por transformações Lorentz, não admitindo uma representação espinorial direta, fato este que poderia inviabilizar uma teoria cosmológica cuja fonte da curvatura do espaço fosse um campo espinorial (BÖHMER, 2008). Entretanto, é possível criar uma teoria de gravitação generalista que considere tanto a massa quanto o spin como fonte da curvatura do espaço, para tanto é necessário lançar mão de um caso especial da conexão de Cartan, conhecida por vierbien, que mapeará o espaço tangente local de Minkowski, onde as matrizes de Dirac-Pauli são construídas, na variedade do espaço-tempo curvo (WALD, 1984; BOJOWALD, 2011). Isso assegura que a matriz gama³ γ_μ , em um espaço-tempo curvo, e a matriz γ_a no espaço-tempo de Minkowski, satisfaçam a álgebra de Clifford estendida, assegurando as relações de anti-comutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (310)$$

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}. \quad (311)$$

Na qual $\{\dots; \dots\}$ são os anti-comutadores, $\eta^{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é a pseudo-métrica do espaço de Minkowski e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico diagonal do espaço-tempo curvo. A cada ponto da variedade do espaço-tempo curvo, um conjunto de 4 campos vetoriais $\{e_\mu^a\}$, chamados de tetradas ou vierbeins, ligam o espaço tangente local de Minkowski à variedade do espaço-tempo curvo (YEPEZ, 2011). Na notação utilizada, o índice de Lorentz não holonômico, a , denota um vetor, enquanto o índice holonômico, μ , denota a componente covariante desse vetor e^a numa variedade curva. Assim, os vierbeins conectam o tensor métrico do espaço tangente ao tensor métrico do espaço-tempo curvo e respeita a seguinte relação de ortogonalidade:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} \text{ e } \eta^{ab} = e_\mu^a e_\nu^b g^{\mu\nu}. \quad (312)$$

Cuja inversa e_b^μ é

$$e_a^\mu e_b^\nu = \delta_\nu^a e_\mu^b = \delta_b^a. \quad (313)$$

Com isso, a relação de ortogonalidade que conecta o tensor métrico ao vierbein pode ser expressa por

³Usando $\mu, \nu, \dots = t, i, j, k$ e $a, b, \dots = 0, x^i, x^j, x^k$

$$e_a^\mu e_b^\nu \eta^{ab} = g^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad e_a^\mu = \eta_{ab} g^{\mu\nu} e_\nu^b. \quad (314)$$

Utilizando o vierbein, pode-se relacionar o espinor no espaço-tempo de Minkowski, γ^a , com o espinor no espaço-tempo curvo, γ^μ , pelo mapeamento das duas variedades

$$\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a. \quad (315)$$

Com essas informações, é possível construir a densidade Lagrangiana para o spinor MDO no espaço-tempo curvo a partir do espaço-tempo plano. Para tanto é necessário substituir γ^a por γ^μ e seguir o procedimento para o acoplamento minimal: a derivada ∂_a deve ser substituída pela derivada covariante \mathcal{D}_μ que, por sua vez, deve levar em consideração a natureza spinorial do campo (FABBRI, 2011; BÖHMER, 2007). A expressão para a derivada covariante é dada por

$$\mathcal{D}_\mu \lambda = (\overset{\rightarrow}{\partial}_\mu - \Gamma_\mu) \lambda, \quad (316)$$

$$\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda} = \bar{\lambda} (\overset{\leftarrow}{\partial}_\mu + \Gamma_\mu), \quad (317)$$

sendo o dual dado por (300). Γ_μ é a conexão do espaço tangente, chamada de conexão não holonômica ou conexão de spin, que é definida como $\Gamma_\mu = -\frac{i}{2} \omega_{\mu ab} S^{ab}$, com $S^{ab} = \frac{i}{4} [\gamma^a, \gamma^b] = \frac{i}{2} \gamma^a \gamma^b$ sendo o gerador da transformação infinitesimal de Lorentz, na qual $[\cdot; \cdot]$ é o comutador e $\omega_{\mu ab} = e_{\alpha a} e_b^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - e_b^\nu \partial_\mu e_{\alpha\nu}$, o qual vincula a conexão de spin com a conexão afim (WALD, 1984; WEINBERG, 2008). Com isso a derivada covariante pode ser escrita como

$$\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda} = \bar{\lambda} \left(\overset{\leftarrow}{\partial}_\mu - \frac{i}{2} \omega_{\mu ab} S^{ab} \right), \quad (318)$$

Utilizando essa equação, pode-se construir a densidade Lagrangiana para o campo MDO, a qual é dada por (GREDAT; SHANKARANARAYANAN, 2010; BASAK, 2011)

$$\mathcal{L}_{MDO} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \bar{\lambda} \overset{\leftarrow}{\mathcal{D}}_{(\mu} \overset{\rightarrow}{\mathcal{D}}_{\nu)} \lambda - \frac{1}{2} V(\bar{\lambda} \lambda), \quad (319)$$

em que os parêntese indicam a anti-comutação dos índices. Considerando a equação (309), é possível ver que essa densidade lagrangiana descreve um campo muito semelhante ao campo escalar usual (51). Para ser mais exato, utilizando a (308), chega-se a seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_{MDO} = g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \varphi \mathcal{D}_\nu \varphi - \frac{1}{2} V(\varphi), \quad (320)$$

em que φ atua com um escalar efetivo, logo o espinor MDO precisa possuir dimensão de massa 1, como já foi discutido.

Com o intuito de descrever a dinâmica do campo λ utilizando as equações de Friedmann é necessário conhecer o tensor energia momento do mesmo (uma obtenção detalhada deste tensor pode ser encontrada no apêndice B). A formulação de $T^{\mu\nu}$ cosmológico para o espinor MDO deve ser feita com maior cuidado, haja vista que existe uma relação implícita entre a conexão e a métrica, como mostrado por (BÖHMER, 2008). Devido a isso, um termo relacionando a uma corrente espinorial cosmológica $J^{\mu\nu}$ surge espontaneamente, assim

$$\begin{aligned} T_{cosmo}^{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{MDO})}{\delta g_{\mu\nu}} \\ &= 2\bar{\lambda} \overleftarrow{\mathcal{D}}^{(\mu} \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\nu)} \lambda - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{MDO} + T'^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (321)$$

em que $T'^{\mu\nu}$ é dado por

$$T'^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{D}_\rho J^{\mu\nu\rho} \quad (322)$$

$$J^{\mu\nu\rho} = -\frac{i}{2} \left[\bar{\lambda} \overleftarrow{\mathcal{D}}^{(\mu} f^{\nu)} \lambda + \bar{\lambda} f^{\rho(\mu} \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\nu)} \lambda \right], \quad (323)$$

com $f^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2S^{\mu\nu}$. As componentes desse tensor energia momento e, por conseguinte, as equações de Friedmann poderão ser obtidas com a escolha de uma métrica conveniente para o espaço-tempo, trabalho este que será feito na próxima seção.

5.3 MDO COSMOLÓGICO

Uma vez obtida uma forma para o tensor energia momento é necessário impor uma forma sobre o tensor métrico cosmológico, que aqui será definido como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N(t)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 \end{pmatrix}, \quad (324)$$

em que $N(t)$ é uma função conhecida como lapso e $a(t)$ é o fator de escala. Com isso é

possível obter as componentes não nulas da divergência da corrente cosmológica. Redefinindo $F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\mathcal{D}_\rho J^{\mu\nu\rho}$, apenas por simplicidade, chega-se a (BÖHMER, 2008)

$$F^t{}_t = \frac{3}{4}H^2\varphi^2, \quad (325)$$

$$F^i{}_j = \frac{1}{4a^2}\frac{d}{dt}(a^3\dot{a}\varphi^2)\delta^i_j, \quad (326)$$

substituindo $T^\mu{}_\nu$, as componentes do tensor energia-momento se tornam

$$T^t{}_t = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{8}H^2\varphi^2 + V, \quad (327)$$

$$T^i{}_j = \delta^i_j \left[-\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{8}H^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}(H\varphi^2) - V \right], \quad (328)$$

as quais fornecem a densidade de energia e pressão, respectivamente (WEI, 2011)

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{8}H^2\varphi^2 + V \quad (329)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{3}{8}H^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\dot{H}\varphi^2 - \frac{1}{2}H\varphi\dot{\varphi} - V. \quad (330)$$

Quando estas equações são comparadas às do campo escalar usual, percebe-se que existem acoplamentos entre o campo espinorial φ e H , o que pode indicar importantes diferenças entre a cosmologia descrita por um campo escalar ϕ da descrita pelo espinor MDO, uma vez que pode haver uma dependência entre a expansão do Universo e a massa efetiva do campo φ (SHANKARANARAYANAN, 2010; GREDAT; SHANKARANARAYANAN, 2010; BÖHMER, 2008). A equação da conservação para este espinor possui a forma

$$\mathcal{D}_\mu T^\mu{}_t = \dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (331)$$

$$= \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + 2V'_\varphi - \frac{3}{4}H^2\varphi = 0. \quad (332)$$

Por sua vez, as equações de Einstein fornecem as equações de Friedmann para o sistema MDO (BASAK, 2011; WEI, 2011):

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{8 - \kappa^2\varphi^2} \left[\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V \right], \quad (333)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6} \left[2\dot{\varphi}^2 - V - \frac{3}{4} \left(H^2\varphi^2 + \dot{H}\varphi^2 + 2H\varphi\dot{\varphi} \right) \right]. \quad (334)$$

A última equação mostra uma substancial alteração na equação da aceleração do fator de

escala, assim pode ser possível distinguir entre um Universo acelerado pelo espinor MDO para um acelerado pelo campo escalar usual ϕ , caso os termos dentro dos parêntesis sejam de alguma forma relevantes comparados a V .

Modelos inflacionários e matéria escura foram amplamente discutidas para cenários no qual o espinor MDO guia a dinâmica do Universo (GREDAT; SHANKARANARAYANAN, 2010; SHANKARANARAYANAN, 2010; BÖHMER, 2008; SHANKARANARAYANAN, 2009; BASAK; SHANKARANARAYANAN, 2015; BASAK, 2011; PEREIRA; GUIMARÃES, 2017), para tanto os próximos dois subcapítulos se dedicarão a isso.

5.3.1 Inflação Guiada pelo espinor MDO

Um período inflacionário guiado pelo espinor MDO deve conter características semelhantes às do campo escalar usual ϕ (PEREIRA; GUIMARÃES, 2017; GREDAT; SHANKARANARAYANAN, 2010; SHANKARANARAYANAN, 2010). Remetendo-se à inflação caótica unicamente, para esta tese, é esperado que tal campo espinorial estivesse distribuído caoticamente por todo Universo e respeitando um potencial cosmológico polinomial $V(\varphi)$. Pouco após o *Big Bang*, por algum motivo, o campo MDO desce para o vácuo deste potencial e, a medida que isso acontece, ele deve ser capaz de expandir o fator de escala $a(t)$ de maneira quasi-exponencial, em uma taxa correta para resolver os problemas citados na seção (2.4). Não existem ainda trabalhos que façam uma boa descrição do comportamento de tal campo nesse vácuo, ou seja, não se sabe se ele pode ou não levar à produção correta de pares de partículas, entretanto há indícios de que o campo MDO pode se acoplar minimamente ao campo eletromagnético, fato que pode indicar um possível comportamento coerente nesse período. Pensando em um modelo cosmológico unificado, seria necessário que o campo MDO oscilasse no vácuo do potencial e produzisse pares de partículas, restando uma quantidade de energia final para que o mesmo pudesse atuar como matéria escura em tempos tardios. Embora hajam descrições desses comportamentos, como será abordado adiante, ainda não há trabalhos no qual o espinor MDO sem torção seja estudado no âmbito de uma teoria cosmológica unificada.

Como as equações (332) e (333) são muito semelhantes à equação para o campo escalar, pode-se esperar que o campo espinorial MDO se comporte de maneira similar a ϕ em um modelo de inflação caótica, uma vez que $\kappa^2\varphi^2$ pode ser muito pequeno em determinados modelos. Portanto é razoável esperar que para assegurar as condições básicas de inflação seja necessário que as condições de *Slow-Roll* sejam satisfeitas. No caso, pode-se notar facilmente pelas equações de Friedmann para o campo MDO que a condição ϵ é dada por (SHANKARANARAYANAN, 2010; BASAK, 2011)

$$\epsilon = \left| \frac{\dot{H}}{H^2} \right| = 3 \left| \frac{\dot{\varphi}^2}{\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V^2} \right| + 3 \frac{H\dot{F}}{\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V^2}, \quad (335)$$

$$\epsilon = \epsilon_{can} + 3 \frac{H\dot{F}}{\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V^2}, \quad (336)$$

em que $F = \kappa^2 \varphi^2$ e ϵ_{can} é a condição de *Slow-Roll* canônica para o campo escalar usual, que pode ser vista claramente ao utilizar (69) e (58) na condição de *Slow-Roll* (70), obtendo

$$\epsilon_{can} = \left| \frac{\dot{H}_{can}}{H_{can}^2} \right| = \left| \frac{\dot{\varphi}^2}{\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V^2} \right| \ll 1. \quad (337)$$

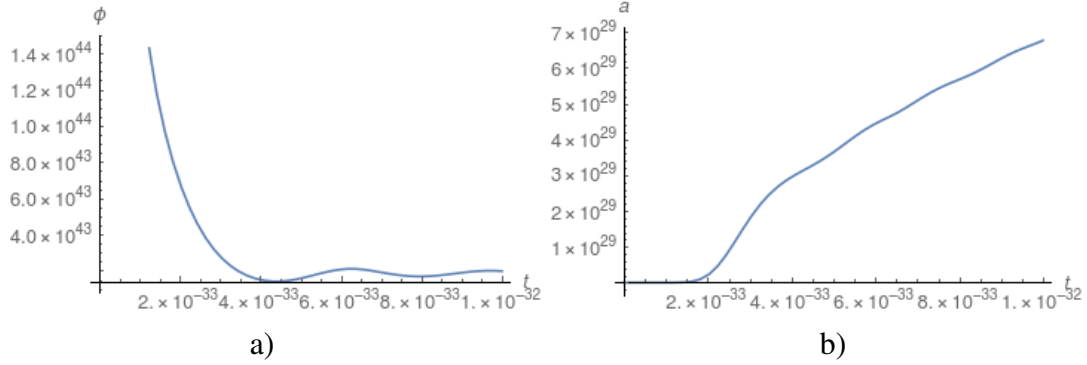
Pela condição (336) percebe-se que o campo MDO apenas acrescenta uma pequena correção à condição (70), uma vez que $\dot{F} \ll V$ após o início do inflação (GREDAT; SHANKARANARAYANAN, 2010). Por sua vez a condição de *Slow-Roll* η se torna complicada de expressar, sendo mais conveniente obtê-la numericamente a partir da fixação de um potencial cosmológico.

Tais soluções numéricas citadas podem ser obtidas para $\varphi(t)$ e $a(t)$ desde que seja considerado um potencial cosmológico coerente e sejam fixados os valores iniciais de $\varphi(t)$ e $a(t)$. No caso, apenas a título de exemplo, será escolhido um potencial do tipo

$$V(\varphi) = \lambda \left(1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_c^2} \right)^2, \quad (338)$$

em que λ é uma constante e φ_c é o vácuo deste potencial. Utilizando $V(\varphi)$ com valores arbitrários para $\lambda = (5 \times 10^{-6} m_p)^8$ e $\varphi_c = 1 m_p$, as seguintes soluções numéricas foram obtidas:

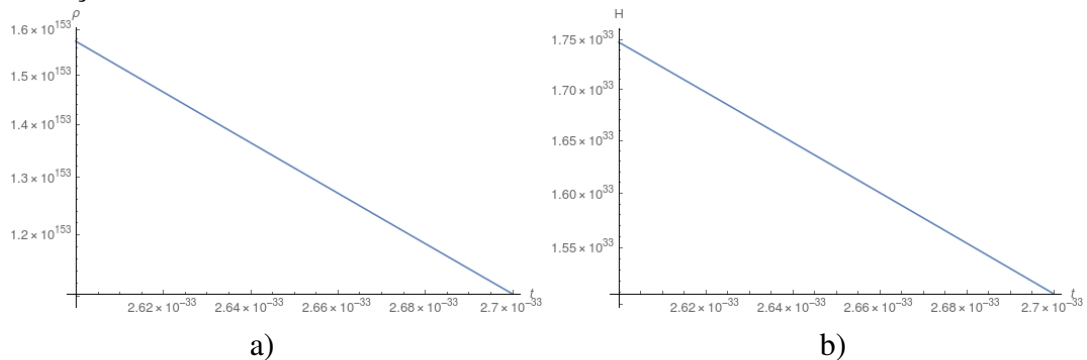
Figura 10: Os gráficos foram gerados assumindo os parâmetros: $\varphi(0) = 5 \times 10^2 m_p$, $\lambda = (5 \times 10^{-6} m_p)^8$ e $\varphi_c = 1 m_p$, o método de integração utilizado foi Runge-Kutta Fehlberg de quarta ordem implementado no Software Mathematica[®]. A figura a) mostra o campo escalar efetivo $\varphi(t)$ saindo do valor inicial, $\varphi_i \gtrsim m_p$, no começo da inflação, e então rolando para o vácuo do potencial, enquanto que a Figura b) mostra a evolução do fator de escala $a(t)$.



Fonte: Produção do própria do autor.

Na Figura (10 a)) é obtido o comportamento do campo φ no decorrer do tempo, para $\varphi(0) = 5 \times 10^2 m_p$. Nesta ocasião, o campo MDO desce para o fundo do vácuo do potencial V , com $\varphi(t_f) \equiv \varphi_c = 1 m_p$, onde realiza oscilações amortecidas que podem transferir energia térmica para o Universo, reaquentando-o da mesma forma como esperado para o campo escalar usual ϕ (LINDE, 1990). Na Figura (10 b)) é mostrado que o fator de escala $a(t)$ expande quasi-exponencialmente durante os instantes iniciais, evidenciando que o campo φ aparentemente é capaz de realizar inflação cósmica (GREDAT; SHANKARANARAYANAN, 2010; SHANKARANARAYANAN, 2010, 2009; MARTIN; RINGEVAL; VENNIN, 2013; MARTIN et al., 2014).

Figura 11: Comportamento de ρ (figura a)) e H (figura b)) guiados pelo campo φ durante a inflação. O valor $t_f = 2,7 \times 10^{-33} s$ marca o fim deste processo e como pode ser visto tanto ρ quanto H variam muito pouco durante este período e, uma vez que permanecem na escala de energia de $10^{43} s^{-1}$, podem ser tratados como constantes durante o período de inflação.

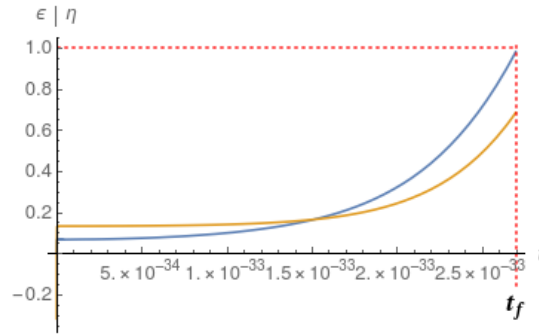


Fonte: Produção do própria do autor.

Outro comportamento importante é visto na Figura (11), durante a inflação o parâmetro de Hubble H (Fig. b)) e a densidade de energia do campo ρ (Fig. a)) são praticamente constantes em escala, após a inflação é esperado que ambos decaiam até os valores encontrados atualmente (WEINBERG, 2008; MARTIN; RINGEVAL; VENNIN, 2013).

Os valores dos parâmetros de *Slow-Roll* podem ser encontrados na figura abaixo

Figura 12: A curva em cor azul mostra o comportamento de ϵ , que é muito menor que 1 para o início do Universo, seu valor aumenta até 1 em $t_f = 2,7 \times 10^{-33} s$ que marca o fim da inflação cósmica, comportamento semelhante pode ser visto para o parâmetro η dado pela curva amarela.



Fonte: Produção do própria do autor.

Na Figura (12), a curva azul descreve o comportamento do parâmetro ϵ , dado pela equação (336), durante os estágios iniciais da evolução do Universo. Na figura é possível notar que durante a inflação o valor de $\epsilon \ll 1$, o fim da inflação é determinado em $\epsilon = 1$ que corresponde a $t_f = 2,7 \times 10^{-33} s$, que é um valor coerente para esta época (PESEN-SON, 2010). Da mesma forma, η começa com valor muito inferior a 1 e então ao fim da inflação atinge o valor 0,7. Ambos os parâmetros se encontram exatamente dentro dos valores esperados para um modelo de inflação caótica (PETER, 2005).

Por último é necessário analisar o número de *e-folds* para essa simulação utilizando os parâmetros arbitrários descritos na legenda da imagem (10), os quais levam a:

$$N = \ln \left[\frac{a(t_f)}{a(t_i)} \right] \simeq 67. \quad (339)$$

É importante mencionar que este valor é completamente dependente do valor inicial do campo φ , valores menores podem levar facilmente a um número insuficiente de *e-folds*. Com $N = 67$ nota-se que o modelo pode gerar a quantidade correta de expansão para corrigir os problemas do modelo Λ CDM citados na seção (2.4). Com isso é possível afirmar que o campo espinorial MDO é capaz de realizar uma inflação cósmica coerente com o modelo de inflação caótica discutido anteriormente. Ainda, Basak (2011) mostrou que as perturbações cosmológicas para este modelo concordam com os valores obtidos para a anisotropia da radiação cósmica de fundo.

5.3.2 Espinor MDO atuando como matéria e energia escura.

Não é do intento desta subseção se prolongar em um estudo do espinor MDO do ponto de vista da física de partículas, como feito nos trabalhos Agarwal (2015); Gillard (2011); ?); Dias; de Campos; da Silva (2010); Lee (2016); Ahluwalia-Khalilova (2005); Ahluwalia (2011, 2017b); Alves (2014a); Dias (2016); Alves (2018). Nos cabe aqui uma discussão qualitativa acerca do comportamento do MDO como matéria escura.

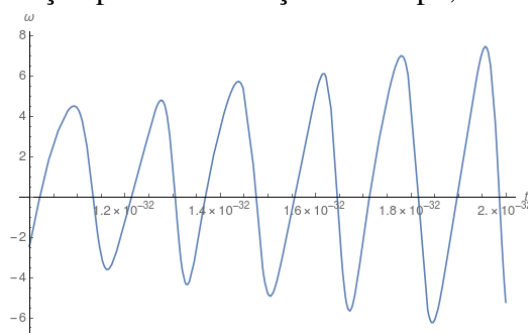
O espinor MDO é o autospinor do operador conjugação de carga, portanto não carrega carga elétrica. Além disso, sua dimensão de massa é igual a 1, o que difere da dimensão de massa dos demais férmions do modelo padrão da física de partículas, causando uma severa restrição nos acoplamentos possíveis para este campo. Assim, o MDO nasce como candidato natural a matéria escura, uma vez que seu acoplamento dominante é com o bóson de Higgs, embora novos estudos tenham destacado a possibilidade de acoplamento com fótons no nível de árvore (ALVES, 2018).

Tendo em vista que uma análise mais aprofundada deste tema demande muito tempo, é possível se atentar para alguns aspectos básicos já citados. Da mesma forma como a matéria escura modelada por um condensado de campo escalar, o parâmetro ω da equação de estado para o espinor MDO é dado por

$$\omega = \frac{p}{\rho}. \quad (340)$$

As equações para a pressão e densidade de energia em questão são muito mais complicadas do que para ϕ (WEINBERG, 2008), portanto uma solução numérica para este parâmetro foi obtida com os valores mencionados anteriormente e está apresentada na figura abaixo (Fig.13). Como é possível observar, a média das oscilação é zero, $\langle \omega \rangle = 0$, assim pode-se concluir que a pressão do campo MDO é nula, representando uma era de poeria, como deve ser para a matéria escura.

Figura 13: Solução para ω em função do tempo, note que $\langle \omega \rangle = 0$.

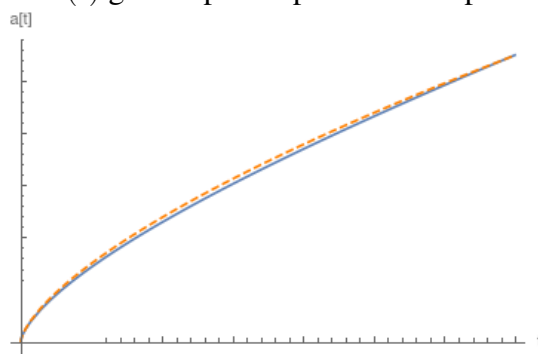


Fonte: Produção do própria do autor.

Uma vez que $p = 0$, o fator de escala para essa época do Universo deve evoluir propor-

cional à $t^{2/3}$ (ZELDOVICH; NOVIKOV, 1983). Um período cósmico guiado pelo espinor φ é mostrado na Figura 14 abaixo, na qual a curva tracejada em laranja indica um crescimento de $a(t) \sim t^{2/3}$ para ser usado como referência, enquanto que a curva azul é a solução numérica para a equação (333), ou seja, o campo MDO leva a um Universo cuja evolução é bem próxima à $t^{2/3}$, caracterizando uma época dominada pela matéria escura fria.

Figura 14: Em laranja tracejado é dada uma curva de comparação $t^{2/3}$, em azul sólido é dado o comportamento de $a(t)$ guiado pelo espinor MDO após a inflação.



Fonte: Produção do própria do autor.

Infelizmente, integrações muito prolongadas no tempo não são possíveis devido ao longo tempo de processamento, ficando as soluções limitadas até no máximo $t = 10^{-10} s$.

Nesta seção foi mostrado que o spinor MDO é capaz de realizar uma inflação caótica da forma como é esperado para o campo escalar ϕ , levando a um número correto de *e-folds* e satisfazendo as condições de *Slow-Roll*. Também foi mostrado um comportamento coerente quando o espinor φ foi tratado como matéria escura. No arcabouço de uma teoria unificada, não existem trabalhos que marquem uma transição do campo φ entre o processo de inflação e uma época dominada pela matéria escura, mais pesquisas são necessárias para estudar corretamente o comportamento deste campo no vácuo do potencial e se seria possível que o mesmo modelasse uma era dominada pela radiação.

Como característica final, é interessante mencionar que o modelo Λ CDM considera que a energia escura observada hoje está associada ao termo constante Λ , porém existem teorias cosmológicas chamadas de ϕ CDM nas quais a energia escura pode ser a manifestação de um campo escalar, de forma análoga existem trabalhos relacionando o espinor MDO a esses modelos (SADJADI, 2012; BÖHMER, 2010; WEI, 2011), todavia estes trabalhos foram construídos em sua formulação antiga na qual o tensor energia-momento cosmológico não era corrigido e a estrutura espinorial do campo violava a simetria de Lorentz.

Na próxima seção será abordado o espinor MDO em espaço-tempo com torção, na qual se construirá uma teoria cosmológica abrangente em que o campo φ é capaz de guiar

a dinâmica do Universo desde a inflação até a aceleração cósmica recente.

5.4 MDO COSMOLÓGICO COM TORÇÃO

A intenção desta tese é estudar o campo fermiônico MDO acoplado à gravidade em um framework de Einstein-Cartan, seguindo resultados recentes (KOUWN, 2013; PEREIRA, 2017), e mostrar como ele pode ser o responsável por todas as fases do Universo, levando a um modelo cosmológico unificado. A ação do campo MDO acoplado à gravidade com uma métrica homogênea e isotrópica já foi apresentada na literatura (FABBRI, 2011, 2012, 2014; BÖHMER, 2010; KOUWN, 2013; PEREIRA, 2017), tanto para espaços-tempo com torção ou livres dela.

Nesta seção serão construídas as equações de movimento para a teoria de gravitação de Einsteins-Cartan (TRAUTMAN, 2006), com o spinor MDO como fonte da curvatura e da torção do espaço-tempo. Tal teoria de gravitação é provavelmente a generalização mais flagrante da teoria de gravitação de Einstein, uma vez que a única consideração que as diferencia é que aqui os índices inferiores da conexão afim não são simétricos, ou seja, a torção do espaço-tempo não é nula.

Na Teoria Quântica de Campos, as representações irredutíveis e unitárias do grupo de Poincaré correspondem à partículas estáveis; essas representações são dadas pela massa e pelo spin. Mais precisamente, a álgebra de Poincaré Lie pode ser classificada por dois valores do operador de Casimir, que são o quadrado da massa, m^2 , e o quadrado do momento angular, $S^2 = s(s + 1)$, em que s é o spin da partícula (WALD, 1984). Portanto é natural pensar que uma teoria generalizada de gravitação leva em conta não só a contribuição da massa, mas também do spin como fonte do campo gravitacional (HEHL, 1976). Na Teoria da Relatividade Geral, o espaço-tempo \mathcal{M} é curvo, isto é, a estrutura de grupo que age sobre uma base ortonormal no espaço tangente à \mathcal{M} é o grupo de Lorentz, quando se introduz a torção e a relaciona ao spin “s”, é criada uma teoria de gravitação na qual o grupo de Poincaré é quem age sobre as bases do espaço afim no espaço tangente de \mathcal{M} . Logo, de maneira generalista, pode-se dizer que a massa se “conecta” ao subgrupo das translações (grupo de Lorentz), enquanto que o spin está “conectado” ao subgrupo das rotações, cobrindo assim todo grupo de Poincaré.

É preciso conhecer também como campos físicos se acoplam à torção, uma vez que a interação entre esse tensor é diferente para campos com diferentes spins. Por exemplo, campos escalares, spin zero, necessitam de acoplamento não minimal com a torção (SHAPIRO, 2002; HEHL, 1976, 1985), já campos de spin $1/2$, como férmions de Dirac, se acoplam à parte axial do tensor de torção, enquanto férmions massivos de spins mais altos se acoplam à parte do traço da mesma (SHAPIRO, 2002). Pelo fato do spinor MDO possuir dimensão de massa unitária e spin $\frac{1}{2}$, ele se acopla com todas as componentes do tensor de torção (BÖHMER, 2007; KOUWN, 2013; FABBRI, 2014; SHAPIRO, 1998), e é justamente essa qualidade que o torna um excelente objeto físico na construção de uma teoria cosmológica unificada, em um cenário no qual se considera espaços-tempos com

torção.

5.4.1 Densidade Lagrangiana do espinor MDO com torção

Como discutido para o campo MDO sem torção, o grupo de gauge da Teoria da Relatividade Geral de Einstein não admite uma representação spinorial, entretanto as transformações e as matrizes de Dirac-Pauli podem ser definidas em cada ponto do espaço-tempo curvo, em um referencial local, graças aos vierbeins. Portanto é necessário fazer uso deste formalismos bem como da métrica (324) para construir uma densidade Lagrangiana do tipo (320) para o campo MDO com torção, novamente o passo fundamental para isso é encontrar o termo cinético

$$g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \overline{\lambda} \mathcal{D}_\nu \lambda, \quad (341)$$

em que $\mathcal{D}_\nu \lambda$ é dada pela equação (316) e $\mathcal{D}_\mu \overline{\lambda}$ é dada por (317). Note que obter as componentes da conexão de spin Γ_μ , embora similar ao caso sem torção, exige um pouco mais de cuidado aqui, pois agora a conexão afim não é mais simétrica em relação aos índices inferiores. É necessário se atentar que uma teoria de gravitação que inclua torção, conhecida com Teoria de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECSK), deve obedecer a condição de que a derivada covariante da métrica seja igual a zero (ALDROVANDI, 2016), essa condição recebe o nome de metricidade e é escrita como

$$\mathcal{D}_\mu g_{\alpha\beta} = 0. \quad (342)$$

Com essa imposição a conexão afim assume a forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho - K_{\mu\nu}^\rho, \quad (343)$$

em que $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho$ é o símbolo de Christoffel e $K_{\mu\nu}^\rho$ é a contorção, dada em termos do tensor de torção $S_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho$ (HEHL, 1976), como segue:

$$K_{\mu\nu}^\rho = - (S_{\mu\nu}^\rho + S_{\mu\nu}^\rho + S_{\nu\mu}^\rho), \quad (344)$$

$$= - [S_{\mu\nu}^\rho + g^{\rho\sigma} (g_{\nu\beta} S_{\sigma\mu}^\beta + g_{\mu\alpha} S_{\sigma\nu}^\alpha)]. \quad (345)$$

Com isso, escreve-se a seguinte expressão da conexão afim:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + S_{\mu\nu}^\rho + g^{\rho\sigma} (g_{\nu\beta} S_{\sigma\mu}^\beta + g_{\mu\alpha} S_{\sigma\nu}^\alpha), \quad (346)$$

na qual $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} (\partial_{\nu}g_{\sigma\mu} + \partial_{\mu}g_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu})$.

Antes de obter as componentes de $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$, é importante atentar para o fato de que o tensor de torção é antissimétrico, $S_{\sigma\mu}^{\beta} + S_{\mu\sigma}^{\beta} = 0$, que suas componentes não nulas podem ser obtidas assumindo que inicialmente a torção não possui nenhum papel físico e que o campo gravitacional é simétrico. Como o campo gravitacional é definido tanto pela métrica quanto pela torção, afirma-se que o vetor de Killing ξ^{μ} deve gerar a simetria do campo gravitacional se e somente se $L_{\xi^{\mu}}S_{\mu\nu}^{\rho} = 0$ e $L_{\xi^{\mu}}g_{\mu\nu} = 0$ (TSAMPARLIS, 1979). Uma vez que $g_{\mu\nu}$ e $S_{\mu\nu}^{\rho}$ são campos tensoriais e sendo $L_{\xi^{\mu}}$ a derivada de Lie, essas equações são compatíveis com o princípio cosmológico e permitem construir modelos análogos a FLRW na teoria de Einstein-Cartan. O princípio cosmológico requer a existência de 6 vetores de Killing gerando uma superfície tridimensional homogênea maximamente simétrica (TSAMPARLIS, 1981). A equação $L_{\xi^{\mu}}S_{\mu\nu}^{\rho} = 0$, aliada a antissimetria do tensor de torção mostra que as componentes $S_{t1}^1 = S_{t2}^2 = S_{t3}^3$ e S_{jk}^i devem ser não nulas, pelo princípio cosmológico elas devem ser funções arbitrárias do tempo cósmico (ou conformal). Assim, são definidas:

$$S_{it}^j \equiv \frac{h(t)}{2}\delta_i^j, \quad (347)$$

$$S_{jk}^i \equiv \frac{f(t)}{3}\varepsilon_{jk}^i. \quad (348)$$

Pode-se agora obter as componentes da conexão afim a partir da métrica (324), as quais são⁴:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^t &= \frac{\dot{N}}{N}, & \Gamma_{tj}^i &= \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i, \\ \Gamma_{ij}^t &= \frac{ab}{N^2}\delta_{ij}, & \Gamma_{jk}^i &= f\varepsilon_{jk}^i, \\ \Gamma_{jt}^i &= \frac{b}{a}\delta_j^i, \end{aligned} \quad (349)$$

em que $b = \dot{a} + ah$. Por sua vez, a conexão de spin é dada por

$$\Gamma_{\mu} = \frac{1}{4}\omega_{\mu}^{ab}\gamma_a\gamma_b, \quad (350)$$

com $\omega_{\mu}^{ab} = e_{\nu}^a (\partial_{\mu}e^{b\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}e^{b\rho})$. Assim as componentes de Γ_{μ} são (KOUNN, 2013):

$$\Gamma_t = 0, \quad (351)$$

$$\Gamma_i = \frac{b}{2N}\gamma_0\gamma_{x^i} + \frac{f}{4}\varepsilon_{x^i x^k x^j}\gamma_{x^j}\gamma_{x^k}. \quad (352)$$

⁴Maior detalhamento é encontrado no Apêndice C.

Como a intenção é construir a densidade Lagrangiana para o campo MDO com torção, pode-se substituir Γ_μ em (341) para obter

$$g^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}\mathcal{D}_\nu\lambda = -\frac{1}{a^2}\left[\partial_t\bar{\lambda}\partial_t\lambda\right] + \frac{\delta_{ij}}{a^2}\left[\nabla\bar{\lambda}\nabla\lambda - \bar{\lambda}\Gamma_i\Gamma_j\lambda\right]. \quad (353)$$

De maneira a abordar o campo MDO como conteúdo material no Universo, usar-se-á sua formulação clássica e a consideração de que o espaço-tempo curvo é homogêneo, isotrópico e preenchido uniformemente por este campo. Isso permite separar o spinor em uma função dependente do tempo e outra dependente do espaço-tempo plano, a qual carrega toda a estrutura spinorial, exatamente como foi feito na seção 5.2. Dessa forma a equação acima pode ser escrita como

$$g^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}\mathcal{D}_\nu\lambda = \frac{3b^2\varphi^2}{4a^2N^2} + \frac{(\varphi')^2}{N^2} - \frac{3f^2\varphi^2}{4a^2}. \quad (354)$$

Utilizando essa equação, é possível construir a densidade Lagrangiana para o campo MDO, a qual é dada por

$$\mathcal{L}_{MDO} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\bar{\lambda}\overleftarrow{\mathcal{D}}_{(\mu}\overrightarrow{\mathcal{D}}_{\nu)}\lambda - \frac{1}{2}V(\bar{\lambda}\lambda), \quad (355)$$

substituindo (354), finalmente chega-se a forma final (KOUWN, 2013; WEI, 2011)

$$\mathcal{L}_{MDO} = \frac{1}{2}\left[\frac{(\varphi')^2}{N^2} + \frac{3b^2\varphi^2}{4a^2N^2} - \frac{3f^2\varphi^2}{4a^2} - V\right]. \quad (356)$$

Com a densidade Lagrangiana para o campo MDO devidamente obtida, é momento de compreender como buscar o tensor energia-momento em um espaço-tempo com torção, para assim ser possível escrever as equações de movimento que guiam a dinâmica do Universo.

5.4.2 Discussões sobre o tensor energia momento

O ponto de partida para trabalhar com as equações de movimento advindas da teoria de Einstein-Cartan, é notar que na ação de Einstein-Hilbert a métrica e a torção são consideradas como variáveis independentes⁵. Com isso, é necessário variar a ação tanto em relação ao tensor métrico quanto em relação ao tensor de contorção para obter corre-

⁵Essa informação é de importância impar, uma que vez que nos mostra como obter o tensor energia-momento correto para o modelo, além de simplificar as perturbações de primeira ordem, já que os termos de torção não serão afetados pela perturbação da métrica.

tamente o tensor energia-momento (SHAPIRO, 2002, 1998). Inicialmente, a ação com acoplamento minimal entre o campo de matéria e a curvatura do espaço-tempo é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{R}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_{mat} \right), \quad (357)$$

em que a densidade lagrangiana \mathcal{L}_{mat} pode representar a soma da densidade Lagrangiana do campo *MDO* com a matéria bariônica, por exemplo, $\mathcal{L}_{mat} = \mathcal{L}_{MDO} + \mathcal{L}_b$. Por conseguinte, toma-se a variação da ação (357) em relação ao tensor métrico e de contorção, respectivamente:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \rightarrow G_{\mu\nu} = \kappa^2 t_{\mu\nu}, \quad (358)$$

$$\frac{\delta S}{\delta K^{\mu\nu}{}_{\rho}} \rightarrow \Sigma_{\mu\nu}{}^{\rho} = \kappa^2 \tau_{\mu\nu}{}^{\rho}. \quad (359)$$

A primeira equação relaciona o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ com o tensor energia-momento canônico $t_{\mu\nu}$, enquanto que a segunda equação cria uma função algébrica relacionando a torção com tensor spin-momento angular (TRAUTMAN, 2006). De maneira mais explícita, as equações acima podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 t_{\mu\nu}, \quad (360)$$

$$S_{\mu\nu}{}^{\rho} + \delta_{\mu}^{\rho} S_{\nu\sigma}{}^{\sigma} - \delta_{\nu}^{\rho} S_{\mu\sigma}{}^{\sigma} = \kappa^2 \tau_{\mu\nu}{}^{\rho}, \quad (361)$$

em que δ_{μ}^{ρ} é o delta de Kronecker e $S_{\mu\nu}{}^{\rho}$ é o tensor de torção. Estas equações são conhecidas por sistema de equações de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECSK) e são equivalentes às equações de Einstein para um espaço-tempo com torção (BÖHMER, 2007). Note que uma das consequências da torção é que o tensor de Ricci pode não ser simétrico, levando também a um tensor energia-momento, $t_{\mu\nu}$, não simétrico, diferente do requerido pela Teoria da Relatividade Geral. Portanto há a necessidade de buscar um tensor de Belinfante-Rosenfeld (WEINBERG, 1995) a partir da inclusão de um termo de curvatura, da seguinte forma:

$$T_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} + (\nabla_{\rho} + K_{\sigma\rho}{}^{\sigma}) (\tau_{\mu\nu}{}^{\rho} - \tau_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu} + \tau^{\rho}{}_{\mu\nu}). \quad (362)$$

O tensor $T^{\mu\nu}$ é simétrico e satisfaz a equação da continuidade $\mathcal{D}_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu} = 0$. Com isso a equação (360), pode ser escrita como

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (363)$$

Somando a equação algébrica da torção (361) com a equação (360), é possível obter uma equação de campo efetiva

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{eff}, \quad (364)$$

em que $\tilde{G}_{\mu\nu}$ são as equações de Einstein sem torção e

$$T_{\mu\nu}^{eff} = t_{\mu\nu} + \kappa^2 \left[\tau^{\rho\sigma}{}_{\mu} \tau_{\rho\sigma\nu} - 4\tau_{\mu}{}^{\rho}{}_{(\sigma} \tau_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\rho)} - 2\tau_{\mu}{}^{\rho\sigma} \tau_{\nu\rho\sigma} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left(4\tau_{\alpha}{}^{\rho}{}_{(\sigma} \tau^{\alpha\sigma}{}_{\rho)} + \tau^{\rho\sigma\alpha} \tau_{\rho\sigma\alpha} \right) \right]. \quad (365)$$

Este tensor energia-momento efetivo é simétrico e também satisfaz $\mathcal{D}_{\mu}T^{\mu}{}_{\nu} = 0$. Com a forma efetiva da equação de campo, toda a contribuição da torção aparece no tensor $T_{\mu\nu}^{eff}$, tendo em vista que, pela Teoria da Relatividade Geral, a matéria se acopla às quantidades geométricas, enquanto que o spin não. Além disso a torção está presente apenas em regiões do espaço-tempo com fontes de torção, portanto à equação de campo efetiva (364) é de certa forma mais útil e completa que a equação (363) (BOEHMER; BURNETT, 2008; TILQUIN, 2011).

A seguir serão definidas as equações de movimento, tanto para as equações de campo (360) quanto para (364), uma vez que a primeira será usada para realizar a teoria de perturbação cosmológica e a segunda para descrever a inflação cósmica, matéria escura e energia escura nos capítulos seguintes.

5.4.2.1 Componentes do tensor energia-momento

O tensor energia-momento simétrico dado pela equação (362) pode ser explicitamente determinado⁶, considerando a métrica (324) e a densidade Lagrangiana dada por (355). Assim, o tensor energia-momento de Belinfante-Rosenfeld é então (BÖHMER, 2010; BOEHMER; BURNETT, 2008)

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{MDO})}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta\mathcal{L}_{MDO}}{\delta K_{\mu\nu}{}^{\rho}} \right) = \overleftarrow{\lambda} \overleftarrow{\mathcal{D}}^{(\mu} \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\nu)} \lambda - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{MDO} + T'^{\mu\nu}. \quad (366)$$

Como $T'^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\rho}J^{\mu\nu\rho}$, a forma geral para $T^{\mu\nu}$ é escrita como

⁶Para maior detalhamento das equações apresentadas, vide Apêndice C.

$$T^{\mu\nu} = \overleftarrow{\lambda} \mathcal{D}^{\left(\mu \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\nu}\right)} \lambda - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{MDO} + \frac{1}{2} \mathcal{D}_\rho J^{\mu\nu\rho}. \quad (367)$$

que é a mesma forma do tensor energia-momento para o campo MDO sem torção (321). Para determinar explicitamente esse tensor é necessário encontrar a corrente cosmológica $J^{\mu\nu\rho}$, dada por $J^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} \left(\tilde{J}^{\mu\nu\rho} + \tilde{J}^{\nu\mu\rho} \right)$, em que

$$\tilde{J}_\mu^{\nu\rho} e_\nu^a e_\rho^b \equiv \tilde{J}_\mu^{ab} = -i \left[\overleftarrow{\lambda} \left(\Gamma_\mu S^{ab} + S^{ab} \Gamma_\mu \right) \lambda \right]. \quad (368)$$

Cujas componentes não nulas são

$$J^{itj} = -J^{tj} = \frac{1}{4} \frac{\varphi^2 b}{a^3 N^2} \delta_{ij} + \frac{f \varphi^2}{8a^3 N} \delta^{ij} \quad \text{e} \quad J^{ijt} = -\frac{1}{2} \frac{\varphi^2 b}{a^3 N^2} \delta_{ij} - \frac{f \varphi^2}{4a^3 N} \delta^{ij}. \quad (369)$$

A divergência dessa corrente fornece:

$$\frac{1}{2} \mathcal{D}_\rho J^{t\rho} = \frac{3b^2 \varphi^2}{4a^2 N^4} + \frac{3bf \varphi^2}{8a^2 N^3}, \quad (370)$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{D}_\rho J^{ij\rho} = -\frac{1}{2a^2 N} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{b\varphi^2}{2aN} \right) + \frac{b^2 \varphi^2}{a^2 N} \right] \delta^{ij} + \mathfrak{F}_1, \quad (371)$$

em que \mathfrak{F}_n , com $n = 1, 2, 3, \dots$, denotará um conjunto de funções genéricas⁷ para representar os termos contendo a função de torção $f(t)$ e suas derivadas. Substituindo as expressões (354), (356), e (370) em (367), é obtida a seguinte densidade de energia:

$$\rho = T_t^t = \frac{1}{2N^2} \left[\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{4} \frac{b^2 \varphi^2}{a^2} + N^2 V + N^2 \mathfrak{F}_2 \right]. \quad (372)$$

Por sua vez, a densidade de pressão é

$$p = -T_j^i = \frac{\delta_j^i}{2} \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{N^2} - V - \frac{3}{4} \frac{b^2 \varphi^2}{a^2 N^2} - \frac{1}{2N} \frac{d}{dt} \left(\frac{b\varphi^2}{aN} \right) + \mathfrak{F}_3 \right]. \quad (373)$$

Cabe ressaltar que por essa abordagem do tensor energia-momento, a equação da continuidade $\mathcal{D}_\mu T^\mu_\nu$, fornece

⁷Fazemos isso pois naturalmente $f = 0$ nas equações de movimento perturbadas, como será visto no capítulo sobre perturbações. Para o leitor interessado, no Apêndice 8.1 é apresentada a forma explícita desses termos.

$$\mathcal{D}_\mu T^\mu{}_\nu = \dot{\rho} + 3\frac{b}{a}(\rho + p) = 0, \quad (374)$$

$$= \frac{\ddot{\varphi}}{N^2} - \frac{\dot{N}\dot{\varphi}}{N^3} - \frac{3b\dot{\varphi}}{aN^2} - \frac{3b^2\varphi}{4a^2N^2} + V_{,\varphi} + \frac{\mathfrak{F}_4}{\dot{\varphi}} = 0. \quad (375)$$

Uma vez obtidas a equação da pressão e da densidade de energia, pode-se obter o sistema de equações conhecido por *equações ECSK*, que nada mais são do que o equivalente das equações de Einstein para o espaço-tempo com torção.

5.4.3 Determinando as equações de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble

Antes de obter as componentes da equação ECSK cabe uma importante menção: É possível obter um análogo das equações de Einstein a partir das equações (363) sem utilizar diretamente as equações (361), entretanto uma forma mais completa dessas equações é dada pela equação (364). As equações obtidas a partir de (363), embora de certa forma incompletas, são mais simples e válidas para uma primeira aproximação da perturbação escalar a qual será feita no capítulo 7, portanto se faz necessário construir um sistema de equações tanto para (363) quanto para (364).

As equações ECSK foram introduzidas na seção anterior, equação (363), e agora é possível encontrar uma forma explícita para suas componentes. Uma vez que as componentes da conexão afim foram obtidas na seção 5.4.1 e a densidade de energia e pressão são dadas nas equações (372) e (373), é necessário determinar o escalar de curvatura $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ para o caso com torção. Uma vez que o tensor de curvatura é dado por

$$R^\rho{}_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\rho_{\sigma\nu} + \Gamma^\rho_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}, \quad (376)$$

as únicas componentes relevantes deste tensor para a construção do escalar de curvatura são $R^t{}_{iti}$, $R^j{}_{tjt}$ e $R^j{}_{iji}$ (para $i \neq j$), as quais possuem as seguintes formas:

$$R^t{}_{iti} = 3\partial_0 \left(\frac{ab}{N^2} \right) + 3\frac{\dot{N}ab}{N^3} - 3\frac{b\dot{a}}{N^2}, \quad (377)$$

$$R^j{}_{tjt} = -3\partial_0 \left(\frac{b}{a} \right) + 3\frac{\dot{N}b}{aN} - 3\frac{b\dot{a}}{a^2}, \quad (378)$$

$$R^j{}_{iji} = 6\frac{b^2}{N^2} - 6f^2. \quad (379)$$

Como $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{tt} R^j{}_{tjt} + g^{ii} (R^t{}_{iti} + R^j{}_{iji})$, chega-se a

$$R = -6 \left[\frac{1}{aN} \frac{d}{dt} \left(\frac{b}{N} \right) + \left(\frac{b}{aN} \right)^2 - \left(\frac{f}{a} \right)^2 \right]. \quad (380)$$

Utilizando o escalar e o tensor de curvatura obtidos, as equação de ECSK tomam a forma:

$$G^t_t = \frac{3b^2}{a^2N^2} - \frac{3f^2}{4a^2} = \kappa^2 T^t_t, \quad (381)$$

$$G^t_i = \kappa^2 T^t_i = 0, \quad (382)$$

$$G^i_j = \left[\frac{b^2}{a^2N^2} + \frac{2}{aN} \left(\frac{b}{N} \right)' - \frac{f^2}{4a^2} \right] \delta^i_j = \kappa^2 T^i_j. \quad (383)$$

Finalmente, substituindo as componentes do tensor energia-momento (372) e (373) nas equações (381) e (383), são obtidas as equações:

$$\frac{3b^2}{a^2N^2} - \frac{3f^2}{4a^2} = \frac{\kappa^2}{2N^2} \left[\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{4} \frac{b^2 \varphi^2}{a^2} + N^2 V + N^2 \mathfrak{F}_2 \right], \quad (384)$$

$$\frac{b^2}{a^2N^2} + \frac{2}{aN} \frac{d}{dt} \left(\frac{b}{N} \right) - \frac{f^2}{4a^2} = -\frac{\kappa^2}{2} \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{N^2} - V - \frac{3}{4} \frac{b^2 \varphi^2}{a^2 N^2} - \frac{1}{2N} \frac{d}{dt} \left(\frac{b \varphi^2}{aN} \right) + \mathfrak{F}_3 \right], \quad (385)$$

as quais representam as componentes não nulas da equação (363). Fazendo $h, f \rightarrow 0$ e $N \rightarrow 1$, as equações de Einstein para o campo MDO sem torção são recobradas.

5.4.3.1 Equações de movimento para a ação efetiva

Como visto anteriormente no subcapítulo 5.4.2, é possível construir uma equação efetiva para o campo MDO a partir da equação (364), portanto considerar-se-á uma ação da seguinte forma

$$S = S_{EH} + S_{MDO} + S_m, \quad (386)$$

em que S_m é uma ação de matéria posta para descrever futuros acoplamentos com a matéria bariônica e

$$S_{EH} + S_{MDO} = \int dt \sqrt{-g} \left[-\frac{R}{2} + \mathcal{L}_{MDO} \right]. \quad (387)$$

Tomando a variação do funcional da ação total, chega-se a

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int dt [-\delta(\sqrt{-g}R) + \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{MDO})] + \delta S_m. \quad (388)$$

Ainda que haja termos de torção, as igualdades são verdadeiras (TRAUTMAN, 2006; SHAPIRO, 2002):

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{G^{\mu\nu}}{\kappa^2}, \quad (389)$$

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{MDO}}{\delta g_{\mu\nu}} = -T_{eff}^{\mu\nu}, \quad (390)$$

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}} = -T_m^{\mu\nu}. \quad (391)$$

Para não poluir a notação, o tensor energia-momento efetivo $T_{eff}^{\mu\nu}$ será escrito apenas como $T^{\mu\nu}$. O resultado da soma dessas variações é

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} &= \frac{\delta S_{EH}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_{MDO}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}, \\ &= \tilde{G}^{\mu\nu} - \kappa^2 (T^{\mu\nu} + T_m^{\mu\nu}) = 0. \end{aligned} \quad (392)$$

Considerando a densidade Lagrangiana (356), a ação (386) pode ser escrita como (KOUWN, 2013; SHAPIRO, 2002)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{R}{2\kappa^2} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda} \mathcal{D}_\nu \lambda - \frac{1}{2} V(\bar{\lambda} \lambda) \right] + S_m. \quad (393)$$

Escrevendo o spinor a partir da função φ definida por (308), a seguinte ação é obtida (KOUWN, 2013):

$$\begin{aligned} S &= \int dt \frac{1}{N} \left(\frac{3a\dot{a}^2}{\kappa^2} - \frac{3a^3 h^2}{\kappa^2} - \frac{1}{2} a^3 \dot{\varphi}^2 - \frac{3}{8} a(\dot{a} + ah)^2 \varphi^2 \right) \\ &\quad - N \left(\frac{3a^3 f^2}{\kappa^2} + \frac{3}{8} a^3 f^2 \varphi^2 + a^3 V(\varphi) \right) + S_m, \end{aligned} \quad (394)$$

sendo $V(\varphi)$ um potencial cosmológico. Tomando a variação de (394) em relação as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e em seguida, fazendo $N \rightarrow 1$, são alcançadas as equações de movimento. Tomando a variação em relação a função lapso $N = g_{tt}$, a componente temporal da equação de Einstein-Cartan toma a forma

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta g_{tt}} &= 3H^2 - \kappa^2 \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) + \frac{3}{8}H^2\varphi^2 + \frac{3}{4}Hh\varphi^2 \right] - 3 \left(1 + \frac{1}{8}\kappa^2\varphi^2 \right) h^2 \\
&- 3 \left(1 + \frac{1}{8}\kappa^2\varphi^2 \right) f^2 + \kappa^2 T_m^{tt} \\
&= \tilde{G}^{tt} - \kappa^2 (T^{tt} + T_m^{tt}) = 0.
\end{aligned} \tag{395}$$

com T_m^{tt} representando a componente temporal do tensor energia-momento do campo de matéria. A título de acorrer a identificação dos termos escreve-se

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^{tt} &= H^2, \\
T^{tt} &= \frac{\kappa^2}{3} \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) + \frac{3}{8}H^2\varphi^2 + \frac{3}{4}Hh\varphi^2 \right] + \left(1 + \frac{\kappa^2\varphi^2}{8} \right) h^2.
\end{aligned}$$

É manifesto que a torção agora é componente apenas do tensor energia-momento efetivo, não atuando sobre a forma final das componentes do tensor $\tilde{G}^{\mu\nu}$. Por sua vez, a partir da variação da ação (394) em relação a $g_{ii} = -a$, obtêm-se

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta g_{ii}} &= 2\dot{H} + 3H^2 + \kappa^2 \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\Phi) - \frac{3}{8}H^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\frac{d}{dt}[(H+h)\varphi^2] \right] \\
&+ 3 \left(1 + \frac{1}{8}\kappa^2\varphi^2 \right) h^2 - 3 \left(1 + \frac{1}{8}\kappa^2\varphi^2 \right) f^2 + \kappa^2 T_m^{ii}, \\
&= \tilde{G}^{ii} - \kappa^2 (T^{ii} + T_m^{ii}) = 0.
\end{aligned} \tag{396}$$

Pode-se encontrar também a equação que guia a dinâmica do campo escalar φ , a partir da variação da ação perante o mesmo, como segue (KOUWN, 2013):

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi} - \frac{3}{4} \left((H+h)^2 - f^2 \right) \varphi = 0. \tag{397}$$

Por fim, subsiste a necessidade de se lançar forma sobre as funções temporais da torção, $h(t)$ e $f(t)$, respectivamente tem-se:

$$\frac{\delta S}{\delta h} = 2h + \frac{\kappa^2\varphi^2}{4} (H+h) = 0, \tag{398}$$

$$\frac{\delta S}{\delta f} = -f \left(\frac{2a^4}{\kappa^2} + \frac{3\varphi^2}{4} \right) = 0. \tag{399}$$

As equações (398) e (399) evidenciam que $h(t)$ é a única função de torção não nula no caso específico de uma métrica homogênea e isotrópica (KOUWN, 2013).

A primordialidade da obtenção das equações de Friedmann se faz patente neste momento, para tanto as equações (395) e (396) são escritas de maneira conveniente:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) + \frac{3}{8} H^2 \varphi^2 + \frac{3}{4} H h \varphi^2 \right] + \left(1 + \frac{\kappa^2 \varphi^2}{8} \right) h^2 - \frac{\kappa^2}{3} T_m^{tt}, \quad (400)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} \left[\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{4} H h \varphi^2 - \frac{1}{4} \frac{d}{dt} [(H + h) \varphi^2] \right] - 3 \left(1 + \frac{\kappa^2 \varphi^2}{8} \right) h^2 - \frac{\kappa^2}{2} T_m^{ii}. \quad (401)$$

Por sua vez, a equação de movimento para φ pode ser simplificada como

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi} - \frac{3}{4}(H + h)^2 \varphi = 0. \quad (402)$$

Embora as equações (400) e (401) configurem as equações de Friedmann buscadas, estas são passivas de maior simplificação, bastando utilizar a função $h(t)$, dada na equação (398), como segue

$$h(t) = -\frac{1}{8} \frac{\kappa^2 \varphi^2}{(1 + \kappa^2 \varphi^2 / 8)} H, \quad (403)$$

essa expressão atua como vínculo entre função de torção h e o campo φ . Fazendo a substituição de (403) nas eqs. (400) - (402), a forma final das equações de Friedmann é (KOUNN, 2013):

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(1 + \frac{\kappa^2 \varphi^2}{8} \right) \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) + \rho_m \right], \quad (404)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} \left(1 + \frac{\kappa^2 \varphi^2}{8} \right) \left[\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} \frac{H \varphi \dot{\varphi}}{(1 + \kappa^2 \varphi^2 / 8)^2} + \rho_m + p_m \right], \quad (405)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} - \frac{3}{4} \frac{H^2 \varphi}{(1 + \kappa^2 \varphi^2 / 8)^2} = 0. \quad (406)$$

Dado que $\tilde{G}_t^t = \kappa^2 \rho$ e $\tilde{G}_j^i = -\kappa^2 p \delta_{ij}$, as equações para a densidade de energia e pressão do campo MDO podem ser facilmente obtidas a partir das equações (395) e (396) (PEREIRA, 2017):

$$\rho_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) + \frac{3}{8} \frac{H^2 \varphi^2}{(1 + \kappa^2 \varphi^2/8)}, \quad (407)$$

$$p_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi) - \frac{3}{8} \frac{H^2 \varphi^2}{(1 + \kappa^2 \varphi^2/8)} - \frac{1}{4} \frac{\dot{H} \varphi^2}{(1 + \kappa^2 \varphi^2/8)} - \frac{1}{2} \frac{H \varphi \dot{\varphi}}{(1 + \kappa^2 \varphi^2/8)^2}, \quad (408)$$

como de costume, ρ_m e p_m são a densidade de energia e a pressão de outros componentes da matéria, os quais satisfazem a equação de conservação para o fluido perfeito

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0. \quad (409)$$

Agora, substituindo as Eqs. (404) e (405) nas equações (407) e (408), é possível escrever as expressões para ρ_φ e p_φ dadas acima, em uma forma diferente (PEREIRA; ALVES; GUIMARÃES, 2018):

$$\rho_\varphi = \frac{\kappa^2 \varphi^2}{8} \rho_m + \left(1 + \frac{\kappa^2 \varphi^2}{8}\right) \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi)\right], \quad (410)$$

$$p_\varphi = \frac{\kappa^2 \varphi^2}{8} p_m + \left(1 + \frac{\kappa^2 \varphi^2}{8}\right) \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi)\right] - \frac{1}{2} \frac{H \varphi \dot{\varphi}}{(1 + \kappa^2 \varphi^2/8)}, \quad (411)$$

as quais podem ser combinadas de maneira que

$$\dot{\rho}_\varphi + 3H(\rho_\varphi + p_\varphi) = 0. \quad (412)$$

Observe que a presença de um acoplamento entre o campo MDO com a densidade de energia e pressão da matéria usual nos primeiros termos das equações (410) e (411), são uma manifestação do acoplamento entre os componentes de spin do campo MDO com a gravidade, de tal forma que ao tomar o espaço-tempo de Minkowski ($H = 0$) recupera-se ρ_ϕ e p_ϕ para o campo escalar usual, como pode ser verificado diretamente por meio das equações (407) e (408).

A partir da formulação acima, é visto que o modelo atual é equivalente em forma a um modelo com torção zero contendo apenas componentes de fluidos perfeitos, de maneira que um deles possui a densidade de energia e pressão definidas pelas equação (410) e (411). Além disso, a equação (412) é obviamente equivalente a equação (406), e as equações (404) e (405) agora podem ser escritas como

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_\varphi + \rho_m), \quad (413)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2}(\rho_\varphi + p_\varphi + \rho_m + p_m). \quad (414)$$

Note que a estrutura desse sistema de equações é muito mais rica do que as correspondentes a um campo escalar usual, equações (58) e (59). Por essa razão, o campo MDO pode ser um bom candidato para impulsionar não apenas a fase inflacionária do Universo, mas também as fases subsequentes, como a evolução da matéria escura e a expansão acelerada. No capítulo seguinte será abordado o conjunto de equações acima para cada uma dessas fases.

5.4.4 Potencial cosmológico

Como visto no capítulo 2, existe uma gama de potenciais conhecidos por *potenciais cosmológicos* que são fortuitamente escolhidos de um modelo para outro. Com os dados da sonda Planck (PLANCK-COLLABORATION, 2018) vários destes potenciais foram testados e seus parâmetros finamente ajustados, além disso alguns trabalhos foram publicados descrevendo mecanismos para a criação de potenciais fisicamente realizáveis no âmbito cosmológico (CARDENAS, 2004; PADMANABHAN, 2010; ELLIS, 1998). Contudo nenhum potencial foi fixado como preferencial, deixando ainda uma larga margem para a escolha do mesmo.

Devido à pequena restrição sobre os potenciais $V(\varphi)$, é possível buscar auxílio nas condições de *Slow-Roll* e de renormalização do campo φ , portanto utilizar-se-á potenciais de quarta ordem⁸ em φ e que satisfaçam as condições (70) e (73). Decorrente da busca na literatura, dois potenciais foram previamente escolhidos, o primeiro é um potencial com quebra de simetria (PEREIRA; GUIMARÃES, 2017)

$$V_1(\varphi) = \Lambda^4 \left(1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_c^2}\right)^2, \quad (415)$$

em que Λ e φ_c são constantes positivas. Este potencial foi escolhido para guiar o período inflacionário, uma vez que é esperado que a inflação ocorra enquanto o campo φ desce para vácuo de V e termine quando $\varphi = \pm\varphi_c$. Por outro lado, nas referências Pereira (2017); Pereira; Holanda; S. (2017) o potencial escolhido foi da forma

$$V_2(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\alpha}{4}\varphi^4, \quad (416)$$

⁸Usufruindo do argumento de simplicidade, dar-se-á preferencia a potenciais polinomiais de quarta ordem, entretanto não foram encontradas restrições ao uso dos demais potenciais, além daquelas já citadas.

sendo m a massa física do campo e α uma constante de acoplamento adimensional. Tal potencial, pode ser usado tanto descrever a inflação cósmica, em modelos chamados de “caóticos”, quanto para descrever a evolução da matéria escura (PEREIRA; HOLANDA; S., 2017). De maneira a criar uma evolução completa do Universo, desde o período inflacionário até a aceleração cósmica recente, será escolhido de um potencial da forma

$$V(\varphi) = V_1(\varphi) + V_2(\varphi), \quad (417)$$

com V_1 e V_2 dados por (415) e (416), e também a presença dos campos matéria bariônica é considerada em momento oportuno. Como será visto nos capítulos seguintes, todos os estágios de evolução do Universo podem ser recuperados de maneira natural com o modelo proposto.

No próximo capítulo será construída a evolução completa do Universo impulsionada pelo spinor escuro MDO, começando com a inflação, passando pela era dominada pela matéria e terminando com a recente expansão acelerada. A dinâmica do campo fermiônico MDO com um potencial com quebra de simetria pôde reproduzir todas essas fases do Universo de maneira natural e elegante.

6 MODELO COSMOLÓGICO UNIFICADO UTILIZANDO O CAMPO MDO COM TORÇÃO

Neste capítulo, será apresentada a construção de um modelo cosmológico unificado, no qual o Universo é preenchido com um campo fermiônico de dimensão de massa um (MDO) e também demais campos de matéria bariônica. O modelo em questão descreve a dinâmica de um campo que, após uma flutuação quântica primordial, lentamente rola até o vácuo verdadeiro de um potencial com quebra de simetria, levando o Universo a um regime inflacionário no qual fator de escala aumenta cerca de 71 *e-folds*, no modelo considerando campos de matéria, e 93 na ausência destes. Após o fim da inflação, o campo começa a oscilar e pode, em princípio, transferir sua energia para as partículas do modelo padrão através de um mecanismo de reaquecimento. Tal processo é brevemente discutido em termos dos acoplamentos admissíveis do campo MDO com os campos eletromagnéticos e Higgs. É mostrado ainda que, mesmo que o campo perca toda a sua energia cinética durante o reaquecimento, ele pode evoluir como matéria escura devido a um acoplamento gravitacional com a matéria bariônica. Como o campo adquire valor constante no vácuo do potencial, um termo de massa não nulo, embora minúsculo, atua como componente de energia escura nos dias de hoje. Por sua vez, a torção desempenha um papel importante neste modelo, dando origem a um “solavanco” no parâmetro de Hubble ao final da inflação e, após este evento, se torna proporcional e da mesma ordem de grandeza de $H(t)$ até o presente momento. Portanto, ao fim se conclui que o campo fermiônico MDO é um bom candidato para conduzir toda a evolução do Universo de forma unificada, de modo que o campo inflacionário, matéria escura e energia escura são descritos por diferentes manifestações de um único campo físico.

6.1 INFLAÇÃO CÓSMICA

Inicialmente não serão considerados acoplamentos do campo φ com a matéria bariônica, portanto $\rho_m = p_m = 0$, focando de imediato apenas na dinâmica deste campo. Um modelo mais completo, este sim considerando acoplamentos com a matéria bariônica, será estudado na seção 6.2.

Para um campo capaz de fazer coerentemente a inflação cósmica, espera-se que o mesmo atue sobre a expansão do fator de escala $a(t)$ por tempo limitado e suficiente para que o Universo atinja um tamanho esperado (WEINBERG, 2008; GUTH, 1981) e, assim, solucione os problemas apresentados no capítulo 2. As equações de movimento

que guiam esse comportamento para o spinor MDO (KOUWN, 2013), foram obtidas no capítulo anterior e são dadas pelo sistema (404)-(406), a relembrar

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(1 + \frac{\kappa^2 \varphi^2}{8} \right) \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) \right], \quad (418)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} \left(1 + \frac{\kappa^2 \varphi^2}{8} \right) \left[\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} \frac{H \varphi \dot{\varphi}}{(1 + \kappa^2 \varphi^2/8)^2} \right], \quad (419)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} - \frac{3}{4} \frac{H^2 \varphi}{(1 + \kappa^2 \varphi^2/8)^2} = 0. \quad (420)$$

Cabe ressaltar que o último termo da equação (420) é semelhante ao termo de taxa de decaimento Γ que alguns modelos cosmológicos com campo escalar usual utilizam para a produção de partículas após a inflação (LIDDLE; LYTH, 2000; KOLB, 1990; KOFMAN, 1997), a saber

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} + \Gamma\dot{\phi} = 0. \quad (421)$$

Com as equações de movimento expostas e discutidas, é necessário analisar suas soluções para a fase de inflação do Universo e mesmo posteriormente.

Uma primeira observação importante é que em um modelo cosmológico cuja dinâmica é guiada por um campo fermiônico, a inflação pode ser interpretada à luz do princípio de exclusão de Pauli (PEREIRA; GUIMARÃES, 2017; PEREIRA; HOLANDA; S., 2017). Na fase pré-inflacionária, as partículas estão preenchendo os estados de energia, de acordo com este princípio, entretanto todas essas partículas estão rolando para o vácuo do potencial, cada uma tentando ocupar o estado de menor energia, enquanto a pressão de degenerescência proíbe que as mais energéticas ocupem os estados de energias mais baixos. Tal sistema pode permanecer em equilíbrio nesta configuração, como ocorre em uma estrela de nêutrons, ou todas as partículas podem atingir o estado de menor energia (com um pequeno espaçamento de energia entre elas) desde que o volume do sistema aumente significativamente, como ocorre após a inflação. É bem conhecido que o espaçamento de energia em alguns sistemas quânticos é inversamente proporcional ao seu volume, assim o efeito da pressão de degenerescência é ampliar o sistema, dando origem ao processo inflacionário, no qual o volume de todo o sistema aumenta de forma a permitir que as partículas ocupem aproximadamente o menor estado de energia. Assim, o princípio de exclusão de Pauli age como uma força repulsiva e faz com que todo o sistema se expanda, causando a inflação. Observe que tal interpretação quântica não é possível para um campo escalar bosônico, o principal ingrediente do modelo padrão de inflação.

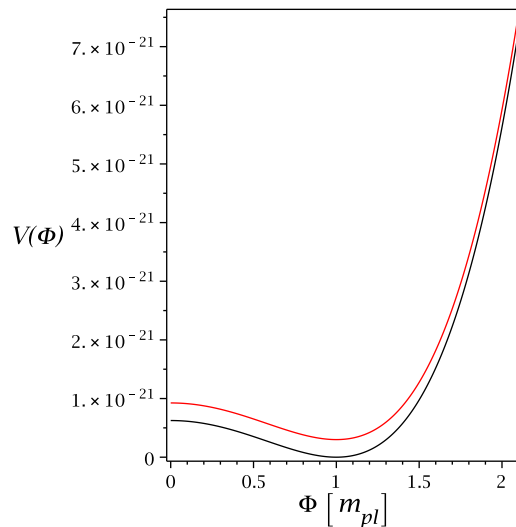
A fim de trabalhar com as equações de movimento para descrever a dinâmica do campo MDO durante o processo inflacionário, é preciso fixar algumas considerações sobre o potencial. Embora o potencial utilizado pelo modelo seja dado por (417), no início e

durante a inflação pode-se trabalhar no limite $V_1 \gg V_2$, pois $\Lambda \gg m$. Dessa forma, o potencial V_2 irá dominar a dinâmica do campo φ apenas quando este estiver no vácuo de V_1 , levando a contribuição do tipo $V_2(\varphi_c) = \frac{1}{2}m^2\varphi_c^2 + \frac{\alpha}{4}\varphi_c^4 \equiv v_0$, portanto, a contribuição de V_2 durante a inflação será representada pela constante v_0 . Logo, apenas o potencial cosmológico com quebra de simetria possui relevância direta para a inflação cósmica (PEREIRA; GUIMARÃES, 2017), nesse caso. Assim,

$$V(\varphi) = v_0 + \Lambda^4 \left(1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_c^2}\right)^2 = V_0 - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{\alpha}{4}\varphi^4, \quad (422)$$

em que $V_0 = v_0 + \Lambda^4$, $\mu = 2\Lambda^2/\varphi_c$ e $\alpha = 4\Lambda^4/\varphi_c^4$, com Λ , φ_c e $v_0 \ll \Lambda^4$ constantes positivas. Como tal potencial representa uma partícula de massa efetiva $m = \sqrt{2}\mu$, cujo mínimo se encontra em $\varphi = \varphi_c$, é notório que o valor do potencial no vácuo é zero se $v_0 = 0$, como mostrado na Figura 15 (linha preta), ou deslocado por $v_0 \neq 0$, como mostrado na mesma figura (linha vermelha). Portanto sua forma é a obtida abaixo

Figura 15: Potencial (422) (em unidade de m_p^4) construído com $v_0 = 0$ (linha preta) ou deslocado por $v_0 = 3.0 \times 10^{-22}$ (linha vermelha).



Fonte: Produção do própria do autor.

Seguindo o modelo inflacionário caótico de Linde (LINDE, 1990) discutido no capítulo 3, considera-se a fase pré-inflacionária do Universo composta pelos campos MDO distribuídos caoticamente sobre todo o espaço. Em particular, é assumido que a maioria dos campos satisfazem¹ $\varphi \gtrsim m_{pl} \approx 10^{19}$ GeV, além de que sua variação temporal é maior que a variação de φ no tempo de Hubble, $\dot{\varphi} \gg H\varphi$, evidenciando a importância

¹Note que uma descrição clássica da evolução do Universo é possível para uma densidade de energia satisfazendo $\rho \ll m_{pl}^4 \sim 10^{76}$ GeV. Assim, a única exigência é $V(\varphi) \ll m_{pl}^4$ que pode ser alcançada se $\alpha \ll 1$ para o potencial (422). De agora em diante, escreveremos explicitamente $\kappa^2 = 8\pi G = 8\pi/m_{pl}^2$.

de $\dot{\varphi}$ durante a inflação. Se esta condição ocorrer em torno de $t \sim H^{-1} \approx 10^{-34} s \approx 10^{-10} \text{GeV}^{-1}$, tem-se $H \ll m_{pl}$, assim os últimos termos das equações (418) - (420) podem ser descartados, reduzindo-as a:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_p^2} \left(1 + \frac{\pi\varphi^2}{m_p^2} \right) \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) \right], \quad (423)$$

$$\dot{H} \approx -\frac{8\pi}{2m_p^2} \left(1 + \frac{\pi\varphi^2}{m_p^2} \right) \dot{\varphi}^2, \quad (424)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi}(\varphi) \approx 0. \quad (425)$$

Exceto pelo termo dentro dos parênteses (que é importante apenas no limite $\varphi \gtrsim m_p$), as expressões obtidas acima são equivalentes às (58)-(60). O leitor deve se atentar a essa equivalência, pois ela configura um entusiasmante resultado, mostrando que o campo MDO pode ser usado em todos os modelos inflacionários bem sucedidos que fazem uso de campo escalar, até então desconhecido. Isso faz do espinor MDO um candidato fisicamente mais razoável a inflaton, além de ser naturalmente um candidato a partícula de matéria escura (BÖHMER, 2007; GILLARD, 2011; AHLUWALIA-KHALILOVA, 2005).

6.1.1 Condição de Slow-Roll

Como visto na seção 3.2.1, o parâmetro de *Slow-Roll* ϵ descreve a aceleração do fator de escala em termos de H^2 , ou seja, ele é responsável pelo início da inflação cósmica. Sua forma geral é dada na equação (70) por:

$$\epsilon = \frac{\dot{H}}{H^2}.$$

Substituindo as equações (404) e (405), é obtido

$$\begin{aligned} \epsilon &= 3 \left| -\frac{\dot{\varphi}^2}{(\dot{\varphi}^2 + 2V)} + \frac{1}{2} \frac{H\varphi\dot{\varphi}}{(1 + \frac{\kappa^2\varphi^2}{8})^2 (\dot{\varphi}^2 + 2V)} \right|, \\ &= \epsilon_{can} + \frac{3}{2} \frac{H\varphi\dot{\varphi}}{(1 + \frac{\kappa^2\varphi^2}{8})^2 (\dot{\varphi}^2 + 2V)}, \end{aligned} \quad (426)$$

sendo ϵ_{can} a equação de *Slow-Roll* para o campo escalar usual (78). A equação (426) mostra que o segundo termo fornece uma pequena correção ao parâmetro ϵ em comparação ao campo escalar usual, característica semelhante surge para o campo MDO sem torção (GREDAT; SHANKARANARAYANAN, 2010; BASAK, 2011). Como as equações

(418) e (419) tendem a (423) e (424) para $H \ll m_p$, respectivamente, vê-se que a condição de *Slow-Roll* canônica é mantida, garantindo que o modelo inflacionário proposto começa exatamente como o modelo do campo escalar usual, fato este surpreendente para um campo spinorial acoplado à torção.

Já a segunda condição de *Slow-Roll* (79), pode ser obtida seguindo a mesma abordagem. Usando a equação (425), será imposto que a aceleração do campo φ seja muito pequena, a fim de levar a uma inflação longa suficiente para gerar o número de *e-folds* coerente com o esperado, portanto $\ddot{\varphi} \ll H\dot{\varphi}$. Seguindo o mesmo procedimento para η do caso canônico, porém agora com H^2 dado por (423), obtém-se diretamente

$$|\eta(\varphi)| \simeq \left| \frac{1}{\kappa^2} \frac{V_{,\varphi,\varphi}(\varphi)}{(1 + \kappa^2\varphi^2/8)V(\varphi)} \right| \ll 1, \quad (427)$$

note que η é significativamente alterado, possuindo um certo amortecimento causado pelo campo φ , que vai diminuindo a medida que o campo desce para o vácuo do potencial. Logo, quando $\varphi \ll m_p$ a expressão (79) é recuperada e quando $\varphi \gg m_p$, η toma a forma:

$$\eta \simeq \frac{m_p^4}{8\pi^2\varphi^2} \frac{V_{,\varphi,\varphi}}{V}. \quad (428)$$

Com as condições de *Slow-Roll* satisfeitas, é natural afirmar que o fator de escala $a(t)$ terá uma evolução aparentemente exponencial e, após o início da inflação, o campo φ deve decair de acordo com as equações gerais (418) - (420).

6.1.2 Análise numérica

Uma vez que as condições de *Slow-Roll* asseguram a possibilidade do campo MDO realizar inflação corretamente, é de extrema necessidade obter as soluções para o sistema de equações (418) - (420). Devido à complexidade deste sistema, soluções analíticas não são possíveis, havendo a conspícua necessidade de uma abordagem numérica e, para tanto, é preciso lançar mão de várias considerações e estimativas pertinentes. Pelos motivos anteriormente apresentados, será utilizado² o potencial (422) para ilustrar a validade do modelo e serão feitas algumas estimativas sobre os parâmetros de $V(\varphi)$, a fim de reproduzir modelos viáveis de inflação.

Primeiro, observe que o parâmetro φ_c determina a escala de energia que caracteriza a evolução final do campo φ , uma vez que o valor inicial deste campo, φ_i , rola para o vácuo do potencial levando a $V(\varphi \rightarrow \varphi_c) = 0$, o que põe fim ao mecanismo inflacionário. Tal processo, aliado ao valor da massa física do campo e da constante Λ , caracterizará o número de *e-folds* da inflação.

²Deve-se salientar que a escolha do potencial não é crítica, uma vez que basta o potencial cosmológico satisfazer a relação de *Slow-Roll*, para que se obtenha as soluções esperadas para um modelo inflacionário.

O parâmetro Λ caracteriza a energia potencial total do campo, possuindo uma forte restrição $V(\varphi_i) \ll m_p^4$, de maneira a garantir que a energia do campo esteja abaixo da escala de Planck, haja vista que assim não há a necessidade de se recorrer à teorias (ainda não existentes) de gravitação quântica. Também é esperado que a inflação ocorra após um tempo inicial $t_i \sim 10^{-35}s$, o qual não se sabe exatamente o que acontece antes dele, e termine em torno de $t_f \sim 10^{-32}s$ (LINDE, 1990). Depois disso, o Universo se expande de acordo com o modelo padrão da cosmologia.

Agora, apresentar-se-á os resultados numéricos para o seguinte conjunto de parâmetros: $v_0 = 0$, $\varphi_i = 2,1m_p$, $\varphi_c = 1,0m_p$ e $\Lambda = 5 \times 10^{-6}m_{pl} \simeq 6,1 \times 10^{13}\text{GeV}$. Cabe ressaltar que embora arbitrários, esses valores satisfazem os pré requisitos de uma inflação caótica e também estão dentro do limite observacional (PLANCK-COLLABORATION, 2018). Utilizando estes valores mencionados, é possível determinar o instante de tempo que marca o começo da inflação:

$$H^2(t_i) \simeq \frac{8\pi}{3m_p^2} \left(1 + \frac{\pi\varphi_i^2}{m_p^2}\right) V(\varphi_i) \simeq 9.04 \times 10^{-19}m_p^2, \quad (429)$$

$$\therefore t_i = H^{-1} \simeq 5.7 \times 10^{-35}s, \quad (430)$$

sendo esse valor bastante razoável para o início do processo inflacionário (MUKHANOV, 2005; GORBUNOV, 2011; WEINBERG, 2008). Note, também, que para os valores estabelecidos, é obtido $V(\varphi_i) \simeq 7.2 \times 10^{-21}m_p^4$, que garante a condição $V(\varphi_i) \ll m_{pl}^4$. Além disso, $\epsilon \approx 0.24$ e $\eta \approx 0.011$ para os parâmetros *Slow-Roll* (426) e (427). Por último, a massa efetiva do campo φ estimada com base nos mesmos valores é $m = \sqrt{2}\mu = 7.1 \times 10^{-11}m_p \simeq 8.6 \times 10^8 \text{ GeV}$ e o valor da constante de auto-acoplamento é fixado em $\alpha \simeq 2.5 \times 10^{-21}$.

Com os parâmetros corretamente estabelecidos é possível obter as soluções numéricas para as equações de movimento, mas antes é necessário escrever as equações (418) e (420) como

$$\frac{da(t)}{dt} - a(t) \sqrt{\frac{\kappa^2}{3} \left(1 + \frac{\kappa^2\varphi(t)^2}{8}\right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2 + V(\varphi)\right]} = 0, \quad (431)$$

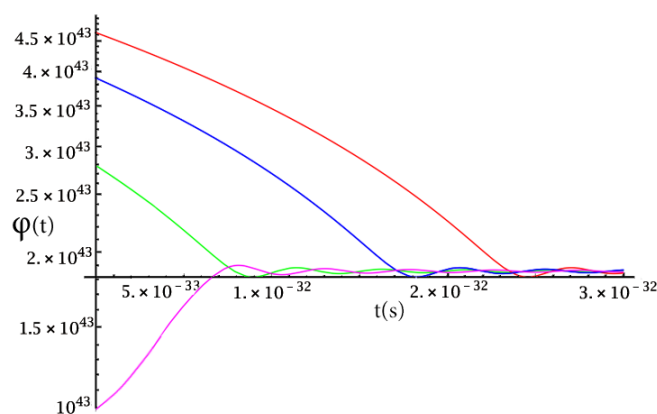
$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + 3 \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} \frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} - \frac{3}{4} \left[\frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt}\right]^2 \frac{\varphi(t)}{(1 + \kappa^2\varphi(t)^2/8)^2} = 0. \quad (432)$$

Embora não seja uma tarefa árdua desacoplar essas duas equações, tal trabalho se mostrou improfícuo, uma vez que não reduz o tempo de processamento e tão pouco permite equações mais simples ou mesmo soluções analíticas. As soluções numéricas foram obtidas utilizando o software Maple® 15, no qual foi implementado um integrador usando o

método Runge-Kutta Fehlberg de quarta ordem³, os resultados estão dispostos nas figuras abaixo.

A Figura 16 mostra diferentes resultados numéricos do campo φ para comparação. A curva em vermelho é obtida para $\varphi_i = 2,5m_p \simeq 4.6 \times 10^{43}s^{-1}$, a qual mostra que o campo MDO atinge o vácuo do potencial por volta de $2.5 \times 10^{-32}s$, na curva em azul o valor inicial foi escolhido como $\varphi_i = 2,1m_p \simeq 3.9 \times 10^{43}s^{-1}$ e então o campo MDO rola para o vácuo do potencial atingindo-o por volta de $t = 1,8 \times 10^{-32}s$. A curva em verde é obtida com $\varphi_i = 1,5m_p \simeq 2.8 \times 10^{43}s^{-1}$, a qual mostra que o campo chega ao vácuo em torno de $t = 8 \times 10^{-33}s$. Por último o valor inicial do campo MDO foi escolhido como $\varphi_i = 0,5m_p \simeq 9,5 \times 10^{42}s^{-1}$, dado pela curva em cor magenta, note que o vácuo do potencial é atingido em um tempo muito próximo do caso $\varphi_i = 1,5m_p$. Com isso, nota-se que quanto menor o valor inicial do campo MDO menor é o tempo de duração da inflação, porém cabe ressaltar que essa diferença de tempo é consideravelmente pequena. Além disso, em todas as situações o campo φ oscila em torno de seu valor mínimo de $\bar{\varphi} = \varphi_c = 1.0m_p$, exatamente como esperado (LINDE, 1990; LIDDLE, 2003), podendo talvez decair em outras partículas do modelo padrão.

Figura 16: Gráfico para o comportamento do campo φ para diferentes valores iniciais. Em vermelho é dado $\varphi_i = 2,5m_p \simeq 4.6 \times 10^{43}s^{-1}$, em azul tem-se $\varphi_i = 2,1m_p \simeq 3.9 \times 10^{43}s^{-1}$. Por sua vez, $\varphi_i = 1,5m_p \simeq 2.8 \times 10^{43}s^{-1}$ é dada em verde e por último $\varphi_i = 0,5m_p \simeq 9,5 \times 10^{42}s^{-1}$, é dado em magenta. Em todos os casos foi considerado $\dot{\varphi}_i = 0$.



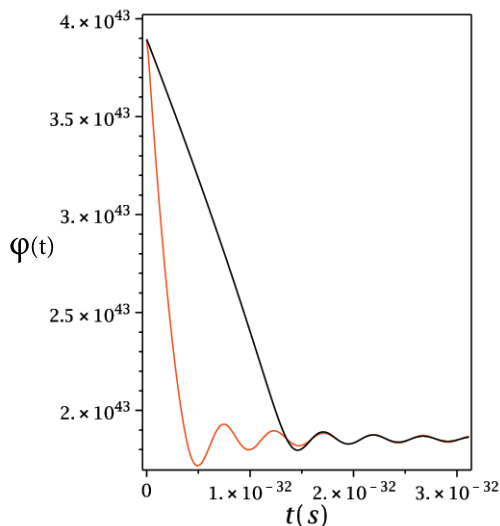
Fonte: Produção do próprio do autor.

Já na Figura 17, a linha preta mostra o resultado numérico para a equação (406) incluindo seu último termo, enquanto que a linha vermelha mostra seu comportamento na ausência deste. É conspícuo que a presença do último termo causa certo *amortecimento* enquanto o campo desce em direção ao vácuo do potencial, aumentando o tempo de inflação. Tal comportamento é análogo àquele do termo fenomenológico proporcional a Γ

³Exatamente os mesmos resultados foram obtidos com o software *Mathematica*® 11, usando apenas *NDSolve* e permitindo que o próprio software escolhesse o método de integração necessário.

para o campo escalar padrão (421).

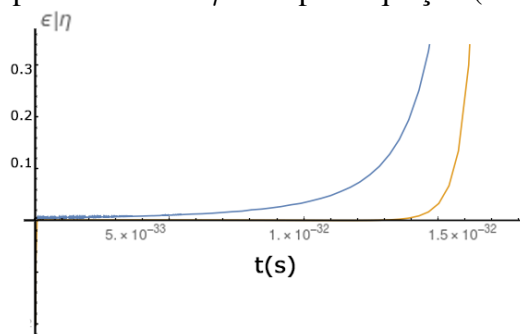
Figura 17: Comportamento do campo $\varphi(t)$ (em unidade de s^{-1}) usando os valores iniciais acima e também $d\varphi(0)/dt \equiv \dot{\varphi}_i = 0$ para a equação (406) na presença do último termo (linha preta) e na ausência deste mesmo termo (linha vermelha).



Fonte: Produção do própria do autor.

O comportamento dos parâmetros de *Slow-Roll* pode ser visto na imagem abaixo, Figura 18. Nela é possível ver o comportamento do parâmetro ϵ em azul e de η em amarelo, ambas as curvas começam em valores muito inferiores a 1, e crescem rapidamente ao final da inflação, como é esperado. O fim da inflação é marcado por $\epsilon = 1$, o que ocorre em $t \approx 1,5 \times 10^{-32} s$.

Figura 18: Em azul é dada a curva de ϵ utilizando a equação (426), enquanto a curva amarela descreve o comportamento de η dado pela equação (427).



Fonte: Produção do própria do autor.

Por sua vez, a Figura 19.(a) mostra o resultado numérico para a evolução do fator de escala para os parâmetros indicados na figura. Nota-se que $a(t)$ cresce várias ordens de

grandeza desde o tempo inicial $t_i \sim 0$ até um tempo final de $t_f \simeq 1.25 \times 10^{-32} s$, como esperado (WEINBERG, 2008; GORBUNOV, 2011). O fator de escala cresce de $a_i = 1$ para $a_f \simeq 2 \times 10^{40}$ durante a fase inflacionária, o que leva a um número *e-folds* de

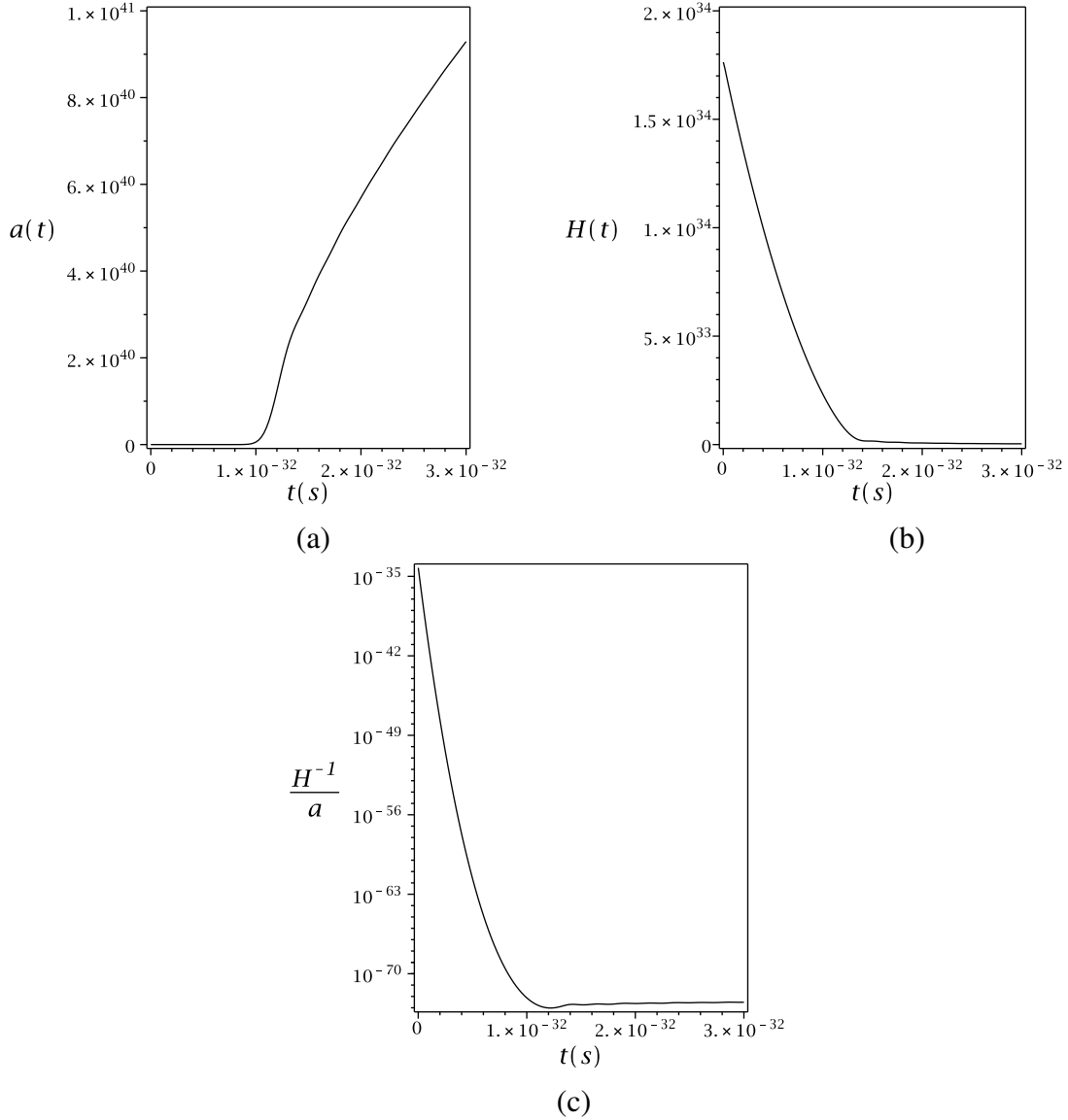
$$N = \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right) \simeq 93, \quad (433)$$

em razoável acordo com as teorias da inflação (MARTIN; RINGEVAL; VENNIN, 2013; MARTIN et al., 2014; LINDE, 2014; KINNEY, 2009; GUTH, 1981; KOFMAN, 1997). Verificou-se, também, que a escolha do valor inicial do campo, φ_i , altera drasticamente a quantidade de *e-folds* sem alterar significativamente a duração do processo inflacionário, sendo mais sensível à mudanças no parâmetro Λ , uma vez que o mesmo controla a *plana* do potencial. Assim quanto maior o valor de Λ menor é a duração da inflação, tal comportamento pode ser visto na Figura 23.(a). Depois disso, é possível observar que a evolução exponencial cessa e o Universo evolui em uma fase não-acelerada.

A Figura 19.(b) mostra a evolução de $H(t)$ decrescendo abruptamente após a inflação enquanto que na Figura 19.(c) tem-se a evolução de $H(t)^{-1}/a(t)$, evidenciando que sua derivada temporal é negativa até cerca de $t_f \sim 1.20 \times 10^{-32} s$, conforme requerido pela condição

$$\frac{d}{dt} \frac{H^{-1}}{a} < 0.$$

Figura 19: Resultados numéricos para $a(t)$, $\varphi(t)$, $H(t)$ e $H(t)^{-1}/a(t)$ durante a fase inflacionária, de $t_i = 1.0 \times 10^{-35}$ s até $t_f = 3.0 \times 10^{-32}$ s, obtidos usando $\varphi_i = 2.1m_p$, $\varphi_c = 1.0m_p$, $\Lambda = 5 \times 10^{-6}m_p \simeq 6.1 \times 10^{13}\text{GeV}$ e $v_0 = 0$. (a) - Evolução do fator de escala $a(t)$ com a condição inicial $a_i = 1$. (b) Evolução de $H(t)$ (em unidades de s^{-1}). (c) Evolução de $H(t)^{-1}/a(t)$.



Fonte: Produção do própria do autor.

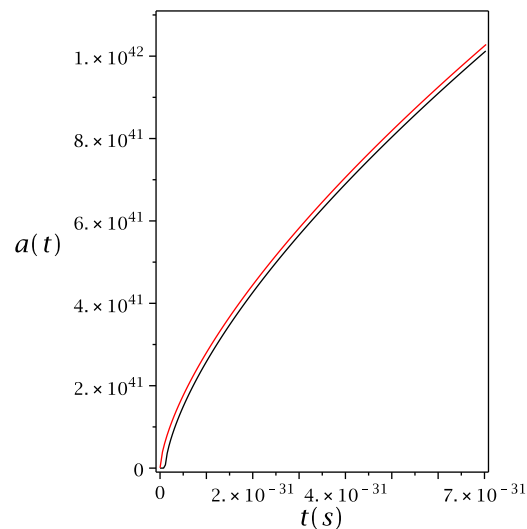
6.1.2.1 Evolução da matéria escura sem campos de matéria

Agora será analisado o comportamento do campo MDO após a inflação sem considerar a atuação de campos de matéria bariônica ou demais componentes do Universo. Como já indicado na Figura (19), após a inflação, a evolução do fator de escala muda sua concavidade e uma nova fase, dominada pela radiação, se estabelece. Como é bem conhecido do modelo padrão de cosmologia, esta fase se caracteriza por um Universo quente cujo fator de escala evolui proporcional a $t^{1/2}$. A medida que essa evolução acontece, o Universo

se resfria e dá origem à radiação CMB observada hoje. Depois da fase dominada pela radiação, o domínio da matéria escura prevalece e o fator de escala evolui proporcional a $t^{2/3}$. Nesta fase a pressão da matéria é nula, indicando que as partículas param suas colisões, dando início a formação de galáxias e aglomerados de galáxias (ZELDOVICH; NOVIKOV, 1983).

Ao contrário do modelo inflacionário padrão, construído com um campo escalar usual, em que o inflaton deve decair a zero durante o reaquecimento para que a radiação e a matéria escura comecem a dominar, no modelo construído com o campo MDO a evolução continua impulsionada pelas equações (418) - (420) (PEREIRA; GUIMARÃES, 2017; PEREIRA; ALVES; GUIMARÃES, 2018). A Figura 20 mostra a análise numérica para a evolução do fator de escala por um tempo muito longo após a inflação (linha preta), com os mesmos parâmetros anteriores. Na mesma figura, também é plotada a evolução do fator de escala para um cenário dominado por matéria escura, da forma $t^{2/3}$ (linha vermelha), apenas para comparação. Fica claro que a evolução após a inflação é exatamente como um Universo dominado por matéria, como esperado, já que o campo MDO possui características físicas de uma partícula de matéria escura.

Figura 20: Resultado numérico para o fator de escala integrando por um longo tempo (linha preta). Em vermelho está plotada a função $a(t) = a_0 t^{2/3}$ para comparação, com $a_0 = 1.30 \times 10^{62}$.



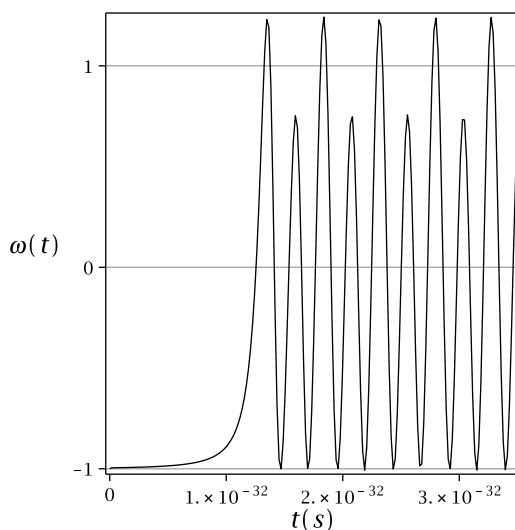
Fonte: Produção do própria do autor.

Outra maneira de analisar essa evolução após a inflação é por meio do parâmetro ω da equação de estado:

$$\omega(t) = \frac{p(t)}{\rho(t)}. \quad (434)$$

Uma análise numérica para $\omega(t)$ usando as equações (407) - (408) é mostrada na Figura 21. Percebe-se que o parâmetro ω , responsável pela aceleração durante a inflação, começa a oscilar no final deste período a partir de $\omega = -1$. Então cresce para ligeiramente acima de 1, enquanto a segunda oscilação cresce de -1 para acima de 0. É explícito que a oscilação média de ω é aproximadamente 0, mostrando que durante toda a evolução futura o parâmetro ω , da equação de estado, é do tipo *poeira*, ou seja, sem pressão, conforme exigido para uma era dominada pela matéria escura (BERTONE, 2016; ARUNAB, 2017).

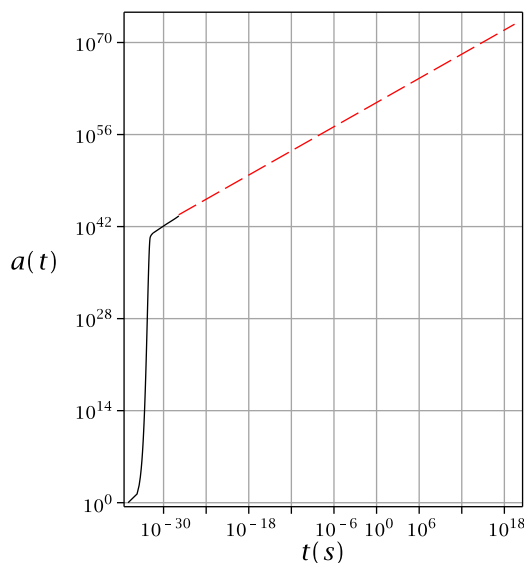
Figura 21: Análise numérica para $\omega(t)$ a partir de (434). A média das oscilações é em torno $\omega = 0$.



Fonte: Produção do própria do autor.

Devido à limitações numéricas (longo tempo de processamento), não é possível cobrir a evolução do fator de escala até o momento presente. No entanto, conhecendo a função que traça a evolução do Universo após a inflação, $a(t) = a_0 t^{2/3}$, pode-se extrapolar os dados numéricos até os dias de hoje, como é mostrado na Figura 22 (linha tracejada vermelha) em escala logarítmica. Na linha preta, mostramos o resultado numérico para $a(t)$ até $t \sim 10^{-28} s$, observe que a escala do tempo final é aproximadamente $t \simeq 10^{18} s$, ou seja, exatamente hoje. Durante este período, o fator de escala aumenta para cerca de 10^{74} , em perfeito acordo com o previsto pelo modelo padrão de cosmologia (PETER COLES, 2002; WEINBERG, 2008; PETER, 2005; KOLB, 1990).

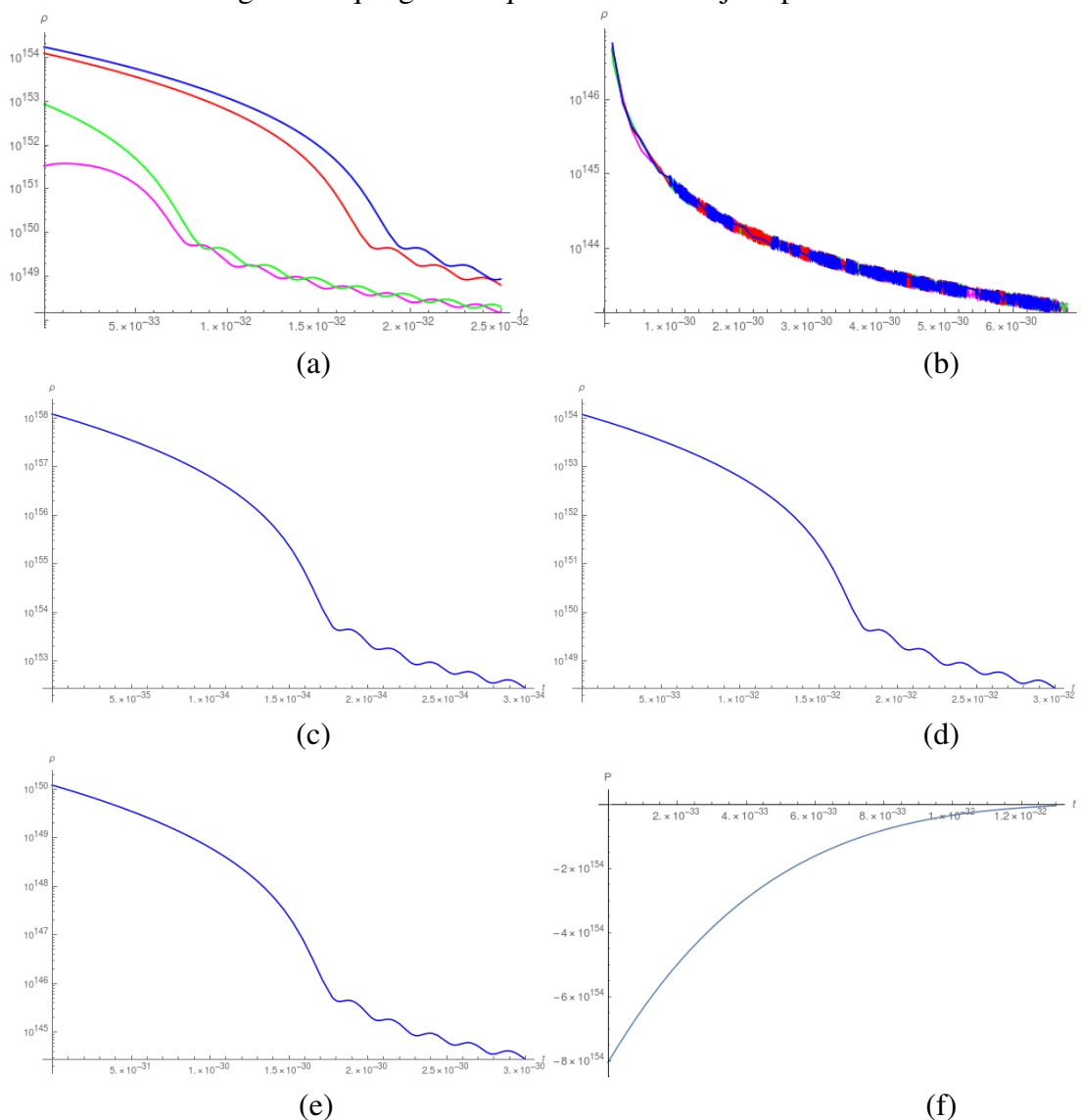
Figura 22: Resultado numérico para o fator de escala integrando por um longo tempo (linha preta). Em vermelho está plotada a função $a(t) = a_0 t^{2/3}$ para comparação, com $a_0 = 1.30 \times 10^{62}$.



Fonte: Produção do própria do autor.

Outra quantidade muito importante a ser analisada é a evolução da densidade de energia ρ e da pressão p do campo MDO, dadas por (407) e (408), respectivamente. Durante a fase inflacionária, espera-se que ρ seja aproximadamente constante e então decaia para cerca de $10^{70} - 10^{65} g/cm^3$ ao fim dessa fase, tendo seu valor final estritamente relacionado ao tempo que a inflação demora para terminar (PETER COLES, 2002; WEINBERG, 2008; PETER, 2005; KOLB, 1990; MUKHANOV, 2005). Já para a p espera-se que seu valor seja negativo, uma vez que o Universo está passando por uma expansão abrupta, ainda, sua variação também deve ser muito pequena. Na Figura 23.(a) foi plotado, em escala logarítmica, o resultado numérico para a densidade de energia (407) para diferentes valores de φ_i durante e logo após a inflação. Nota-se com clareza que ρ é praticamente constante durante a inflação e diminui abruptamente ao término desse processo. Se a inflação terminar em $t_f \sim 10^{-32} s$, a densidade de energia correspondente neste momento é de cerca de $10^{150} s^{-4} \sim 10^{53} GeV^4 \simeq 10^{70} g/cm^3$, em boa concordância com as estimativas do modelo padrão, fornecendo um importante vínculo entre o modelo e os dados observacionais. Além disso, variações no valor de φ_i também afetam o valor inicial da densidade de energia, mas não afetam tão significativamente a duração do período inflacionário, como pode ser visto na mesma figura. Um ponto interessante é que embora o valor inicial de ρ seja significativamente alterado, o valor da densidade de energia após esse período é praticamente o mesmo, como mostra a figura 23.(b), isso significa que ainda que o valor inicial do campo MDO diretamente influencie no número de *e-folds*, ele não altera a densidade de energia observada hoje.

Figura 23: (a) Comportamento da densidade de energia ρ plotado a partir da equação (407) para diferentes valores de φ_i , a saber: $\varphi_i = 2.3m_p$ em azul, $\varphi_i = 2.1m_p$ em vermelho, $\varphi_i = 1.5m_p$ em verde e $\varphi_i = 0.5m_p$ em magenta. Note que, no início do processo inflacionário em todos os casos o decaimento de ρ é muito lento, sendo acentuado ao final deste período. (b) Decaimento de ρ após a inflação considerando os valores citados no item (a). (c) Comportamento da densidade de energia para $\Lambda = 5 \times 10^{-5}m_p$.(d) Comportamento para densidade de energia para $\Lambda = 5 \times 10^{-6}m_p$. (e) Comportamento da densidade de energia para $\Lambda = 5 \times 10^{-7}m_p$. Perceba que, as curvas (c),(d) e (e) mostram que o valor de Λ afeta o valor inicial da densidade de energia bem como o tempo de inflação.(f) Comportamento da pressão p para o campo MDO utilizando a equação (408), novamente é visto um comportamento de lenta variação durante o início da inflação, além disso seu valor é negativo o que garante que o Universo seja expandido.



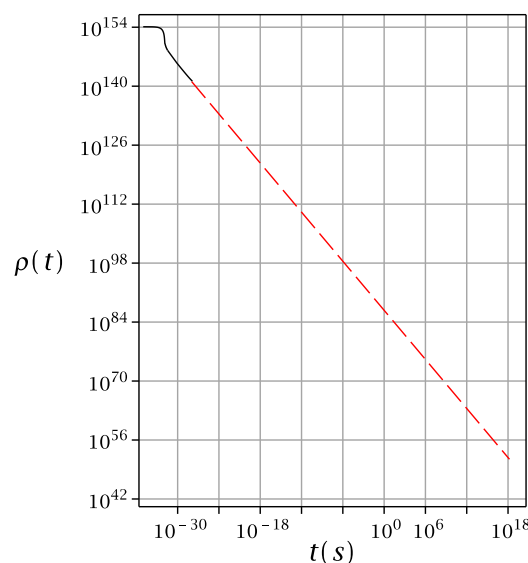
Fonte: Produção do própria do autor.

As Figuras 23.(c),(d) e (e) mostram o comportamento da densidade de energia para diferentes valores de Λ , a saber $\Lambda = 5 \times 10^{-5}m_p$, $\Lambda = 5 \times 10^{-6}m_p$ e $\Lambda = 5 \times 10^{-7}m_p$

respectivamente. Fica claro que quanto maior o valor de Λ , maior será o valor inicial da densidade de energia e ainda, uma vez que esse parâmetro controla a planura do potencial V , quanto maior seu valor, menor será o tempo de inflação. Já para a pressão, é possível ver na Figura 23.(f), que durante o período em questão ela sofre uma variação muito pequena, e ao fim da inflação seu valor diminui em módulo.

Por fim, uma extrapolação da curva da densidade de energia até o tempo presente é mostrada na linha tracejada vermelha da Figura 24, nela vê-se que a densidade de energia para o Universo atual é de cerca de $10^{52} s^{-4} \sim 10^{-45} \text{ GeV}^4 \simeq 10^{-28} g/cm^3$. O valor estimado para o tempo presente é de cerca de $10^{-27} g/cm^3$ (RYDEN, 2016; PETER COLES, 2002; PLANCK-COLLABORATION, 2018), indicando também um bom acordo com o modelo padrão, uma vez que ainda é necessário adicionar matéria bariônica e radiação ao presente modelo.

Figura 24: Resultados numéricos para a evolução da densidade de energia (407) durante a inflação (linha preta) e a extrapolação até o tempo presente (linha vermelha tracejada) (em unidades de s^{-4}).

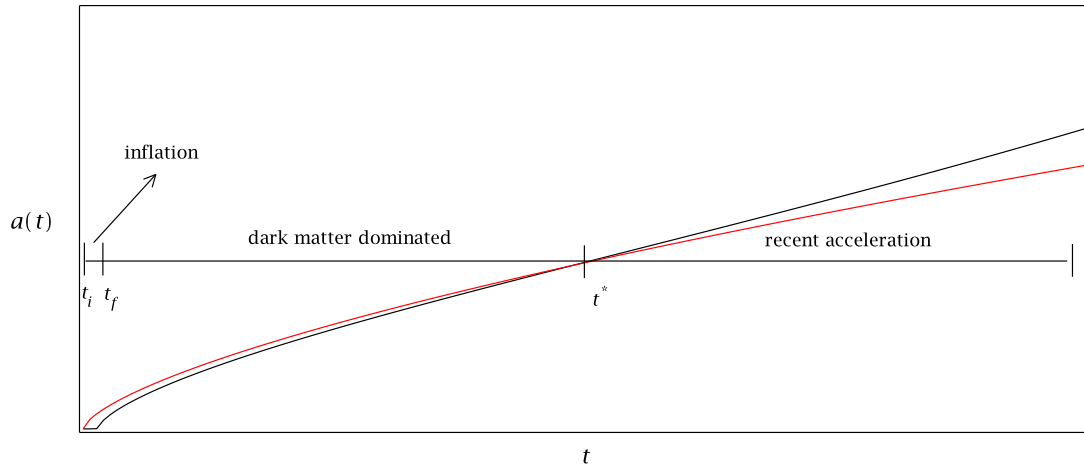


Fonte: Produção do própria do autor.

6.1.2.2 Aceleração cósmica recente

Como observação final, pode-se abordar neste modelo a recente evolução acelerada do Universo. Olhando para o potencial da Figura 15, com $v_0 = 0$ (linha preta), é percebido que à medida que o campo φ atinge o valor médio $\bar{\varphi} = \varphi_c$ no vácuo do potencial, é obtido $V(\bar{\varphi}) \rightarrow 0$ e a evolução do fator de escala segue proporcional a $t^{2/3}$. Mas note que, se o potencial é ligeiramente deslocado por um pequeno $v_0 \neq 0$, tem-se que o potencial não mais se anula, uma vez que $V(\bar{\varphi}) \rightarrow v_0$, dessa maneira o termo v_0 irá agir exatamente como uma constante cosmológica na evolução futura do Universo.

Figura 25: Evolução do fator de escala contendo o termo v_0 (linha preta) e evolução proporcional a $t^{2/3}$ (linha vermelha), para comparação. O cruzamento das curvas ocorre em t^* que vai para o infinito quando $v_0 \rightarrow 0$.



Fonte: Produção do própria do autor.

A Figura 25 mostra a análise numérica, em uma escala de tempo arbitrária, para o comportamento do fator de escala na presença do termo v_0 . Percebe-se claramente que o Universo sofre uma fase inflacionária entre t_i e t_f , passando para uma fase aparentemente proporcional a $t^{2/3}$ durante período de t_f a t^* , levando ao início de uma nova fase de aceleração após $t = t^*$. Ou seja, mesmo nessa análise qualitativa, é possível notar que a aceleração atual é muito mais suave do que no período inflacionário, como é esperado. Na análise numérica usou-se $v_0 = 1,0 \times 10^{-28} m_p^4$, mas o valor de t^* não é realista aqui, já que a aceleração começa apenas no futuro. Também verificou-se numericamente que o instante de tempo em que a aceleração começa a dominar depende apenas de v_0 , assim quando $v_0 \rightarrow 0$ as duas curvas da Figura 25 se cruzam cada vez mais no futuro, a saber $t^* \rightarrow \infty$. Durante todo o trabalho, não foram encontradas formas de se fixar um valor preciso de v_0 , logo é esperado que o mesmo seja limitado por dados observacionais.

Nas linhas acima, foi estudado um cenário cosmológico em que o campo MDO sujeito a um potencial com quebra de simetria é o único conteúdo de matéria do Universo. Seguindo o modelo inflacionário caótico para este campo, caracterizado por uma evolução temporal representada por $\varphi(t)$ em uma escala de energia inicial $\varphi_i > m_p$, obteve-se numericamente que a evolução dinâmica do campo MDO tem as propriedades desejadas de um candidato a inflaton. As condições de *Slow-Roll* para o sistema foram obtidas no limite $H \ll m_p$ e foi demonstrado que elas são satisfeitas para as condições iniciais no presente cenário. Também, foi mostrado que, após a inflação, o campo MDO pode atuar coerentemente como matéria escura, levando a valores de densidade de energia e evolução do fator de escala condizentes com o esperado. Por fim, foi mostrado genericamente que o comportamento de um Universo dominado por energia escura pode ser emulado

fazendo $v_0 \neq 0$, o qual atua como constante cosmológica.

Embora se tenha um belo resultado discutido até aqui, é necessário atentar que para um Universo cuja evolução é guiada apenas pelo campo MDO não há fase dominada pela radiação, ou seja, o modelo apresentado passou abruptamente do período inflacionário para a era dominada pela matéria escura e posteriormente dominada pela energia escura. Com o intuito de construir um cenário mais completo e realista, na próxima seção analisar-se-á um modelo cosmológico contendo tanto o campo MDO quanto campos de matéria bariônica e, nesse âmbito, se estudará o comportamento da matéria escura.

6.2 MATÉRIA ESCURA E ENERGIA ESCURA COM O CAMPO MDO E MATÉRIA BARIÔNICA

Apesar do sucesso em descrever algumas fases individuais da evolução do Universo com estimativas numéricas corretas, a fase de radiação e uma transição suave para a aceleração cósmica recente não foram completamente abordadas pelo modelo anterior. Para descrever todas essas fases de uma forma unificada e consistente, agora será considerado um potencial da forma (417), a relembrar:

$$V(\varphi) = \Lambda^4 \left(1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_c^2}\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\alpha}{4}\varphi^4, \quad (435)$$

e também se assumirá que o Universo é preenchido adicionalmente por campos de matéria bariônica do tipo poeira, $\rho_m = \rho_b$ e $p_m = p_b = 0$. Nesse caso, as equações de movimento são dadas pela forma completa das equações (413) e (414), ou seja:

$$\rho_\varphi = \frac{\kappa^2\varphi^2}{8}\rho_m + \left(1 + \frac{\kappa^2\varphi^2}{8}\right) \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi)\right], \quad (436)$$

$$p_\varphi = \frac{\kappa^2\varphi^2}{8}p_m + \left(1 + \frac{\kappa^2\varphi^2}{8}\right) \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi)\right] - \frac{1}{2} \frac{H\varphi\dot{\varphi}}{(1 + \kappa^2\varphi^2/8)}. \quad (437)$$

Começando com a evolução recente do Universo, pode-se restringir os parâmetros φ_c , m e α para o modelo com campo MDO acoplado à matéria bariônica, a partir de dados observacionais. O valor de φ_c é de particular interesse na época inflacionária, a qual será revisitada na próxima subseção. Por enquanto, é suficiente supor que, nos tempos iniciais, o campo φ está em equilíbrio instável em torno do falso vácuo de $V_1 = \Lambda^4 (1 - \varphi^2/\varphi_c^2)^2$ e que, após uma flutuação quântica, desce para o fundo do vácuo verdadeiro até atingir o valor constante φ_c , após um período longo o suficiente. Assim, quando a energia cinética do campo MDO é finalmente insignificante, com o campo satisfazendo $\dot{\varphi} \simeq 0$, tem-se $V_2 = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\alpha}{4}\varphi^4 \gg V_1$ (PEREIRA; ALVES; GUIMARÃES, 2018). Portanto, nos últimos instantes, quando apenas a matéria bariônica e o campo MDO são relevantes para a dinâmica cósmica, pode-se usar as Eqs. (436) e (437) para obter

$$\rho_\varphi = \frac{\kappa^2 \varphi_c^2}{8} \rho_b + \left(1 + \frac{\kappa^2 \varphi_c^2}{8}\right) V_2(\varphi_c), \quad (438)$$

$$p_\varphi = - \left(1 + \frac{\kappa^2 \varphi_c^2}{8}\right) V_2(\varphi_c), \quad (439)$$

sendo ρ_b a densidade de energia bariônica e o potencial tem o valor fixo $V_2(\varphi_c) = \frac{1}{2}m^2\varphi_c^2 + \frac{1}{4}\alpha\varphi_c^4$. Das expressões acima, vê-se que em tempos atuais a densidade de energia do campo MDO se torna a soma de duas contribuições completamente distintas,

$$\rho_\varphi = \underbrace{\frac{\kappa^2 \varphi_c^2}{8} \rho_b}_{\text{Matéria escura}} + \underbrace{\left(1 + \frac{\kappa^2 \varphi_c^2}{8}\right) V_2(\varphi_c)}_{\text{Energia escura}}. \quad (440)$$

Ou seja, o primeiro termo se comporta como um fluido sem pressão, seguindo a evolução da matéria escura, enquanto que o segundo termo é uma constante cosmológica efetiva, dada por

$$\Lambda_{\text{eff}} \equiv \kappa^2 \left(1 + \frac{\kappa^2 \varphi_c^2}{8}\right) V_2(\varphi_c). \quad (441)$$

Fica ainda mais claro o comportamento de Λ_{eff} como constante cosmológica, notando o sinal negativo na equação da pressão (439) e escrevendo-a como

$$p_\varphi = - \frac{\Lambda_{\text{eff}}}{\kappa^2}, \quad (442)$$

isso mostra que a única pressão que existe no sistema MDO-báron é negativa, levando a uma expansão acelerada do fator de escala nos dias de hoje (PEREIRA; ALVES; GUIMARÃES, 2018).

Inserindo ρ_φ e ρ_b na equação de Friedmann (413), é obtido

$$H^2(t) = \frac{\kappa^2}{3} \left[\frac{\kappa^2 \varphi_c^2}{8} \rho_b + \frac{\Lambda_{\text{eff}}}{\kappa^2} + \rho_b \right]. \quad (443)$$

Uma vez que o parâmetro de Hubble atual é

$$H_0^2 = \frac{\kappa^2}{3} \rho_{\text{crit},0},$$

sendo $\rho_{\text{crit},0}$ a densidade de energia crítica hoje, pode-se escrever a função de Hubble da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{H(a)^2}{H_0^2} &= \frac{\rho_{b,0}}{a^3 \rho_{\text{crit},0}} + \frac{\kappa^2 \varphi_c^2}{8a^3} \frac{\rho_{b,0}}{\rho_{\text{crit},0}} + \frac{\Lambda_{\text{eff}}}{\kappa^2 \rho_{\text{crit},0}} \\
&= \frac{\Omega_b}{a^3} + \frac{\Omega_{\text{DM},\varphi}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,\varphi},
\end{aligned} \tag{444}$$

em que⁴ $\Omega_b = \rho_{b,0}/\rho_{\text{crit},0}$. Agora está claro que o segundo termo no lado direito da equação acima pode ser interpretado como um componente de matéria escura, com o atual parâmetro de densidade definido como

$$\Omega_{\text{DM},\varphi} \equiv \frac{\kappa^2 \varphi_c^2}{8} \Omega_b, \tag{445}$$

que vem do acoplamento gravitacional do campo MDO com matéria bariônica usual. Haja vista que o último termo da equação (444) age como uma constante cosmológica, com $\Omega_{\Lambda,\varphi} \equiv \Lambda_{\text{eff}}/\kappa^2 \rho_{\text{crit},0}$, esta equação tem exatamente a mesma forma da função de Hubble do modelo Λ CDM, com componentes bariônicos e de matéria escura seguindo a mesma evolução de a^{-3} (WEINBERG, 2008).

Ao final dos estágios de inflação e reaquecimento, a gravidade é a única interação não desprezível com campo fermiônico MDO, além de sua auto-interação, que possibilita a posterior formação de estruturas no Universo. A definição do parâmetro de densidade de matéria escura do campo MDO, equação (445), mostra a notável característica deste campo; seu acoplamento natural com outros campos de matéria vem diretamente da estrutura das equações de movimento em espaços curvos, não necessitando da inclusão de nenhum acoplamento direto na ação (394). Devido à sua origem gravitacional, esse acoplamento desaparece no espaço de Minkowski.

Como foi visto na seção anterior e será rediscutido no subcapítulo 6.2.2, o campo MDO oscila no final da inflação, da mesma forma como um bom candidato a inflaton deve fazer, no entanto, o campo φ pode evoluir como matéria escura em épocas tardias mesmo que sua energia cinética decaia completamente durante o reaquecimento, o que se deve a presença do termo que decai com a^{-3} na equação (444), vindo da densidade de energia do campo MDO. Entretanto, o cenário descrito nesta seção não seria possível se o campo fosse para zero após a inflação, uma vez que o acoplamento do campo MDO com a densidade de energia bariônica é cancelado, como pode ser visto a partir equação (438), que neste caso fornece:

$$\rho_\varphi = V_2(0).$$

Um bom exemplo, utilizando um cenário de inflação caótica com o campo MDO, foi estudado na Ref. Pereira; Holanda; S. (2017). O comportamento da matéria escura, neste

⁴O subscrito 0 representa as quantidades atuais e $\rho_{\text{crit},0} = 3H_0^2/\kappa^2$.

caso, é obtido pela média das oscilações coerentes do campo MDO na presente época, levando a uma pressão zero de uma maneira semelhante ao que acontece com o modelo inflacionário com campo escalar.

Não obstante, assumindo que o potencial com quebra de simetria $V_1(\varphi)$ era dominante no regime inflacionário, o potencial MDO adquire seu verdadeiro valor de vácuo à medida que a amplitude das oscilações se torna virtualmente zero. Embora pequena, essa energia de ponto zero leva a uma contribuição não desprezível hoje, que resulta em uma constante cosmológica não nula, dada pelo parâmetro $\Omega_{\Lambda,\varphi}$.

Finalmente, para estimar os valores dos parâmetros da teoria, considera-se agora os últimos resultados do sonda Planck sobre os parâmetros cosmológicos (PLANCK-COLLABORATION, 2018). Levando em conta uma seção espacial plana e $H_0 = 67.4 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, temos $\Omega_b \simeq 0.05$, $\Omega_{\text{DM},\varphi} \simeq 0.27$ e $\Omega_{\Lambda,\varphi} = 1 - \Omega_b - \Omega_{\text{DM},\varphi} \simeq 0,68$. Com esses valores na relação (445) é obtido $\varphi_c \simeq 1.3 m_p$, e o valor do potencial em seu mínimo pode ser encontrado a partir de (441) e (445) em termos dos parâmetros cosmológicos, como

$$V_2(\varphi_c) = \left(\frac{\Omega_{\Lambda,\varphi}}{1 + \Omega_{\text{DM},\varphi}/\Omega_b} \right) \rho_{\text{crit},0} \simeq 4.1 \times 10^{-48} \text{ GeV}^4. \quad (446)$$

Além disso, impondo a condição de que $m^2 > 0$, chega-se ao limite superior $\alpha < 10^{-124}$, que restringe o modelo a um auto-acoplamento muito pequeno. Portanto, definindo $\alpha = 0$, é obtida uma massa efetiva para o campo MDO de $m \simeq 2.0 \times 10^{-43} \text{ GeV} \simeq 10^{-62} m_p$, que é muito menor do que a massa efetiva encontrada no modelo MDO sem acoplamento com a matéria bariônica.

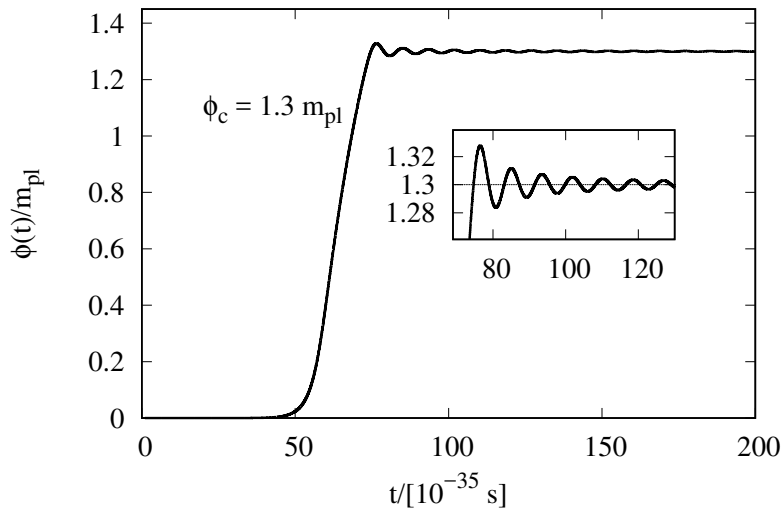
O campo escalar usual também pode se comportar como poeira, levando a cenários cosmológicos unificados com inflação e matéria escura, os quais já foram explorados na literatura (ver, por exemplo, Liddle (2006); Bastero-Gil (2016)). Mas no caso do modelo com campo MDO, a pressão zero é obtida por uma média temporal do campo φ , enquanto este está oscilando coerentemente no vácuo do potencial, após o fim do regime de *Slow-Roll*. No entanto, uma contribuição da matéria escura só pode sobreviver se o decaimento do inflaton for incompleto (KOLB, 1990), pois a medida que este campo oscila no mínimo do potencial, ele vai decaindo em demais partículas e então esse decaimento precisa cessar para que o campo possa existir e possuir energia suficiente para atuar como matéria escura.

6.2.1 Inflação revisitada

Agora será refeita a análise da época inflacionária, assumindo que a densidade de energia do Universo é dominada pelo campo MDO, naquele momento, e lançando mão dos novos parâmetros. No regime de alta energia da inflação, o único potencial relevante é o potencial com quebra de simetria $V_1(\varphi)$, como já discutimos previamente. Como agora está sendo considerado que no início do Universo o campo MDO estava

em equilíbrio instável no falso vácuo de $V_1(\varphi)$, no momento em que a inflação começa, t_i , o valor inicial do campo é $\varphi_i \ll \varphi_c$, e a constante Λ pode ser determinada como $\Lambda \simeq (3H_i^2 m_p^2 / 8\pi)^{1/4} \sim 5.3 \times 10^{14}$ GeV, de maneira que o parâmetro de Hubble assume o valor de $H(t_i) \equiv H_i \sim 10^{35} \text{ s}^{-1}$ (KOLB, 1990) na escala GUT. Inversamente, é notável que a constante φ_c não seja fixada pela inflação, mas pela razão entre a quantidade de matéria escura e a matéria bariônica no Universo, como foi mostrado na última subseção [Eq. (445)].

Figura 26: Evolução de $\varphi(t)$ durante e após a inflação. O gráfico interno mostra em detalhes as primeiras oscilações do campo.



Fonte: Produção do própria do autor.

Na Fig. 26, a evolução do campo φ é dada em função do tempo cósmico t , mostrando claramente que o campo evolui de φ_i para φ_c , enquanto rola até o mínimo do potencial. As pequenas oscilações no final da evolução deste campo serão discutidas na próxima subseção.

Uma vez que o campo tem dimensão de massa um (ou dimensão de energia), pode-se usar uma relação de incerteza quântica para estabelecer seu valor inicial. Uma flutuação quântica $\Delta\varphi$ em um intervalo de tempo Δt deve satisfazer $\Delta\varphi\Delta t \geq 1$ e, como a inflação começa em $t_i \sim 10^{-35}$ s, pode-se escolher Δt de maneira a atingir $\Delta\varphi \sim 1/t_i \sim 5.4 \times 10^{-9} m_p$, que será assumido como condição inicial para o campo a seguir. Note que essa condição é completamente diferente do que foi assumido na seção anterior, uma vez que esta está relacionada a uma flutuação quântica do campo MDO no falso vácuo do potencial, enquanto que os valores utilizados na Figura 16 foram arbitrários, ainda sim, o comportamento descrito na Figura 26 é perfeitamente similar ao discutido na Figura 16.(b). Entretanto, cabe a menção de que essa condição inicial do campo MDO viola o requerimento de que $\varphi_i \geq m_p$ da inflação caótica, o que não é realmente um pro-

blema e modelos dessa natureza são conhecidos por *small-field inflation*, os quais tem a necessidade de que o sistema respeite a simetria R (ABE; KOBAYASHI; OMURA, 2007; ALVAREZ-GAUME, 2009), engendrando modelos naturalmente supersimétricos. Tais características ainda estão sendo averiguadas para o MDO, porém, para o âmbito desta tese é suficiente saber que estes modelos suportam a inflação cósmica e respeitam as condições de *Slow-Roll* (DINE, 2012).

Por outro lado, o valor inicial da primeira derivada do campo, $\dot{\varphi}(t_i) \equiv \dot{\varphi}_i$, pode ser obtido tomando as equações de movimento (406) no momento t_i . Considerando que a condição $\ddot{\varphi} \ll H\dot{\varphi}$ é satisfeita quando a inflação começa, com isso chega-se a

$$\dot{\varphi}_i \simeq \frac{H_i \varphi_i}{4} \left[1 + \frac{2}{\pi(\varphi_c/m_p)^2} \right]. \quad (447)$$

Se for fixado $\varphi_c = 1.3 m_p$, por exemplo, o valor inicial é $\dot{\varphi}_i = 1.86 \times 10^{26} m_p s^{-1}$.

Tendo resolvido as condições iniciais, é possível encontrar soluções numéricas para o sistema de equações diferenciais (403) - (406), a fim de se estudar a evolução dos parâmetros dinâmicos do sistema. Neste momento, será considerado apenas o campo MDO como fonte de energia, não incluindo matéria bariônica ou radiação, que são assumidas como não dominantes nessa fase.

Para estudar a duração e a cinemática da inflação, é útil analisar a evolução dos parâmetros de *Slow-Roll* que governam a época inflacionária (MAKAROV, 2005), as quais já foram definidas no Capítulo 3, como

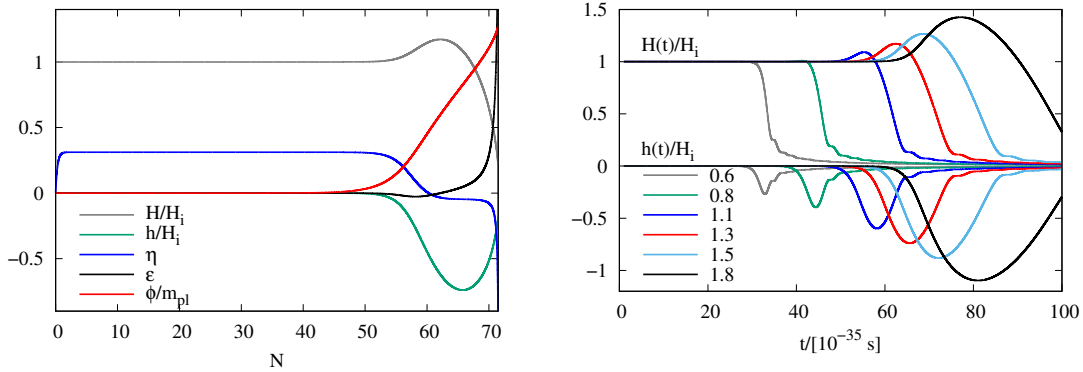
$$\epsilon \equiv \frac{|\dot{H}|}{H^2}, \quad \text{e} \quad \eta \equiv \frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}}. \quad (448)$$

Além disso, é conveniente analisar a evolução das quantidades relevantes como funções do número de e-folds alcançados no momento t , definido da forma anteriormente exposta, equação (80) :

$$N = \int_{t_i}^t H(t') dt'. \quad (449)$$

Novamente, a partir da análise numérica das equações, são obtidas as curvas abaixo.

Figura 27: (a) - Evolução do parâmetro de Hubble, H , da função de torção h , do parâmetro de *Slow-Roll* ϵ e η , e o campo φ como função do número de e-folds durante a inflação. Quando a inflação termina $\epsilon = 1$, levando a $N \simeq 71$. Todas essas quantidades foram obtidas usando $\varphi_c = 1.3 m_p$. (b) Evolução de H como função do tempo cósmico t . O tamanho do “solavanco” no final da inflação depende fortemente do valor de φ_c (especificada na legenda em unidades da massa de Planck). Este “solvanco” é relacionado com a função da torção $h(t)$, a qual também é mostrada na figura.



Fonte: Produção do própria do autor.

Na Fig. 27.(a), a evolução de ϵ e η é mostrada juntamente da evolução do parâmetro de Hubble $H(t)$, da função de torção $h(t)$ e do campo $\varphi(t)$. Observe que, assumindo as condições iniciais, as quais foram bem justificadas e especificadas acima, no final da inflação ($\epsilon = 1$), chega-se ao total de $N \simeq 71$ e-folds, que é significativamente menor do que os 93 encontrados anteriormente (PEREIRA; GUIMARÃES, 2017), porém ainda assim um valor perfeitamente dentro da margem esperada (LIDDLE, 2003; LIDDLE; LYTH, 2000). Mas, a partir da relação de incerteza, o valor inicial do campo pode ser mais alto, produzindo um número menor de e-folds durante a inflação. Nesse caso, o campo gasta menos tempo no regime de *Slow-Roll*, o que leva a uma redução de N .

Embora se tenha imposto $|\eta| \ll 1$ inicialmente, esse parâmetro cresce muito rapidamente no início da inflação e assume um valor constante ($\eta \simeq 0,3$) durante quase todo o período inflacionário. Nos 10 e-folds restantes até o final da inflação, $|\eta|$ é quase zero e, finalmente, torna-se grande no último e-fold da inflação, correspondendo a uma variação substancial de ϵ , que indica o fim da inflação.

Observe que a mudança no parâmetro η está associada ao aumento do campo MDO nos últimos 15 e-folds e também a um “solavanco” no parâmetro de Hubble, no mesmo período. Tal “solavanco” corresponde a um aumento moderado na densidade de energia do campo MDO em relação ao seu valor inicial, estando notavelmente correlacionado com um aumento da função de torção $h(t)$. Da equação (403), percebe-se que inicialmente $|h(t_i)|$ é muito menor que o parâmetro de Hubble, mas ele se torna da mesma ordem de H a medida que $\varphi \rightarrow \varphi_c$. Na Figura 27.(b) também é possível observar que a altura do solavanco e o aumento correspondente de $|h(t)|$ são fortemente dependentes do valor de φ_c , caso φ_c for pequeno o suficiente o solavanco pode até mesmo desaparecer, mas

neste cenário, seriam necessárias mudanças nas condições iniciais para atingir o número total de *e-folds* desejados para a inflação (PEREIRA; ALVES; GUIMARÃES, 2018). Uma última questão interessante sobre o solavanco no final da inflação, é se ele poderia deixar uma marca na radiação cósmica de fundo em micro-ondas, uma vez que é caracterizado por um súbito aumento na densidade de energia naquele momento.

Após o final da inflação, a torção permanece importante até o presente momento e sua contribuição é da mesma ordem de grandeza do parâmetro de Hubble $H(t)$, já que o campo adquire um valor constante da ordem da massa de Planck. Tal comportamento é esperado, uma vez assumido que todo o Universo é preenchido homoganeamente com o campo MDO, portanto, cada ponto do espaço contém um campo fermiônico interagindo com a torção, participando do tensor energia-momento e fornecendo uma contribuição para a evolução do Universo. Por outro lado, na inflação caótica com um potencial polinomial de quarta ordem do tipo (416), o campo φ vai para zero depois da inflação, o que faz com que a função de torção h , inicialmente importante, desapareça após esse período (PEREIRA; HOLANDA; S., 2017), dessa forma não há solavanco no estágio final da inflação para o caso agora mencionado.

6.2.2 Reaquecimento

A produção de inhomogeneidades no Universo inflacionário provoca um grande interesse na cosmologia, pois esse processo é diretamente refletido na estrutura observável do Universo. Não menos importante é o estudo do processo pelo qual o Universo é reaquecido e a assimetria bariônica gerada, já que esse processo é um elo obrigatório entre o Universo inflacionário em seu estado de vácuo e o Universo quente de Friedmann.

Embora não seja o objetivo da presente tese dar uma descrição precisa da fase de reaquecimento, vamos discutir brevemente dois mecanismos possíveis para esse processo após a inflação guiada pelo campo MDO. A saber: **(i)** o acoplamento eletromagnético do campo MDO em altas energias, e **(ii)** o acoplamento do campo MDO com o bóson de Higgs em uma fase de pré-aquecimento.

Inicialmente, note que logo após o fim da inflação, o campo MDO começa a oscilar em torno do mínimo do potencial, com uma frequência $\omega_\varphi = \sqrt{V_{,\varphi\varphi}(\varphi)} \simeq 2\sqrt{2}\Lambda^2/\varphi_c$ como pode ser visto na Figura 26. Pode-se mostrar que durante o regime de oscilações coerentes, o campo se comporta em média como partículas não relativísticas, ou seja, $\langle p_\varphi \rangle = 0$, da mesma forma que acontece para um campo escalar canônico fazendo uso de um potencial de quarta ordem. Tal resultado já foi verificado em (PEREIRA; HOLANDA; S., 2017) para a inflação do MDO com um termo de massa mais um potencial de auto-interação, e também para um potencial com quebra de simetria como pode ser visto na Ref. (PEREIRA; GUIMARÃES, 2017).

Caso o processo de reaquecimento do campo MDO ocorrer com uma taxa de decaimento Γ , é necessário adicionar um termo de amortecimento $\Gamma\dot{\varphi}$ no lado esquerdo da equação (406), sendo insignificante na época inflacionária. Portanto, a densidade de ener-

gia do campo MDO não é conservada, mas há um termo $-(1 + \kappa^2\varphi^2/8)\Gamma\dot{\varphi}^2$ no lado direito da equação (412). Das Equações (410) e (411), pode-se mostrar que a média em um período de oscilação é $\langle(1 + \kappa^2\varphi^2/8)\dot{\varphi}^2\rangle = \rho_\varphi$, assim, considerando o mecanismo (i), o campo MDO decai em fótons e a sua evolução, bem como a densidade de energia do decaimento, são descritas pelas equações acopladas:

$$\dot{\rho}_\varphi + 3H\rho_\varphi = -\Gamma\rho_\varphi, \quad (450)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = \Gamma\rho_\varphi, \quad (451)$$

em que ρ_r é a densidade de energia da radiação. Observe que as equações acima são idênticas em forma ao caso de reaquecimento com um campo escalar.

Na ref. Alves (2018), a interação do campo MDO com fótons no nível de árvore foi estudada e se demonstrou que as interações eletromagnéticas são excluídas no limite de 95 % CL pelos dados do LHC, para massas do campo MDO até 1 TeV. No entanto, tal acoplamento pode ser relevante nos altos níveis de energia alcançados na fase de reaquecimento, uma vez que a massa efetiva obtida na quebra de simetria do potencial é $\bar{m} = 2\sqrt{2}\Lambda^2/\varphi_c \simeq 5.2 \times 10^{10}$ GeV, que é várias ordens de grandeza maior que a massa física $m \simeq 2.0 \times 10^{-43}$ GeV.

Supondo que a taxa de decaimento do campo MDO seja dada aproximadamente por $\Gamma \simeq g_e\bar{m}$, em que g_e é uma constante de acoplamento adimensional. A fim de que o termo de amortecimento não modifique a evolução do Universo na época inflacionária, tem-se $\Gamma \ll H_i$ e $g_e \ll 1.8$. Se for considerado o limite superior do LHC, $g_e \lesssim 10^{-5}$, por exemplo, é obtido $\Gamma \lesssim 3.5 \times 10^5$ GeV. Portanto, nesse cenário de reaquecimento, a entropia do Universo pode ser gerada pela transferência da energia do campo MDO para os fótons. Então, os fótons altamente energéticos podem gerar outras partículas via processo de produção de pares.

O segundo mecanismo possível para a transferência de energia após a inflação, é justificado pelo acoplamento do campo MDO com o campo de Higgs através da adição do termo de interação $\mathcal{L}_{\text{int}} = h_e\Phi^\dagger(x)\Phi(x)\bar{\Lambda}(x)\Lambda(x)$, na densidade Lagrangiana da ação (394). Tal interação foi considerada para investigar a possibilidade de descobrir o campo MDO no LHC (ALVES, 2014A; DIAS, 2016; ALVES, 2018). No momento das oscilações, o campo MDO pode, em princípio, transferir sua energia para o campo de Higgs através de um mecanismo de ressonância paramétrica, em um período de pré-aquecimento. Após esse período, temos o reaquecimento, já que o acoplamento de Φ com as partículas do modelo padrão leva à termalização.

Na prática, ambos os processos descritos acima podem ocorrer simultaneamente, embora se espere que um deles seja dominante. Além disso, o sucesso do processo de reaquecimento no cenário cosmológico do campo MDO depende essencialmente de quão fortes são os acoplamentos com o campo eletromagnético e com o campo bosônico. A

esse respeito, uma investigação adicional é necessária para restringir o espaço de parâmetros dos modelos em uma perspectiva cosmológica.

Nas linhas acima, mostrou-se que um modelo utilizando o campo MDO acoplado à matéria bariônica é capaz de descrever uma cosmologia unificada. Foi visto que a medida que o campo φ desce para o vácuo verdadeiro do potencial, em $\varphi = \varphi_c$, a inflação ocorre com o número correto de *e-folds*, dependendo do valor inicial de φ e também da constante Λ . Após a inflação, a evolução da matéria escura seguiu naturalmente, levando à densidades de energia e pressão corretas para as diferentes fases do Universo, modelando corretamente a evolução da inflação, matéria escura e energia escura. Entretanto, é necessário ao menos uma primeira abordagem da perturbação cosmológica desse modelo, a fim de averiguar se as previsões para a polarização da radiação cósmica de fundo são coerentes com o observado hoje, tal assunto será discutido no próximo capítulo.

7 PERTURBAÇÕES COSMOLÓGICAS NO MODELO MDO COM TORÇÃO

Dados experimentais sugerem que o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas, entretanto sabe-se que, localmente, o Universo tem estruturas anisotrópicas e inhomogêneas, como galáxias e aglomerados de galáxias, por exemplo. Para introduzir com sucesso tais inhomogeneidades e anisotropias no modelo cosmológico, são utilizados métodos perturbativos, como visto no capítulo 4, levando ao que é conhecido por *perturbações cosmológicas*. Hoje, tais perturbações tornaram-se a pedra angular da cosmologia quantitativa moderna, pois são elas que fornecem a ligação entre os modelos do Universo primordial, como o cenário inflacionário no qual se produz mecanismos causais para a geração de flutuações, e a riqueza de dados recentes de alta precisão sobre o espectro de flutuações de densidade e anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo em Micro-Ondas, obtidos durante décadas por várias sondas ainda em operação (GORBUNOV, 2011).

Nesta seção, será construída uma primeira aproximação para uma teoria de perturbação cosmológica para o espinor MDO em um espaço-tempo com torção, uma vez que aqui será perturbada a equação (363) e não a equação (364), pois esta segunda é demasiadamente complicada de ser perturbada, todavia este trabalho está em andamento e maiores discussões estão sendo levantadas sobre o melhor método para realizar tal tarefa. O trabalho realizado neste capítulo será o de construir as equações perturbadas para as equações de ECSK (384) e (385) e utilizá-las para encontrar a velocidade do som, c_s^2 , o espectro de potência e o índice espectral n_s , uma vez que o campo MDO seja capaz de respeitar os valores mensurados para estes parâmetros será possível afirmar que φ é um candidato razoável a inflaton (SASAKI, 2012).

Partindo da equação (363), é necessário escrever as equações da densidade de energia a partir das equações (407), (408) e (381) - (383), utilizando o tempo conforme η . Uma vez que $dt = a(\eta)d\eta$ é necessário que $N \rightarrow a(\eta)$, com isso as equações se tornam

$$\rho = T^\eta_\eta = \frac{1}{2a^2} \left[(\varphi')^2 + \frac{3b^2\varphi^2}{4a^2} + a^2V + \mathfrak{F}_2 \right], \quad (452)$$

$$p = -T^i_j = \frac{\delta_j^i}{2a^2} \left[(\varphi')^2 - a^2V - \frac{3b^2\varphi^2}{4a^2} - \frac{a}{2} \left(\frac{b\varphi^2}{a^2} \right)' + \mathfrak{F}_3 \right], \quad (453)$$

$$\varphi'' - \frac{a'\varphi'}{a} + \frac{3b\varphi}{a} - \frac{3b^2\varphi}{4a^2} + V_{,\varphi} + \frac{\mathfrak{F}_4}{\varphi'} = 0, \quad (454)$$

em que $'$ indica a derivada em relação ao tempo conformal. Agora essas equações ne-

cessitam ser perturbadas, bem como a parte geométrica da equação (363), à esta tarefa se dedicará a próxima seção.

7.1 PERTURBAÇÃO DAS EQUAÇÕES ECSK

De agora em diante, o modelo será trabalhado apenas no tempo conformal. A fim de construir uma teoria de perturbação nos modos do capítulo 4, inicialmente se toma a perturbação de primeira ordem da métrica (324) do espaço-tempo, fazendo uso dos potenciais de Bardeen (BARDEEN, 1980; SIMMONDS, 1997), da seguinte forma:

$$ds^2 = N^2(1 + 2\Phi)dt^2 - a^2 [(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2t_{ij}] dx^i dx^j, \quad (455)$$

note que o gauge $h_{\eta i} = 0$ já foi considerado. A métrica contravariante é dada por

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{(1-2\Phi)}{N^2} & 0 \\ 0 & -\frac{[(1+2\Psi)\delta_{ij}-2t_{ij}]}{a^2} \end{bmatrix}, \quad (456)$$

em que t_{ij} é uma perturbação tensorial sem traço e sem divergência. Sendo $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, com $\bar{g}_{\mu\nu}$ o tensor métrico não perturbado e $h_{\mu\nu}$ a sua perturbação. De forma geral a conexão afim pode ser escrita como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} - \bar{K}_{\mu\nu}^{\rho} + \delta\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} - \delta K_{\mu\nu}^{\rho}, \quad (457)$$

na qual os termos barrados são não perturbados, enquanto que $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho}$ é o símbolo de Christoffel não perturbado. Os termos $\bar{K}_{\mu\nu}^{\rho}$ e $\delta K_{\mu\nu}^{\rho}$ são dados por

$$\bar{K}_{\mu\nu}^{\rho} = - [\bar{S}_{\mu\nu}^{\rho} + \bar{g}^{\rho\sigma} (\bar{g}_{\nu\beta} \bar{S}_{\sigma\mu}^{\beta} + \bar{g}_{\mu\alpha} \bar{S}_{\sigma\nu}^{\alpha})]. \quad (458)$$

$$\begin{aligned} \delta K_{\mu\nu}^{\rho} &= - [\delta S_{\mu\nu}^{\rho} + h^{\rho\sigma} (\bar{g}_{\nu\beta} \bar{S}_{\sigma\mu}^{\beta} + \bar{g}_{\mu\alpha} \bar{S}_{\sigma\nu}^{\alpha}) + \\ &+ \bar{g}^{\rho\sigma} (h_{\nu\beta} \bar{S}_{\sigma\mu}^{\beta} + h_{\mu\alpha} \bar{S}_{\sigma\nu}^{\alpha} + \\ &+ \bar{g}_{\nu\beta} \delta S_{\sigma\mu}^{\beta} + \bar{g}_{\mu\alpha} \delta S_{\sigma\nu}^{\alpha})]. \end{aligned} \quad (459)$$

Uma vez que o tensor de torção $S_{\mu\nu}^{\rho}$ é independente do tensor métrico, não será considerada perturbações neste tensor (CAPOZZIELLO, 1998). A forma perturbada da conexão afim é dada por (WEINBERG, 2008):

$$\delta\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} \bar{g}^{\rho\sigma} [\partial_{\mu} h_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} h_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} h_{\mu\nu} - 2h_{\sigma\lambda} \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}]. \quad (460)$$

Agora é possível determinar as componentes da conexão afim levando em conta as perturbações de primeira ordem, as quais são

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\eta\eta}^{\eta} &= \frac{N'}{N} + \Phi', & \Gamma_{\eta i}^{\eta} &= \partial_i \Phi, \\
\Gamma_{\eta j}^i &= \frac{a'}{a} \delta_j^i - \dot{\Psi} \delta_j^i + t_j^i, & \Gamma_{i\eta}^{\eta} &= \partial_i \Phi, \\
\Gamma_{j\eta}^i &= \frac{b}{a} \delta_j^i - \Psi' \delta_j^i + t_j^i, & \Gamma_{\eta\eta}^i &= \frac{N^2}{a^2} \partial^i \Phi, \\
\Gamma_{ij}^{\eta} &= \frac{a}{N^2} (1 - 2[\Phi + \Psi]) \delta_{ij} - \frac{a^2}{N^2} \Psi' \delta_{ij} + \frac{aa'}{N^2} t_{ij} + \frac{a^2}{N^2} t_{ij}', \\
\Gamma_{jk}^i &= (f - 6\Psi f) \varepsilon_{ijk} + \partial^i \Psi \delta_{jk} - \partial_j \Psi \delta_k^i - \partial_k \Psi \delta_j^i + \partial_k t_j^i + \partial_j t_k^i - \partial^i t_{jk}. \quad (461)
\end{aligned}$$

Note que os termos de ordem zero são exatamente as componentes da conexão afim, (349), obtidas no capítulo (5.4.3.1), como deveriam ser.

Um ponto interessante a ser observado é que a torção não afeta os termos da perturbação tensorial t_{ij} , com isso é obtida exatamente a mesma equação de perturbação de Basak (2011);

$$t_{ij}'' + 2\mathcal{H}t_{ij}' - \Delta t_{ij} = -16\pi G a^2 T_{ij}^{(T)},$$

em que $T_{ij}^{(T)}$ representa apenas as perturbações tensoriais do tensor energia-momento. Por conta disso serão omitidos todos os termos t_{ij} a seguir, já que o foco deste capítulo se restringe a perturbações escalares.

Após encontrar as componentes da conexão afim, é momento de perturbar o tensor de Riemann, que pode ser escrito como segue (BAUMANN, 2012):

$$\begin{aligned}
R^{\rho}_{\mu\sigma\nu} &= \bar{R}^{\rho}_{\mu\sigma\nu} + \delta R^{\rho}_{\mu\sigma\nu}, \\
&= \bar{R}^{\rho}_{\mu\sigma\nu} + \partial_{\sigma} \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \delta \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} + \delta \Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} + \bar{\Gamma}^{\rho}_{\sigma\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\sigma\nu} - \bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}. \quad (462)
\end{aligned}$$

Tomando apenas as perturbações de primeira ordem, suas componentes não nulas são¹:

¹a obtenção detalhada destas componentes pode ser encontrada no Apêndice D.

$$\begin{aligned}\delta R^{\eta}_{i\eta j} &= \left[-\frac{a^2}{N^2}\Psi'' + \frac{a^2\Psi'}{N^2}\left(\frac{N'}{N} - \frac{a'}{a}\right) - \frac{ab'}{N^2}(\Psi + \Phi) - a\left(\frac{b}{N^2}(\Psi + \Phi)\right)' - \Delta\Phi \right] \delta_{ij} \\ &\quad - \partial_j\partial_i\Phi + \frac{f}{2}\partial_j\Phi,\end{aligned}\quad (463)$$

$$\delta R^k_{ikj} = -2\left[\frac{ab}{N^2}\Psi' + \frac{b^2}{N^2}(\Phi + \Psi) - \Delta\Psi\right]\delta_{ij} + \partial_i\partial_j\Psi - \frac{f}{2}\partial_j\Psi,\quad (464)$$

$$\delta R^i_{\eta i\eta} = 3\frac{N^2}{a^2}\Delta\Phi + 3\Psi'' + 3\left(\frac{a'}{a} - \frac{N'}{N}\right)\Psi' + 3\frac{b}{a}(\Phi' + \Psi'),\quad (465)$$

$$\delta R^k_{\eta ki} = \partial_i\Psi' + \frac{b}{a}\partial_i\Phi,\quad (466)$$

$$\delta R^k_{ik\eta} = \partial_i\Psi' + \frac{b}{a}\partial_i\Phi.\quad (467)$$

Portanto, as componentes do tensor de Ricci, $R^\rho_{\mu\rho\nu} = R_{\mu\nu}$, tomam a forma:

$$\begin{aligned}\delta R_{\eta\eta} &= \delta R^i_{\eta i\eta} + \delta R^\eta_{\eta\eta\eta}, \\ &= 3\frac{N^2}{a^2}\Delta\Phi + 3\Psi'' + 3\left(\frac{a'}{a} - \frac{N'}{N}\right)\Psi' + 3\frac{b}{a}(\Phi' + \Psi'),\end{aligned}\quad (468)$$

$$\begin{aligned}\delta R_{\eta i} &= \delta R^k_{\eta ki} + \delta R^\eta_{\eta\eta i} \\ &= 2\partial_i\Psi' + 2\frac{b}{a}\partial_i\Phi.\end{aligned}\quad (469)$$

e

$$\begin{aligned}\delta R_{ij} &= \delta R^\eta_{i\eta j} + \delta R^k_{ikj} \\ &= \left[\frac{a^2}{N^2}\left(\frac{N'}{N} - \frac{a'}{a}\right)\Psi' + \frac{2}{N^2}\left(\frac{abN'}{N} - ab' - 4b^2\right)(\Psi + \Phi) - \frac{ab}{N^2}(\Phi' + 5\Psi')\right. \\ &\quad \left.+ \Delta(2\Psi - \Phi) - \frac{a^2}{N^2}\Psi''\right]\delta_{ij} + \frac{f}{2}\partial_j(\Phi + \Psi) + \partial_i\partial_j(\Psi - \Phi).\end{aligned}\quad (470)$$

O escalar de curvatura, $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + h^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu}$, é então

$$\begin{aligned}\delta R &= 6\left[\frac{\Psi''}{N^2} + \frac{\Psi}{aN^2}\left(b' + 2\frac{b^2}{a}\right) + \frac{1}{a}\left(\frac{b\Phi}{N^2}\right)' + \frac{\Psi'}{N^2}\left(\frac{a'}{a} + 3\frac{b}{a} - \frac{N'}{N}\right)\right. \\ &\quad \left.+ \frac{\Delta(\Phi - 2\Psi)}{3a^2} + \frac{f^2\Psi}{2a^2}\right].\end{aligned}\quad (471)$$

Uma vez conhecendo o tensor de Ricci e o escalar de curvatura R , é necessário construir as perturbações no tensor $G_{\mu\nu}$. Separando a contribuição do background da perturbação de primeira ordem, tem-se

$$G_{\mu\nu} = \bar{G}_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu},$$

em que

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{g}^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}\bar{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\bar{g}^{\alpha\beta}\bar{R}_{\alpha\beta}. \quad (472)$$

Assim as componentes da perturbação são (BOJOWALD, 2011)

$$\begin{aligned} \delta G_{\eta\eta} &= \frac{1}{2}\delta R_{\eta\eta} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\eta\eta}\bar{g}^{ij}\delta R_{ij} - \frac{1}{2}(\bar{g}_{\eta\eta}h^{\eta\eta} + h_{\eta\eta}\bar{g}^{\eta\eta})\bar{R}_{\eta\eta} - \frac{1}{2}(\bar{g}_{\eta\eta}h^{ij} + h_{\eta\eta}\bar{g}^{ij})\bar{R}_{ij}; \\ &= \frac{1}{2}\delta R_{\eta\eta} + \frac{1}{2}\frac{N^2}{a^2}\delta R^i_i + \frac{N^2}{a^2}(\Phi + \Psi)\bar{R}^i_i; \end{aligned} \quad (473)$$

$$\delta G_{\eta i} = \delta R_{\eta i} \quad (474)$$

$$\delta G_{i\eta} = \delta R_{i\eta} \quad (475)$$

$$\begin{aligned} \delta G_{ij} &= \frac{1}{2}\delta R_{ij} - \frac{1}{2}\bar{g}_{ij}\bar{g}^{\eta\eta}\delta R_{\eta\eta} - \frac{1}{2}[\bar{g}_{ij}h^{\eta\eta} + h_{ij}\bar{g}^{\eta\eta}]\bar{R}_{\eta\eta} - \frac{1}{2}[\bar{g}_{ij}h^{ij} + h_{ij}\bar{g}^{ij}]\bar{R}_{ij} \\ &+ \underbrace{\delta R_{ij} - \frac{1}{2}h_{ij}[\bar{g}^{\eta\eta}\bar{R}_{\eta\eta} + \bar{g}^{ij}\bar{R}_{ij}]}_{\text{para } i \neq j} \\ &= \frac{1}{2}\delta R_{ij} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{N^2}\delta R^\eta_\eta - \frac{a^2}{N^2}(\Psi + \Phi)\bar{R}^\eta_\eta + \underbrace{\delta R_{ij}}_{\text{para } i \neq j}. \end{aligned} \quad (476)$$

Substituindo as componentes do tensor de Ricci, chega-se finalmente a

$$\delta G^\eta_\eta = \frac{2\Delta\Psi}{a^2} - \frac{6b^2\Phi}{a^2N^2} - \frac{6b\Psi'}{aN^2} - \frac{6f^2\Psi}{a^2} = \kappa^2\delta T^\eta_\eta; \quad (477)$$

$$\delta G^\eta_i = 2\frac{\partial_i}{N^2}\left(\Psi' + \frac{b}{a}\Phi\right) = \kappa^2\delta T^\eta_i \quad (478)$$

$$\delta G^i_\eta = -2\frac{\partial^i}{a^2}\left(\Psi' + \frac{b}{a}\Phi\right) = \kappa^2\delta T^i_\eta \quad (479)$$

$$\begin{aligned} \delta G^i_j &= \left[\frac{\Delta(\Psi - \Phi)}{a^2} - \frac{2\Psi''}{N^2} - \frac{2b^2\Phi}{a^2N^2} - \frac{2a'\Psi'}{aN^2} - \frac{4\Phi b'}{aN^2} - \frac{2b\Phi'}{aN^2} - \frac{4b\Psi'}{aN^2} + \frac{4b\Phi N'}{aN^3}\right. \\ &+ \left.\frac{2N'\Psi'}{N^3} - \frac{2f^2\Psi}{a^2}\right]\delta^i_j - \frac{f}{a^2}\partial^i\partial_j(\Phi + \Psi) + \frac{\partial^i\partial_j(\Phi - \Psi)}{a^2} = \kappa^2\delta T^i_j. \end{aligned} \quad (480)$$

É sempre pertinente notar que no limite $f, h \rightarrow 0$ são retomadas as equações de Einstein sem torção (BASAK; SHANKARANARAYANAN, 2015; BASAK, 2011). Encontradas as equações ECSK, é momento de perturbar o tensor energia-momento do campo MDO com torção.

7.2 PERTURBANDO O CAMPO MDO COM TORÇÃO

Uma vez construído o tensor energia momento para o campo MDO, dado pela equação (367), pode-se perturbar o espinor λ e chegar em equações de movimento perturbadas para o campo MDO.

O passo inicial para a perturbação do campo MDO é escolher uma forma arbitrária para o mesmo, sendo o mais usual o *ansatz hedgehog* (GREDAT; SHANKARANARAYANAN, 2010). Entretanto será considerado um ansatz mais simples, porém equivalente, dado por Basak (2011):

$$\delta\lambda = \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt[4]{12}} \begin{pmatrix} -\alpha_1 e^{i\frac{\pi}{4}} \delta\varphi_1 \\ \alpha_2 \frac{i}{\sqrt{2}} \delta\varphi_2 \\ \alpha_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \delta\varphi_3 \\ \alpha_1 e^{i\frac{\pi}{4}} \delta\varphi_4 \end{pmatrix}. \quad (481)$$

Fixando $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2 = \delta\varphi_3 = \delta\varphi_4$, é obtido

$$\delta\lambda = \frac{\delta\varphi}{\sqrt[4]{12}} \begin{pmatrix} -\alpha_1 e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \alpha_2 \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \alpha_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \alpha_1 e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}, \quad (482)$$

$$\delta\bar{\lambda} = \frac{\delta\varphi}{\sqrt[4]{12}} \left(-\alpha_1 e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad -\alpha_2 \frac{i}{\sqrt{2}} \quad \alpha_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \alpha_1 e^{-i\frac{\pi}{4}} \right), \quad (483)$$

na qual $\delta\varphi(\eta, x^i) = \varphi\delta\varphi_i$ e $\alpha_1 = \alpha_2^{-1} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$ (GREDAT; SHANKARANARAYANAN, 2010).

Mirando na obtenção de um tensor energia-momento perturbado, faz-se necessário buscar inicialmente uma Lagrangiana perturbada para o campo MDO. Fazendo uso do ansatz acima e ignorando todo termo de perturbação com ordem superior a 1, chega-se na seguinte forma para $g^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\varphi\mathcal{D}_\nu\varphi$:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\varphi\mathcal{D}_\nu\varphi &= \bar{g}^{\mu\nu}\bar{\mathcal{D}}_\mu\bar{\varphi}\bar{\mathcal{D}}_\nu\bar{\varphi} + \delta(g^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\varphi\mathcal{D}_\nu\varphi) \\ &= \frac{1}{a^2} \left[\varphi'^2 + \frac{3b^2\varphi^2}{4a^2} + \frac{3bf\varphi^2}{4a} - \frac{3f^2\varphi^2}{16} \right] \\ &+ \frac{1}{a^2} \left[\frac{3b^2\delta\varphi\varphi}{2a^2} - \frac{3b^2\varphi^2\Phi}{2a^2} - \frac{3b\varphi^2\Psi'}{2a} + 2\delta\varphi'\varphi' + 2\Phi(\varphi')^2 \right] \\ &+ \frac{3f}{2a^2} \left[\frac{b\delta\varphi\varphi}{a} + \frac{b\varphi^2}{2a}(\Psi - \Phi) - \frac{\varphi^2\Psi'}{2} - \frac{f}{4a^2}(\delta\varphi\varphi + \varphi^2\Psi) \right] \end{aligned} \quad (484)$$

$$(485)$$

Expandindo a densidade Lagrangiana em um termo de perturbação de ordem zero e outro de primeira ordem,

$$\mathcal{L}_{MDO} = \bar{\mathcal{L}}_{MDO} + \delta\mathcal{L}_{MDO},$$

e usando a forma de $g^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\varphi\mathcal{D}_\nu\varphi$ obtida logo a pouco, a densidade Lagrangiana perturbada toma a forma

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{MDO} = & \frac{(\varphi')^2}{a^2}\Phi + \frac{\delta\varphi'\varphi'}{a^2} + \frac{3b^2\delta\varphi\varphi}{4a^4} - \frac{3b^2\varphi^2}{4a^4}\Phi - \frac{3b\varphi^2}{4a^3}\Psi' \\ & + \frac{3f}{2a^2} \left[\frac{b\delta\varphi\varphi}{a} + \frac{b\varphi^2}{2a}(\Psi - \Phi) - \frac{\varphi^2\Psi'}{2} - \frac{f}{4a^2}(\delta\varphi\varphi + \varphi^2\Psi) \right]. \end{aligned} \quad (486)$$

De maneira geral, a perturbação sobre o tensor energia-momento é dada por

$$\delta T_{\mu\nu} = \delta \left(\mathcal{D}_{(\mu} \bar{\lambda} \mathcal{D}_{\nu)} \lambda \right) - \bar{g}_{\mu\nu} \delta\mathcal{L}_{MDO} - h_{\mu\nu} \mathcal{L}_{MDO} + \frac{1}{2} \delta\mathcal{D}^\rho J_{\mu\nu\rho}. \quad (487)$$

Cuja componente T_η^η , fornece

$$\delta T_\eta^\eta = -\frac{\Phi(\varphi')^2}{a^2} - \frac{3b^2\varphi^2\Phi}{4a^4} + \frac{3b^2\delta\varphi\varphi}{4a^4} - \frac{3b\varphi^2\Psi'}{4a^3} + \frac{\delta\varphi'\varphi'}{a^2} - \frac{\Delta\Phi\varphi^2}{4a^2} + \mathring{\mathfrak{F}}_1. \quad (488)$$

Enquanto que para δT_j^i é obtido

$$\begin{aligned} \delta T_j^i = & \left[\frac{\Phi(\varphi')^2}{a^2} - \frac{\varphi\varphi'\Psi'}{2a^2} - \frac{\varphi^2\Psi''}{4a^2} - \frac{b\delta\varphi\varphi a'}{a^4} + \frac{b\varphi^2\Phi a'}{a^4} + \frac{\varphi^2 a'\Psi'}{4a^3} + \frac{\Delta\Psi\varphi^2}{4a^2} \right. \\ & + \frac{3b^2\varphi\delta\varphi}{4a^4} - \frac{3b^2\varphi^2\Phi}{4a^4} + \frac{b'\delta\varphi\varphi}{2a^3} - \frac{b'\varphi^2\Phi}{2a^3} + \frac{b\varphi\delta\varphi'}{2a^3} + \frac{b\delta\varphi\varphi'}{2a^3} - \frac{b\varphi^2\Phi'}{4a^3} \\ & \left. - \frac{3b\varphi^2\Psi'}{4a^3} - \frac{b\varphi\Phi\varphi'}{a^3} - \frac{\delta\varphi'\varphi'}{a^2} + \mathring{\mathfrak{F}}_2 \right] \delta_j^i - \frac{\partial^i\partial_j\Psi\varphi^2}{4a^2}, \end{aligned} \quad (489)$$

em que $\mathring{\mathfrak{F}}_1$ e $\mathring{\mathfrak{F}}_2$ representam os termos de f e f' , omitidos por questão de economia de espaço, mas são explicitados no Apêndice D. Devido à grande quantidade de termos, a parte simétrica de T_j^i não é muito útil, entretanto a parte assimétrica ($i \neq j$) permitirá fixar uma relação entre Φ e Ψ , além de exigir que $f \rightarrow 0$, como será visto logo adiante. Note que, devido ao caráter espinorial do campo MDO, mesmo o tensor (362) não é capaz de assegurar a simetria para a componente T^{ij} do tensor energia-momento perturbado, diferente do que acontece para o campo escalar usual, a origem dessa assimetria

reside em sua corrente cosmológica e não na torção, como é possível observar em Gredat; Shankaranarayanan (2010); Basak (2011).

As demais componentes são dadas por

$$\begin{aligned} \delta T^{\eta}_i &= \frac{\partial_i}{a^2} \left[\varphi' \delta \varphi - \frac{b\varphi^2}{4a} \Phi - \frac{f\varphi^2}{4} \Phi \right] \\ &- \frac{\partial_i}{4a^2} \left[\frac{b\varphi \delta \varphi}{a} - \frac{\varphi^2 b}{a} (\Phi - 2\Psi) - \frac{\varphi^2}{2} \Psi' + \frac{1}{2} (\varphi^2 \Phi)' - \frac{a' \varphi^2 \Phi}{a} \right] + \mathring{\mathfrak{F}}_3. \end{aligned} \quad (490)$$

$$\begin{aligned} \delta T^i_{\eta} &= -\frac{\partial^i}{a^2} \left[\varphi' \delta \varphi - \frac{\varphi^2 b}{4a} \Phi \right] \\ &+ \frac{\partial^i}{4a^2} \left[\frac{b\varphi \delta \varphi}{a} - \frac{\varphi^2 b}{a} (\Phi - 2\Psi) - \frac{\varphi^2}{2} \Psi' + \frac{1}{2} (\varphi^2 \Phi)' - \frac{a' \varphi^2 \Phi}{a} \right] - \mathring{\mathfrak{F}}_3. \end{aligned} \quad (491)$$

Uma vez que as componentes do tensor energia-momento foram obtidas, deve-se utilizar as equações de ECSK de maneira a encontrar a perturbação na equação $G^{\mu}_{\nu} = \kappa^2 T^{\mu}_{\nu}$. Substituindo (488) em (477), com $N \rightarrow a$, a componente $(\eta\eta)$ da equação ECSK perturbada, fornece

$$\begin{aligned} \Delta \Psi - \frac{3b^2 \Phi}{a^2} - \frac{3b\Psi'}{a} - 3f^2 \Psi &= 4\pi a^2 G \left[\frac{3b^2 \delta \varphi \varphi}{4a^4} - \frac{\Phi (\varphi')^2}{a^2} - \frac{3b^2 \varphi^2 \Phi}{4a^4} - \frac{3b\varphi^2 \Psi'}{4a^3} + \frac{\delta \varphi' \varphi'}{a^2} \right. \\ &\left. - \frac{\Delta \Phi \varphi^2}{4a^2} + \mathring{\mathfrak{F}}_1 \right]. \end{aligned} \quad (492)$$

Por sua vez, substituindo (489) em (480) e comparando apenas a parte assimétrica de $G^i_j = \kappa^2 T^i_j$;

$$-f \partial^i \partial_j (\Phi + \Psi) + \partial^i \partial_j (\Phi - \Psi) = -\frac{\kappa^2}{4} \partial^i \partial_j \Psi \varphi^2. \quad (493)$$

Essa igualdade é de importância fundamental, pois ela permite fixar $f = 0$ e $\Phi = (1 - 2\pi G \varphi^2) \Psi$, como esperado já que o tensor perturbado δT^i_j não é simétrico. Além disso, é uma expressão idêntica a obtida por Basak (2011) para o caso do campo espinorial livre de torção.

Substituindo (490) em (478) e usando $f = 0$, chega-se à

$$\begin{aligned} \Psi' + \frac{b\Phi}{a} &= \frac{\kappa^2}{2} \left[\varphi' \delta \varphi - \frac{b\varphi^2}{4a} \Phi \right] - \frac{\kappa^2}{8} \left[\frac{b\varphi \delta \varphi}{a} - \frac{\varphi^2 b}{a} (\Phi - 2\Psi) - \frac{\varphi^2}{2} \Psi' \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} (\varphi^2 \Phi)' - \frac{a' \varphi^2 \Phi}{a} \right]. \end{aligned} \quad (494)$$

Como visto no capítulo 4, a equação de Mukhanov-Sasaki necessita das variáveis $\left(\frac{\alpha''\Phi}{\alpha}\right)$ e \mathcal{R} . O caminho habitual é encontrar a equação da continuidade perturbada, fato esse não muito complicado em modelos com um campo escalar usual, entretanto no caso de um espinor não padrão com torção, a perturbação na equação da continuidade pode levar a uma grande quantidade de termos, tornando inviável a análise do problema. Embora haja essa complicação, pode-se buscar uma estratégia nada elegante, mas muito útil como a utilizada em (BASAK, 2011), a partir da organização das equações acima.

Para facilitar esse sisifiano trabalho, faz-se a renomeação: $\mathcal{F} \equiv \frac{\kappa^2}{8}\varphi^2$, além disso será assumido $\Phi = (1 - 2\mathcal{F})\Psi$. Portanto, a equação (494) toma a forma

$$\Psi' + \frac{b}{a}\Psi - 2\frac{b}{a}\mathcal{F}\Psi = \frac{\kappa^2}{2}\varphi'^2\frac{\delta\varphi}{\varphi'} - \frac{\mathcal{F}'b}{2a}\frac{\delta\varphi}{\varphi'} - 2\frac{\mathcal{F}b}{a}\Psi - \frac{(\mathcal{F}\Psi)'}{2} + \frac{\mathcal{F}\Psi'}{2} + \mathcal{H}\mathcal{F}\Psi. \quad (495)$$

Para facilitar simplificações futuras, pode-se inserir os termos da densidade de energia e pressão na equação acima, utilizando:

$$\begin{aligned} \rho + p &= \frac{(\varphi')^2}{a^2} - \frac{1}{4a}\left(\frac{b\varphi^2}{a^2}\right)' \\ \rightarrow \frac{(\varphi')^2}{a^2} &= \rho + p + \frac{1}{4a}\left(\frac{b\varphi^2}{a^2}\right)'. \end{aligned} \quad (496)$$

Substituindo (496) em (495), chega-se à

$$\begin{aligned} \Psi' + \frac{b}{a}\Psi - 2\frac{b}{a}\mathcal{F}\Psi &= \frac{\kappa^2}{2}a^2(\rho + p)\frac{\delta\varphi}{\varphi'} + \left[\frac{(b\mathcal{F})'}{a} - 2\frac{\mathcal{H}\mathcal{F}b}{a} - \frac{\mathcal{F}'b}{2a}\right]\frac{\delta\varphi}{\varphi'} \\ &- \left[2\frac{\mathcal{F}b}{a} + \frac{\mathcal{F}'}{2} - \mathcal{H}\mathcal{F}\right]\Psi. \end{aligned} \quad (497)$$

A fim de obter uma das variáveis de Mukhanov-Sasaki (MUKHANOV, 1992; GORBUNOV, 2011; PETER, 2013), pode-se multiplicar ambos os lados da equação acima por $\frac{a^3}{b}$. Aqui será usado b ao invés de \mathcal{H} (BASAK, 2011), uma vez que $h(t)$ é da ordem de grandeza de \mathcal{H} ao fim da inflação. Com isso

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^3\Psi}{b}\right)' &= \left[\frac{\kappa^2 a^6}{2b^2}(\rho + p) + \frac{a^3}{b}\left(\frac{(b\mathcal{F})'}{b} - \frac{\mathcal{F}'}{2} - 2\mathcal{H}\mathcal{F}\right)\right]\left(\frac{b}{a}\frac{\delta\varphi}{\varphi'} + \Psi\right) \\ &+ \left[3\mathcal{H}\mathcal{F} + 2\frac{bh}{a} - \frac{(b\mathcal{F})'}{b}\right]\frac{a^3\Psi}{b}. \end{aligned} \quad (498)$$

Na equação acima pode-se identificar a curvatura comóvel perturbada \mathcal{R} , como

$$\mathcal{R} = \left(\frac{b}{a} \frac{\delta\varphi}{\varphi'} + \Psi \right). \quad (499)$$

Vê-se que \mathcal{R} carrega torção e que ela não muda seu significado físico, uma vez que quando $\delta\varphi \rightarrow 0$ é novamente obtido $\mathcal{R} = \Psi$. A equação (498) pode ser escrita de maneira compacta, como

$$\mathcal{Z}' = \alpha\mathcal{R} + \beta\mathcal{Z}, \quad (500)$$

na qual foi usada o seguinte conjunto de renomeações

$$\mathcal{Z}(\eta, x^i) \equiv \frac{a^3\Psi}{b}, \quad (501)$$

$$\alpha(\eta) \equiv \left[\frac{\kappa^2 a^6}{2b^2} (\rho + p) + \frac{a^3}{b} \left(\frac{(b\mathcal{F})'}{b} - \frac{\mathcal{F}'}{2} - 2\mathcal{H}\mathcal{F} \right) \right], \quad (502)$$

$$\beta(\eta) \equiv \left[3\mathcal{H}\mathcal{F} + 2\frac{bh}{a} - \frac{(b\mathcal{F})'}{b} \right]. \quad (503)$$

Agora, é necessário buscar uma segunda equação diferencial para \mathcal{Z} e \mathcal{R} , a fim de desacoplar essas variáveis e obter a solução das perturbações de primeira ordem.

Voltando a componente T^η_η do tensor energia-momento, (452), é possível escrevê-la da seguinte forma:

$$T^\eta_\eta = X + V = \rho, \quad (504)$$

em que V representa o potencial e X é a parte cinética de ρ . A única pretensão é obter uma forma útil e mais fácil de se trabalhar com a perturbação da densidade de energia. Portanto a perturbação sobre essa componente é

$$\delta\rho = \frac{\partial\rho}{\partial X}\delta X + \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\delta\varphi. \quad (505)$$

A título de economia, será feito $\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} = \rho_{,\alpha}$, com α representando uma quantidade qualquer. Utilizando a contribuição do background, a equação da continuidade toma a forma

$$\begin{aligned} \rho' &= -3\frac{b}{a}(\rho + p) \\ &= \rho_{,X}X' + \rho_{,\varphi}\varphi'. \end{aligned} \quad (506)$$

Isolando ρ, φ em (506) e substituindo em (505), chega-se a perturbação de primeira ordem na densidade de energia:

$$\delta\rho = \rho_{,X} \left(\delta X - X' \frac{\delta\varphi}{\varphi'} \right) - 3 \frac{b}{a} (\rho + p) \frac{\delta\varphi}{\varphi'}, \quad (507)$$

em que $X = \mathcal{D}^\eta \varphi \mathcal{D}_\eta \varphi - \frac{1}{2} g^\eta_\eta \mathcal{D}^\mu \varphi \mathcal{D}_\mu \varphi + \frac{1}{2} \nabla_\rho J^\eta_\eta{}^\rho$. Embora essa equação seja um tanto nebulosa quanto ao seu significado físico, ela será de extrema importância em simplificações futuras. Uma vez que se conhece δT^η_η , é possível escrever a equação (477) como

$$\Delta\Psi - \frac{3b}{2a} \kappa^2 \delta T^\eta_\eta = \frac{\kappa^2 a^2}{2} \left[\rho_{,X} \left(\delta X - X' \frac{\delta\varphi}{\varphi'} \right) - 3 \frac{b}{a} (\rho + p) \frac{\delta\varphi}{\varphi'} \right]. \quad (508)$$

Por sua vez, X , δX e X' , são dados por

$$X = \frac{1}{2a^2} \left[(\varphi')^2 + \frac{3b^2\varphi^2}{4a^2} \right], \quad (509)$$

$$\delta X = -2\Phi X + \frac{\varphi'\delta\varphi'}{a^2} - \frac{3b\varphi^2}{4a^2} \Psi' + \frac{3b^2}{4a^4} \varphi\delta\varphi - \frac{\Delta\Psi\varphi^2}{4a^2}, \quad (510)$$

$$X' = -2\mathcal{H}X + \frac{1}{2a^2} \left[2\varphi'\varphi'' + \frac{3bb'\varphi^2}{2a^2} + \frac{3b^2\varphi\varphi'}{2a^2} - \frac{3\mathcal{H}b^2\varphi^2}{2a^2} \right]. \quad (511)$$

Embora não tenha sido encontrado uma forma explícita para $\rho_{,X}$, sabe-se que ele é uma função puramente do tempo conformal η , logo não há prejuízos em carregar este termo. É possível encontrar uma forma de escrever as perturbações da densidade de energia, $\delta\rho$, em termos da derivada segunda de φ . Apesar da forma final carecer de elegância, ela se mostra extremamente eficiente, portanto substituindo as equações acima e a (490) em (508), chega-se em

$$\begin{aligned} \Delta\Psi - \frac{3b}{a} \left[\frac{\kappa^2 a^2 (\rho + p) \delta\varphi}{2\varphi'} + \left[\frac{(b\mathcal{F})'}{a} - 2 \frac{\mathcal{H}\mathcal{F}b}{a} - \frac{\mathcal{F}'b}{2a} \right] \frac{\delta\varphi}{\varphi'} - \left(2 \frac{\mathcal{F}b}{a} + \frac{\mathcal{F}'}{2} - \mathcal{H}\mathcal{F} \right) \Psi \right] \simeq \\ \frac{\kappa^2 a^2}{2} \left[\rho_{,X} \left(2X \left\{ -\Phi + \mathcal{H} \frac{\delta\varphi}{\varphi'} + \left(\frac{\delta\varphi}{\varphi'} \right)' \right\} - \frac{3b\varphi^2}{4a^3} \left(\frac{b\delta\varphi}{a\varphi'} \right)' - \frac{\Delta\Psi\varphi^2}{4a^2} - \frac{3b\varphi^2}{4a^2} \Psi' \right) \right. \\ \left. - 3 \frac{b}{a} (\rho + p) \frac{\delta\varphi}{\varphi'} \right]. \quad (512) \end{aligned}$$

Existem muitos caminhos que podem ser seguidos na simplificação dessa equação, nossa escolha foi isolar Φ na equação (494) e usar $\Phi = (1 - 2\mathcal{F})\Psi$ apenas do lado direito da igualdade, obtendo a expressão

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{a}{b}\Psi' + \frac{\kappa^2 a^3}{2b}(\rho + p)\frac{\delta\varphi}{\varphi'} + \left[\frac{(b\mathcal{F})'}{a} - 2\frac{\mathcal{H}\mathcal{F}b}{a} - \frac{\mathcal{F}'b}{2a} \right] \frac{a\delta\varphi}{b\varphi'} \\ &- \left[2\frac{\mathcal{F}b}{a} + \frac{\mathcal{F}'}{2} - \mathcal{H}\mathcal{F} \right] \frac{a\Psi}{b}. \end{aligned} \quad (513)$$

Considerando $\left(\frac{b}{a}\right)' = \frac{b^2}{a^2} - \frac{\kappa^2 a^2}{2}(\rho + p)$ e usando a expressão (513), pode-se escrever a equação (512), da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Delta\Psi - \frac{3b}{a} \left[\left(\frac{(b\mathcal{F})'}{a} - 2\frac{\mathcal{H}\mathcal{F}b}{a} - \frac{\mathcal{F}'b}{2a} \right) \frac{\delta\varphi}{\varphi'} - \left(2\frac{\mathcal{F}b}{a} + \frac{\mathcal{F}'}{2} - \mathcal{H}\mathcal{F} \right) \Psi \right] \simeq \\ \frac{\kappa^2 a^2}{2} \rho_{,X} \left[2\frac{aX}{b} \left\{ \left(\frac{b\delta\varphi}{a\varphi'} + \Psi \right)' - h \left(\frac{b\delta\varphi}{a\varphi'} + \Psi \right) - \left(\frac{(b\mathcal{F})'}{a} - 2\frac{\mathcal{H}\mathcal{F}b}{a} - \frac{\mathcal{F}'b}{2a} \right) \frac{\delta\varphi}{\varphi'} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(2\frac{\mathcal{F}b}{a} + \frac{\mathcal{F}'}{2} + \frac{bh}{a} - \mathcal{H}\mathcal{F} \right) \Psi \right\} - \frac{3b\varphi^2}{4a^3} \left(\frac{b\delta\varphi}{a\varphi'} + \Psi \right)' - \frac{\Delta\Psi\varphi^2}{4a^2} \right]. \end{aligned} \quad (514)$$

A qual pode ser simplificada, como

$$\begin{aligned} \Delta\Psi(1 + \rho_{,X}\mathcal{F}) \simeq & \rho_{,X} \left(\frac{\kappa^2 a^3}{b} X - \frac{3b}{a} \mathcal{F} \right) \left(\frac{b\delta\varphi}{a\varphi'} + \Psi \right)' + \\ & \left[\left(\frac{3b}{a} - \frac{\kappa^2 a^3 \rho_{,X}}{b} X \right) \left(\frac{(b\mathcal{F})'}{b} - \frac{\mathcal{F}'}{2} - 2\mathcal{H}\mathcal{F} \right) - \frac{\kappa^2 a^3 \rho_{,X}}{b} X h \right] \left(\frac{b\delta\varphi}{a\varphi'} + \Psi \right) \\ & - \left[\left(\frac{3b^2}{a^4} - \kappa^2 \rho_{,X} X \right) \left(2\frac{b\mathcal{F}}{a} + \frac{(b\mathcal{F})'}{b} - 3\mathcal{H}\mathcal{F} \right) - \kappa^2 \rho_{,X} X h \right] \frac{a^3}{b} \Psi. \end{aligned} \quad (515)$$

Esta equação acima é do tipo

$$\lambda\Delta\mathcal{Z} = \xi\mathcal{R}' + \sigma\mathcal{R} - \vartheta\mathcal{Z}. \quad (516)$$

em que as seguintes renomeações foram feitas

$$\lambda(\eta) \equiv (1 + \rho_{,X}\mathcal{F}), \quad (517)$$

$$\xi(\eta) \equiv \rho_{,X} \left(\frac{\kappa^2 a^3}{b} X - \frac{3b}{a} \mathcal{F} \right), \quad (518)$$

$$\sigma(\eta) \equiv \left[\left(\frac{3b}{a} - \frac{\kappa^2 a^3 \rho_{,X}}{b} X \right) \left(\frac{(b\mathcal{F})'}{b} - \frac{\mathcal{F}'}{2} - 2\mathcal{H}\mathcal{F} \right) - \frac{\kappa^2 a^3 \rho_{,X}}{b} X h \right], \quad (519)$$

$$\vartheta(\eta) \equiv \left[\left(\frac{3b^2}{a^4} - \kappa^2 \rho_{,X} X \right) \left(2\frac{b\mathcal{F}}{a} + \frac{(b\mathcal{F})'}{b} - 3\mathcal{H}\mathcal{F} \right) - \kappa^2 \rho_{,X} X h \right]. \quad (520)$$

Com isso é possível desacoplar as duas equações diferenciais (500) e (516). Isolando

\mathcal{R} na equação (500),

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{Z}' - \beta\mathcal{Z}}{\alpha}, \quad (521)$$

com α e β dados por (502) e (503), respectivamente. Substituindo \mathcal{R} na equação (516), a expressão final se torna

$$A\Delta\mathcal{Z} = \mathcal{Z}'' + B\mathcal{Z}' - C\mathcal{Z}, \quad (522)$$

com

$$A = \frac{\lambda\alpha}{\xi}, \quad (523)$$

$$B = \left(-\frac{1}{\alpha} - \beta + \frac{\sigma}{\xi}\right), \quad (524)$$

$$C = \left(\beta' - \frac{\beta\alpha'}{\alpha} + \frac{\sigma\beta}{\xi} + \frac{\alpha\vartheta}{\xi}\right), \quad (525)$$

em ξ e ϑ são dados respectivamente pelas equivalências (518) e (520). Essa sistemática renomeação de variáveis é necessária para simplificar os termos. Para que a equação de Mukhanov-Sasaki seja corretamente obtida, será feita a consideração $\mathcal{Z} = u(\eta, x^i)f(\eta)$, assim

$$A(\Delta u) = u'' + \left(2\frac{f'}{f} + B\right)u' + \left(\frac{f''}{f} + \frac{Bf'}{f} - C\right)u. \quad (526)$$

É necessário zerar o termo u' (PETER, 2013; MUKHANOV, 2005, 1992), portanto:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{B}{2}, \quad (527)$$

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{4}B^2 - \frac{B'}{2}, \quad (528)$$

$$f = e^{-\int \frac{B}{2} d\eta}. \quad (529)$$

Finalmente a equação de Mukhanov-Sasaki toma a forma

$$u'' - A(\Delta u) - \left(\frac{B^2}{4} + \frac{B'}{2} + C\right)u = 0. \quad (530)$$

Cuja forma final no espaço dos momentos é

$$u'' + (1 + D)k^2u - \left(\frac{\theta''}{\theta} + E\right)u = 0, \quad (531)$$

com D e E funções de primeira ordem de \mathcal{F} e suas derivadas, enquanto que θ é uma função do tipo descrito no capítulo 4. No caso h , $\mathcal{F} \rightarrow 0$, a equação clássica de Mukhanov-Sasaki para o campo escalar usual (LESGOURGUES, 2006; GORBUNOV, 2011) é obtida.

Em busca de estabelecer vínculos e restrições ao modelo, é necessário averiguar a velocidade do som no meio, a qual é obtida por $c_s^2 = (1 + D) = \frac{\alpha\lambda}{\xi}$, ou seja:

$$c_s^2 = \frac{a^3(1 + \rho_{,X}\mathcal{F})}{b\rho_{,X} \left(\frac{\kappa^2 a^3}{b}X - \frac{3b}{a}\mathcal{F}\right)} \left(\left[\frac{\kappa^2 a^6}{2b^2}(\rho + p) + \frac{a^3}{b} \left(\frac{(b\mathcal{F})'}{b} - \frac{\mathcal{F}'}{2} - 2\mathcal{H}\mathcal{F} \right) \right] \right). \quad (532)$$

Devido a dificuldade em simplificar essa equação, foi usado o Software Mathematica 11 para plotar valores numéricos para c_s^2 . Uma vez que não se conhece o valor exato φ hoje, pode-se fixar seu valor ao final da inflação $\varphi_c = 1, 3m_p$, e esperar que o valor da velocidade do som esteja compreendido entre $0 < c_s^2 < 1$, uma vez que se $c_s^2 < 1$ a linha de mundo do espaço-tempo é do tipo tempo, se $c_s^2 = 1$ é do tipo luz e se $c_s^2 > 1$ é do tipo espaço (UGGLA, 2011). Utilizando as equações (509), (398) e os valores $H_0 \sim h(0) \sim 10^{-18}s^{-1}$, $\varphi'(t_0) = 0$ e $\varphi = 1, 3m_p$, é obtido o valor

$$c_s^2 \approx 0, 76, \quad (533)$$

como é possível notar, o valor limite fixado para o campo φ no vácuo do potencial cosmológico (435) garante a causalidade. Com isso a velocidade do som é satisfeita para esse modelo e garante um grande espectro de valores para espinor MDO.

7.3 ANÁLISE DO ESPECTRO DE POTÊNCIA

Por último é necessário calcular o espectro de potência e o índice espectral para as perturbações escalares deste modelo, neste caso se seguirá exatamente o que foi discutido na seção 4.5 e nos artigos Mukhanov (1992); Gorbunov (2011); Basak (2011).

Tomando a equação (530) no limite para k muito pequeno, ou seja, para um comprimento de onda grande, esta equação pode ser reduzida a

$$u'' - \left(\frac{\theta''}{\theta} + E\right)u = 0. \quad (534)$$

Em um limite $E \rightarrow 0$ a equação de Mukhanov para o campo escalar usual é recobrada

(MUKHANOV, 1992; PETER, 2013), então pode-se afirmar que a solução da equação (534) é um produto entre a solução para o caso do campo escalar canônico, u_{can} , e uma função y a ser determinada. Com isso a equação (534) se torna

$$y'' - 2 \left(\frac{u'_{can}}{u_{can}} \right) y' - Ey = 0. \quad (535)$$

Considerando E uma quantidade muito pequena, é possível obter uma solução aproximada do tipo $y \approx y_0 + \bar{y}$, com $|y_0| > |\bar{y}|$, de maneira que \bar{y} é da mesma ordem de E . Assim a equação (535) pode ser dividida em

$$y_0'' + 2 \left(\frac{u'_{can}}{u_{can}} \right) y_0' = 0, \quad (536)$$

$$\bar{y}'' + 2 \left(\frac{u'_{can}}{u_{can}} \right) \bar{y}' = Ey_0. \quad (537)$$

A solução de y_0 é facilmente obtida, sendo dada por

$$y_0 = c_1 + \int \left(\frac{c_2}{u_{can}^2} \right) d\eta, \quad (538)$$

em que c_1 e c_2 são constantes de integração. Utilizando essa solução em (537) chega-se a

$$\bar{y}'' + 2 \left(\frac{u'_{can}}{u_{can}} \right) \bar{y}' = E \left(c_1 + \int \left(\frac{c_2}{u_{can}^2} \right) d\eta \right), \quad (539)$$

a qual é uma equação diferencial não homogênea de segunda ordem, cuja solução tem a forma

$$\bar{y} = \int \frac{1}{u_{can}^2} \left(\int Eu_{can}^2 d\eta \right) d\eta. \quad (540)$$

Somando (534) e (540), é obtido uma forma final para y em termos das constantes de integração:

$$y = y_0 + \bar{y} = c_1 + \int \left(\frac{c_2}{u_{can}^2} \right) d\eta + \int \frac{1}{u_{can}^2} \left(\int Eu_{can}^2 d\eta \right) d\eta. \quad (541)$$

É possível determinar as constantes c_1 e c_2 utilizando a condição $E = 0$, nesse caso $y = 1$, forçando

$$1 = c_1 + \int \left(\frac{c_2}{u_{can}^2} \right) d\eta, \quad (542)$$

portanto é possível escolher $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$. Finalmente a solução geral para u possui a forma

$$u = u_{can} y \simeq u_{can} \left[1 + \int \frac{1}{u_{can}^2} \left(\int E u_{can}^2 d\eta \right) d\eta \right]. \quad (543)$$

Relembrando que $\Phi = \frac{b}{a^3} u f$, com f dado pela equação (529), a solução para Φ se torna

$$\Phi \simeq \frac{b}{a^3} \sqrt{\alpha} u_{can} \left[1 + \int \frac{1}{u_{can}^2} \left(\int E u_{can}^2 d\eta \right) d\eta \right] \exp \frac{1}{2} \int \left(\beta - \frac{\sigma}{\xi} \right) d\eta, \quad (544)$$

com σ e ξ dados em (519) e (518), respectivamente. Uma vez que o espectro de potência é dado por $\delta_\Phi = \Phi^2 k^3$, chega-se a

$$\delta_\Phi = \delta_{\Phi_{can}} \left[\frac{\mathcal{H}}{b} - \left(\frac{4\mathcal{H}^2 \mathcal{F} + \mathcal{H} \mathcal{F}'}{\kappa^2 a^3 (\rho + p)_{can}} \right) \right] \left[1 + \int \frac{1}{u_{can}^2} \left(\int E u_{can}^2 d\eta \right) d\eta \right]^2 \exp \int \left(\beta - \frac{\sigma}{\xi} \right) d\eta. \quad (545)$$

Está equação é diferente da equação para o espectro de potência obtido por Basak (2011), entretanto a mesma é recobrada no limite $b \rightarrow \mathcal{H}$. Note que a integral

$$\int \frac{1}{u_{can}^2} \left(\int E u_{can}^2 d\eta \right) d\eta$$

não depende de k , logo o espectro de potência de Φ para um comprimento de onda grande possui invariância de escala. É necessário agora, linearizar a equação (545), com isso

$$\begin{aligned} \ln \delta_\Phi &= \ln \delta_{\Phi_{can}} + \ln \left[\frac{\mathcal{H}}{b} - \left(\frac{4\mathcal{H}^2 \mathcal{F} + \mathcal{H} \mathcal{F}'}{\kappa^2 a^3 (\rho + p)_{can}} \right) \right] \\ &\quad + 2 \ln \left[1 + \int \frac{1}{u_{can}^2} \left(\int E u_{can}^2 d\eta \right) d\eta \right] + \int \left(\beta - \frac{\sigma}{\xi} \right) d\eta. \end{aligned} \quad (546)$$

Como discutido no capítulo 4.5, o índice espectral para a perturbação escalar pode ser escrito como

$$n_s - 1 = \frac{d \ln \delta_\Phi^2}{d \ln k}. \quad (547)$$

Uma vez que a torção não altera o tempo de cruzamento do horizonte de Hubble (WANAS, 2014), tem-se $c_s k = a\mathcal{H}$, a devida em relação a $\ln k$ pode então ser substituída por $d \ln k = \frac{1}{\mathcal{H}} d\eta$. Com isso $\frac{d \ln \delta_{\Phi}^2}{d \ln k}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \delta_{\Phi}^2}{d \ln k} &= \frac{1}{\mathcal{H}} (\ln \delta_{\Phi_{can}})' + \frac{1}{\mathcal{H}} \left(\ln \left[\frac{\mathcal{H}}{b} - \left(\frac{4\mathcal{H}^2 \mathcal{F} + \mathcal{H} \mathcal{F}'}{\kappa^2 a^3 (\rho + p)_{can}} \right) \right] \right)' \\ &+ \frac{2}{\mathcal{H}} \left(\ln \left[1 + \int \frac{1}{u_{can}^2} \left(\int E u_{can}^2 d\eta \right) d\eta \right] \right)' + \frac{1}{\mathcal{H}} \left(\beta - \frac{\sigma}{\xi} \right). \end{aligned} \quad (548)$$

Levando-se em conta as condições de *Slow-Roll*, a derivada em relação ao tempo do logaritmo de uma quantidade física dividida por \mathcal{H} é muito pequena e pode ser descartada (BASAK, 2011), assim a equação (548) se reduz a

$$\frac{d \ln \delta_{\Phi}^2}{d \ln k} = \frac{1}{\mathcal{H}} (\ln \delta_{\Phi_{can}})' + \frac{1}{\mathcal{H}} \left(\beta - \frac{\sigma}{\xi} \right). \quad (549)$$

$$(550)$$

Segundo (MUKHANOV, 1992), o primeiro termo pode ser escrito como

$$\frac{1}{\mathcal{H}} (\ln \delta_{\Phi_{can}})' \simeq -3 \left(1 + \frac{p}{\rho} \right)_{can}. \quad (551)$$

Por sua vez o último termo se torna

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{H}} \left(\beta - \frac{\sigma}{\xi} \right) &= \frac{1}{\mathcal{H}} \left(\left[3\mathcal{H}\mathcal{F} + 2\frac{bh}{a} - \frac{(b\mathcal{F})'}{b} \right] \right) + \\ &- \frac{1}{\mathcal{H}} \left(\frac{\left[\left(\frac{3b}{a} - \frac{\kappa^2 a^3 \rho_{,X}}{b} X \right) \left(\frac{(b\mathcal{F})'}{b} - \frac{\mathcal{F}'}{2} - 2\mathcal{H}\mathcal{F} \right) - \frac{\kappa^2 a^3 \rho_{,X}}{b} X h \right]}{\rho_{,X} \left(\frac{\kappa^2 a^3}{b} X - \frac{3b}{a} \mathcal{F} \right)} \right). \end{aligned} \quad (552)$$

A equação (552) é muito complicada para uma simplificação honesta, para tanto novamente será lançado mão de uma análise numérica apenas para este termo. Utilizando os valores para $\varphi(t_0)$ delimitados pela velocidade som, e fazendo a renomeação para simplificar a notação

$$\frac{1}{\mathcal{H}} \left(\beta - \frac{\sigma}{\xi} \right) \equiv \mathcal{G}(\varphi), \quad (553)$$

o termo (552) para o valor do campo φ , do início ao final da inflação, o termo \mathcal{G} é da

ordem de

$$10^{-18} \lesssim \mathcal{G}(\varphi) \lesssim 1. \quad (554)$$

Com isso, finalmente se chega em

$$n_s = 1 - 3 \left(1 + \frac{p}{\rho}\right)_{can} + \mathcal{G}(\varphi). \quad (555)$$

Na escala galática o termo $(1 + \frac{p}{\rho})_{can}$ é estimado como sendo da ordem de 10^{-2} enquanto que ρ_{can} é da ordem de 10^{-12} da densidade de Planck (MUKHANOV, 1992). Com isso

$$n_s = 1 - 0,03 + \mathcal{G}(\varphi). \quad (556)$$

É importante mencionar a possibilidade se encontrar a contribuição da torção para a perturbação, fazendo $\varphi(t) \rightarrow 0$ e considerando $h(t)$ da mesma ordem de \mathcal{H} , o termo de correção do MDO $\mathcal{G}(0)$ se torna da ordem de 10^{-18} , evidenciando que a torção afeta muito pouco o espectro de potência. Ainda no limite $\varphi(t), h(t) \rightarrow 0$ o termo $\mathcal{G}(\varphi)$ desaparece e a equação (556) recai no caso do campo escalar canônico, exatamente como deveria ser. Uma vez que os dados da sonda Plank (PLANCK-COLLABORATION, 2018) mostram que $n_s = 0,9649 \pm 0,0042$, o termo associado ao espinor MDO com torção é forçado a ser da ordem de no máximo 10^{-4} , assim φ deve ser no máximo da ordem de $10^{-2}m_p$ hoje. Cabe ressaltar que esse valor é um pouco abaixo do esperado para o vácuo do potencial cosmológico (435), entretanto deve ser lembrado que esse modelo é uma primeira aproximação, sendo necessário uma teoria de perturbação mais consistente utilizando a equação (364), além disso, não é possível conhecer o comportamento do campo MDO na superfície de último espalhamento, após ter passado pelo processo de reaquecimento. É interessante notar que esse valor leva a $\mathcal{F} = \frac{\varphi^2}{8m_p^2} \sim 10^{-4}$, em concordância com o modelo para a perturbação do campo MDO sem torção (BASAK, 2011), o que é muito coerente tendo em vista a contribuição da torção.

O caso para comprimento de onda pequeno não será discutido aqui, pois ele tem se mostrado variante por escala devido a natureza do próprio campo MDO, como pode ser visto em Basak (2011).

Neste capítulo foram estudadas as perturbações escalares no campo MDO com torção seguindo os passos básicos abordados pelas referências sistematicamente citadas. Foi mostrado que para um espaço-tempo com torção a condição $\Phi = \Psi$ foi substituída por $\Phi = (1 - 2\mathcal{F})\Psi$, em acordo com o obtido para o MDO sem torção (GREDAT; SHANKARANARAYANAN, 2010). Embora tenha sido uma abordagem simplificada para uma

perturbação no campo MDO com torção, ela forneceu dados interessantes, o primeiro deles é que a velocidade do som é completamente satisfeita para os valores do campo φ trabalhados na seção 6.2.1, o que mostra que o modelo não sofre com problemas de causalidade e ajuda a fixar valores para limitar este campo. Por sua vez a função de torção $h(t)$ afeta o valor do índice espectral irrisoriamente, da ordem de 10^{-18} , enquanto que o campo MDO fica restrito à um valor máximo de $10^{-2}m_p$, tal valor é inferior ao obtido em 6.2.1, em que após a inflação φ oscila em torno de $1,3m_p$, entretanto é necessário se atentar para o fato de que esse modelo é uma primeira aproximação. Caso $\varphi(t), h(t) \rightarrow 0$ as equações para o espectro de potência, bem como para o índice espectral do campo escalar canônico são retomadas, o que mostra que o modelo é consistente. Ainda que esta tenha sido perturbada a equação (363), tais resultados norteiam o comportamento do MDO em direção a um modelo inflacionário plausível, entretanto, é necessário que tal abordagem seja feita para a equação (364), uma vez que essa é mais completa e, por conseguinte, muito mais complicada do que a abordada aqui.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como foi discutido no capítulo 2, o modelo cosmológico Λ CDM descreve um Universo cuja gênese é um momento de grande densidade de energia e temperatura (WEINBERG, 2008). A história cosmológica é descrita sempre por momentos de expansão, inicialmente em uma era dominada pela radiação, na qual o fator de escala evoluía proporcional a $t^{1/2}$, posteriormente o Universo passava a ser dominado por matéria escura, tendo sua evolução guiada por $t^{2/3}$, até que nos dias de hoje a evolução é guiada por algum tipo de energia escura ou constante cosmológica (RYDEN, 2016). Embora esse modelo seja muito coerente, existem alguns problemas como o da planura, do horizonte e das relíquias, os quais podem ser resolvidos se nos instantes iniciais da história cósmica for incluído um rápido período de expansão quase exponencial (GUTH, 1981; LINDE, 1982; LEMOINE, 2007).

Não é um requerimento do modelo cosmológico padrão que o agente responsável por essa inflação também seja responsável pelas fases posteriores da evolução do Universo. Entretanto, cada vez mais pesquisas vêm buscando modelos em que um campo físico seria capaz de produzir a inflação cósmica, após esse período se comportar como matéria escura e posteriormente se relacionar a energia escura ou constante cosmológica de alguma forma (PEREIRA; ALVES; GUIMARÃES, 2018; LIDDLE, 2008; ARBEY, 2006). Devido à natureza desconhecida desses três objetos físicos, muito se questiona sobre quais tipos de campos podem estar por trás desses processos. No capítulo 3 é mostrado que um campo escalar qualquer ϕ pode ser um bom candidato a esta tarefa, na ocasião tal campo satisfaz as condições de *Slow-Roll* (70) e (73), levando a um número correto de *e-folds* (LINDE, 1990). Posteriormente foi discutido no capítulo 4 que é possível estabelecer, a partir da teoria de perturbações, vínculos observacionais entre pequenas anisotropias no campo do inflaton e as polarizações na Radiação Cósmica de Fundo em Micro-Ondas observadas hoje (MUKHANOV, 1992).

Uma vez que a natureza do campo inflaton é desconhecida e o campo escalar fundamental previsto pelo modelo padrão da física de partículas é o campo de Higgs, modelos alternativos nos quais o Universo é guiado por um ou vários campos de natureza adversa ao campo escalar, foram estudados. No capítulo 5, foi feita uma discussão da dinâmica de um campo espinorial com dimensão de massa um, conhecido como MDO (GILLARD, 2011; ?; ?; BÖHMER, 2007; AHLUWALIA, 2014; PEREIRA; PINHO SS, 2014), e a sua atuação cosmológica, tanto com e sem torção (GREDAT; SHANKARANARAYANAN, 2010; BASAK, 2011; PEREIRA; GUIMARÃES, 2017). Considerando um

espaço-tempo livre de torção foi mostrado que o campo MDO foi capaz de realizar a inflação cósmica de maneira coerente (GREDAT; SHANKARANARAYANAN, 2010; BASAK, 2011), levando a cerca de 67 *e-folds*, posteriormente este campo também parecia atuar coerentemente como matéria escura (AHLUWALIA-KHALILOVA, 2005; ALVES, 2014A; BASTERO-GIL, 2016), o que era esperado devido à natureza peculiar dos acoplamentos desse campo com os demais campos físicos, o que o faz, por definição, um bom candidato a matéria escura fria (AHLUWALIA-KHALILOVA; GRUMILLER, 2005). Até o presente momento não existem trabalhos mostrando que este espinor pode decair em matéria escura após a inflação, portanto sua atuação como inflaton e matéria escura são tratadas de forma independente. Posteriormente foi construído um modelo para o MDO considerando a existência de torção no espaço-tempo, a principal motivação é que uma vez que espinor tem dimensão de massa 1, ele se acopla a todos os termos do tensor de torção (SHAPIRO, 2002, 1998).

No capítulo 6, foi construído um modelo cosmológico unificado para o campo MDO acoplado a torção, inicialmente nenhum acoplamento com a matéria bariônica foi considerado e vários aspectos importantes puderam ser encontrados após os resultados numéricos. Primeiro, a forma muito semelhante das equações que governam a evolução temporal do campo MDO com o campo escalar padrão no limite $H \ll m_p$. Além disso, existe a presença de um termo de correção semelhante a um termo de amortecimento no modelo de inflação do campo escalar padrão, aqui tal termo aparece naturalmente e pode estar associado ao decaimento de φ em outras partículas do modelo padrão durante o período de reaquecimento. Enquanto o campo está rolando para baixo até o fundo do potencial, sua equação do parâmetro de estado vai de -1 para uma oscilação média em torno de zero, o que garante uma evolução da matéria escura após o crescimento exponencial inicial (PEREIRA; GUIMARÃES, 2017).

Em relação aos dados numéricos, primeiro foi observado um crescimento quase exponencial do fator de escala $t_i \sim 10^{-35} s$ levando a uma inflação de cerca de $N = 93$. Após este período, o campo entra em uma era dominada pela matéria escura que evolui proporcional a $t^{2/3}$, oscilando em torno do mínimo do potencial, repousando em uma energia de cerca de $1m_p$, em que a energia potencial é nula. A densidade de energia no final da inflação é a esperada de acordo com o modelo padrão, cerca de $10^{70} g/cm^3$. Ao fazer uma extrapolação da curva $a(t) = a_0 t^{2/3}$ até os dias de hoje, descobriu-se que o crescimento do fator de escala é de cerca de 10^{74} ordens de magnitude, também em boa concordância com o modelo padrão. Além disso, a densidade de energia do campo para o tempo presente é de $\rho \sim 10^{-28} g/cm^3$, apenas uma ordem de magnitude abaixo do previsto pelo modelo padrão. Finalmente, se o potencial é ligeiramente deslocado por um termo constante v_0 , o fator de escala entra em uma nova fase semelhante a um Universo cuja constante cosmológica é dominante, reproduzindo a atual fase acelerada (PEREIRA; GUIMARÃES, 2017). Tais resultados são importantes vínculos entre o modelo e os dados observacionais, entretanto, os parâmetros devem ser melhor restringidos com observa-

ções e também incluindo radiação e matéria bariônica ao modelo, como foi feito na seção seguinte.

Também foi verificado numericamente que quanto maior o valor do campo inicial φ_i maior o número de *e-folds* da expansão inflacionária. O parâmetro φ_c também altera o número de *e-folds*. Ainda, quanto maior o valor do parâmetro Λ no potencial, menor é a duração do crescimento exponencial inflacionário.

Como uma observação final sobre a inflação causada pelo MDO, se for considerado este campo apenas como um campo clássico, as soluções numéricas mostram que ele tem as propriedades desejadas para impulsionar a inflação, mas o mecanismo físico para isso pode ser melhor entendido na abordagem do campo MDO como um campo quântico. A forma completa para este espinor é $\lambda = \varphi(t)\xi$, que pode ser tratado como um valor médio $\langle \lambda \rangle$ do campo quântico, assim o conjunto de equações construído nos capítulos 5 e 6 para esse modelo deve permanecer válido.

Cabe ressaltar que a inflação guiada pelo espinor MDO pode ser interpretada à luz do princípio de exclusão de Pauli (PEREIRA; HOLANDA; S., 2017; PEREIRA; GUIMARÃES, 2017). Quando o campo fermiônico desce para mínimo estado de energia do potencial, o princípio de exclusão de Pauli começa a agir, não permitindo que todas as partículas ocupem o estado de menor energia. Se o potencial for mais forte que a pressão de degenerescência, todo o sistema responde com uma expansão abrupta para acomodar todas as partículas no estado de menor energia, pois o espaçamento entre os níveis de energia em um sistema acoplado é inversamente proporcional ao tamanho do sistema. Este efeito permite que todas as partículas se acomodem muito perto do estado de menor energia após a inflação.

Esta e outras propriedades merecem investigações futuras, a fim de colocar o campo de MDO como um bom candidato para impulsionar a inflação e outras fases de evolução do Universo.

Após uma abordagem de um modelo cosmológico constituído apenas do campo MDO, em seguida foram considerados acoplamentos do campo MDO e a matéria bariônica, construindo assim um modelo de evolução cosmológica unificada mais realista e parâmetros que anteriormente foram escolhidos de maneira arbitrária, agora puderam ser melhor definidos.

Foi mostrado que a inflação guiada pelo espinor MDO, com um potencial com quebra de simetria, pode alcançar com sucesso um número de *e-folds* tão grandes quanto 71, sendo a condição inicial para o campo φ dada pela menor flutuação quântica possível, fixando o modelo inflacionário no regime conhecido como *small-field inflation*. As condições de *Slow-Roll* foram satisfeitas e dada pelo valor constante $\eta \simeq 0.3$ durante quase todo o período inflacionário. A função de torção desempenha um papel importante nos 15 *e-folds* restantes até o final da inflação, gerando um impacto na função de Hubble naquela época (PEREIRA; ALVES; GUIMARÃES, 2018).

Um aumento tão súbito da densidade de energia do Universo para um valor maior do

que o valor inicial levanta a questão se ele poderia gerar qualquer impressão nos espectros de anisotropias da RCFMO. Da mesma maneira, pode-se esperar uma modificação na forma do espectro primordial de ondas gravitacionais. Estas questões serão respondidas por investigações futuras.

Vale ressaltar que o comportamento da matéria escura a partir do campo MDO é entendido na presente pesquisa de forma bem diferente dos trabalhos anteriores sobre o tema (PEREIRA; HOLANDA; S., 2017; PEREIRA; GUIMARÃES, 2017). Nesses trabalhos, as oscilações coerentes do campo após a inflação são interpretadas como matéria escura, isso ocorre porque o campo oscilante é, em média, sem pressão da mesma maneira que acontece com um campo escalar oscilante sujeito a um potencial quadrático. No entanto, isso é possível somente no caso em que a interação do campo do MDO com qualquer outro campo seja insignificamente pequena. Inversamente, se o campo se acoplar com radiação ou com o bóson de Higgs, no regime de altas energias após a época inflacionária, sua densidade de energia decairá exponencialmente em uma fase de reaquecimento, como discutido em geral na seção 6.2.2. Nesse sentido, o comportamento do espino MDO como matéria escura só sobrevive se o campo adquire um valor constante não nulo após o reaquecimento, que é da ordem da massa de Planck ou, mais precisamente, $\varphi_c = m_p \sqrt{\Omega_{DM,\phi}/\pi\Omega_b}$. Portanto, se esta condição for satisfeita, não importa que tipo de potencial o campo esteja sujeito (nem o mecanismo inflacionário), o acoplamento gravitacional do campo com a matéria bariônica leva a uma contribuição na forma de uma matéria sem pressão. Vale ressaltar que tal acoplamento tem sua origem na definição das conexões de spin em espaços-tempos curvos. Nenhum acoplamento explícito entre o campo MDO com outros campos foi assumido.

Além disso, se o potencial não é nulo em $\varphi = \varphi_c$, então o campo MDO tem uma contribuição constante adicional para a densidade de energia que funciona exatamente como uma constante cosmológica. Para que isso aconteça, basta considerar um termo quadrático de massa no potencial, o que leva a uma pequena massa para o campo MDO, da ordem de $10^{-62} m_p$.

Finalmente, o cenário descrito nesta tese fornece uma explicação natural para o problema da coincidência cosmológica. Isso ocorre porque a evolução da densidade de energia do campo do MDO evolui com a evolução da densidade de energia de outros campos de matéria, resultando em um valor presente da mesma ordem de grandeza da matéria usual.

No capítulo 7, foi mostrado que é possível obter uma primeira aproximação para perturbação escalar no campo MDO de forma a tentar descrever a anisotropia da radiação cósmica de fundo. Como visto os valores abordados no capítulo 6 para o campo φ satisfazem a velocidade do som num meio hidrodinâmico, garantindo a causalidade do modelo, por fim foi mostrado que a contribuição de torção para este caso é da ordem de $h \sim 10^{-18}$, o que é irrisório, fixando o campo φ com torção exatamente na mesma escala da fixada para o campo MDO sem torção (BASAK, 2011), a dizer $\mathcal{F} \sim 10^{-4}$. Este último resul-

tado mostra que o campo MDO em um espaço-tempo com torção é capaz de produzir o valor esperado do índice espectral observado, embora ele não respeite a condição imposta no capítulo anterior para o valor do campo $\varphi_c = 1, 3m_p$, mas cabe ser ressaltado que tal modelo perturbado não é o mais completo, uma vez que esta é uma primeira aproximação.

Portanto, conclui-se que o campo fermiônico MDO é um bom candidato para conduzir toda a evolução do Universo de forma unificada, de tal forma que o campo inflacionário, matéria escura e energia escura são descritos por diferentes manifestações de um único campo fermiônico. Além disso, como já apontado na Introdução, uma possível interpretação da fase inflacionária como consequência do princípio de exclusão de Pauli colocou este modelo em bases físicas muito interessantes. Como última característica, se faz necessário a construção de uma teoria de perturbações cosmológicas utilizando a equação efetiva (364), a fim de maior precisão entre os dados obtidos teoricamente para o índice espectral n_s e o observado.

8.1 PERSPECTIVAS FUTURAS

A pesquisa apresentada nesta tese abre precedentes para algumas perguntas importantes, em ordem cronológica do que foi discutido, a primeira delas seria sobre a possibilidade de criar um modelo cosmológico unificado utilizando o espinor MDO sem torção, de forma que a teoria descrevesse corretamente o comportamento de tal campo durante o período de reaquecimento e posterior domínio do espinor MDO como matéria escura. O mesmo é válido para o espinor MDO com torção, embora discutido a possibilidade do decaimento de φ em outras partículas do modelo padrão de física de partículas, se faz necessário uma análise mais cuidadosa desse mecanismo. No âmbito inflacionário, o princípio da incerteza fixou o valor inicial do campo MDO em uma escala conhecida por *Small-Field Inflation*, por conta disso há a necessidade de se estudar tal modelo frente aos requisitos dessa teoria. Por fim, é necessário frisar que uma teoria de perturbações cosmológicas mais consistente deveria levar em consideração as equações efetivas (364), tal trabalho encontra-se em desenvolvimento no presente momento.

REFERÊNCIAS

- ABE, H.; KOBAYASHI, T.; OMURA, Y. R-symmetry, supersymmetry breaking and metastable vacua in global and local supersymmetric theories. **Journal of High Energy Physics**, Berlin, v. 2007, n. 11, p. 44-44, 2007.
- AGARWAL, B. E.-A. Elko fermions as dark matter candidates. **Physical Review D**, Maryland, v. 92, n. 7, p. 27-35, 2015.
- AHLUWALIA, D. V.; NAYAK, A. C. Elko and mass dimension one field of spin one-half: Causality and Fermi statistics. **International Journal of Modern Physics D**, Singapore, v. 23, n. 14, p. 143-166, 2014.
- AHLUWALIA, D. The theory of local mass dimension one fermions of spin one half. **Advances in Applied Clifford Algebras**, Amsterdam, v. 27, n. 3, p. 2247-2285, 2017.
- AHLUWALIA, D. V. On a local mass dimension one Fermi field of spin one-half and the theoretical crevice that allows it. **arXiv e-prints**, 2013. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1305.7509v2>>. Acesso em: 21 jan. 2017.
- AHLUWALIA, D. V. The theory of local mass dimension one fermions of spin one half. **Advances in Applied Clifford Algebras**, Berlin, v. 27, n. 3, p. 2247-2285, 2017.
- AHLUWALIA, D.V.; CHENG-YANG, L. S. D. Self-interacting elko dark matter with an axis of locality. **Physical Review D**, Maryland, v. 83, n. 10, p. 65017-65017, 2011.
- AHLUWALIA-KHALILOVA, D.; GRUMILLER, D. Spin-half fermions with mass dimension one: theory, phenomenology, and dark matter. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, Londres, v. 2005, n. 7, p. 12-24, 2005.
- AHLUWALIA-KHALILOVA, D.V.; GRUMILLER, D. Dark matter: A spin one-half fermion field with mass dimension one? **Physical Review D**, Maryland, v. 72, n. 6, p. 7701-7701, 2005.
- ALBRECHT, A.; STEINHARDT, P. J. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. **Physical Review Letters**, Maryland, v. 48, n. 17, p. 1220-1223, 1982.
- ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. **Einstein–Cartan theory: an introduction to geometrical physics**, Singapura: World Scientific, 2016, 743 p.
- ALVAREZ-GAUME, L. GOMEZ E C. JIMENEZ, R. Minimal inflation. **Physics Review Letters**, Copenhagen, v. 690, n. 1, p. 68-72, 2009.
- ALVES, A. E.-A. Searching for elko dark matter spinors at the cern lhc. **arXiv e-prints**,

2014. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1401.1127v2>>. Acesso em: 20 mar. 2016.

ALVES, A.; DIAS, M. C. F. Perspectives for an elko phenomenology using monojets at the 14 tev lhc. **International Journal of Modern Physics D**, Singapura, v. 23, n. 14, p. 44005-44005, 2014.

ALVES, A.; DIAS, M. C. F. D. L. S. J. H. Constraining elko dark matter at the lhc with monophoton events. **Europhysics Letters**, Berlin, v. 121, n. 3, p. 1001-1001, 2018.

ARBHEY, A. Dark fluid: a complex scalar field to unify dark energy and dark matter. **Physical Review D**, Maryland, v. 74, n. 4, p. 3516-3523, 2006.

ARMENDARIZ-PICON, C.; GREENE, P. B. Spinors, inflation, and non-singular cyclic cosmologies. **General Relativity and Gravitation**, Berlin, v. 35, n. 9, p. 1637-1658, 2003.

ARUNAB, K.; GUDENNAVARA, S. B. S. C. Dark matter, dark energy, and alternate models: a review. **Advances in Space Research**, Amesterdam, v. 60, n. 1, p. 166-186, 2017.

BARDEEN, J. M. Gauge-invariant cosmological perturbations. **Physical Review D**, Maryland, v. 22, n. 8, p. 1882-1905, 1980.

BARVINSKY, A. O.; KAMENSHCHIK, A. Y. S. A. A. Inflation scenario via the standard model Higgs boson and LHC. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, Londres, v. 2008, n. 11, p. 21-21, 2008.

BASAK, A.; SHANKARANARAYANAN, S. Super-inflation and generation of first order vector perturbations in elko. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, Londres, v. 2015, n. 5, p. 34-68, 2015.

BASAK, A.; BHATT, J. R. Lorentz invariant dark-spinor and inflation. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, Londres, v. 2011, n. 6, p. 11, 2011.

BASTERO-GIL, M.; CEREZO, R. R. J. Inflaton dark matter from incomplete decay. **Physical Review D**, Maryland, v. 93, n. 10, p. 3531-3531, 2016.

BAUMANN, D. Lectures on inflation. **arXiv e-prints**, 2012. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-th/09075424v2>>. Acesso em: 15 jan. 2016.

BERTONE, G.; HOOPER, D. A history of dark matter. **arXiv e-prints**, 2016. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1605.04909>>. Acesso em: 2 abr. 2017.

BEZRUKOV, F. L.; SHAPOSHNIKOV, M. E. The standard model higgs boson as the

inflaton. **Physics Letter B**, Amsterdam, v. 659, n. 3, p. 703-706, 2008.

BHATTACHARYA, A.; SLATYER, T. R. Bound states of pseudo-dirac dark matter. **arXiv e-prints**, 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-ph/1812.03169>>. Acesso em: 10 nov. 2018.

BILENKY, S. M.; HOŠEK, J. Glashow-weinberg-salam theory of electroweak interactions and the neutral currents. **Physics Reports**, Amsterdam, v. 90, n. 2, p. 73-157, 1982.

BOEHMER, C. G.; BURNETT, J. Dark spinors with torsion in cosmology. **Physical Review D**, Maryland, v. 78, n. 10, p. 4001-4007, 2008.

BÖHMER, C. G. The einstein-cartan-elko system. **Annalen der Physik**, Frankfurt, v. 16, n. 1, p. 38-44, 2007. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/gr-qc/0607088v1>>. Acesso em: 03 jan. 2015.

BÖHMER, C. G. Dark spinor inflation: theory primer and dynamics. **Physical Review D**, Maryland, v. 77, n.12, p.6-12, 2008. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/0804.0616>>. Acesso em: 14 set. 2016.

BÖHMER, C. G.; MOTA, D. F. Cmb anisotropies and inflation from non-standard spinors. **Physics Letters B**, Copenhagen, v. 663, n. 3, p. 168-171, 2008.

BÖHMER, C. G.; BURNETT, J. M. D. F. S. D. J. Dark spinor models in gravitation and cosmology. **Journal of High Energy Physics**, Berlin, v. 2010, n. 7, p. 53, 2010.

BOJOWALD, M. **Canonical gravity and applications**, Cambridge: Cambridge University Press, 2011, 312 p.

CAPOZZIELLO, S.; STORNAIOLO, C. Scalar perturbations in a cosmological model with torsion. **Il Nuovo Cimento**, Roma, v. 113B, n. 17, p. 879-886, 1998.

CARDENAS, V. H.; DEL CAMPO, S. Scalar field potentials for cosmology. **Physical Review D**, Maryland, v. 69, n. 8, p. 3508-3513, 2004.

CARRASCO, J.; KALLOSH, R. L. A. Cosmological attractors and initial conditions for inflation. **Physical Review D**, Maryland, v. 92, n. 6, p. 3519-3537, 2018.

CARROLL, S. M. In what sense is the early universe fine-tuned? **arXiv e-prints**, 2014. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/14063057>>. Acesso em: 08 nov. 2016.

CHENG, T.-P. **Relativity, gravitation and cosmology: a basic introduction**, Oxford: Oxford University Press, 2010, 456 p.

CHUN-KHIANG, C.; GWO-GUANG, W. Confronting dirac fermionic dark matter with recent data. **Physical Review D**, Maryland, v. 96, n. 11, p. 5006-5006, 2017.

CLOWE, D. E. A. A direct empirical proof of the existence of dark matter. **Astrophysics Journal**, Bristol, v. 648, n. 2, p. L109-L113, 2006.

COLEMAN, S.; WEINBERG, E. Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking. **Physical Review D**, Maryland, v. 7, n. 6, p. 1888-1910, 1973.

COLEMAN, S. Fate of the false vacuum: semiclassical theory. **Physical Review D**, Maryland, v. 15, n. 10, p. 2929-2936, 1977.

DAS, A. **Lectures on gravitation**, Singapura: World Scientific, 2011, 352 p.

DE LA MACORRA, A. B. F. Quantum generation of dark energy. **arXiv e-prints**, 2009. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/09101632>>. Acesso em: 25 fev. 2018.

DE SITTER, W. On the relativity of inertia. remarks concerning einstein's latest hypothesis. **Proc. Kon. Ned. Acad. Wet.**, Amsterdam, v. 19, n. 1, p. 217-230, 1917.

DE SITTER, W. On the curvature of space. **Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.**, Amsterdam, v. 20, n. 2, p. 229-243, 1918.

DIAS, M.; LEE, C.-Y. Constraints on mass dimension one fermionic dark matter from the yukawa interaction. **Physical Review D**, Maryland, v. 94, n. 6, p. 5020-5020, 2016.

DIAS, M.; DE CAMPOS, F.; DA SILVA, J. M. H. Exploring elko typical signature. **Physics Letters B**, Copenhagen, v. 706, n. 352, p. 352-359, 2010. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1012.4642v3>>. Acesso em: 03 out. 2018.

DINE, M. E PACK, L. Studies in small field inflation. **arXiv e-prints**, 2012. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1109.2079v4>>. Acesso em: 17 jan. 2019.

DODELSON, S. **Modern cosmology**, Cambridge: Academic Press, 2003, 440 p.

DOWKER, J. S.; CRITCHLEY, R. Effective lagrangian and energy-momentum tensor in de sitter space. **Physical Review D**, Maryland, v. 13, n. 12, p. 3224-3232, 1976.

ELLIS, G. F. R. Cosmological models. **arXiv e-prints**, 1998. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9812046v5>>. Acesso em: 01 dez. 2015.

FABBRI, L. The most general cosmological dynamics for ELKO matter fields. **Physics Letters B**, Copenhagen, v. 704, n. 4, p. 255-259, 2011.

FABBRI, L. Conformal gravity with the most general elko fields. **Physical Review D**,

Maryland, v. 85, n. 4, p. 7502-7502, 2012.

FABBRI, L.; VIGNOLO, S. Elko and dirac spinors seen from torsion. **International Journal of Modern Physics D**, Singapura, v. 23, n. 14, p. 44001-44001, 2014.

FAIRBAIRN, M.; GROTHAUS, P.; HOGAN, R. The problem with false vacuum Higgs inflation. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, Londres, v. 2014, n. 6, p. 39-39, 2014.

FATIMA, H.; MUSHTAQ, M. R. S. F. U. Age estimates of universe: from globular clusters to cosmological models and probes. **Journal of GeoSpace Science**, Carachi, v. 2, n. 1, p. 1-3, 2016.

FORD, L. H. Inflation driven by a vector field. **Physical Review D**, Maryland, v. 40, n. 4, p. 967-967, 1989.

FRIEDMANN, A. Über die krümmung des raumes. **Zeitschrift für Physik**, Berlin, v. 10, n. n, p. 377-386, 1922.

FRIEDMANN, A. Die welt als raum und zeit. **Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften**, Berlin, v. 15, n.n, n.p, 1923.

FRÓES, A. L. D. **Inflação vetorial: uma introdução**. 2009. 56 f. Dissertação (Mestrado em Física)-Universidade Estadual de Campinas, Campinas,2009.

GANGUI, A. Topological defects in cosmology. **arXiv e-prints**, 2001. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/0110285>>. Acesso em: 23 jan. 2018.

GILLARD, A. Elko field theory and the nature of elko darkness. **arXiv e-prints**, 2011. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1109.4278v1>>. Acesso em: 02 out. 17.

GLINER, E. Algebraic properties of the energy-momentum tensor and vacuum-like states of matter. **Soviet Physics JETP**, Moscou, v. 22, n. 2, n. p, 1965.

GLINER, E. B.; DYMNIKOVA, I. G. A nonsingular friedmann cosmology. **Soviet Astronomy Letters**, Moscou, v. 1, n. 93, p. 7-7, 1975.

GOLOVNEV, A. On cosmic inflation in vector field theories. **arXiv e-prints**, 2011. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/gr-qc/11094838>>. Acesso em: 21 mai. 2018.

GOLOVNEV, A.; MUKHANOV, V.; VANCHURIN, V. Vector inflation. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, Londres, v. 2008, n. 6, p. 9-18, 2008.

GORBUNOV, D.; RUBAKOV, A. **Introduction to the theory of the early universe**, Singapura: World Scientific Publishing Company, 2011, 488 p.

GRAMS, G.; SOUZA, R. K. G. Fermion field as inflaton, dark energy and dark matter. **Classical and Quantum Gravity**, Bristol, v. 31, n. 18, p. 5008-5008, 2014.

GREDET, D.; SHANKARANARAYANAN, S. Modified scalar and tensor spectra in spinor driven inflation. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, Londres, v. 2010, n. 1, p. 008-008, 2010.

GUTH, A. Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems. **Physical Review D**, Maryland, v. 23, n. 2, p. 347-347, 1981.

GUTH, A. H.; WEINBERG, E. J. Could the universe have recovered from a slow first-order phase transition? **Nuclear Physics B**, Amsterdam, v. 212, n. 2, p. 321 - 364, 1983.

HAWKING, S. W.; MOSS, I. G. S. J. M. Bubble collisions in the very early universe. **Physical Review D**, Maryland, v. 26, n. 10, p. 2681-2693, 1982.

HEHL, F. W. On the kinematics of the torsion of space-time. **Foundations of Physics**, Berlin, v. 15, n. 4, p. 451-471, 1985.

HEHL, F. W.; VON DER HEYDE, P. K. G. D. General relativity with spin and torsion: foundations and prospects. **Review of Modern Physics**, Maryland, v. 48, n. 3, p. 393-416, 1976.

HELBIG, P. Is there a flatness problem in classical cosmology? **arXiv e-prints**, 2011. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/11121666>>. Acesso em: 08 nov. 2016.

HIMMETOGLU, B. Vector fields during cosmic inflation. 2010. 229 f. Tese (Doutorado em Física)- University of Minnesota, Minneapolis, 2010.

HINSHAW, G.; ET AL. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: cosmological parameter results. **arXiv e-prints**, 2012. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/12125226>>. Acesso em: 08 nov. 2016.

HISANO, J.; NAGATA, N. Singlet dirac fermion dark matter with mediators at loop. **Journal of High Energy Physics**, Amsterdam, v. 2018, n. 12, p. 59-59, 2018.

HLADIK, J. **Spinors in physics: graduate texts in contemporary physics**, Amsterdam: Springer, 1999, 226 p.

JIMÉNEZ, J. B. ; MAROTO, A. L. Cosmological electromagnetic fields and dark energy. **arXiv e-prints**, 2008. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/08110566>>. Acesso em: 18 jan. 2017.

KAMENSHCHIK, A. Y. E.-A. Induced gravity, and minimally and conformally coupled scalar fields in bianchi-i cosmological models. **Physical Review D**, Maryland, v. 97, n. 2, p. 3536-3548, 2018.

KIBBLE, T. W. B. Lorentz invariance and the gravitational field. **Journal of Mathematical Physics**, Melville, v. 2, n. 2, p. 212-221, 1961.

KINNEY, W. H. Lectures on inflation. **arXiv e-prints**, 2009. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/09021529>>. Acesso em: 09 nov. 2016.

KIRZHNITS, D.A.; LINDE, A. D. Macroscopic consequences of the weinberg model. **Physics Letters B**, Amsterdam, v. 42, n. 4, p. 471-474, 1972.

KOFMAN, L.; LINDE, A. S. A. A. Towards the theory of reheating after inflation. **Physical Review D**, Maryland, v. 56, n. 6, p. 3258-3258, 1997.

KOLB, E. W.; TURNER, M. S. **The early universe**, Boulder: Westview Press, 1990, 600 p.

KOUWN, S.; LEE, J. L. T. H. O. P. Dark spinor model with torsion and cosmology. **Modern Physics Letters**, Singapura, v. 28, n. 29, p. 121-135, 2013.

LEE, C.-Y. A lagrangian for mass dimension one fermionic dark matter. **Physics Letters B**, Copenhagen, v. 760, n. 1, p. 164-169, 2016.

LEE, J.; KOMATSU, E. Bullet cluster: a challenge to λ cdm cosmology. **The Astrophysical Journal**, Bristol, v. 718, n. 1, p. 60-65, 2010.

LEMOINE, M. E.-A. **Inflationary cosmology**, Berlin: Springer, 2007, 428 p.

LESGOURGUES, J. Inflationary cosmology. **arXiv e-prints**, 2006. Disponível em: <<http://lesgourg.github.io/courses/InflationEPFL>>. Acesso em: 23 jan. 2018.

LIDDLE, A. R. **An introduction to modern cosmology**, Trenton: John Willey & Sons, 2003.

LIDDLE, A. R.; LYTH, D. H. **Cosmological inflation and large-scale structure**, Cambridge: Cambridge University Press, 2000, 414 p.

LIDDLE, A.R.; PAHUD, C. U.-L. L. Triple unification of inflation, dark matter, and dark energy using a single field. **Physical Review D**, Maryland, v. 77, n. 12, p. 1301-1301, 2008.

LIDDLE, A.R.; UREÑA-LÓPEZ, L. Inflation, dark matter, and dark energy in the string landscape. **Physical Review Letters**, Maryland, v. 97, n. 16, p. 1301-1301, 2006.

LINDE, A. Particle physics and inflationary cosmology. **arXiv e-prints**, 1990. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/hep-th/0503203.pdf>>. Acesso em: 17 fev. 2017.

LINDE, A. D. A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. **Physics Letters B**, Amsterdam, v. 108, n. 6, p. 389-393, 1982.

LINDE, A. D. Chaotic inflation. **Modern Physics Letters**, Amsterdam, v. 129B, n. 3, p. 177-181, 1983.

LINDE, A. D. Inflationary cosmology after planck 2013. **arXiv e-prints**, 2014. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1402.0526>>. Acesso em: 20 mar. 2016.

LOPEZ-CORREDOIRA, M. Tests and problems of the standard model in cosmology. **arXiv e-prints**, 2017. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/170108720>>. Acesso em: 08 nov. 2016.

LYTH, D. H.; LIDDLE, A. R. **The primordial density perturbation**, Cambridge: Cambridge University Press, 2009, 516 p.

MAGAÑA, J. A brief review of the scalar field dark matter model. **arXiv e-prints**, 2012. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/12016107>>. Acesso em: 18 ago. 2016.

MAGUEIJO, J.; ZLOSNIK, T. G. K. T. Cosmology with a spin. **arXiv e-prints**, 2013. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/12120585v2>>. Acesso em: 10 mar. 2016.

MAKAROV, A. Accuracy of slow-roll inflation given current observational constraints. **Physical Review D**, Maryland, v. 72, n. 8, p. 3517-3517, 2005.

MARTIN, J. et al. The best inflationary models after planck. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, Londres, v. 1403, n. 3, p. 39-39, 2014.

MARTIN, J.; RINGEVAL, C.; VENNIN, V. Encyclopaedia inflationaris. **Physics of the Dark Universe**, Copenhagen, v. 5-6, n. 1, p. 75-235, 2013.

MATARRESE, S.; COLPI, M. G. V. M. U. **Dark matter and dark energy: a challenge for modern cosmology**, Amsterdam: Springer, 2011, 404 p.

MISNER, W. E.-A. **Gravitation**, Princeton: Princeton University Press, 2017, 1279 p.

MOFFAT, W. Modified gravity or dark matter? **arXiv e-prints**, 2011. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/11011935>>. Acesso em: 20 set. 2017.

MORTONSON, M. J.; WEINBERG, D. H. W. M. Dark energy: A short review. **arXiv e-prints**, 2013. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1401.0046>>. Acesso em: 29 abr.

2016.

MUKHANOV, V. F.; CHIBISOV, G. V. Quantum fluctuations and a nonsingular universe. **Soviet Physics JETP**, Moscou, v. 33, n.n, p. 549-553, 1981.

MUKHANOV, V. F.; FELDMAN, H. A. B. R. Theory of cosmological perturbation. **Physics Reports**, Amsterdam, v. 215, n. 5, p. 203-333, 1992.

MUKHANOV, V. **Physical foundations of cosmology**, Cambridge: Cambridge University Press, 2005, 421 p.

PADILLA, A. Lectures on the cosmological constant problem. **arXiv e-prints**, 2015. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1502.05296>>. Acesso em: 30 jul. 2017.

PADMANABHAN, T. **Gravitation: foundations and frontiers**, Cambridge: Cambridge University Press, 2010, 728 p.

PENROSE, R.; RINDLER, W. **Spinors and space-time**, Cambridge: Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1987, 472 p.

PEREIRA, S. H.; PINHO, A. H. D. S. J. M. J. J. F. $\Lambda(t)$ cosmology induced by a slowly varying Elko field. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, Londres, v. 2017, n. 1, p. 55-55, 2017.

PEREIRA, S.; PINHO SS, A. Elko applications in cosmology. **International Journal of Modern Physics D**, Singapore, v. 23, n. 14, p. 444-448, 2014.

PEREIRA, S. H.; ALVES, M. E. S.; GUIMARÃES, T. M. An unified cosmological evolution driven by a mass dimension one fermionic field. **arXiv e-prints**, 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1811.00390>>. Acesso em: 20 mar. 2016.

PEREIRA, S. H.; GUIMARÃES, T. M. From inflation to recent cosmic acceleration: the fermionic Elko field driving the evolution of the universe. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, Londres, v. 1709, n. 9, p. 38-76, 2017.

PEREIRA, S. H.; HOLANDA, R. F. L. A.; S., P. S. Evolution of the universe driven by a mass-dimension-one fermion field. **Europhysics Letters**, Berlin, v. 120, n. 3, p. 1001-1001, 2017.

PESENSON, M. Z.; PESENSON, I. Z. . M. B. The data big bang and the expanding digital universe: high-dimensional, complex and massive data sets in an inflationary epoch. **Advances in Astronomy**, Londres, v. 2010, n. 350891, p. 16-16, 2010.

PETER, P.; UZAN, J.-P. **Primordial cosmology**, Oxford: Oxford University Press, 2005,

856 p.

PETER, P. Cosmological perturbation theory. **arXiv e-prints**, 2013. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/13032509v2>>. Acesso em: 15 jan. 2018.

PETER COLES, F. L. **Cosmology: the origin and evolution of cosmic structure**, Trenton: John Wiley & Sons, 2002, 470 p.

PLANCK-COLLABORATION. Planck 2018 results. i: overview and the cosmological legacy of planck. **arXiv e-prints**, 2018. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2018arXiv180706205P>>. Acesso em: 17 ago. 2018.

PRESKILL, J. P. Cosmological production of superheavy magnetic monopoles. **Physical Review Letters**, Maryland, v. 43, n. 19, p. 1365-1368, 1979.

ROGÉRIO, R. J. **Aspectos clássicos e quânticos de espinores de dinâmina não-usual: espinores de dimensão de massa um**. 2018. 116 f. Tese (Doutorado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2018.

RUBIN, V. C.; FORD, W. K. J. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. **Astrophysical Journal**, Bristol, v. 159, n. 2, p.379-379, 1970.

RUBIN, V. C.; FORD, W. K. J. T. N. Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. iv - systematic dynamical properties, sa through sc. **Astrophysical Journal**, Bristol, n. 1, 1978.

RYDEN, B. **Introduction to cosmology**. 2.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2016, 276 p.

SACHDEVA, S.; SAHA, K. Survival of pure disk galaxies over the last 8 billion years. **The Astrophysical Journal Letters**, Bristol, v. 820, n. 1, p. 1-5, 2016.

SADJADI, H. M. On coincidence problem in elko dark energy model. **General Relativity and Gravitation**, Berlin, v. 44, n. 9, p. 2329-2329, 2012.

SAHA, B. Nonlinear spinor field in bianchi type-i cosmology: inflation, isotropization, and late time acceleration. **Physical Review D**, Maryland, v. 74, n. 12, p. 4030-4030, 2006.

SAHA, B; SHIKIN, G. Interacting spinor and scalar fields in bianchi type i universe filled with perfect fluid: exact self-consistent solutions. **General Relativity and Gravitation**, Berlin, v. 29, n. 9, p. 1099-1113, 1997.

SAHA, B.; BOYADJIEV, T. Bianchi type-i cosmology with scalar and spinor fields. **Physical Review D**, Maryland, v. 69, n. 12, p. 4010-4010, 2004.

SAKHAROV, A. The initial stage of an expanding universe and the appearance of a nonuniform distribution of matter. **Soviet Physics JETP**, Moscou, v. 22, n. 1, n.p, 1965.

SASAKI, M. Inflation and birth of cosmological perturbations. **arXiv e-prints**, 2012. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/12107880>>. Acesso em: 10 nov. 2015.

SATO, K. First order phase transition of a vacuum and the expansion of the universe. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford, v. 195, n. 3, p. 467-479, 1981.

SHANKARANARAYANAN, S. What if the inflaton is a spinor condensate? **International Journal of Modern Physics D**, Maryland, v. 18, n. 14, p. 2173-2179, 2009.

SHANKARANARAYANAN, S. Dark spinor driven inflation. **arXiv e-prints**, 2010. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1002.1128>>. Acesso em: 12 set. 2016.

SHAPIRO, I. L. Torsion: theory and possible observables. **arXiv e-prints**, 1998. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/9811072>>. Acesso em: 10 out. 2015.

SHAPIRO, I. L. Physical aspects of the space-time torsion. **Physics Reports**, Amsterdam, v. 357, n. 2, p. 113-213, 2002.

SILVA, J. M. H.; VILLALOBOS, C. H. C. R. R. Black holes and exotic spinors. **Universe**, Basel, v. 2, n. 2, p. 8-8, 2016.

SIMMONDS, J. G.; MANN JR, J. **A first look at perturbation theory**. 2.ed . Mineola: Dover Publications, 1997, 160 p.

SPERANÇA, L. D. An identification of the dirac operator with the parity operator. **International Journal of Modern Physics D**, Singapura, v. 23, n. 14, p. 1444003-1444003, 2014.

STAROBINSKY, A. A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. **Physics Letter B**, Amsterdam, v. 91, n. 1, p. 99-102, 1980.

STEINHARDT, P. J. **Natural inflation: the very early universe**, Cambridge: Cambridge University Press, 1983, 251-266 p.

STRAUMANN, N. The history of the cosmological constant problem. **arXiv e-prints**, 2002. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/gr-qc/0208027>>. Acesso em: 27 mai. 2017.

TILQUIN, A.; SCHÜCKER, T. Torsion, an alternative to dark matter? **General Relati-**

vity and Gravitation, Berlin, v. 43, n. 11, p. 2965-2965, 2011.

TRAUTMAN. Einstein-cartan theory. **Encyclopedia of Mathematical Physics**, Oxford, v. 2, n. 1, p. 189-195, 2006.

TSAMPARLIS, M. Cosmological principle and torsion. **Physics Letters A**, Amsterdam, v. 75, n. 1, p. 27-28, 1979.

TSAMPARLIS, M. Methods for deriving solutions in generalized theories of gravitation: The einstein-cartan theory. **Physical Review D**, Maryland, v. 24, n. 6, p. 1451-1457, 1981.

TSUJIKAWA, S. Quintessence: A review. **arXiv e-prints**, 2013. Disponível em: <arXiv:1304.1961v2>. Acesso em: 23 nov. 2016.

UGGLA, C.; WAINWRIGHT, J. Cosmological perturbation theory revisited. **arXiv e-prints**, 2011. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/gr-qc/1102503v2>>. Acesso em: 10 jan. 2016.

UNRUH, W. G.; SEMENOFF, G. W. **The early universe**, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986, 421 p.

VACHASPATI, T. Lectures on cosmic topological defects. **arXiv e-prints**, 2001. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-ph/0101270>>. Acesso em: 08 nov. 2016.

VELTEN, H.E.S.; VOM MARTTENS, R. . Z. W. Aspects of the cosmological "coincidence problem". **arXiv e-prints**, 2014. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/14102509>>. Acesso em: 04 out. 2016.

WALD, R. M. **General relativity**, Chicago: University of Chicago Press, 1984, 491 p.

WANAS, M.I.; ABDALLA, H. Torsion and particle horizons. **International Journal of Theoretical Physics**, Berlin, v. 53, n. 11, p. 3901-3909, 2014.

WEI, H. Spinor dark energy and cosmological coincidence problem. **Physics Letters B**, Amsterdam, v. 695, n. 1, p. 307-311, 2011.

WEINBERG, S. **The quantum theory of fields**, Cambridge: Editorial Cambridge University Press, 1995, 635 p.

WEINBERG, S. The cosmological constant problems. **arXiv e-prints**, 2000. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/0005265>>. Acesso em: 27 mai. 2017.

WEINBERG, S. Adiabatic modes in cosmology. **Physical Review D**, Maryland, v. 67, n. 12, p. 3504-3514, 2003.

WEINBERG, S. **Cosmology**, Londres: Oxford University Press, 2008, 593 p.

WONDRAK, M. F. The cosmological constant and its problems: a review of gravitational aether. **arXiv e-prints**, 2017. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1705.06294>>. Acesso em: 27 dez. 2017.

WRIGHT, E. L. Latest cobe results. **Nuclear Physics B**, Amsterdam, v. 51, n. 2, p. 54-58, 1996.

YEPEZ, J. Einstein's vierbein field theory of curved space. **arXiv e-prints**, 2011. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/gr-qc/11062037>>. Acesso em: 14 set. 2015.

ZELDOVICH, I. B.; NOVIKOV, I. D. **Relativistic astrophysics: structure and evolution of the universe**. 2.ed . Chicago: University of Chicago Press, 1983, 751 p.

APÊNDICE A - ÁLGEBRA DAS MATRIZES γ

De maneira a simplificar as equações de movimento dos espinores, há a necessidade de se usar algumas relações entre os objetos que compõem a álgebra de Clifford que serão expressos em termos do produto direto das matrizes de Paulo-Dirac. Na representação de Weyl, essas matrizes podem ser escritas utilizando uma métrica com assinatura $(+, -, -, -)$, como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ \mathbb{I}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (557)$$

em que σ^i são as matrizes de Pauli dadas por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (558)$$

Aqui i, j, k denotam os índices espaciais do espaço Euclidiano. Note as matrizes γ^a obedecem

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab} \quad (559)$$

em que $\eta^{ab} = (1, -1, -1, -1)$. Denotando por x, y, z os índices das coordenadas do espaço de Minkowski, as relações entre os geradores $S^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b]$ satisfazem

$$S^{0i} = \frac{i}{2} \sigma^i \otimes \sigma^z, \quad (560)$$

$$S^{0i} S^{0i} = -\frac{1}{4} \mathbb{I}_{4 \times 4} \quad (561)$$

$$S^{0i} S^{0j} = -\frac{1}{4} \varepsilon^{ijk} \sigma_k \otimes \mathbb{I}_{2 \times 2}, \text{ para } i \neq j \quad (562)$$

$$S^{0i} S^{ij} = \frac{1}{4} \sigma^j \otimes \sigma^z, \quad (563)$$

$$S^{0i} S^{jk} = \frac{1}{4} \varepsilon^{ijk} \gamma^5, \quad (564)$$

em que ε^{ijk} é o simbolo de Levi-Civita e γ^5 é dado por

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (565)$$

APÊNDICE B - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO CAMPO COM TORÇÃO

Este apêndice se dedica a encontrar de forma detalhada a divergência da corrente cosmológica $J^{\mu\nu\rho}$ tanto para o caso sem torção quanto para o caso com torção. Para não gerar redundância, inicialmente será determinado $D_\rho J^{\mu\nu\rho}$ para o caso com torção, pois o caso sem torção será obtido diretamente do limite $h, f \rightarrow 0$, levando a $b = H$.

Uma vez que o produto (341) é dada por

$$\begin{aligned}
 g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda} \mathcal{D}_\nu \lambda &= g^{\mu\nu} \bar{\lambda} \left(\bar{\partial}_\mu - \Gamma_\mu \right) \left(\vec{\partial}_\nu + \Gamma_\nu \right) \lambda \\
 &= g^{\mu\nu} \bar{\lambda} \bar{\partial}_\mu \vec{\partial}_\nu \lambda - g^{\mu\nu} \bar{\lambda} \Gamma_\mu \Gamma_\nu \lambda + g^{\mu\nu} (\partial_\mu \bar{\lambda}) \Gamma_\nu \lambda - g^{\mu\nu} \bar{\lambda} \Gamma_\mu (\partial_\nu \lambda) \\
 &= g^{\mu\nu} (\partial_\mu \bar{\lambda} \partial_\nu \lambda) - g^{\mu\nu} \bar{\lambda} \Gamma_\mu \Gamma_\nu \lambda \\
 &= -\frac{1}{a^2} \left[\partial_t \bar{\lambda} \partial_t \lambda \right] + \frac{\delta_{ij}}{a^2} \left[\nabla \bar{\lambda} \nabla \lambda - \bar{\lambda} \Gamma_i \Gamma_j \lambda \right], \tag{566}
 \end{aligned}$$

enquanto a variação da densidade Lagrangiana (355) em relação a métrica $g_{\mu\nu}$ fornece

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{MDO})}{\delta g_{\mu\nu}}, \\
 &= \left[2 \bar{\lambda} \bar{\mathcal{D}}^{(\mu} \mathcal{D}^{\nu)} \lambda - \mathcal{L}_{MDO} g^{\mu\nu} \right] + T'^{\mu\nu}, \tag{567}
 \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
 T'^{\mu\nu} &= -2g^{\rho\sigma} \left(\bar{\lambda} \frac{\delta \Gamma_\rho}{\delta g_{\mu\nu}} \mathcal{D}_\sigma \lambda - \bar{\lambda} \bar{\mathcal{D}}_\rho \frac{\delta \Gamma_\rho}{\delta g_{\mu\nu}} \lambda \right) \\
 &= \frac{i}{2} g^{\rho\sigma} \mathcal{D}_\alpha \left[\bar{\lambda} f^{\alpha\mu} \delta_\rho^\nu \mathcal{D}_\sigma \lambda - \bar{\lambda} \bar{\mathcal{D}}_\rho f^{\alpha\mu} \delta_\sigma^\nu \lambda \right] \\
 &= -\frac{i}{2} \mathcal{D}_\rho \left[\bar{\lambda} \bar{\mathcal{D}}^{(\mu} f^{\nu)\rho} \lambda + \bar{\lambda} f^{\rho(\mu} \mathcal{D}^{\nu)} \lambda \right] \\
 &= \mathcal{D}_\rho J^{\mu\nu\rho}, \tag{568}
 \end{aligned}$$

na qual se definiu $J^{\mu\nu\rho} \equiv -\frac{i}{2} \left[\bar{\lambda} \bar{\mathcal{D}}^{(\mu} f^{\nu)\rho} \lambda + \bar{\lambda} f^{\rho(\mu} \mathcal{D}^{\nu)} \lambda \right]$. Para simplificar sua obtenção, será feito $J_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} \left(\tilde{J}_{\mu\nu\rho} + \tilde{J}_{\nu\mu\rho} \right)$, em que

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_\mu^{\nu\rho} e_\nu^a e_\rho^b \equiv \tilde{J}_\mu^{ab} &= -i \left[\bar{\lambda} \overleftarrow{\mathcal{D}}_\mu S^{ab} \lambda - \bar{\lambda} S^{ab} \overrightarrow{\mathcal{D}}_\mu \lambda \right] \\
&= -i \left[\bar{\lambda} (\overleftarrow{\partial}_\mu + \Gamma_\mu) S^{ab} \lambda - \bar{\lambda} S^{ab} (\overrightarrow{\partial}_\mu - \Gamma_\mu) \lambda \right] \\
&= -i \left[\bar{\lambda} \overleftarrow{\partial}_\mu S^{ab} \lambda - \bar{\lambda} S^{ab} \overrightarrow{\partial}_\mu \lambda + \bar{\lambda} \Gamma_\mu S^{ab} \lambda + \bar{\lambda} S^{ab} \Gamma_\mu \lambda \right] \\
&= -i \left[\bar{\lambda} (\Gamma_\mu S^{ab} + S^{ab} \Gamma_\mu) \lambda \right]. \tag{569}
\end{aligned}$$

As componentes da corrente¹ são dadas por

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_i^{0x^j} = -\tilde{J}_i^{x^j 0} &= -i \left[\bar{\lambda} (\Gamma_i S^{0x^j} + S^{0x^j} \Gamma_i) \lambda \right] \\
&= -i \frac{\varphi^2}{2} \bar{\xi} \left[\frac{b}{a} \left(\gamma_0 \gamma_{x^i} \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^{x^j} + \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^{x^j} \gamma_0 \gamma_{x^i} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{f \epsilon_i^{kj}}{2} \left(\gamma_{x^j} \gamma_{x^k} \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^{x^j} + \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^{x^j} \gamma_{x^j} \gamma_{x^k} \right) \right] \xi \\
&= -\frac{\varphi^2 b}{2N} \bar{\xi} \left(\gamma^0 \gamma^{x^i} \gamma^0 \gamma^{x^j} \right) \xi \delta_{x^i x^j} + \frac{\varphi^2 f}{4} \gamma^5, \\
&= -\frac{\varphi^2 b}{2N} \delta_j^i + \frac{\varphi^2 f}{4} \epsilon_i^{jk}, \tag{570}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_i^{x^j x^k} &= -i \frac{\varphi^2}{2} \bar{\xi} \left[\frac{b}{N} \left(\gamma_0 \gamma_{x^i} \frac{i}{2} \gamma^{x^j} \gamma^{x^k} + \frac{i}{2} \gamma^{x^j} \gamma^{x^k} \gamma_0 \gamma_{x^i} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{f \epsilon_{ikj}}{2} \left(\gamma_{x^j} \gamma_{x^k} \frac{i}{2} \gamma^{x^j} \gamma^{x^k} + \frac{i}{2} \gamma^{x^j} \gamma^{x^k} \gamma_{x^j} \gamma_{x^k} \right) \right] \xi, \\
&= i \frac{\varphi^2}{2} \left(\frac{b}{N} \bar{\xi} \gamma^5 \xi - i \frac{f}{2} \right) \epsilon^{ijk}, \tag{571}
\end{aligned}$$

$$\tilde{J}_i^{00} = 0, \tag{572}$$

$$\tilde{J}_t^{ab} = 0, \tag{573}$$

Finalmente:

¹Vide Apêndice A para uma rápida introdução a álgebra de matrizes γ

$$\begin{aligned}
J^{itj} &= \frac{1}{2} [\tilde{J}^{itj} + \tilde{J}^{tij}], \\
&= \frac{1}{2} \left[g^{ii} \left(e_0^t e_{x^j}^j \tilde{J}_i^{0x^j} \right) \right], \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^3} \left(-\frac{\phi^2 b}{2N^2} - \frac{f\varphi^2}{4a^3 N} \right) \right] \delta^{ij}, \\
&= -\frac{1}{4} \frac{\varphi^2 b}{a^3 N^2} \delta^{ij} - \frac{f\varphi^2}{8a^3 N} \delta^{ij}.
\end{aligned} \tag{574}$$

Tomando a quadri-divergência de $J^{\mu\nu\rho}$, chega-se a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \mathcal{D}_\rho J^{\mu\nu\rho} &= \frac{1}{2} \partial_\rho J^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} \Gamma_{\sigma\rho}^\mu J^{\sigma\nu\rho} + \frac{1}{2} \Gamma_{\sigma\rho}^\nu J^{\nu\sigma\rho} + \frac{1}{2} \Gamma_{\sigma\rho}^\rho J^{\mu\nu\sigma}, \\
\frac{1}{2} \mathcal{D}_\rho J^{tt\rho} &= \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^t (J^{itj} + J^{tij}), \\
&= \frac{3b^2\varphi^2}{4a^2 N^4} + \frac{3bf\varphi^2}{8a^2 N^3},
\end{aligned} \tag{575}$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{D}_\rho J^{ij\rho} = -\frac{1}{2a^2 N} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{b\varphi^2}{2aN} \right) + \frac{b^2\varphi^2}{a^2 N} \right] \delta_{ij} + \mathfrak{F}_1. \tag{576}$$

com

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{bf\varphi^2}{8a^2} + \frac{f\varphi^2 a'}{8a^2} + \frac{\varphi^2 f'}{4a} + \frac{f\varphi\varphi'}{2a}.$$

No limite $b \rightarrow H$, $f \rightarrow 0$ e $N \rightarrow 1$, chega-se as componentes de $D_\rho J^{\mu\nu\rho}$ para o caso sem torção:

$$\frac{1}{2} \mathcal{D}_\rho J^{tt\rho} = \frac{3}{4} \frac{H^2}{a^2} \varphi^2, \tag{577}$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{D}_\rho J^{ij\rho} = -\frac{1}{2a^2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{H\varphi^2}{2a} \right) + \frac{H^2\varphi^2}{a^2} \right] \delta^{ij}. \tag{578}$$

Uma vez que se conhece a forma completa de \mathfrak{F}_1 , as equações (371) e (372) fornecem

$$\rho = \frac{3b^2\varphi^2}{8a^2 n^2} + \frac{3f^2\varphi^2}{8a^2} + \frac{(\varphi')^2}{2n^2} + V \tag{579}$$

$$\begin{aligned}
p &= \frac{(\varphi')^2}{2N^2} - \frac{3b^2\varphi^2}{8a^2 N^2} - \frac{bf\varphi^2}{4a^2 N} - \frac{f^2\varphi^2}{8a^2} \\
&\quad + \frac{b\varphi^2 a'}{4a^2 N^2} + \frac{f\varphi^2 a'}{4a^2 N} - \frac{\varphi^2 b'}{4aN^2} - \frac{b\varphi\varphi'}{2aN^2} + \frac{b\varphi^2 N'}{4aN^3} - \frac{\varphi^2 f'}{4aN} - \frac{f\varphi\varphi'}{2aN} - V.
\end{aligned} \tag{580}$$

Por fim a equação da continuidade é escrita como

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi' \varphi''}{N^2} - \frac{3b^2 f \varphi^2}{4a^3 N} + \frac{3b f^2 \varphi^2}{4a^3} - \frac{3b^2 \varphi \varphi'}{4a^2 N^2} - \frac{3b \varphi^2 f'}{4a^2 N} - \frac{3b f \varphi \varphi'}{2a^2 N} + \frac{3f^2 \varphi \varphi'}{4a^2} \\ & + \frac{3f \varphi^2 f'}{4a^2} + \frac{3b f \varphi^2 a'}{4a^3 N} - \frac{3f^2 \varphi^2 a'}{4a^3} + \frac{3b (\varphi')^2}{aN^2} - \frac{N' (\varphi')^2}{N^3} + V_{,\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (581)$$

APÊNDICE C - DETERMINAÇÃO DA CONEXÃO AFIM E DO ESCALAR DE CURVATURA COM TORÇÃO

Em um espaço-tempo com torção a conexão afim não é simétrica em relação aos índices inferiores, com isso uma forma geral é dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} + S_{\mu\nu}^{\rho} + g^{\rho\sigma} (g_{\nu\beta} S_{\sigma\mu}^{\beta} + g_{\mu\alpha} S_{\sigma\nu}^{\alpha}). \quad (582)$$

sendo $S_{\mu\nu}^{\rho} \equiv \Gamma_{(\mu\nu)}^{\rho}$ e $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho}$ é o símbolo de Christoffel. Note que no caso a conexão afim ser simétrica em relação aos índices inferiores, $S_{\mu\nu}^{\rho} = 0$ e $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho}$.

A componente puramente temporal da conexão afim é dada por

$$\Gamma_{tt}^t = \tilde{\Gamma}_{tt}^t + S_{tt}^t + g^{tt} (g_{tt} S_{tt}^t + g_{tt} S_{tt}^t). \quad (583)$$

Utilizando o tensor métrico (324), chega-se a

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{tt}^t &= \frac{\dot{N}}{N} \\ \Gamma_{tt}^t &= \tilde{\Gamma}_{tt}^t = \frac{\dot{N}}{N}. \end{aligned} \quad (584)$$

Por sua vez:

$$\Gamma_{ij}^t = \tilde{\Gamma}_{ij}^t + S_{ij}^0 + g^{tt} (g_{jj} S_{ti}^j + g_{ii} S_{tj}^i), \quad (585)$$

$$= \frac{a\dot{a}}{N^2} \delta_{ij} - \frac{a^2}{N^2} (-h\delta_{ij}), \quad (586)$$

$$= \frac{a}{N^2} (\dot{a} + ah) \delta_{ij} = \frac{ab}{N^2} \delta_{ij}. \quad (587)$$

em que $b = a' + ah$. Para Γ_{jt}^i ,

$$\Gamma_{jt}^i = \tilde{\Gamma}_{jt}^i + S_{jt}^i + g^{ii} (g_{tt} S_{ij}^t + g_{ii} S_{it}^j) \quad (588)$$

$$= \tilde{\Gamma}_{jt}^i + S_{jt}^i + S_{it}^j \delta_j^i, \quad (589)$$

$$= \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i + h \delta_j^i, \quad (590)$$

$$= \frac{\dot{a} + ah}{a} \delta_j^i = \frac{b}{a} \delta_j^i. \quad (591)$$

Então, para Γ_{tj}^i é obtido

$$\Gamma_{tj}^i = \tilde{\Gamma}_{tj}^i + S_{tj}^i + g^{ii} (g_{jj} S_{i0}^j + g_{00} S_{ij}^t) \quad (592)$$

$$= \tilde{\Gamma}_{tj}^i + S_{tj}^i + S_{it}^j, \quad (593)$$

$$= \tilde{\Gamma}_{tj}^i, \quad (594)$$

$$= \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i. \quad (595)$$

Por fim,

$$\Gamma_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i + S_{jk}^i + g^{ii} (g_{kk} S_{ij}^k + g_{ii} S_{ik}^j) \quad (596)$$

$$= \tilde{\Gamma}_{jk}^i + S_{jk}^i + S_{ij}^k \delta_k^i + S_{ik}^j \delta_j^i, \quad (597)$$

$$= S_{jk}^i + S_{ij}^k \delta_k^i + S_{ik}^j \delta_j^i, \quad (598)$$

$$= 3 \left(\frac{f}{3} \varepsilon_{jk}^i \right) = f \varepsilon_{jk}^i. \quad (599)$$

Para o limite $h, f \rightarrow 0$ e $N \rightarrow 1$, as componentes da conexão afim para o espaço-tempo sem torção são recobradas, a saber, as únicas componentes não nulas para esse caso são:

$$\Gamma_{ij}^t = a \dot{a} \delta_{ij}, \quad \Gamma_{tj}^i = \Gamma_{jt}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i$$

Uma vez que as componentes da conexão afim para o espaço-tempo com torção foram obtidas, é possível determinar o tensor de curvatura $R^\rho{}_{\mu\alpha\nu}$, o qual é dado pela forma

$$R^\rho{}_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\rho + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda, \quad (600)$$

Cujas componentes não nulas são

$$R^t{}_{iti} = 3\partial_t \left(\frac{ab}{N^2} \right) + 3 \frac{\dot{N}ab}{N^3} - 3 \frac{b\dot{a}}{N^2}, \quad (601)$$

$$R^j{}_{tjt} = -3\partial_t \left(\frac{b}{a} \right) + 3 \frac{\dot{N}b}{aN} - 3 \frac{b\dot{a}}{a^2}, \quad (602)$$

$$R^j{}_{iji} = 6 \frac{b^2}{N^2} - 6f^2. \quad (603)$$

Assim, o escalar de curvatura $R = g^{\mu\nu} R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$ é dado por

$$R = g^{\mu\nu} R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = g^{tt} R^\rho{}_{t\rho t} + g^{ij} R^\rho{}_{i\rho j}. \quad (604)$$

Com isso

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{3}{N^2} \left[\frac{b\dot{N}}{aN} - \frac{\dot{b}}{a} \right] - \frac{3}{a^2} \left[\frac{a\dot{b}}{N^2} - \frac{ab\dot{N}}{N^3} + 2\frac{b^2}{N^2} - 2f^2 \right], \\
 &= -\frac{6}{aN} \left(\frac{\dot{b}}{N} - \frac{b\dot{N}}{N^2} \right) - 6\frac{b^2}{a^2N^2} + 6\frac{f^2}{a^2}, \\
 &= -6 \left[\frac{1}{aN} \frac{d}{dt} \left(\frac{b}{N} \right) + \left(\frac{b}{aN} \right)^2 - \left(\frac{f}{a} \right)^2 \right]. \tag{605}
 \end{aligned}$$

APÊNDICE D - DETERMINAÇÃO DA PERTURBAÇÃO ESCALAR NA CONEXÃO AFIM E NO TENSOR DE CURVATURA

O intuito desse apêndice é construir com cuidado uma perturbação escalar de primeira ordem na conexão afim e posteriormente no escalar de curvatura, uma vez que esse é um passo essencial para se perturbar as equações de ECSK. Novamente será considerada a métrica (455), em que $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, com $\bar{g}_{\mu\nu}$ o tensor métrico não perturbado e $h_{\mu\nu}$ a sua perturbação. De forma geral a conexão afim pode ser escrita como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} - \bar{K}_{\mu\nu}^{\rho} + \delta\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} - \delta K_{\mu\nu}^{\rho}, \quad (606)$$

em que os termos barrados são não perturbados, enquanto que $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho}$ é o símbolo de Christoffel não perturbado como já discutido anteriormente. Os termos $\bar{K}_{\mu\nu}^{\rho}$ e $\delta K_{\mu\nu}^{\rho}$ são dados pelas equações (458) e (459) respectivamente, a relembrar:

$$\bar{K}_{\mu\nu}^{\rho} = - [\bar{S}_{\mu\nu}^{\rho} + \bar{g}^{\rho\sigma} (\bar{g}_{\nu\beta} \bar{S}_{\sigma\mu}^{\beta} + \bar{g}_{\mu\alpha} \bar{S}_{\sigma\nu}^{\alpha})]. \quad (607)$$

$$\begin{aligned} \delta K_{\mu\nu}^{\rho} = & - [\delta S_{\mu\nu}^{\rho} + h^{\rho\sigma} (\bar{g}_{\nu\beta} \bar{S}_{\sigma\mu}^{\beta} + \bar{g}_{\mu\alpha} \bar{S}_{\sigma\nu}^{\alpha}) + \\ & + \bar{g}^{\rho\sigma} (h_{\nu\beta} \bar{S}_{\sigma\mu}^{\beta} + h_{\mu\alpha} \bar{S}_{\sigma\nu}^{\alpha} + \\ & + \bar{g}_{\nu\beta} \delta S_{\sigma\mu}^{\beta} + \bar{g}_{\mu\alpha} \delta S_{\sigma\nu}^{\alpha})]. \end{aligned} \quad (608)$$

É necessário relembrar que a perturbação exige que seja utilizado o tempo conforme η ao invés do tempo cósmico t , com isso as componentes da conexão afim perturbada são dadas por:

$$\Gamma_{\eta\eta}^{\eta} = \frac{N'}{N} + \phi', \quad (609)$$

não havendo contribuição da torção. Para Γ_{ij}^{η} , temos

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ij}^{\eta} &= \frac{ab}{N^2} \delta_{ij}, \\ \tilde{\Gamma}_{ij}^{\eta} &= \frac{aa'}{N^2} \delta_{ij}, \\ \delta\tilde{\Gamma}_{ij}^{\eta} &= -\frac{2aa'}{N^2} (\psi + \phi) \delta_{ij} - \frac{a^2 \psi'}{N^2} \delta_{ij} + \frac{2aa' t_{ij}}{N^2} + \frac{a^2}{N^2} t'_{ij}, \\ \delta K_{ij}^t &= - \left[-\frac{2a^2 h}{N^2} (\phi + \psi) \right] \delta_{ij} - \left[\frac{2a^2 t_{ij}}{N^2} \right]. \end{aligned} \quad (610)$$

Somando as expressões acima, chega-se a

$$\Gamma_{ij}^\eta = \frac{a}{N^2}(1 - 2[\phi + \psi])\delta_{ij} - \frac{a^2}{N^2}\psi'\delta_{ij} + \frac{aa'}{N^2}t_{ij} + \frac{a^2}{N^2}t'_{ij}. \quad (611)$$

Para Γ_{tj}^i , é obtido

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\eta j}^i &= \frac{a'}{a}\delta_j^i, \\ \tilde{\Gamma}_{tj}^i &= \frac{a'}{a}\delta_j^i, \\ \delta\tilde{\Gamma}_{tj}^i &= -\psi'\delta_j^i + \frac{2a'}{a}t_{ij} + t'_{ij} - \frac{2a'}{a}t_{ij}, \\ \delta K_{tj}^i &= -[\delta g^{ii}\bar{g}_{jj} + \bar{g}^{ii}\delta g_{jj}]\bar{S}_{i0}{}^j = 0. \end{aligned}$$

Levando à

$$\Gamma_{\eta j}^i = \frac{a'}{a}\delta_j^i - \psi\delta_j^i + t'_{ij}. \quad (612)$$

Já para Γ_{jt}^i :

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{j\eta}^i &= \frac{b}{a}\delta_j^i, \\ \tilde{\Gamma}_{j\eta}^i &= \frac{a'}{a}\delta_j^i, \\ \delta\tilde{\Gamma}_{j\eta}^i &= -\psi'\delta_j^i + \frac{2a'}{a}t_{ij} + t'_{ij} - \frac{2a'}{a}t_{ij}, \\ \delta K_{j\eta}^i &= -[2\delta S_{j0}{}^i + (\delta g^{ii}\bar{g}_{jj} + \bar{g}^{ii}\delta g_{jj})\bar{S}_{i\eta}{}^j] = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\Gamma_{j\eta}^i = \frac{b}{a}\delta_j^i - \psi'\delta_j^i + t'_{ij}. \quad (613)$$

Embora a componente $\bar{\Gamma}_{\eta i}^\eta$ seja nula, existe uma contribuição da perturbação:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\eta i}^\eta &= 0, \\ \tilde{\Gamma}_{\eta i}^\eta &= 0 \\ \delta\tilde{\Gamma}_{\eta i}^\eta &= \partial_i\phi, \\ \delta K_{\eta i}^\eta &= 0. \end{aligned}$$

Restando apenas a contribuição da perturbação do símbolo de Christoffel

$$\Gamma_{\eta i}^{\eta} = \Gamma_{i\eta}^{\eta} = \partial_i \phi. \quad (614)$$

O mesmo ocorre com a componente $\Gamma_{\eta\eta}^i$:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\eta\eta}^i &= 0, \\ \tilde{\Gamma}_{\eta\eta}^i &= 0, \\ \delta\tilde{\Gamma}_{\eta\eta}^i &= \frac{N^2}{a^2} \partial^i \phi, \\ \delta K_{\eta\eta}^i &= 0. \end{aligned}$$

logo

$$\Gamma_{\eta\eta}^i = \frac{N^2}{a^2} \partial^i \phi. \quad (615)$$

Por último, para Γ_{jk}^i , tem-se

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{jk}^i &= f \varepsilon_{jk}^i, \\ \tilde{\Gamma}_{jk}^i &= 0, \\ \delta\tilde{\Gamma}_{jk}^i &= \partial_i \psi \delta_{jk} - \partial_j \psi \delta_k^i - \partial_k \psi \delta_j^i + \partial_k t_{ij} + \partial_j t_{ik} - \partial_i t_{jk} - 6\psi f \varepsilon_{jk}^i, \\ \delta K_{jk}^i &= -[\delta S_{jk}^i + \delta S_{ij}^k \delta_k^i + \delta S_{ik}^j] = 0. \end{aligned}$$

finalmente

$$\Gamma_{jk}^i = (f - 6\psi f) \varepsilon_{jk}^i + \partial^i \psi \delta_{jk} - \partial_j \psi \delta_k^i - \partial_k \psi \delta_j^i + \partial_k t_{ij} + \partial_j t_{ik} - \partial^i t_{jk}. \quad (616)$$

Agora é possível encontrar a perturbação no tensor de curvatura $R^\rho_{\mu\sigma\nu}$, o qual é dado por

$$\begin{aligned} R^\rho_{\mu\sigma\nu} &= \bar{R}^\rho_{\mu\sigma\nu} + \delta R^\rho_{\mu\sigma\nu}, \\ &= \bar{R}^\rho_{\mu\sigma\nu} + \partial_\sigma \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\mu \delta \Gamma_{\sigma\nu}^\rho + \delta \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + \bar{\Gamma}_{\sigma\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \bar{\Gamma}_{\sigma\nu}^\lambda - \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \end{aligned} \quad (617)$$

Uma vez que as componentes não perturbadas são dadas na equação (605), é necessário

focar apenas na obtenção das componentes perturbadas, as quais são:

$$\begin{aligned}
\delta R^{\eta}_{ij} &= \partial_{\eta}\delta\Gamma^{\eta}_{ij} - \partial_i\delta\Gamma^{\eta}_{\eta j} + \delta\Gamma^{\eta}_{\eta\eta}\bar{\Gamma}^{\eta}_{ij} + \delta\Gamma^{\eta}_{\eta k}\bar{\Gamma}^k_{ij} + \bar{\Gamma}^{\eta}_{\eta k}\delta\Gamma^k_{ij} + \bar{\Gamma}^{\eta}_{\eta\eta}\delta\Gamma^{\eta}_{ij} \\
&- \delta\Gamma^{\eta}_{i\eta}\bar{\Gamma}^{\eta}_{\eta j} - \bar{\Gamma}^{\eta}_{i\eta}\delta\Gamma^{\eta}_{\eta j} - \delta\Gamma^{\eta}_{ik}\bar{\Gamma}^k_{\eta j} - \bar{\Gamma}^{\eta}_{ik}\delta\Gamma^k_{\eta j} \\
&= \left[-\frac{a^2}{N^2}\psi'' + \frac{a^2\psi'}{N^2}\left(\frac{N'}{N} - \frac{a'}{a}\right) - \frac{ab'}{N^2}(\psi + \phi) - a\left(\frac{b}{N^2}(\psi + \phi)\right)' - \Delta\phi \right] \delta_{ij} \\
&- \partial_j\partial_i\phi + \frac{f}{2}\partial_j\phi.
\end{aligned} \tag{618}$$

$$\begin{aligned}
\delta R^k_{ikj} &= \partial_k\delta\Gamma^k_{ij} - \partial_i\delta\Gamma^k_{kj} + \delta\Gamma^k_{k\eta}\bar{\Gamma}^{\eta}_{ij} + \bar{\Gamma}^k_{k\eta}\delta\Gamma^{\eta}_{ij} + \delta\Gamma^k_{ka}\bar{\Gamma}^a_{ij} + \bar{\Gamma}^k_{ka}\delta\Gamma^a_{ij} \\
&- \delta\Gamma^k_{i\eta}\bar{\Gamma}^{\eta}_{kj} - \bar{\Gamma}^k_{i\eta}\delta\Gamma^{\eta}_{kj} - \delta\Gamma^k_{ia}\bar{\Gamma}^a_{kj} - \bar{\Gamma}^k_{ia}\delta\Gamma^a_{kj}. \\
&= -2\left[\frac{ab}{N^2}\psi' + \frac{b^2}{N^2}(\phi + \psi) - \Delta\psi\right] \delta_{ij} + \partial_i\partial_j\psi - \frac{f}{2}\partial_k\psi.
\end{aligned} \tag{619}$$

$$\begin{aligned}
\delta R^k_{0k0} &= \partial_k\delta\Gamma^k_{00} - \partial_0\delta\Gamma^k_{k0} + \delta\Gamma^k_{k0}\bar{\Gamma}^0_{00} + \bar{\Gamma}^k_{k0}\delta\Gamma^0_{00} + \delta\Gamma^k_{ka}\bar{\Gamma}^a_{00} + \bar{\Gamma}^k_{ka}\delta\Gamma^a_{00} \\
&- \delta\Gamma^k_{00}\bar{\Gamma}^0_{k0} - \bar{\Gamma}^k_{00}\delta\Gamma^0_{k0} - \delta\Gamma^k_{0a}\bar{\Gamma}^a_{k0} - \bar{\Gamma}^k_{0a}\delta\Gamma^a_{k0}. \\
&= 3\frac{N^2}{a^2}\Delta\phi + 3\psi'' + 3\left(\frac{a'}{a} - \frac{N'}{N}\right)\psi' + 3\frac{b}{a}(\phi' + \psi').
\end{aligned} \tag{620}$$

$$\begin{aligned}
\delta R^{\eta}_{\eta\eta i} &= \partial_{\eta}\delta\Gamma^{\eta}_{\eta i} - \partial_{\eta}\delta\Gamma^{\eta}_{\eta i} + \delta\Gamma^{\eta}_{\eta\eta}\bar{\Gamma}^{\eta}_{\eta i} + \bar{\Gamma}^{\eta}_{\eta\eta}\delta\Gamma^{\eta}_{\eta i} + \delta\Gamma^{\eta}_{\eta j}\bar{\Gamma}^j_{\eta i} + \bar{\Gamma}^{\eta}_{\eta j}\delta\Gamma^j_{\eta i} \\
&- \delta\Gamma^{\eta}_{\eta j}\bar{\Gamma}^j_{\eta i} - \bar{\Gamma}^{\eta}_{\eta j}\delta\Gamma^j_{\eta i} - \delta\Gamma^{\eta}_{\eta\eta}\bar{\Gamma}^{\eta}_{\eta i} - \bar{\Gamma}^{\eta}_{\eta\eta}\delta\Gamma^{\eta}_{\eta i}. \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{621}$$

$$\begin{aligned}
\delta R^k_{\eta ki} &= \partial_k\delta\Gamma^k_{\eta i} - \partial_{\eta}\delta\Gamma^k_{ki} + \delta\Gamma^k_{k\eta}\bar{\Gamma}^{\eta}_{\eta i} + \bar{\Gamma}^k_{k\eta}\delta\Gamma^{\eta}_{\eta i} + \delta\Gamma^k_{kj}\bar{\Gamma}^j_{\eta i} + \bar{\Gamma}^k_{kj}\delta\Gamma^j_{\eta i} \\
&- \delta\Gamma^k_{\eta\eta}\bar{\Gamma}^{\eta}_{ki} - \bar{\Gamma}^k_{\eta\eta}\delta\Gamma^{\eta}_{ki} - \delta\Gamma^k_{\eta j}\bar{\Gamma}^j_{ki} - \bar{\Gamma}^k_{\eta j}\delta\Gamma^j_{ki}. \\
&= \partial_i\psi' + \frac{b}{a}\partial_i\phi.
\end{aligned} \tag{622}$$

$$\begin{aligned}
\delta R^{\eta}_{i\eta\eta} &= \partial_{\eta}\delta\Gamma^{\eta}_{i\eta} - \partial_i\delta\Gamma^{\eta}_{\eta\eta} + \delta\Gamma^{\eta}_{\eta\eta}\bar{\Gamma}^{\eta}_{i\eta} + \bar{\Gamma}^{\eta}_{\eta\eta}\delta\Gamma^{\eta}_{i\eta} + \delta\Gamma^{\eta}_{\eta j}\bar{\Gamma}^j_{i\eta} + \bar{\Gamma}^{\eta}_{\eta j}\delta\Gamma^j_{i\eta} \\
&- \delta\Gamma^{\eta}_{i\eta}\bar{\Gamma}^j_{\eta\eta} - \bar{\Gamma}^j_{i\eta}\delta\Gamma^j_{\eta\eta} - \delta\Gamma^{\eta}_{i\eta}\bar{\Gamma}^{\eta}_{\eta\eta} - \bar{\Gamma}^{\eta}_{i\eta}\delta\Gamma^{\eta}_{\eta\eta}. \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{623}$$

$$\begin{aligned}
\delta R^k{}_{ik0} &= \partial_k \delta \Gamma_{i0}^k - \partial_i \delta \Gamma_{k0}^k + \delta \Gamma_{k0}^k \bar{\Gamma}_{i0}^0 + \bar{\Gamma}_{k0}^k \delta \Gamma_{i0}^0 + \delta \Gamma_{ka}^k \bar{\Gamma}_{i0}^a + \bar{\Gamma}_{ka}^k \delta \Gamma_{i0}^a \\
&\quad - \delta \Gamma_{i0}^k \bar{\Gamma}_{k0}^0 - \bar{\Gamma}_{i0}^k \delta \Gamma_{i0}^0 - \delta \Gamma_{ia}^k \bar{\Gamma}_{k0}^a - \bar{\Gamma}_{ia}^k \delta \Gamma_{k0}^a. \\
&= \partial_i \psi' + \frac{b}{a} \partial_i \phi.
\end{aligned} \tag{624}$$

Com isso é possível construir o escalar de curvatura perturbado, dado pela equação (471).

Por último cabe expressar os termos $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}_n$, sendo $n = 1, 2, 3, 4$, pertencente as equações (487)-(490). Para esses casos não cabe uma demonstração matemática, pois os termos foram obtidos utilizando o software Mathematica 11, com o pacote FeynCalc. No caso, os termos em questão são

$$\overset{\circ}{\mathfrak{F}}_1 = \frac{3\delta\varphi f^2\varphi}{4a^2} + \frac{3f^2\varphi^2\Psi}{4a^2}, \tag{625}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\mathfrak{F}}_2 &= f^2 \left(-\frac{\delta\varphi\varphi}{4a^2} - \frac{\varphi^2\Psi}{4a^2} \right) + f \left(-\frac{b\delta\varphi\varphi}{2a^3} + \frac{b\varphi^2\Phi}{4a^3} - \frac{b\varphi^2\Psi}{4a^3} - \frac{\varphi\delta\varphi'}{2a^2} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{\delta\varphi\varphi'}{2a^2} + \frac{\varphi\Phi\varphi'}{2a^2} - \frac{\varphi\Psi\varphi'}{2a^2} + \frac{\delta\varphi\varphi a'}{2a^3} - \frac{\varphi^2\Phi a'}{4a^3} + \frac{\varphi^2\Psi a'}{4a^3} \right),
\end{aligned} \tag{626}$$

$$\overset{\circ}{\mathfrak{F}}_3 = -f \left(\frac{\partial_1 \delta\varphi\varphi}{4a^2} - \frac{\partial_i \Phi\varphi^2}{8a^2} - \frac{\partial_i \Psi\varphi^2}{8a^2} \right). \tag{627}$$