

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

VICTOR CORREA LATTARI

Formação de pequenos satélites e anéis de poeira

Guaratinguetá

2019

Victor Correa Lattari

Formação de pequenos satélites e anéis de poeira

Trabalho de Defesa de Mestrado apresentado ao Conselho de Curso de Pós-Graduação em Mestrado em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Mestre em Mestrado em Física .

Orientador: Prof^o Dr. Rafael Sfair

Guaratinguetá

2019

L364f Lattari, Victor Correa
Formação de pequenos satélites e anéis de poeira / Victor Correa Lattari
– Guaratinguetá, 2019.
89 f : il.
Bibliografia: f. 71-72

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2019.
Orientador: Prof. Dr. Rafael Sfair de Oliveira

1. Satélites 2. Planetas - Órbitas 3. Mecânica celeste I. Título.

CDU 629.783(043)

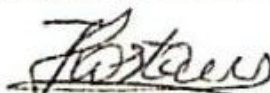
Ana Cristina Figueiredo Loureiro
Bibliotecária CRB 8/7094

VICTOR CORREA LATTARI

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM FÍSICA"

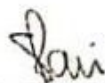
PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. Konstantin Georgiev Kostov
Coordenador

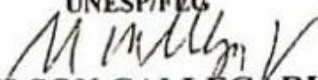
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. RAFAEL SFAIR DE OLIVEIRA
Orientador / UNESP/FEG



Prof. Dr. ANDRÉ IZIDORO FERREIRA DA COSTA
UNESP/FEG



Prof. Dr. NELSON CALLEGARI JÚNIOR
UNESP/IGCE-RIO CLARO

DADOS CURRICULARES

VICTOR CORREA LATTARI

NASCIMENTO 02/12/1992 - São Paulo / SP

FILIAÇÃO Waldir Lucas Lattari
Luciana Silva Correa Lattari

2012 / 2016 Bacharelado em Física
Faculdade de Engenharia do Campus de Guara-
tinguetá, Universidade Estadual Paulista

Dedico esta dissertação aos meus pais,
Luciana Silva Correa Lattari e Waldir Lucas Lattari.

AGRADECIMENTOS

Agradeço os meus pais, Luciana e Waldir, meu irmão Matheus e amigos, em especial aos que estiveram comigo durante todo o período da graduação e do mestrado, Tiago Francisco, Luana Liberato e Gustavo Madeira. Agradeço o meu orientador Rafael Sfair que me acompanha desde o início da graduação e sempre me apoiou durante este percurso. Aos membros da banca de qualificação, André Izidoro e Ernesto Vieira Neto e de defesa de Mestrado, André Izidoro e Nelson Callegari pelas críticas construtivas que tiveram relevante papel para a finalização deste trabalho. E por último, a CAPES pelo apoio financeiro, que sem este apoio o desenvolvimento deste trabalho seria inviável.

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):

CAPES - O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - código de financiamento 001.

E do projeto CEPID-CeMEAI através da utilização do Cluster Euler.

*“Every Pawn is a potential Queen.”
(James Mason)*

RESUMO

A formação de alguns arcos dos anéis planetários pode estar relacionada às colisões de partículas interplanetárias com seus satélites, fragmentando-os e produzindo corpos menores. De modo sucessivo, estes fragmentos podem sofrer novas colisões e eventualmente gerar partículas de poeira. Por outro lado, os corpos macroscópicos (da ordem de metros) imersos no anel podem colidir entre si e aglutinar-se de modo a gerar novos objetos maiores. A existência destes arcos é creditada a presença de um satélite perturbador que os confina em uma ressonância de corotação. No caso do arco do anel G de Saturno, este é confinado por uma ressonância excêntrica 7:6 de corotação com o satélite Mimas. Hedman et al. (2010) citam que o arco do anel G é majoritariamente composto por partículas da ordem de micrômetros. Neste caso, as forças perturbativas, tais como a pressão de radiação e a força eletromagnéticas, são significativas e tendem a reduzir o tempo de vida destas partículas nesta região. Para explicar a estabilidade do arco Hedman et al. (2010) utilizaram o pequeno satélite Aegaeon (imerso no arco) que poderia ser uma fonte do material das partículas micrométricas imersas no arco via colisões de partículas interplanetárias com Aegaeon. Entretanto, Madeira et al. (2018) exploraram o efeito da pressão de radiação solar e mostraram que o tempo de vida das partículas micrométricas no arco é menos de 40 anos e que o satélite Aegaeon não poderia ser fonte de material e manter a quantidade de poeira no arco via colisões de partículas interplanetárias. Isto, levantou a hipótese de que outro mecanismo de reposição de poeira deveria ser considerado. Tal mecanismo pode ser explicado a partir dados do instrumento LEMMS (Magnetospheric Imaging Instrument's LowEnergy, em português "Instrumento de Imagem Magnetosférica para Baixas Energias") da sonda Cassini que detectou uma queda mais acentuada na energia dos elétrons no arco, inferindo que deva existir uma população de corpos da ordem de metros imersos no arco. Neste trabalho será analisado o comportamento de corpos macroscópicos existentes em arcos planetários investigando suas evoluções temporais e os possíveis satélites a serem criados investigando a influência do raio físico e da densidade do número de corpos. Além disso, será analisada a produção de poeira gerada devido a colisões super-catastróficas entre os corpos macroscópicos com o objetivo de verificar se estes podem ser o mecanismo de reposição de poeira no arco. Por fim, neste trabalho foi mostrado que é possível manter a população de poeira no arco do anel G através das colisões super-catastróficas entre os corpos macroscópicos imersos no arco e com isso manter o sistema estável por mais de 300 anos e que o satélite Aegaeon não é relevante para a produção de poeira do arco.

PALAVRAS-CHAVE: Arcos de anéis planetários. Anel G. Aegaeon. Ressonância de corotação.

ABSTRACT

Some planetary rings exhibit denser regions called arcs, and the existence of these arcs is credited by the presence of a disturbing satellite that confines the particles in a corotation resonance. The formation of the planetary ring arc can be related with the collisions between interplanetary particles with an embedded satellite, or the break up of a moon into minor bodies. Successively, these bodies may experience new collisions that eventually create dust particles. Meanwhile, the macroscopic bodies can collide among themselves and merge, resulting in large bodies. For the Saturn's G ring's arc, it is confined by a 7:6 corotation resonance with the satellite Mimas. Hedman et al. (2010) showed this arc is composed mostly of micrometers particles, a configuration that perturbative forces are significant and decrease the lifetime of the structure. To explain the stability of this arc, they proposed that the satellite Aegaeon could be a source of the material of the dust by collisions within interplanetary particles. However, Madeira et al. (2018) studied the solar radiation pressure and showed that the lifetime of the particles is less than 40 years and that the satellite Aegaeon cannot be a source. Therefore, another mechanism is necessary to explain the arc. To do so, one can use information derived by the LEMMS (Magnetospheric Imaging Instrument's LowEnergy), an instrument from that Cassini spacecraft that detected an energy drop from electrons in this region, inferring that there must be a population of bodies of the order of meters immersed in the G ring arc. In this work, we analyzed the dynamics of macroscopic bodies immersed in planetary arcs, studying through numerical simulations their temporal evolution and the likelihood of moon formation. Moreover, it will be analyzed the dust produced by super-catastrophic collisions between these bodies, aiming to create a stable system and verify if this mechanism can be sufficient to maintain the dust detected in the G ring arc. Our results indicate that it is possible to keep the dust population in the arc through the super-catastrophic collisions between the macroscopic bodies immersed in the arc and keep the system stable for more than 300 years. Furthermore, we conclude that Aegaeon is not relevant to the production of arc dust.

KEYWORDS: Planetary ring arcs. G ring. Aegaeon. Corotation resonance.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1.1	Imagens do arco do anel G obtidas em 19 de setembro de 2006 às 12:37, 13:11, 13:44 e 14:18 UT, sendo possível observar o movimento do arco.	17
1.2	Par de imagens obtidas em 15 de Agosto de 2008 que possibilitou a descoberta do satélite Aegaeon. As setas indicam a localização do objeto que aparece como um pequena faixa localizada no centro do arco.	18
1.3	(a) Ângulo ressonante CER 7:6 ($\varphi = 7\lambda_{Mimas} - 6\lambda_{Aegaeon} - \varpi_{Mimas}$) em função do tempo obtidos via integração numérica mostrando que ele libra em torno de 180° . (b) Espectro de Fourier do ângulo ressonante mostrando que o período dominante é de aproximadamente 1260 dias e amplitude 10° . (c) Ângulo ressonante ILR 7:6 ($\varphi = 7\lambda_{Mimas} - 6\lambda_{Aegaeon} - \varpi_{Aegaeon}$). Entretanto, este ângulo não está em libração, esta circulando em torno de 0° (b) Espectro de Fourier do ângulo ressonante mostrando que o período dominante é de aproximadamente 820 dias e amplitude 35°	19
2.1	Definição do raio r , da longitude L e da latitude α de um objeto orbitando um corpo central de massa M	22
2.2	Precessão de Ω e ϖ devido ao efeito dos coeficientes J_2 , J_4 e J_6 de Saturno. À esquerda seguem os resultados obtidos via simulação numérica realizada no pacote de integração do Mercury e a direita do REBOUND.	29
2.3	Variação de a , e , I do satélite Mimas em função do tempo devido ao efeito dos coeficientes J_2 , J_4 e J_6 de Saturno. À esquerda seguem os resultados obtidos via simulação numérica realizada no pacote de integração do Mercury e a direita do REBOUND.	31
3.1	Variação dos semi-eixos maior osculador e geométrico, em função do tempo, de uma partícula localizada no anel G.	38
3.2	Variação das excentricidades osculadora e geométrica, em função do tempo, de uma partícula localizada no anel G.	38
3.3	Variação do ângulo ϖ_{cr} de Mimas-Aegaeon calculado em termos dos elementos osculadores e elementos geométricos em função do tempo.	39
4.1	<i>streamlines</i> obtidos para (a) $m = 0$, $\Omega_p = k\kappa'$, (b) $m = 1$, $\Omega_p = n' + k\kappa'$, (c) $m = 2$, $\Omega_p = n' + (k/2)\kappa'$, e (d) $m = 7$, $\Omega_p = n' + (k/7)\kappa'$, onde foi utilizado o mesmo valor de a em todos os casos e um valor de $e = 0.08$ em (a),(c) e (d) e de $e = 0.2$ em (b).	43
5.1	Parâmetros de colisão. V_i é a velocidade relativa, θ é o ângulo de colisão, B e l são parâmetros para determinar a área efetiva do projétil que interpola com o alvo, enquanto R e r são os raios do alvo e do projétil, respectivamente.	47
5.2	Regimes de colisões em função da razão de massa, parâmetro de impacto e da razão de velocidades V_i/V_{esc} com valores de $c^* = 1.9$ e $\bar{\mu} = 0.36$	50

5.3	Regimes de colisões em função da razão de massa, parâmetro de impacto e da razão de velocidades V_i/V_{esc} para os mesmo valores de c^* e $\bar{\mu}$ da figura anterior. A cor roxa representa a curva de junção perfeita, a vermelha o b_{crit} , a preta a curva de erosão parcial ($M_{lr}/M_{tot} = 1$), a azul $M_{lr}/M_{tot} = 0.5$ e a amarela a curva de colisão super-catastrófica $M_{lr}/M_{tot} = 0.1$	51
6.1	Variação do ângulo ressonante φ_{cr} de Mimas-Aegaeon em função do tempo. . .	53
6.2	Variação do ângulo ressonante φ_{Lb} de Mimas-Aegaeon em função do tempo. . .	53
6.3	Variação dos elementos geométricos a , e e I do satélite Aegaeon em função do tempo.	54
6.4	Localização dos sítios ressonantes do anel G (roxo) e das ressonâncias de cor-rotação (linha contínua) e de Lindlbad (linha tracejada), enquanto a do satélite Aegaeon é destacada em laranja.	56
6.5	Distribuição inicial dos corpos no sítio ressonante do satélite Aegaeon (laranja).	56
6.6	Variação do ângulo φ_{cr} dos maiores corpos formados nas simulações com 500 e 982 corpos com raios físicos iniciais de 50 m. O símbolo em forma de cruz indica os tempos nos quais o corpo sofreu colisão.	60
6.7	Variação do ângulo φ_{cr} dos maiores corpos formados nas simulações com 500 e 982 corpos com raios físicos iniciais de 100 m, respectivamente. O símbolo em forma de cruz indica os tempos nos quais o corpo sofreu colisão.	61
6.8	Histograma da distribuição final dos raios dos corpos das simulações com 500 corpos (mais o satélite Aegaeon) com raio inicial de 50 (azul) e 100 (vermelho) metros inicialmente.	63
6.9	Histograma da distribuição final dos raios dos corpos das simulações com 982 corpos (mais o satélite Aegaeon) com raio inicial de 50 (azul) e 100 (vermelho) metros inicialmente.	63
6.10	Histograma da distribuição final dos raios dos corpos das simulações com 500 corpos com raio inicial de 50 (azul) e 100 (vermelho) metros inicialmente. . . .	64
6.11	Histograma da distribuição final dos raios dos corpos das simulações com 982 corpos com raio inicial de 50 (azul) e 100 (vermelho) metros inicialmente. . . .	64
6.12	Razão de velocidades V_i/V_{esc} obtidas de duas simulações com mesmos parâmetros iniciais, nos casos com e sem autogravidade.	66
6.13	Regimes de colisões em função da razão de massa, parâmetro de impacto e da razão de velocidades V_i/V_{esc} com valores de $c^* = 5$ e $\bar{\mu} = 0.36$. A cor roxa representa a curva de junção perfeita, a vermelha o b_{crit} , a preta a curva de erosão parcial ($M_{lr}/M_{tot} = 1$), a azul $M_{lr}/M_{tot} = 0.5$ e a amarela a curva de colisão super-catastrófica $M_{lr}/M_{tot} = 0.1$. Os pontos pretos indicam as colisões ocorridas em cada simulação.	67
6.14	Número de corpos e massa de poeira produzida em função do tempo das simulações 1* à 4*. Para tal cálculo foi considerado que toda a massa proveniente dos corpos que sofreram colisões super-catastróficas foram transformadas em poeira.	68

6.15	Evolução temporal do ângulo ressonante φ_{cr} e dos elementos orbitais a, e, I do satélite Aegaeon.	70
A.1	Precessão de Ω e ϖ devido ao efeito do coeficiente J_2 de Saturno. À esquerda seguem os resultados obtidos via simulação numérica realizada no pacote de integração do Mercury e a direita do REBOUND.	75
A.2	Variação de a, e, I do satélite Mimas em função do tempo devido ao efeito do coeficiente J_2 de Saturno. À esquerda seguem os resultados obtidos via simulação numérica realizada no pacote de integração do Mercury e a direita do REBOUND.	76
A.3	Precessão de Ω e ϖ devido ao efeito do coeficiente J_4 de Saturno. À esquerda seguem os resultados obtidos via simulação numérica realizada no pacote de integração do Mercury e a direita do REBOUND.	77
A.4	Variação de a, e, I do satélite Mimas em função do tempo devido ao efeito do coeficiente J_4 de Saturno. À esquerda seguem os resultados obtidos via simulação numérica realizada no pacote de integração do Mercury e a direita do REBOUND.	78
A.5	Precessão de Ω e ϖ devido ao efeito do coeficiente J_6 de Saturno. À esquerda seguem os resultados obtidos via simulação numérica realizada no pacote de integração do Mercury e a direita do REBOUND.	79
A.6	Variação de a, e, I do satélite Mimas em função do tempo devido ao efeito do coeficiente J_6 de Saturno. À esquerda seguem os resultados obtidos via simulação numérica realizada no pacote de integração do Mercury e a direita do REBOUND.	80
B.1	Evolução temporal da simulação 1 (500 corpos com raio de 50 m incluindo o satélite Aegaeon)	82
B.2	Evolução temporal da simulação 2 (500 corpos com raio de 100 m incluindo o satélite Aegaeon)	83
B.3	Evolução temporal da simulação 3 (1000 corpos com raio de 50 m incluindo o satélite Aegaeon).	84
B.4	Evolução temporal da simulação 4 1 (1000 corpos com raio de 100 m incluindo o satélite Aegaeon).	85
B.5	Evolução temporal da simulação 5 (500 corpos com raio de 50 m sem o satélite Aegaeon).	86
B.6	Evolução temporal da simulação 6 (500 corpos com raio de 100 m sem o satélite Aegaeon).	87
B.7	Evolução temporal da simulação 7 (1000 corpos com raio de 50 m sem o satélite Aegaeon).	88
B.8	Evolução temporal da simulação 8 (1000 corpos com raio de 100 m sem o satélite Aegaeon).	89

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Elementos Orbitais Geométricos do Satélite Aegaeon	19
Tabela 2.1 – Cálculo das Taxas de Precessão do Nodo e do Pericentro, os índices R , M e T significam que elas foram calculadas pelos dados das integrações do REBOUND e do Mercury, e pelas Equações (2.31)-(2.32) de Borderies-Rappaport e Longaretti (1994)	28
Tabela 6.1 – Elementos orbitais osculadores dos satélites Mimas e Aegaeon.	52
Tabela 6.2 – Condições iniciais das simulações. A coluna N apresenta o número total de corpos, a do r_i o raio físico inicial e o x na última coluna indica a presença de Aegaeon na simulação.	57
Tabela 6.3 – Parâmetros físicos de Saturno.	57
Tabela 6.4 – Análise das colisões em cada simulação	58
Tabela 6.5 – Raio final do satélite Aegaeon.	58
Tabela 6.6 – Maiores corpos remanescentes em cada simulação. Para os casos que possui o satélite Aegaeon foram analisados os segundo de maior raio.	59
Tabela 6.7 – Condições iniciais das simulações. O símbolo N representa o número total de corpos, a segunda coluna apresenta a massa total destes corpos em função da massa de Aegaeon e o x na última coluna indica a presença de Aegaeon na simulação.	65
Tabela 6.8 – Análise das colisões com autogravidade.	67
Tabela 6.9 – Número de corpos e massa de poeira produzida ao final das simulações.	69

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Arco do anel G	18
2	POTENCIAL GRAVITACIONAL	22
2.1	Introdução Teórica	22
2.2	Efeitos do achatamento	23
2.3	Implementação das Forças no Rebound	26
3	ELEMENTOS ORBITAIS GEOMÉTRICOS	32
3.1	Conversão	33
3.1.1	Conversão de Elementos Geométricos para Vetores de Estado	33
3.1.2	Conversão de Vetores de Estado para Elementos Geométricos	34
3.2	Teste para validar o código	37
4	RESSONÂNCIA EM ANÉIS PLANETÁRIOS	40
4.1	Ressonância de Corrotação	41
4.2	Ressonância Excêntrica (de Lindblad) e Vertical	42
4.3	Ressonância 7:6 entre Aegaeon e Mimas	43
5	REGIME DE COLISÕES	46
6	RESULTADOS	52
6.1	Determinação da localização de Aegaeon e do arco do anel G	52
6.2	Formação de pequenos satélites	57
6.3	Formação de poeira via colisões	65
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS E ETAPAS FUTURAS	71
	REFERÊNCIAS	72
	APÊNDICE A – POTENCIAL GRAVITACIONAL	74
	APÊNDICE B – SIMULAÇÕES	81

1 INTRODUÇÃO

Galileo Galilei foi o primeiro cientista a observar o planeta Saturno com uma luneta em 1610 e descreveu o sistema observado como um planeta que possuía duas grandes falsas luas situadas em cada um de seus lados. No entanto, dois anos mais tarde ele verificou que estas luas haviam desaparecido e retornado à ficar visíveis em 1616, inferindo que este sistema deveria possuir uma inclinação em relação à eclíptica. Em 1655, Christaan Huygens propôs que Saturno era circundado por um anel plano, fino e sólido situado no equador do planeta, sendo que a cada 14 ou 15 anos a Terra passa pelo plano dos anéis; além disso, ele descobriu a primeira lua de Saturno, de nome Titã (VAN HELDEN, 2009).

Durante as observações do anel de Saturno nos anos de 1671 à 1672, Giovanni Cassini observou duas novas luas Júpeter e Rhea e em 1676 uma falha no anel. Mais tarde esta falha foi nomeada Divisão de Cassini, de modo que o anel externo à borda foi nomeado anel A e o interno nomeado anel B de Saturno; além disso, em 1684 descobriu mais duas luas, Tétis e Dione. As contribuições de Cassini foram de tal importância que a sonda lançada à Saturno foi nomeada Cassini (VAN HELDEN, 2009).

Aproximadamente 100 anos após as contribuições de Cassini, Willian Herschel descobriu mais dois satélites, Enceladus e Mimas, e também observou que o planeta possui a região do equador mais alongada, sendo o primeiro a verificar o achatamento dos polos do planeta (BAALKE, 2018).

Em 1850, Willian Bond e George Bond observaram uma faixa escura sobre Saturno adjacente à borda interna do anel B, e posteriormente Charels Tuttle sugeriu que esta sombra poderia ser causada devido à um anel localizado no interior do anel B (denominado anel C). No equinócio, em 1852, as observações de Saturno mostraram que uma parte do planeta era visível através do anel C, apresentando os primeiros indícios de que os anéis de Saturno não eram sólidos, fato que foi demonstrado analiticamente por James Maxwell em 1856, provando que os anéis deveriam ser compostos por corpos macroscópicos e partículas de poeira (BAALKE, 2018).

Já em 1866, Daniel Kirkwood verificou que as partículas na Divisão de Cassini poderiam estar em uma ressonância 2:1 com Mimas e 3:1 com o período de Enceladus, sendo o primeiro cientista a associar as falhas nos anéis às ressonâncias com satélites. Ele mostrou que a Divisão de Cassini e a falha de Encke poderiam estar associadas aos quatro satélites interiores conhecidos: Mimas, Enceladus, Tétis e Dione. Em 1895 James Keeler e Willian Campbell observaram que a parte interna dos anéis orbitava mais rapidamente que a externa confirmando a dedução de Maxwell de que os anéis de Saturno eram compostos por um número indefinido de pequenos corpos (BAALKE, 2018).

Já no século XX ocorreram as descobertas dos anéis D e E, bem como dos satélites Janus e Epimeteus. Na década de 70 foram lançadas, para estudar o planeta Saturno, as sondas espaciais:

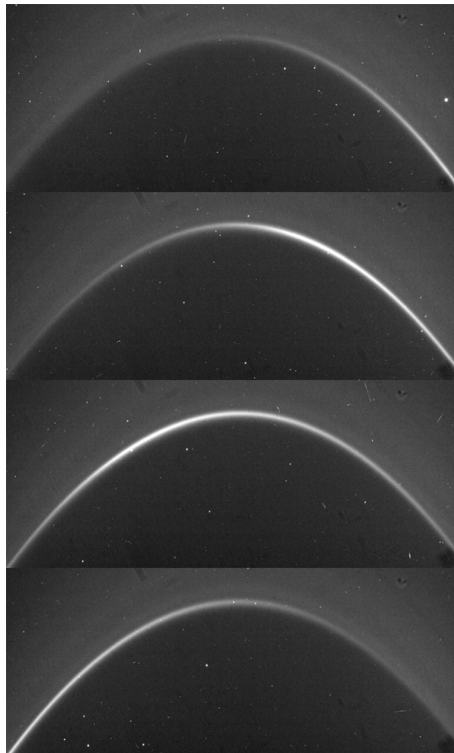
- Pioneer 11 foi a primeira sonda que sobrevoou Saturno em 1979 e possibilitou a descoberta do anel F, bem como suas luas Prometheus e Pandora em 1980 (VAN ALLEN, 1982).
- Voyager 1 e Voyager 2 fizeram uma passagem por Saturno nos anos de 1980 e 1981 e descobriram o anel G (STONE; MINER, 1981), além de posteriormente confirmarem os anéis de Urano, estes descobertos em 1977 por Elliot, Dunham e Mink (1977) através de uma ocultação do planeta.

- Cassini-Huygens lançada em 15 de outubro de 1997 orbitou Saturno de 1 de julho de 2004 à 15 de setembro de 2017. A sonda Huygens foi a primeira a pousar em uma lua do Sistema Solar externo (Titã) (SPILKER; ALTOBELLI; EDGINGTON, 2014). Enquanto a sonda Cassini descobriu as plumas de Enceladus, novas satélites e os três sistemas de arco de anéis de Saturno, dos satélites Ante, Metone e Aegaeon (HEDMAN et al., 2009).

No começo de 2004, as imagens da sonda espacial Cassini indicaram a existência dos pequenos satélites Methone, Palene, Polideuces, Dafne e Anthe. Dois destes, Anthe e Methone, situados em dois arcos tênues confinados em uma ressonâncias de corotação excêntrica com o satélite Mimas (10:11 e 14:15, respectivamente). O material encontrado nestes arcos provavelmente representam detritos que colidiram com os satélites em baixas velocidades e ficaram presos nas mesmas ressonâncias que o satélite fonte (HEDMAN et al., 2007).

Mais recente, em 2007, as imagens da Cassini detectaram uma estrutura de um arco na borda interna do anel G de Saturno (Fig. 1.1), localizada aproximadamente à 167500 km do centro de Saturno, este arco possui uma largura de aproximadamente 250 km, pequeno comparada a largura do anel G (cerca de 9000 km). O arco do anel G se encontra confinado em uma ressonância de corotação 7:6 com o satélite Mimas. Entretanto, diferente dos anéis E e F, que estão próximos de satélites que poderiam fornecer material para o anel (Encélados) ou potencialmente confinar em uma região limitada (Prometeus e Pandora), o anel G está localizado a mais de 15000 km do satélite conhecido mais próximo (HEDMAN et al., 2007).

Figura 1.1 – Imagens do arco do anel G obtidas em 19 de setembro de 2006 às 12:37, 13:11, 13:44 e 14:18 UT, sendo possível observar o movimento do arco.

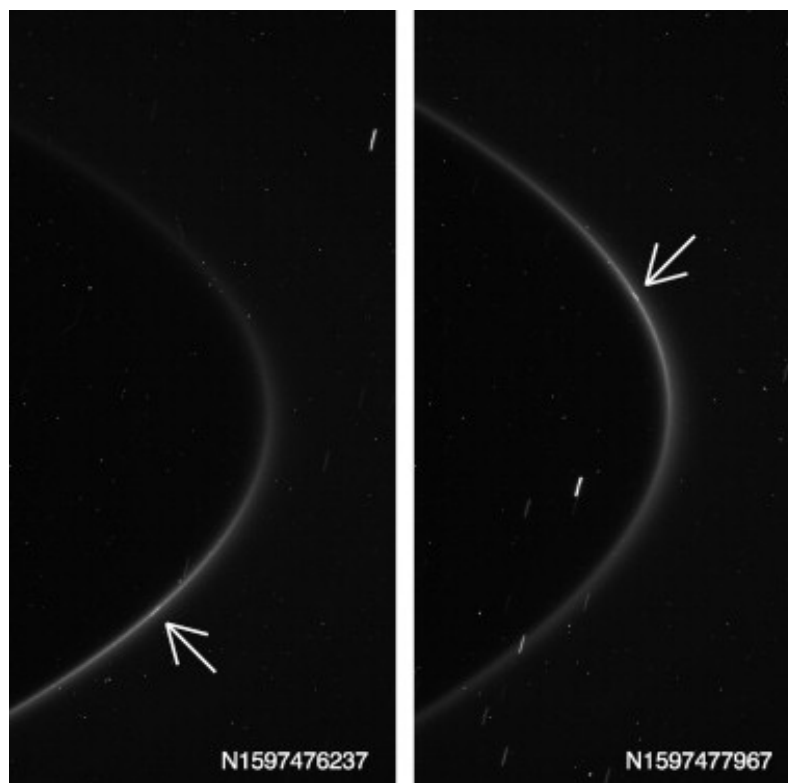


fonte: Hedman et al. (2007).

1.1 ARCO DO ANEL G

No final de 2008 as imagens do arco do anel G foram obtidas em ângulos de fase pequenos e com maior resolução revelando a presença de um pequeno satélite, que representa o maior objeto da população de corpos que compõe o arco (Fig. 1.2). A descoberta deste objeto foi anunciada em uma circular da IAU, sendo designado S2008/S1 e posteriormente nomeado Saturno LIII/ Aegaeon (PORCO, 2009). Devido ao seu pequeno tamanho, Hedman et al. (2010) acreditam que ele possui um formato irregular e uma superfície lisa devido ao constante bombardeamento de partículas de poeira do anel. Para determinar seu tamanho eles utilizaram o mesmo albedo do satélite Pallene (único albedo conhecido dos satélites imersos em arcos dos anéis de Saturno) obtendo um valor de 240 metros para o raio e de, aproximadamente, 3×10^{10} kg para a massa (assumindo uma densidade de 0.5 g/cm^3).

Figura 1.2 – Par de imagens obtidas em 15 de Agosto de 2008 que possibilitou a descoberta do satélite Aegaeon. As setas indicam a localização do objeto que aparece como um pequena faixa localizada no centro do arco.



fonte: Hedman et al. (2010).

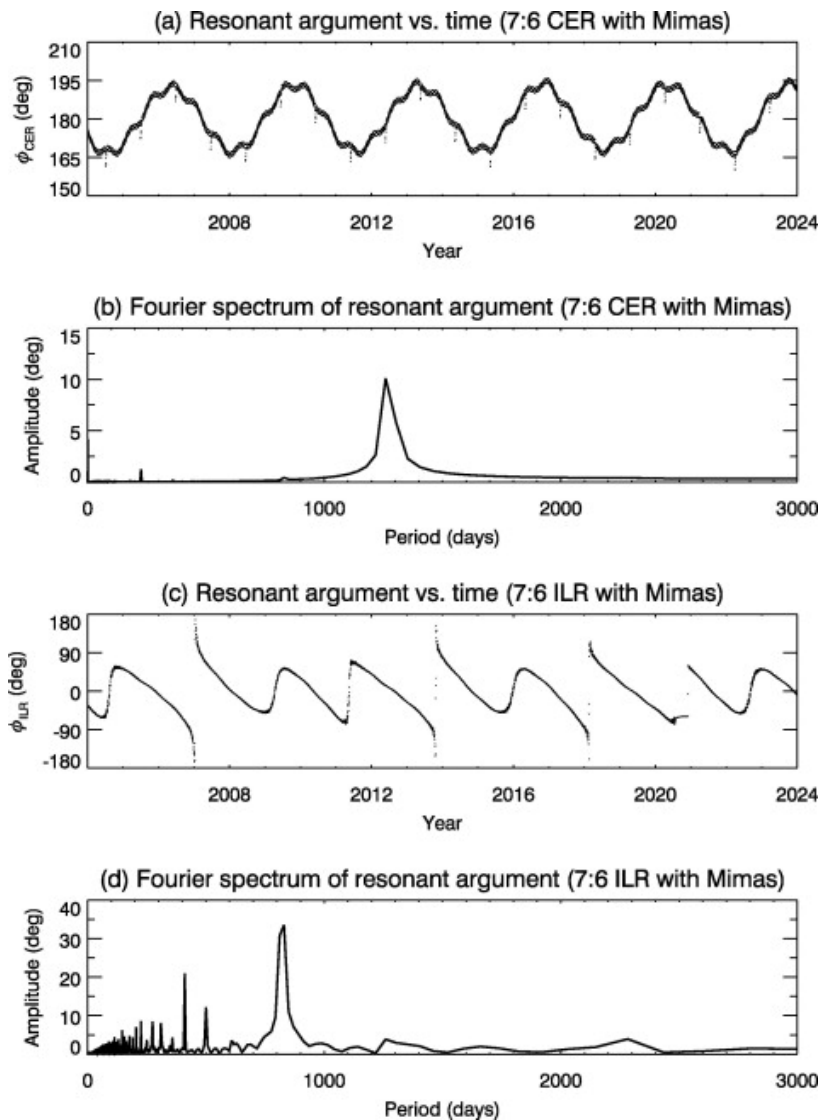
Hedman et al. (2010) calcularam e analisaram os elementos orbitais geométricos de Aegaeon (Tab. 1.1) verificando que, além das perturbações no semi-eixo maior, também ocorriam consideráveis variações acopladas na excentricidade e inclinação do pequeno satélite, sugerindo a influência de outras ressonâncias na órbita de Aegaeon. Deste modo, verificaram que, além da ressonância 7:6 de corotação excêntrica (CER), Aegaeon sofre perturbações da ressonância 7:6 de Lindblad (ILR), como apresentado na Figura 1.3.

Tabela 1.1 – Elementos Orbitais Geométricos do Satélite Aegaeon

Parâmetros	Valor Médio
a (km)	167494±4
e	0.0002±0.0002
i (graus)	0.0010±0.0009

fonte: Hedman et al. (2010).

Figura 1.3 – (a) Ângulo ressonante CER 7:6 ($\varphi = 7\lambda_{Mimas} - 6\lambda_{Aegaeon} - \varpi_{Mimas}$) em função do tempo obtidos via integração numérica mostrando que ele libra em torno de 180°. (b) Espectro de Fourier do ângulo ressonante mostrando que o período dominante é de aproximadamente 1260 dias e amplitude 10°. (c) Ângulo ressonante ILR 7:6 ($\varphi = 7\lambda_{Mimas} - 6\lambda_{Aegaeon} - \varpi_{Aegaeon}$). Entretanto, este ângulo não está em libração, esta circulando em torno de 0° (b) Espectro de Fourier do ângulo ressonante mostrando que o período dominante é de aproximadamente 820 dias e amplitude 35°.



fonte: Hedman et al. (2010).

O arco do anel G é majoritariamente composto por partículas da ordem de micrômetros, de modo que as forças de pressão de radiação solar, eletromagnética e de plasma são significativas e tendem a diminuir o tempo de vida destas partículas (HEDMAN et al., 2007). Madeira et al. (2018) exploraram o efeito da pressão de radiação solar, que causa principalmente um aumento na excentricidade das partículas micrométricas, e mostraram que o tempo, para a perda de 90% de um conjunto inicial, é de 26 anos para o caso das partículas com raio de 10 μm e de apenas 3 anos para as de 1 μm .

Este resultado levantou a hipótese de que deveria existir um mecanismo de reposição para manter as partículas no arco e devido a isto, calcularam a taxa de produção de massa causada por colisões de partículas interplanetárias com o satélite Aegaeon. A partir disto, Madeira et al. (2018) estipularam que seriam necessários 30000 anos para as colisões com o satélite Aegaeon gerarem a quantidade de poeira presente no arco. Este tempo corresponde à pelo menos 3 ordens de grandeza a mais do que elas demoram para serem removidas do arco devido à pressão de radiação solar, concluindo assim que é necessário outros mecanismos de produção de poeira para manter as partículas no arco.

Uma possível alternativa se deve ao fato de que, diferente dos arcos dos satélites Ante e Methone, a área normal equivalente (Eq. 1.1) do arco do anel G é ordens de grandeza maior do que a de Aegaeon, indicando a existência de um número significativo de objetos macroscópicos neste arco.

$$A = r_0 \int W d\lambda, \quad (1.1)$$

sendo, r_0 o raio médio do anel, λ a longitude média e W o brilho do anel. Esta quantidade define a área que um material ideal deveria possuir para refletir o mesmo brilho observado no anel.

A partir da Equação (1.1), Hedman et al. (2010) calcularam uma área normal equivalente de 50, 1.0 e 0.3 km^2 , para o arcos do anel G, de Anthe e de Methone, respectivamente. Assim, concluindo que o brilho do arco do anel G é 2 ordens de magnitude maior do que os demais arcos. Esta diferença fica mais evidente quando compara-se a área equivalente dos arcos com os de seus satélites correspondentes, cujas áreas equivalentes são de 0.07, 0.84 e 2.21 km^2 . Isto resulta que as áreas efetivas de Anthe e Methone são comparáveis as de seus arcos, logo a massa dos outros objetos imersos em seus arcos é desprezível em relação a eles.

Por outro lado, a área normal equivalente do arco do anel G é da ordem de 700 vezes maior do que a de Aegaeon, implicando que este poderia compartilhar o arco com um número significativo de objetos da ordem de 1-100 metros. Estes corpos seriam muito difíceis de serem observados pelas câmeras da sonda Cassini devido ao brilho de fundo no anel G. Este resultado levantou a hipótese de que estes objetos imersos no arco poderiam ser um mecanismo de reposição de poeira no arco devido a colisões entre si e de partículas interplanetárias (HEDMAN et al., 2010).

Assumindo uma composição de gelo (densidade de 0.92 g/cm^3), a massa total destes objetos pode ser estimada a partir dos dados do instrumento LEMMS (*Magnetospheric Imaging Instrument's Low Energy*, em português "Instrumento de Imagem Magnetosférica para Baixas Energias") da Cassini que mede o fluxo de elétrons com energias entre 20 keV e 40 MeV. Este equipamento mediu quedas no fluxo de elétrons com energias entre 1 e 10 MeV no arco do anel G, o que indica que a massa total dos demais corpos imersos no arco seria da ordem de 10^8 à 10^{10} kg, que por sua vez é ordens de grandeza maior do que a do massa total das partículas de poeira (da ordem de 10^5 à 10^6 kg) (HEDMAN et al.,

2007). Além disso, o fato de esta queda ocorrer em uma pequena região (aproximadamente 250 km) indica que esta massa não pode estar concentrada em um único corpo, mas sim distribuída em uma quantidade grande de objetos (HEDMAN et al., 2007).

Por outro lado, Hedman et al. (2010) citam que estes corpos (com diâmetro da ordem de 1 à 100 metros) podem influenciar a dinâmica, bem como colidir com o satélite Aegaeon. As colisões em arcos densos e confinados por ressonâncias de corotação, tendem a aumentar a amplitude de libração das partículas e fazê-las escapar da ressonância pelo fato das colisões dissiparem energia e os pontos estáveis na ressonância de corotação serem locais de energia potencial máxima (Porco (1991); Namouni e Porco (2002)). Entretanto, devido ao fato de o arco possuir apenas um único corpo grande se movendo em um mar de corpo menores, as colisões iriam causar principalmente um decréscimo na inclinação, excentricidade e amplitude de libração de Aegaeon (HEDMAN et al., 2010).

A existência destes demais corpos no arco do anel G, bem como a de um único corpo maior (Aegaeon) indicam que a formação deste sistema possa ter ocorrido devido a uma colisão catastrófica, no qual o satélite Aegaeon seria o maior corpo remanescente (HEDMAN et al., 2010). Uma outra proposta para a formação do arco do anel G foi descrita por Araujo, Neto e Foryta (2016), no qual descrevem a captura por ressonância do arco do anel G durante a migração do satélite Mimas, propondo que o satélite Aegaeon possa ter sido um corpo do Anel A, sendo a mesma teoria válida para os demais arcos de Saturno (de Anthe e Methone).

O objetivo deste trabalho é investigar o comportamento de corpos macroscópicos existentes em arcos planetários, de modo a analisar suas evoluções temporais, bem como suas influências quando um pequeno satélite esta imerso no arco. Além disso, analisar os resultados das colisões analiticamente e verificar se é possível manter a população de poeira via colisões entre os corpos imersos no arco.

Nos capítulos 2 ao 5 serão descritas as introduções teóricas sobre o potencial gravitacional de um corpo não esférico, elementos geométricos, ressonâncias de corotação e de Lindblad e por último serão discutidos os resultados das colisões em função da energia cinética dos corpos envolvidos. Enquanto, no capítulo 6 serão discutidos os resultados obtidos via simulações numéricas de corpos macroscópicos imersos no arco do anel G e no capítulo 7 as considerações finais e trabalhos futuros.

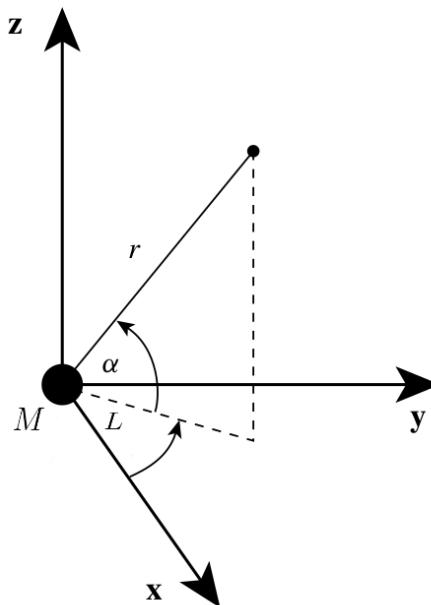
2 POTENCIAL GRAVITACIONAL

Neste capítulo será apresentada a formulação teórica do potencial gravitacional de um corpo não-esférico, bem como os efeitos físicos que ele provoca na órbita de uma partícula que orbita um corpo não-esférico. Ao final do capítulo serão demonstradas as equações que a aceleração da partícula sofre devido ao efeito dos coeficientes J_2 , J_4 e J_6 . Estas acelerações são necessárias devido ao fato de o planeta Saturno possuir estes 3 coeficientes e o pacote de integração numérica REBOUND não conter esta implementação.

2.1 INTRODUÇÃO TEÓRICA

Ao considerar a configuração de equilíbrio da auto-gravidade de um corpo celeste, composto por um fluido incompressível e que possui rotação constante, pode-se inferir que devido ao efeito de rotação este corpo sofre um achatamento dos polos e alongamento do equador, concentrando uma quantidade maior de massa nesta região, obtendo a forma de esferoides oblatos ou elipsoides. Para descrever o potencial gravitacional destes corpos, Murray e Dermott (1999) consideraram uma partícula, orbitando um corpo central de massa M e de raio equatorial R , cujas coordenadas (r , L , α , sendo r é a distância radial, L a longitude e α a latitude do satélite) são definidas em um sistema centrado no centro de massa do planeta Figura (2.1).

Figura 2.1 – Definição do raio r , da longitude L e da latitude α de um objeto orbitando um corpo central de massa M .



fonte: Adaptado de Murray e Dermott (1999).

A partir destas definições é possível mostrar que o potencial gravitacional V sentido pela partícula

pode ser expresso em séries de polinômios de Legendre (P_l):

$$V = -\frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{l=2}^{\infty} J_l \left(\frac{R}{r} \right)^l P_l(\sin \alpha) \right], \quad (2.1)$$

sendo G a constante gravitacional e R o raio equatorial do planeta. Os coeficientes $J_{l,s}$ descrevem a distribuição de massa do corpo e devem ser determinados empiricamente. O termo J_2 é o mais importante e fisicamente está relacionado aos momentos de inércia polar (C) e equatorial (A) do corpo:

$$J_2 = \frac{C - A}{MR^2}. \quad (2.2)$$

Como $P_l(\sin \alpha)$ é uma função ímpar para l ímpar, $J_3 = J_5 = J_7 = \dots = 0$ para um planeta cujos hemisférios norte e sul são simétricos. De fato, isto deve ser razoavelmente válido para todos planetas do Sistema Solar, exceto para a Terra que possui $J_3 \neq 0$.

2.2 EFEITOS DO ACHATAMENTO

Nesta seção será apresentada o desenvolvimento teórico dos elementos orbitais geométricos que serão utilizados para realizar as simulações numéricas. Os cálculos a serem mostrados nesta seção foram baseados no trabalho de Borderies-Rappaport e Longaretti (1994) que descreveram os elementos geométricos até segunda ordem em excentricidade e inclinação. Porém, por simplicidade, neste trabalho será demonstrado o desenvolvimento até a aproximação em primeira ordem com o objetivo de entender os efeitos do achatamento do planeta na órbita da partícula.

Devido ao fato do potencial gravitacional ter simetria azimutal e de que assumir simetria em relação ao plano do Equador ($z \rightarrow -z$) é uma boa aproximação, pode-se definir um potencial em coordenadas cilíndricas $V(r, L, z) = V(r, |z|)$. A partir do gradiente deste potencial são obtidas as equações do movimento da partícula nas direções \hat{r} , $\hat{\phi}$ e \hat{z} :

$$\hat{r} \quad : \quad \ddot{r} - r\dot{L}^2 = \frac{\partial V}{\partial r}, \quad (2.3)$$

$$\hat{L} \quad : \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{L}) = 0, \quad (2.4)$$

$$\hat{z} \quad : \quad \ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2.5)$$

Estas equações admitem duas constantes do movimento, a energia E e a componente vertical do momento angular $H = r^2\dot{L}$, de modo que as soluções mais simples são as órbitas circulares equatoriais:

$$r = r_0, \quad (2.6)$$

$$\frac{dL}{dt} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right]_0^{1/2} = n_0, \quad (2.7)$$

$$z = 0, \quad (2.8)$$

sendo que o índice 0 significa que a expressão é calculada para $r = r_0$ e $z = 0$. A partir das Equações (2.6)-(2.8) pode-se obter soluções com órbitas quase circulares e quase equatoriais, expandindo a posição da partícula da forma:

$$r = r_0 + r_1 + r_2 + r_3 \dots, \quad (2.9)$$

$$L = L_0 + L_1 + L_2 + L_3 \dots, \quad (2.10)$$

$$z = z_1 + z_2 + z_3 \dots \quad (2.11)$$

Para tal expansão, é usual a escolha de r_0 , tal que o momento angular da solução seja igual ao momento angular da órbita circular, ou seja,

$$H = r^2 \frac{dL}{dt} = r_0^2 n_0, \quad (2.12)$$

sendo, n_0 o movimento médio de uma partícula em uma órbita circular de raio r_0 . Utilizando a expansão até primeira ordem ($r = r_0 + r_1$, $L = L_0 + L_1$ e $z = z_1$) é possível obter que:

$$\ddot{r}_1 + \kappa_0^2 r_1 = 0, \quad (2.13)$$

$$\ddot{z}_1 + \nu_0^2 z_1 = 0, \quad (2.14)$$

$$\dot{L}_1 = -2n_0 \frac{r_1}{r_0} \quad (2.15)$$

com:

$$\kappa_0^2 \equiv \frac{3}{r_0} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_0, \quad (2.16)$$

$$\nu_0^2 \equiv \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_0, \quad (2.17)$$

sendo, κ_0 e ν_0 definidos como as frequências epicíclica e vertical, respectivamente. As Equações (2.13) e (2.14) mostram que, r_1 e z_1 se comportam como osciladores harmônicos desacoplados com frequências κ_0 e ν_0 , respectivamente. Assim, somando as soluções para órbita circular mais as correções em primeira ordem, as soluções das Equações (2.3)-(2.4) são dadas por:

$$r = r_0 + r_1 = r_0 [1 - \epsilon \cos \xi], \quad (2.18)$$

$$z = z_1 = r_0 i \sin \zeta, \quad (2.19)$$

$$L = L_0 + L_1 = \gamma + 2 \frac{n_0}{\kappa_0} \epsilon \cos \xi, \quad (2.20)$$

em que ϵ e i , a excentricidade e inclinação epicíclicas, respectivamente, e as três fases γ , ξ e ζ :

$$\gamma = \Theta_0 + nt, \quad (2.21)$$

$$\xi = \Gamma_0 + \kappa t, \quad (2.22)$$

$$\zeta = \Lambda_0 + \nu t \frac{n_0}{\kappa_0} \epsilon \cos \xi, \quad (2.23)$$

onde Θ_0 , Γ_0 e Λ_0 são as constantes arbitrárias de integração, deste modo são obtidos os elementos orbitais geométricos e as frequências epicíclicas n_0 , κ_0 e ν_0 em primeira aproximação.

Borderies-Rappaport e Longaretti (1994) determinaram as frequências n , κ e ν até $\mathcal{O}(e^2)$ e $\mathcal{O}(I^2)$, continuando os cálculos anteriores até r_2 , de forma que

$$\begin{aligned} n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} & \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 J_2 - \frac{15}{16} \left(\frac{R_p}{a} \right)^4 J_4 + \frac{35}{32} \left(\frac{R_p}{a} \right)^6 J_6 \right. \\ & - \frac{9}{32} \left(\frac{R_p}{a} \right)^4 J_2^2 + \frac{45}{64} \left(\frac{R_p}{a} \right)^6 J_2 J_4 + \frac{27}{128} \left(\frac{R_p}{a} \right)^6 J_2^3 \\ & \left. + 3 \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 J_2 e^2 - 12 \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 J_2 I^2 \right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \kappa = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} & \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 J_2 + \frac{45}{16} \left(\frac{R_p}{a} \right)^4 J_4 - \frac{175}{32} \left(\frac{R_p}{a} \right)^6 J_6 \right. \\ & - \frac{9}{32} \left(\frac{R_p}{a} \right)^4 J_2^2 + \frac{135}{64} \left(\frac{R_p}{a} \right)^6 J_2 J_4 - \frac{27}{128} \left(\frac{R_p}{a} \right)^6 J_2^3 \\ & \left. - 9 \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 J_2 I^2 \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\nu = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \left[1 + \frac{9}{4} \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 J_2 - \frac{75}{16} \left(\frac{R_p}{a} \right)^4 J_4 + \frac{245}{32} \left(\frac{R_p}{a} \right)^6 J_6 \right. \quad (2.26)$$

$$\left. - \frac{81}{32} \left(\frac{R_p}{a} \right)^4 J_2^2 + \frac{675}{64} \left(\frac{R_p}{a} \right)^6 J_2 J_4 + \frac{729}{128} \left(\frac{R_p}{a} \right)^6 J_2^3 \right. \quad (2.27)$$

$$\left. + 6 \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 J_2 e^2 - \frac{51}{4} \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 J_2 I^2 \right]. \quad (2.28)$$

Os principais efeitos destas frequências, na órbita da partícula, são os movimentos seculares da longitude do nodo Ω e do pericentro ϖ e os movimentos de curto período. Fisicamente, o movimento do nodo Ω ocorre devido ao aumento da atração gravitacional na região do equador, o que introduz um aumento na componente da força nesta direção. Este incremento aumenta a aceleração resultante na partícula e faz com ela cruze o equador (passe pelo nodo) antes do ponto de cruzamento para um planeta esférico. A órbita então regressa a cada revolução. Já o movimento secular do pericentro

ocorre devido a força resultante não ser mais proporcional ao inverso do quadrado da distância e a órbita, conseqüentemente, não será mais uma elipse fechada. Estes movimentos são denominados frequências de precessão epicíclicas e foram obtidos até $\mathcal{O}(e^2)$ e $\mathcal{O}(i^2)$ por Borderies-Rappaport e Longaretti (1994):

$$\dot{\varpi} = n - \kappa, \quad (2.29)$$

$$\dot{\Omega} = n - \nu \quad (2.30)$$

e com as Equações (2.24)-(2.26) podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} & \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2 + \frac{15}{4} \left(\frac{R_p}{a}\right)^4 J_4 - \frac{105}{16} \left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_6 \right. \\ & + \frac{9}{4} \left(\frac{R_p}{a}\right)^4 J_2^2 - \frac{315}{32} \left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_2 J_4 - \frac{351}{64} \left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_2^3 \\ & \left. - 3 \left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2 e^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2 I^2 \right], \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varpi}{dt} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} & \left[\frac{3}{2} \left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2 - \frac{15}{4} \left(\frac{R_p}{a}\right)^4 J_4 + \frac{105}{16} \left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_6 \right. \\ & - \frac{45}{32} \left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_2 J_4 + \frac{27}{64} \left(\frac{R_p}{a}\right)^6 J_2^3 + 3 \left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2 e^2 \\ & \left. - 3 \left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2 I^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.3 IMPLEMENTAÇÃO DAS FORÇAS NO REBOUND

Nesta seção será apresentada a implementação das forças devido ao achatamento planetário no pacote de integração do REBOUND, fato necessário devido ao objetivo de estudar os arcos de anéis do planeta Saturno, cujos coeficientes J_2 , J_4 e J_6 são significativos e responsáveis por alguns efeitos de ressonâncias (veja Capítulo 4). Para obter as perturbações do achatamento no movimento da partícula, foi utilizada a Equação (2.1) com o termo Newtoniano retirado de modo a computar apenas os efeitos devido aos elementos J_l :

$$V_{J_l} = \frac{GM}{r} \left[\sum_{l=2}^{\infty} J_l \left(\frac{R}{r}\right)^l P_l \left(\frac{z}{r}\right) \right], \quad (2.33)$$

e a partir do operador gradiente foram obtidas as equações do vetor aceleração em coordenadas cartesianas :

$$\ddot{\vec{r}} = -\nabla V_{J_l}, \quad (2.34)$$

sendo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a distância da partícula em relação ao centro de massa do planeta. Assim, a correção na aceleração da partícula, devido aos coeficientes J_2 , J_4 e J_6 , é dada por:

$$a_{J_l}^x = \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} (l+1) J_l \frac{R^l}{r^{l+1}} \left[r P_l \left(\frac{z}{r} \right) - z P_{l+1} \left(\frac{z}{r} \right) \right] \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (2.35)$$

$$a_{J_l}^y = \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} (l+1) J_l \frac{R^l}{r^{l+1}} \left[r P_l \left(\frac{z}{r} \right) - z P_{l+1} \left(\frac{z}{r} \right) \right] \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (2.36)$$

$$a_{J_l}^z = \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} (l+1) J_l \frac{R^l}{r^{l+1}} P_{l+1} \left(\frac{z}{r} \right), \quad (2.37)$$

onde foi utilizada a equação de recorrência para os polinômios de Legendre:

$$(1 - x^2)P_n'(x) = (n+1)[xP_n(x) - P_{n+1}(x)]. \quad (2.38)$$

A partir das expansões das Equações (2.35 - 2.37) e de algumas manipulações algébricas foram introduzidas as correções, até $\mathcal{O}(l = 7)$, na aceleração da partícula, de modo que:

$$a_{J_l}^x = -\frac{GM}{r^3} \left[\frac{3}{2} \left(1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^2 J_2 - \frac{15}{8} \left(1 - 14 \frac{z^2}{r^2} + 21 \frac{z^4}{r^4} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^4 J_4 + \frac{35}{16} \left(1 - 27 \frac{z^2}{r^2} + 99 \frac{z^4}{r^4} - \frac{429}{5} \frac{z^6}{r^6} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^6 J_6 \right] x, \quad (2.39)$$

$$a_{J_l}^y = -\frac{GM}{r^3} \left[\frac{3}{2} \left(1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^2 J_2 - \frac{15}{8} \left(1 - 14 \frac{z^2}{r^2} + 21 \frac{z^4}{r^4} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^4 J_4 + \frac{35}{16} \left(1 - 27 \frac{z^2}{r^2} + 99 \frac{z^4}{r^4} - \frac{429}{5} \frac{z^6}{r^6} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^6 J_6 \right] y, \quad (2.40)$$

$$a_{J_l}^z = -\frac{GM}{r^3} \left[\frac{9}{2} \left(1 - \frac{5}{3} \frac{z^2}{r^2} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^2 J_2 - \frac{75}{8} \left(1 - \frac{14}{3} \frac{z^2}{r^2} + \frac{63}{15} \frac{z^4}{r^4} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^4 J_4 + \frac{245}{16} \left(1 - 9 \frac{z^2}{r^2} + \frac{693}{35} \frac{z^4}{r^4} - \frac{429}{35} \frac{z^6}{r^6} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^6 J_6 \right] z. \quad (2.41)$$

Entretanto, se o objeto perturbado pelo corpo central possuir uma massa significativa em relação

à ele, também deve-se realizar a correção na aceleração do planeta, devido ao fato de que a força resultante do satélite-planeta será diferente. Para estes casos, Brouwer e Clemence (1961) mostram que a correção sobre a aceleração do planeta a_p deve ser:

$$a_p^k = -\frac{m}{M}a_{J_l}^k, \quad (2.42)$$

sendo que o índice k indica a direção k , enquanto m e M as massas do satélite e do planeta, respectivamente.

Para validar os resultados obtidos foram realizadas simulações numéricas com as mesmas condições iniciais no integrador REBOUND (o qual as forças foram inseridas) e no integrador Mercury, o qual implementação já é disponível na literatura (CHAMBERS, 1999). Para realizar os testes foi utilizado o sistema Mimas-Saturno (nas Tabelas (6.1) e (6.3) seguem os elementos orbitais de mimas e os parâmetros físicos de Saturno). Para este sistema foram realizadas 4 simulações em cada integrador, variando a composição de J_n , com o objetivo de comparar as perturbações de cada coeficiente:

1. Simulação utilizando apenas J_2 ,
2. Simulação utilizando apenas J_4 ,
3. Simulação utilizando apenas J_6 ,
4. Simulação com J_2 , J_4 e J_6 combinados.

As simulações foram integradas por 5000 períodos orbitais do satélite Mimas. No pacote Mercury foi utilizado o integrador Bulirsch-Stoer (CHAMBERS, 1999) e no Rebound o integrador IAS15 que é uma melhoria do método de Gauss-Radau (REIN; SPIEGEL, 2015; EVERHART, 1985). Nos gráficos a seguir serão apresentados apenas os resultados para os últimos 1000 períodos orbitais com o objetivo de facilitar a comparação. No texto será mostrado o resultado apenas da última simulação, enquanto as demais estarão disponíveis no Apêndice A.

Com o objetivo de validar o código, as taxas de precessão nodal e do pericentro foram calculadas a partir dos resultados teóricos (Eqs. 2.31 - 2.32) e as taxas dos integradores calculadas numericamente via método da derivada da função. Os valores obtidos estão apresentados na Tabela 2.1:

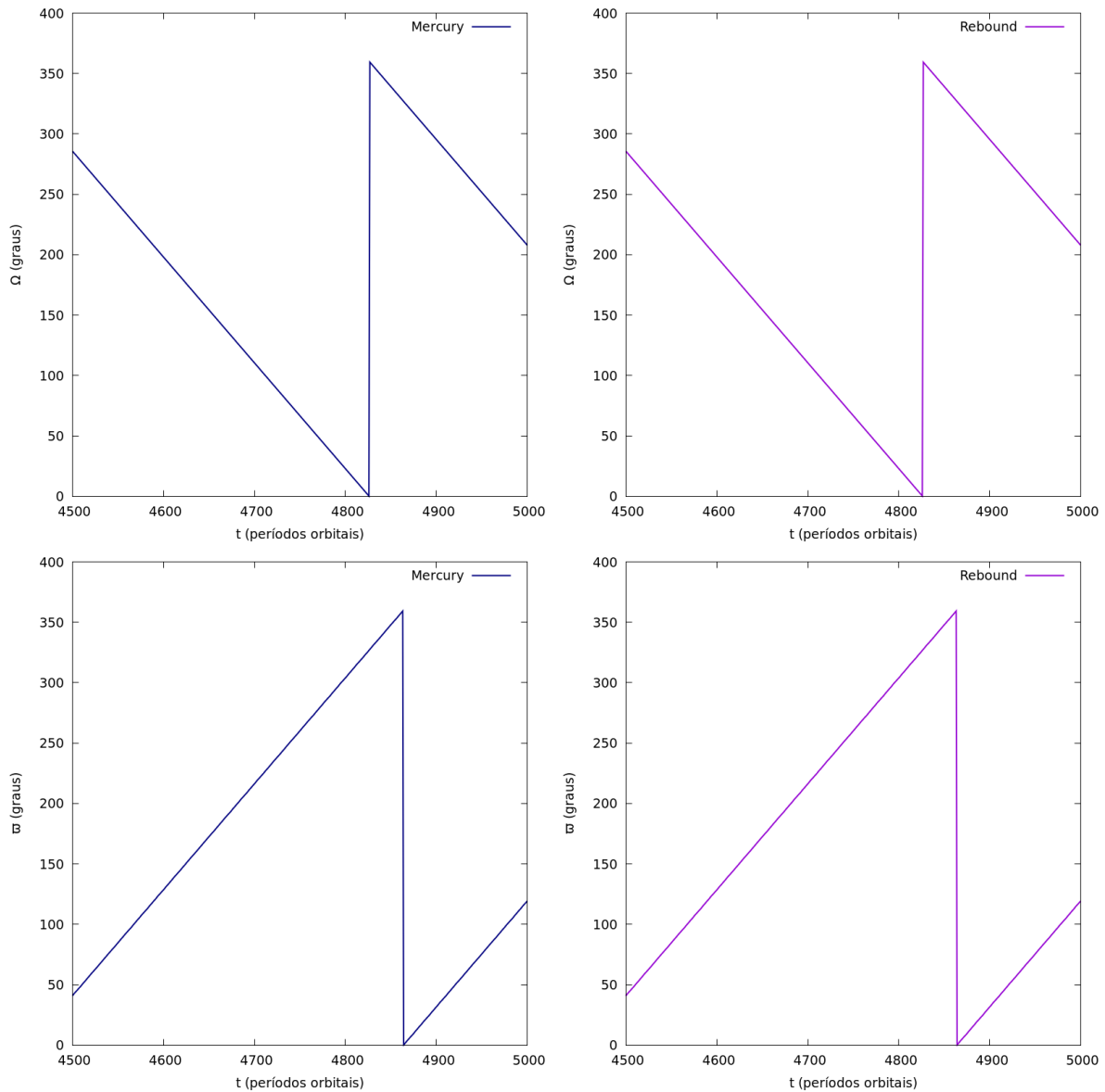
Tabela 2.1 – Cálculo das Taxas de Precessão do Nodo e do Pericentro, os índices R , M e T significam que elas foram calculadas pelos dados das integrações do REBOUND e do Mercury, e pelas Equações (2.31)-(2.32) de Borderies-Rappaport e Longaretti (1994)

J_n	Ω_R (°/ano)	Ω_M (°/ano)	Ω_T (°/ano)	ϖ_R (°/ano)	ϖ_M (°/ano)	ϖ_T (°/ano)
J_2	-0.91654	-0.91652	-0.91649	0.91770	0.91770	0.91766
J_4	-0.01250	-0.01252	-0.01254	0.01251	0.01252	0.01254
J_6	-0.00024	-0.00025	-0.00024	0.00024	0.00024	0.00024
$J_2, J_4 J_6$	-0.92946	-0.92947	-0.92943	0.93069	0.93070	0.93066

Na Figura 2.3 são apresentadas as variações de a , e e I em função do tempo para ambas simulações. É importante notar que a evolução temporal dos ângulos não coincidem exatamente para ambos os gráficos devido ao fato de ambos passos de saída serem variáveis e portanto, ambos tempos de saída

não correspondentes. Contudo, para todos elementos orbitais é observado o mesmo comportamento periódico, bem como os valores máximos e mínimos são compatíveis. Já na Figura 2.2 é verificado que as precessões do nodo e do pericentro estão coerentes em ambos os pacotes de integração, Mercury (Bulirsch-Stoer) e REBOUND (IAS15), fato já verificado a partir do cálculo das taxas de precessões (Tab. 2.1).

Figura 2.2 – Precessão de Ω e ϖ devido ao efeito dos coeficientes J_2 , J_4 e J_6 de Saturno. À esquerda seguem os resultados obtidos via simulação numérica realizada no pacote de integração do Mercury e a direita do REBOUND.

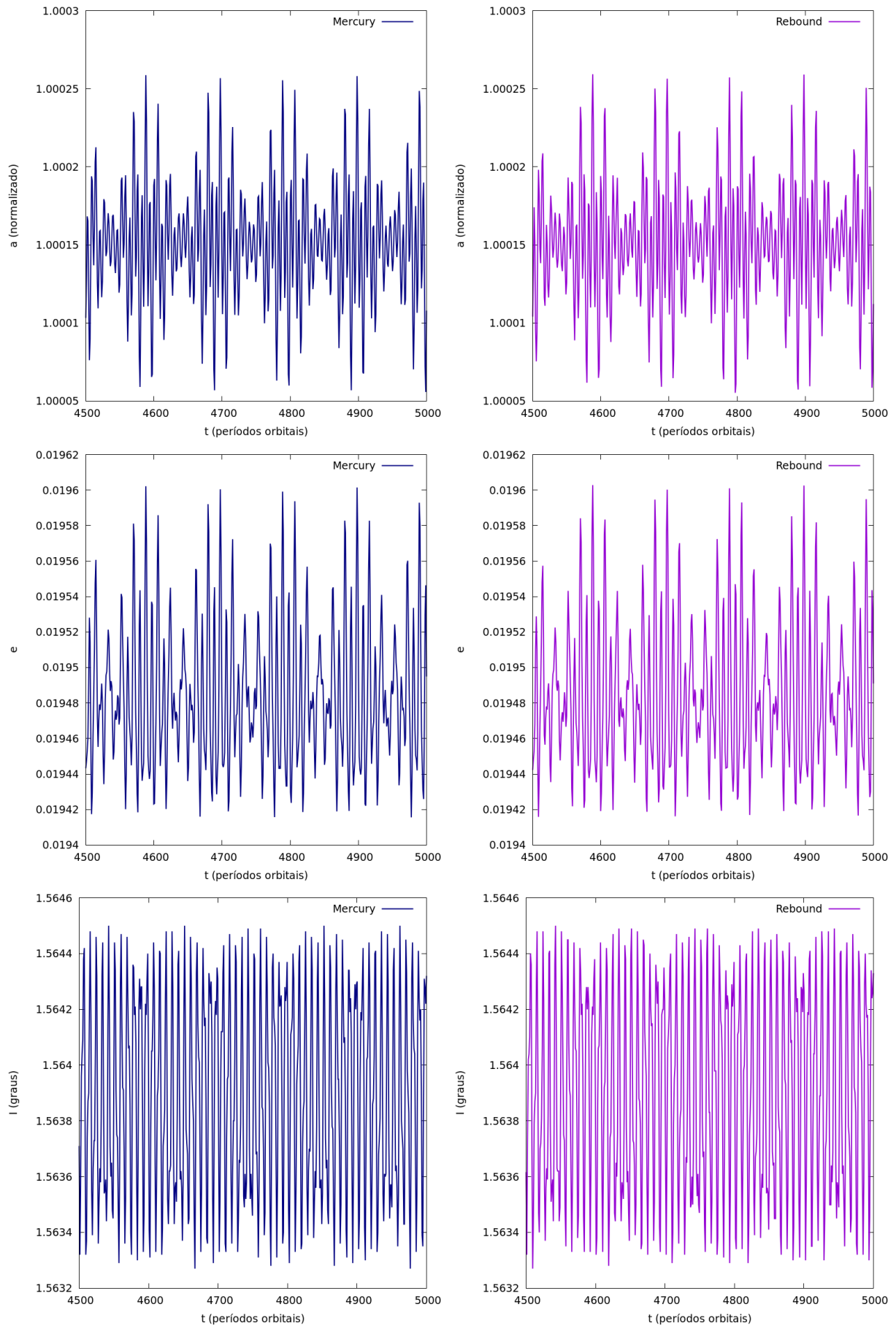


fonte: Produção do próprio autor.

A partir destes resultados foi verificada que a implementação dos coeficientes J_2 , J_4 e J_6 no pacote REBOUND corrobora com os resultados obtidos a partir do pacote Mercury e com os dados teóricos. Os resultados apresentados nesta seção foram obtidos com base no trabalho de Buzzatto (), de modo que os resultados foram compartilhados e trabalhados de forma conjunta com os autores. No próximo capítulo serão apresentados os elementos orbitais geométricos que são necessários para corrigir os

efeitos dos coeficientes J_n e determinar a posição correta dos corpos, uma vez que estes situam-se em uma ressonância.

Figura 2.3 – Variação de a , e , I do satélite Mimas em função do tempo devido ao efeito dos coeficientes J_2 , J_4 e J_6 de Saturno. À esquerda seguem os resultados obtidos via simulação numérica realizada no pacote de integração do Mercury e a direita do REBOUND.



fonte: Produção do próprio autor.

3 ELEMENTOS ORBITAIS GEOMÉTRICOS

Como apresentado no capítulo anterior, os coeficientes J_2 , J_4 e J_6 causam variações nos elementos orbitais devido à distribuição não uniforme de massa do planeta. Além disso, usualmente os integradores numéricos realizam a conversão de elementos orbitais para vetores de estado via problemas de dois corpos tratando o corpo central como um objeto pontual. Deste modo, foram introduzidos os elementos orbitais geométricos que realizam esta conversão considerando os coeficientes J_n .

A partir de observações empíricas, o conceito de *streamlines* foi desenvolvido com objetivo de descrever a dinâmica encontrada em galáxias e anéis planetários. A equação que descreve este movimento é dada por:

$$r = a[1 - e \cos(m\Phi - m\beta)], \quad (3.1)$$

sendo r o raio orbital do anel, m o número de onda azimutal (inteiro), β o ângulo de fase e φ a longitude no referencial girante que possui velocidade característica Ω_p , esta relacionada a longitude verdadeira (θ) no referencial inercial via $\Phi = \theta - \Omega_p t$ (BORDERIES-RAPPAPORT; LONGARETTI, 1994). Os elementos orbitais que resultam a partir dos ajustes dos dados observacionais, através da Equação 3.1, são denominados elementos orbitais geométricos ou epicíclicos (RENNER; SICARDY, 2006).

Para demonstrar a importância dos elementos geométricos no estudo de anéis planetários e o fato de que estes são relevantes para os estudos teóricos e observacionais, Longaretti (2016) cita que:

- As trajetórias das partículas que possuem órbitas circulares ao redor de um planeta achatado são descritas pela simples equação $r = a$ no formalismo descrito pela Equação (3.1). No entanto, para o caso de elementos orbitais osculadores, eles irão possuir uma excentricidade $e_0 \sim (3/2)J_2(R/r)^2$. Isto é importante pois o uso dos elementos orbitais osculares implicaria em excentricidades muito maiores do que aquelas presentes no anel. Similarmente, o semi-eixo maior osculador, $a_0 \sim r[1 + (3/2)J_2(R/r)^2]$, em valor absoluto, é consideravelmente diferente de seus valores médios r descritos pelos ajustes dos dados observados. Além disso, para partículas excêntricas, os elementos osculadores exibem grandes variações de curto período devido ao achatamento, enquanto os elementos geométricos possuem variações ordens de grandeza menores, e em sua maioria desprezíveis.
- Como já apresentado, os elementos epicíclicos apresentam uma menor variação de curto período do que os elementos elípticos devido ao fato de não considerarem a não-esfericidade do planeta e definir a velocidade correta para manter a partícula na posição desejada.

Estes argumentos, e enfatizando o fato de que os elementos geométricos são obtidos de modo empírico, mostram que os elementos geométricos constituem uma boa aproximação e são as ferramentas mais adequadas para o estudo da dinâmica de anéis planetários. Devido a isto, para estudar Aegaeon e o anel G foi necessária a utilização destes elementos durante o projeto de pesquisa e para isso foram

desenvolvidas rotinas numéricas que realizam a conversão de elementos geométricos para vetores de estados (posição e velocidade), e vice-versa, para realizar as integrações numéricas.

3.1 CONVERSÃO

Como citado anteriormente, devido ao fato dos coeficientes harmônicos zonais do planeta causarem perturbações nos elementos orbitais das partículas do anel, foram desenvolvidos programas de conversões que relacionam os elementos geométricos e os vetores de estado de acordo com o trabalho de Renner e Sicardy (2006). Estes programas foram escritos em linguagem C e adaptados ao pacote REBOUND, de maneira que serão incluídos no pacote de bibliotecas desenvolvido para o estudo de anéis planetários neste integrador numérico.

3.1.1 Conversão de Elementos Geométricos para Vetores de Estado

As transformações de elementos geométricos para vetores de estado ocorrem via aplicação direta das Equações (3.2-3.7), em coordenadas cilíndricas, de modo que $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ é o vetor estado da partícula em sistema cartesiano e as coordenadas cilíndricas definidas por $\vec{v} = \vec{v}(r, L, z, \dot{r}, \dot{L}, \dot{z})$ (RENNER; SICARDY, 2006). Logo,

$$x = r \cos L, \quad (3.2)$$

$$y = r \sin L, \quad (3.3)$$

$$z = z, \quad (3.4)$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos L - r \dot{L} \sin L, \quad (3.5)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin L + r \dot{L} \cos L, \quad (3.6)$$

$$\dot{z} = \dot{z}, \quad (3.7)$$

que estão relacionadas aos elementos geométricos através de

$$r = a \left[1 - e \cos(\lambda - \varpi) + e^2 \left(\frac{3}{2} \frac{\eta^2}{\kappa^2} - 1 + \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \cos 2(\lambda - \varpi) \right) + I^2 \left(\frac{3}{4} \frac{\chi^2}{\kappa^2} - 1 + \frac{\chi^2}{4\alpha^2} \cos 2(\lambda - \Omega) \right) \right], \quad (3.8)$$

$$L = \lambda + 2e \frac{n}{\kappa} \sin(\lambda - \varpi) + e^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \right) \frac{n}{\kappa} \sin 2(\lambda - \varpi) - I^2 \frac{\chi^2}{4\alpha^2} \frac{n}{\nu} \sin 2(\lambda - \Omega), \quad (3.9)$$

$$z = aI \left[\sin(\lambda - \Omega) + e \frac{\chi^2}{2\kappa\alpha_1} \sin(2\lambda - \varpi - \Omega) - e \frac{3}{2} \frac{\chi^2}{\kappa\alpha_2} \sin(\varpi - \Omega) \right], \quad (3.10)$$

$$\dot{r} = a\kappa \left[e \sin(\lambda - \varpi) + e^2 \frac{\eta^2}{\kappa^2} \sin 2(\lambda - \varpi) - I^2 \frac{\chi^2 \nu}{2\alpha^2 \kappa} \sin 2(\lambda - \Omega) \right], \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{L} = n \left[1 + 2e \cos(\lambda - \varpi) + e^2 \left(\frac{7}{2} - 3 \frac{\eta^2}{\kappa^2} - \frac{\kappa^2}{2n^2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{\eta^2}{\kappa^2} \right) \cos 2(\lambda - \varpi) \right) \right. \\ \left. + I^2 \left(2 - \frac{\kappa^2}{2n^2} - \frac{3}{2} \frac{\chi^2}{2\kappa^2} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} \cos 2(\lambda - \Omega) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\dot{z} = aI\nu \left[\cos(\lambda - \Omega) + e \frac{\chi^2(\kappa + \nu)}{2\kappa\alpha_1\nu} \cos(2\lambda - \varpi - \Omega) + e \frac{3}{2} \frac{\chi^2(\kappa - \nu)}{\kappa\alpha_2\nu} \cos(\varpi - \Omega) \right], \quad (3.13)$$

e para segunda ordem em excentricidade e inclinação, as frequências η , χ , α_1 , α_2 e α são dadas por

$$\eta^2 = \frac{GM_p}{a^3} \left[1 - 2 \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 J_2 + \frac{75}{8} \left(\frac{R_p}{a} \right)^4 J_4 - \frac{175}{8} \left(\frac{R_p}{a} \right)^6 J_6 \right], \quad (3.14)$$

$$\chi^2 = \frac{GM_p}{a^3} \left[1 + \frac{15}{2} \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 J_2 - \frac{175}{8} \left(\frac{R_p}{a} \right)^4 J_4 + \frac{735}{16} \left(\frac{R_p}{a} \right)^6 J_6 \right], \quad (3.15)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}(2\nu + \kappa), \quad (3.16)$$

$$\alpha_2 = 2\nu - \kappa, \quad (3.17)$$

$$\alpha^2 = \alpha_1\alpha_2. \quad (3.18)$$

Com isso têm-se as Equações (3.8) - (3.13) expandidas até segunda ordem em excentricidade e inclinação. As frequências κ , ν , η , χ , α_1 , α_2 e α contém alguns termos derivados da expansão do potencial gravitacional. Em particular, κ é a frequência epicíclica horizontal que caracteriza oscilações radiais ao redor do movimento circular e ν é a frequência epicíclica vertical que corresponde as oscilações verticais, ambas descritas no Capítulo 2. Como esperado, todas as frequências se reduzem ao movimento médio Kepleriano $\sqrt{\frac{GM_p}{a^3}}$ para um planeta esférico, ou seja, se $J_n = 0$.

3.1.2 Conversão de Vetores de Estado para Elementos Geométricos

Para realizar a conversão de vetores de estado para elementos geométricos é necessária a utilização de um método numérico iterativo (RENNER; SICARDY, 2006). A partir das coordenadas cilíndricas da partícula temos que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3.19)$$

$$L = \arctan(y/x), \quad (3.20)$$

$$z = z, \quad (3.21)$$

$$\dot{r} = \dot{x} \cos L + \dot{y} \sin L, \quad (3.22)$$

$$\dot{L} = (-\dot{x} \sin L + \dot{y} \cos L)/r. \quad (3.23)$$

$$\dot{z} = \dot{z}. \quad (3.24)$$

Note que, a longitude L é definida de $[0, 2\pi]$, enquanto o $\arctan(L)$ de $]-\pi/2, \pi/2[$. Logo, para adequar o domínio e imagem desta função deve-se utilizar as seguintes definições:

$$L = \arctan(y/x) + \pi \quad x < 0, \quad (3.25)$$

$$L = \arctan(y/x) + 2\pi \quad \arctan(y/x) < 0, \quad (3.26)$$

$$L = \pi/2 \quad x = 0 \quad y > 0, \quad (3.27)$$

$$L = 3\pi/2 \quad x = 0 \quad y < 0. \quad (3.28)$$

As transformações descritas pelas Equações (3.8) - (3.13) podem ser escritas como:

$$r = a[1 - e \cos(\lambda - \varpi)] + r_c, \quad (3.29)$$

$$L = \lambda + 2e \frac{n}{\kappa} \sin(\lambda - \varpi) + L_c, \quad (3.30)$$

$$z = aI \sin(\lambda - \Omega) + z_c, \quad (3.31)$$

$$\dot{r} = ae\kappa \sin(\lambda - \varpi) + \dot{z}_c, \quad (3.32)$$

$$\dot{L} = n[1 + 2e \cos(\lambda - \varpi)] + \dot{L}_c, \quad (3.33)$$

$$\dot{z} = aI\nu \cos(\lambda - \Omega) + \dot{z}_c, \quad (3.34)$$

sendo que $r_c, L_c, z_c, \dot{r}_c, \dot{L}_c, \dot{z}_c$ contém os termos de segunda ordem em excentricidade e inclinação:

$$r_c = ae^2 \left[\frac{3\eta^2}{2\kappa^2} - 1 + \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \cos 2(\lambda - \varpi) \right] + aI^2 \left[\frac{3\chi^2}{4\kappa^2} - 1 + \frac{\chi^2}{4\alpha^2} \cos 2(\lambda - \Omega) \right], \quad (3.35)$$

$$L_c = e^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \right) \frac{n}{\kappa} \sin 2(\lambda - \varpi) - I^2 \frac{\chi^2}{4\alpha^2} \frac{n}{\nu} \sin 2(\lambda - \Omega), \quad (3.36)$$

$$z_c = aIe \left[\frac{\chi^2}{2\kappa\alpha_1} \sin(2\lambda - \varpi - \Omega) - \frac{3}{2} \frac{\chi^2}{\kappa\alpha_2} \sin(\varpi - \Omega) \right], \quad (3.37)$$

$$\dot{r}_c = ae^2 \frac{\eta^2}{\kappa^2} \sin 2(\lambda - \varpi) - aI^2 \frac{\chi^2}{2\alpha^2} \frac{\nu}{\kappa} \sin 2(\lambda - \Omega), \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \dot{L}_c = e^2 n \left[\frac{7}{2} - 3 \frac{\eta^2}{\kappa^2} - \frac{\kappa^2}{2n^2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{\eta^2}{\kappa^2} \right) \cos 2(\lambda - \varpi) \right] \\ + I^2 n \left[\left(2 - \frac{\kappa^2}{2n^2} - \frac{3}{2} \frac{\chi^2}{2\kappa^2} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} \cos 2(\lambda - \Omega) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\dot{z}_c = aIe \left[\frac{\chi^2(\kappa + \nu)}{2\kappa\alpha_1\nu} \cos(2\lambda - \varpi - \Omega) + \frac{3}{2} \frac{\chi^2(\kappa - \nu)}{\kappa\alpha_2\nu} \cos(\varpi - \Omega) \right]. \quad (3.40)$$

Os elementos geométricos podem ser calculados a partir das posições e velocidades das partículas teste:

$$a = \frac{r - r_c}{1 - \frac{\dot{L} - \dot{L}_c - n}{2n}}, \quad (3.41)$$

$$e = \sqrt{\left(\frac{\dot{L} - \dot{L}_c - n}{2n} \right)^2 + \left(\frac{\dot{r} - \dot{r}_c}{a\kappa} \right)^2}, \quad (3.42)$$

$$I = \sqrt{\left(\frac{\dot{L} - \dot{L}_c - n}{2n} \right)^2 + \left(\frac{\dot{r} - \dot{r}_c}{a\kappa} \right)^2}, \quad (3.43)$$

$$\lambda = L - L_c - 2 \frac{n}{\kappa} \frac{\dot{r} - \dot{r}_c}{a\kappa}, \quad (3.44)$$

$$\tan(\lambda - \varpi) = \frac{\dot{r} - \dot{r}_c}{a\kappa \left(1 - \frac{r - r_c}{a} \right)}, \quad (3.45)$$

$$\tan(\lambda - \Omega) = \nu \frac{z - z_c}{\dot{z} - \dot{z}_c}. \quad (3.46)$$

Os elementos a , e , I , λ , ϖ e Ω são calculados a partir das Equações (3.41) - (3.46) através de um método iterativo:

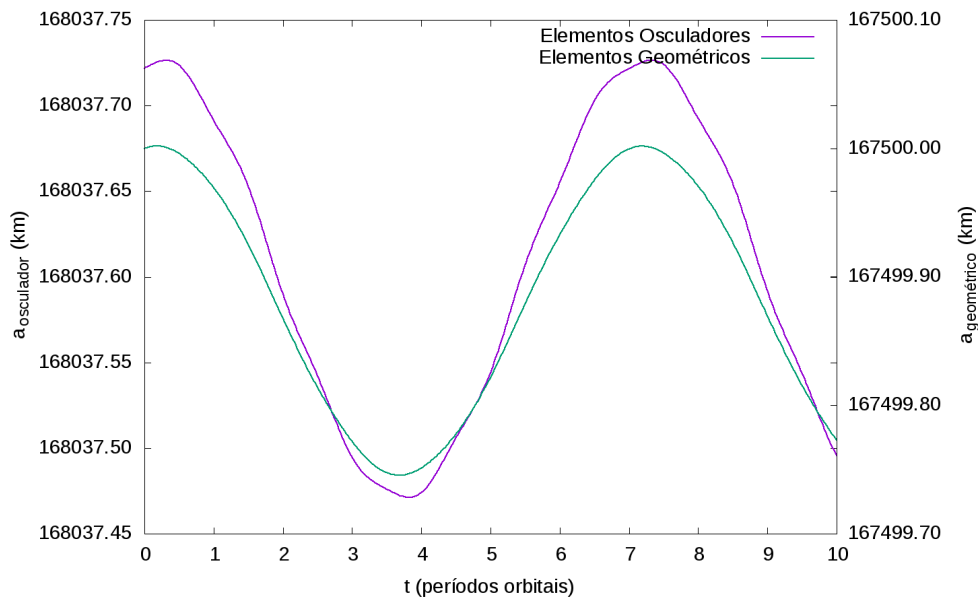
- Primeiro é assumido que $a = r$, $e = I = 0$ e $r_c = L_c = z_c = \dot{r}_c = \dot{L}_c = \dot{z}_c = 0$.
- Calculam-se todas as frequências (Eqs. 2.24 - 2.26 e Eqs. 3.14-3.18) que irão gerar os novos valores para os elementos geométricos (Eqs. 3.41-3.46) e para r_c , L_c , z_c , \dot{r}_c , \dot{L}_c , \dot{z}_c (Eqs. 3.35 - 3.40). Note que os ângulos ϖ e Ω devem ser modificados, assim como em ocorreu para a longitude L , para que eles possam ser calculados através da função arctan (Eqs. 3.45 - 3.46).
- Novamente são calculadas as frequências (Eqs. 2.24 - 3.18), os elementos geométricos (Eqs. 3.41 - 3.46), os termos de segunda ordem (Eqs. 3.35 - 3.40), até a iteração convergir na precisão desejada.
- Para parar a iteração e obter os elementos orbitais, foi utilizada a precisão no semi-eixo maior $|a_{i+1} - a_i| < \epsilon$, sendo ϵ é pré-determinado, e a_i é o i -ésimo valor do semi-eixo maior calculado na iteração.

3.2 TESTE PARA VALIDAR O CÓDIGO

Nesta seção serão ilustrados os problemas da não utilização dos elementos geométricos, bem como um dos testes realizados para a validação dos códigos escritos. Para isto foi realizada uma simulação numérica com uma partícula situada no anel G com semi-eixo maior de 167500 km e demais elementos orbitais da ordem de 10^{-6} .

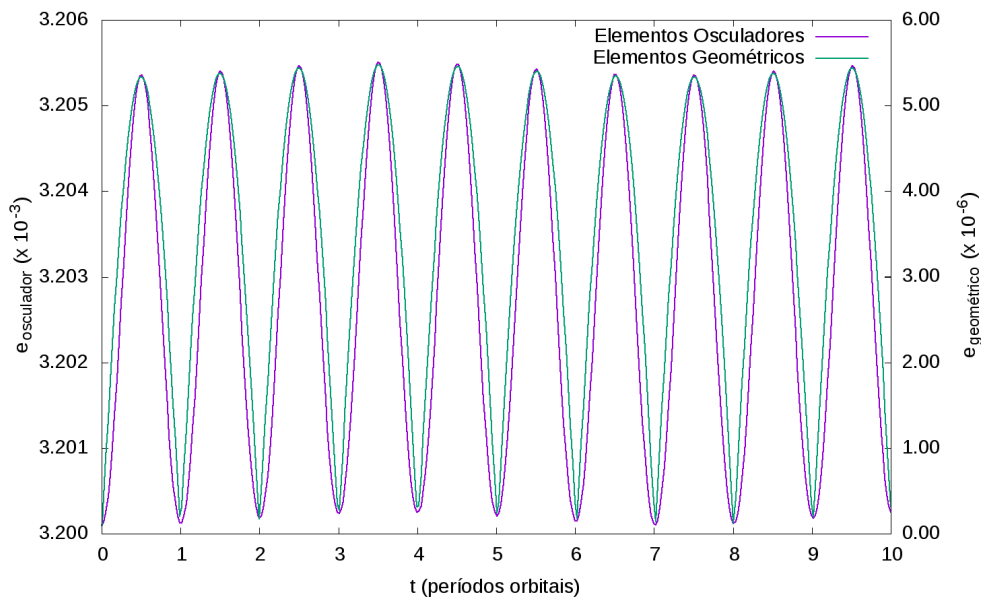
Na Figura 3.1 é mostrada a diferença dos semi-eixos maiores osculador e geométrico. Em primeira aproximação, o valor osculador obtido deve ser da ordem de $a_0 \sim r[1 + (3/2)J_2(R_p/r)^2]$, o que resulta um semi-eixo maior de aproximadamente 168030 km, coerente com o apresentado na simulação. De modo análogo, a excentricidade osculadora, em primeira aproximação, é da ordem de $e_0 \sim (3/2)J_2(R_p/r)^2$, o que corresponde a uma excentricidade de aproximadamente 0.003 conferindo o apresentado na Figura 3.2.

Figura 3.1 – Variação dos semi-eixos maior osculador e geométrico, em função do tempo, de uma partícula localizada no anel G.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 3.2 – Variação das excentricidades osculadora e geométrica, em função do tempo, de uma partícula localizada no anel G.

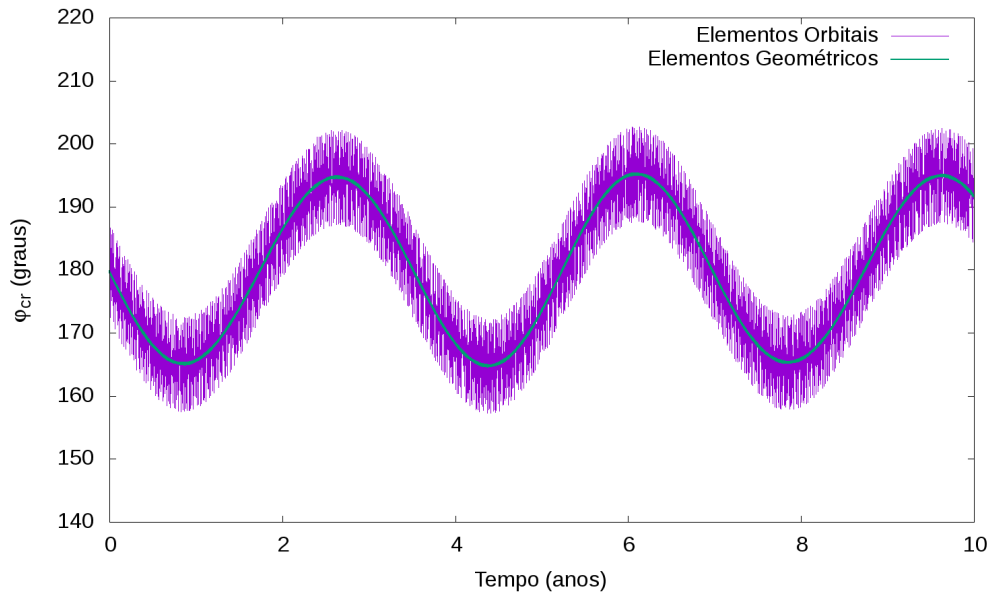


fonte: Produção do próprio autor.

Com o objetivo de apresentar o efeito das oscilações de curto período foi analisado o ângulo ressonante do sistema Mimas-Aegaeon ($\phi = 7\lambda_M - 6\lambda_A - \varpi_M$) a partir dos elementos orbitais osculadores e geométricos (Fig. 3.3). Observa-se claramente o efeito do curto período, corroborando o fato de que quando o corpo central é oblato os elementos osculadores exibem significantes oscilações, enquanto os elementos geométricos também possuem oscilações, porém de amplitude muito menor.

Por fim, os elementos orbitais geométricos são importantes para o estudo de anéis planetários devido ao fato de possuírem menores perturbações de curto período. Além disso, a partir do ângulo

Figura 3.3 – Variação do ângulo ϖ_{cr} de Mimas-Aegaeon calculado em termos dos elementos osculadores e elementos geométricos em função do tempo.



fonte: Produção do próprio autor.

ressonante é verificada a condição da partícula estar ou não confinado em ressonância com um satélite, analisando a condição deste ângulo estar librando ou circulando ao redor de um ângulo fixo (veja Seção 6.1). No próximo capítulo será apresentada a introdução teórica das ressonâncias de corotação e de Lindblad que serão estudadas com o objetivo de compreender a dinâmica ocorrida em arcos de anéis planetários.

4 RESSONÂNCIA EM ANÉIS PLANETÁRIOS

Neste capítulo será estudada a teoria das ressonâncias encontradas em anéis planetários que orbitam um corpo central achatado. Os cálculos descritos neste capítulo foram baseados, e podem ser encontrados em mais detalhes, em Murray e Dermott (1999). Estes conceitos serão utilizados para análise das ressonâncias do arco do anel G e do satélite Aegaeon com Mimas.

Considere o efeito gravitacional de um satélite perturbador externo, de massa m' com os elementos orbitais e frequências indicados pelo subscrito linha, e uma partícula perturbada de elementos orbitais sem subscrito, ambos orbitando um corpo central de massa M . A função perturbadora R , que descreve o potencial do satélite perturbador pode ser expressa em termos de uma expansão em função de seus elementos orbitais, de modo que:

$$R = \mu' \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l S_{l,m}(a, a', e, e', I, I') \cos \varphi \quad (4.1)$$

com

$$\varphi = (l - 2p' + q')\lambda' - (l - 2p + q)\lambda - q'\varpi' + q\varpi + (m - l + 2p')\Omega' - (m - l + 2p)\Omega, \quad (4.2)$$

sendo $\mu' = Gm'$, $S_{l,m}$ dependente dos elementos orbitais e l, p, q, m, p', q' números inteiros. Para cada argumento φ da expansão, a frequência padrão Ω_p é definida como a frequência angular do referencial girante no qual o ângulo ressonante (φ) é estacionário. Isto irá depender da exata combinação das frequências n', κ' e ν' , relacionadas por:

$$m\Omega_p = mn' + k\kappa' + p\nu' \quad (4.3)$$

ou, utilizando as relações $k' = n' - \dot{\varpi}'$ e $\nu' = n' - \dot{\Omega}'$:

$$m\Omega_p = (m + k + p)n' - k\dot{\varpi}' - p\dot{\Omega}', \quad (4.4)$$

sendo m, k e p inteiros e m não negativo. As ressonâncias mais fortes ocorrem quando:

- um múltiplo inteiro da diferença entre n e Ω_p é igual a zero (ressonância de corotação)
- um múltiplo inteiro da diferença entre n e Ω_p é igual às frequências de oscilação radial (κ) e vertical (ν) da partícula do anel (ressonâncias excêntrica (ou Lindblad) e vertical, respectivamente).

4.1 RESSONÂNCIA DE CORROTAÇÃO

A ressonância de corrotação ocorre quando a frequência padrão (Ω_p) coincide com a frequência orbital (n) da partícula, ou seja:

$$m(n - \Omega_p) = 0 \quad (4.5)$$

e a partir da definição de Ω_p a Equação (4.5) pode ser expressa como:

$$(m + k + p)n' - mn - k\dot{\varpi}' - p\Omega' = 0. \quad (4.6)$$

Dada a definição da longitude média

$$\lambda = n(t - t_0) + \epsilon, \quad (4.7)$$

sendo, t_0 o tempo de referência e ϵ a longitude média da época, e a definição de $\dot{\varphi} = 0$ para a localização exata da ressonância (ignorando a variação de ϵ no tempo) é possível mostrar que o ângulo ressonante de corrotação (φ_{cr}) é definido por:

$$\varphi_{cr} = (m + k + p)\lambda' - m\lambda - k\varpi' - p\Omega' \quad (4.8)$$

ou, de modo mais usual:

$$\varphi_{cr} = j\lambda' - (k + p - j)\lambda - k\varpi' - p\Omega', \quad (4.9)$$

com $j = m + k + p$, de modo que os coeficientes dos ângulos satisfazem a relação de d'Alembert

$$\sum j_i = 0. \quad (4.10)$$

O fato da longitude do pericentro da partícula e da longitude do nodo ascendente da partícula do anel não estarem explícitas na Equação (4.9) implica que, a partir das equações de Lagrange (veja o capítulo 6.8 de Murray e Dermott, 1999), apenas o semi-eixo maior das partículas será afetado devido a ressonância de corrotação. Além disso, ao utilizar a definição da ressonância de corrotação e do ângulo ressonante descritos nas Equações (4.6) - (4.9), o ângulo ressonante pode ser reescrito de acordo com a seguinte equação:

$$\varphi_{cr} = -m(\lambda - \Omega_p t) + constante, \quad (4.11)$$

de modo a obter m pontos de equilíbrio no referencial que gira com velocidade angular Ω_p , e por consequência, o anel terá m sítios ressonantes.

Ademais, o valor da sua largura (W_{cr}) que pode ser obtida a partir do modelo de pêndulo para ressonâncias (veja Capítulo 8.6 de Murray e Dermott (1999)) e pode ser escrita como:

$$W_{cr} = 8 \left(\frac{a_{cr}|R|}{3GM} \right)^{1/2} a_{cr}, \quad (4.12)$$

onde, a_{cr} representa a localização exata do semi-eixo maior da ressonância de corotação. Note que os resultados descritos nesta seção valem para o caso de um perturbador externo (como é o caso do sistema do anel G e Mimas). No entanto, o caso interno pode ser facilmente obtido fazendo pequenas alterações nas notações utilizadas.

4.2 RESSONÂNCIA EXCÊNTRICA (DE LINDBLAD) E VERTICAL

De modo análogo, as ressonâncias excêntrica e vertical ocorrem quando a frequência padrão do potencial perturbador coincide com as frequências radial e vertical, respectivamente. Logo,

$$m(n - \Omega_p) = \pm\kappa, \quad (\text{ressonância de Lindblad}) \quad (4.13)$$

$$m(n - \Omega_p) = \pm\nu, \quad (\text{ressonância vertical}) \quad (4.14)$$

sendo que os sinais superiores e inferiores correspondem as ressonâncias internas e externas, respectivamente. A partir do mesmo processo utilizado anteriormente é possível mostrar que:

$$\varphi_{rL} = j\lambda' - (k + p \pm 1 - j)\lambda - k\varpi' \mp \varpi - p\Omega' \quad (4.15)$$

$$\varphi_{rv} = j\lambda' - (k + p \pm 1 - j)\lambda - k\varpi' - p\Omega' - \mp\Omega \quad (4.16)$$

com $j = m + k + p$, nos quais φ_{rL} e φ_{rv} representam os ângulos ressonantes das ressonâncias de Lindblad e vertical, respectivamente. Para compreender o conceito da ressonância de Lindblad é fundamental a utilização do conceito de *streamline* descrito no Capítulo 3. Para primeira ordem em excentricidade a equação do *streamline* é dada por:

$$r = a[1 - e \cos(\theta - \varpi)], \quad (4.17)$$

sendo θ a longitude verdadeira. Como $\dot{\theta} = n$ e $\dot{\varpi} = n - \kappa$, a Equação (4.13) pode ser reescrita como:

$$m \frac{d}{dt}(\theta - \Omega_p t) = \pm \frac{d}{dt}(\theta - \varpi) \quad (4.18)$$

e ao integrar a Equação (4.18) é encontrado que:

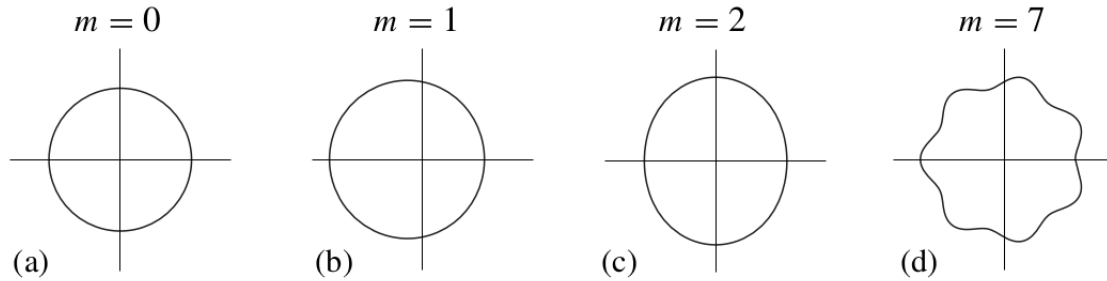
$$m(\theta - \Omega_p t) = \theta - \varpi + \text{constante}. \quad (4.19)$$

Utilizando a mesma definição do Capítulo 3 é possível demonstrar que os caminhos, ou *streamlines*, das partículas são descritos pela equação:

$$r = a[1 - e \cos(m\Phi - m\beta)]. \quad (4.20)$$

Na Equação 4.1 são apresentados os *streamlines* obtidos para $m = 0$ (circunferência), $m = 1$ (elipse com um dos focos na origem), $m = 2$ (elipse centrada na origem) e $m = 7$ (circunferência com 7 lóbulos).

Figura 4.1 – *streamlines* obtidos para (a) $m = 0$, $\Omega_p = k\kappa'$, (b) $m = 1$, $\Omega_p = n' + k\kappa'$, (c) $m = 2$, $\Omega_p = n' + (k/2)\kappa'$, e (d) $m = 7$, $\Omega_p = n' + (k/7)\kappa'$, onde foi utilizado o mesmo valor de a em todos os casos e um valor de $e = 0.08$ em (a),(c) e (d) e de $e = 0.2$ em (b).



fonte: Murray e Dermott (1999).

O principal efeito da ressonância de Lindblad é induzir uma excentricidade e_f forçada nas partículas do anel que pode ser calculada como ((MURRAY; DERMOTT, 1999)):

$$e_f = \left| \frac{n\alpha(m'/M)f_d}{[jn' - (j-1)n]} \right|, \quad (4.21)$$

sendo, $\alpha = a_{Lr}/a'$, $f_d = (1/2)[-2j - \alpha D]b_{1/2}^{(j)}$, $D = \frac{d}{d\alpha}$, e b_i^j os coeficientes de Laplace (veja Tabela 8.1 de Murray e Dermott (1999)). É interessante notar que o valor da excentricidade forçada diminui em função da distância do valor exato da ressonância causando o efeito de espalhamento radial das partículas do anel.

A partir da excentricidade forçada e do valor do semi-eixo maior para a localização exata da ressonância (a_{Lr}) é possível obter a largura da ressonância de Lindblad ($W_{Lr,0}$) para o caso de $k = p = 0$ ((MURRAY; DERMOTT, 1999)):

$$W_{Lr,0} = 4a_{Lr} \left[\frac{2\alpha(m'/M)|f_d|}{3(j-1)} \right]^{1/2}, \quad (4.22)$$

4.3 RESSONÂNCIA 7:6 ENTRE AEGAEON E MIMAS

Aegaeon situa-se em uma ressonância 7:6 de corotação excêntrica com Mimas devido à seu período orbital ser de 0.808 dia e Mimas possuir um período de 0.942 dia ((HEDMAN et al., 2010)).

O ângulo ressonante φ_{cr} deste sistema é dado por:

$$\varphi_{cr} = 7\lambda' - 6\lambda - \varpi', \quad (4.23)$$

sendo λ' e λ as longitudes média de Mimas e de Aegaeon, respectivamente, enquanto ϖ' é a longitude do pericentro de Mimas. De acordo com a Tabela 6.1, o corpo perturbador (Mimas) possui uma órbita externa à de Aegaeon, de modo que deve-se utilizar a parte indireta $\langle R_E \rangle$ no potencial perturbador:

$$\langle R \rangle = \frac{\mu'}{a'} (\langle R_D \rangle + \alpha \langle R_E \rangle), \quad (4.24)$$

sendo $\mu' = Gm'$, $\alpha = a/a'$, G a constante gravitacional, m' a massa de Mimas, a e a' os semi-eixos maior de Aegaeon e de Mimas, respectivamente. Entretanto, devido à razão de massa dos dois corpos ser pequena em relação ao corpo central (Saturno), da ordem de 10^{-16} para Aegaeon e 10^{-7} para Mimas, o centro de massa do sistema situa-se localizado em Saturno e o potencial indireto é zero. Logo,

$$\langle R \rangle = \frac{\mu'}{a'} (\langle R_D \rangle). \quad (4.25)$$

De acordo com a Tabela IV de Ellis & Murray (2000), para ressonâncias de primeira ordem ($N = |7 - 6| = 1$), a equação para o ângulo ressonante é dada por:

$$\varphi = j\lambda' + (1 - j)\lambda - \varpi'. \quad (4.26)$$

A partir desta obtemos que:

$$\langle R_D \rangle = [e' f_{31} + e^2 e' f_{32} + e'^3 f_{33} + e'(s^2 + s'^2) f_{34}] \cos(7\lambda' - 6\lambda - \bar{\varpi}'), \quad (4.27)$$

sendo e e e' as excentricidades de Aegaeon e de Mimas, respectivamente, e $s = \sin(1/2 I)$ e $s' = \sin(1/2 I')$, onde I e I' são as inclinações de Aegaeon e Mimas. Entretanto, devido fato de e , e' , I , I' serem pequenos, é possível desprezar os termos da $\mathcal{O}(e^2)$ e $\mathcal{O}(I^2)$, obtendo:

$$\langle R_D \rangle = e' f_{31} \cos(7\lambda' - 6\lambda - \bar{\varpi}'). \quad (4.28)$$

A função f_{31} , foi obtida a partir da Tab. VII de Ellis & Murray (2000), e é dada por:

$$f_{31} = \frac{1}{2} [-1 + 2j + \alpha D] A_{j-1}, \quad (4.29)$$

sendo $D = \frac{d}{d\alpha}$, $A_j = b_{\frac{1}{2}}^{(j)}$ e $B_j = b_{\frac{3}{2}}^{(j)}$ os coeficientes de Laplace. Assim, utilizando o valor de $j = 7$ na Equação (4.29) e a substituindo na Equação (4.28) obtêm-se que para menor ordem em excentricidade a função perturbadora é dada por:

$$\langle R \rangle = \frac{\mu'}{2a'} e' [13 + \alpha D] b_{\frac{1}{2}}^{(6)}(\alpha) \cos(7\lambda' - 6\lambda - \bar{\varpi}'). \quad (4.30)$$

Sendo assim, a partir da Equação (4.30) foram calculadas as larguras das ressonâncias de corotação excêntrica de corotação (Eq. 4.22) e de Lindblad (Eq. 4.12) obtendo valores de:

$$W_{cr} \approx 61 \text{ km}, \quad (4.31)$$

$$W_{Lr} \approx 124 \text{ km}. \quad (4.32)$$

Para tal cálculos foram obtidos numericamente os valores dos semi-eixos maior ressonantes $a_{cr} = 167493 \text{ km}$ e $a_{Lr} = 167512 \text{ km}$, com base no algoritmo descrito em Murray e Dermott (1999).

5 REGIME DE COLISÕES

Com o objetivo de estudar as colisões ocorridas nas simulações numéricas foi implementado no pacote do REBOUND um algoritmo para analisar de maneira semi-analítica os resultados das colisões em função da energia cinética, parâmetros físicos e da geometria da colisão. Este algoritmo foi descrito por Leinhardt e Stewart (2012) que determinaram equações semi-analíticas a partir do ajuste de simulações numéricas de colisões utilizando simulações hidrodinâmicas.

É importante citar que este modelo é válido apenas para corpos que estão no regime de gravidade, ou seja, quando a atração gravitacional do corpo é mais importante do que as forças dependentes do material do qual ele é feito. Este regime é válido para corpos que possuem raios maiores do que 50 metros (MELOSH; RYAN, 1997).

A energia cinética total de uma colisão pode ser escrita como:

$$Q_R = \frac{\mu V_i^2}{2M_{tot}}, \quad (5.1)$$

sendo $M_{tot} = M_p + M_t$, $\mu = M_p M_t / M_{tot}$, V_i a velocidade relativa dos corpos. Os índices p e t indicam o projétil e ao alvo, respectivamente.

A energia necessária para a destruição do alvo (Q_{RD}^*) aumenta com o incremento das massas e da velocidade relativa dos corpos. A partir disto, Kevin e Keith (1990) determinaram empiricamente uma equação que determina o valor desta energia para uma colisão frontal:

$$Q_{RD}^* = q_g (\rho_1 G)^{3\bar{\mu}/2} R_{C1}^{3\bar{\mu}} V^{*(2-3\bar{\mu})}, \quad (5.2)$$

sendo, G a constante gravitacional, R_{C1} o raio equivalente de um corpo esférico que possui massa M_{tot} e densidade $\rho_1 \equiv 1000 \text{ kg m}^{-3}$. O coeficiente q_g é da ordem de 1 e $\bar{\mu} = 0.36 \mp 0.01$, este último obtido empiricamente por Leinhardt e Stewart (2012) utilizando os resultados de diversos estudos numéricos com colisões para diversos materiais (rocha, gelo, *rubble piles*). A variável R_{C1} foi introduzida na Equação (5.2) com o objetivo de generalizar a dependência de Q_{RD}^* para diferentes tamanhos de raios dos corpos, diferentes densidades e razões de massa projétil-alvo.

A partir das Equações (5.1) - (5.2) é possível determinar a velocidade de impacto crítica ($V_i = V^*$), tal que a energia cinética da colisão seja igual a energia de destruição catastrófica ($Q_R = Q_{RD}^*$). Deste modo, Leinhardt e Stewart (2012) determinaram a velocidade de impacto crítica para colisões frontais (ângulo de impacto $\theta = 0$) com corpos com mesma massa ($\gamma = M_p/M_t = 1$):

$$V_{\gamma=1}^* = \left(\frac{32\pi c^*}{5} \right) (\rho_1 G)^{1/2} R_{C1}, \quad (5.3)$$

com

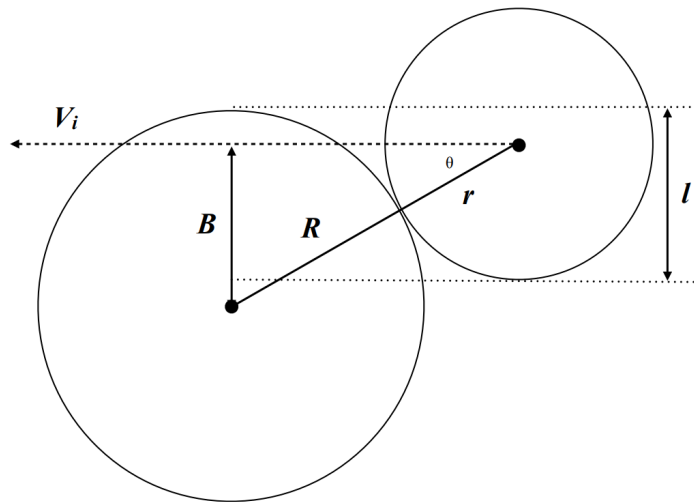
$$q_g = \frac{1}{8} \left(\frac{32\pi c^*}{5} \right)^{3\bar{\mu}/2}, \quad (5.4)$$

sendo c^* é um parâmetro adimensional relacionado ao material. Leinhardt e Stewart (2012) determinaram empiricamente o valor de $c^* = 1.9 \pm 0.3$ para objetos porosos e $c^* = 5 \pm 2$ para planetesimais sólidos. Logo, substituindo a Equação (5.4) na Equação (5.2) obtêm-se que:

$$Q_{RD,\gamma=1}^* = c^* \frac{4}{5} \pi \rho_1 G R_{C1}^2. \quad (5.5)$$

Entretanto, a Equação (5.2) é obtida assumindo que toda a energia cinética do projétil é transferida ao alvo e independe do ângulo da colisão. Esta suposição é inválida, uma vez que, de forma mais geral, apenas uma parte do projétil colide com o alvo devido ao ângulo de impacto. Para considerar o ângulo de impacto e determinar a fração de massa que interage com o alvo, ambos são definidos a partir do primeiro ponto de contato assumindo corpos esféricos como apresentado na Figura 5.1.

Figura 5.1 – Parâmetros de colisão. V_i é a velocidade relativa, θ é o ângulo de colisão, B e l são parâmetros para determinar a área efetiva do projétil que interpola com o alvo, enquanto R e r são os raios do alvo e do projétil, respectivamente.



fonte: Leinhardt e Stewart (2012).

Assim, Leinhardt e Stewart (2012) determinaram qual a fração da massa (α) do projétil que geometricamente sobrepõe com o alvo:

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{se } R_t > b(R_p + R_t) + R_p, \\ \frac{3rl^2 - l^3}{4r^3} & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.6)$$

em que $b = \sin \theta$ é o parâmetro de impacto e $l/(2R_p)$ a fração do diâmetro do projétil que interage com o alvo. Usando apenas a massa que fração de massa do projétil que interage, a massa reduzida para impactos oblíquos é definida como:

$$\mu_\alpha = \frac{\alpha M_p M_t}{\alpha M_p + M_t}. \quad (5.7)$$

O critério de destruição e a velocidade de impacto crítica, para uma colisão oblíqua e que possui $\gamma \neq 1$, são calculados através de ajustes nas Equações (5.3) - (5.5). Deste modo, a velocidade de impacto crítica é determinada como:

$$V^* = \left[\frac{1(\gamma + 1)^2}{4\gamma} \right]^{1/(3\bar{\mu})} V_{\gamma=1}^*, \quad (5.8)$$

e substituindo a Equação (5.8) na Equação (5.2), o critério de destruição pode ser escrito como:

$$Q_{RD}^* = Q_{RD,\gamma=1}^* \left(\frac{V^*}{V_{\gamma=1}^*} \right)^{2-3\bar{\mu}}, \quad (5.9)$$

$$= Q_{RD,\gamma=1}^* \left[\frac{1(\gamma + 1)^2}{4\gamma} \right]^{2/(3\bar{\mu})-1}. \quad (5.10)$$

Agora considerando a fração de massa que interage para impactos oblíquos, obtêm-se que:

$$Q'_{RD}^* = \left(\frac{\mu}{\mu_\alpha} \right)^{2-3\bar{\mu}/2} Q_{RD}^*. \quad (5.11)$$

Assim, a partir da Equação (5.1) é possível mostrar que a velocidade de impacto crítica, ajustada para diferentes razões de massa e ângulos de impacto, é dada por:

$$V'^* = \sqrt{2Q'_{RD}^* M_{tot} / \mu}. \quad (5.12)$$

Além disso, Leinhardt e Stewart (2012) determinaram empiricamente uma equação para determinar qual seria o raio do maior corpo formado pós-colisão (M_{lr}) em função da energia cinética da colisão Q_R e da energia de destruição catastrófica Q'_{RD}^* :

$$\frac{M_{lr}}{M_{tot}} = \begin{cases} -0.5 \left(\frac{Q_r}{Q'_{RD}^* - 1} \right) + 0.5, & \text{se } Q'_{RD}^* < Q_R, \\ \frac{0.1}{1.8^n} \left(\frac{Q_r}{Q'_{RD}^*} \right)^n & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.13)$$

É importante citar que antes de analisar se a colisão será destrutiva é necessário verificar a possibilidade de a colisão resultar em uma junção perfeita de ambos os corpos calculando a velocidade de escape mútua (V_{esc}):

$$V_{esc} = \sqrt{2GM_{tot}/(R_p + R_t)}, \quad (5.14)$$

uma vez que, se a velocidade relativa V_i for menor do que a velocidade de escape mútua, a gravidade dos corpos será suficiente para juntá-los. Além disso, se $V_{esc} < V_i < V'^*$ a colisão poderá resultar em erosão ou acreção de massa ao alvo, bem como colisões do tipo *graze-and-merge* e *hit-and-run*. Estes resultados dependem do ângulo de impacto crítico b_{crit} (que define a separatriz entre colisões do tipo

grazing e non-grazing):

$$b_{crit} = \left(\frac{R}{R+r} \right) \quad (5.15)$$

e da velocidade V_{hr} (que define a separatriz entre colisões do tipo *graze-and-merging e hit-and-run*):

$$\frac{V_{hr}}{V_{esc}} = c_1 \zeta^2 (1-b)^{5/2} + c_2 \zeta^2 + c_3 (1-b)^{5/2} + c_4, \quad (5.16)$$

sendo, $\zeta = (M_t - M_p)/M_{tot}$, $c_1 = 2.43$, $c_2 = -0.0408$, $c_3 = 1.86$ e $c_4 = 1.08$.

Com isso, Leinhardt e Stewart (2012) dividiram os resultados das colisões 6 regimes:

1. Junção perfeita quando $V_i < V'_{esc}$
2. Graze-and-merge quando $b > b_{crit}$ e $V'_{esc} < V_i < V_{hr}$
3. Hit-and-run quando $b > b_{crit}$, $V_i > V_{hr}$ e $M_{lr} = M_t$
4. Acreção parcial quando $b < b_{crit}$ e $M_{lr} > M_t$
5. Erosão parcial quando $0.1M_{tot} < M_{lr} < M_t$
6. Super-catastrófica quando $M_{lr} < 0.1M_{tot}$

A partir destas definições é possível fazer mapas dos regimes de colisões em função do ângulo de impacto θ e da razão V_i/V_{esc} . Utilizando a Equação (5.13) pode-se determinar a energia inicial da colisão para obter uma determinada razão M_{lr}/M_{tot} :

$$Q_{R,lr=const} = \begin{cases} Q'_{RD} \left[-2 \left(\frac{M_{lr}}{M_{tot}} = \text{const} \right) + 2 \right], & \text{se } 0.1 < M_{lr}/M_{tot} < 1, \\ Q'_{RD} \left(\frac{1.8^\eta}{0.1} \left(\frac{M_{lr}}{M_{tot}} = \text{const} \right) \right)^{1/\eta}, & \text{se } M_{lr}/M_{tot} < 0.1. \end{cases} \quad (5.17)$$

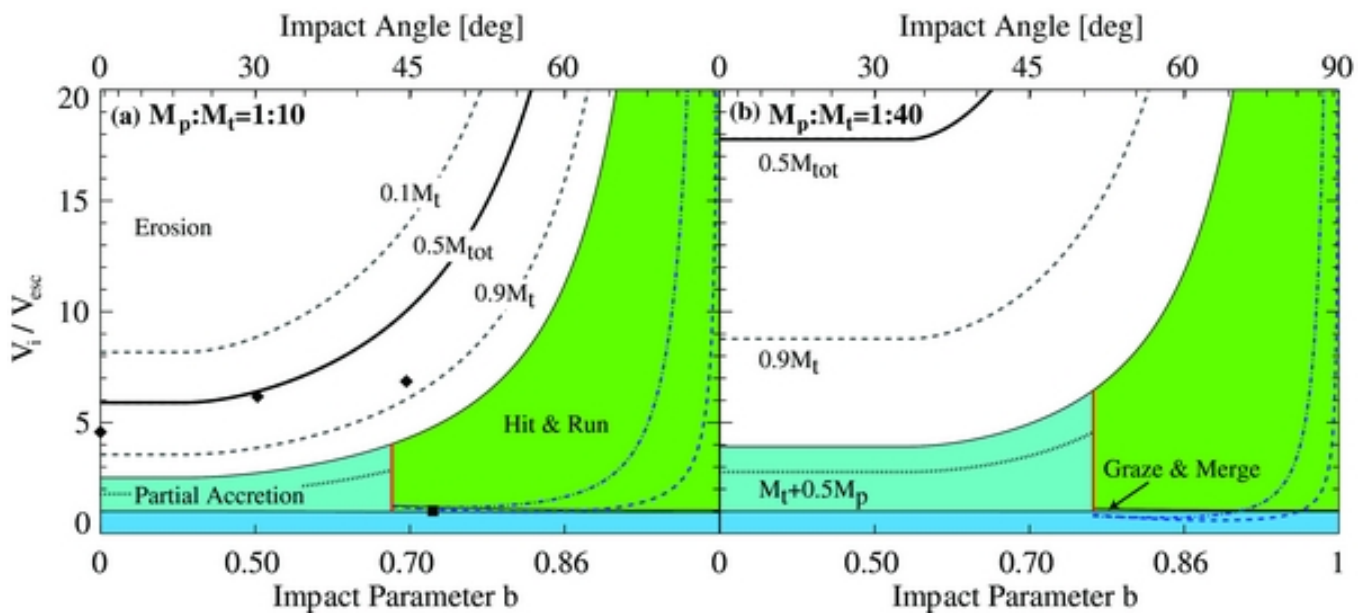
Por sua vez, utilizando a Equações (5.17) - (5.1) pode-se determinar a velocidade de impacto necessária para obter um valor de M_{lr} a partir das condições iniciais:

$$V_{i,lr=const} = \sqrt{2Q_{R,lr=const}M_{tot}/\mu}. \quad (5.18)$$

A partir das Equações (5.17) - (5.18) foi possível gerar os gráficos dos regimes de colisões, como apresentado na Figura 5.2. Estas curvam apresentam os regimes de colisões em função da razão de massa projétil-alvo, do parâmetro de impacto, razão de velocidades V_i/V_{esc} e dos parâmetros do material (c^* e $\bar{\mu}$).

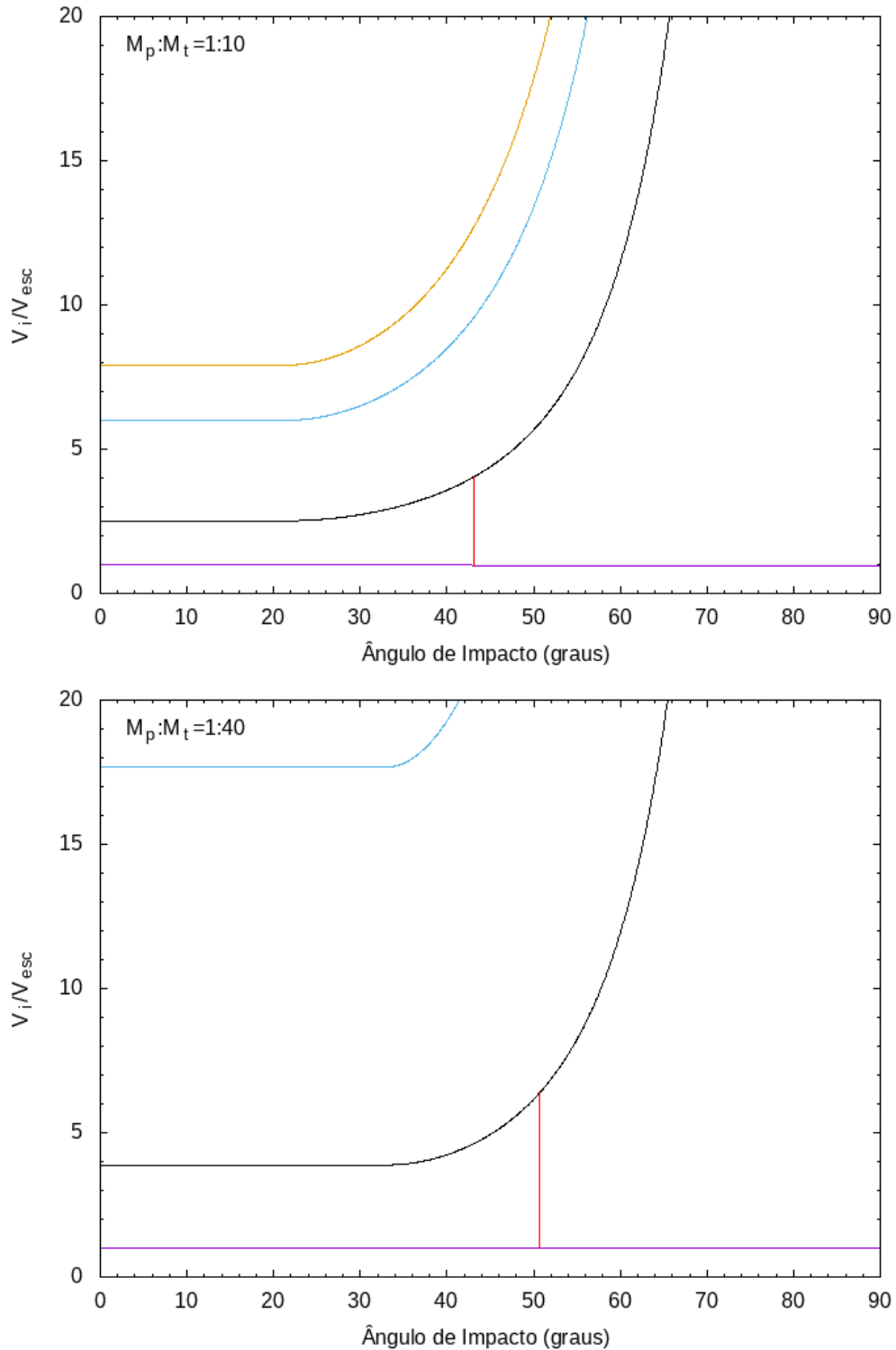
Os gráficos apresentados na Figura 5.2 foram utilizados como comparação para a validação da implementação destas equações no pacote de integração do REBOUND, estes apresentados na Figura 5.3. A partir da comparação dos gráficos, é possível verificar que os valores de V_i/V_{esc} para colisões frontais ($\theta = 0$) estão coerentes, bem como o comportamentos das funções. Entretanto, devido ao interesse em apenas calcular a taxa de poeira produzida devido a colisões entre dois corpos macroscópicos, ou seja, determinar as colisões super-catastróficas ($M_{lr}/M_{tot} < 0.1$), no algoritmo foram implementados apenas dois regimes de colisões: colisão perfeitamente inelástica e colisão super-catastrófica (onde o maior corpo formado pós colisão possui menos de 10% da soma da massa do projétil e do alvo).

Figura 5.2 – Regimes de colisões em função da razão de massa, parâmetro de impacto e da razão de velocidades V_i/V_{esc} com valores de $c^* = 1.9$ e $\bar{\mu} = 0.36$.



fonte: Leinhardt e Stewart (2012).

Figura 5.3 – Regimes de colisões em função da razão de massa, parâmetro de impacto e da razão de velocidades V_i/V_{esc} para os mesmo valores de c^* e $\bar{\mu}$ da figura anterior. A cor roxa representa a curva de junção perfeita, a vermelha o b_{crit} , a preta a curva de erosão parcial ($M_{lr}/M_{tot} = 1$), a azul $M_{lr}/M_{tot} = 0.5$ e a amarela a curva de colisão super-catastrófica $M_{lr}/M_{tot} = 0.1$.



fonte: Produção do próprio autor.

6 RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados o método utilizado para determinar as condições iniciais dos corpos do arco do anel G, os resultados para a formação de um pequeno satélite e por último a produção de poeira devido a colisões entre corpos macroscópicos imersos no arco do anel G.

6.1 DETERMINAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DE AEGAEON E DO ARCO DO ANEL G

Nesta seção será apresentado o método utilizado para a criação do arco do anel G confinado em uma ressonância 7:6 de corrotação com o satélite Mimas, tal como a inclusão do satélite Aegaeon que localiza-se próximo ao centro da ressonância. Os elementos orbitais de ambos os satélites foram obtidos do sistema Horizons da NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) na data de 22/08/2008 UT 00:00:00, e estão apresentados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Elementos orbitais osculadores dos satélites Mimas e Aegaeon.

Elementos Orbitais	Aegaeon	Mimas
a ($\times 10^5$ km)	1.6803398728	1.8600466879
e ($\times 10^{-2}$)	0.3133178063	1.7245224226
I ($^\circ$)	0.0017328550	1.5641747812
ϖ ($^\circ$)	142.49114788	163.18023984
Ω ($^\circ$)	236.30175623	259.15258436
M ($^\circ$)	5.3481201068	197.73278953

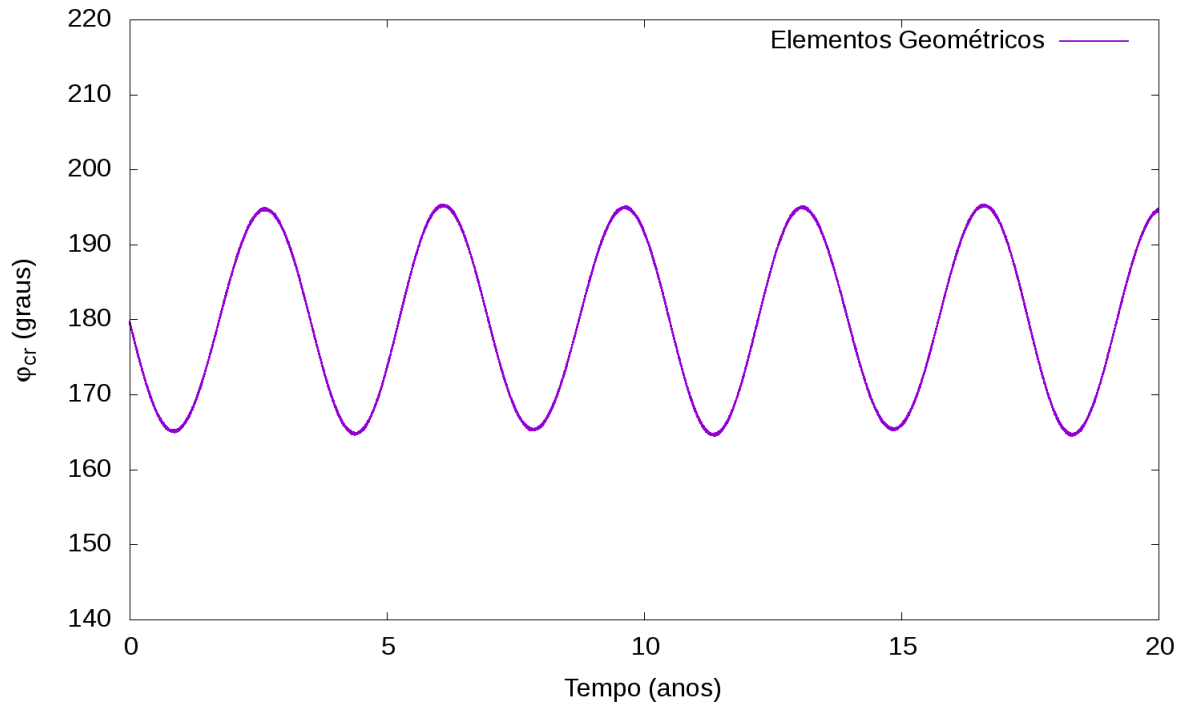
Fonte : (PARK; CHAMBERLIN, 2017)

Os elementos orbitais da Tabela 6.1 foram convertidos para elementos orbitais geométricos (via vetores de estado) e posteriormente, o semi-eixo maior foi ajustado com o objetivo de reproduzir os ângulos ressonantes mostrados em Hedman et al. (2010). Tal condição resultou no valor de $a = 167493.5484$ km, correspondendo à 0.907451 do semi-eixo maior geométrico de Mimas.

As Figuras 6.1 e 6.2 mostram a variação temporal dos ângulos ressonantes das ressonâncias 7:6 CER ($\varphi_{cr} = 7\lambda_M - \lambda_A - \varpi_M$) e 7:6 LER ($\varphi_{Lb} = 7\lambda_M - \lambda_A + \varpi_M$), respectivamente. Estes resultados estão coerentes com os mostrados por Hedman et al. (2010), uma vez que o ângulo ressonante φ_{cr} varia com uma amplitude de $\sim 15^\circ$ em torno de 180° com período de ~ 3.4 anos, enquanto o ângulo ressonante φ_{Lb} varia em torno de 0° .

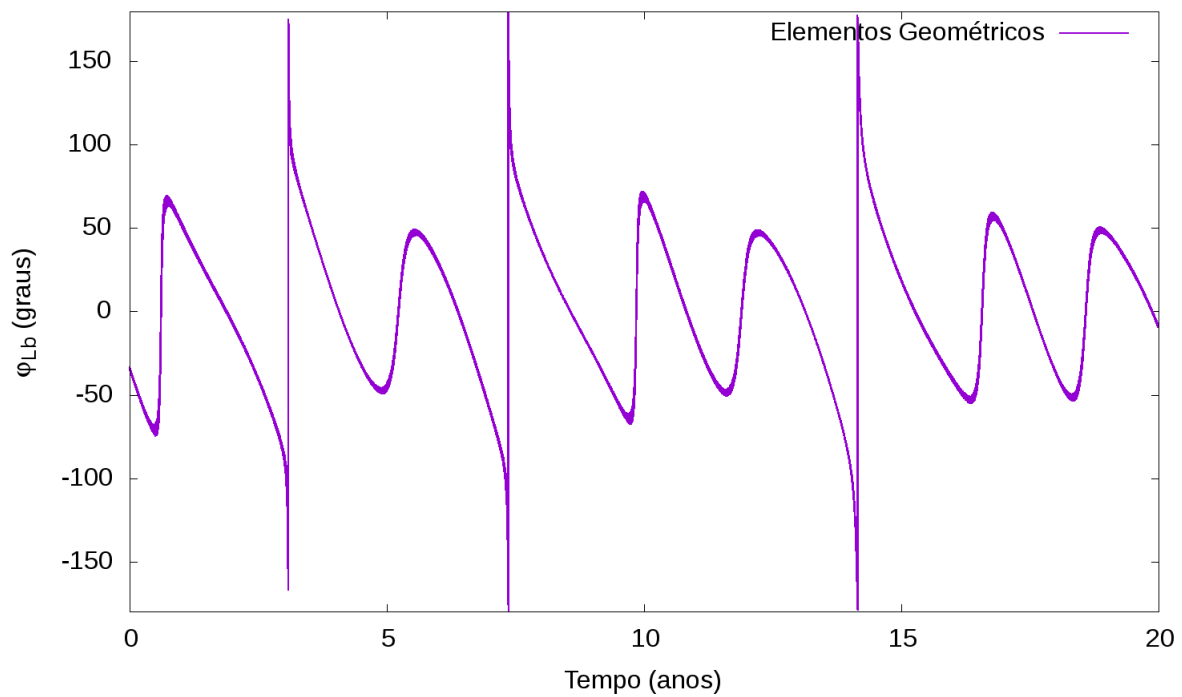
Na Figura 6.3 são apresentadas as variações temporais do semi-eixo maior, excentricidade e inclinação geométricos do satélite Aegaeon que ocorrem devido às perturbações do satélite Mimas. É possível verificar que o semi-eixo maior sofre uma variação de ~ 17 km, enquanto a excentricidade oscila entre 0 e 0.0005 e a inclinação de 0 à 0.0018 graus.

Figura 6.1 – Variação do ângulo ressonante φ_{cr} de Mimas-Aegaeon em função do tempo.



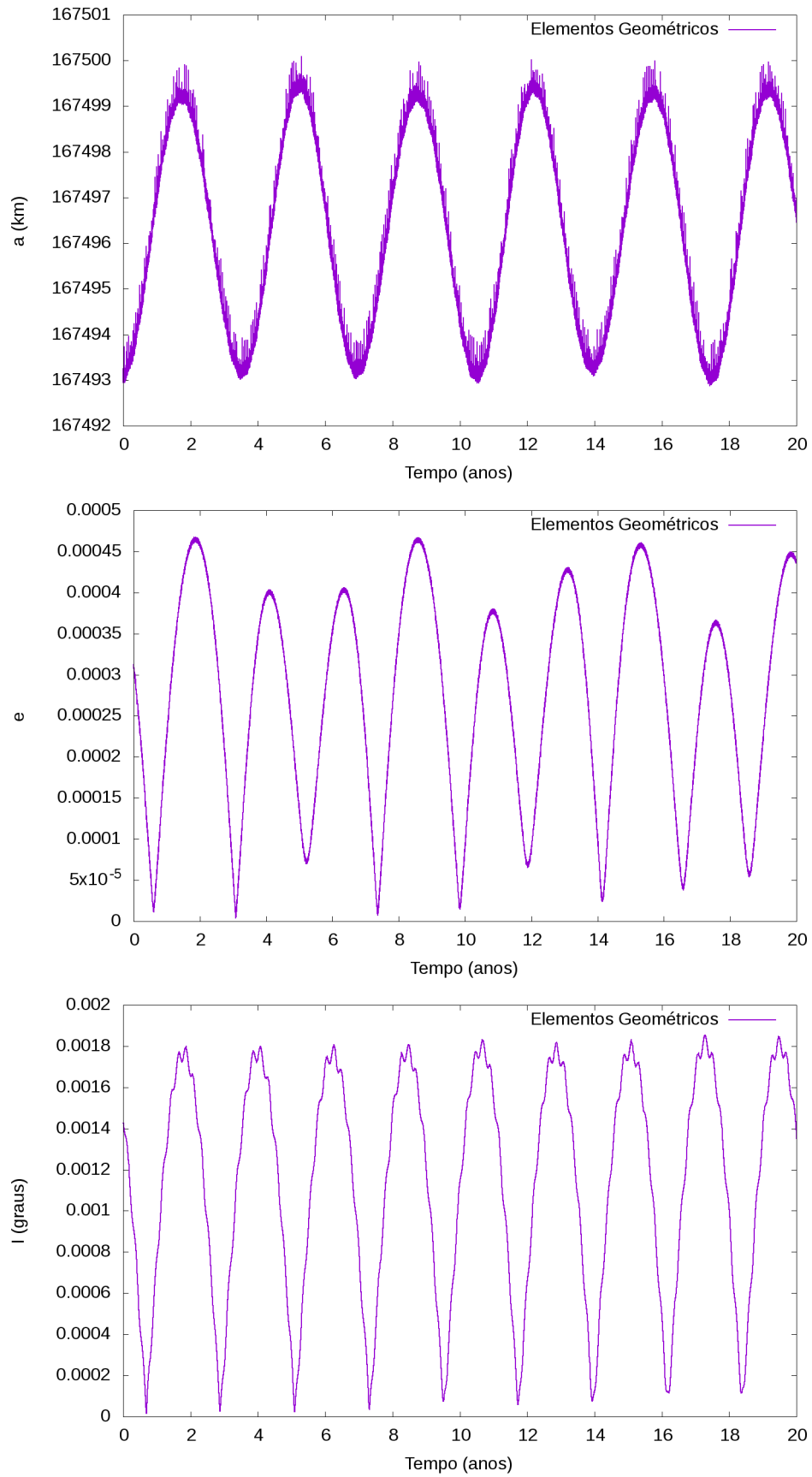
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 6.2 – Variação do ângulo ressonante φ_{Lb} de Mimas-Aegaeon em função do tempo.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 6.3 – Variação dos elementos geométricos a , e e I do satélite Aegaeon em função do tempo.



fonte: Produção do próprio autor.

Na sequência do texto todos elementos (a , e , I , Ω , ϖ e λ) citados serão referentes aos elementos geométricos que foram utilizados para realizar as integrações numéricas considerando os efeitos do achatamento.

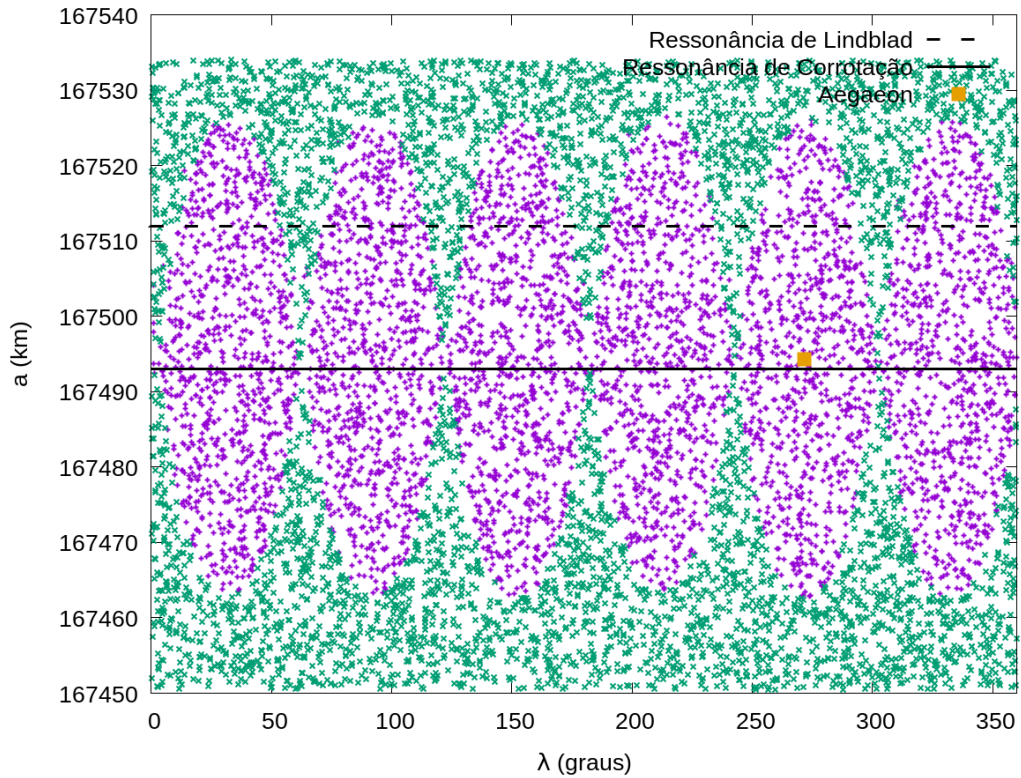
Com o objetivo de determinar a localização dos sítios ressonantes da ressonância 7:6 de corrotação excêntrica com Mimas foram distribuídas 10000 partículas nos intervalos [167450,167535] km em semi-eixo maior e de [0,360] ° em longitude média, mantendo os demais elementos geométricos inicialmente como zero, sendo que para realizar esta distribuição foi utilizada a função *randon_uniform*, disponível no pacote de integração numérica REBOUND, que retorna uma variável aleatória distribuída uniformemente dentro de um intervalo previamente definido.

Esta distribuição de corpos foi integrada numericamente por 20 anos, tempo determinado com base no período do ângulo do satélite Aegaeon que completa mais de 5 oscilações neste intervalo. Posteriormente foram analisados os comportamentos dos ângulos ressonantes 7:6 CER de cada partícula com o satélite Mimas. Foi analisado se o ângulo estava librando e deste modo foram calculadas as diferenças entre os máximos e mínimos de φ_{cr} .

Desta análise foi obtido que $\sim 65\%$ dos corpos iniciais estavam em ressonância, e como esperado, foram obtidos 6 sítios ressonantes com largura radial de 63 km (correspondente ao obtido na Seção 4.3) e largura azimutal de $\sim 60^\circ$. Na Figura 6.5 é apresentado o arco do anel G, de modo que o ponto laranja corresponde a localização do satélite Aegaeon, os pontos em roxo determinam os corpos confinados na ressonância 7:6 CER com o satélite Mimas e em verde os que se encontram fora da ressonância. Já a linha contínua determina a posição teórica da ressonância 7:6 CER, enquanto a pontilhada a ressonância 7:6 CEL.

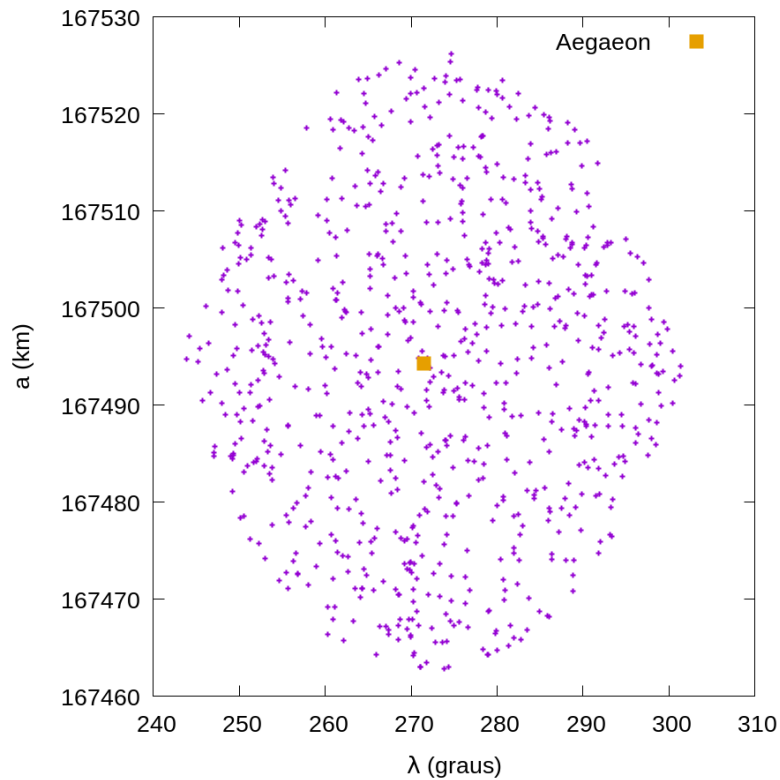
Uma vez encontradas as posições dos sítios ressonantes e os corpos confinados em ressonância, estes foram filtrados a partir da longitude média inicial do satélite Aegaeon (271.41°), separando apenas os corpos que possuem $\pm 30\lambda_{Aeg}$, com objetivo de selecionar apenas o sítio de Aegaeon. Assim, foram obtidos um total de 982 corpos. Na Figura 6.5 é apresentado este conjunto de corpos (em roxo), bem como a posição do satélite Aegaeon (em amarelo). Este conjunto inicial de corpos foi utilizado para o estudo dos corpos do arco do anel G, cujas simulações numéricas serão apresentadas na sequência.

Figura 6.4 – Localização dos sítios ressonantes do anel G (roxo) e das ressonâncias de corotação (linha contínua) e de Lindblad (linha tracejada), enquanto a do satélite Aegaeon é destacada em laranja.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 6.5 – Distribuição inicial dos corpos no sítio ressonante do satélite Aegaeon (laranja).



fonte: Produção do próprio autor.

6.2 FORMAÇÃO DE PEQUENOS SATÉLITES

Para analisar a evolução dos corpos macroscópicos do anel G foram realizadas 8 simulações numéricas, nas quais foram utilizadas as condições iniciais hipotéticas descritas na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Condições iniciais das simulações. A coluna N apresenta o número total de corpos, a do r_i o raio físico inicial e o x na última coluna indica a presença de Aegaeon na simulação.

Simulação	N	r_i (m)	Aegaeon
1	500	50	x
2	500	100	x
3	982	50	x
4	982	100	x
5	500	50	-
6	500	100	-
7	982	50	-
8	982	100	-

fonte: Produção do próprio autor.

Tais condições iniciais foram determinadas com o objetivo de entender a evolução dos corpos em função do número e tamanho do raio físico dos corpos. Esta escolha tem a finalidade de estudar a influência do tamanho inicial dos corpos na formação de um pequeno satélite (simulações 5 à 8), bem como analisar a influência de corpos macroscópicos na órbita do satélite Aegaeon (simulações 1 à 4).

É interessante notar que estes sistemas possuem uma massa da ordem 3, 6, 20 e 40 vezes a massa de Aegaeon, o que não corresponde à quantidade estimada de corpos macroscópicos no arco de Aegaeon (da ordem de 0.1 à 1 massa de Aegaeon). Entretanto, o interesse inicial foi estudar a evolução e verificar a estabilidade do sistema em função das colisões inelásticas que dissipam energia.

As simulações numéricas foram realizadas com o pacote de integração numérica do REBOUND (REIN; SPIEGEL, 2015) utilizando o integrador IAS15 que possui passo variável e precisão na ordem de 10^{-15} . As variáveis do sistema foram normalizadas em função do semi-eixo maior de 185520 km, do tempo em dias e da massa de Saturno (Tab. 6.3) de forma que a constante gravitacional seja $44.334508068 d^{3/2}t^{-1}M^{-1/2}$ (d unidade de distância, t de tempo e M de massa).

Tabela 6.3 – Parâmetros físicos de Saturno.

Massa (kg)	5.683×10^{26}
Raio Equatorial (km)	60330
J_2	0.016290543820
J_4	-0.000936700366
J_6	0.000086623065

Fonte : Hedman et al. (2010)

Todas as simulações numéricas possuem a mesma distribuição orbital inicial de partículas, variando apenas o raio físico dos corpos (utilizando uma densidade $d = 0.9 \text{ g/cm}^3$ para determinar a massa). Estes corpos foram definidos como partículas teste, não perturbando uns aos outros, nem os corpos

definidos como massivos (o planeta Saturno e os satélites Mimas e Aegaeon). Estas simulações foram integradas por um período de 1000 anos, sendo que no Apêndice B são mostradas as evoluções de cada uma das simulação a cada 200 anos.

A condição de colisão foi definida com colisão direta, ou seja, ela irá ocorrer quando o raio de dois corpos se interpolam. Para isto foi utilizada a função *reb_colision_direct* que após detectar uma colisão calcula seu resultado via colisão perfeitamente inelástica. Além disso, foi criada uma biblioteca que salva os dados das colisões indicando o *hash* (índice) de cada um dos corpos que colidiram, seus valores de raio e massa anteriores a colisão, bem como a massa e raio corpo, sendo que este último irá possuir *hash* da partícula de menor valor, ou seja, caso os corpos de *hash* 21 e 783 colidissem, o novo corpo iria possuir o *hash* 21.

A Tabela 6.4 mostra o número total de colisões ocorridas em cada uma das simulações e o número de colisões com o satélite Aegaeon. A partir destes resultados é possível verificar, como esperado, que o número de colisões aumenta em função do aumento de número de corpos e do raio físico inicial. Por outro lado, o aumento do raio e do número de corpos do sistema causa um decréscimo gradual na porcentagem de colisões que ocorreram com o satélite Aegaeon, uma vez que, aumentando o volume total dos corpos, a chance deles colidirem entre si é maior.

Tabela 6.4 – Análise das colisões em cada simulação

Simulação	Número total de colisões	Número de colisões com Aegaeon (240 m)	% do total de corpos que colidiram	% do total de colisões que ocorreram com Aegaeon
1	117	42	23,4	35,9
2	259	75	51,8	28,9
3	324	75	33,0	23,1
4	639	122	65,1	19,1
5	72	-	14,4	-
6	214	-	42,8	-
7	250	-	25,5	-
8	575	-	58,6	-

fonte: Produção do próprio autor.

Na Tabela 6.5 é mostrado o valor do raio físico do satélite Aegaeon ao final da simulação e na Tabela 6.6 o raio dos maiores objetos formatos em cada sistema (no caso das simulações que possuem Aegaeon, estes objetos representam o segundo maior corpo formado).

Tabela 6.5 – Raio final do satélite Aegaeon.

Simulação	r_f (m)
1	271
2	561
3	307
4	770

fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 6.6 – Maiores corpos remanescentes em cada simulação. Para os casos que possui o satélite Aegaeon foram analisados os segundo de maior raio.

Simulação	a_i (km)	λ_i (°)	r_f (m)
1	167476	263.62	95.65
2	167479	255.75	228.94
3	167504	271.24	111.20
4	167517	267.27	235.13
5	167495	270.85	90.85
6	167492	265.25	360.88
7	167493	271.00	111.20
8	167485	275.10	579.88

fonte: Produção do próprio autor.

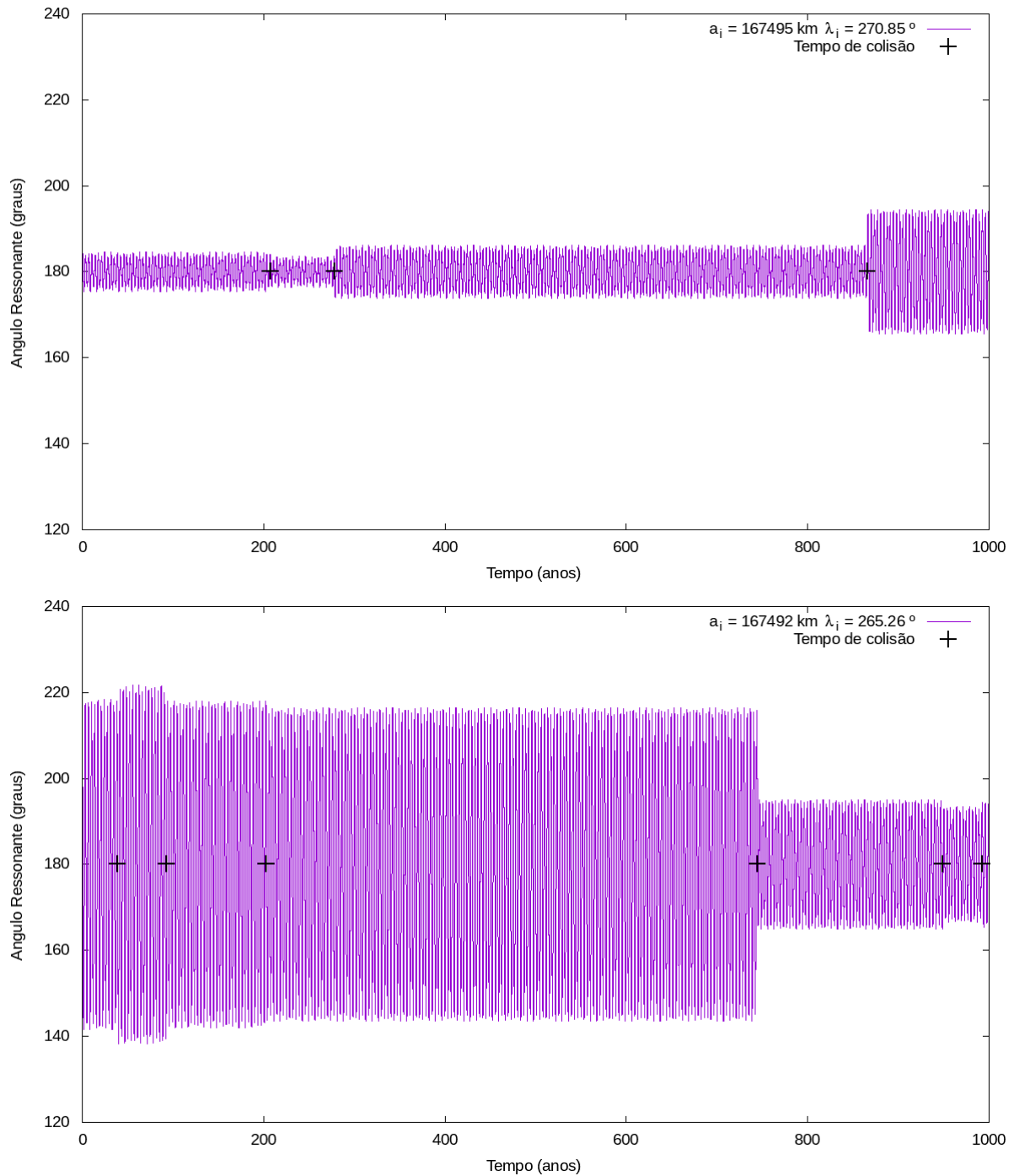
Na Tabela 6.6 é observado que nas simulações com o satélite Aegaeon os maiores corpos remanescentes possuem localizações longe da órbita de Aegaeon, com a_i menores que $a_{Aeg} \approx 167497$ km para as simulações com raios iniciais de 500 m e maiores para as simulações com raios iniciais de 100 m. É interessante notar que para as simulações, que foram incluído o satélite Aegaeon e os demais corpos com raio inicial de 100 m, foram formando corpos com raios da ordem do de Aegaeon (240 m), tamanho que seria observado pelas câmeras da Cassini.

Já as simulações, sem Aegaeon, mostram que a região mais provável para a formação de um satélite seria próximo ao centro da ressonância (≈ 167493 km), uma vez que este é o local mais estável. Além disso, estas simulações mostram que, ao menos com este número de corpos iniciais, com um tempo de integração de 1000 anos e objetos de raios iniciais de 50 m não é possível formar corpos com tamanhos próximos ao de Aegaeon. Entretanto, em todas simulações incluindo corpos com raios iniciais de 100 m foram formados objetos comparáveis ou maiores do que Aegaeon.

Nas Figuras 6.6 e 6.7 são mostrados os ângulos ressonantes dos maiores corpos gerados nas simulações sem o satélite Aegaeon. Nos quatro casos observa-se que ao final da simulação todos os corpos tendem a uma mesma região obtendo um ângulo ressonante análogo ao do satélite Aegaeon com amplitudes de aproximadamente 15° .

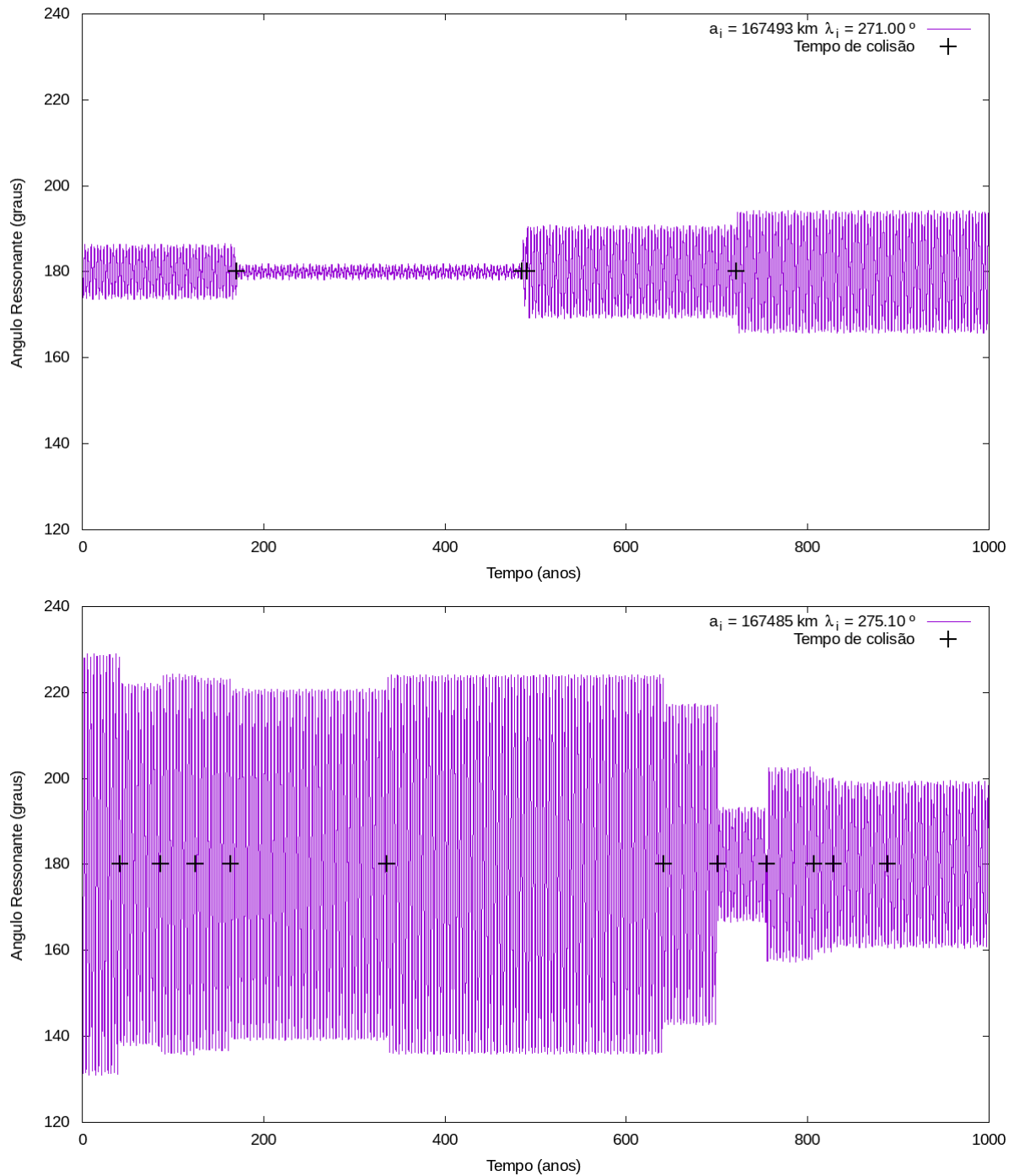
Além disso é possível verificar que as colisões não removem estes corpos da ressonância, podendo ser observado o efeito de curto e longo período no ângulo ressonante. Comparando as simulações que começam com o mesmo número de corpos, porém com raios iniciais iguais, mostram evoluções análogas para o ângulo ressonante, de modo que para as que começaram com corpos de 50 metros de raio, os corpos iniciaram com amplitudes menores e tenderam a um aumento, enquanto os de 100 metros com amplitudes começaram maiores e tenderam a diminuir sua amplitude ao longo do tempo.

Figura 6.6 – Variação do ângulo φ_{cr} dos maiores corpos formados nas simulações com 500 e 982 corpos com raios físicos iniciais de 50 m. O símbolo em forma de cruz indica os tempos nos quais o corpo sofreu colisão.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 6.7 – Variação do ângulo φ_{cr} dos maiores corpos formados nas simulações com 500 e 982 corpos com raios físicos iniciais de 100 m, respectivamente. O símbolo em forma de cruz indica os tempos nos quais o corpo sofreu colisão.



fonte: Produção do próprio autor.

Com objetivo de fazer uma comparação da evolução de todos os corpos do sistema foram criados quatro histogramas comparando as simulações com o mesmo número de corpos iniciais (Figs. 6.8 a 6.11). Em vermelho e azul são mostradas as distribuições de raio final das simulações com corpos de raio inicial de 50 e 100 metros, respectivamente, e para as que possuem o satélite Aegaeon (este foi destacado com a área hachurada).

A primeira comparação que pode ser feita é que o perfil de distribuição de tamanho se mantém ao aumentar o número de corpos, diferindo apenas no tamanho final do corpos. Uma possível explicação é o fato de as condições iniciais para os vetores de estado serem iguais em todas as simulações.

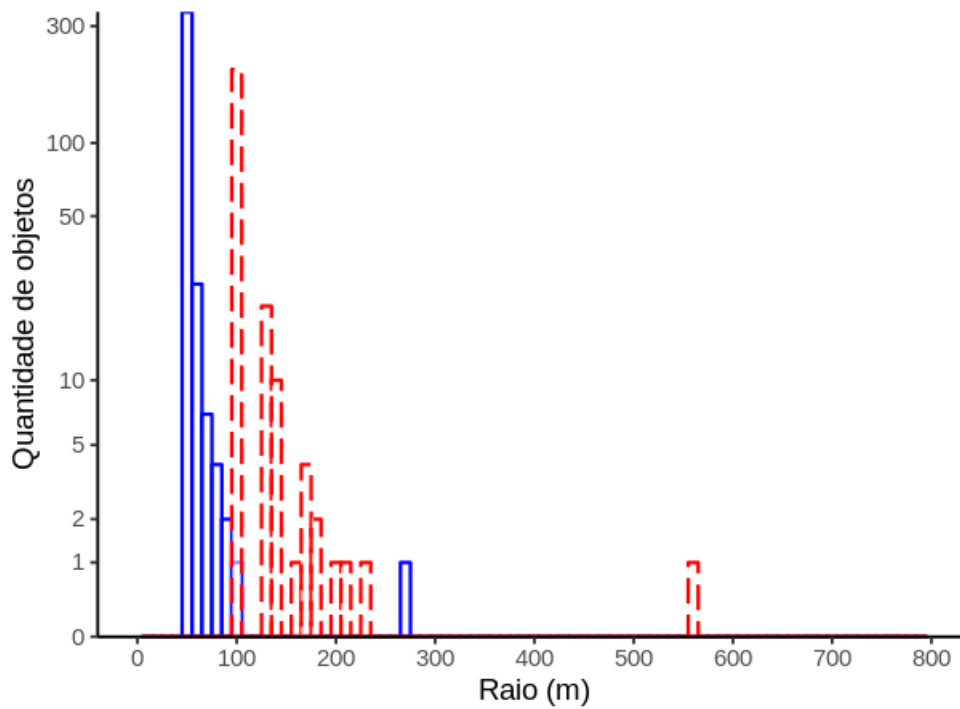
Em geral, como mostrado na Tabela 6.4 é possível observar que grande parte dos objetos sofreram poucas ou nenhuma colisões. Para os casos com raios iniciais de 50 m não houveram corpos que cresceram próximos ao tamanho do satélite Aegaeon, diferente para os casos de raios iniciais de 100 m que obtiveram corpos comparáveis ou maiores do que Aegaeon.

É interessante notar, comparando os histogramas das Figuras 6.8 e 6.10 e os das Figuras 6.9 e 6.11, que a presença do satélite Aegaeon não influencia a distribuição final do raio dos corpos. Isto fica mais nítido ao analisarmos as simulações com corpos iniciais de 50 m (azuis), onde ocorreram poucas colisões com o satélite Aegaeon. Já para as simulações com corpos iniciais de 100 m (vermelhas) a distribuição de corpos mantém-se análogas, exceto pela presença de alguns corpos com raios maiores do que 200 m, indicando que a presença de um corpo maior inicial tende a limpar os corpos maiores em crescimento.

Por fim, nestas simulações foi verificado que o arco do anel G é estável em função das colisões inelásticas, bem como que para formar satélites da ordem de Aegaeon seria necessário ao menos uma distribuição de corpos com aproximadamente 6 massas de Aegaeon (simulação 2). Estes resultados também mostram que os maiores corpos formados tendem a deslocar-se para o centro da ressonância, obtendo amplitudes para o ângulo ressonante de corotação próximos aos de Aegaeon. Além disso, foi constatado que quando no arco inicialmente já está imerso um pequeno satélite, este dificulta a formação de outros corpos, de modo que o satélite cresça acretando a massa dos demais corpos.

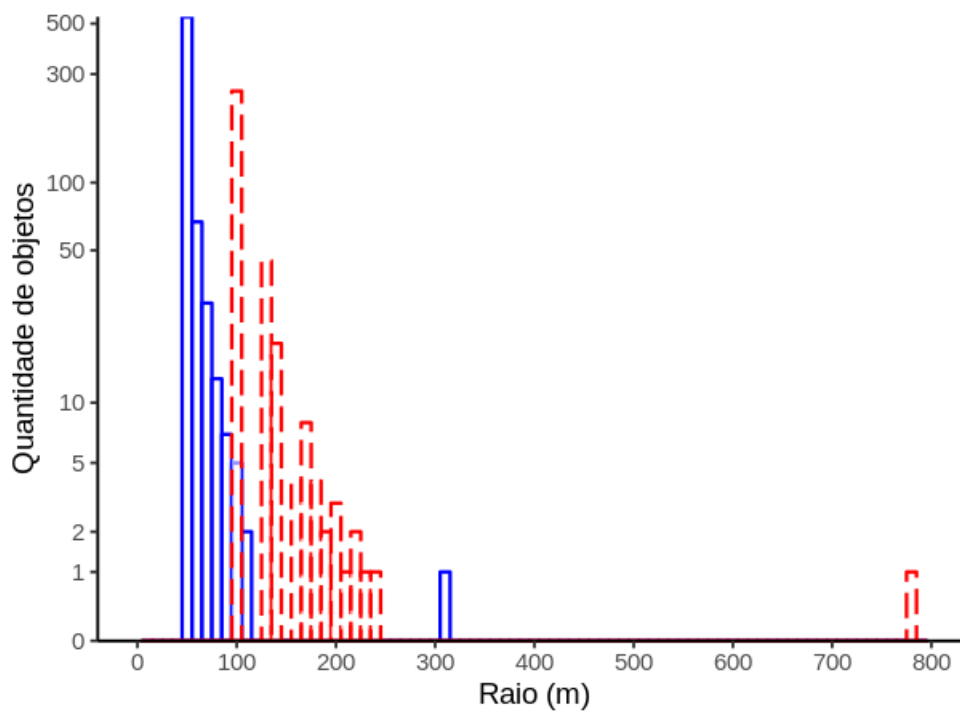
Neste trabalho também foi analisada a influência da auto-gravidade entre os corpos (cuja simulação todos os corpos possuem massa e todos se influenciam entre si), sendo notado que ao incluí-la o número de colisões em função do tempo aumenta, de modo que o sistema evolui muito mais rápido podendo diminuir consideravelmente o tempo para a formação de um pequeno satélite. Isto constatou a necessidade de incluir a auto-gravidade no sistema, mas por outro lado o tempo computacional aumenta exponencialmente, de modo que a previsão de tempo para as simulações terminarem foi de 3 à 6 meses e serão etapas futuras do trabalho.

Figura 6.8 – Histograma da distribuição final dos raios dos corpos das simulações com 500 corpos (mais o satélite Aegaeon) com raio inicial de 50 (azul) e 100 (vermelho) metros inicialmente.



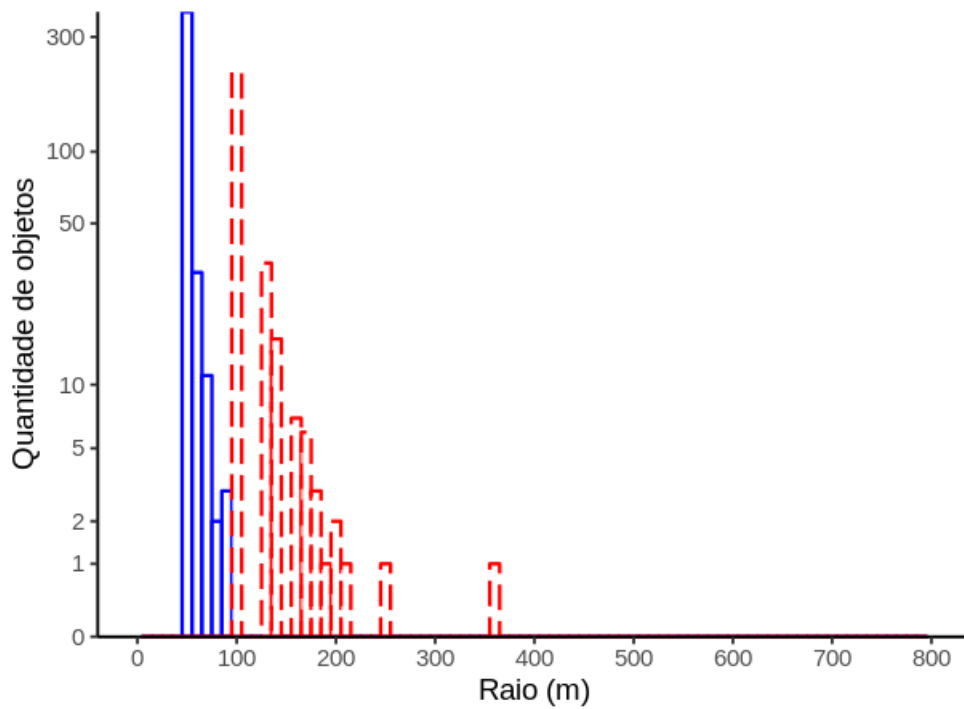
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 6.9 – Histograma da distribuição final dos raios dos corpos das simulações com 982 corpos (mais o satélite Aegaeon) com raio inicial de 50 (azul) e 100 (vermelho) metros inicialmente.



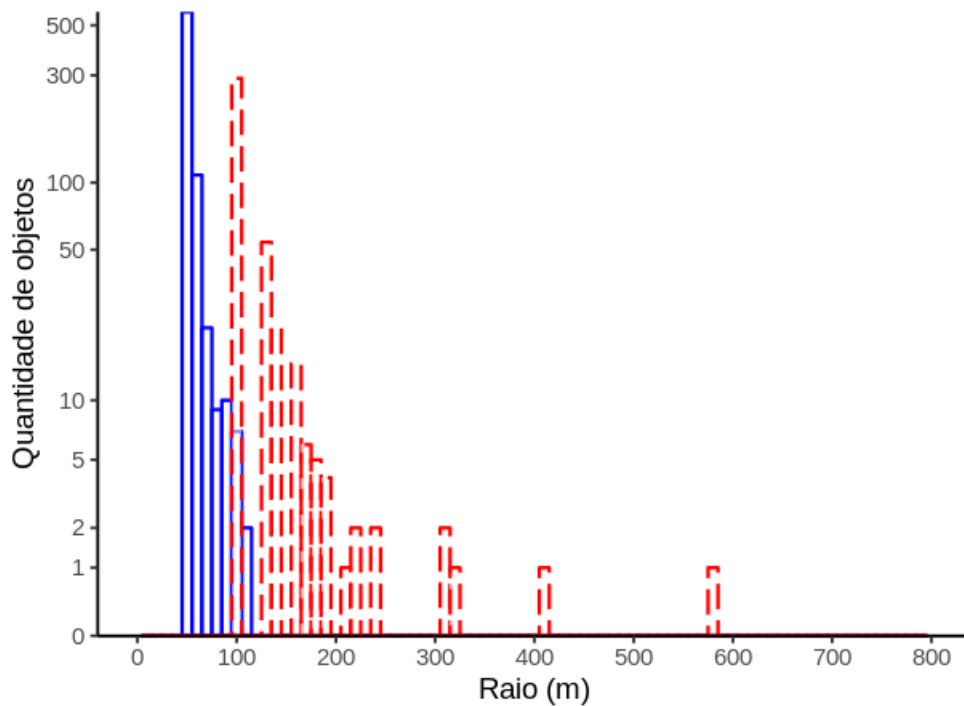
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 6.10 – Histograma da distribuição final dos raios dos corpos das simulações com 500 corpos com raio inicial de 50 (azul) e 100 (vermelho) metros inicialmente.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 6.11 – Histograma da distribuição final dos raios dos corpos das simulações com 982 corpos com raio inicial de 50 (azul) e 100 (vermelho) metros inicialmente.



fonte: Produção do próprio autor.

6.3 FORMAÇÃO DE POEIRA VIA COLISÕES

Com o objetivo de analisar a produção de poeira produzida via colisões super-catastróficas entre os corpos macroscópicos imersos no arco do anel G foram realizadas quatro simulações numéricas incluindo corpos que possuem 50 m de raio, além de analisar o efeito de incluir ou não o satélite Aegaeon na simulação. O número total de corpos foi definido de modo que a massa total destes corpos possua 1 ou 2 m_{Aeg} (Tab. 6.7). A escolha destas condições iniciais foi feita com o objetivo de investigar a possibilidade de criar um sistema estável, no qual as colisões super-catastróficas poderiam suprir a perda de poeira no arco devido a pressão de radiação solar (MADEIRA et al., 2018).

Tabela 6.7 – Condições iniciais das simulações. O símbolo N representa o número total de corpos, a segunda coluna apresenta a massa total destes corpos em função da massa de Aegaeon e o x na última coluna indica a presença de Aegaeon na simulação.

Simulação	N	Massa (m_{Aeg})	Aegaeon
1*	126	1	x
2*	126	1	x
3*	252	2	-
4*	252	2	-

fonte: Produção do próprio autor.

De acordo com os dados de Hedman et al. (2010) estima-se a existência de 0.1 à 1 m_{Aeg} distribuídas no arco em corpos da ordem de até 100 metros de raio, entretanto a escolha de 1 e 2 m_{Aeg} foi feita devido a possibilidade de no passado o arco ter sido mais massivo. Ademais, para determinar os resultados das colisões ocorridas nas simulações foi utilizada a teoria de Leinhardt e Stewart (2012) que é válida apenas para corpos maiores do que 50 m de raio.

Analogamente as simulações da seção anterior, todas as simulações numéricas foram realizadas no pacote de integração numérica do REBOUND utilizando o integrador IAS15 com a mesma normalização para as variáveis do sistema. A distribuição orbital inicial dos corpos foi retirada de maneira aleatória das condições iniciais ilustrada na Figura 6.5.

A condição de colisão, assim como nas simulações anteriores, foi definida como colisão direta utilizando a função *reb_collision_direct* do REBOUND. Entretanto, devido ao interesse em calcular a massa de poeira produzida via colisão super-catastróficas ($M_{lr} = 0.1M_t$) as equações dos regimes de colisão (Cap. 5) foram implementadas na biblioteca de colisão. Para cada colisão foram calculados: a velocidade relativa V_i , ângulo de colisão (θ), o tipo de colisão e o raio do maior corpo formado pós-colisão M_{lr} , indicando os índices dos corpos que colidiram.

No entanto, computacionalmente os regimes de colisões foram simplificados para apenas dois casos, junção perfeita e colisão super-catastrófica, ou seja:

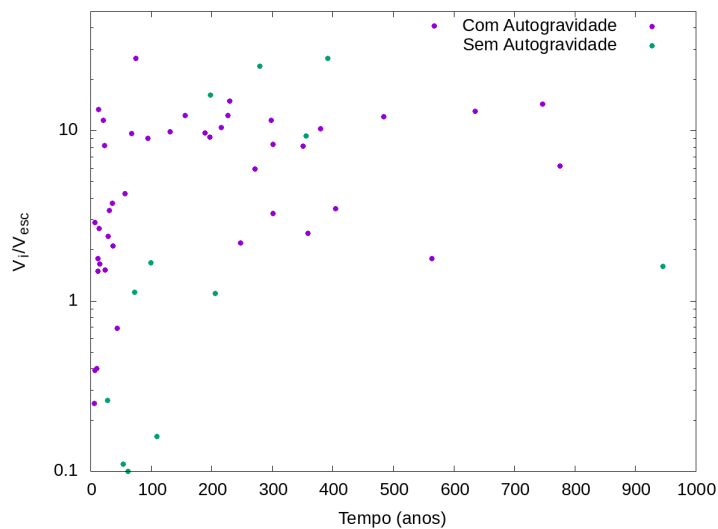
- se $v_i > v_{cat}$: ambos os corpos que colidiram serão retirados da simulação.
- se $v_i < v_{cat}$: a colisão será perfeitamente inelástica,

sendo v_{cat} definida na Equação (5.18), que defini a velocidade necessária para o maior corpo remanescente da colisão possuir 10% da massa total dos dois corpos que colidiram, ou seja $m_{lr} = 0.1$. Tal definição foi determinada devido ao interesse em apenas calcular a massa de poeira produzida pelas colisões super-catastrófica e pelo fato de facilitar a implementação do código, visto que quando a massa não é conservada o cálculo dos vetores de estado resultantes tornam-se mais complexos (LEINHARDT; STEWART, 2012).

Como citado no final da seção anterior, a auto-gravidade influencia de maneira determinante nos resultados das colisões e, devido a isto as 4 simulações foram realizadas com auto-gravidade (todos os corpos interagem entre si). Os valores utilizados para parâmetros adimensionais do material nestas simulações foram de $c^* = 5$ e $\bar{\mu} = 1.9$ que representam os ajustes para corpos massivos (STEWART; LEINHARDT, 2012).

Com um viés ilustrativo, a simulação 1* foi realizada com e sem auto gravidade. Na Figura 6.12 são apresentadas as discrepâncias tanto no número total de colisões, quanto no módulo das velocidades relativas resultantes em cada um das simulações. Também é possível verificar que em pouco tempo a simulação com auto-gravidade apresenta um aumento na velocidade relativa, fato que pode estar relacionado à encontros próximos com os demais corpos imersos no arco ou a atração mútua de ambos os corpos que estão prestes a colidir, de modo a acelerá-los.

Figura 6.12 – Razão de velocidades V_i/V_{esc} obtidas de duas simulações com mesmos parâmetros iniciais, nos casos com e sem autogravidade.



fonte: Produção do próprio autor.

Na Tabela 6.8 são apresentados os resultados para as colisões ocorridas nas simulações 1* à 4*. Esta tabela mostra que a maioria das colisões ocorridas são super-catastróficas, fato que ocorre devido as velocidades relativas dos corpos serem muito maiores do que a velocidade de escape mútua (definida pela Eq. 5.14), cujo valor é de 0.035 m/s para colisões entre dois corpos com raios de 50 m.

A Figura 6.13 apresenta as figuras dos regimes de colisão para as simulações com corpos distribuídos em 1 (acima) e 2 (abaixo) m_{Aeg} . Nestas figuras estão apresentadas todas as colisões, exceto as que ocorreram com o satélite Aegaeon. Em alguns dos casos houveram corpos que cresceram (obtendo raios de no máximo 90 m) e posteriormente colidiram novamente com corpos de 50 m. Ainda assim,

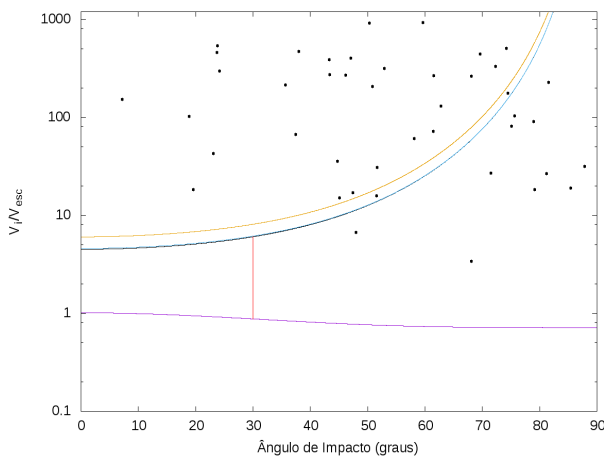
mesmo a razão de massa para estas colisões não ser 1:1, estas podem ser ilustradas no regime de colisão 1:1, devido ao fato de que, mesmo os gráficos com razão de massa 1:1 e 1:4, apresentam pouca diferença nos resultados (LEINHARDT; STEWART, 2012).

Tabela 6.8 – Análise das colisões com autogravidade.

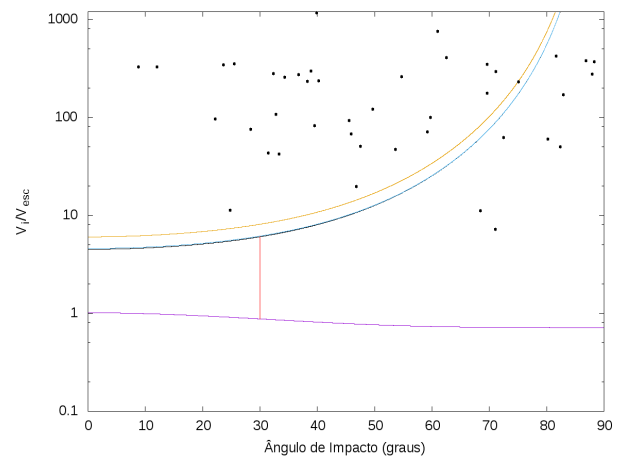
Simulação	Número total de colisões	Número de colisões com Aegaeon	Número de colisões super-catastróficas	% de colisões super-catastróficas
1*	43	-	30	69,8
2*	46	3	32	69,6
3*	97	-	62	63,9
4*	103	6	65	63,1

Fonte : Produção do próprio autor

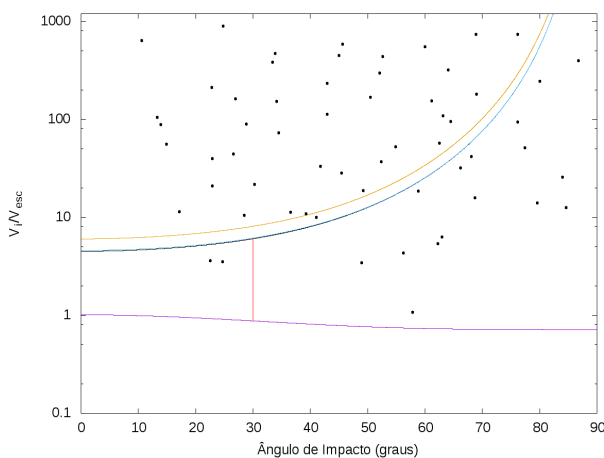
Figura 6.13 – Regimes de colisões em função da razão de massa, parâmetro de impacto e da razão de velocidades V_i/V_{esc} com valores de $c^* = 5$ e $\bar{\mu} = 0.36$. A cor roxa representa a curva de junção perfeita, a vermelha o b_{crit} , a preta a curva de erosão parcial ($M_{lr}/M_{tot} = 1$), a azul $M_{lr}/M_{tot} = 0.5$ e a amarela a curva de colisão super-catastrófica $M_{lr}/M_{tot} = 0.1$. Os pontos pretos indicam as colisões ocorridas em cada simulação.



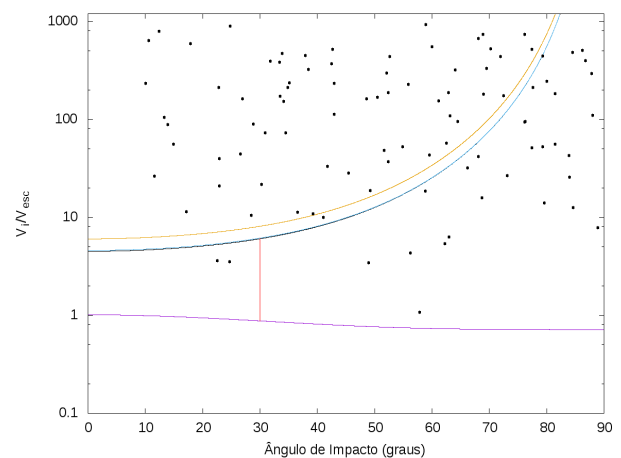
(a) $1m_{Aeg}$ sem o satélite Aegaeon



(b) $1m_{Aeg}$ com o satélite Aegaeon



(c) $2m_{Aeg}$ sem o satélite Aegaeon



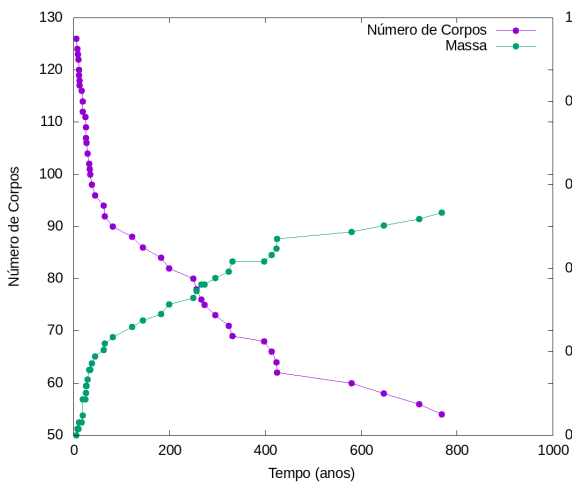
(d) $2m_{Aeg}$ com o satélite Aegaeon

fonte: Produção do próprio autor.

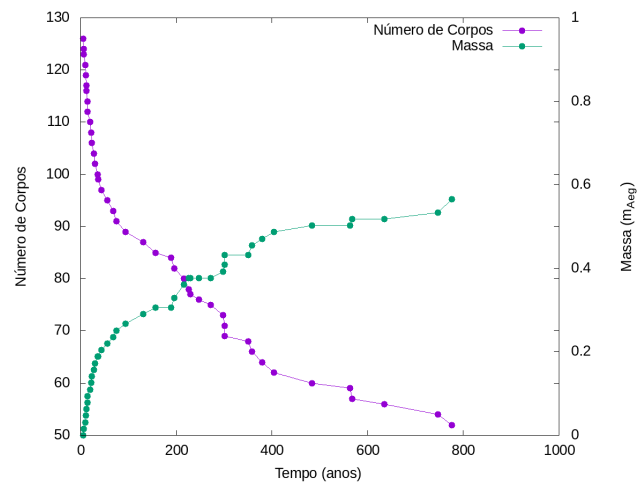
Estes gráficos indicam que a velocidade de colisão relativa sempre é maior do que a velocidade de escape mútua, isto é, todas as colisões estão situadas acima da curva de junção perfeita (roxa) obtendo que em nenhuma das colisões o corpo resultante irá possuir a massa total dos dois corpos que colidiram ($M_{lr} = M_{tot}$). Também é possível verificar que o principal motivo para algumas colisões não serem super-catastróficas se deve ao fato de que o ângulo de colisão foi alto ($\theta > 45^\circ$), sendo verificado que para estes ângulos as colisões situam-se abaixo da curva de colisão super catastrófica (amarela). Nestes casos, as colisões estão no regime de *hit-and-run* ou *graze-and-merge* dependendo do valor de V_{hr} (Eq. 5.16). Além disso, as simulações com massa de $1 m_{Aeg}$ também apresentaram 2 colisões que ocorreram no regime de acreção parcial, de modo que parte da massa do projétil seria acretada ao alvo.

A partir destes resultados foi analisado o número de corpos, bem como a massa de poeira produzida devido à colisões super-catastróficas em função do tempo. Na Figura 6.14 seguem os resultados para as simulações com corpos distribuídos em uma vez (acima) e duas vezes (abaixo) m_{Aeg} .

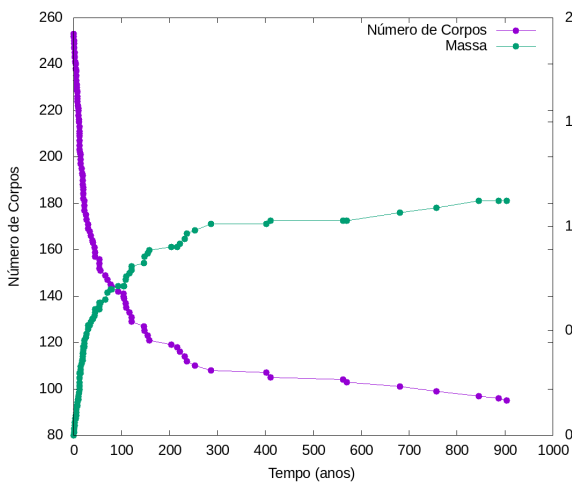
Figura 6.14 – Número de corpos e massa de poeira produzida em função do tempo das simulações 1* à 4*. Para tal cálculo foi considerado que toda a massa proveniente dos corpos que sofreram colisões super-catastróficas foram transformadas em poeira.



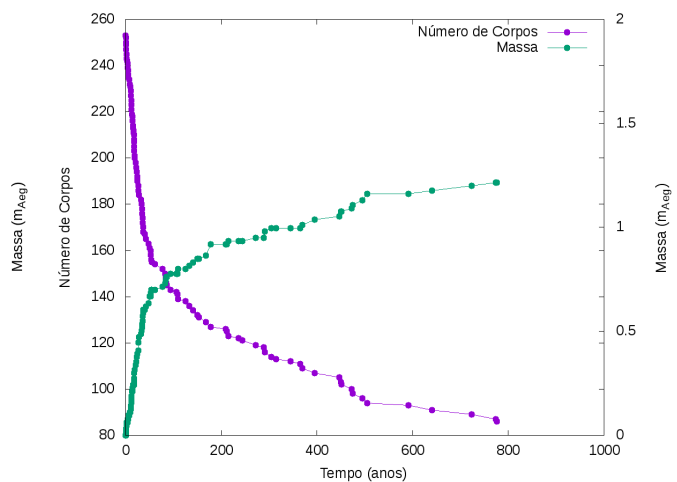
(a) $1m_{Aeg}$ sem o satélite Aegaeon



(b) $1m_{Aeg}$ com o satélite Aegaeon



(c) $2m_{Aeg}$ sem o satélite Aegaeon



(d) $2m_{Aeg}$ com o satélite Aegaeon

fonte: Produção do próprio autor.

É interessante notar que cerca de 70% (simulações com $1m_{Aeg}$) e 80% (simulações com $2m_{Aeg}$) das colisões ocorreram antes dos 300 anos, sendo que de 50% (simulações com $1m_{Aeg}$) e 65% (simulações com $2m_{Aeg}$) antes dos 100 anos. A massa de poeira foi calculada apenas para as colisões super-catastróficas desprezando as massas produzidas pelas colisões do tipo *partial erosion* e *hit-and-run*. Além disso, estes gráficos também mostram que a presença de Aegaeon pouco interfere nas colisões, tal como apresentado na Tabela 6.9.

Tabela 6.9 – Número de corpos e massa de poeira produzida ao final das simulações.

Simulação	Número corpos ao final da simulação	Massa de poeira (m_{Aeg})
1	54	0.53
2	52	0.56
3	95	1.12
4	86	1.22

fonte: Produção do próprio autor.

Este resultado mostra que a fonte de poeira do arco do anel G pode ser creditada à colisões super-catastróficas entre os corpos macroscópicos imersos no arco. Entretanto, não seria verdade admitir que todo o material produzido em uma seria poeira, mas se admitirmos que apenas 1% da massa total de uma colisão entre dois corpos com raios físicos de 50 m (9.4×10^8 kg, assumindo $d = 0.9$ g/cm³) fosse convertida em poeira obteríamos massa de poeira da mesma ordem de grandeza da existente no arco ($\approx 2 \times 10^6$).

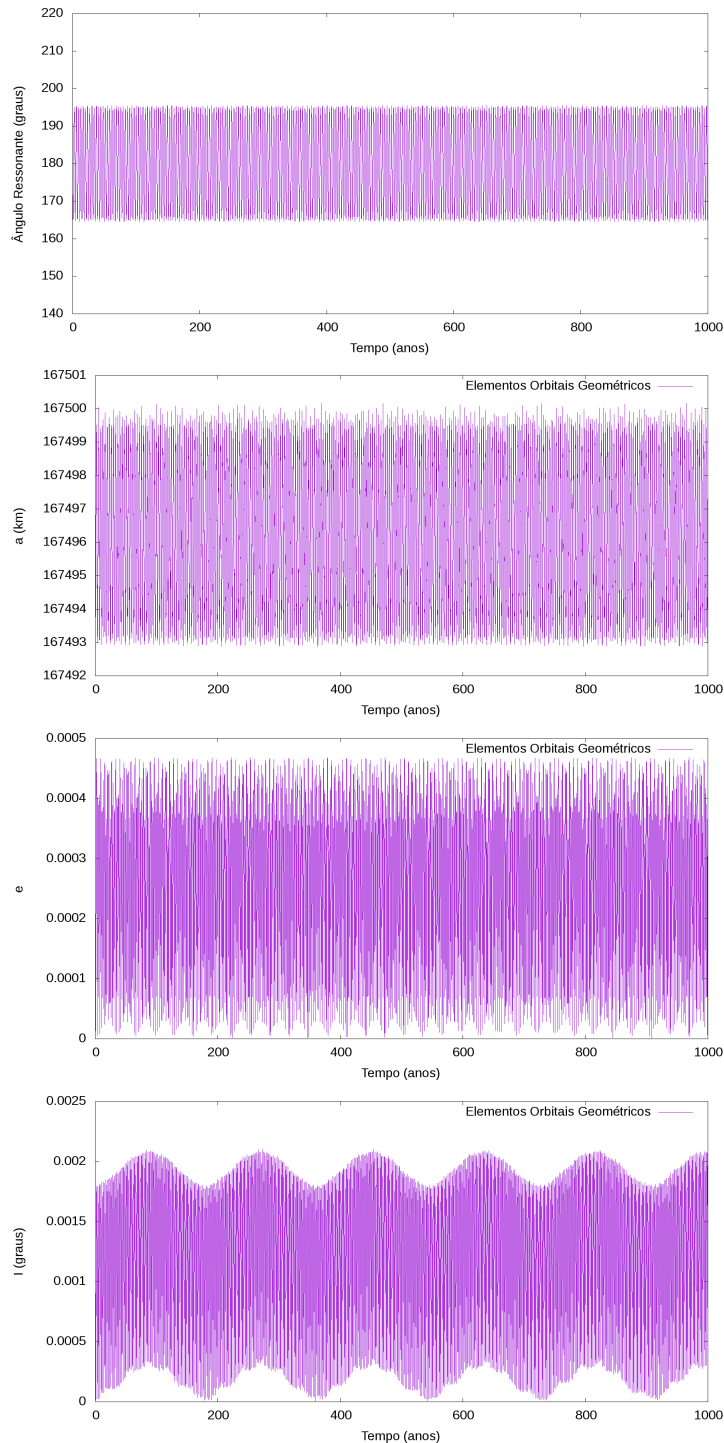
Com isto, este trabalho mostrou que é possível manter o arco do anel G estável, visto que como apresentado no capítulo 1, Madeira et al. (2018) mostraram que em menos de 40 anos a poeira do arco seria dissipada e que o satélite Aegaeon não poderia ser a fonte de poeira no arco como foi proposto por Hedman et al. (2010). Também foi mostrado que o satélite Aegaeon pouco influencia na dinâmica dos corpos concluindo que ele não é relevante para a produção de poeira no arco.

Outro resultado importante refere-se ao fato de que auto-gravidade dos corpos imersos no arco não afeta a órbita do satélite Aegaeon, assim como as colisões que ocorreram com ele. Na Figura 6.15 observa-se que o ângulo ressonante e os elementos orbitais do satélite Aegaeon mantêm-se bem comportado em função do tempo. Isto refere-se ao fato de que Aegaeon é ao menos 125 vezes mais massivo do que os demais corpos, e ao computar uma colisão inelástica este sofrerá efeitos mínimos em sua órbita. Este fato corrobora com os resultados de Hedman et al. (2010) que mostra que ao menos durante 20 anos (tempo em que a sonda Cassini obteve imagens do satélite) o satélite manteve-se bem comportado.

Por outro lado, ao analisar os resultados das colisões dos corpos com o satélite Aegaeon foi verificado que este seria destruído, devido à colisões consecutivas, em ambas as simulações. Na simulação com $1 m_{Aeg}$ após a primeira colisão este iria possuir um raio físico de ≈ 190 m, após a segunda ≈ 120 m e na terceira sofreria uma colisão super-catastrófica possuindo assim menos de 10% da massa resultante da segunda colisão e na terceira destruído após 775 anos de simulação. Já na simulação com $2 m_{Aeg}$ após a primeira colisão iria possuir ≈ 190 m e na segunda colisão destruído após 52 anos de simulação.

Por fim, a partir destes resultados pode-se supor que o arco do anel G tenha sido formado devido a uma colisão super-catastrófica, e o satélite Aegaeon o maior formado. Deste modo, este sistema estaria em evolução durante anos, podendo estar em sua fase final devido ao fato de existir de pouca massa distribuídas nos corpos macroscópicos, pois se Aegaeon for o maior corpo formado, teria uma quantidade de massa considerável distribuída nos corpos macroscópicos imersos no arco (aproximadamente 1000 corpos com raio de 50 m).

Figura 6.15 – Evolução temporal do ângulo ressonante φ_{cr} e dos elementos orbitais a , e , I do satélite Aegaeon.



fonte: Produção do próprio autor.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E ETAPAS FUTURAS

Neste trabalho foi verificado que as implementações do achatamento planetário, dos elementos geométricos e da biblioteca de colisões estão funcionando, sendo este trabalho facilmente expandido para o estudo dos arcos dos satélites Anthe e Methone.

O primeiro conjunto de simulações mostrou que o arco do anel G é estável em função de colisões inelásticas e que é possível formar satélites com raio físico da ordem de Aegaeon. Além disso, foi verificada a tendência de os maiores corpos serem formados próximos ao centro da ressonância, obtendo amplitudes para o ângulo ressonante de corotação próximos aos de Aegaeon e que caso houver um satélite imerso no arco este dificultaria o crescimento de outros corpos. Entretanto, foi verificada a necessidade da utilização de auto-gravidade devido aos corpos estarem distribuídos em uma pequena região e assim, estando suscetíveis a um grande número de encontros próximos.

Já o segundo conjunto de simulações, que possui autogravidade e o que melhor representa o arco, mostrou que é possível manter a população de poeira no arco do anel G através das colisões super-catastróficas entre os corpos macroscópicos imersos no arco e com isso manter o sistema estável por mais de 300 anos. Ademais, foi verificado que o satélite Aegaeon não é relevante para a produção de poeira e que este não é afetado pelos demais corpos que situam-se imersos no arco.

Entretanto, em ambas as simulações em que Aegaeon foi incluído, o satélite acabou sendo destruído. Estes resultados também levantaram a hipótese de este arco possa ter sido formado via uma colisão super-catastrófica e que este sistema pode ter sido formado a mais de 100 de anos mantendo-se estável devido aos corpos macroscópicos no arco.

As etapas futuras deste trabalho serão analisar a formação de pequenos satélites utilizando a auto-gravidade e o regime de colisões. O objetivo é verificar se é possível acretar massa a um satélite embrião distribuindo a mesma quantidade de massa em um número maior de corpos com raios físicos menores e para isto, será necessária quebrar a barreira computacional.

REFERÊNCIAS

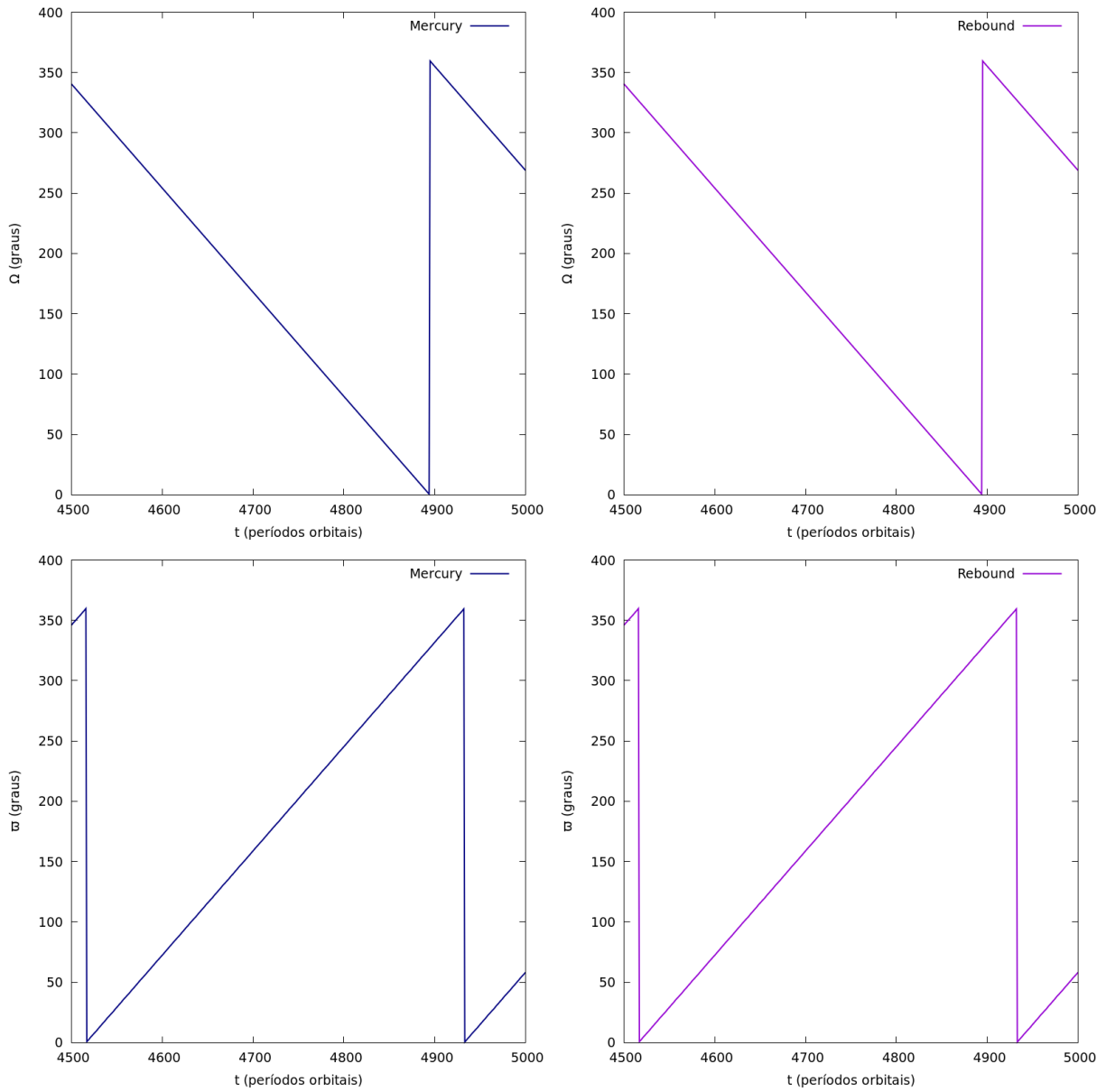
- ARAUJO, N. C. S.; NETO, E. V.; FORYTA, D. W. Formation of the g-ring arc. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 461, p. 1868–1874, 2016.
- BAALKE, R. **Historical Background of Saturn's Rings**. 2018. Disponível em: <<http://solarviews.com/eng/saturnbg.htm>>. Acesso em: 17 jan. 2019.
- BORDERIES-RAPPAPORT, N.; LONGARETTI, P.-Y. Test particle motion around an oblate planet. **Icarus**, v. 107, n. 1, p. 129–141, 1994.
- BROUWER, D.; CLEMENCE, G. M. **Methods of celestial mechanics**. 1. ed. New York: Academic Press, 1961.
- BUZZATTO, P. **Adaptação do integrador Rebound para o estudo de anéis planetários**. 2019. 117 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2019.
- CHAMBERS, J. E. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 304, p. 793–799, 1999.
- ELLIOT, J. L.; DUNHAM, E.; MINK, D. The rings of Uranus. **Nature**, v. 267, p. 328–330, 1977.
- EVERHART, E. An efficient integrator that uses gauss-radau spacings. **International Astronomical Union Colloquium**, Cambridge University Press, v. 83, p. 185–202, 1985.
- HEDMAN, M. et al. The source of saturn's g ring. **Science**, v. 317, n. 5838, p. 653–656, 2007.
- HEDMAN, M. et al. Aegaeon (saturn liii), a g-ring object. **Icarus**, v. 207, p. 433–447, 2010.
- HEDMAN, M. M. et al. Three tenuous rings/arcs for three tiny moons. **Icarus**, v. 199, p. 378–386, 2009.
- KEVIN, R. H.; KEITH, A. H. On the fragmentation of asteroids and planetary satellites. **Icarus**, v. 84, n. 1, p. 226 – 253, 1990.
- LEINHARDT, Z. M.; STEWART, S. T. Collisions between gravity-dominated bodies. i. outcome regimes and scaling laws. **The Astrophysical Journal**, v. 745, p. 79, 2012.
- LONGARETTI, P.-Y. Planetary ring dynamics – the streamline formalism – 1. from boltzmann equation to celestial mechanics. **ArXiv e-prints**, 2016.
- MADEIRA, G. et al. Production and fate of the g ring arc particles due to aegaeon (saturn liii). **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 475, p. 5474–5479, 2018.
- MELOSH, H.; RYAN, E. Asteroids: Shattered but not dispersed. **Icarus**, v. 129, n. 2, p. 562 – 564, 1997.
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- NAMOUNI, F.; PORCO, C. The confinement of neptune's ring arcs by the moon galatea. **Nature**, v. 417, p. 45–7, 2002.

- PARK, R.; CHAMBERLIN, B. **HORIZONS Web-Interface**. 2017. Disponível em: <<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>>. Acesso em: 17 jan. 2019.
- PORCO, C. An explanation for neptune's ring arcs. **Science**, v. 253, n. 5023, p. 995–1001, 1991.
- PORCO, C. on behalf of the cassini imaging team 2009. s/2008 s1. **IAU Circ**, v. 9023, 2009.
- REIN, H.; SPIEGEL, D. S. Ias15: a fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 446, p. 1424–1437, 2015.
- RENNER, S.; SICARDY, B. Use of the geometric elements in numerical simulations. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 94, n. 12, p. 237 – 248, 2006.
- SPIPKER, L. J.; ALTOBELLI, N.; EDGINGTON, S. G. Surprises in the Saturn System: 10 Years of Cassini Discoveries and More Excitement to Come. **AGU Fall Meeting Abstracts**, p. 12, 2014.
- STEWART, S. T.; LEINHARDT, Z. M. Collisions between gravity-dominated bodies. ii. the diversity of impact outcomes during the end stage of planet formation. **The Astrophysical Journal**, v. 751, n. 1, p. 32, 2012.
- STONE, E. C.; MINER, E. D. Voyager 1 encounter with the saturnian system. **Science**, v. 212, n. 4491, p. 159–163, 1981.
- VAN ALLEN, J. Findings on rings and inner satellites of saturn by pioneer 11. **Icarus**, v. 51, n. 3, p. 509 – 527, 1982.
- VAN HELDEN, A. The beginnings, from lipperhey to huygens and cassini. **Experimental Astronomy**, v. 25, n. 1, p. 3, 2009.

APÊNDICE A – POTENCIAL GRAVITACIONAL

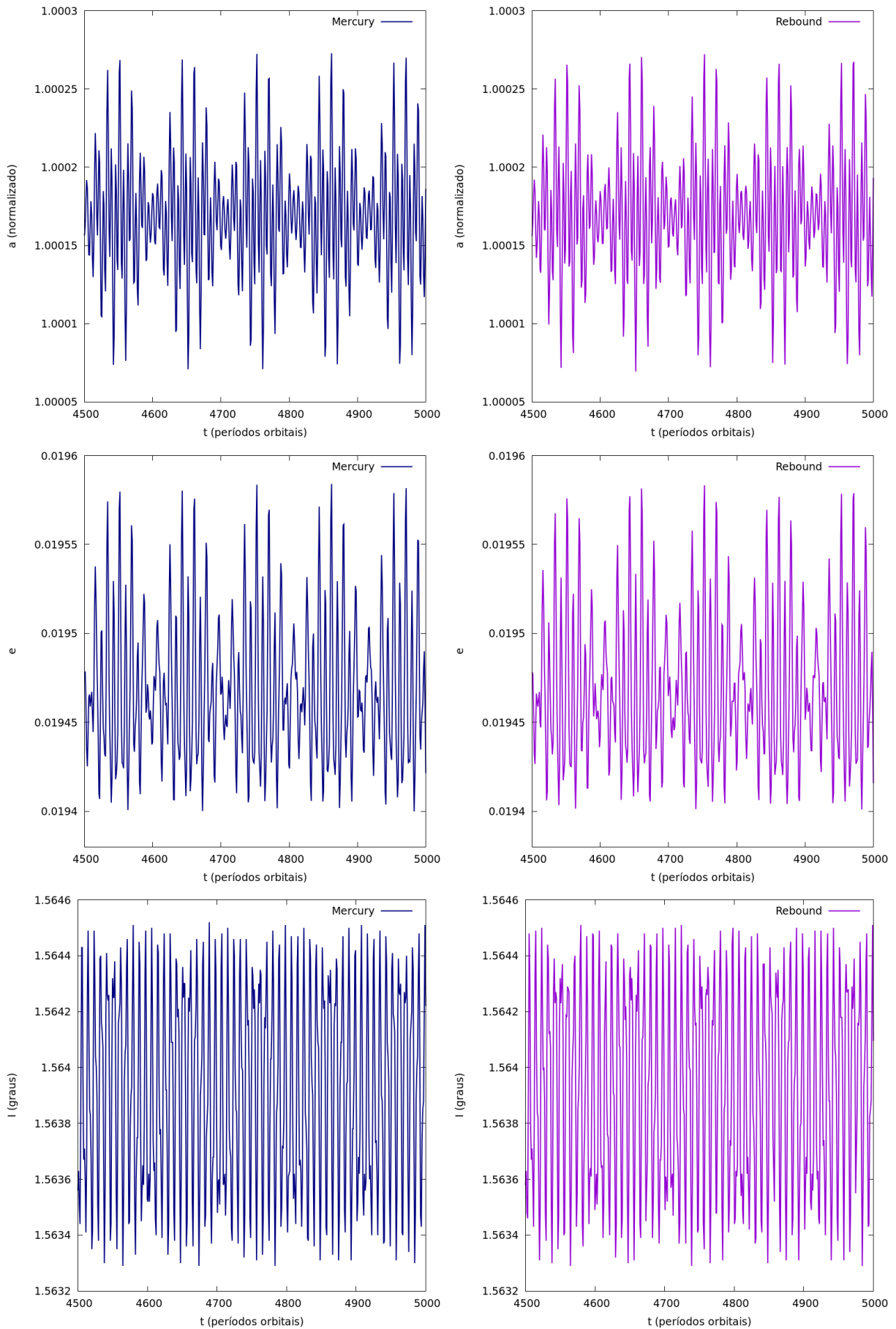
Neste apêndice serão apresentados os resultados das comparações dos efeitos dos coeficientes J_2 , J_4 e J_6 separadamente, sendo apresentadas as simulações realizadas com o pacote de integração do Mercury e do REBOUND.

Figura A.1 – Precessão de Ω e ϖ devido ao efeito do coeficiente J_2 de Saturno. À esquerda seguem os resultados obtidos via simulação numérica realizada no pacote de integração do Mercury e a direita do REBOUND.



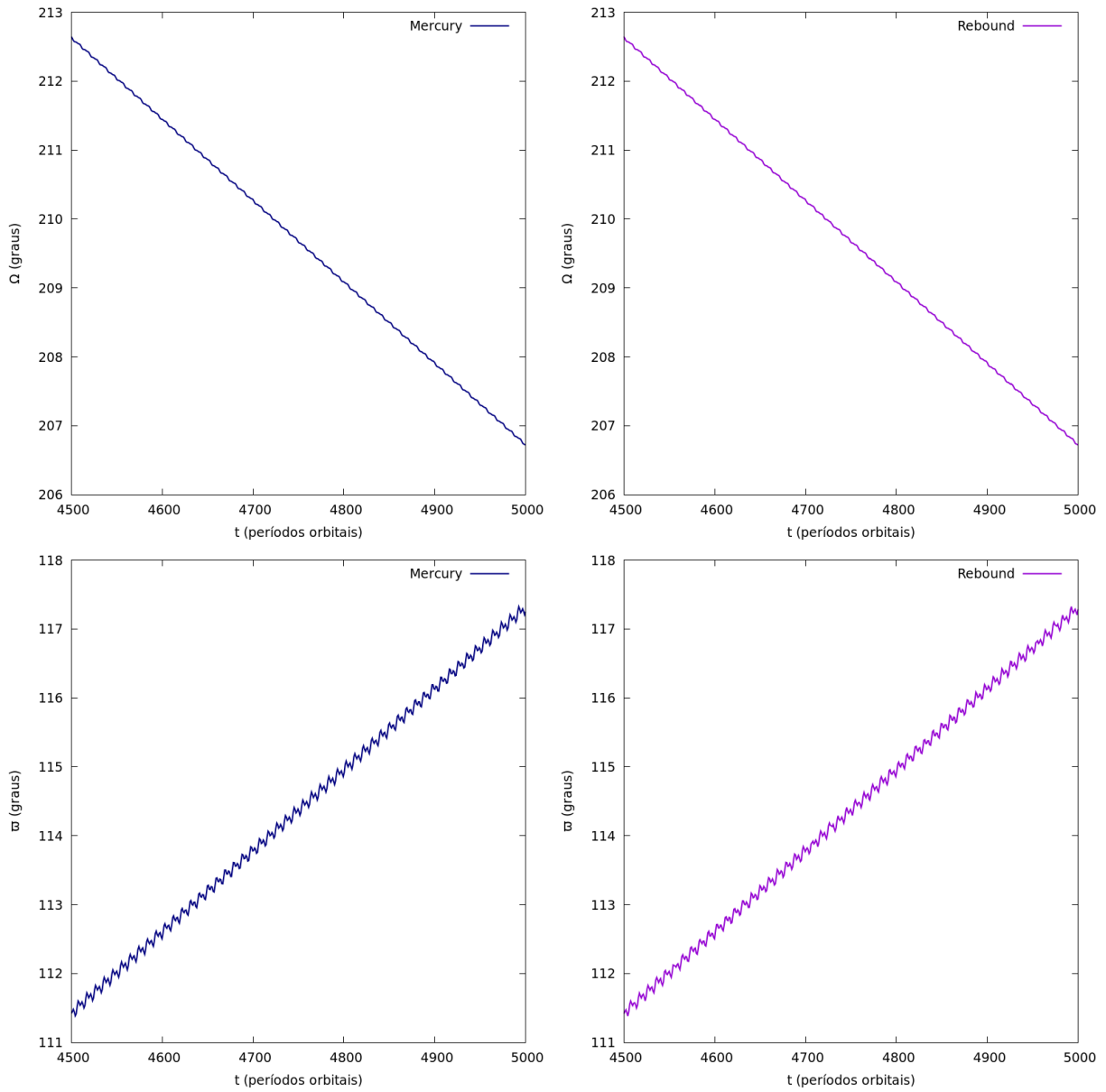
fonte: Produção do próprio autor.

Figura A.2 – Variação de a , e , I do satélite Mimas em função do tempo devido ao efeito do coeficiente J_2 de Saturno. À esquerda seguem os resultados obtidos via simulação numérica realizada no pacote de integração do Mercury e a direita do REBOUND.



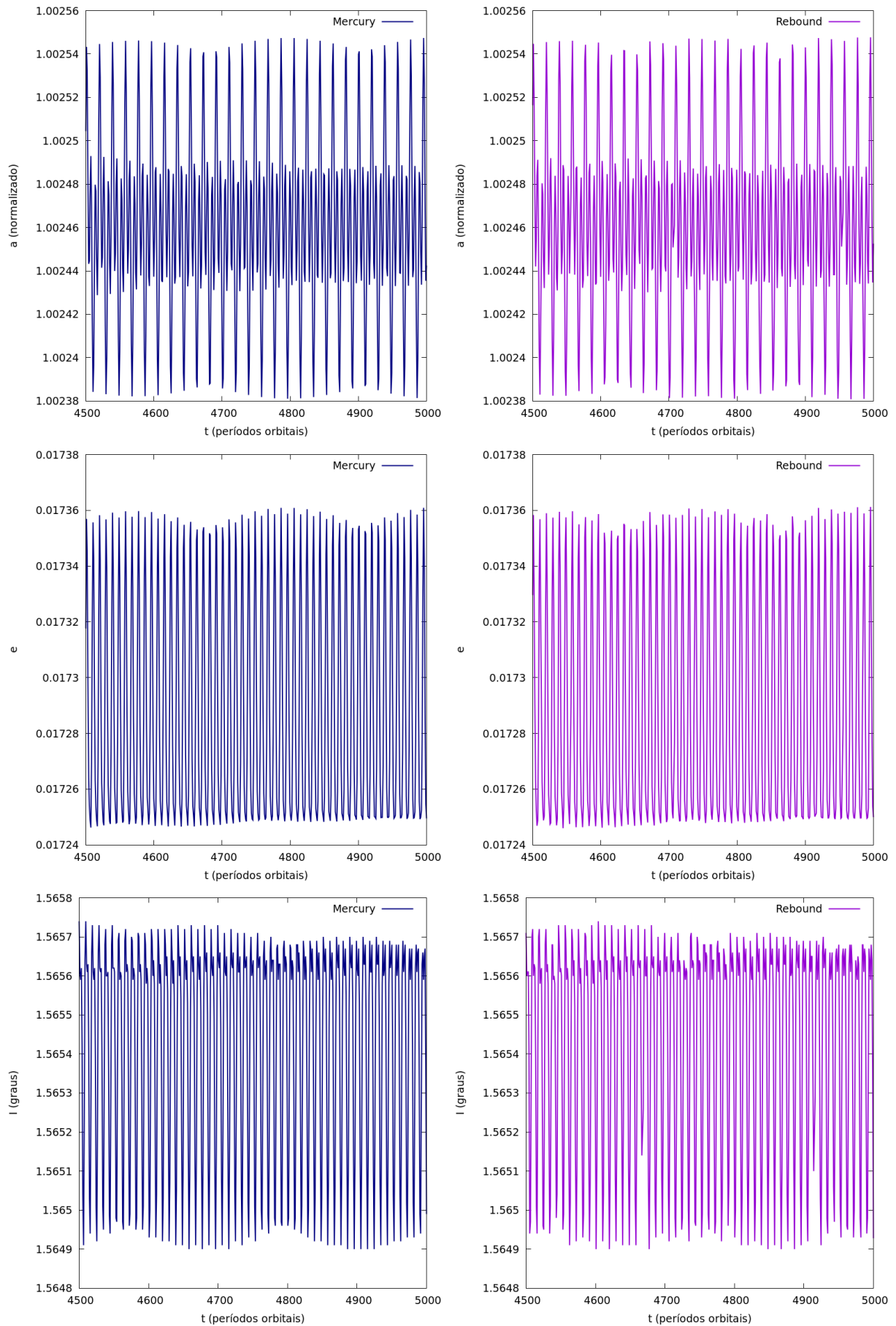
fonte: Produção do próprio autor.

Figura A.3 – Precessão de Ω e ϖ devido ao efeito do coeficiente J_4 de Saturno. À esquerda seguem os resultados obtidos via simulação numérica realizada no pacote de integração do Mercury e a direita do REBOUND.



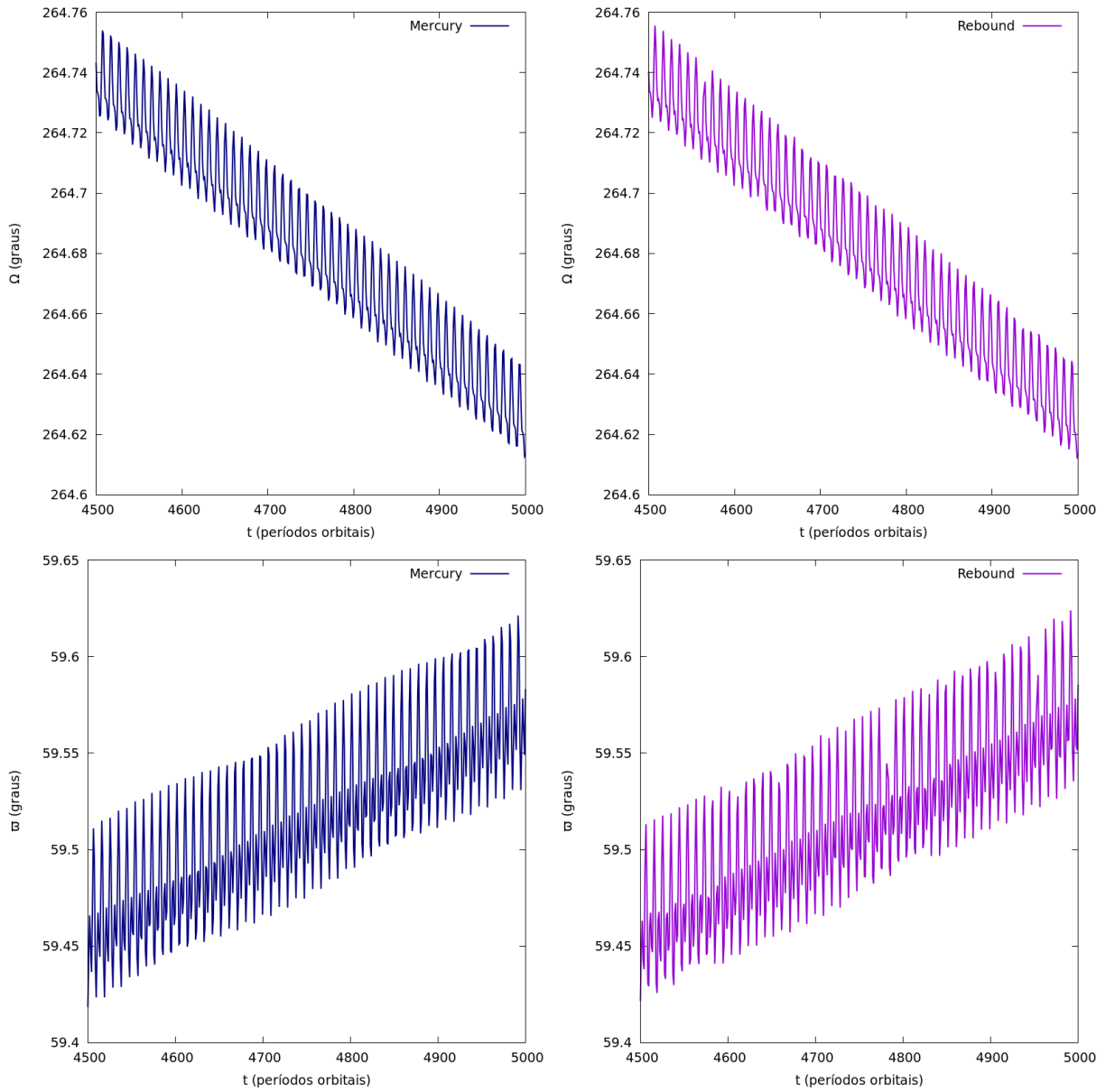
fonte: Produção do próprio autor.

Figura A.4 – Variação de a , e , I do satélite Mimas em função do tempo devido ao efeito do coeficiente J_4 de Saturno. À esquerda seguem os resultados obtidos via simulação numérica realizada no pacote de integração do Mercury e a direita do REBOUND.



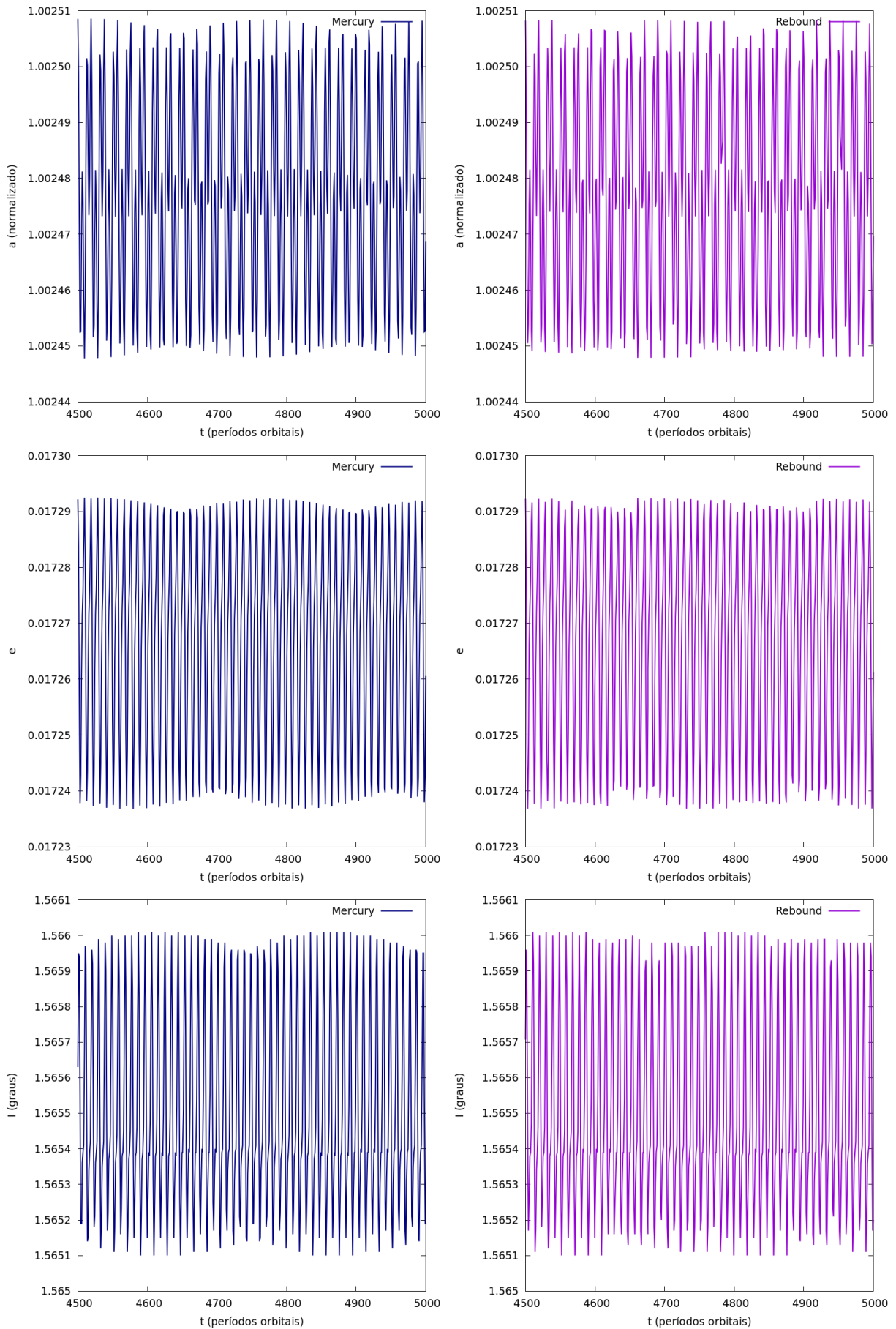
fonte: Produção do próprio autor.

Figura A.5 – Precessão de Ω e ϖ devido ao efeito do coeficiente J_6 de Saturno. À esquerda seguem os resultados obtidos via simulação numérica realizada no pacote de integração do Mercury e a direita do REBOUND.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura A.6 – Variação de a , e , I do satélite Mimas em função do tempo devido ao efeito do coeficiente J_6 de Saturno. À esquerda seguem os resultados obtidos via simulação numérica realizada no pacote de integração do Mercury e a direita do REBOUND.

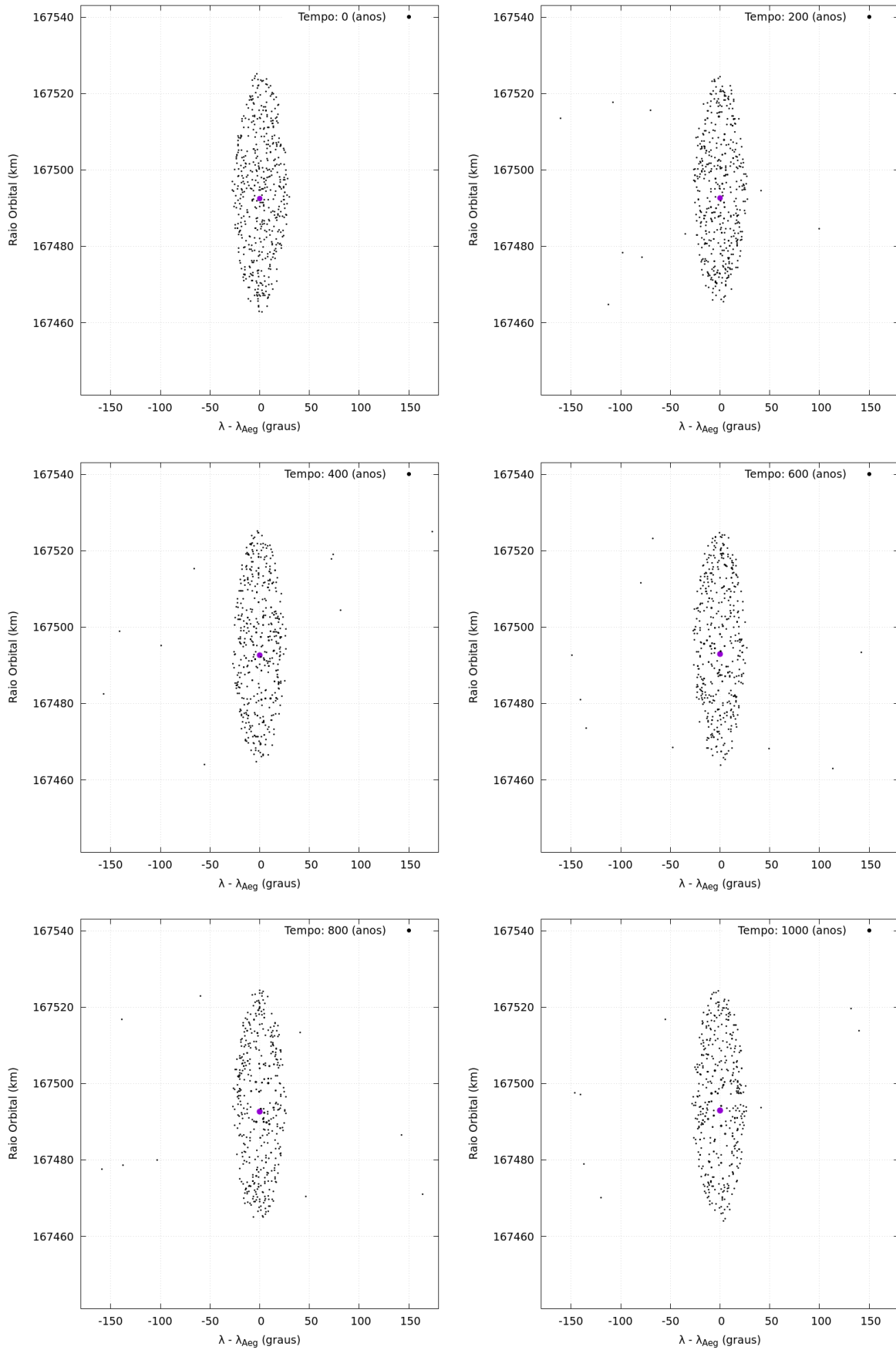


fonte: Produção do próprio autor.

APÊNDICE B – SIMULAÇÕES

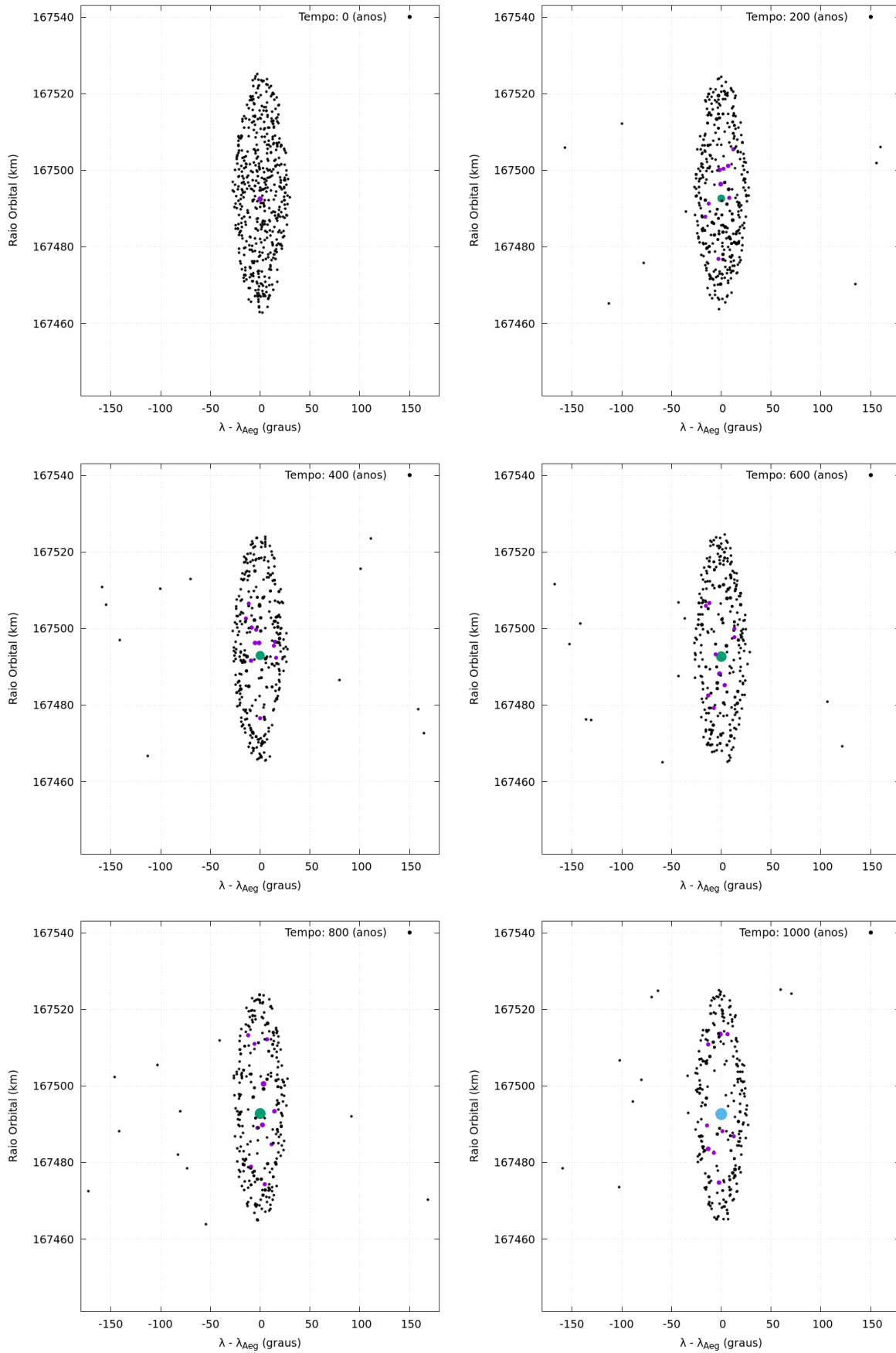
Neste apêndice serão apresentados as evoluções temporais das simulações discutidas na Seção 6.1. As figuras foram feitas a cada 200 anos com o objetivo de ilustrar o crescimento dos objetos no arco.

Figura B.1 – Evolução temporal da simulação 1 (500 corpos com raio de 50 m incluindo o satélite Aegaeon)



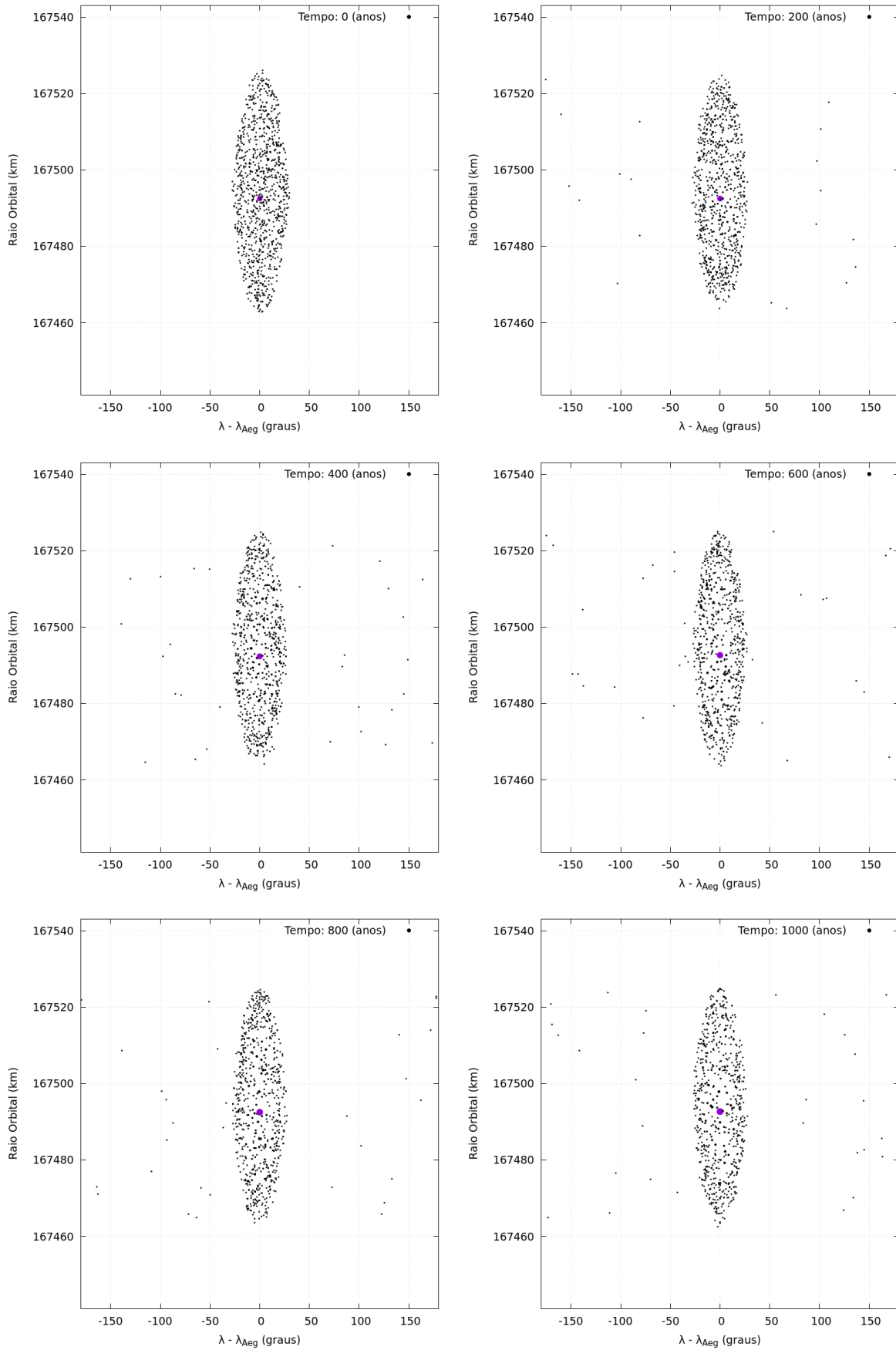
fonte: Produção do próprio autor.

Figura B.2 – Evolução temporal da simulação 2 (500 corpos com raio de 100 m incluindo o satélite Aegaeon)



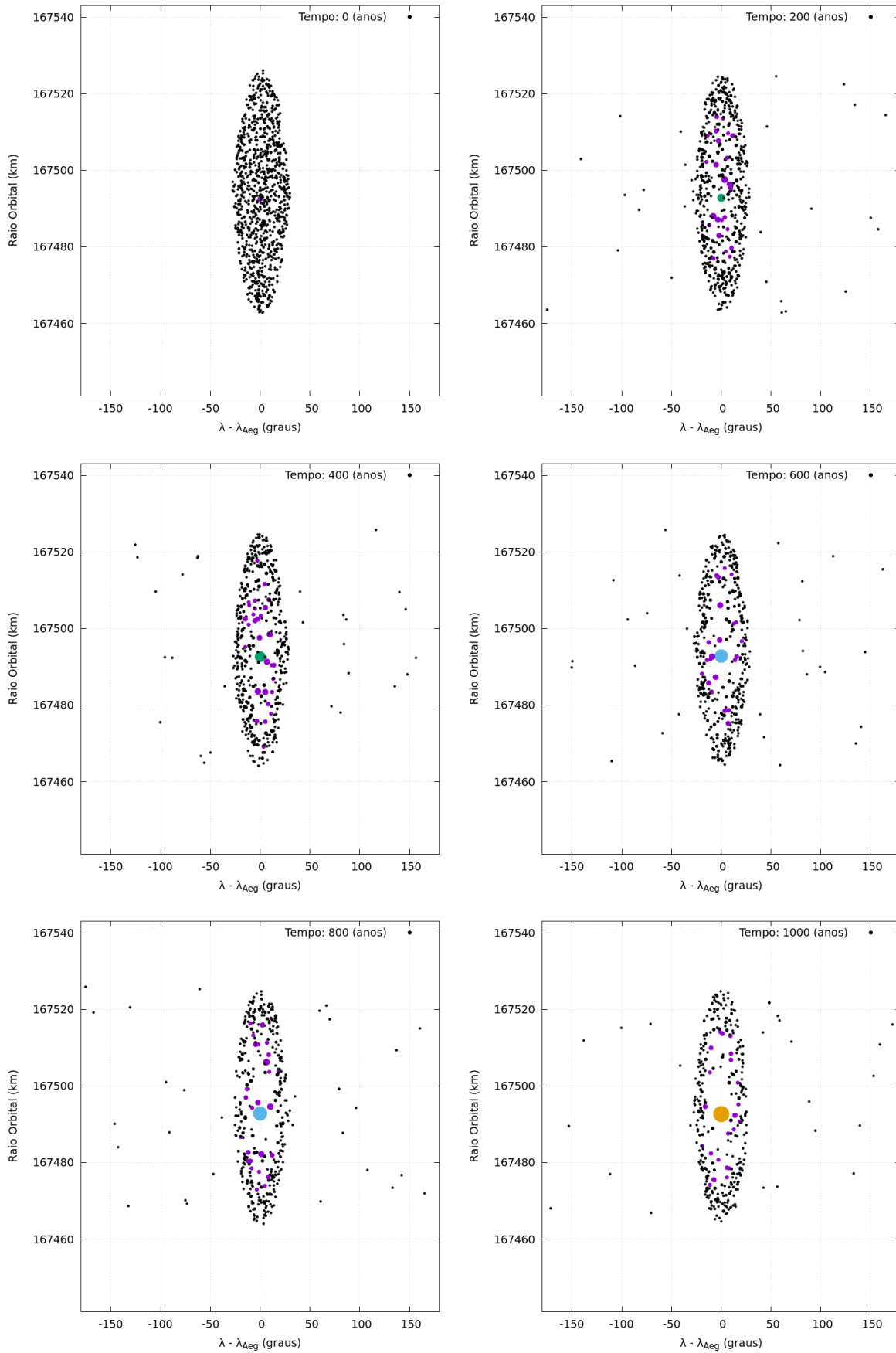
fonte: Produção do próprio autor.

Figura B.3 – Evolução temporal da simulação 3 (1000 corpos com raio de 50 m incluindo o satélite Aegaeon).



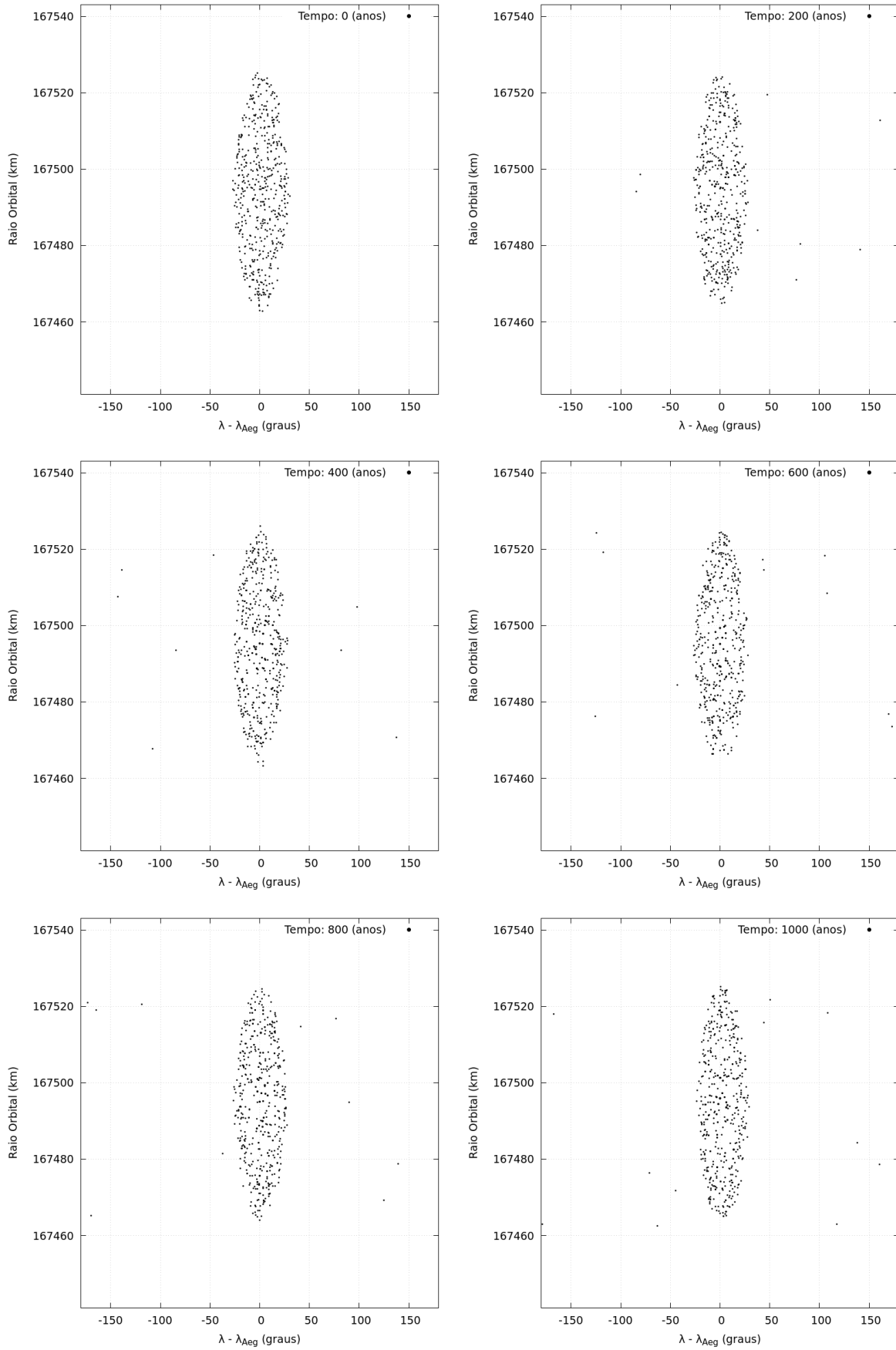
fonte: Produção do próprio autor.

Figura B.4 – Evolução temporal da simulação 4 1 (1000 corpos com raio de 100 m incluindo o satélite Aegaeon).



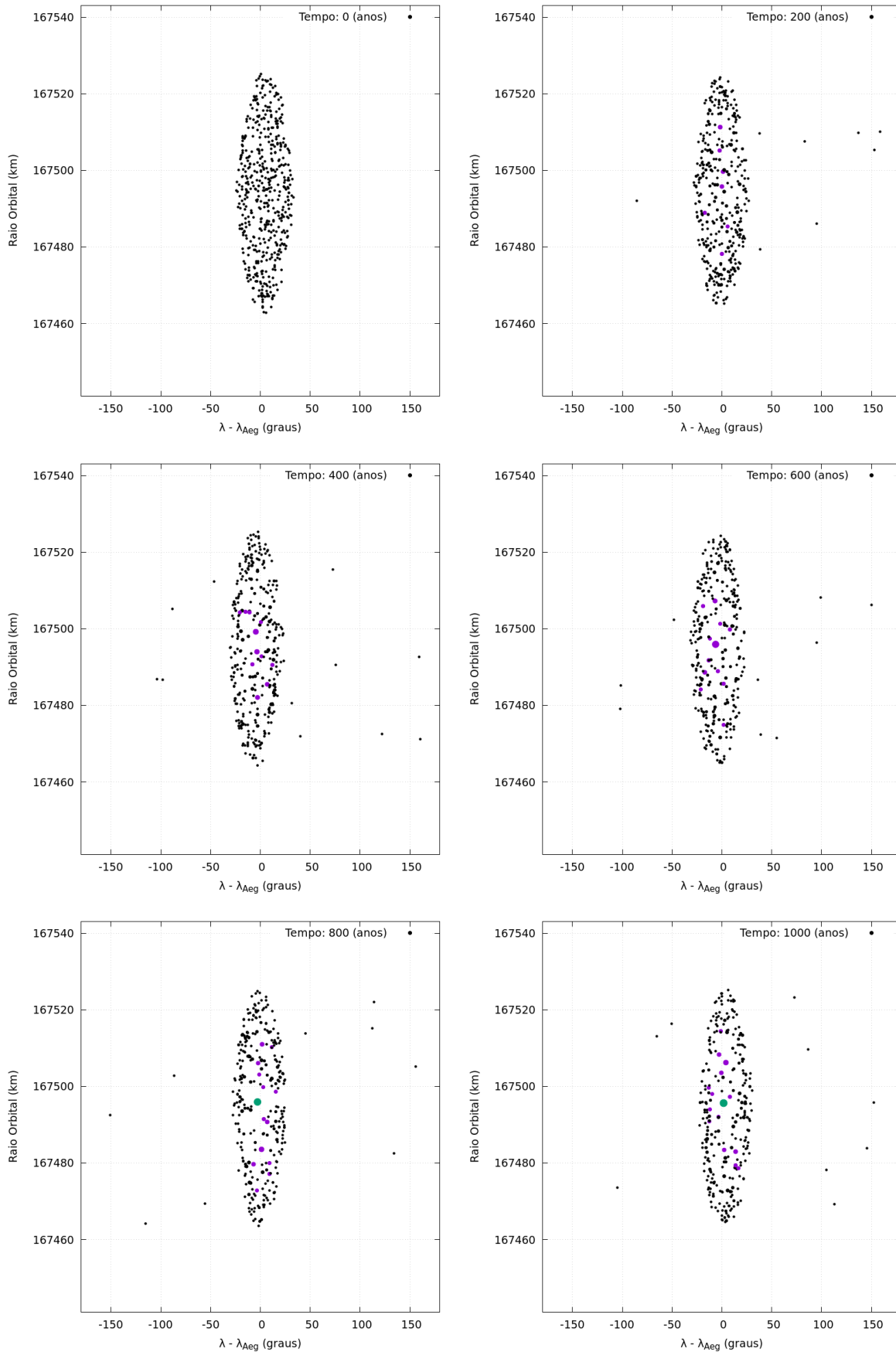
fonte: Produção do próprio autor.

Figura B.5 – Evolução temporal da simulação 5 (500 corpos com raio de 50 m sem o satélite Aegaeon).



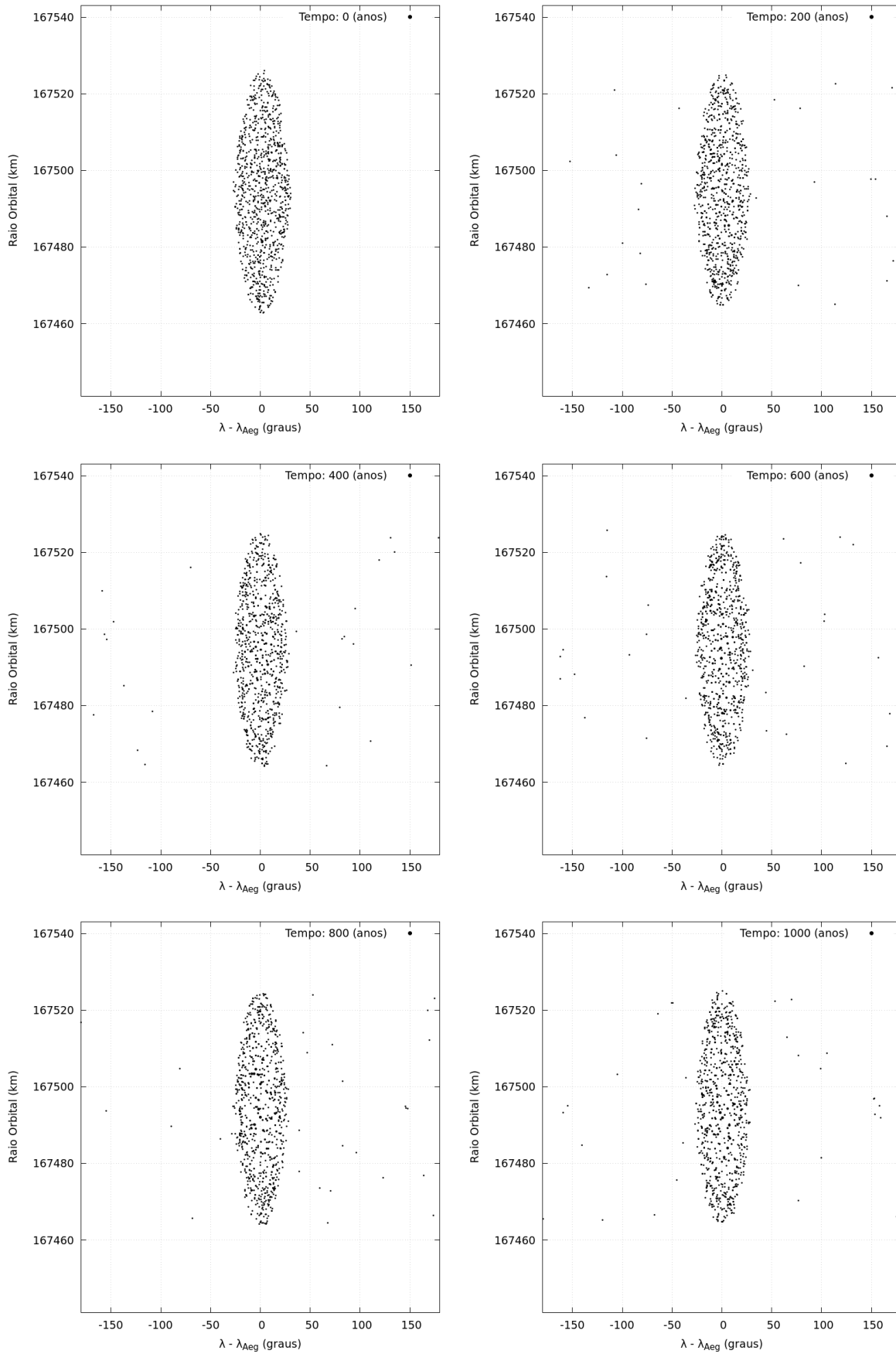
fonte: Produção do próprio autor.

Figura B.6 – Evolução temporal da simulação 6 (500 corpos com raio de 100 m sem o satélite Aegaeon).



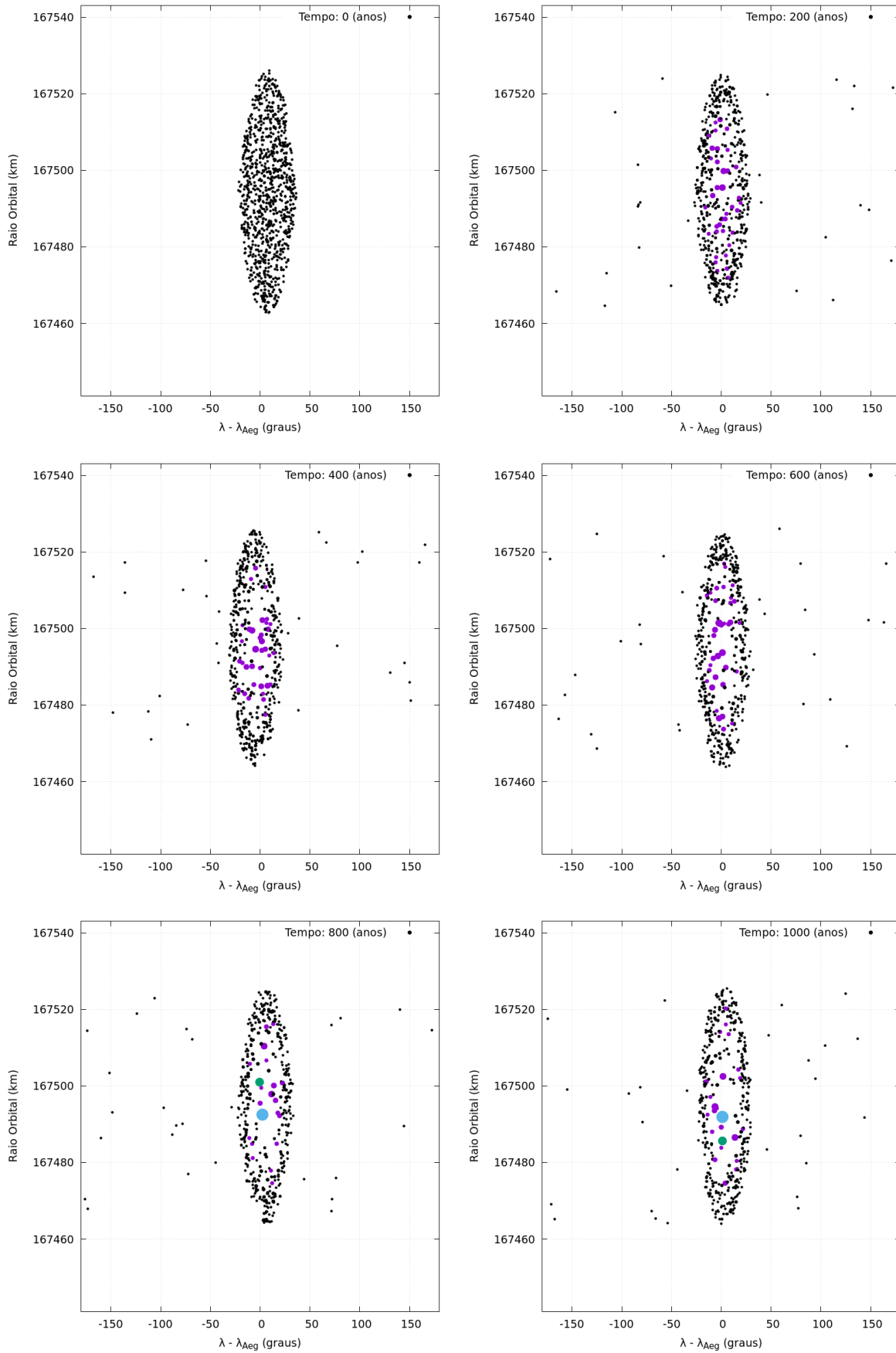
fonte: Produção do próprio autor.

Figura B.7 – Evolução temporal da simulação 7 (1000 corpos com raio de 50 m sem o satélite Aegaeon).



fonte: Produção do próprio autor.

Figura B.8 – Evolução temporal da simulação 8 (1000 corpos com raio de 100 m sem o satélite Aegaeon).



fonte: Produção do próprio autor.