

Rafael Paulino Silva

**Determinação de Comportamento Não Caótico de  
Sistemas Diferenciais Quadráticos em  $\mathbb{R}^3$  via  
Superfícies Algébricas Invariantes**

Tese de Doutorado  
Pós-Graduação em Matemática

São José do Rio Preto

2019

Rafael Paulino Silva

**Determinação de Comportamento Não Caótico de Sistemas  
Diferenciais Quadráticos em  $\mathbb{R}^3$  via Superfícies Algébricas  
Invariantes**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.  
Financiadora: Capes.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Messias.

São José do Rio Preto

2019

S586d

Silva, Rafael Paulino

Determinação de comportamento não caótico de sistemas diferenciais quadráticos em  $R^3$  via superfícies algébricas invariantes / Rafael Paulino

Silva. -- São José do Rio Preto, 2019

91 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Marcelo Messias

1. Sistemas dinâmicos. 2. Comportamentos caótico e não caótico. 3. Superfícies algébricas invariantes. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**Rafael Paulino Silva**

**Determinação de Comportamento Não Caótico de Sistemas  
Diferenciais Quadráticos em  $\mathbb{R}^3$  via Superfícies Algébricas**

**Invariantes**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: Capes.

**Banca Examinadora**

---

Prof. Dr. Marcelo Messias  
Professor Livre Docente/ UNESP - São José do Rio Preto  
Orientador

---

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi  
Professor Titular/ UNESP - São José do Rio Preto

---

Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa  
Professor Livre Docente/ UNESP - São José do Rio Preto

---

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello  
Professor Titular/ UNIFEI - Itajubá

---

Prof. Dr. Fábio Scalco Dias  
Professor Associado/ UNIFEI - Itajubá

São José do Rio Preto, 25 de abril de 2019.

*Aos meus pais*

# Agradecimentos

Agradeço inicialmente à Deus, por guiar o meu caminho ao longo de todos estes anos de pós-graduação.

A meu pai Donisete, minha mãe Sueli e meu irmão Guilherme pela força e o incentivo nos momentos difíceis.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Marcelo Messias que foi de vital importância para o desenvolvimento e conclusão desse trabalho e por sua amizade e incentivo. Aos membros da banca pelas contribuições pertinentes e importantes a este trabalho.

A todos os professores e funcionários do IBILCE, amigos da graduação e pós-graduação que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização desta tese e também pelo companheirismo em todos os momentos.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES)-Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

A matemática é o alfabeto com o qual

Deus escreveu o universo.

*Galileu Galilei*

# Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma condição algébrica suficiente para determinar o comportamento não caótico de sistemas diferenciais polinomiais definidos em  $\mathbb{R}^3$ . Usando essa condição, apresentamos um resultado parcial para uma conjectura sobre a não caoticidade de sistemas diferenciais polinomiais quadráticos definidos em  $\mathbb{R}^3$  com matriz jacobiana simétrica. Além disso, utilizando o mesmo resultado, estabelecemos condições para que certas classes de equações diferenciais ordinárias da forma  $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, \ddot{x})$ , conhecidas como *jerk equations*, e certas classes de sistemas do tipo Lorenz, não apresentem comportamento caótico.

Por fim, investigamos o comportamento qualitativo de sistemas diferenciais polinomiais quadráticos definidos em  $\mathbb{R}^3$  que apresentam quádricas do tipo  $G_p = x^2 + y^2 - z^2 + p$ , com  $p \in [-1, 1]$ , como superfícies algébricas invariantes, incluindo o estudo do comportamento no infinito utilizando compactificação de Poincaré.

**Palavras-chave:** Sistemas dinâmicos, Comportamentos caótico e não caótico, Superfícies algébricas invariantes.



# Abstract

In this work, we present a sufficient algebraic condition to determine the nonchaotic behavior of polynomial differential systems defined in  $\mathbb{R}^3$ . Using this condition, we present a partial positive answer for a conjecture concerning the nonchaotic behavior of quadratic differential systems in  $\mathbb{R}^3$  with a symmetric Jacobian matrix. Furthermore, using the same result, we establish conditions for certain classes of ordinary differential equations of the form  $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, \ddot{x})$ , called jerk equations, and certain classes of Lorenz-Like systems do not present chaotic behavior.

Finally, we investigate the qualitative behavior of quadratic polynomial differential systems in  $\mathbb{R}^3$  which present the quadrics  $G_p = x^2 + y^2 - z^2 + p$ , with  $p \in [-1, 1]$  as invariant algebraic surfaces, including the study of their behavior at infinity, via Poincaré compactification.

**Keywords:** Dynamical Systems, Chaotic and Nonchaotic Behavior, Invariant Algebraic Surface.

# Lista de Figuras

2.1	Atrator de Lorenz. . . . .	18
2.2	Alguns possíveis conjuntos $\omega$ -limite de órbitas de sistemas diferenciais planares. $\omega(p) = \{q\}$ (um ponto singular); $\omega(p) = \{\gamma\}$ (um ciclo limite); $\omega(p) = \{\Gamma\}$ (um gráfico). . . . .	22
2.3	Retrato de fase do sistema (2.11) com $a = \frac{1}{2}$ e $b = 2$ , . . . . .	34
2.4	Ilustração de alguns possíveis retratos de fase do exemplo (2.23). . . . .	41
3.1	Rabinovich caso (a). . . . .	48
3.2	Rabinovich caso (b). . . . .	48
3.3	Chen-Ueta. . . . .	49
3.4	Lorenz caso (a) . . . . .	50
3.5	Lorenz caso (b) . . . . .	50
3.6	Retrato de fase do sistema diferencial (3.18). . . . .	52
4.1	Superfície $G _{-1} = 0$ . . . . .	63
4.2	Superfície $G _{-1} = 0$ . . . . .	64
4.3	Superfície $G _{-1} = 0$ . . . . .	65
4.4	Superfície $G _0 = 0$ . . . . .	65
4.5	Superfície $G _1 = 0$ . . . . .	65
4.6	Superfície $G _{-1} = 0$ . . . . .	66
4.7	Superfície $G _0 = 0$ . . . . .	66
4.8	Superfície $G _1 = 0$ . . . . .	66
4.9	Superfície $G _{-1} = 0$ . . . . .	67
4.10	Superfície $G _0 = 0$ . . . . .	67
4.11	Superfície $G _1 = 0$ . . . . .	67
4.12	Superfície $G _{-1} = 0$ . . . . .	68

4.13 Superfície $G _0 = 0$ . . . . .	68
4.14 Superfície $G _1 = 0$ . . . . .	68
4.15 Superfície $G _{-1} = 0$ . . . . .	69
4.16 Superfície $G _0 = 0$ . . . . .	69
4.17 Superfície $G _1 = 0$ . . . . .	69
4.18 $G_{-1} = 0$ para $e_2 \neq f_1$ . . . . .	72
4.19 $G_0 = 0$ para $e_2 \neq f_1$ . . . . .	72
4.20 $G_{-1} = 0$ para $e_2 \neq f_1$ . . . . .	73
4.21 $G_0 = 0$ para $e_2 \neq f_1$ . . . . .	73
4.22 $G_{-1} = 0$ para $e_2 \neq f_1$ . . . . .	73
4.23 $G_0 = 0$ para $e_2 \neq f_1$ . . . . .	73
4.24 Superfície $G_{-1} = 0$ . . . . .	75
4.25 Superfície $G_0 = 0$ . . . . .	75
4.26 Superfície $G_1 = 0$ . . . . .	75
4.27 Superfície $G_{-1} = 0$ . . . . .	76
4.28 Superfície $G_0 = 0$ . . . . .	76
4.29 Superfície $G_1 = 0$ . . . . .	76
4.30 Representação do espaço de fase na esfera de Poincaré do sistema diferencial (4.18). . . . .	80
4.31 Representação do espaço de fase na esfera de Poincaré do sistema diferencial (4.18). . . . .	80
4.32 Superfície $G _{-1} = 0$ . . . . .	81
4.33 Superfície $G _0 = 0$ . . . . .	81
4.34 Superfície $G _1 = 0$ . . . . .	81
4.35 Superfície $G _{-1} = 0$ . . . . .	82
4.36 Superfície $G _0 = 0$ . . . . .	82
4.37 Superfície $G _1 = 0$ . . . . .	82

# Lista de Tabelas

2.1	Classes de <i>jerk equations</i> não caóticas com 6 termos . . . . .	38
2.2	Classes de <i>jerk equations</i> não caóticas com 6 termos . . . . .	39
2.3	Classes de <i>jerk equations</i> não caóticas com 4 termos . . . . .	39
2.4	Classes de <i>jerk equations</i> não caóticas com 4 termos . . . . .	39
2.5	Classes de <i>jerk equations</i> não caóticas com 4 termos . . . . .	40
4.1	Pontos singulares do Teorema 4.5 . . . . .	70

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Comportamento não caótico de sistemas diferenciais em <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>17</b>
2.1	Sistemas caóticos . . . . .	17
2.2	Sistemas não caóticos . . . . .	21
2.3	Condição suficiente para não caoticidade . . . . .	24
2.4	Sistemas com matriz jacobiana simétrica . . . . .	29
2.5	<i>Jerk equations</i> . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Sistemas <i>Lorenz-like</i> e sistemas com quádricas invariantes</b>	<b>42</b>
3.1	Sistemas <i>Lorenz-like</i> . . . . .	43
3.1.1	Sistemas com simetria $D_2$ . . . . .	51
3.2	Sistemas diferenciais com quádricas invariantes . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Quádricas invariantes do tipo <math>G_p = x^2 + y^2 - z^2 + p</math></b>	<b>55</b>
4.1	Estudo qualitativo . . . . .	55
4.2	Estudo no infinito . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>83</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>85</b>
<b>A</b>	<b>Apêndice</b>	<b>91</b>
A.1	Processo para encontrar o plano invariante do Teorema 2.3 . . . . .	91

# Capítulo 1

## Introdução

Seja  $\mathbb{R}[x, y, z]$  o anel dos polinômios nas variáveis  $x, y, z$ , com coeficientes em  $\mathbb{R}$ . Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (ou sistema diferencial) polinomial em  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y, z), \\ \dot{y} &= Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= R(x, y, z),\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde  $P, Q, R \in \mathbb{R}[x, y, z]$  e o ponto denota a derivada das variáveis  $x, y$  e  $z$  em relação a variável independente  $t$ , geralmente chamada de *tempo*. Podemos associar naturalmente ao sistema diferencial (1.1) o campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$X(x, y, z) = P(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}.\tag{1.2}$$

Definimos  $m = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q), \text{grau}(R)\}$  como sendo o grau do sistema (1.1) (ou do campo vetorial (1.2)).

Sistemas diferenciais do tipo (1.1) são frequentemente estudados. Além do ponto de vista matemático, há aplicações em diversas áreas do conhecimento, uma vez que muitos fenômenos físicos, biológicos, químicos e provenientes das engenharias, dentre outros, podem ser modelados matematicamente por sistemas de equações diferenciais polinomiais. Determinar soluções para tais sistemas é uma tarefa bastante complexa, no entanto, o estudo qualitativo dos sistemas diferenciais pode nos ajudar a entender suas soluções. De fato, as soluções dos sistemas diferenciais de grau  $m = 1$ , ou seja, sistemas diferenciais lineares, são bem compreendidas, pois são completamente determinadas utilizando-se

ferramentas da Álgebra Linear. Porém, para  $m \geq 2$  ainda há inúmeros problemas em aberto, devido ao comportamento complexo das soluções. Com efeito, quando estudamos o espaço de fase de sistemas diferenciais em  $\mathbb{R}^3$  é comum o aparecimento de pontos singulares, órbitas periódicas, órbitas homoclínicas e heteroclínicas e estas, por sua vez, podem gerar o que chamamos de *comportamento caótico* das soluções, com a ocorrência de órbitas quasiperiódicas, atratores estranhos, atratores caóticos entre outros fenômenos.

Uma ferramenta importante que ajuda a compreender o comportamento dinâmico das soluções de sistemas diferenciais polinomiais da forma (1.1) são as chamadas *Superfícies Algébricas Invariantes*, que definimos a seguir.

**Definição 1.1.** *Seja  $f \in \mathbb{K}[x, y, z]$  um polinômio não localmente constante, onde  $\mathbb{K}$  pode ser  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . A superfície  $f(x, y, z) = 0$  é uma superfície algébrica invariante do sistema (1.1) se existir um polinômio  $K \in \mathbb{K}[x, y, z]$  tal que*

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x}P + \frac{\partial f}{\partial y}Q + \frac{\partial f}{\partial z}R = Kf.$$

*O polinômio  $K$  é chamado de cofator da superfície algébrica invariante  $f = 0$ .*

Se  $f = 0$  é uma superfície algébrica invariante e  $f$  é um polinômio irredutível, então dizemos que  $f = 0$  é uma *superfície algébrica invariante irredutível*. Por outro lado, se o sistema diferencial (1.1) tem grau  $n$ , então o grau do cofator  $K$  é no máximo  $n - 1$ .

Em geral, encontrar superfícies algébricas invariantes para sistemas diferenciais polinomiais como (1.1) é uma tarefa algébrica complexa. Apesar de nem todos os sistemas diferenciais apresentarem superfície algébrica invariante, os que possuem tais superfícies gozam de duas propriedades interessantes. A primeira é a decomposição do espaço de fase em regiões invariantes, e a segunda é a possível redução da dimensão do espaço de fase do sistema diferencial. Essas duas propriedades ajudam na análise da dinâmica do sistema, uma vez que a partir delas é mais fácil determinar o comportamento do fluxo do sistema diferencial (1.1). Um sistema diferencial pode ainda ter mais de uma superfície algébrica invariante, neste caso podemos formar uma nova superfície usando as superfícies já conhecidas, como veremos posteriormente no Capítulo 2, e como é enunciado no teorema abaixo, para o caso de duas superfícies algébricas invariantes (uma prova desse resultado pode ser encontrada em [16]).

**Teorema 1.1.** *Assuma que  $f$  e  $g$  são polinômios relativamente primos no anel  $\mathbb{R}[x, y, z]$ . Então,  $f = 0$  e  $g = 0$  são superfícies algébricas invariantes do sistema diferencial (1.1)*

com cofatores  $K_f$  e  $K_g$ , respectivamente se, e somente se,  $fg = 0$  é uma superfície algébrica invariante do sistema diferencial (1.1) com cofator  $K_{fg} = K_f + K_g$ .

Dentre os trabalhos relacionados ao uso de superfícies algébricas invariantes no estudo do sistema (1.1), podemos citar [31, 32, 33, 34], onde os autores fazem uso da divisão do espaço de fase em regiões invariantes e da redução da dimensão do sistema diferencial, por meio da restrição das equações às superfícies encontradas, para estudar o comportamento qualitativo dos conhecidos sistemas de Rikitake, Rabinovich, Lorenz e Chen, respectivamente.

Outra forma de trabalhar com sistemas diferenciais que possuem superfícies algébricas invariantes é analisar o número máximo de superfícies algébricas invariantes que um sistema diferencial pode ter, como feito em [39]. Em [38], os autores determinam a forma normal de sistemas diferenciais que apresentam hiperfícies como superfícies algébricas invariantes, usando as ideias introduzidas em [17] por Galiullin, que consistem em determinar sistemas diferenciais que satisfazem certas condições pré-estabelecidas, o que foi chamado de *problema inverso de equações diferenciais ordinárias*. Nesta linha de pesquisa, em [35] os autores obtêm as formas normais de sistemas diferenciais polinomiais em  $\mathbb{R}^3$  que apresentam quádricas como superfícies algébricas invariantes.

Recentemente, em [45] mostramos que é possível usar superfícies algébricas invariantes no estudo de sistemas diferenciais não caóticos, apresentando uma classe de sistemas diferenciais polinomiais quadráticos que possuem matriz jacobiana simétrica e não exibem comportamento caótico. A presente tese segue nesta linha de pesquisa.

Mais precisamente, neste trabalho utilizamos superfícies algébricas invariantes para estabelecer classes de sistemas diferenciais polinomiais quadráticos, ou seja, sistemas (1.1) com  $m = 2$ , que são não caóticos e para estudar o comportamento qualitativo dos mesmos em  $\mathbb{R}^3$ . O trabalho está estruturado da seguinte forma.

No Capítulo 2, sem pretender nos alongarmos muito e nem esgotar o assunto, mas trazendo as referências pertinentes, fazemos uma breve introdução histórica sobre sistemas diferenciais contínuos caóticos e não caóticos, focando mais a atenção nestes últimos, apresentando alguns dos resultados recentes existentes na literatura. Em seguida, damos condições para um sistema diferencial não apresentar comportamento caótico. Mais especificamente, utilizando superfícies algébricas invariantes, enunciamos e provamos uma condição suficiente (mas não necessário) que garante que um sistema diferencial polinomial



em  $\mathbb{R}^3$  não apresenta comportamento caótico (Teorema 2.3 do Capítulo 2). Em seguida, utilizando essa mesma condição, damos uma resposta parcial para uma conjectura de Zeraoulia e Sprott, apresentada em [67], na qual os autores propõem que sistemas diferenciais polinomiais quadráticos tridimensionais contínuos com matriz jacobiana simétrica, que são da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 + a_7xy + a_8xz + a_9yz, \\ \dot{y} &= b_0 + a_2x + b_2y + b_3z + \frac{a_7}{2}x^2 + b_5y^2 + b_6z^2 + 2a_5xy + a_9xz + b_9yz, \\ \dot{z} &= c_0 + a_3x + b_3y + c_3z + \frac{a_8}{2}x^2 + \frac{b_9}{2}y^2 + c_6z^2 + a_9xy + 2a_6xz + 2b_6yz,\end{aligned}\tag{1.3}$$

não apresentam comportamento caótico. Trata-se de um problema bastante complexo, dado o grande número de coeficientes (ou parâmetros) envolvidos no sistema diferencial (1.3). Provamos que a conjectura é verdadeira para uma classe ampla desses sistemas, desde que os coeficientes satisfaçam certas condições (ver Teorema 2.4 no Capítulo 2).

Ainda no Capítulo 2, utilizando o mesmo resultado, estudamos as chamadas *jerk equations*, que são equações diferenciais ordinárias de terceira ordem do tipo

$$\ddot{x} = j(x, \dot{x}, \ddot{x}),\tag{1.4}$$

muito estudadas em problemas provenientes da Física e das Engenharias, já que a terceira derivada pode ser vista como a derivada da aceleração, ver por exemplo [46, 56, 60, 66]. Equações do tipo *jerk* são equivalentes, via a mudança de variáveis  $\dot{x} = y, \dot{y} = z, \dot{z} = j(x, y, z)$  ao sistema diferencial (*jerk system*)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= j(x, y, z).\end{aligned}\tag{1.5}$$

No caso em que  $j(x, y, z)$  é um polinômio nas variáveis  $x, y, z$ , tal sistema é da forma (1.1). Observamos também que sistemas caóticos conhecidos na literatura, como os sistemas de Lorenz e Rössler, podem ser escritos como *jerk systems*, conforme [19, 20, 70], daí também a importância de estudarmos comportamentos caóticos e não caóticos desses tipos de sistemas. No Capítulo 2, apresentamos uma classe bastante geral de *jerk systems* que não apresentam comportamento caótico (Teorema 2.5) e, com base nesse resultado, obtemos classes de *jerk equations* quadráticas com 2 e 4 termos (equivalentes a *jerk systems*

com 4 e 6 termos, respectivamente) que não exibem comportamento caótico, estendendo os resultados apresentados em [43, 70, 72], com provas mais simples, baseadas no nosso Teorema 2.3. Por fim, damos condições para que o  *jerk system* estudado por Wei e co-autores em [74] não apresente comportamento caótico, complementando os resultados ali apresentados.

Posteriormente, no Capítulo 3, investigamos sistemas do tipo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1xy, \\ \dot{y} &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2xz, \\ \dot{z} &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3yz,\end{aligned}\tag{1.6}$$

onde os parâmetros  $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$  com  $i = 1, \dots, 3$ , conhecidos como *Lorenz-like systems*, pois, sob certas condições nos parâmetros, obtemos, a partir de (1.6), os sistemas caóticos de Lorenz [41], Rabinovich [32], Chen [34], entre outros, seguindo daí sua denominação. Utilizando a condição suficiente para não caoticidade, apresentado no Capítulo 2, determinamos condições sobre os parâmetros para que o sistema (1.6) não apresente comportamento caótico. Por fim, apresentamos condições para o sistema diferencial apresentado em [2], que é um caso particular com simetrias do sistema mais geral (1.6), ter um cone como superfície algébrica invariante e, conseqüentemente, não apresentar comportamento caótico.

Finalmente, no Capítulo 4, fundamentado em [35], estudamos as classes de sistemas diferenciais quadráticos que apresentam um hiperboloide de uma folha, um hiperboloide de duas folhas e um cone como superfícies algébricas invariantes, ou seja, sistemas diferenciais da forma [35]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= G_p A(x, y, z) - 2yD(x, y, z) - 2zE(x, y, z), \\ \dot{y} &= G_p B(x, y, z) + 2xD(x, y, z) + 2zF(x, y, z), \\ \dot{z} &= G_p C(x, y, z) - 2xE(x, y, z) + 2yF(x, y, z),\end{aligned}\tag{1.7}$$

onde  $A, B, C, D, E, F$  são polinômios de grau  $m \leq 1$  e  $G_p = x^2 + y^2 - z^2 + p$ , com  $p \in [-1, 1]$ , sendo que  $G_p = 0$  é uma superfície algébrica invariante do sistema (1.7). Fazemos um estudo qualitativo do sistema (1.7), com o qual obtemos condições para que este sistema apresente paralelos e meridianos invariantes e, conseqüentemente, uma classe de órbitas homoclínicas e heteroclínicas sobre a quádrlica  $G_p = 0$ . Determinamos também condições para a existência de órbitas periódicas sobre esta quádrlica, observando porém

que não existem ciclos limites. Por fim, estudamos o sistema (1.7) na bola de Poincaré, via compactificação, para determinar seu comportamento global, incluindo o retrato de fase no infinito (representado pela esfera de Poincaré  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ ).

No Capítulo 5, apresentamos algumas considerações e comentários sobre o trabalho desenvolvido, finalizando assim o texto.

## Capítulo 2

# Comportamento não caótico de sistemas diferenciais em $\mathbb{R}^3$

### 2.1 Sistemas caóticos

Neste capítulo, investigaremos condições para que um sistema diferencial polinomial do tipo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y, z), \\ \dot{y} &= Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= R(x, y, z),\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde  $P, Q, R \in \mathbb{R}[x, y, z]$ , não apresente comportamento caótico. Para tanto, inicialmente faremos um breve histórico sobre como surgiram e evoluíram os hoje chamados sistemas diferenciais caóticos e daremos uma definição desses objetos matemáticos.

Os primeiros vestígios de caos (ou de comportamento caótico) de soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não lineares são atribuídos a Henri Poincaré [51]. Tal conceito surgiu nos estudos sobre a estabilidade do sistema solar, no final do século XIX, quando Poincaré estudava o conhecido problema dos três corpos, que consiste na interação gravitacional de três corpos celestes, como por exemplo o sistema Terra–Sol–Lua. Apesar de sua natureza determinística, proveniente das equações da Mecânica, Poincaré observou que pequenas perturbações no sistema poderiam levar a resultados inesperados, gerando assim um fenômeno irregular e imprevisível. Posteriormente, muitos outros trabalhos relacionados a estabilidade e comportamento caótico

de sistemas diferenciais foram desenvolvidos, envolvendo circuitos elétricos, teoria do controle e problemas de engenharia, no começo do século XX, principalmente na escola russa, onde podemos citar os trabalhos de Birkhoff, Krylov, Pontryagin, Andronov, Lyapunov, Kolmogorov, e também na Europa, com os trabalhos de Cartwright e Littlewood sobre a equação de van der Pol, entre outros (ver os livros [3, 4, 11], que apresentam interessantes descrições sobre a História dos sistemas dinâmicos e o caos).

Contudo foi somente em 1963, com o trabalho de E. Lorenz [41] sobre fenômenos atmosféricos, que o estudo sobre sistemas caóticos passou a ter um grande destaque e a despertar o interesse da sociedade científica. Lorenz observou que, para os valores dos parâmetros  $s = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  e  $r = 28$ , as soluções do sistema diferencial (conhecido como Sistema de Lorenz)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= s(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{2.2}$$

apresentam comportamento irregular e imprevisível, detectando numericamente a existência de um conjunto atrator no espaço de fase bem diferente do que se conhecia até então (ver Figura 2.1), hoje conhecido como atrator de Lorenz. De fato, com o advento dos computadores, Lorenz observou a partir de simulações numéricas, que as soluções do sistema (2.2) apresentam sensibilidade com relação às condições iniciais, mesma característica observada por Poincaré cerca de oitenta anos antes, para o problema dos três corpos.

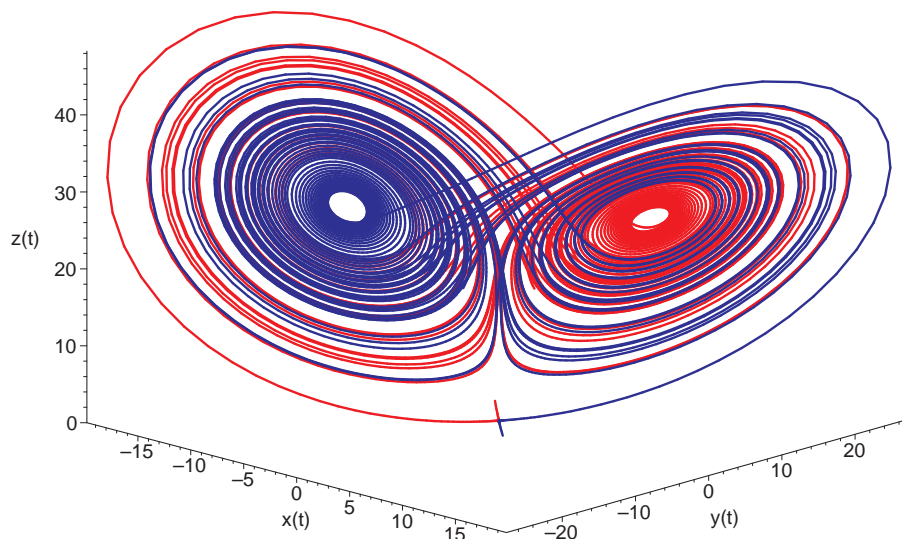


Figura 2.1: Atrator de Lorenz.

O trabalho pioneiro de Lorenz, associado aos trabalhos de Hénon e Heiles [26] e

Chirikov e outros [14], mostrando que sistemas diferenciais definidos em espaços com dimensão baixa poderiam apresentar comportamento imprevisível, chamaram a atenção da comunidade física para a dinâmica caótica. Após esses trabalhos, evidências claras de caos em fenômenos naturais, tal como a turbulência, podem ser encontradas nos escritos de Ruelle, Takens e Newhouse [47, 53]. Também, alguns experimentos relativos ao comportamento caótico na convenção de Rayleigh-Bérnard, desenvolvidos por Libchaber, Swinney, Gollub e Giglio, entre outros, confirmaram os resultados teóricos, reforçando assim o interesse dos físicos em sistemas diferenciais não lineares. Podemos dizer que o progresso no estudo de sistemas dinâmicos caóticos e sua relação com fenômenos naturais teve muitas contribuições de matemáticos e físicos renomados no final dos anos 60, dentre os quais podemos citar Bowen, Feigenbaum, Ruelle, Sinai, Arnold e Smale, entre outros [4]. Porém, o termo “caos” só foi utilizado para identificar tais sistemas diferenciais a partir de 1975, com o trabalho de Li e Yorke [29].

Atualmente, são conhecidos inúmeros sistemas diferenciais que apresentam comportamento caótico, dentre os mais conhecidos podemos citar Lorenz [41], Rossler [52], Rabinovich [32], Chen-Ueta [12], entre outros. Entretanto, mesmo após anos de estudo, ainda não existe uma definição única e universal de caos ou de sistemas caóticos que se adéque a todos os problemas (ou a todos os sistemas dinâmicos), isto acontece devido a estrutura topológica complexa das soluções de sistemas que apresentam tal comportamento. Devido a isto, vários trabalhos desenvolvidos nos últimos anos tem buscado apresentar uma definição universal, que se adéque a todos os sistemas diferenciais caóticos. Nesse sentido, Brown e Chua mencionam em [7], que existem pelo menos 9 definições utilizadas para definir “caos”, que aparecem na literatura. Tais autores afirmam, ainda, que a relação entre essas definições é que em todas elas a rápida perda de informação com o passar do tempo e a sensibilidade com relação as condições iniciais estão presentes. O assunto é tratado por esses autores na série de artigos [7, 8, 9].

Por outro lado, Sander e Yorke afirmam em [55] que

*“De fato, o caos não pode ser adequadamente definido usando somente uma única definição matemática, não porque o caos é um conceito simples, mas porque o caos tem inúmeras manifestações em diferentes situações. ... Para uma definição ser útil, a determinação de caos depende do ponto de vista do investigador. Deve ser formulada em termos da informação que está disponível*

para o cientista em questão.”

Uma das definições mais conhecidas e utilizada para sistemas diferenciais contínuos caóticos é devida a Devaney (ver por exemplo [75]). Para enuncia-la, formalizaremos alguns conceitos. Assumimos aqui que  $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$  seja um conjunto compacto e invariante pelo fluxo  $\phi$  do sistema diferencial (2.1), ou seja,  $\phi_t(\Lambda) \subset \Lambda, \forall t \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.1.** *O fluxo  $\phi_t(x)$  gerado pelo sistema diferencial (2.1) é dito ter dependência sensível em relação às condições iniciais em  $\Lambda$  se existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para qualquer  $x \in \Lambda$  e qualquer vizinhança  $U$  de  $x$ , existe  $y \in U$  e  $t > 0$  tal que  $|\phi_t(x) - \phi_t(y)| > \varepsilon$ , onde  $\phi_0(x) = x$  e  $\phi_0(y) = y$ .*

Basicamente, dizer que um sistema tem dependência sensível em relação às condições iniciais, ou simplesmente ter dependência sensível, é dizer que pequenas mudanças nas condições iniciais do sistema podem levar a resultados inesperados, ou seja, mudanças significativas das soluções, em um tempo futuro.

**Definição 2.2.** *Seja  $\phi_t(x)$  o fluxo gerado pelo sistema diferencial (2.1). Um conjunto fechado invariante  $\Delta$  é dito ser topologicamente transitivo pelo fluxo  $\phi_t$  se, para quaisquer dois abertos  $U, V \subset \Delta$ , existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $\phi_t(U) \cap V \neq \emptyset$ .*

Geometricamente, um sistema diferencial ser topologicamente transitivo significa que, dados dois pontos quaisquer em  $\Delta$  existe uma órbita do sistema que passa tão próxima quanto se queira desses pontos. Por fim, enunciamos a definição de sistemas caóticos segundo Devaney (ver [75]).

**Definição 2.3.** *Seja  $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto compacto e invariante pelo fluxo do sistema diferencial (2.1). Dizemos que  $\Lambda$  é caótico se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $\phi_t(x)$  tem dependência sensível em relação as condições iniciais em  $\Lambda$ ;
- (ii)  $\phi_t(x)$  é topologicamente transitivo em  $\Lambda$ , e;
- (iii) as órbitas periódicas de  $\phi_t(x)$  são densas em  $\Lambda$ .

Dizemos que um sistema diferencial contínuo em  $\mathbb{R}^3$  é caótico se ele apresenta um conjunto caótico, segundo a definição acima. Por exemplo, para  $s = 10, b = \frac{8}{3}$  e  $r = 28$ , o sistema de Lorenz apresenta o atrator mostrado na Figura 2.2, que é um conjunto caótico.

Vários trabalhos foram desenvolvidos com o objetivo de se provar este resultado, dentre os quais citamos o livro [58] e as referências nele contidas. Em [5] os autores mostram a densidade das órbitas periódicas do sistema de Lorenz, para os valores de parâmetros mencionados.

Como a verificação das condições na Definição 2.3 não é tarefa fácil, na maioria das vezes, para se caracterizar o comportamento caótico de um dado sistema, são utilizados métodos numéricos, como o cálculo de expoentes de Lyapunov, dimensão dos atratores caóticos (dimensão de Kaplan-Yorke) ou a construção de diagramas de bifurcação, com os quais se busca, por exemplo, detectar cascatas de duplicação de período, que constituem uma das rotas para o comportamento caótico das soluções.

Utilizando estas ferramentas, muitos sistemas diferenciais foram considerados caóticos na literatura, tanto sistemas estudados do ponto de vista teórico quanto provenientes de modelos matemáticos de fenômenos naturais físicos, químicos ou das engenharias.

Por outro lado, o problema dual, ou seja, dado um sistema diferencial em  $\mathbb{R}^3$  da forma (2.1) (ou sistemas mais gerais de equações diferenciais ordinárias), determinar sob que condições esse sistema não apresenta comportamento caótico, foi bem menos estudado na literatura. Trataremos desse tópico na próxima seção.

## 2.2 Sistemas não caóticos

Já é conhecido da literatura que sistemas diferenciais planares contínuos não apresentam comportamento caótico, devido ao Teorema de Poincaré-Bendixson, que recordamos aqui. Considere o sistema diferencial planar

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde  $f, g$  são funções de classe  $C^r$  com  $r \geq 1$  e  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Vale o seguinte resultado.

**Teorema 2.1** (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Seja  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$  uma região compacta e positivamente invariante do sistema diferencial (2.3) contendo um número finito de pontos singulares. Seja  $p \in \mathcal{M}$  e considere o conjunto  $\omega$ -limite de  $p$  denotado por  $\omega(p)$ . Então, uma das seguintes possibilidades ocorre:*

- (i)  $\omega(p)$  é um ponto singular;



(ii)  $\omega(p)$  é uma órbita fechada;

(iii)  $\omega(p)$  consiste em um número finito de pontos singulares  $p_1, \dots, p_n$  e órbitas regulares  $\gamma$  com  $\alpha(\gamma) = p_i$  e  $\omega(\gamma) = p_j$ .

Omitiremos a demonstração do Teorema 2.1, que pode ser encontrada em [49]. É claro que o mesmo resultado vale para conjuntos  $\alpha$ -limite das órbitas de um sistema diferencial planar. O Teorema de Poincaré-Bendixson é muito importante na teoria de sistema dinâmicos, pois dá uma caracterização definitiva do comportamento assintótico das soluções de sistemas diferenciais planares, ou seja, quando  $t \rightarrow \infty$  ou  $t \rightarrow -\infty$ . Existem ainda versões do Teorema 2.1 para sistemas não planares, definidos na esfera  $\mathbb{S}^2$ , ou em uma variedade diferenciável de dimensão dois mais geral, como pode-se ver em [49]. Na Figura 2.2 ilustramos possíveis conjuntos  $\omega$ -limite das soluções de um sistema diferencial planar.

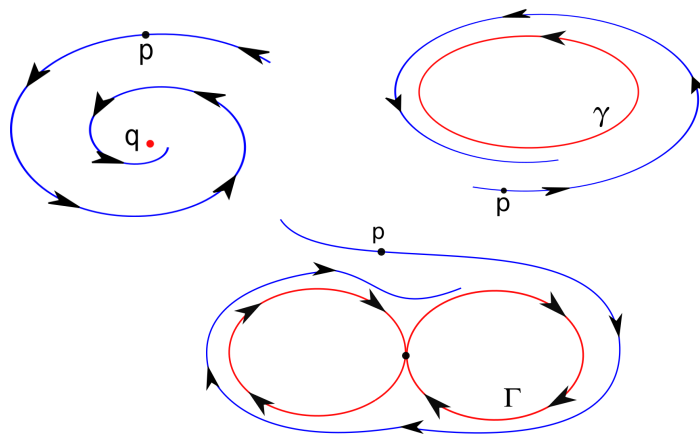


Figura 2.2: Alguns possíveis conjuntos  $\omega$ -limite de órbitas de sistemas diferenciais planares.  $\omega(p) = \{q\}$  (um ponto singular);  $\omega(p) = \{\gamma\}$  (um ciclo limite);  $\omega(p) = \{\Gamma\}$  (um gráfico).

Desse modo, o interesse em se determinar condições para que um sistema diferencial contínuo seja caótico (ou não caótico) se torna interessante em espaços de fase de dimensão maior ou igual a três<sup>1</sup>. Como os sistemas lineares em  $\mathbb{R}^3$  não podem ser caóticos, pois suas soluções podem ser completamente determinadas usando ferramentas da Álgebra Linear, o primeiro caso interessante de se estudar é o dos sistemas diferenciais polinomiais

<sup>1</sup>Em [10] os autores mostram que sistemas diferenciais descontínuos (ou suaves por partes) no plano podem apresentar comportamento caótico, o que é um resultado bastante interessante. Porém, aqui não trataremos deste caso, pois estamos interessados apenas em sistemas suaves.

quadráticos em  $\mathbb{R}^3$ , isto é, os sistemas da forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 + a_7xy + a_8xz + a_9yz, \\ \dot{y} &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6z^2 + b_7xy + b_8xz + b_9yz, \\ \dot{z} &= c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4x^2 + c_5y^2 + c_6z^2 + c_7xy + c_8xz + c_9yz,\end{aligned}\tag{2.4}$$

onde  $a_i, b_i, c_i$ , com  $i = 0, \dots, 9$  são coeficientes reais, ou parâmetros.

Enquanto sistemas diferenciais quadráticos que apresentam comportamento caótico foram muito estudados nos últimos 50 anos, como abordado na seção anterior, a determinação de critérios ou condições (necessários e/ou suficientes) para não-caoticidade do sistema (2.4) foi bem menos abordada na literatura. De fato, dentre os trabalhos existentes podemos citar os desenvolvidos por Heidel e Zhang. Em [68] tais autores provaram que todos os sistemas diferenciais quadráticos tridimensionais dissipativos com um total de quatro termos do lado direito não apresentam comportamento caótico. Posteriormente, em [22] os mesmos autores estenderam este resultado para os sistemas diferenciais quadráticos conservativos, mostrando que todos os sistemas com total de quatro termos não apresentam comportamento caótico, com exceção do sistema quadrático

$$\dot{x} = y^2 - z^2, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = y,$$

que aparentemente também não apresenta tal comportamento. Apesar de haver argumentos numéricos que justifiquem tal afirmação, nenhuma prova analítica foi apresentada até o momento, apesar da aparente simplicidade deste sistema.

Mais recentemente, Heidel e Zhang [23] obtiveram certo progresso no estudo do comportamento não caótico de sistemas diferenciais polinomiais e racionais, provando um teorema mais geral, que dá condições suficientes para que as soluções sejam não caóticas. Utilizaram tal resultado para estudar em [23] todos os possíveis sistemas diferenciais quadráticos conservativos com cinco termos do lado direito sendo apenas um não linear (chamados sistemas conservativos tipo 5-1), mostrando analiticamente que todos, exceto 5 desses sistemas, são não caóticos. Seguindo a mesma estratégia, eles melhoraram tal resultado e estudaram em [69] todos os possíveis sistemas diferenciais quadráticos dissipativos com cinco termos do lado direito sendo apenas um não linear (chamados sistemas dissipativos tipo 5-1), mostrando que todos, exceto 21 deles, são não caóticos.

Posteriormente, trabalhando na mesma linha de caracterizar os sistemas não caóticos em  $\mathbb{R}^3$ , foi mostrado em [43, 70] que todas as equações de terceira ordem da forma

$\ddot{z} = f(z, \dot{z}, \ddot{z})$ , chamadas de *jerk equations*, onde  $f$  é um polinômio quadrático com no máximo dois termos, são não caóticas (tais equações são equivalentes a uma sub-classe dos sistemas diferenciais mais gerais dados por (2.4) via a mudança de variáveis  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = z$ ). Outros resultados relativos ao comportamento não caótico de sistemas diferenciais quadráticos podem ser encontrados em [71, 72]. Além disso, alguns problemas em aberto relativos ao comportamento não caótico de sistemas diferenciais quadráticos e de grau mais elevado, definidos em  $\mathbb{R}^3$ , foram apresentados e discutidos no livro [24], publicado recentemente.

Ainda nesta linha de pesquisa, em [45] enunciamos e demonstramos uma condição suficiente para a não-caoticidade de sistemas diferenciais polinomiais em  $\mathbb{R}^3$  (de qualquer grau), utilizando superfícies algébricas invariantes e invariantes de Darboux. Com base em tal resultado, que é um dos mais importantes desta tese, classificamos uma classe grande de sistemas diferenciais quadráticos não caóticos com matriz jacobiana simétrica, que será apresentada mais adiante.

Como se trata de um resultado fundamental desta tese, que é utilizado para provar vários dos resultados aqui apresentados, na próxima seção enunciamos e provamos o critério mencionado acima, tecendo também alguns comentários pertinentes.

## 2.3 Condição suficiente para não caoticidade

Antes de enunciarmos a condição anunciada, precisamos de algumas definições e resultados preliminares, relativos à Teoria de Integrabilidade de Darboux, que são utilizados para prová-lo. Uma explanação abrangente sobre tal teoria pode ser encontrada em [16, 30, 40]. Como estamos interessados em sistemas do tipo (2.1), enunciaremos aqui os resultados especificamente para este sistema, embora eles sejam válidos em casos bem mais gerais (sistemas diferenciais polinomiais de qualquer grau, definidos em  $\mathbb{R}^n$ .)

**Definição 2.4** (Integral Primeira). *Seja  $U$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^3$ . Se existe uma função analítica não localmente constante  $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ , que é constante sobre as curvas soluções  $(x(t), y(t), z(t))$  do sistema diferencial (2.1) contidas em  $U$ , então  $H$  é chamada uma Integral Primeira de  $X$  em  $U$ . Claramente  $H$  é uma integral primeira do sistema diferencial (2.1) se, e somente se,  $X(H) \equiv 0$  em  $U$ , isto é,*

$$X(H) = \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}P + \frac{\partial H}{\partial y}Q + \frac{\partial H}{\partial z}R = 0$$

sobre as órbitas de  $X$  contidas em  $U$ , onde  $X = (P, Q, R)$  é o campo vetorial associado ao sistema (2.1).

Observe que uma superfície algébrica invariante, cuja definição apresentamos no Capítulo 1, é uma integral primeira polinomial do sistema diferencial (2.1) se o cofator dessa superfície é  $K \equiv 0$ .

**Definição 2.5** (Invariante). *Um Invariante do sistema diferencial (2.1) em um subconjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  é uma função analítica não localmente constante  $I$  nas variáveis  $x, y, z$  e  $t$  tal que  $I$  é constante sobre as curvas soluções  $(x(t), y(t), z(t))$  do sistema diferencial (2.1) contidas em  $U$ , isto é*

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x}P + \frac{\partial I}{\partial y}Q + \frac{\partial I}{\partial z}R + \frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

sobre as órbitas de  $X$  contidas em  $U$ .

Um invariante  $I$  pode ser visto como uma integral primeira do sistema (2.1) que depende do tempo  $t$ .

**Definição 2.6** (Fator Exponencial). *Sejam  $g, h \in \mathbb{K}[x, y, z] \setminus \{0\}$  e assuma que  $g$  e  $h$  sejam polinômios relativamente primos no anel  $\mathbb{K}[x, y, z]$ , ou que  $h = 1$ , onde  $\mathbb{K}$  pode ser  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Então a função  $F = \exp(g/h)$  é chamada de Fator Exponencial do sistema diferencial (2.1) se para algum polinômio  $L \in \mathbb{K}[x, y, z]$  temos*

$$X(F) = \frac{\partial F}{\partial x}P + \frac{\partial F}{\partial y}Q + \frac{\partial F}{\partial z}R = LF.$$

Analogamente à superfície algébrica invariante, se o sistema (2.1) tem grau  $n$ , então o grau do cofator  $L$  do fator exponencial é no máximo  $n - 1$ . Ainda, se  $L = 0$  então,  $F$  é uma integral primeira exponencial do sistema diferencial (2.1).

Dizemos que um invariante  $I$  de  $X$  é um *Invariante de Darboux* se ele pode ser escrito da forma

$$I(x, y, z, t) = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q} e^{st}, \quad (2.5)$$

onde  $f_i = 0$  são superfícies algébricas invariantes de  $X$  para  $i = 1, \dots, p$  e os  $F_j$  são fatores exponenciais de  $X$  para  $j = 1, \dots, q$ ;  $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$  e  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Mais precisamente, vale o seguinte resultado

**Teorema 2.2.** *Suponha que o sistema diferencial polinomial (2.1) de grau  $m$  admita  $p$  superfícies algébricas invariantes irredutíveis  $f_i = 0$  com cofatores  $K_i$ , para  $i = 1, \dots, p$  e  $q$  fatores exponenciais  $F_j$  com cofatores  $L_j$  para  $j = 1, \dots, q$ . Então, existem  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$  não todos nulos tais que*

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i K_i + \sum_{j=1}^q \beta_j L_j = -s,$$

para algum  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , se, e somente se, a função real  $I = f_1^{\alpha_1} \dots f_p^{\alpha_p} F_1^{\beta_1} \dots F_q^{\beta_q} e^{st}$  é um invariante de Darboux do sistema diferencial (2.1).

Podemos construir invariantes de Darboux apenas utilizando superfícies algébricas invariantes, como é enunciado na proposição a seguir.

**Proposição 2.1.** *Se  $f(x, y, z) = 0$  é uma superfície algébrica invariante de (2.1) com cofator constante  $K = k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , então  $I = f(x, y, z) e^{-kt}$  é um invariante de Darboux do sistema diferencial (2.1).*

*Demonstração.* Seja  $\phi(t) = (x(t), y(t), z(t))$  uma solução do sistema diferencial (2.1). Então, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(\phi(t)) &= \frac{d}{dt} [f(\phi(t)) e^{-kt}] = \\ &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x} P + \frac{\partial f}{\partial y} Q + \frac{\partial f}{\partial z} R \right] e^{-kt} - k f(\phi(t)) e^{-kt} = \\ &= k f(\phi(t)) e^{-kt} - k f(\phi(t)) e^{-kt} = 0. \end{aligned}$$

Logo, segue da definição que  $I = f(x, y, z) e^{-kt}$  é um invariante de Darboux do sistema (2.1).  $\square$

Estamos agora em condições de enunciar e provar o principal resultado desta seção. Resultados similares a este podem ser encontrados por exemplo em [34, 37, 44], porém a abordagem e algumas modificações que trazemos neste trabalho são inéditas.

Observemos inicialmente que neste trabalho estamos considerando como caóticos os sistemas que apresentam um conjunto caótico (conforme a Definição 2.3), que é um conjunto compacto e invariante, portanto um conjunto limitado em  $\mathbb{R}^3$ . Assim, soluções que tendem para infinito em tempo finito não apresentam comportamento caótico. Deste modo, no que segue consideraremos somente soluções completas (isto é, soluções definidas em  $\mathbb{R}$ ), de maneira que podemos estudar seus conjuntos  $\alpha$  e  $\omega$ -limite. O objetivo é mostrar que, sob certas condições, estas soluções ou tendem para infinito ou tendem para um conjunto que não pode ser caótico, quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

**Teorema 2.3** (Condição Suficiente para Não Caoticidade). *Seja  $X$  o campo de vetores associado ao sistema diferencial (2.1). Se  $X$  tem uma superfície algébrica invariante  $f = 0$  com cofator constante  $K = k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , então os conjuntos  $\alpha$  e  $\omega$ -limite da órbita  $\phi_p(t) = (x(t), y(t), z(t))$  com  $\phi_p(0) = p \in \mathbb{R}^3$ , estão contidos em  $\{f = 0\} \cup \mathbb{S}^2$ , onde  $\mathbb{S}^2$  representa os pontos no infinito de  $\mathbb{R}^3$ . Em particular,  $X$  não apresenta comportamento caótico.*

*Demonstração.* Seja  $\phi_p(t)$  uma órbita do sistema (2.1) tal que  $\phi_p(0) = p \in \mathbb{R}^3$  e  $f = 0$  uma superfície algébrica invariante desse sistema. Se  $p \in \{f = 0\}$ , isto é  $f(p) = 0$ , então  $\alpha(p), \omega(p) \subset \{f = 0\}$ , pela invariância de  $f = 0$ . Se  $p$  é um ponto singular de  $X$ , isto é  $X(p) = 0$ , então  $\phi_p(t) = p, \forall t \in \mathbb{R}$ , logo

$$0 = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle = kf(p), \quad \text{com } k \neq 0,$$

donde segue que  $f(p) = 0$  e, conseqüentemente  $p \in \{f = 0\}$ . Portanto,  $\alpha(p), \omega(p) \subset \{f = 0\}$ . Considere agora  $p \in \mathbb{R}^3$  um ponto regular do campo de vetores  $X$  com  $p \notin \{f = 0\}$ . Como foi provado na Proposição 2.1, se  $K$  é um cofator constante da superfície algébrica  $f = 0$ , a função

$$I(x, y, z) = f(x, y, z) e^{-kt}$$

é um invariante de Darboux para o sistema (2.1). Portanto, temos dois casos a considerar: (i) Se  $k > 0$ , então  $\alpha(p) \subset \{f = 0\}$  e  $\omega(p) \subset \mathbb{S}^2$ ; (ii) Se  $k < 0$ , então  $\alpha(p) \subset \mathbb{S}^2$  e  $\omega(p) \subset \{f = 0\}$ . Vamos demonstrar o caso (i), a demonstração do caso (ii) é análoga. Pela definição de invariante de Darboux temos que

$$\frac{d}{dt} I(\phi_p(t)) = \frac{d}{dt} [f(\phi_p(t)) e^{-kt}] = 0,$$

donde temos  $f(\phi_p(t)) e^{-kt} = c$  ou  $f(\phi_p(t)) = ce^{kt}$  com  $c \in \mathbb{R}$  e  $k > 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Então, considerando a sequência  $\{t_n\}$  com  $t_n \rightarrow -\infty$ , pela continuidade de  $f$  e  $\phi$  temos  $f(q) = 0$  onde  $q = \lim \phi_p(t_n)$ . Logo,  $q \in \{f = 0\}$  e, conseqüentemente  $\alpha(p) \subset \{f = 0\}$ . Suponha agora que  $p \notin \{f = 0\}$  e  $q \in \omega(p)$ . Então, existe uma sequência  $\{t_n\}$  com  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $\lim \phi_p(t_n) = q$ . Suponha que  $q \in \mathbb{R}^3$ , isto é,  $q$  é um ponto finito em  $\mathbb{R}^3$  (ou seja, pertence a algum conjunto compacto  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ). Como  $f(\phi_p(t)) = ce^{kt}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , temos  $f(\phi_p(t_n)) = ce^{kt_n}$ . Tomando o limite  $t_n \rightarrow +\infty$ , segue da continuidade de  $f$  que  $f(q) = \infty$ , que é uma contradição, pois  $q \in \mathbb{R}^3$  é um ponto finito e  $f$  é um polinômio. Conseqüentemente,  $q \in \mathbb{S}^2$  e, portanto,  $\omega(p) \subset \mathbb{S}^2$ , onde  $\mathbb{S}^2$  representa os

pontos do infinito de  $\mathbb{R}^3$ . Como  $f = 0$  é uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  e os conjuntos  $\alpha$  e  $\omega$ -limite da órbita de  $X$  por  $p$  estão contidas em  $f = 0$  ou vão para infinito, segue que as soluções do campo vetorial  $X$  não podem exibir comportamento caótico.  $\square$

Observamos que o Teorema 2.3 contradiz a definição de sistema diferencial caótico de Devaney, no ponto em que não é possível haver órbitas periódicas densas em um sistema diferencial que apresenta uma superfície algébrica invariante com cofator constante, uma vez que, neste caso, o espaço de fase é dividido em regiões invariantes e os conjuntos  $\alpha$  e  $\omega$ -limite estão no infinito ou estão contidos em  $f = 0$ , que é uma superfície algébrica bi-dimensional. Por outro lado, a transitividade topológica também não é possível para um sistema que satisfaz as hipóteses do Teorema 2.3, pois, o espaço de fase do sistema é decomposto em duas regiões invariantes. Poder-se-ia argumentar também que basta um sistema diferencial em  $\mathbb{R}^3$  possuir uma superfície algébrica invariante para que as soluções não apresentem comportamento caótico. Porém esta afirmação não é verdadeira. De fato, em [27] os autores apresentam exemplos de sistemas diferenciais quadráticos em  $\mathbb{R}^3$  com superfícies algébricas invariantes formadas por pontos singulares e que apresentam comportamento caótico. Dessa forma, a hipótese do cofator ser constante é fundamental no Teorema 2.3. De fato, em [27], os cofatores das superfícies formadas por pontos singulares são polinômios (não constantes).

Outra observação importante é que, se um sistema diferencial tem duas superfícies algébricas invariantes com cofatores constantes reais quaisquer, podemos determinar novas superfícies algébricas invariantes para esses sistemas diferenciais. De fato, sejam  $f_1 = 0$  e  $f_2 = 0$  superfícies algébricas invariantes com cofatores  $k_1 \in \mathbb{R}$  e  $k_2 \in \mathbb{R}$ , respectivamente. Então, pela bilinearidade do produto interno e pela linearidade do gradiente, podemos afirmar que  $f_1 + f_2 = 0$  é uma superfície algébrica invariante do sistema diferencial com cofator  $k_1$ , desde que possamos tomar  $k_1 = k_2$ . Com efeito,

$$\langle X, f_1 + f_2 \rangle = \langle X, \nabla(f_1 + f_2) \rangle = \langle X, \nabla f_1 \rangle + \langle X, \nabla f_2 \rangle = k_1 f_1 + k_2 f_2 = k_1 f_1 + k_1 f_2 = k_1 (f_1 + f_2).$$

Este fato pode ser facilmente generalizado para  $n$  superfícies algébricas invariantes.

Vimos também, no Capítulo 1, que se  $f = 0$  e  $g = 0$  são superfícies algébricas invariantes do sistema diferencial (2.1) com cofatores  $K_f$  e  $K_g$ , respectivamente, então  $fg = 0$  é uma superfície algébrica invariante deste sistema diferencial com cofator  $K_{fg} = K_f + K_g$ . Assim, se  $K_f$  e  $K_g$  são constantes, então  $fg = 0$  é uma superfícies algébrica

invariante do sistema (2.1) com cofator constante. Neste caso, os conjuntos  $\alpha$  e  $\omega$ -limite das soluções ficam contidos em  $f = 0$ , em  $g = 0$  ou estão no infinito. De qualquer forma, vale a condição estabelecida no Teorema 2.3.

Usaremos o Teorema 2.3 no decorrer do texto a condição suficiente do Teorema 2.3 para a determinação de certas classes de sistemas diferenciais polinomiais quadráticos definidos em  $\mathbb{R}^3$  que não apresentam comportamento caótico. Trabalhamos na linha do que tem sido apresentado na literatura sobre o assunto. Utilizando essa condição, conseguimos determinar classes mais gerais de sistemas não caóticos do que tem sido apresentado nos artigos mencionados anteriormente.

## 2.4 Sistemas com matriz jacobiana simétrica

O estudo de sistemas diferenciais caóticos e não caóticos, particularmente os quadráticos, está diretamente relacionado ao problema de encontrar sistemas caóticos “simples” (ou os “mais simples” possível). Observe, por exemplo que os sistemas de Lorenz [41] e Rössler [52], já mencionados anteriormente, os quais apresentam comportamento caótico para certos valores dos parâmetros, são quadráticos e possuem sete termos do lado direito, sendo que o primeiro possui dois termos não lineares e, o segundo, apenas um. Nesse sentido, diz-se que o sistema de Rössler é “mais simples” que o de Lorenz. Vários estudos nesta direção de se obter sistemas diferenciais caóticos simples foram desenvolvidos por J. C. Sprott, que estudou diversas classes de sistemas quadráticos com cinco e seis termos do lado direito. De fato, em [59] o autor encontrou vários casos de sistemas quadráticos caóticos com seis termos, sendo apenas um não linear, e com cinco termos, sendo dois não lineares. Posteriormente, em [61, 62] foram encontrados exemplos de sistemas quadráticos caóticos com cinco termos, sendo apenas um não linear, que estão relacionados com os sistemas quadráticos do tipo 5-1 estudados por Heidel e Zhang. Outros esforços no sentido de se determinar um sistema quadrático tri-dimensional caótico mais simples podem ser encontrados em [42, 60, 63]. Tais estudos deram origem ao livro *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*, de J. C. Sprott [64], que apresenta uma coleção de sistemas diferenciais aparentemente simples, mas que apresentam comportamento caótico.

Neste contexto, a seguinte conjectura foi apresentada por Zeraoulia e Sprott [67]:



**“Sistemas diferenciais polinomiais tri-dimensionais quadráticos contínuos com matriz jacobiana simétrica não podem exibir comportamento caótico.”**

Os autores afirmam que a conjectura acima foi baseada em evidências numéricas. Para isto, escolheram aleatoriamente, em um sistema diferencial quadrático geral com matriz jacobiana simétrica (que possui 19 coeficientes ou parâmetros - veja a frente),  $10^9$  (ou seja, um bilhão) de combinações dos valores dos parâmetros e três condições iniciais, e calcularam os expoentes de Lyapunov (que dão uma medida de caos) para estes casos. Verificaram que a grande maioria das soluções são ilimitadas e para um pequeno conjunto dos sistemas considerados (da ordem de um por cento) as soluções tendem para um ponto de equilíbrio. Em nenhum dos casos estudados foi encontrado sequer um expoente de Lyapunov positivo, com um número de casas significantes (maior que 0,001). Porém, uma prova analítica para esta conjectura, que é bastante difícil dado o grande número de parâmetros existente em tal sistema diferencial, ainda não foi apresentada.

Nesta tese, apresentamos uma classe (grande) de sistemas diferenciais quadráticos com matriz jacobiana simétrica que não apresentam comportamento caótico, dando uma resposta parcial positiva à conjectura acima.

Um sistema diferencial quadrático que apresenta matriz jacobiana simétrica pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 + a_7xy + a_8xz + a_9yz, \\ \dot{y} &= b_0 + a_2x + b_2y + b_3z + \frac{a_7}{2}x^2 + b_5y^2 + b_6z^2 + 2a_5xy + a_9xz + b_9yz, \\ \dot{z} &= c_0 + a_3x + b_3y + c_3z + \frac{a_8}{2}x^2 + \frac{b_9}{2}y^2 + c_6z^2 + a_9xy + 2a_6xz + 2b_6yz. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Neste caso o sistema depende de dezenove coeficientes (ou parâmetros) reais,  $a_i, b_i, c_i$ , e sua matriz jacobiana é dada por:

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_1 + 2a_4x + a_7y + a_8z & a_2 + a_7x + 2a_5y + a_9z & a_3 + a_8x + a_9y + 2a_6z \\ a_2 + a_7x + 2a_5y + a_9z & b_2 + 2b_5y + 2a_5x + b_9z & b_3 + a_9x + b_9y + 2b_6z \\ a_3 + a_8x + a_9y + 2a_6z & b_3 + a_9x + b_9y + 2b_6z & c_3 + 2c_6z + 2a_6x + 2b_6y \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Podemos associar ao sistema diferencial (2.6) o campo de vetores

$$X(x, y, z) = P_1(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + Q_1(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R_1(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.8)$$

onde  $P_1, Q_1$  e  $R_1$  são os polinômios do lado direito do sistema diferencial (2.6). Denotaremos por  $\chi_{s,J}^2(\mathbb{R}^3)$  o conjunto de todos os sistemas diferenciais polinomiais quadráticos contínuos definidos em  $\mathbb{R}^3$  com matriz jacobiana simétrica, ou seja, sistemas do tipo (2.6).

Observamos que todos os autovalores da matriz Jacobiana (2.7) são reais, devido à simetria dessa matriz. Segue daí que o sistema diferencial (2.6) não pode apresentar caos do tipo Shilnikov [75], devido a não existência de órbitas homoclínicas a pontos singulares do tipo sela-foco.

Vale o seguinte resultado.

**Teorema 2.4.** *Todos os sistemas diferenciais polinomiais em  $\chi_{s,J}^2(\mathbb{R}^3)$ , cujos coeficientes satisfazem as condições*

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{m_2^2(k) [b_5 m_2(k) - \frac{3}{2} b_9 m_3(k)] + m_3^2(k) [3b_6 m_2(k) - c_6 m_3(k)]}{m_1^3(k)}, \\ a_5 &= \frac{b_5 m_2(k) - \frac{1}{2} b_9 m_3(k)}{m_1(k)}, \\ a_6 &= \frac{b_6 m_2(k) - c_6 m_3(k)}{m_1(k)}, \\ a_7 &= \frac{2b_5 m_2^2(k) + 2b_6 m_3^2(k) - 2b_9 m_2(k) m_3(k)}{m_1^2(k)}, \\ a_8 &= \frac{b_9 m_2^2(k) + 2c_6 m_3^2(k) - 4b_6 m_2(k) m_3(k)}{m_1^2(k)}, \\ a_9 &= \frac{-2b_6 m_3(k) + b_9 m_2(k)}{m_1(k)}, \\ c_3 &= k + \frac{m_4(k)}{m_3(k)}, \end{aligned}$$

onde  $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_2, b_3, b_5, b_6, b_9, c_0, c_6 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e

$$\begin{aligned} m_1(k) &= a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_3 k, \\ m_2(k) &= a_1 b_3 - a_2 a_3 - b_3 k, \\ m_3(k) &= a_1 b_2 - a_1 k - a_2^2 - b_2 k + k^2, \\ m_4(k) &= a_1 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_3 + a_3^2 b_2 - a_3^2 k - b_3^2 k, \end{aligned}$$

com  $m_1(k), m_3(k) \neq 0$ , não podem exibir comportamento caótico.

*Demonstração.* Seja  $X$  o campo de vetores (2.8) associado ao sistema diferencial polinomial (2.6) e tome os parâmetros  $a_i, i = 4, \dots, 9$  e  $c_3$  (ver Apêndice A) satisfazendo as condições dadas na hipótese do Teorema 2.4. Considere então a função

$$f(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \quad (2.9)$$

com

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{k} + \frac{m_3(k)c_0 - m_2(k)b_0}{m_1(k)k}, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{-m_2(k)}{m_1(k)}, \quad \alpha_3 = \frac{m_3(k)}{m_1(k)}, \quad (2.10)$$

onde  $m_1(k), m_2(k), m_3(k)$  são as expressões dadas nas hipóteses do Teorema 2.4. Fazendo os cálculos com essas escolhas de parâmetros temos que  $f(x, y, z) = 0$  é uma superfície algébrica invariante (de fato, um plano invariante) do sistema diferencial (2.6), ou seja, prova-se que

$$(X, f) = \langle X, \nabla f \rangle = Kf,$$

com cofator constante  $K = k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Então, pelo Teorema 2.3, segue que o sistema diferencial (2.6) não apresenta comportamento caótico, uma vez que os conjuntos  $\alpha$  e  $\omega$ -limite de cada órbita  $\phi_p(t)$  com  $\phi_p(0) = p \in \mathbb{R}^3$ , estão contidas no plano  $f = 0$  ou em  $\mathbb{S}^2$ , onde  $\mathbb{S}^2$  representa os pontos do espaço  $\mathbb{R}^3$  no infinito.  $\square$

O seguinte resultado segue imediatamente do Teorema 2.4.

**Corolário 2.1.** *Seja  $X$  o campo de vetores (2.8) associado ao sistema diferencial (2.6). Considere que os coeficientes do campo satisfazem as condições dadas no Teorema 2.4. Se  $\alpha_0 = k = 0$  e*

$$a_0 = \frac{m_2(0)b_0 - m_3(0)c_0}{m_1(0)},$$

então

$$f(x, y, z) = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,$$

é uma integral primeira para o sistema (2.6), onde  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$  são dados em (A.3). Neste caso, o espaço de fase do sistema é folheado pelos planos invariantes  $f(x, y, z) = c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ .

Outra consequência imediata do Teorema 2.4 é a determinação de classes de sistema diferenciais não caóticos que são conservativos ou dissipativos.

**Definição 2.7.** *Considere o campo vetorial associado ao sistema diferencial (2.1). Chamamos de Divergência de  $X$  a seguinte função*

$$\operatorname{div}(X) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

*Dizemos que o sistema diferencial polinomial (2.1) é conservativo, se  $\operatorname{div}(X) = 0$ . É dito dissipativo, se  $\operatorname{div}(X) < 0$ ,  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .*

Geometricamente, dizer que um sistema diferencial é conservativo significa dizer que o volume de qualquer região do retrato de fase não é alterado pelo fluxo do campo com o passar do tempo. Analogamente, um sistema diferencial é dissipativo se o volume de qualquer região do retrato de fase diminui com o tempo, tendendo a zero quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Corolário 2.2.** *Considere o sistema diferencial polinomial (2.6) sob as condições do Teorema 2.4, e adote os seguintes parâmetros*

$$a_1 = \frac{a_2 a_3 + b_3 k}{b_3}, \quad b_5 = -\frac{b_6 (a_2^2 + b_3^2)}{b_3^2}, \quad b_9 = -\frac{2c_6 (a_2^2 + b_3^2)}{b_3^2},$$

com  $a_2 b_3 \neq 0$ . Considere o polinômio

$$n(k) = a_3 (a_2^2 + b_3^2) + a_2 b_3 (b_2 + 2k).$$

Então, temos os seguintes resultados:

- (i) se  $n(k) < 0$  e  $a_2 b_3 > 0$ , ou se  $n(k) > 0$  e  $a_2 b_3 < 0$ , então o sistema diferencial polinomial (2.6) é dissipativo e não caótico;
- (ii) se  $n(k) = 0$  e  $a_2 b_3 \neq 0$ , então o sistema diferencial polinomial (2.6) é conservativo e não caótico.

*Demonstração.* Considere o plano  $f(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$ , onde

$$\alpha_0 = \frac{a_0 b_3 - a_2 c_0}{b_3 k}, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = -\frac{a_2}{b_3},$$

com  $k \neq 0$ . A partir de cálculos análogos aos da prova do Teorema 2.4, obtemos que  $f(x, y, z) = 0$  é uma superfície algébrica invariante para o sistema (2.6), com cofator  $k \in \mathbb{R}$ . Segue do Teorema 2.3, que o sistema diferencial (2.6) não apresenta comportamento caótico. É fácil verificar que, nas condições do corolário, a divergência do sistema (2.6) é dado por

$$\operatorname{div}(X) = \frac{n(k)}{a_2 b_3},$$

demonstrando assim as afirmações (i) e (ii). □

Podemos ver que o Teorema 2.4 gera uma grande classe de sistema diferenciais polinomiais que não apresenta comportamento caótico, dentre esses apresentamos o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.1.** *Considere o sistema diferencial polinomial*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (6a - b)x^2 + (2a - b)z^2 + 2axy + 2(b - 4a)xz - 2ayz + 3x + y, \\ \dot{y} &= a(x^2 + z^2) - 2axz + x + 2y + z, \\ \dot{z} &= (b - 4a)x^2 + bz^2 - 2axy + 2(2a - b)xz + 2ayz + y + 3z. \end{aligned} \tag{2.11}$$

O sistema diferencial (2.11) está nas hipóteses do Teorema 2.4 tomando-se  $a_0 = a_3 = b_0 = b_5 = b_9 = c_0 = 0, a_1 = 3, a_2 = 1, b_2 = 2, b_3 = 1, b_6 = a, c_6 = b$  e  $k = 1$ . É fácil ver que este sistema tem matriz jacobiana simétrica e que o plano  $x - 2y + z = 0$  é uma superfície algébrica invariante

deste sistema com cofator  $k = 1$ . Consequentemente, o sistema diferencial (2.11) não apresenta comportamento caótico, para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ . Na figura (2.3), ilustramos o comportamento deste sistema para os valores dos parâmetros  $a = \frac{1}{2}$  e  $b = 2$ , sobre o plano invariante.

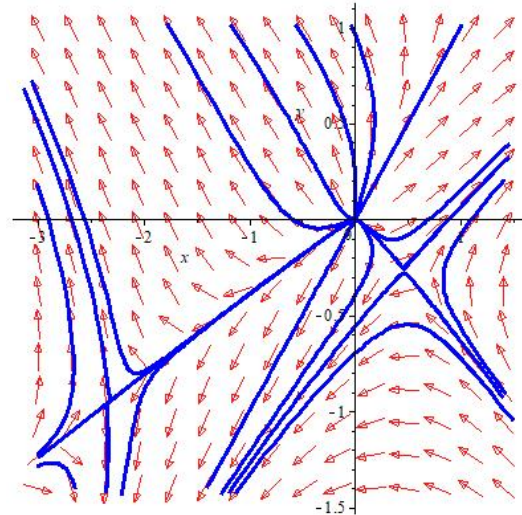


Figura 2.3: Retrato de fase do sistema (2.11) com  $a = \frac{1}{2}$  e  $b = 2$ , sobre o plano invariante  $x - 2y + z = 0$ .

## 2.5 Jerk equations

Na linha de caracterizar sistemas diferenciais não caóticos em  $\mathbb{R}^3$ , investigaremos agora uma classe importante de equações diferenciais ordinárias de terceira ordem (já mencionadas na Introdução), chamadas *jerk equations*, dadas por

$$\ddot{x} = j(x, \dot{x}, \ddot{x}), \quad (2.12)$$

onde o ponto denota a derivada com respeito a variável independente  $t$ , e  $j$  é uma função de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  (usualmente chamada de função *jerk*). Estas equações tem sido muito abordadas na literatura em geral, devido à sua importância teórica intrínseca e às suas aplicações em diversos problemas físicos.

Adotando a mudança de coordenadas  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = z$ , a equação (2.12) é transformada em um sistema diferencial tridimensional, chamado *jerk system*, da forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= j(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.13)$$

que é equivalente a uma subclasse de sistemas diferenciais do tipo (2.1), e pode ser naturalmente associado ao campo de vetores

$$X(x, y, z) = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + j(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.14)$$

Do ponto de vista físico, a derivada de terceira ordem em uma *jerk equation* é vista como a derivada da aceleração em relação ao tempo  $t$ , então, há um grande interesse no estudo de equações como (2.12) (ou equivalentemente, do sistema diferencial (2.13)). Podemos encontrar aplicações deste tipo de sistema em robótica, transporte, mecânica dos fluidos, entre outros. Nesta linha, ainda há poucos trabalhos na literatura sobre *jerk equations* que não apresentam comportamento caótico. Um dos primeiros estudos sobre *jerk equations* associados a oscilações não lineares aparece no trabalho de Moore e Spiegel [46]. Trabalhos mais recentes sobre a dinâmica caótica de *jerk equations* podem ser vistos em Gouesbet [19, 20], Pham [50], Sayed [56], Sprott [60] e Vaidyanathan [66].

Por outro lado, com relação ao estudo sobre *jerk equations* não caóticas podemos citar os trabalhos já mencionados de Heidel e Zhang [22, 68, 70], além de Malasoma [43] e Yang [72].

O sistema diferencial (2.13) é obviamente polinomial se  $j(x, y, z)$  é um polinômio nas variáveis  $x, y, z$  com coeficientes em  $\mathbb{R}$ . Neste caso, o grau do sistema diferencial (2.13) é o grau de  $j$ . Tal sistema é chamado de quadrático se o grau de  $j$  é 2, cúbico se o grau de  $j$  é 3, quártico se o grau de  $j$  é 4, e assim por diante.

O próximo resultado classifica classes de *jerk equations* de qualquer grau que não apresentem comportamento caótico.

**Teorema 2.5.** *Seja  $X$  o campo de vetores (2.14) associado ao sistema diferencial (2.13). Considere  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  e  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , onde  $\mathbb{R}[x, y]$  representa o anel dos polinômios nas variáveis  $x, y$  com coeficientes em  $\mathbb{R}$ . Se a função jerk  $j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é da forma*

$$j(x, y, z) = kF(x, y) - y \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) + z \left( k - \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) \right), \quad (2.15)$$

*então o sistema diferencial (2.13) não apresenta comportamento caótico.*

*Demonstração.* Considere  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, z) = F(x, y) + z$ . Afirmamos que  $f = 0$  é uma superfície algébrica invariante do sistema diferencial (2.13), onde  $j(x, y, z)$  é a função dada por (2.15). De fato, temos que

$$(X, \nabla f) = \langle X, \nabla f \rangle = y \frac{\partial F}{\partial x} + z \frac{\partial F}{\partial y} + j(x, y, z) = kF + kz = kf.$$

Segue daí que  $f = 0$  é uma superfície algébrica invariante do sistema diferencial (2.13) com cofator  $k \in \mathbb{R}$ . Logo, pelo Teorema 2.3 temos que o sistema diferencial (2.13), nas condições da função *jerk* (2.15), não exhibe comportamento caótico.  $\square$

Observamos que as *jerk equations* que satisfazem o Teorema 2.5 admitem superfícies algébricas invariantes da forma  $F(x, y) + z = 0$ , ou seja  $z = -F(x, y)$ , que são gráficos da função polinomial  $F(x, y)$ . Assim, podemos dizer que, quando o grau de  $F$  é 2, essas superfícies são difeomorfas ao parabolóide hiperbólico ou elíptico ou ao cilindro parabólico. O Teorema 2.5 ainda garante que o grau máximo da potência da variável  $z$  é 1, ou seja, classificamos aqui *jerk equations* que não apresentam termos do tipo  $z^n$  com  $n > 1$ . Observamos ainda que se  $k = 0$ , a função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  apresentada no teorema é uma integral primeira do sistema diferencial (2.13). Por outro lado, se tomarmos a função *jerk*  $j$  como sendo quadrática, obtemos as correspondentes integrais primeiras, como vemos no próximo teorema.

**Teorema 2.6.** *Considere as seguintes jerk equations*

$$\ddot{x} = -\frac{a_1 a_2}{2} x^2 + a_1 \dot{x}^2 + a_1 x \ddot{x} - a_2 a_3 x + a_2 \dot{x} + a_3 \ddot{x} + a_4, \quad (2.16)$$

$$\ddot{x} = a_1 a_2^2 x^2 + a_1 \dot{x}^2 - 2a_1 a_2 x \dot{x} - a_2 a_3 x + a_3 \dot{x} + a_2 \ddot{x} + a_0. \quad (2.17)$$

As equações (2.16) e (2.17) admitem integrais primeiras polinomiais e conseqüentemente não apresentam comportamento caótico.

*Demonstração.* Considere as seguintes funções  $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) = & 1 + z^2 + z - 2a_5 yz + a_2 a_1 x^3 y + a_1 a_3 x y^3 \\ & - 2a_1 x y z + a_4 a_2 x^3 + a_5 a_3 y^3 - 2a_4 x z - a_2 x^2 z - a_3 y^2 z \\ & + \frac{a_2^2}{4} x^4 + (2a_4 a_5 - a_1) x y + (2a_1 a_4 + a_2 a_5) x^2 y - a_5 y \\ & + \frac{a_3^2}{4} y^4 - a_4 x + \left(a_1^2 + \frac{a_2 a_3}{2}\right) x^2 y^2 + (2a_1 a_5 + a_3 a_4) x y^2 \\ & + \left(a_4^2 - \frac{a_2}{2}\right) x^2 + \left(a_5^2 - \frac{a_3}{2}\right) y^2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} f_2(x, y, z) = & \frac{2}{3} a_2^3 a_1 x^3 - \frac{2}{3} a_1 y^3 + 2a_1 a_2 x y^2 - 2a_2^2 a_1 x^2 y - a_2^2 a_3 x^2 + \\ & (a_2^2 - a_3) y^2 + z^2 + 2a_2 a_3 x y - 2a_2 y z - 2a_0 y + 2a_0 a_2 x + c, \end{aligned} \quad (2.19)$$

com  $c \in \mathbb{R}$ . As funções  $f_1(x, y, z)$  e  $f_2(x, y, z)$ , dadas por (2.18) e (2.19), são integrais primeiras do campo de vetores  $X$  associadas as *jerk equations* (2.16) e (2.17), respectivamente, uma vez que

$$(X, f_i) = \langle X, \nabla f_i \rangle = 0,$$

para  $i = 1, 2$ . Então, o espaço de fase dessas equações é folheado pelas superfícies algébricas invariantes  $f_1(x, y, z) = c_1$  e  $f_2(x, y, z) = c_2$ , com  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Como observado anteriormente, alguns autores classificam sistemas diferenciais polinomiais não caóticos de acordo com o número de termos do lado direito da equação. Os sistemas diferenciais com 4 e 5 termos foram bem estudados, como podemos ver em [22], [23], [43], [68], [69]. Foi provado, por exemplo, que sistemas diferenciais em  $\mathbb{R}^3$  com 4 termos não exibem comportamento caótico (veja [43]). Também, como já mencionado, sistemas diferenciais polinomiais conservativos ou dissipativos com 5 termos já foram estudados por Heidel e Zhang em [23], [69]. Nessa linha de estudo, usando o resultado obtido no Teorema 2.5, podemos obter uma grande classe de sistemas diferenciais polinomiais com 6 termos não caóticos. Para isto, considere o seguinte polinômio quadrático

$$F(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy.$$

A partir deste polinômio geramos a seguinte função *jerk* conforme a equação (2.15)

$$\begin{aligned} j(x, y, z) = & ka_3x^2 + (ka_4 - a_5)y^2 + (ka_5 - 2a_3)xy - a_5xz - 2a_4yz + \\ & ka_1x + (ka_2 - a_1)y + (k - a_2)z + a_0k. \end{aligned} \quad (2.20)$$

que dá origem à seguinte *jerk equation*

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & ka_3x^2 + (ka_4 - a_5)\dot{x}^2 + (ka_5 - 2a_3)x\dot{x} - a_5x\ddot{x} - 2a_4\dot{x}\ddot{x} + \\ & ka_1x + (ka_2 - a_1)\dot{x} + (k - a_2)\ddot{x} + a_0k, \end{aligned} \quad (2.21)$$

ou, equivalentemente, ao sistema *jerk*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= ka_3x^2 + (ka_4 - a_5)y^2 + (ka_5 - 2a_3)xy - a_5xz - 2a_4yz + \\ & ka_1x + (ka_2 - a_1)y + (k - a_2)z + a_0k. \end{aligned} \quad (2.22)$$

O sistema (2.22) admite a função,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy + z$ , como superfície algébrica invariante, e portanto não exhibe comportamento caótico. Lembramos que *jerk equations* são equivalentes a sistemas diferenciais tridimensionais da forma

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = j(x, y, z),$$

então a equação *jerk*  $\ddot{x} = j(x, \dot{x}, \ddot{x})$  com 4 termos do lado direito gera um sistema diferencial em  $\mathbb{R}^3$  com 6 termos.

**Exemplo 2.2.** Usando a equação (2.21) obtemos as classes de *jerk equations* com 6 termos, não caóticos apresentadas na Tabela 2.1.



Tabela 2.1: Classes de *jerk equations* não caóticas com 6 termos

Parâmetros	<i>Jerk equations</i> não caóticas
$a_0 = a_3 = a_5 = 0, a_2 = k$	$\ddot{x} = ka_4\dot{x}^2 - 2a_4\dot{x}\ddot{x} + ka_1x + (k^2 - a_1)\dot{x}$
$a_0 = a_3 = a_5 = 0, a_1 = ka_2$	$\ddot{x} = ka_4\dot{x}^2 - 2a_4\dot{x}\ddot{x} + k^2a_2x + (k - a_2)\ddot{x}$
$a_3 = a_5 = 0, a_2 = k, a_1 = ka_2$	$\ddot{x} = ka_4\dot{x}^2 - 2a_4\dot{x}\ddot{x} + k^3x + a_0k$
$a_0 = a_1 = a_3 = 0$	$\ddot{x} = ka_4\dot{x}^2 - 2a_4\dot{x}\ddot{x} + ka_2\dot{x} + (k - a_2)\ddot{x}$
$a_1 = a_3 = a_5 = 0, a_2 = k$	$\ddot{x} = ka_4\dot{x}^2 - 2a_4\dot{x}\ddot{x} + ka_2\dot{x} + a_0k$
$a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = 0$	$\ddot{x} = ka_4\dot{x}^2 - 2a_4\dot{x}\ddot{x} + k\ddot{x} + a_0k$
$a_1 = a_3 = a_5 = 0, a_2 = k$	$\ddot{x} = ka_4\dot{x}^2 - 2a_4\dot{x}\ddot{x} + ka_2\dot{x} + a_0k$
$a_0 = a_3 = a_4 = 0, a_1 = ka_2, a_2 = k$	$\ddot{x} = -a_5\dot{x}^2 + ka_5x\dot{x} - a_5x\ddot{x} + k^3x$
$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$	$\ddot{x} = -a_5\dot{x}^2 + ka_5x\dot{x} - a_5x\ddot{x} + k\ddot{x}$
$a_0 = a_1 = a_3 = a_4 = 0, a_2 = k$	$\ddot{x} = -a_5\dot{x}^2 + ka_5x\dot{x} - a_5x\ddot{x} + k^2\dot{x}$
$a_0 = a_1 = a_3 = 0, a_2 = k, a_5 = ka_4$	$\ddot{x} = k^2a_4x\dot{x} - ka_4x\ddot{x} - 2a_4\dot{x}\ddot{x} + k^2\dot{x}$
$a_0 = a_3 = 0, a_1 = ka_2, a_2 = k, a_5 = ka_4$	$\ddot{x} = k^2a_4x\dot{x} - ka_4x\ddot{x} - 2a_4\dot{x}\ddot{x} + k^3x$
$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0, a_5 = ka_4$	$\ddot{x} = k^2a_4x\dot{x} - ka_4x\ddot{x} - 2a_4\dot{x}\ddot{x} + k\ddot{x}$
$k = a_0 = a_1 = a_3 = 0$	$\ddot{x} = -a_5\dot{x}^2 - a_5x\ddot{x} - 2a_4\dot{x}\ddot{x} - a_2\ddot{x}$
$k = a_0 = a_2 = a_3 = 0$	$\ddot{x} = -a_5\dot{x}^2 - a_5x\ddot{x} - 2a_4\dot{x}\ddot{x} - a_1\dot{x}$
$a_0 = a_1 = 0, a_2 = k, a_3 = \frac{k^2}{2}a_4, a_5 = ka_4$	$\ddot{x} = \frac{k^3}{2}a_4x^2 - a_4x\ddot{x} - 2a_4\dot{x}\ddot{x} + k^2\dot{x}$
$a_0 = 0, a_1 = ka_2, a_2 = k, a_3 = \frac{k^2}{2}a_4, a_5 = ka_4$	$\ddot{x} = \frac{k^3}{2}a_4x^2 - a_4x\ddot{x} - 2a_4\dot{x}\ddot{x} + k^3x$
$a_0 = a_1 = a_2 = 0, a_3 = \frac{k^2}{2}a_4, a_5 = ka_4$	$\ddot{x} = \frac{k^3}{2}a_4x^2 - a_4x\ddot{x} - 2a_4\dot{x}\ddot{x} + k\ddot{x}$
$a_0 = a_4 = a_5 = 0, a_2 = k$	$\ddot{x} = ka_3x^2 - 2a_3x\dot{x} + ka_1x + (k^2 - a_1)\dot{x}$
$a_0 = a_4 = a_5 = 0, a_1 = ka_2$	$\ddot{x} = ka_3x^2 - 2a_3x\dot{x} + k^2a_2x + (k - a_2)\ddot{x}$
$a_4 = a_5 = 0, a_1 = ka_2, a_2 = k$	$\ddot{x} = ka_3x^2 - 2a_3x\dot{x} + k^3x + a_0k$
$a_0 = a_1 = a_4 = a_5 = 0$	$\ddot{x} = ka_3x^2 - 2a_3x\dot{x} + ka_2\dot{x} + (k - a_2)\ddot{x}$
$a_1 = a_4 = a_5 = 0, a_2 = k$	$\ddot{x} = ka_3x^2 - 2a_3x\dot{x} + k^2\dot{x} + a_0k$
$a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$	$\ddot{x} = ka_3x^2 - 2a_3x\dot{x} + k\ddot{x} + a_0k$
$a_0 = a_4 = 0, a_1 = ka_2, a_2 = k, a_3 = \frac{k}{2}a_5$	$\ddot{x} = \frac{k^2}{2}a_5x^2 - a_5\dot{x}^2 - a_5x\ddot{x} + k^3x$
$a_0 = a_4 = a_1 = a_2 = 0, a_3 = \frac{k}{2}a_5$	$\ddot{x} = \frac{k^2}{2}a_5x^2 - a_5\dot{x}^2 - a_5x\ddot{x} + k\ddot{x}$
$a_0 = a_4 = a_1 = 0, a_2 = k, a_3 = \frac{k}{2}a_5$	$\ddot{x} = \frac{k^2}{2}a_5x^2 - a_5\dot{x}^2 - a_5x\ddot{x} + k^2\dot{x}$
$k = a_0 = a_1 = a_2 = 0$	$\ddot{x} = -a_5\dot{x}^2 - 2a_3x\dot{x} - a_5x\ddot{x} - 2a_4\dot{x}\ddot{x}$
$k = a_0 = a_5 = 0$	$\ddot{x} = -2a_3x\dot{x} - 2a_4\dot{x}\ddot{x} - a_1\dot{x} - a_2\ddot{x}$
$k = a_0 = a_3 = a_4 = 0$	$\ddot{x} = -a_5\dot{x}^2 - a_5x\ddot{x} - a_1\dot{x} - a_2\ddot{x}$

e utilizando a equação (2.16) obtemos a Tabela 2.2, cuja *jerk equation* é não caótica.

Tabela 2.2: Classes de *jerk equations* não caóticas com 6 termos

Parâmetros	<i>Jerk equations</i> não caóticas
$a_2 = 0$	$\ddot{x} = a_1\dot{x}^2 + a_1x\ddot{x} + a_3\ddot{x} + a_4.$

Observe que, olhando para o quesito variáveis, temos um total de 209 *jerk equations* diferentes de grau 2 que podem ser formadas. Logo, apresentamos 31 dessas *jerk equations* com relação ao comportamento não caótico, ou seja, aproximadamente 15 por cento do total. Ainda, temos que todas as superfícies algébricas invariantes apresentadas no Exemplo 2.2 são difeomorfos a paraboloides hiperbólicos ou elípticos e cilindros parabólicos, uma vez que, essas equações satisfazem a expressão (2.21).

No próximo exemplo, usando o Teorema 2.5, obtivemos de forma bastante simples algumas das *jerk equations* não caóticas obtidas por Malasoma em [43], que são *jerk equations* com 4 termos.

**Exemplo 2.3.** Adotando a equação (2.21) obtemos a Tabela 2.3.

Tabela 2.3: Classes de *jerk equations* não caóticas com 4 termos

Parâmetros	<i>Jerk equations</i> não caóticas
$k = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0, a_5 = -1$	$\ddot{x} = \dot{x}^2 + x\ddot{x}$
$k = a_1 = a_3 = a_5 = 0, a_3 = -\frac{1}{2}, a_2 = -1$	$\ddot{x} = x\dot{x} + \ddot{x}$
$k = a_2 = a_4 = a_5 = 0, a_3 = -\frac{1}{2}, a_1 = -1$	$\ddot{x} = x\dot{x} + \dot{x}$
$k = a_1 = a_2 = a_5 = 0, a_3 = a_4 = -\frac{1}{2}$	$\ddot{x} = x\dot{x} + \dot{x}\ddot{x}$
$k = a_1 = a_3 = a_5 = 0, a_4 = -\frac{1}{2}, a_2 = -1$	$\ddot{x} = x\dot{x} + \dot{x}$
$k = a_2 = a_3 = a_5 = 0, a_4 = -\frac{1}{2}, a_1 = -1$	$\ddot{x} = x\dot{x} + \dot{x}$

Considerando a equação (2.16) obtemos a Tabela 2.4.

Tabela 2.4: Classes de *jerk equations* não caóticas com 4 termos

Parâmetros	<i>Jerk equations</i> não caóticas
$k = a_2 = a_3 = a_4 = 0, a_1 = 1$	$\ddot{x} = \dot{x}^2 + x\dot{x}$

Por fim, considerando a equação (2.16) obtemos a Tabela 2.5.

Tabela 2.5: Classes de *jerk equations* não caóticas com 4 termos

Parâmetros	<i>Jerk equations</i> não caóticas
$k = a_0 = a_2 = 0, a_1 = a_3 = 1$	$\ddot{x} = \dot{x}^2 + \dot{x}$
$k = a_2 = a_3 = 0, a_1 = 1$	$\ddot{x} = \dot{x}^2 + a_0$

No exemplo seguinte, associamos classes de *jerk equations* encontradas por Heidel, Zhang e Le Borne em [70], com a classe determinada no Teorema 2.5.

**Exemplo 2.4.** Em [70], os autores trabalham com algumas classes de *jerk equations* não caóticas. Dentre elas temos:

$$(i) \quad b_1\ddot{x} + b_2\dot{x} + b_3x^2 + b_4\dot{x}^2 + b_5x\dot{x} + x\ddot{x} - 1 = 0,$$

$$(ii) \quad b_1\ddot{x} + b_2\dot{x} + b_3x^2 + x\dot{x} - 1 = 0,$$

$$(iii) \quad b_1\dot{x} + b_2x^2 + \dot{x}^2 - x\ddot{x} = 0.$$

A *jerk equation* (iii) pode ser encontrada nas *jerk equations* já listadas no Exemplo 2.2. Já para as outras equações recorremos a *jerk equation* (2.21) na qual, para *jerk equation* (i) tomamos a seguinte escolha de parâmetros  $a_1 = a_4 = 0, a_2 = \frac{b_2}{k}, a_3 = \frac{b_3}{k}, a_5 = -1, c = -\frac{1}{k}$  e para a *jerk equation* (ii) tomamos  $a_1 = a_4 = a_5 = 0, a_2 = -2b_3 + b_1, a_3 = -\frac{1}{2}, k = -2b_3, c = \frac{1}{2b_3}$ .

**Exemplo 2.5.** Em [74], os autores discutem a ocorrência de caos em certos sistemas *jerk* em  $\mathbb{R}^3$ , devido a existência de órbitas homoclínicas e heteroclínicas, combinações de órbitas homoclínicas e heteroclínicas, e sem órbitas homoclínicas ou heteroclínicas. O estudo mencionado é realizado através da análise do seguinte sistema *jerk*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= b_1y + b_2z + b_3x^2 + b_4y^2 + b_5xy + b_6xz, \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \in \mathbb{R}$ . Afim de complementar os resultados obtidos em [74], obtivemos condições sobre os parâmetros para que o sistema diferencial (2.23) não apresente comportamento caótico. Para isto, consideremos a seguinte escolha de parâmetros na equação *jerk* (2.21):  $a_1 = a_4 = a_0 = 0$ . Então, tomando  $b_1 = ka_2, b_2 = (k - a_2), b_3 = -ka_3, b_4 = b_6 = -a_5, b_5 = (ka_5 - 2a_3)$  no sistema diferencial (2.23) e a função

$$f(x, y, z) = a_3x^2 + a_5xy + a_2y + z, \tag{2.24}$$

temos que a superfície  $f(x, y, z) = 0$  é uma superfície algébrica invariante para o sistema (2.23) com cofator constante  $k$ . Nas figuras 2.4 são mostradas a superfície algébrica invariante  $f(x, y, z) = 0$ , onde  $f$  é dada por (2.24), e algumas soluções do sistema (2.23) com parâmetros  $a_2 = 1, a_3 = -\frac{3}{2}, a_5 = -1, k = 2$  e  $a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, a_5 = -1, k = -2$ , que estão contidos na superfície  $f = 0$ .

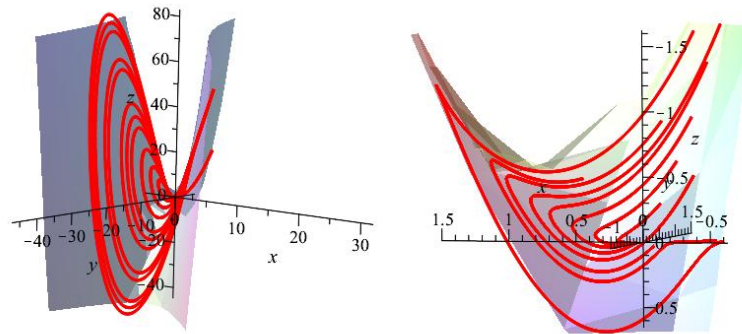


Figura 2.4: Ilustração de alguns possíveis retratos de fase do exemplo (2.23).

Com os resultados anteriores, podemos classificar as  *jerk equations* dos Teoremas 2.5 e 2.6 como sistemas conservativos ou dissipativos.

**Exemplo 2.6.** Considere os sistemas  *jerk* associados as equações  *jerk* (2.16), (2.17) e (2.21). Então, temos que:

- (a) a equação (2.16) é conservativa se  $a_1 = a_3 = 0$  e dissipativa se  $a_1 = 0$ , e  $a_3 < 0$ ;
- (b) a equação (2.17) é conservativa se  $a_2 = 0$  e dissipativa se  $a_2 < 0$ ;
- (c) a equação (2.21) é conservativa se  $F(x, y) = ky + q(x)$ , onde  $q \in \mathbb{R}[x]$ .

# Capítulo 3

## Sistemas *Lorenz-like* e sistemas com quádricas invariantes

Neste capítulo, estudaremos o comportamento não caótico de uma classe de sistemas diferenciais quadráticos em  $\mathbb{R}^3$  conhecida como sistemas tipo Lorenz (ou *Lorenz like systems*), dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1yz, \\ \dot{y} &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2xz, \\ \dot{z} &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3xy,\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde os parâmetros  $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$  com  $i = 1, 2, 3$ . Este tipo de sistema diferencial é constantemente citado em trabalhos sobre sistemas diferenciais caóticos, uma vez que a partir dele podemos gerar vários outros sistemas famosos que apresentam comportamento caótico, tais como os sistemas de Rabinovich [32], Chen-Ueta [12], entre outros, além do próprio sistema de Lorenz [41], bastando para isso escolher adequadamente os parâmetros  $a_i, b_i, c_i, d_i$ .

Assim, como os outros sistemas diferenciais vistos anteriormente, podemos associar naturalmente ao sistema (3.1) o campo de vetores

$$X(x, y, z) = P(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}.\tag{3.2}$$

Usaremos durante este capítulo, o que chamamos de quádricas invariantes. Suponha que  $f(x, y, z) = 0$  seja uma superfície algébrica invariante do sistema diferencial (3.1), onde  $f$  é um polinômio de grau 2. Neste caso, dizemos que a superfície  $f = 0$  é uma *quádrica*.

Estas superfícies são classificadas como quádricas não-degeneradas (elipsoide ou esfera, cilindro, parabolóide, hiperbolóides de uma e duas folhas, cone) e quádricas degeneradas (dois planos reais paralelos, dois planos complexos paralelos, um plano real duplo, dois planos reais interceptando-se numa reta e um ponto real).

Determinamos aqui condições para que o sistema (3.1) apresente uma quádrica invariante com cofator constante e, conseqüentemente, não apresente comportamento caótico.

### 3.1 Sistemas *Lorenz-like*

A seguir, obtemos algumas classes de sistemas diferenciais polinomiais da forma (3.1), ou seja, sistemas do tipo *Lorenz-like*, para os quais podemos determinar funções  $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  com  $i = 1, \dots, 7$  que são superfícies algébricas invariantes para essas classes de sistemas diferenciais, com cofator constante. Deste modo, as classes determinadas nesta seção não apresentam comportamento caótico. Então, considere o sistema diferencial (3.1) com a escolha de parâmetros:

- Para os parâmetros:

$$a_1 = b_2 = \frac{k}{2}, a_3 = -\frac{(2a_2\alpha_2 - k\alpha_1)}{2\alpha_3}, b_1 = -\frac{(2a_2\alpha_5 + d_3\alpha_3)}{2\alpha_4}, b_3 = \frac{1}{2}m_1, c_1 = -\frac{d_2\alpha_2}{2\alpha_4},$$

$$d_1 = -\frac{d_2\alpha_5}{\alpha_4}, c_2 = \frac{d_2\alpha_1}{2\alpha_4}, c_3 = k, d_4 = -\frac{d_2\alpha_5}{\alpha_4},$$

obtemos o sistema diferencial, para  $\alpha_3\alpha_4 \neq 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{k}{2}x - \frac{(2a_2\alpha_5 + d_3\alpha_3)}{2\alpha_4}y - \frac{d_2\alpha_2}{2\alpha_4}z - \frac{d_2\alpha_5}{\alpha_4}yz, \\ \dot{y} &= a_2x + \frac{k}{2}y + \frac{d_2\alpha_1}{2\alpha_4}z + d_2xz, \\ \dot{z} &= -\frac{(2a_2\alpha_2 - k\alpha_1)}{2\alpha_3}x + \frac{1}{2}m_1y + kz + d_3xy, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde,  $m_1 = \frac{(2a_2\alpha_1\alpha_5 + d_3\alpha_1\alpha_3 + k\alpha_2\alpha_4)}{\alpha_3\alpha_4}$  e  $\alpha_4\alpha_3 \neq 0$ . O sistema diferencial (3.3) admite

$$f_1(x, y, z) = \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3z + \alpha_4x^2 + \alpha_5y^2$$

como superfície algébrica invariante, com cofator  $k \in \mathbb{R}$ .

- Para os parâmetros:

$$a_1 = b_2 = \frac{k}{2}, b_1 = \frac{k^2}{4a_2}, c_1 = \frac{d_2\alpha_2k^2}{8a_2^2\alpha_1}, c_2 = -\frac{d_2\alpha_2k}{4a_2\alpha_1}$$

e  $d_1 = \frac{d_2k^2}{4a_2^2}$ , obtemos o sistema, onde  $ka_2\alpha_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{k}{2}x - \frac{k^2}{4a_2}y - \frac{d_2\alpha_1k^2}{8a_2^2\alpha_2}z - \frac{d_2k^2}{4a_2^2}yz, \\ \dot{y} &= a_2x + \frac{k}{2}y - \frac{d_2k\alpha_1}{4a_2\alpha_2}z + d_2xz, \\ \dot{z} &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3xy, \end{aligned} \quad (3.4)$$

para o qual

$$f_2(x, y, z) = 2\frac{a_2\alpha_1}{k}x + \alpha_1y - 4\frac{a^2\alpha_2}{k^2}x^2 + \alpha_2y^2$$

é uma superfície algébrica invariante de (3.4), com cofator  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

- Para os parâmetros:

$$a_1 = b_2 = c_3 = \frac{k}{2}, a_2 = -\frac{a_3\alpha_3}{\alpha_2}, b_1 = m_2, b_3 = \frac{k\alpha_2}{\alpha_3}, c_1 = m_3, c_2 = \frac{k\alpha_3}{2\alpha_2}, c_3 = \frac{k}{2}$$

e  $d_1 = m_1$ , obtemos o sistema diferencial para  $\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \neq 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{k}{2}x + m_2y + m_3z + m_1yz, \\ \dot{y} &= -\frac{a_3\alpha_3}{\alpha_2}x + \frac{k}{2}y + \frac{k\alpha_3}{2\alpha_2}z + d_2xz, \\ \dot{z} &= a_3x + \frac{k\alpha_2}{\alpha_3}y + \frac{k}{2}z + d_3xy, \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde,  $m_1 = -\alpha_4 \frac{(d_2\alpha_2^2 - d_3\alpha_3^2)}{\alpha_2^2\alpha_4}$ ,  $m_2 = \alpha_3 \frac{(2a_3\alpha_5 - d_3\alpha_2)}{2\alpha_2\alpha_4}$ ,  $m_3 = \frac{2a_3\alpha_3^2\alpha_5 - d_2\alpha_2^3}{2\alpha_2^2\alpha_4}$ . O sistema diferencial (3.5) admite

$$f_3(x, y, z) = \alpha_2y + \alpha_3z + \alpha_4x^2 + \alpha_5y^2 - \frac{\alpha_3^2\alpha_5}{\alpha_2^2}z^2$$

como superfície algébrica invariante, com cofator  $k \in \mathbb{R}$ .

- Para os parâmetros:

$$a_1 = \frac{k}{2}, b_1 = -\frac{a_2\alpha_2}{\alpha_1}, b_2 = \frac{k}{2}, c_1 = -\frac{a_3\alpha_3}{\alpha_1}, c_2 = -\frac{b_3\alpha_3}{\alpha_2}, c_3 = \frac{k}{2}, d_1 = -\frac{(d_2\alpha_2 + d_3\alpha_3)}{\alpha_1},$$

obtemos o sistema onde  $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{k}{2}x - \frac{a_2\alpha_2}{\alpha_1}y - \frac{a_3\alpha_3}{\alpha_1}z - \frac{(d_2\alpha_2 + d_3\alpha_3)}{\alpha_1}yz, \\ \dot{y} &= a_2x + \frac{k}{2}y - \frac{b_3\alpha_3}{\alpha_2}z + d_2xz, \\ \dot{z} &= a_3x + b_3y + \frac{k}{2}z + d_3xy, \end{aligned} \quad (3.6)$$

para o qual

$$f_4(x, y, z) = \alpha_1x^2 + \alpha_2y^2 + \alpha_3z^2$$

é uma superfície algébrica invariante do sistema (3.6), com cofator  $k \in \mathbb{R}$ .

- Para os parâmetros:

$$a_1 = c_3 = \frac{k}{2}, b_1 = b_3 = 0, c_1 = -\frac{a_3\alpha_2}{\alpha_1}, d_1 = -\frac{d_3\alpha_2}{\alpha_1},$$

obtemos o sistema onde  $\alpha_1 \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{k}{2}x - \frac{a_3\alpha_2}{\alpha_1}z - \frac{d_3\alpha_2}{\alpha_1}yz, \\
 \dot{y} &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2xz, \\
 \dot{z} &= a_3x + \frac{k}{2}z + d_3xy,
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

para o qual

$$f_5(x, y, z) = \alpha_1x^2 + \alpha_2z^2$$

é uma superfície algébrica invariante do sistema (3.7), com cofator  $k \in \mathbb{R}$ .

- Por fim, para os parâmetros:

$$a_1 = b_2 = c_3 = 0, a_2 = -\frac{a_3\alpha_3}{\alpha_2}, b_1 = \alpha_3 \frac{(2a_3\alpha_5 - d_3\alpha_2)}{2\alpha_2\alpha_4}, b_3 = -\alpha_1 \frac{2a_3\alpha_5 - d_3\alpha_2}{2\alpha_2\alpha_4},$$

$$c_1 = -\frac{(2a_3\alpha_6 + d_2\alpha_2)}{2\alpha_4}, c_2 = \alpha_1 \frac{2a_3\alpha_5 + d_3\alpha_2}{2\alpha_2\alpha_4}$$

e  $d_1 = -\frac{(d_2\alpha_2 + d_3\alpha_3)}{\alpha_1}$ , obtemos o sistema para  $\alpha_2\alpha_4 \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \alpha_3 \frac{(2a_3\alpha_5 - d_3\alpha_2)}{2\alpha_2\alpha_4}y - \frac{(2a_3\alpha_6 + d_2\alpha_2)}{2\alpha_4}z - \frac{(d_2\alpha_2 + d_3\alpha_3)}{\alpha_1}yz, \\
 \dot{y} &= -\frac{a_3\alpha_3}{\alpha_2}x + \alpha_1 \frac{2a_3\alpha_5 + d_3\alpha_2}{2\alpha_2\alpha_4}z + d_2xz, \\
 \dot{z} &= a_3x - \alpha_1 \frac{2a_3\alpha_5 - d_3\alpha_2}{2\alpha_2\alpha_4}y + d_3xy,
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde

$$f_6(x, y, z) = \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3z + \alpha_4x^2 + \alpha_5y^2 + \alpha_6z^2$$

é uma integral primeira do sistema diferencial (3.8).

Como os cofatores das superfícies algébricas invariantes acima são constantes, podemos enunciar o seguinte resultado.

**Proposição 3.1.** *Os sistemas diferenciais polinomiais (3.3)-(3.7) não apresentam comportamento caótico. Por outro lado, os sistemas diferenciais (3.3), (3.5)-(3.7) admitem integral primeira se  $k = 0$ . Por fim, o sistema diferencial polinomial (3.8) admite uma integral primeira e não apresenta comportamento caótico.*

Um fato interessante de se observar é que o sistema diferencial (3.1) só admite um plano como superfície algébrica invariante se  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ , ou seja, se for linear. Abaixo classificamos quais desses sistemas diferenciais são conservativos ou dissipativos.

**Proposição 3.2.** *Considere os sistemas (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) e (3.8), então os seguintes resultados seguem:*



- (i) O sistema (3.3) é dissipativo se  $k < 0$  e conservativo se  $k = 0$ , e conseqüentemente só será conservativo se  $f_1 = 0$  for uma integral primeira do sistema.
- (ii) O sistema (3.4) é dissipativo se  $k < -c_3$  e conservativo se  $k = -c_3$ .
- (iii) O sistema (3.5) é dissipativo se  $k < 0$  e conservativo se  $k = 0$ , e conseqüentemente só será conservativo se  $f_3 = 0$  for uma integral primeira do sistema.
- (iv) O sistema (3.6) é dissipativo se  $k < 0$  e conservativo se  $k = 0$ , e conseqüentemente só será conservativo se  $f_4 = 0$  for uma integral primeira do sistema.
- (v) O sistema (3.7) é dissipativo se  $k < -b_2$  e conservativo se  $k = -b_2$ .
- (vi) O sistema (3.8) é sempre conservativo.

Uma questão que pode ser colocada é como obter mais parâmetros livres nos sistemas (3.3)–(3.8) para não ocorrência de comportamento caótico das soluções. Podemos obter mais variáveis livres nestes sistemas, porém a partir do momento que modificamos os parâmetros de um sistema, também modificamos os parâmetros das superfícies relacionadas, pois as superfícies algébricas invariantes são obtidas a partir dos sistemas diferenciais. Por exemplo, tomando a mudança  $x_1 = \alpha x$ ,  $y_1 = \beta y$ ,  $z_1 = \rho z$  e  $t_1 = \delta t$ , temos que  $\dot{x} = \frac{\delta}{\alpha} \dot{x}_1$ ,  $\dot{y} = \frac{\delta}{\beta} \dot{y}_1$  e  $\dot{z} = \frac{\delta}{\rho} \dot{z}_1$ . A partir daí podemos, por exemplo, gerar o seguinte sistema diferencial derivado do sistema (3.6):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= h_1 x - \frac{m_3}{m_2} y + h_2 z + h_2 \frac{m_1}{m_2} xy, \\ \dot{y} &= h_4 x + h_1 y + h_5 z + h_3 xz, \\ \dot{z} &= h_7 x + h_8 y - \frac{h_1}{2} z + h_6 yz,\end{aligned}\tag{3.9}$$

onde  $m_1 = h_3 h_8 - h_5 h_6$ ,  $m_2 = h_5 h_7$  e  $m_3 = h_3 h_4 h_8$ , com  $h_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1 \dots 8$  e  $m_2, h_5 \neq 0$ . Note que,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y, z) = h_2 z^2 - \frac{h_2 h_8}{h_5} y^2 - h_7 x^2,$$

é uma superfície algébrica invariante do sistema diferencial (3.9), com cofator  $K_5 = 2h_1$ . Perceba que mesmo com a mudança de variável o sistema diferencial (3.6) ainda apresenta o mesmo padrão de superfície invariante.

Os sistemas diferenciais (3.3)–(3.8) obtidos acima podem ser adaptados para gerar sistemas diferenciais conhecidos na literatura, que apresentam (para certos parâmetros) comportamento caótico. Vamos explorar alguns deles a seguir, que são estudados em muitos artigos e livros, veja por exemplo [32], [33], [34] e suas referências.

### Sistema de Rabinovich

Um sistema estudado na literatura e que é do tipo Lorenz é o sistema de Rabinovich (ver [32]), dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= hy - v_1x + yz, \\ \dot{y} &= hx - v_2y - xz, \\ \dot{z} &= -v_3z + xy.\end{aligned}\tag{3.10}$$

com  $h, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ . O sistema (3.10) apresenta comportamento caótico para os parâmetros  $v_1 = 4, v_2 = v_3 = 1$  e  $h = 6,75$  como podemos ver em [32]. Utilizando os sistemas diferenciais da Proposição 3.1 obtemos os seguintes casos em que o sistema de Rabinovich apresenta uma superfície algébrica invariante com cofator constante e, conseqüentemente, não apresenta comportamento caótico:

- (a) Considere o sistema diferencial (3.3) com a seguinte escolha de parâmetros  $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1}{2}, d_2 = -1, d_3 = 1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 1$  e  $\alpha_5 = -1$ , logo, obtemos o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2}kx - y + yz, \\ \dot{y} &= x + \frac{1}{2}ky - xz, \\ \dot{z} &= kz + xy,\end{aligned}\tag{3.11}$$

que é um sistema diferencial do tipo (3.10) e apresenta  $x^2 + y^2 - z = 0$  como superfície algébrica invariante, com cofator constante  $k$ .

- (b) Considere o sistema diferencial (3.6) com a seguinte escolha de parâmetros  $a_3 = b_3 = 0, d_2 = -1, d_3 = 1, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1$  e  $\alpha_3 = 2$ , obtemos assim o seguinte sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2}kx + a_2y + yz, \\ \dot{y} &= a_2x + \frac{1}{2}ky - xz, \\ \dot{z} &= \frac{1}{2}kz + xy,\end{aligned}\tag{3.12}$$

Neste caso, o sistema apresenta  $-x^2 + y^2 + 2z^2 = 0$  como superfície algébrica invariante, com cofator constante  $k$ . Alguns possíveis retratos de fase sobre essas superfícies são mostrados nas Figuras 3.1 e 3.2.

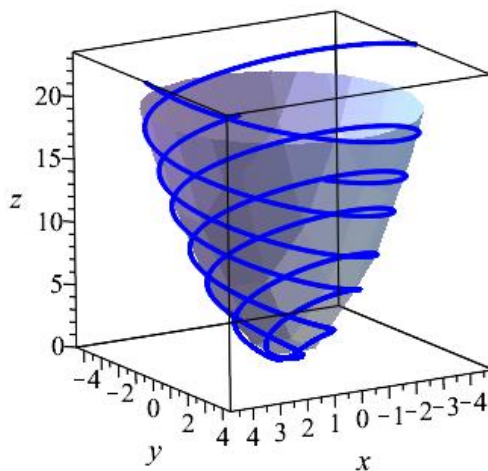


Figura 3.1: Rabinovich caso (a).

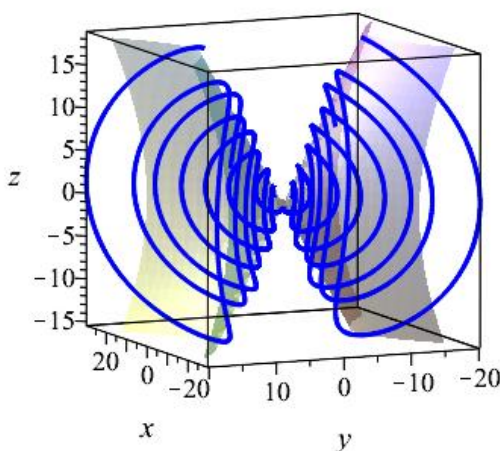


Figura 3.2: Rabinovich caso (b).

### Sistema de Chen-Ueta

Como uma subclasse do sistema diferencial (3.1) obtemos o conhecido sistema de Chen-Ueta (ver [34]), dado por

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= a(y - x), \\
 \dot{y} &= (c - a)x - cy - xz, \\
 \dot{z} &= -bz + xy,
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . O sistema (3.13) apresenta comportamento caótico quando adotamos os parâmetros  $a = 35, b = 3$  e  $c = 28$  como podemos ver em [12]. Pelo Teorema 3.1, temos os seguintes casos nos quais o sistema diferencial de Chen-Ueta não apresenta comportamento caótico.

Considere o sistema (3.3) com a seguinte escolha de parâmetros  $a_2 = k, d_2 = 1, d_3 = -1, c_2 = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_5 = 0, \alpha_3 = -k, \alpha_4 = 1$ , logo obtemos o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{2}k(y-x), \\ \dot{y} &= kx + \frac{1}{2}ky + xz, \\ \dot{z} &= kz - xy, \end{aligned} \tag{3.14}$$

que apresenta  $x^2 - kz = 0$  como superfície algébrica invariante, com cofator constante  $k \in \mathbb{R}$ . Um possível retrato de fase deste sistema sobre a superfície é mostrado na Figura 3.3.

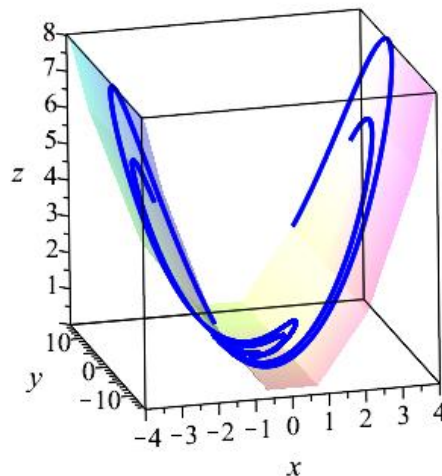


Figura 3.3: Chen-Ueta.

### Sistema de Lorenz

O sistema de Lorenz já foi abordado no Capítulo 2. Tomando as condições abaixo este não apresenta comportamento caótico, segundo o Teorema 3.1.

(a) Considere o sistema (3.3) com a seguinte escolha de parâmetros  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_5 = 0, \alpha_3 =$

$k, \alpha_4 = 1, d_2 = -1, d_3 = 1, k = -2$ , então obtemos o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x, \\ \dot{y} &= a_2x - y - xz, \\ \dot{z} &= -2z + xy.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Este sistema apresenta o cilindro parabólico  $x^2 - 2z = 0$  como superfície algébrica invariante com cofator  $k = -2$  e ainda é do tipo (2.2).

(b) Considere o sistema (3.6) com a seguinte escolha de parâmetros  $a_3 = 0, b_3 = 0, d_2 = -1, d_3 = 1, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{a_2}, k = -2$ , com  $a_2 \neq 0$ , então geramos o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x, \\ \dot{y} &= a_2x - y - xz, \\ \dot{z} &= -z + xy.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Este sistema apresenta o cone  $-x^2 + \frac{1}{a_2}(y^2 + z^2) = 0$  como superfície algébrica invariante com cofator  $k \in \mathbb{R}$ . Alguns possíveis retratos de fase sobre essas superfícies são mostrados nas Figuras 3.4 e 3.5.

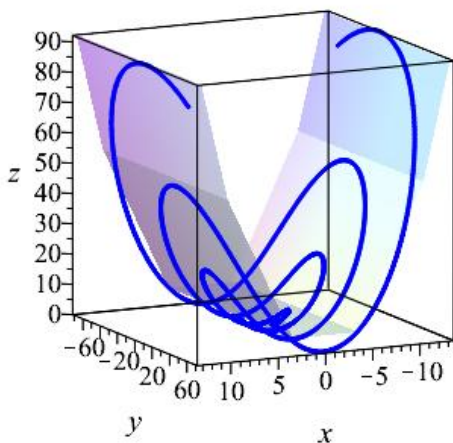


Figura 3.4: Lorenz caso (a)

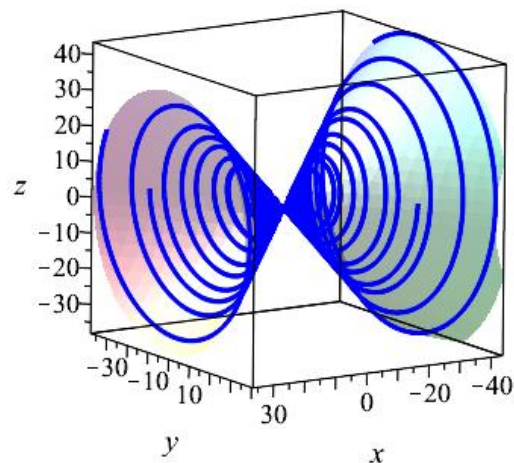


Figura 3.5: Lorenz caso (b)

Na próxima seção estudamos um sistema diferencial simétrico onde, sob certas condições, este apresenta comportamento caótico. Afim de contribuir com tal trabalho, adotamos condições para que tal sistema diferencial não apresente comportamento caótico.

### 3.1.1 Sistemas com simetria $D_2$

Em [2] os autores estudam o seguinte sistema diferencial derivado do sistema (3.1):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1x + yz, \\ \dot{y} &= b_2y + xz, \\ \dot{z} &= c_3z - xy.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Tal sistema apresenta vários tipos de simetria, conforme apresentado em [2]. No referido trabalho, os autores mostram que o sistema (3.17) apresenta comportamento caótico, dependendo da escolha dos parâmetros  $a_1, b_2$  e  $c_3$ . Os autores mostram que  $V(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$  é uma função de Lyapunov para o sistema diferencial (3.17), e que se  $a_1 > 0$  e  $b_2 = 0$  (respectivamente  $a_1 = 0$  e  $b_2 > 0$ ) a função  $H_{a_1}(x, y, z) = x^2 + z^2$  (respectivamente a função  $H_{b_2}(x, y, z) = y^2 + z^2$ ) é um invariante de Darboux para este sistema diferencial com cofator 2. O invariante  $H_{a_1}$  pode ser visto como uma superfície algébrica invariante obtida através do sistema diferencial (3.7), tomando a seguinte escolha de parâmetros  $a_2 = a_3 = c_2 = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 1, d_2 = 1$  e  $d_3 = -1$ , porém com o cofator  $k \in \mathbb{R}$ . Analogamente, o invariante  $H_{b_2}$  pode também ser visto como uma superfície algébrica invariante a partir de uma mudança de variável no sistema diferencial (3.7). Mostremos que o sistema (3.17) admite um cone como superfície algébrica invariante. Para isto, considere o sistema diferencial (3.6) com a seguinte escolha de parâmetros  $a_2 = a_3 = b_3 = 0, d_2 = 1, d_3 = -1, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1$ . Desta forma, o sistema (3.17) apresenta o cone  $-x^2 + 2y^2 + z^2 = 0$  como superfície algébrica invariante com cofator  $k \in \mathbb{R}$ , o que completa e generaliza o resultado apresentado em [2]. Neste caso, o sistema pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{k}{2}x + yz, \\ \dot{y} &= \frac{k}{2}y + xz, \\ \dot{z} &= \frac{k}{2}z - xy,\end{aligned}\tag{3.18}$$

que não apresenta comportamento caótico. Um esboço do retrato de fase desse sistema é apresentado na Figura 3.6.

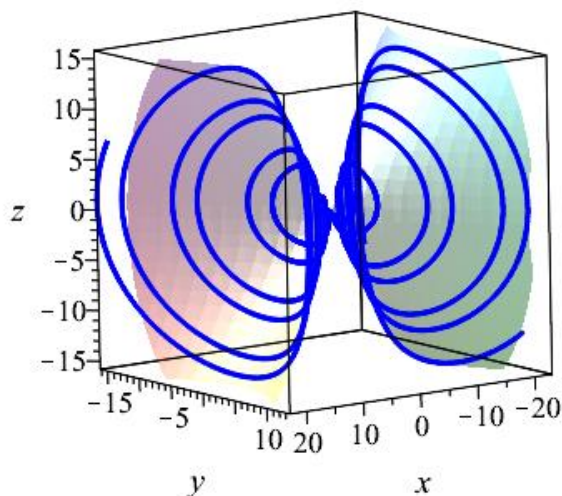


Figura 3.6: Retrato de fase do sistema diferencial (3.18).

## 3.2 Sistemas diferenciais com quádricas invariantes

Como já foi mencionado neste texto, em [35] os autores apresentam as formas normais de sistemas diferenciais polinomiais em  $\mathbb{R}^3$ , que apresentam quádricas como superfícies algébricas invariantes, dentre as quais podemos destacar: o parabolóide hiperbólico ( $y^2 - z^2 - x = 0$ ) e parabolóide elíptico ( $y^2 + z^2 - x = 0$ ), o cilindro parabólico ( $z^2 - x = 0$ ) e o cone ( $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ). De fato, de acordo com [35], considerando  $A, B, C, D, E, F, S \in \mathbb{R}[x, y, z]$ , temos que a forma normal do sistema diferencial que apresenta um parabolóide hiperbólico invariante é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (y^2 - z^2 - x) A(x, y, z) - 2yD(x, y, z) - 2zE(x, y, z), \\ \dot{y} &= (y^2 - z^2 - x) B(x, y, z) + 2zF(x, y, z) - D(x, y, z), \\ \dot{z} &= (y^2 - z^2 - x) C(x, y, z) + 2yF(x, y, z) + E(x, y, z). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Note que o cofator da superfície algébrica invariante do sistema (3.19) é

$$K_{PH}(x, y, z) = 2yB(x, y, z) - 2zC(x, y, z) - A(x, y, z).$$

No mesmo texto, vemos que a forma normal de um sistema diferencial que apresenta um para-

boloide elíptico invariante é dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (y^2 + z^2 - x) A(x, y, z) - 2yD(x, y, z) + 2zE(x, y, z), \\ \dot{y} &= (y^2 + z^2 - x) B(x, y, z) - 2zF(x, y, z) - D(x, y, z), \\ \dot{z} &= (y^2 + z^2 - x) C(x, y, z) + 2yF(x, y, z) + E(x, y, z).\end{aligned}\tag{3.20}$$

O cofator da superfície algébrica invariante, neste caso, é

$$K_{PE}(x, y, z) = 2yB(x, y, z) + 2zC(x, y, z) - A(x, y, z).$$

A forma normal do sistema diferencial que apresenta um cilindro parabólico como superfície algébrica invariante é dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (z^2 - x) A(x, y, z) + 2zE(x, y, z), \\ \dot{y} &= S(x, y, z), \\ \dot{z} &= (z^2 - x) C(x, y, z) + E(x, y, z).\end{aligned}\tag{3.21}$$

O cofator dessa superfície invariante é

$$K_{PC}(x, y, z) = 2zC(x, y, z) - A(x, y, z).$$

E, por fim, a forma normal de um sistema diferencial polinomial que apresenta um cone como superfície algébrica invariante é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x^2 + y^2 - z^2) A(x, y, z) - 2yD(x, y, z) - 2zE(x, y, z) + xS(x, y, z), \\ \dot{y} &= (x^2 + y^2 - z^2) B(x, y, z) + 2xD(x, y, z) + 2zF(x, y, z) + yS(x, y, z), \\ \dot{z} &= (x^2 + y^2 - z^2) C(x, y, z) - 2xE(x, y, z) + 2yF(x, y, z) + zS(x, y, z),\end{aligned}\tag{3.22}$$

sendo que o cofator dessa superfície é

$$K_C(x, y, z) = 2(xA(x, y, z) + yB(x, y, z) - zC(x, y, z) + S(x, y, z)).$$

Podemos associar os sistemas *Lorenz-like*, estudados na seção anterior, com as formas normais acima. De fato, podemos obter também, a partir dessas formas normais, os sistemas *Lorenz-like* não caóticos obtidos na seção anterior. Para isto, precisamos dos seguintes resultados.

De acordo com o Teorema 2.3, provado no Capítulo 2, uma condição suficiente para que cada um desses sistemas diferenciais não apresente comportamento caótico é:

$$A(x, y, z) = k + 2yB(x, y, z) - 2zC(x, y, z)$$

no caso do sistema (3.19),

$$A(x, y, z) = k + 2yB(x, y, z) + 2zC(x, y, z)$$



no caso do sistema diferencial (3.20),

$$A(x, y, z) = k - 2zC(x, y, z),$$

no caso do sistema (3.21) e, por fim, para o sistema diferencial (3.22) temos

$$S(x, y, z) = k - (xA(x, y, z) + yB(x, y, z) - zC(x, y, z)),$$

onde estamos considerando sempre  $k \in \mathbb{R}$ . Adotando esses polinômios segue que os cofatores dos sistemas (3.19), (3.20), (3.21) e (3.22) serão sempre constantes.

Note ainda que, em alguns dos casos em que temos sistemas diferenciais com quádricas invariantes, estudados em [35], nada podemos dizer sobre o seu comportamento não caótico, uma vez que não se pode obter condições sobre os cofatores para que sejam constantes, como são os casos dos hiperboloides de uma e duas folhas.

Assim, podemos concluir que se algum sistema diferencial do tipo (3.19), (3.20), (3.21) e (3.22) satisfaz as condições impostas acima esse sistema diferencial não apresentará comportamento caótico segundo o Teorema 2.3. Podemos sintetizar a discussão acima no seguinte resultado.

**Proposição 3.3.** *Considere os sistemas diferenciais (3.19), (3.20), (3.21) e (3.22) satisfazendo:*

$$A(x, y, z) = k + 2yB(x, y, z) - 2zC(x, y, z),$$

$$A(x, y, z) = k + 2yB(x, y, z) + 2zC(x, y, z),$$

$$A(x, y, z) = k - 2zC(x, y, z)$$

e

$$S(x, y, z) = k - (xA(x, y, z) + yB(x, y, z) - zC(x, y, z)),$$

*respectivamente. Então, esses sistemas diferenciais não apresentam comportamento caótico.*

## Capítulo 4

### Quádricas invariantes do tipo

$$G_p = x^2 + y^2 - z^2 + p$$

Neste capítulo, estudaremos o comportamento qualitativo de sistemas diferenciais polinomiais que apresentam um cone, um hiperbolóide de uma folha ou de duas folhas como quádricas invariantes, ou seja, sistemas diferenciais que apresentem quádricas dadas pela imagem inversa  $g^{-1}(0)$  da função  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + p$ , com  $p \in [-1, 1]$ . Estamos interessados em estudar o comportamento do fluxo de tais sistemas diferenciais quando mudamos o seu espaço de fase, ou seja, quando variamos o parâmetro  $p$  no intervalo de  $[-1, 1]$ . Denotaremos essas quádricas por  $G_p = g^{-1}(0) = x^2 + y^2 - z^2 + p = 0$ . Perceba que quando  $p \in [-1, 0)$  temos um hiperboloide de uma folha, se  $p = 0$  um cone e se  $p \in (0, 1]$  um hiperboloide de duas folhas.

#### 4.1 Estudo qualitativo

Em [35], os autores fornecem todas as formas normais de sistemas diferenciais polinomiais de grau arbitrário com uma quádrica como superfície algébrica invariante, em particular, o sistemas diferenciais que apresentam Hiperboloides de uma e duas folhas como superfícies algébricas invariantes são do tipo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= G_p A(x, y, z) - 2yD(x, y, z) - 2zE(x, y, z), \\ \dot{y} &= G_p B(x, y, z) + 2xD(x, y, z) + 2zF(x, y, z), \\ \dot{z} &= G_p C(x, y, z) - 2xE(x, y, z) + 2yF(x, y, z), \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}[x, y, z]$  e  $G_p = x^2 + y^2 - z^2 + p = 0$ , com  $p \in [-1, 0]$  ou  $p \in (0, 1]$ . Por outro lado, os sistemas diferenciais que apresentam um cone como superfície algébrica invariante são da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= G_0 A(x, y, z) - 2yD(x, y, z) - 2zE(x, y, z) + xS(x, y, z), \\ \dot{y} &= G_0 B(x, y, z) + 2xD(x, y, z) + 2zF(x, y, z) + yS(x, y, z), \\ \dot{z} &= G_0 C(x, y, z) - 2xE(x, y, z) + 2yF(x, y, z) + zS(x, y, z),\end{aligned}\tag{4.2}$$

onde  $A, B, C, D, E, F, S \in \mathbb{R}[x, y, z]$  e  $G_0 = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ , com  $p = 0$ .

Note que a diferença entre os sistemas diferenciais (4.1) e (4.2) é o polinômio  $S(x, y, z)$ . Sabemos que o sistema diferencial (4.1) não admite invariante de Darboux, porém o sistema (4.2) admite esse invariante sob a condição que mencionamos na proposição abaixo.

**Proposição 4.1.** *O sistema diferencial (4.1) não admite invariante de Darboux, enquanto o sistema diferencial (4.2) admite invariante de Darboux se, e somente se,  $S(x, y, z)$  é um polinômio com termo constante não nulo.*

Este resultado pode ser encontrado em [35].

Logo, a fim de determinar um sistema diferencial que tenha simultaneamente as três superfícies invariantes tomamos o polinômio  $S(x, y, z) \equiv 0$ . Assim, o sistema diferencial (4.2) coincide com o sistema diferencial (4.1), ou seja, o sistema diferencial (4.1) apresenta as três superfícies (cone, hiperbolóide de uma e duas folhas) como superfícies algébricas invariantes dependendo do valor de  $p$ . Como estamos interessados em estudar o caso quadrático, consideramos  $A = a \in \mathbb{R}, B = b \in \mathbb{R}, C = c \in \mathbb{R}$  e

$$D(x, y, z) = d_0 + d_1x + d_2y + d_3z,$$

$$E(x, y, z) = e_0 + e_1x + e_2y + e_3z,$$

$$F(x, y, z) = f_0 + f_1x + f_2y + f_3z,$$

onde  $d_i, e_i, f_i \in \mathbb{R}$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Podemos escrever o sistema diferencial (4.1) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= G_p a - 2y(d_0 + d_1x + d_2y + d_3z) - 2z(e_0 + e_1x + e_2y + e_3z), \\ \dot{y} &= G_p b + 2x(d_0 + d_1x + d_2y + d_3z) + 2z(f_0 + f_1x + f_2y + f_3z), \\ \dot{z} &= G_p c - 2x(e_0 + e_1x + e_2y + e_3z) + 2y(f_0 + f_1x + f_2y + f_3z).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Naturalmente, podemos associar ao sistema (4.3) o campo de vetores:

$$X(x, y, z) = P(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z},\tag{4.4}$$

onde  $P, Q, R$  são os polinômios do lado direito do sistema (4.3). O grau deste campo de vetores é no máximo 2.

**Teorema 4.1.** *A quádrica  $G_p = 0$  é uma superfície algébrica invariante para o sistema diferencial (4.3) para todo  $p \in [-1, 1]$ .*

*Demonstração.* De fato, temos que

$$X(G_p) = \frac{\partial G_p}{\partial x}P + \frac{\partial G_p}{\partial y}Q + \frac{\partial G_p}{\partial z}R = 2(xa + yb - zc)G_p.$$

Logo, tomando o cofator  $K = 2(xa + yb - zc)$ , temos o resultado desejado.  $\square$

Como as superfícies  $G_p = 0$  não admitem um cofator constante, não podemos dizer se o sistema diferencial (4.3) exibe ou não comportamento caótico, pois não podemos aplicar o método dos capítulos anteriores. Um resultado imediato, relacionado a essas superfícies é em relação a quando elas são integrais primeiras do sistema (4.3).

**Corolário 4.1.** *O sistema diferencial (4.3) admite a função  $G_p$  como integral primeira se, e somente se,  $a = b = c = 0$ .*

Por outro lado, adotando  $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + p}$  obtemos o seguinte sistema diferencial em  $\mathbb{R}^2$ , que corresponde a restrição de (4.3) às superfícies algébricas invariantes  $G_p = 0$ :

$$\dot{x} = -2y \left( d_0 + d_1x + d_2y \pm d_3\sqrt{x^2 + y^2 + p} \right) \pm 2\sqrt{x^2 + y^2 + p} \left( e_0 + e_1x + e_2y \pm e_3\sqrt{x^2 + y^2 + p} \right), \quad (4.5)$$

$$\dot{y} = 2x \left( d_0 + d_1x + d_2y \pm d_3\sqrt{x^2 + y^2 + p} \right) \pm 2\sqrt{x^2 + y^2 + p} \left( f_0 + f_1x + f_2y \pm f_3\sqrt{x^2 + y^2 + p} \right).$$

Por comodidade indicaremos  $\pm\sqrt{x^2 + y^2 + p} = z_p^\pm$ , logo teremos  $\pm\sqrt{x^2 + y^2 + 1} = z_1^\pm$  no caso do hiperboloide de duas folhas,  $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = z_0^\pm$  no caso do cone e  $\pm\sqrt{x^2 + y^2 - 1} = z_{-1}^\pm$  no caso do hiperboloide de uma folha. Chamaremos o sistema diferencial (4.5) de sistema diferencial restrito a superfície  $G_p$ . Indicaremos esse sistema por  $X|_{G_p}$ . Note que no caso do hiperboloide de uma folha o sistema diferencial tem domínio  $x^2 + y^2 \geq 1$ .

Iremos agora enunciar e demonstrar alguns resultados relacionados aos sistemas diferenciais (4.5), uma vez que são sistemas que estão sobre a superfície, e assim, podemos aplicar alguns resultados referentes a teoria de sistemas dinâmicos em  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 4.2.** *Considere o sistema diferencial (4.5). Então, para os seguintes parâmetros este sistema diferencial admite uma integral primeira:*

$$(i) \ d_0 = d_1 = d_2 = e_0 = e_1 = e_3 = 0 \text{ e } d_3 = \mp e_2,$$

$$(ii) \ d_0 = d_1 = d_2 = f_0 = f_1 = f_3 = 0 \text{ e } d_3 = \mp f_2,$$

(iii)  $e_0 = e_1 = f_0 = f_2 = 0$ ,  $f_1 = e_2$ ,  $d_1 = 2f_3$  e  $d_2 = 2e_3$ .

No caso (iii) o sistema é Hamiltoniano e sua função Hamiltoniana  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por:

$$H(x, y) = -d_0(x^2 + y^2) - \frac{2}{3}z_p^3(d_3 + e_2) - 2z_p(f_3x + e_3y). \quad (4.6)$$

*Demonstração.* No caso (i) temos que, para  $z_p^+$  (análogo para  $z_p^-$ ), o sistema se reduz a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= 2x(-e_2z_p^+) + 2z_p^+(f_0 + f_1x + f_2y + f_3z_p^+). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Assim,  $H(x, y) = x$  é uma integral primeira do caso (i). Analogamente,  $H(x, y) = y$  é uma integral primeira do caso (ii). Já para (iii) basta ver que o sistema diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y(d_0 - 2f_3x + 2e_3y \pm 2d_3z_p^+) + 2z_p^+(e_2y + e_3z_p^+), \\ \dot{y} &= 2x(d_0 - 2f_3x + 2e_3y + 2d_3z_p^+) + 2z_p^+(e_2x + f_3z_p^+), \end{aligned} \quad (4.8)$$

tem divergência igual a 0. Logo,  $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}$  e  $\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ . Assim, calculando as integrais em relação a  $x$  e  $y$  obtemos a expressão (4.6).  $\square$

No decorrer do texto, encontraremos muitos sistemas diferenciais que apresentam pontos singulares não hiperbólicos. Um método que ajuda a determinar o comportamento desses pontos (localmente) é saber se o sistema em questão é um sistema reversível ou um sistema de tempo reversível.

**Definição 4.1.** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo. Dizemos que um campo de vetores  $X(x, y, z)$  sobre  $\mathbb{R}^n$  é de tempo reversível (relativo a  $\phi$ ), ou simplesmente reversível, se  $D_{\phi(p)}X(p) = -X(\phi(p))$ . Se o campo de vetores  $X(x, y, z)$  é reversível então seu conjunto de simetria é dado pelo conjunto  $S = \{p \in \mathbb{R}^n | \phi(p) = p\}$ .*

O próximo teorema fornece condições para que o sistema diferencial (4.5), seja reversível.

**Teorema 4.3.** *Considere o sistema diferencial (4.5) com a seguinte escolha de parâmetros  $d_1 = d_2, f_0 = e_0, e_1 = f_2, e_2 = f_1$  e  $e_3 = f_3$ . Então, o sistema diferencial (4.5) é reversível pelo difeomorfismo  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dado por  $\phi(x, y) = (y, x)$  e seu eixo de simetria é  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x\}$ .*

*Demonstração.* O sistema diferencial (4.5) nas condições acima tem a forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y(d_0 + d_1x + d_1y + d_3z_p^\pm) - 2z_p^\pm(e_0 + e_1x + e_2y + e_3z_p^\pm), \\ \dot{y} &= 2x(d_0 + d_1x + d_1y + d_3z_p^\pm) + 2z_p^\pm(e_0 + e_2x + e_1y + e_3z_p^\pm). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Vemos que  $D_{\phi(x,y)}X(x,y) = (\dot{y}, \dot{x})$  e  $X(\phi(x,y)) = (-\dot{y}, -\dot{x})$ , assim satisfazendo a Definição 4.1. Ainda, tomando  $\phi(x,y) = (y,x)$ , segue que o eixo de simetria é dado por  $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x\}$ .

□

Alguns tipos de curvas invariantes recebem um nome especial por sua importância na dinâmica de um sistema diferencial, entre elas citaremos aqui os paralelos e os meridianos invariantes.

**Definição 4.2.** *Considere a curva  $\gamma$  dada pela intersecção do plano  $z - k = 0$ , com  $k \in \mathbb{R}$  com a superfície  $G_p = 0$ . Dizemos que  $\gamma$  é um paralelo invariante se esta curva for invariante pelo fluxo do sistema diferencial (4.3).*

**Definição 4.3.** *Considere a curva  $\mu$  dada pela intersecção do plano  $\alpha x + \beta y = 0$ , com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  com a superfície  $G_p = 0$ . Dizemos que  $\mu$  é um meridiano invariante se esta curva for invariante pelo fluxo do sistema diferencial (4.3).*

Os paralelos e os meridianos invariantes proporcionam propriedades interessantes aos sistemas diferenciais que os possui, assim é interessante saber quais são e quantos são os paralelos e os meridianos invariantes existentes em um sistema. Sabemos por [15] que o número de paralelos e meridianos em sistemas diferenciais que possuem superfícies algébricas invariantes depende do grau do sistema. Como estamos trabalhando com um sistema diferencial de grau 2 temos no máximo um paralelo invariante e um meridiano invariante. De fato, assumiremos que o campo vetorial (4.4) tem um número finito de paralelos e meridianos invariantes. Para determiná-los usaremos a definição polinômio estático.

**Definição 4.4.** *Seja  $X$  um campo vetorial polinomial em  $\mathbb{R}^3$  associado ao sistema diferencial (4.3) e  $W$  um  $\mathbb{R}$ -subespaço finito de  $\mathbb{R}[x,y,z]$  de dimensão  $l$ . Seja  $B = \{v_1, \dots, v_l\}$  uma base de  $W$ . O polinômio estático de  $X$  associado a  $W$  é o determinante da matriz*

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \cdots & v_l \\ X(v_1) & X(v_2) \cdots & X(v_l) \\ \vdots & \vdots & \\ X^{l-1}(v_1) & X^{l-1}(v_2) \cdots & X^{l-1}(v_l) \end{pmatrix},$$

onde  $X(v_i) = \langle (P, Q, R), \nabla v_i \rangle$  e  $X^j(v_i) = X^{j-1}(X(v_i))$ . Denotaremos este polinômio por  $\xi_W(X)$ . Dizemos que uma superfície algébrica invariante  $f(x,y,z) = 0$  de grau  $m$  tem multiplicidade algébrica definida  $k$ , ou simplesmente multiplicidade algébrica  $k$ , se  $\xi_W(X) \neq 0$  e  $k$  é o maior inteiro positivo tal que  $f^k$  divide  $\xi_W(X)$ . Se  $\xi_W(X) \equiv 0$  dizemos que a superfície algébrica invariante  $f(x,y,z) = 0$  não tem multiplicidade algébrica definida.

Perceba que a definição de polinômio estático não depende da escolha da base, uma vez que as regras de derivação e determinante mostram que mudando a base o polinômio estático este polinômio se altera em apenas uma constante não nula. Este polinômio é constantemente utilizado para detectar se uma superfície algébrica é invariante pelo fluxo do sistema diferencial (ver também [16], [44]).

**Proposição 4.2.** *Seja  $X$  um campo vetorial polinomial em  $\mathbb{R}^3$  e seja  $W$  um subespaço finito de  $\mathbb{R}[x, y, z]$  sobre o corpo  $\mathbb{R}$  com  $\dim(W) > 1$ . Então, toda superfície algébrica invariante  $f(x, y, z) = 0$  do campo vetorial  $X$ , com  $f \in W$ , é um fator de  $\xi_W(X)$ , onde  $\xi_W(X)$  é o polinômio estático do campo  $X$  na base  $W$ .*

Usando o resultado anterior, basta mostrar que  $f(x, y, z) = \alpha x + \beta y$  é um fator do polinômio  $\xi_W(X) = x\dot{y} - y\dot{x}$ , onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $W = \{x, y\}$  e

$$\dot{x} = -2y(d_0 + d_1x + d_2y + d_3z) - 2z(e_0 + e_1x + e_2y + e_3z),$$

$$\dot{y} = 2x(d_0 + d_1x + d_2y + d_3z) + 2z(f_0 + f_1x + f_2y + f_3z).$$

Assim, tomando coordenadas cilíndricas temos que  $\xi_W(X) = (x^2 + y^2) \cdot \theta$ , ou seja,  $\xi_W(X)$  tem grau 3, então admite um fator  $\alpha x + \beta y$ , obtido quando dividimos  $\xi_W(X)$  por  $f(x, y, z)$ . Agora considerando o paralelo invariante  $f(x, y, z) = z - k$ , com  $k \in \mathbb{R}$  e  $W = \{1, z\}$ , segue que  $\xi_W(X) = \dot{z}$ , onde

$$\dot{z} = 2x(e_0 + e_1x + e_2y + e_3z) + 2y(f_0 + f_1x + f_2y + f_3z),$$

logo, a equação  $\dot{z}$  admite um fator  $z - k$ . Portanto, admite pelo menos um paralelo invariante. Com isso, determinamos condições para que estes sistemas diferenciais apresentem tais curvas invariantes.

**Teorema 4.4.** *Considere no sistema diferencial (4.3) a seguinte escolha de parâmetros:  $a = -b, d_0 = d_3 = 0, f_0 = e_0, f_1 = e_1, f_2 = e_2, f_3 = e_3, d_1 = d_2 = d$ . Então, este sistema apresenta o meridiano invariante  $dx + dy = 0$ . Por outro lado, considere o sistema diferencial (4.3), tomando a seguinte escolha de parâmetros:  $c = 0, e_1 = f_2 = 0, e_2 = f_1, e_0 = -ke_3, f_0 = -kf_3$ . Então, este sistema apresenta um paralelo invariante da forma  $z - k = 0$ .*

*Demonstração.* De fato, temos que o polinômio estático na base  $W = \{x, y\}$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \xi_W(x, y, z) &= 2(d_1x + d_2y)(x^2 + y^2) + 2(d_0 + d_3z)(x^2 + y^2) + \\ &+ 2zx(f_1x + f_2y) + 2zy(e_1x + e_2y) + 2z(f_0x + e_0y) + 2z^2(f_3x + e_3y), \end{aligned}$$

logo, um candidato a meridiano invariante é  $d_1x + d_2y = 0$ . Tomando as condições do Teorema 4.4, temos que  $(X, dx + dy) = 2(dx - dy)(dx + dy)$ , onde  $K(x, y, z) = 2(dx - dy)$  é o cofator do meridiano invariante gerado pela intersecção de  $f(x, y, z) = dx + dy$  com a quádrlica  $G|_p = 0$ , mostrando que  $dx + dy = 0$  é um meridiano invariante deste sistema. Por outro lado, sabemos que o resto da divisão de  $\dot{z}$  por  $z - k$  no sistema diferencial (4.3) é  $r(x, y) = -2e_1x^2 + ((2f_1 - 2e_2)y - 2e_0 - 2ke_3)x + 2f_2y^2 + (2f_0 + 2kf_3)y$ , assim o resto da divisão é zero se, e só se,  $e_2 = f_1, e_1 = f_2 = 0, e_0 = -ke_3, f_0 = -kf_3$ . Logo, segue que  $z - k = 0$  é um paralelo invariante do sistema diferencial (4.3) gerado pela intersecção de  $f(x, y, z) = z - k$  com a quádrlica  $G|_p = 0$ , e com cofator  $K(x, y, z) = 2yf_3 - 2e_3x$ .  $\square$

Observe que sempre que o sistema diferencial (4.3) apresentar um paralelo invariante teremos pontos singulares sobre este paralelo, uma vez que, na intersecção deste paralelo com a superfície algébrica invariante temos o seguinte caso,

$$\dot{z} = (2f_3y - 2e_3x)(z - k).$$

Portanto, essa equação sempre assumirá uma raiz  $z = k$ .

Com base nessas informações podemos, classificar uma classe de sistemas diferenciais que apresentam tais características, em particular, determinaremos aqui o comportamento qualitativo do sistema diferencial (4.3) quando este apresenta um paralelo invariante.

**Teorema 4.5.** *Consideremos o sistema (4.3) com a seguinte escolha de parâmetros  $a = b, d_0 = d_3 = f_1 = f_2 = e_1 = e_2 = c = 0, f_3 = e_3 = 1, e_0 = f_0 = -k, d_1 = d_2 = d \neq -1$ , com  $k \in \mathbb{R}$ . Então, o sistema diferencial (4.3) apresenta um paralelo invariante  $z - k = 0$  e uma família de órbitas heteroclínicas.*

*Demonstração.* O sistema diferencial (4.3) sob as condições do Teorema 4.5 se reduz a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= G_p b + 2y(dx + dy) + 2z(z - k), \\ \dot{y} &= G_p b - 2x(dx + dy) - 2z(z - k), \\ \dot{z} &= -2x(z - k) + 2y(z - k). \end{aligned} \tag{4.10}$$

O sistema diferencial (4.10) é simétrico pelo do difeomorfismo  $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  onde  $s(x, y, z, t) = (-x, -y, z, -t)$  e  $t \in \mathbb{R}$  é a variável que representa o tempo. Note ainda que este sistema apresenta o paralelo invariante  $z - k = 0$ , cujo cofator é  $K(x, y, z) = 2(y - x)$  (uma vez que o sistema satisfaz as condições do Teorema 4.4). O sistema (4.10) tem os seguintes pontos



singulares:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \left( \pm \frac{1}{2} \sqrt{2k^2 - 2p}, \mp \frac{1}{2} \sqrt{2k^2 - 2p}, k \right), \\ s_{3,4} &= \left( \pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_+}, \pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_+}, \frac{k + \sqrt{k^2 + 4d^2p + 4dp}}{2(d+1)} \right), \\ s_{5,6} &= \left( \pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_-}, \pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_-}, \frac{k - \sqrt{k^2 + 4d^2p + 4dp}}{2(d+1)} \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  $p \in [-1, 1]$  e

$$\alpha_+ = (d+1)^2 \left( k \left( k + \sqrt{k^2 + 4d^2p + 4dp} \right) - 2p(d+1) \right)$$

e

$$\alpha_- = (d+1)^2 \left( k \left( k - \sqrt{k^2 + 4d^2p + 4dp} \right) - 2p(d+1) \right).$$

Analisaremos o comportamento local destes pontos singulares, através dos autovalores das matrizes Jacobianas do sistema (4.10). Assim, vemos que para os pontos singulares  $s_{1,2}$  os autovalores são:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \sqrt{2k^2 - 2p} \left( 1 - d \pm \sqrt{(1+d)^2} \right). \quad (4.12)$$

Para os pontos singulares  $s_{3,4}$  os autovalores são,

$$\lambda_1 = 2b \frac{\sqrt{\gamma_+}}{(d+1)^2}, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2 \frac{\sqrt{\beta_-}}{d+1},$$

já para os pontos singulares  $s_{5,6}$  temos os seguintes autovalores

$$\lambda_1 = 2b \frac{\sqrt{\gamma_-}}{(d+1)^2}, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2 \frac{\sqrt{\beta_+}}{d+1},$$

onde  $\gamma_+ = (d+1)^2 \left( k \sqrt{4d^2p + 4dp + k^2} - 2dp + k^2 - 2p \right)$ ,

$\gamma_- = (d+1)^2 \left( -k \sqrt{4d^2p + 4dp + k^2} - 2dp + k^2 - 2p \right)$  e

$\beta_+ = (d+1) \left( 4d^2p + 4dp + k^2 + 2(d+1)k \sqrt{4d^2p + 4dp + k^2} \right)$ ,

$\beta_- = (d+1) \left( 4d^2p + 4dp + k^2 - 2(d+1)k \sqrt{4d^2p + 4dp + k^2} \right)$ .

Os pontos singulares  $s_{1,2}$  tem o mesmo comportamento para as três quádricas. Se  $d \in (-\infty, 0)$  estes pontos são nós, um atrator e o outro repulsor, por outro lado, estes pontos tem comportamento de sela, se  $d \in [0, \infty)$ . Como tais pontos singulares estão sobre o paralelo invariante, uma vez que a terceira coordenada de cada um é sempre  $k$ , estas curvas formam uma órbita heteroclínica. Para os outros pontos singulares, analizaremos cada um separadamente em cada quádrica. Para a quádrica  $G_{-1} = 0$ , notemos que estes pontos singulares são reais se, e só se,  $d \in I = \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{k^2+1}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{k^2+1}}{2} \right)$  e  $d \neq -1$ .

Assumindo  $k \in \mathbb{R}$  temos que os pontos singulares  $s_{3,4}$  serão hiperbólicos se  $d \in (-1, 0)$ , assim adquirindo um comportamento de sela. E, não hiperbólicos se  $d \in I \setminus (-1, 0)$ . Para os pontos  $s_{5,6}$  tomando  $k > 0$  essas singularidades serão hiperbólicas se  $d \in (-1, 0)$  e não hiperbólica

se  $d \in I \setminus (-1, 0)$ . No caso,  $k < 0$  essas singularidades sempre serão hiperbólicas para todo  $d \in I$  com  $d \neq -1$ .

A quádrlica  $G_0 = 0$  exige um pouco mais de atenção, se  $k \neq 0$  os pontos singulares desse sistema são

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \left( \pm \frac{1}{2} \sqrt{2k^2}, \mp \frac{1}{2} \sqrt{2k^2}, k \right), \\ s_3 &= (0, 0, 0), s_{4,5} = \left( \pm \frac{\sqrt{2k}}{2(d+1)}, \pm \frac{\sqrt{2k}}{2(d+1)}, \frac{k}{d+1} \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Nestes pontos singulares o sistema diferencial (4.10) apresenta os respectivos autovalores relacionados a matriz jacobiana

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \left( 0, \pm 2dk\sqrt{2}, \mp 2k\sqrt{2} \right), \\ \lambda_3 &= \left( 0, 2k\sqrt{2}, -2k\sqrt{2} \right), \\ \lambda_{4,5} &= \left( \frac{2\sqrt{2}bk}{d+1}, \pm \frac{2k\sqrt{-2d(d+1)}}{d+1}, \mp \frac{2k\sqrt{-2d(d+1)}}{d+1} \right). \end{aligned}$$

Logo, estes pontos singulares existem para todo  $d \neq 1$ , e tem comportamento de sela se  $d \in (-1, 0)$  e são não hiperbólicos caso contrário. Já o ponto  $s_3$  é um ponto singular da própria superfície algébrica invariante, que apresenta um comportamento de sela se  $k \neq 0$ . Porém, se  $k = 0$ , só existe um ponto singular no sistema diferencial, no caso o próprio ponto  $s_3$ , e este apresenta um comportamento de cúspide. Para ver isto, basta notarmos que a superfície  $G_{-1}$  é um blow-up natural do retrato de fase do sistema da superfície  $G_0 = 0$  quando  $k = 0$ , como mostrado na Figura (4.1).

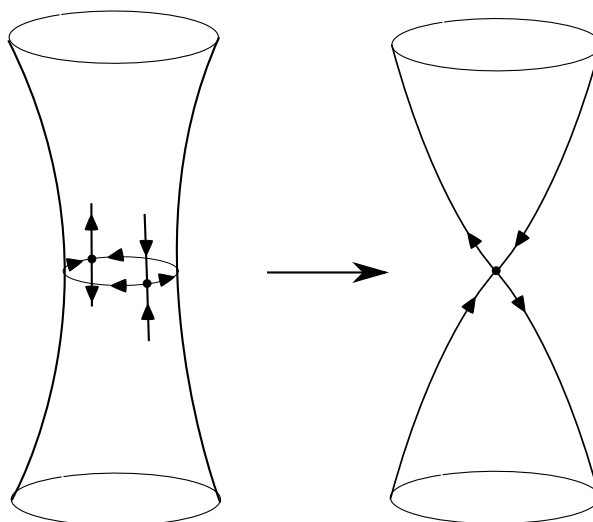


Figura 4.1: Superfície  $G|_{-1} = 0$ .

Para a quádrlica  $G_1 = 0$  os pontos singulares  $s_{3,4}$  são reais se, e só se,  $k \geq 1$  e  $d \neq -1$ . Neste caso, se  $d \in (-1, 0)$  estes pontos tem comportamento de sela. Caso contrário, esses pontos singulares são não hiperbólicos. Já os pontos singulares  $s_{5,6}$  são reais se, e só se,  $k \leq -1$  e  $d \neq -1$ .

Assim, como os pontos anteriores se  $d \in (-1, 0)$  estes pontos singulares tem comportamento de sela, caso contrário, são não hiperbólicos. Por fim, quando  $k = \pm 1$ , o paralelo invariante intercepta o hiperboloide de duas folhas em apenas um ponto, no caso  $\pm 1$ . De fato, o sistema apresentará os seguintes pontos singulares, se  $k = 1$ , temos

$$\left( \pm \frac{\sqrt{-4d-2}}{2(d+1)}, \pm \frac{\sqrt{-4d-2}}{2(d+1)}, -\frac{d}{d+1} \right), (0, 0, 1)$$

e quando  $k = -1$

$$\left( \pm \frac{\sqrt{-4d-2}}{2(d+1)}, \pm \frac{\sqrt{-4d-2}}{2(d+1)}, \frac{d}{d+1} \right), (0, 0, -1).$$

Os únicos pontos singulares que pertencem ao hiperboloide de duas folhas são  $(0, 0, \pm 1)$ , uma vez que  $-1 < \frac{d}{d+1} < 1$ , para todo  $d \in \mathbb{R}$ . Nestes pontos singulares as matrizes jacobianas tem autovalores nulos, porém vemos que o cone é um blow-up natural do retrato de fase do hiperboloide de duas folhas (como podemos ver na Figura (4.2)), logo, podemos ver que para tais condições esses pontos tem comportamento de sela ou nó.

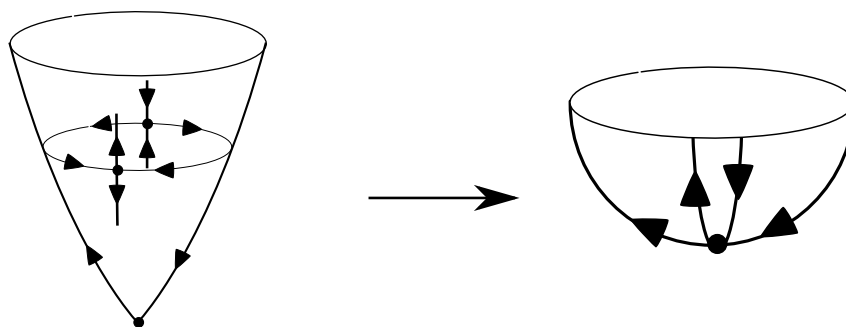


Figura 4.2: Superfície  $G|_{-1} = 0$ .

Agora analisaremos os casos dos pontos singulares não hiperbolicos. Neste caso, vamos considerar o sistema restrito as superfícies  $X|_{G_p}$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y(dx + dy) - 2z_p^\pm(z_p - k), \\ \dot{y} &= 2x(dx + dy) + 2z_p^\pm(z_p - k). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Este sistema satisfaz as condições do Teorema 4.3, portanto o sistema (4.14) é tempo reversível, onde o eixo de simetria é dado por  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x\}$ . Observe que os pontos singulares do sistema (4.14) estão relacionados com as duas primeiras coordenadas dos pontos singulares do sistema (4.10). Note que os pontos singulares do sistema (4.14) estão sobre o eixo de simetria  $S$ , logo, podemos concluir que estes pontos tem comportamento de centro, e portanto de centro sobre a superfície.

Assim, a existência de pontos singulares de cada superfície depende do intervalo em que cada uma está definida. Em particular, no intervalo  $(-1, 0)$  todos pontos singulares do sistema (4.10) são hiperbolicos.  $\square$

Mostraremos a transição dos retratos de fase do Teorema 4.5 para  $k = 2$  fixo. Para  $d \in (-1, 0)$  temos os seguintes possíveis retratos de fase, como mostrado nas Figuras (4.3), (4.4) e (4.5):

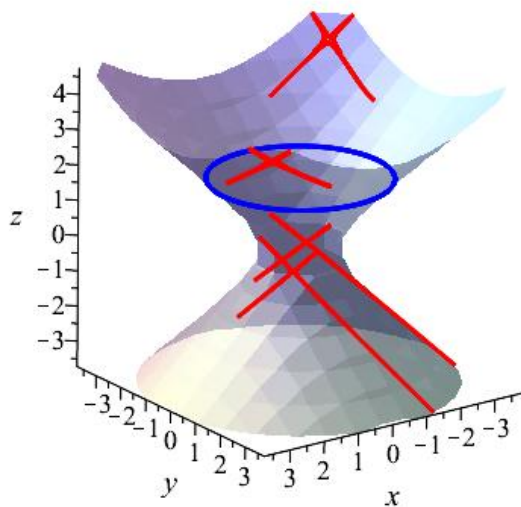


Figura 4.3: Superfície  $G|_{-1} = 0$ .

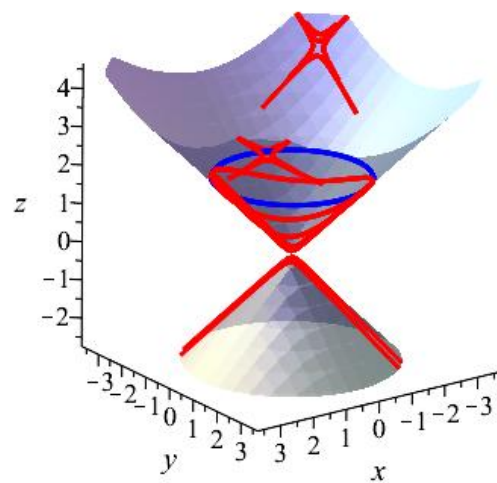


Figura 4.4: Superfície  $G|_0 = 0$ .

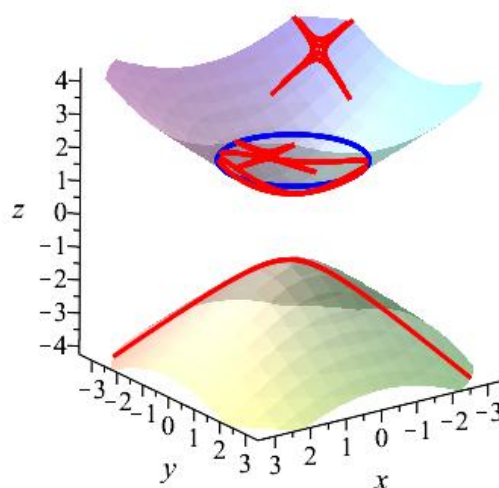


Figura 4.5: Superfície  $G|_1 = 0$ .

Para  $d \in I \setminus (-1, 0)$  com  $d < 0$ , temos os seguintes possíveis retratos de fase, como mostrado em (4.6), (4.7) e (4.8):

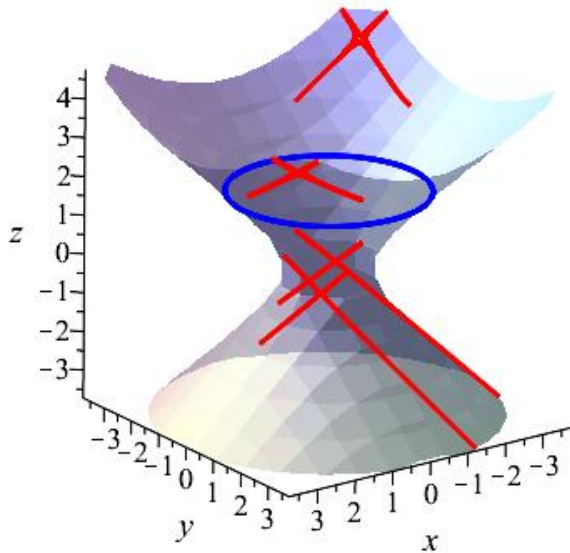


Figura 4.6: Superfície  $G|_{-1} = 0$ .

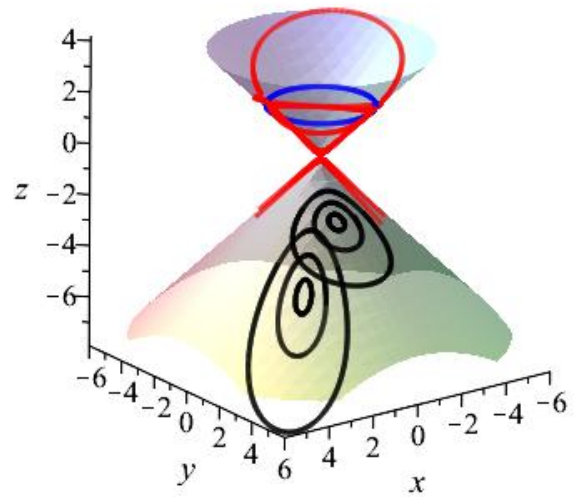


Figura 4.7: Superfície  $G|_0 = 0$ .

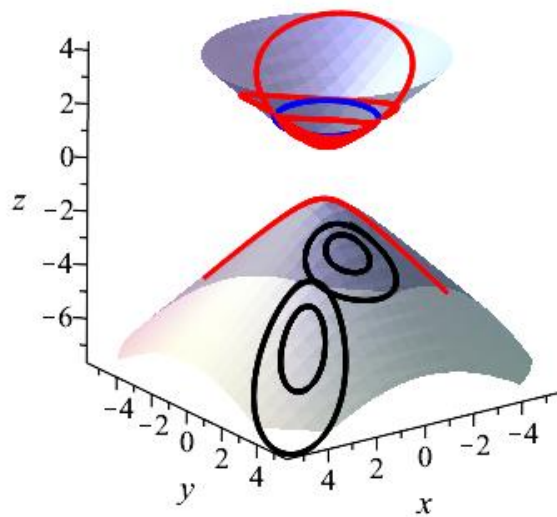


Figura 4.8: Superfície  $G|_1 = 0$ .

Para  $d \in I \setminus (-1, 0)$  com  $d > 0$ , temos os seguintes possíveis retratos de fase, como mostrado em (4.9), (4.10) e (4.11):

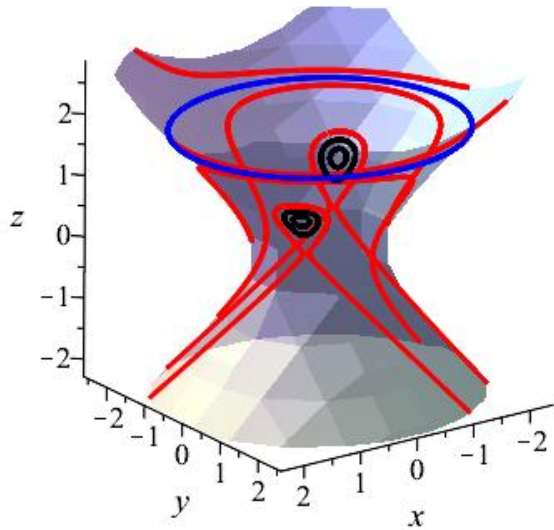


Figura 4.9: Superfície  $G|_{-1} = 0$ .

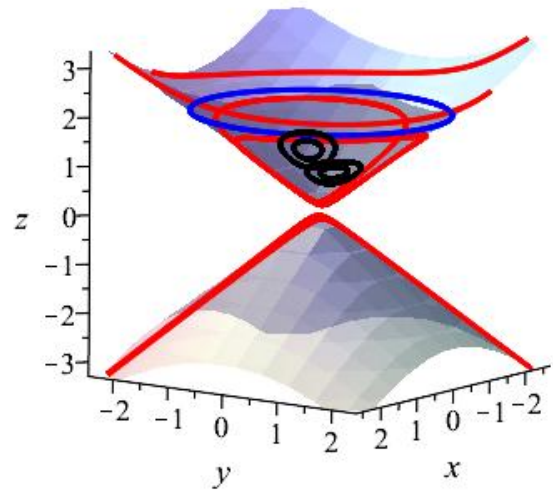


Figura 4.10: Superfície  $G|_0 = 0$ .

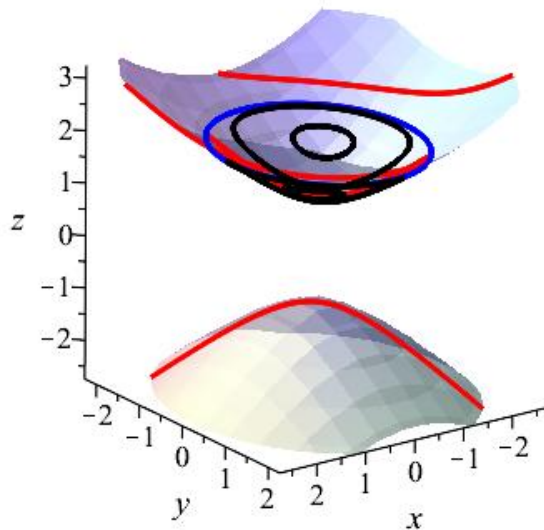


Figura 4.11: Superfície  $G|_1 = 0$ .

Para  $d \notin I$  com  $d < 0$ , temos os seguintes possíveis retratos de fase, como mostrado em (4.12), (4.13) e (4.14):

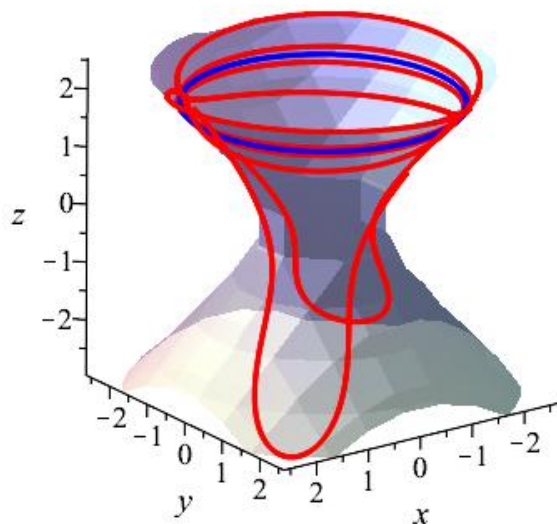


Figura 4.12: Superfície  $G|_{-1} = 0$ .

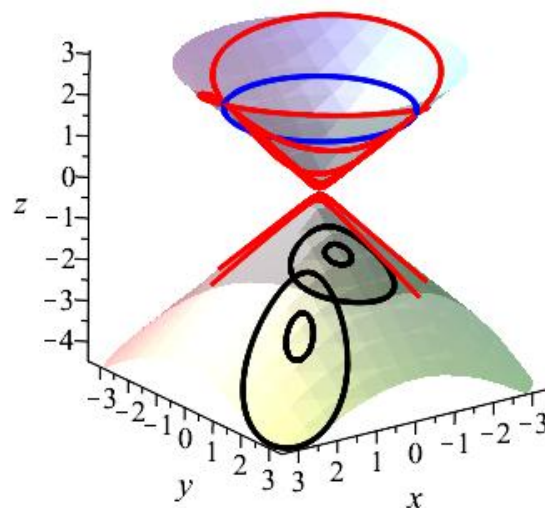


Figura 4.13: Superfície  $G|_0 = 0$ .

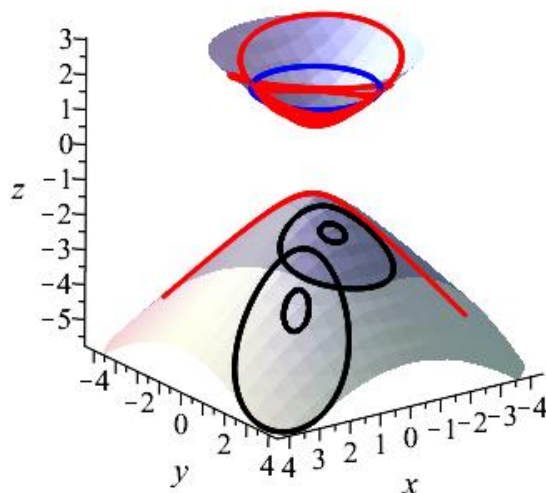


Figura 4.14: Superfície  $G|_1 = 0$ .

Para  $d \notin I$  e  $d > 0$ , temos os seguintes possíveis retratos de fase, como mostrado em (4.15), (4.16) e (4.17):

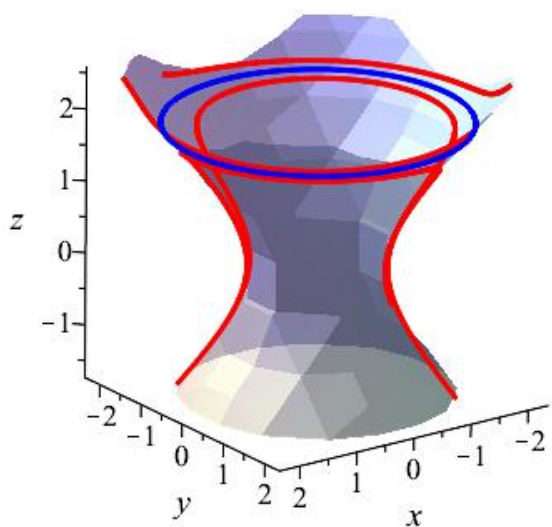


Figura 4.15: Superfície  $G|_{-1} = 0$ .

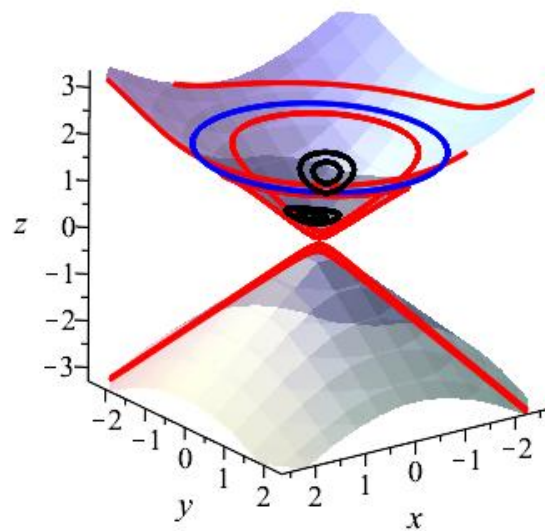


Figura 4.16: Superfície  $G|_0 = 0$ .

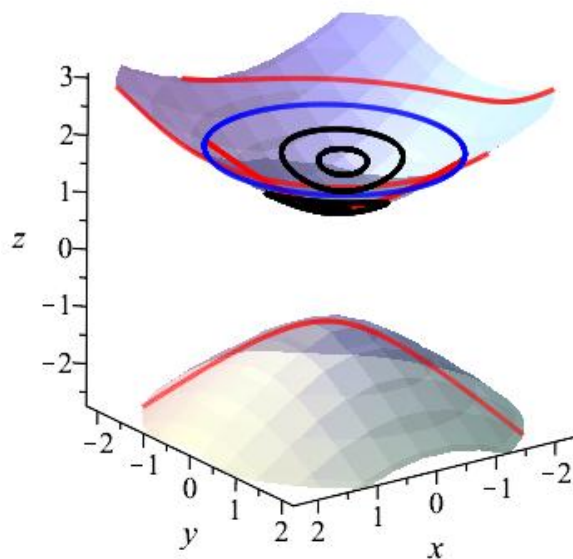


Figura 4.17: Superfície  $G|_1 = 0$ .



Em resumo, obtemos a Tabela 4.1 que informa o tipo de pontos singulares que podemos encontrar em cada caso abordado no Teorema 4.5.

Tabela 4.1: Pontos singulares do Teorema 4.5

Figura	pontos singulares	sela	nó	centro
(4.3)	6	4	2	0
(4.4)	5	3	2	0
(4.5)	4	2	2	0
(4.6)	6	2	2	2
(4.7)	5	1	2	2
(4.8)	4	0	2	2
(4.9)	6	4	0	2
(4.10)	5	3	0	2
(4.11)	4	2	0	2
(4.12)	2	0	2	0
(4.13)	5	1	2	2
(4.14)	4	0	2	2
(4.15)	2	2	0	0
(4.16)	5	3	0	2
(4.17)	4	2	0	2

Um caso interessante que chama muita atenção na literarura geral ocorre quando sistemas diferenciais apresentam órbitas periódicas. Os próximos teoremas mostram condições para que sistemas diferenciais do tipo (4.3) exibam tais órbitas.

**Teorema 4.6.** *Considere o sistema diferencial (4.3) com a seguinte escolha de parâmetros  $c = e_0 = e_1 = e_3 = f_0 = f_2 = f_3 = 0$  e  $f_1 = e_2 = e$ . Então, o sistema diferencial (4.3) apresenta uma família de órbitas periódicas paralela ao plano  $xy$ .*

*Demonstração.* De fato, tomando as condições dadas acima temos que o sistema diferencial (4.3) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= G_p a - 2y(d_0 + d_1 x + d_2 y + d_3 z) - 2zye, \\
 \dot{y} &= G_p b + 2x(d_0 + d_1 x + d_2 y + d_3 z) - 2zxe, \\
 \dot{z} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Considere o sistema diferencial  $X|_{G_p}$  restrito as quádricas  $G_p = 0$ . Tomando  $z_p = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + p}$  e fazendo a mudança para coordenadas polares  $x = r\text{sen}(\theta)$ ,  $y = r\text{cos}(\theta)$  temos que  $\dot{r} = 0$  e  $\dot{\theta} = 2d_0 + 2\sqrt{r^2 - 1}(e + d_3) + 2r(d_2\text{sen}(\theta) + d_1\text{cos}(\theta))$ . Como  $\dot{r} = 0$ , segue que  $r = k$  com  $k \in \mathbb{R}$ , ou seja, o raio é sempre constante, segue daí que

$$k = r = \sqrt{x^2 + y^2 + p} \Rightarrow x^2 + y^2 + p = k^2$$

Logo, as órbitas serão órbitas periódicas todas paralelas ao plano  $xy$ .  $\square$

O próximo teorema mostra um conjunto de órbitas periódicas e heteroclínicas que satisfazem as condições do Teorema 4.2.

**Teorema 4.7.** *Considere o sistema diferencial (4.3) com a seguinte escolha de parâmetros  $d_1 = d_2 = d_3 = e_0 = e_1 = e_3 = f_0 = f_2 = f_3 = c = 0$ . Então, este sistema apresenta um conjunto de órbitas periódicas.*

*Demonstração.* Adotadas as condições do teorema obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= G_p a - 2d_0 y - 2zye_2, \\ \dot{y} &= G_p b + 2d_0 x + 2zx f_1, \\ \dot{z} &= -2xy(f_1 - e_2). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Os pontos singulares deste sistema são

$$s_{1,2} = \left(0, \pm \frac{\sqrt{d_0^2 - pe_2^2}}{e_2}, -\frac{d_0}{e_2}\right), \quad s_{3,4} = \left(\pm \frac{\sqrt{d_0^2 - pf_1^2}}{f_1}, 0, -\frac{d_0}{f_1}\right), \quad s_{5,6} = (0, 0, \pm\sqrt{p}).$$

Inicialmente, considerando  $e_2 = f_1$  o sistema diferencial  $X|_{G_p}$  restrito à superfície algébrica invariante  $G|_p = 0$  satisfaz as condições do Teorema 4.2, logo, o sistema diferencial é Hamiltoniano e sua função hamiltoniana é dada por:

$$H_p(x, y) = -d_0 y^2 - \frac{2}{3} e_2 z_p^3 - d_0 x^2.$$

Portanto, seu comportamento fica totalmente descrito. Agora consideremos  $e_2 \neq f_1$ . Os autovalores associados a  $s_{1,2}$  são:

$$\lambda_1 = \pm 2b \frac{\sqrt{d_0^2 - pe_2^2}}{e_2}, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2 \frac{\sqrt{e_2(e_2 - f_1)(pe_2^2 - d_0^2)}}{e_2},$$

e, os relacionados aos pontos singulares  $s_{3,4}$  são

$$\lambda_1 = \pm 2a \frac{\sqrt{d_0^2 - pf_1^2}}{f_1}, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2 \frac{\sqrt{-f_1(f_1 - e_2)(pf_1^2 - d_0^2)}}{f_1},$$

e por fim relacionada a  $s_{5,6}$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2\sqrt{-d_0\sqrt{p}(e_2 - f_1) - pe_2f_1 - d_0^2}.$$

Assim só podemos ter pontos singulares do tipo sela, centro ou foco. Por outro lado, temos que o sistema restrito é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2yd_0 - 2e_2yz_p^\pm, \\ \dot{y} &= 2xd_0 + 2f_1xz_p^\pm, \end{aligned} \tag{4.17}$$

cujos pontos singulares são dadas por:

$$s_{1,2} = \left(0, \pm \frac{\sqrt{d_0^2 - pe_2^2}}{e_2}\right), \quad s_{3,4} = \left(\pm \frac{\sqrt{d_0^2 - pf_1^2}}{f_1}, 0\right), \quad s_5 = (0, 0).$$

Podemos ver que o sistema diferencial (4.17) tem uma integral primeira da forma:

$$H(x, y) = 2f_1x^2 + 2e_2y^2 + 4d_0z_p^\pm + pf_1.$$

Logo, o sistema diferencial tem o comportamento totalmente descrito.  $\square$

Alguns possíveis espaços de fase do Teorema 4.7 podem ser vistos nas Figuras (4.18), (4.19) e (4.20), para  $e_2 \neq f_1$  e em (4.21), (4.22) e (4.23) para  $e_2 = f_1$ .

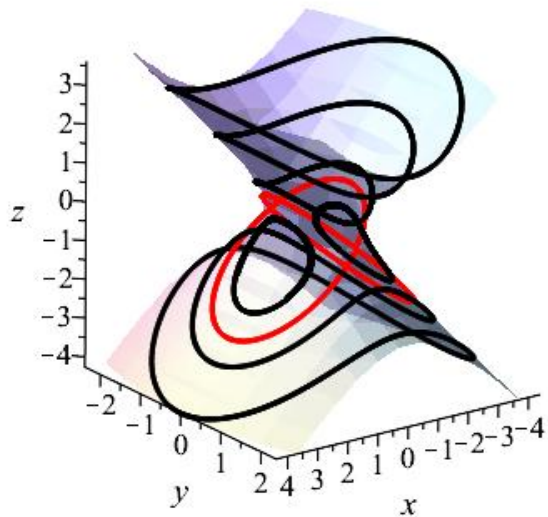


Figura 4.18:  $G_{-1} = 0$  para  $e_2 \neq f_1$ .

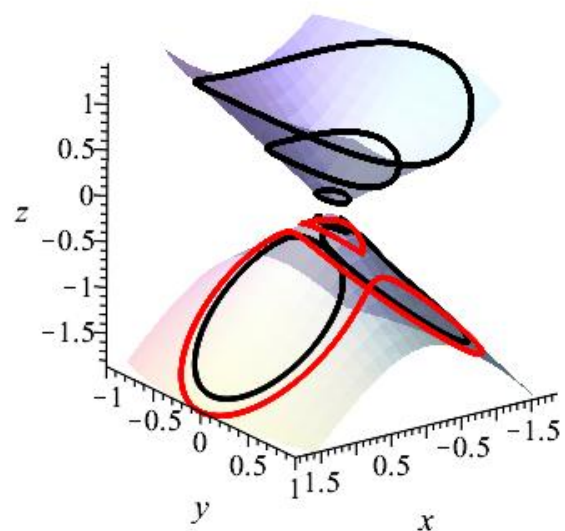


Figura 4.19:  $G_0 = 0$  para  $e_2 \neq f_1$ .

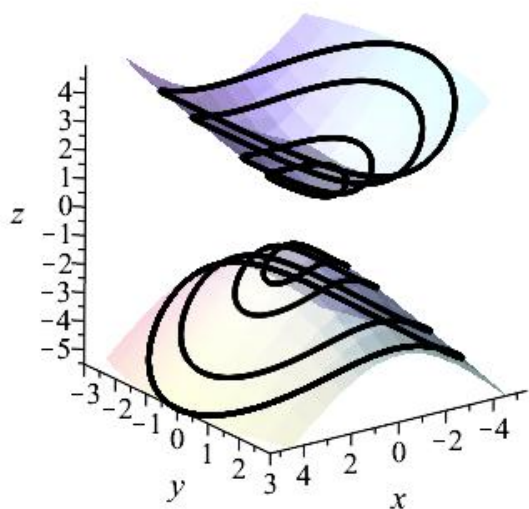


Figura 4.20:  $G_{-1} = 0$  para  $e_2 \neq f_1$ .

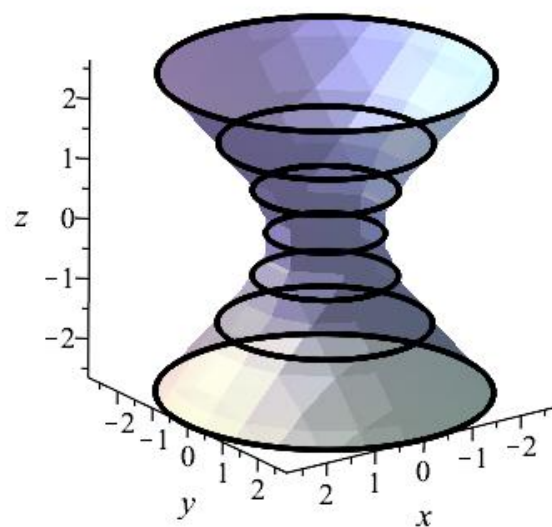


Figura 4.21:  $G_0 = 0$  para  $e_2 \neq f_1$ .

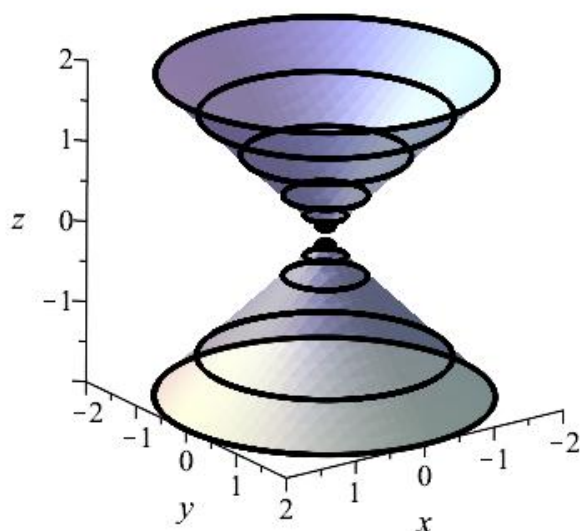


Figura 4.22:  $G_{-1} = 0$  para  $e_2 \neq f_1$ .

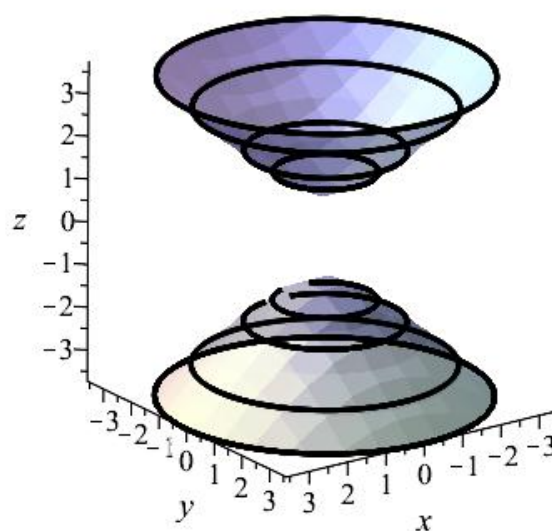


Figura 4.23:  $G_0 = 0$  para  $e_2 \neq f_1$ .

Considere agora o sistema diferencial (4.1) com a seguinte escolha de parâmetros  $d_1 = d_2 = d_3 = e_1 = e_2 = e_3 = f_1 = f_2 = f_3 = 0, d_0 = d, e_0 = e, f_0 = f$ , assim teremos o seguinte sistema diferencial

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= G_p a - 2yd - 2zf, \\
 \dot{y} &= G_p b + 2xd + 2ze, \\
 \dot{z} &= G_p c - 2xe + 2yf.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Este sistema diferencial é simétrico pelo difeomorfismo  $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  dado por  $s(x, y, z, t) = (-x, -y, -z, t)$ . Os pontos singulares desse sistema são:

$$\left( \pm f \frac{\sqrt{(-d^2 + f^2 + e^2)p}}{-d^2 + f^2 + e^2}, \pm e \frac{\sqrt{(-d^2 + f^2 + e^2)p}}{-d^2 + f^2 + e^2}, \mp d \frac{\sqrt{(-d^2 + f^2 + e^2)p}}{-d^2 + f^2 + e^2} \right).$$

Observe que para estes pontos singulares existirem devemos ter  $d^2 \neq f^2 + e^2$ . Neste caso, os autovalores associados a tais pontos são:

$$\lambda_1 = 2(af + cd + be) \frac{\sqrt{(d^2 - f^2 - e^2)p}}{d^2 - f^2 - e^2}, \quad \lambda_{2,3} = \pm \sqrt{-d^2 + f^2 + e^2}.$$

Analisando o sistema restrito às superfícies  $X|_{G_p}$  temos os seguintes pontos singulares

$$\left( \pm f \frac{\sqrt{(-d^2 + f^2 + e^2)p}}{-d^2 + f^2 + e^2}, \pm e \frac{\sqrt{(-d^2 + f^2 + e^2)p}}{-d^2 + f^2 + e^2} \right).$$

Logo, este sistema admite a integral primeira

$$H_{G_p}(x, y) = fx + ey + dz_p^\pm - 1. \tag{4.19}$$

Notemos que no caso da superfície  $G_{-1} = 0$  os pontos singulares existem se, e somente se,  $d^2 > f^2 + e^2$  gerando assim, dois pontos de sela. Por outro lado, na superfície  $G_1 = 0$  os pontos singulares só existem se  $d^2 < f^2 + e^2$ , gerando assim um comportamento de centro em tais pontos singulares. Logo, as condições impostas a uma superfície não se aplica à outra, ou seja, se existem pontos singulares na superfície  $G_{-1} = 0$  não haverá pontos singulares na superfície  $G_1 = 0$  e vice-versa. A transição desses retratos de fase ocorrem na superfície  $G_0 = 0$ , uma vez que não existem restrições para seu ponto singular. Para  $d^2 > e^2 + f^2$  temos os retratos de fase mostrado nas Figuras (4.24), (4.25) e (4.26).

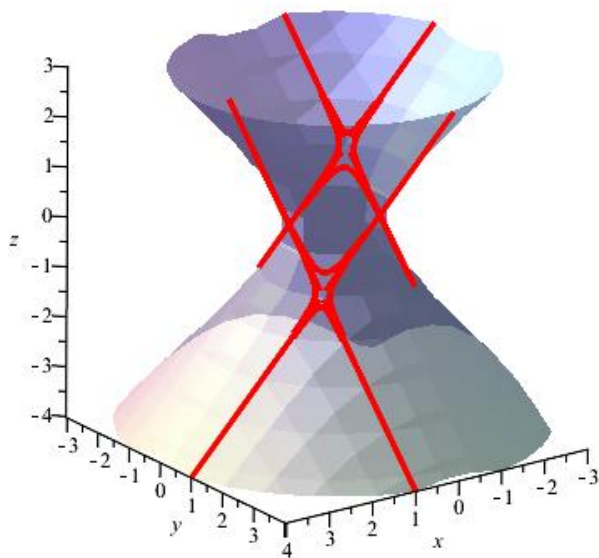


Figura 4.24: Superfície  $G_{-1} = 0$ .

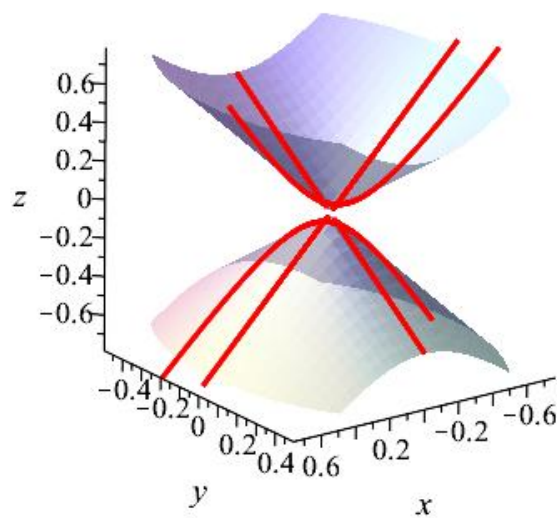


Figura 4.25: Superfície  $G_0 = 0$ .

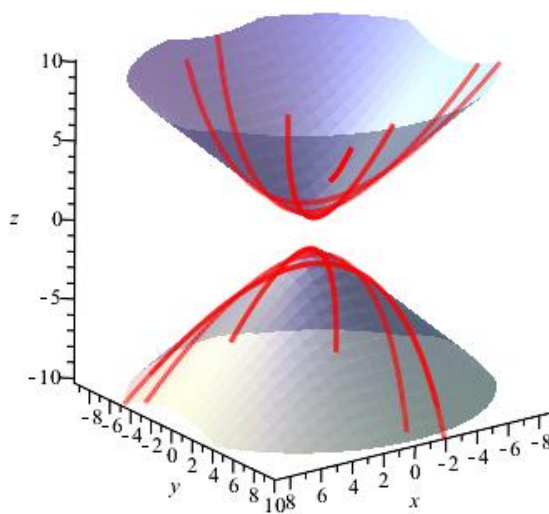


Figura 4.26: Superfície  $G_1 = 0$ .

E, para  $d^2 < e^2 + f^2$  temos os retratos de fase (4.27), (4.28) e (4.29) abaixo:

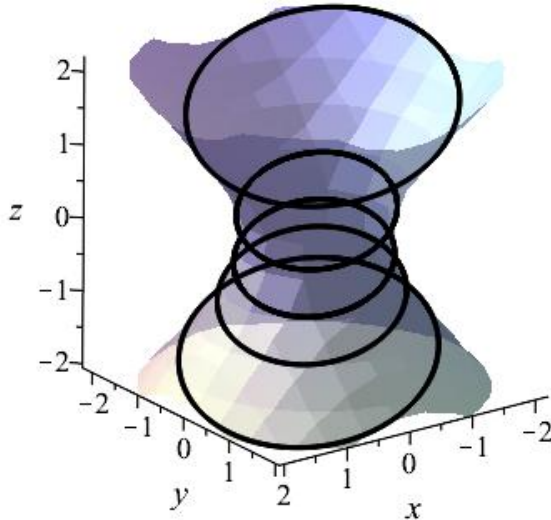


Figura 4.27: Superfície  $G_{-1} = 0$ .

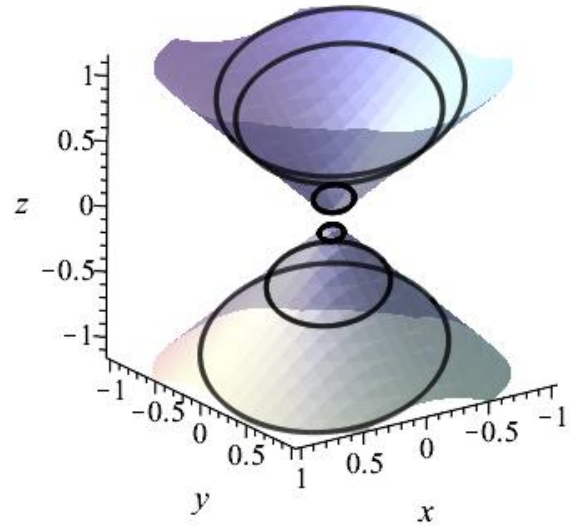


Figura 4.28: Superfície  $G_0 = 0$ .

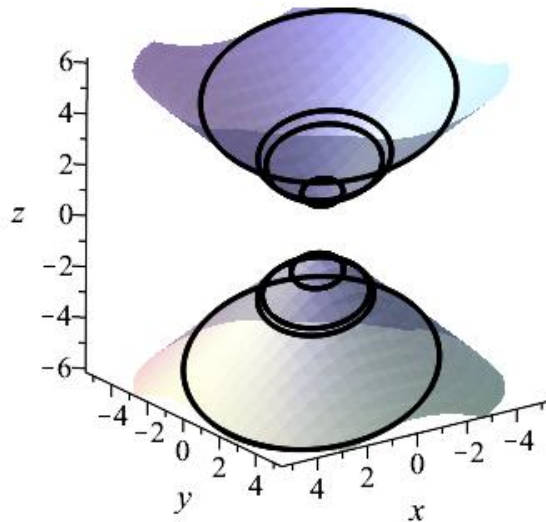


Figura 4.29: Superfície  $G_1 = 0$ .

Um caso interessante acontece quando  $af + cd + be = 0$ . Quando isto acontece o sistema diferencial (4.18) apresenta uma curva de singularidades.

**Teorema 4.8.** *Considere o sistema diferencial (4.18) com a seguinte escolha de parâmetros  $a = -\frac{be}{f}, d = 0, c = b$ . Neste caso, o sistema diferencial (4.18) apresenta uma curva de singula-*

ridades, que intercepta a superfície  $G_{-1} = 0$  em dois pontos distintos, a superfície  $G_0 = 0$  em um ponto e não intercepta a superfície  $G_1 = 0$ .

*Demonstração.* De fato, tomando a escolha de parâmetros acima temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -G_p \frac{be}{f} - 2zf, \\ \dot{y} &= G_p b + 2ze, \\ \dot{z} &= G_p b - 2xe + 2yf.\end{aligned}\tag{4.20}$$

O sistema apresenta a seguinte curva de singularidades:

$$\beta(z) = \left( \pm f \left( \frac{-be^2 z + \sqrt{\rho}}{be(f^2 + e^2)} \right), \pm \frac{bf^2 z + \sqrt{\rho}}{b(f^2 + e^2)}, z \right)$$

onde,  $\rho = (b^2 e^4 z^2 - (e^2 + f^2)(2be^2 fz + b^2 e^2 p))$ . As interseções desta curva com as superfícies  $G_{-1} = 0$  e  $G_0 = 0$  ocorre quando  $z = 0$ , gerando assim dois pontos singulares no caso da superfície  $G_{-1} = 0$ ,

$$\left( \pm f \frac{\sqrt{-pb^2 e^2 (f^2 + e^2)}}{be(f^2 + e^2)}, \pm \frac{\sqrt{-pb^2 e^2 (f^2 + e^2)}}{b(f^2 + e^2)}, 0 \right)$$

e um ponto singular no caso da superfície  $G_0 = 0$  neste caso a origem  $(0, 0, 0)$ . Estes pontos sobre as superfícies  $G_0 = 0$  e  $G_{-1} = 0$  apresentam comportamento de sela, onde os autovalores associados a essas singularidades são  $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm 2\sqrt{f^2 + e^2}$ . Por outro lado, a curva de singularidade tem comportamento de sela se,  $z < f \frac{(f^2 + e^2)}{be^2}$  quando  $fbe^2 > 0$  ou  $z > f \frac{(f^2 + e^2)}{be^2}$  quando  $fbe^2 < 0$ . E, comportamento de centro ou foco-fraco se,  $z < f \frac{(f^2 + e^2)}{be^2}$  quando  $fbe^2 < 0$  ou  $z > f \frac{(f^2 + e^2)}{be^2}$  quando  $fbe^2 > 0$ .  $\square$

## 4.2 Estudo no infinito

Estudaremos agora o comportamento do sistema diferencial (4.18) no infinito através da compactificação de Poincaré, mais detalhes sobre este método de estudo de sistemas diferenciais polinomiais no infinito, podem ser vistos em [16], [34]. É interessante observar que independente da superfície, neste caso, as órbitas do sistema diferencial (4.18) apresentam o mesmo comportamento no infinito. Como este sistema tem grau par esta análise será feita somente em três cartas, as quais chamaremos de  $U_1, U_2, U_3$ . Inicialmente, vemos que a intersecção da esfera de Poincaré no infinito com a superfície  $G_p = 0$  o círculo unitário.

**Teorema 4.9.** *A extensão da superfície  $G_p = 0$  na esfera de Poincaré é o círculo unitário.*



*Demonstração.* Observamos inicialmente que a extensão na esfera de Poincaré no infinito ocorre na carta  $U_3$ , cujas mudanças de coordenadas são dadas por  $x = \frac{w_1}{w_3}, y = \frac{w_2}{w_3}, z = \frac{1}{w_3}$ . Substituindo em  $x^2 + y^2 - z^2 + p = 0$ , obtemos  $w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 - 1 = 0$ . Tomando  $w_3 = 0$  temos que  $w_1^2 + w_2^2 = 1$ , ou seja, no infinito a superfície  $G_p = 0$  intercepta a esfera de Poincaré no círculo de raio 1.  $\square$

Analisaremos agora o sistema diferencial (4.18) no infinito a partir de seus pontos singulares e autovalores.

**Teorema 4.10.** *Considere o sistema diferencial (4.18). Então, o comportamento do sistema diferencial na esfera de Poincaré sempre apresenta nós (estáveis ou instáveis).*

*Demonstração.* Como o sistema diferencial tem dimensão par, basta analisarmos as cartas  $U_1, U_2, U_3$ .

· Compactificação na carta  $U_1$  no infinito.

Fazendo a mudança de coordenadas  $x = \frac{1}{w}, y = \frac{u}{w}, z = \frac{v}{w}$  temos que o sistema diferencial (4.18) na carta  $U_1$  é dado por:

$$\dot{u} = (b - au)(1 + u^2 - v^2),$$

$$\dot{v} = (c - av)(1 + u^2 - v^2).$$

Os pontos singulares deste sistema são:

$$p_1 = \left( \frac{b}{a}, \frac{c}{a} \right), \quad p_2 = \left( \frac{b}{a}, \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right),$$

e ainda apresenta a seguintes curvas de singularidades:

$$\beta(u) = \left( u, \pm \sqrt{1 + u^2} \right).$$

Notemos que o ponto  $p_2$  pertence à curva  $\beta$ , assim analisaremos os autovalores apenas da matriz Jacobiana do campo no ponto  $p_1$  e da curva  $\beta$ . Os autovalores de  $p_1$  são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{a}.$$

Assim, se  $a \neq 0$  temos que o ponto singular  $p_1$  é um nó repulsor se  $a > 0$  e  $c^2 > a^2 + b^2$  ou  $a < 0$  e  $c^2 < a^2 + b^2$ , e atrator se  $a > 0$  e  $c^2 < a^2 + b^2$  ou  $a < 0$  e  $c^2 > a^2 + b^2$ . Já as curvas de singularidades tem comportamentos opostos, enquanto uma é atratora a outra é repulsora e vice-versa. Neste caso estas curvas são parábolas com vértice no ponto  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$ . No caso em que  $a = 0$ , o campo apresenta somente a curva de singularidades

$$\omega(v) = \left( \pm \sqrt{v^2 - 1}, v \right),$$

onde esta se comporta como a curva anterior.

· Compactificação na carta  $U_2$  no infinito.

Fazendo a mudança de coordenadas  $x = \frac{u}{w}, y = \frac{1}{w}, z = \frac{v}{w}$  temos que o sistema diferencial (4.18) nesta carta  $U_2$  é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= (a - bu)(1 + u^2 - v^2), \\ \dot{v} &= (c - bv)(1 + u^2 - v^2).\end{aligned}$$

Os pontos singulares deste sistema são:

$$p_1 = \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{b}\right), \quad p_2 = \left(\pm \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{b}, \frac{c}{b}\right),$$

e ainda apresenta as seguintes curvas de singularidades:

$$\beta(v) = \left(\pm \sqrt{v^2 - 1}, v\right).$$

Notemos que o ponto  $p_2$  pertence à curva  $\beta$ , assim analisaremos os autovalores apenas da matriz Jacobiana do campo no ponto  $p_1$  e da curva  $\beta$ . Os autovalores de  $p_1$  são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{b}.$$

Assim, analogamente à carta  $U_1$ , se  $b \neq 0$  temos que o ponto  $p_1$  é um nó repulsor se  $b > 0$  e  $c^2 > a^2 + b^2$  ou  $b < 0$  e  $c^2 < a^2 + b^2$ , e atrator se  $b > 0$  e  $c^2 < a^2 + b^2$  ou  $b < 0$  e  $c^2 > a^2 + b^2$ . Já as curvas de singularidades tem comportamentos opostos, assim como na carta  $U_1$ . Neste caso, estas curvas são Hipérbolas com vértice no ponto  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$ . No caso em que  $b = 0$ , o campo apresenta somente as curvas de singularidades

$$\omega(v) = \left(\pm \sqrt{v^2 - 1}, v\right),$$

assim como na carta  $U_1$ .

· Compactificação na carta  $U_3$  no infinito.

Analogamente às outras compactificações, tomamos a mudança de coordenadas  $x = \frac{u}{w}, y = \frac{v}{w}, z = \frac{1}{w}$  no sistema diferencial (4.18) a compactificação na carta  $U_3$  é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= (a - cu)(u^2 + v^2 - 1), \\ \dot{v} &= (b - cv)(u^2 + v^2 - 1).\end{aligned}$$

Os pontos singulares deste sistema são:

$$p_1 = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right), \quad p_2 = \left(\frac{a}{c}, \pm \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c}\right),$$

e ainda apresenta as curvas de singularidades:

$$\beta(u) = \left(u, \pm\sqrt{1-v^2}\right).$$

Notemos que o ponto  $p_2$  pertence à curva  $\beta$ , assim analisaremos os autovalores apenas da matriz Jacobiana do campo no ponto  $p_1$  e da curva  $\beta$ . Os autovalores de  $p_1$  são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{c}.$$

Analisando as condições sobre esses pontos temos que, se  $c \neq 0$ ,  $p_1$  é um nó repulsor se  $c > 0$  e  $c^2 > a^2 + b^2$  ou  $c < 0$  e  $c^2 < a^2 + b^2$ , e atrator se  $c > 0$  e  $c^2 < a^2 + b^2$  ou  $c < 0$  e  $c^2 > a^2 + b^2$ . Neste caso, a curva de singularidade é um círculo de raio 1, onde o comportamento no interior e no exterior do círculo são opostos, ou seja, se o interior é atrator o exterior será repulsor, se o exterior é atrator o interior será repulsor. No caso em que  $c = 0$ , o campo apresenta somente as curvas descritas acima. Analisando os pontos singulares vemos que o ponto  $p_1$ , em todas as cartas, sempre está sobre a curva  $\beta$  quando  $c^2 = a^2 + b^2$ . Abaixo nas Figuras 4.30 e 4.31, podemos ver algumas representações dos possíveis retratos de fase na esfera de Poincaré.

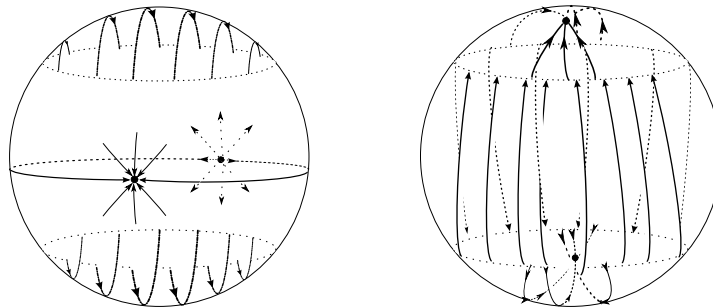


Figura 4.30: Representação do espaço de fase na esfera de Poincaré do sistema diferencial (4.18).

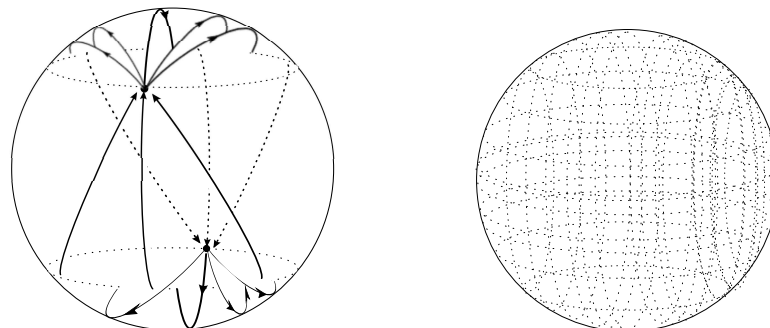


Figura 4.31: Representação do espaço de fase na esfera de Poincaré do sistema diferencial (4.18).

□

A partir da análise do Teorema 4.10 podemos ilustrar o retrato global das soluções do sistema diferencial (4.18), onde nas Figuras 4.32, 4.33 e 4.34 temos a representação quando  $d^2 > e^2 + f^2$ .

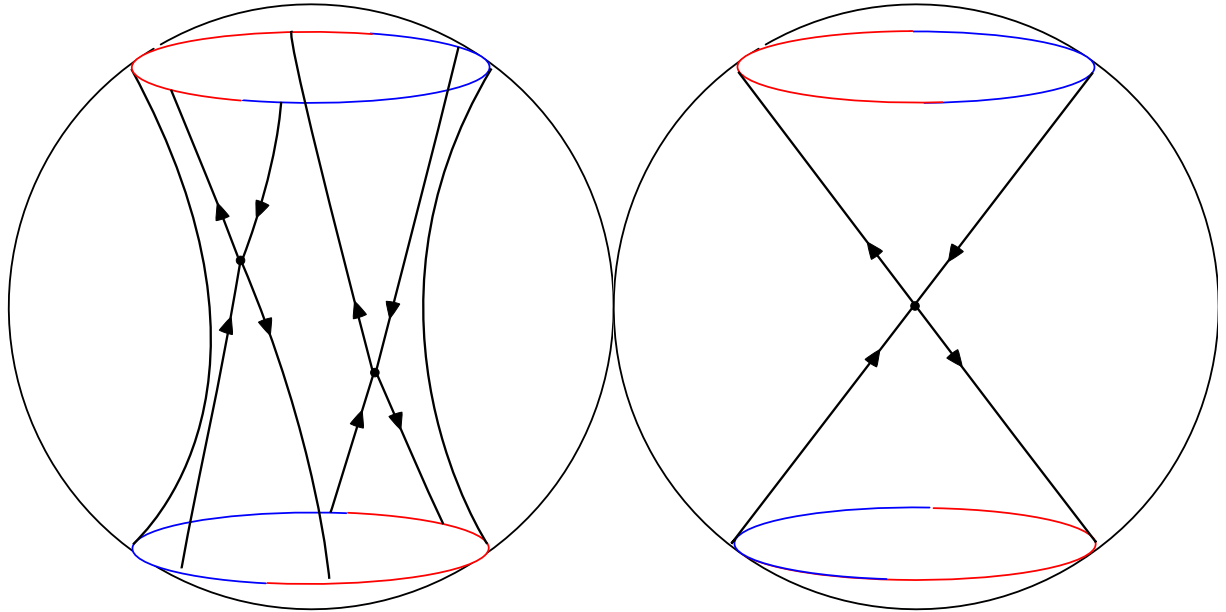


Figura 4.32: Superfície  $G|_{-1} = 0$ .

Figura 4.33: Superfície  $G|_0 = 0$ .

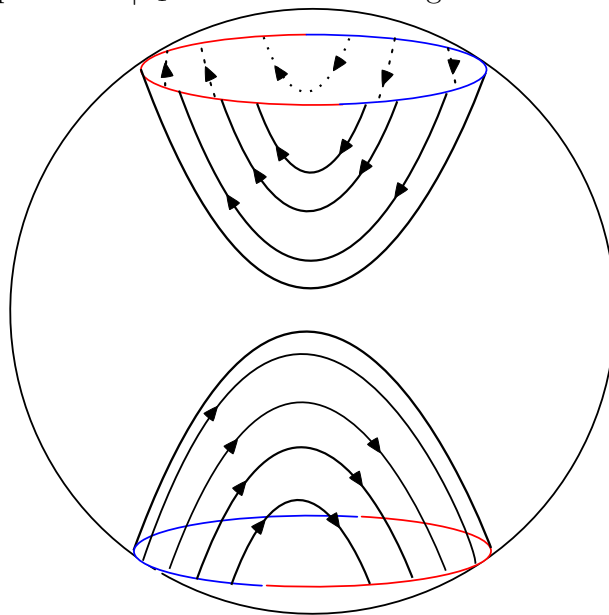


Figura 4.34: Superfície  $G|_1 = 0$ .

E, nas Figuras 4.35, 4.36 e 4.37 temos a representação quando  $d^2 < e^2 + f^2$ .

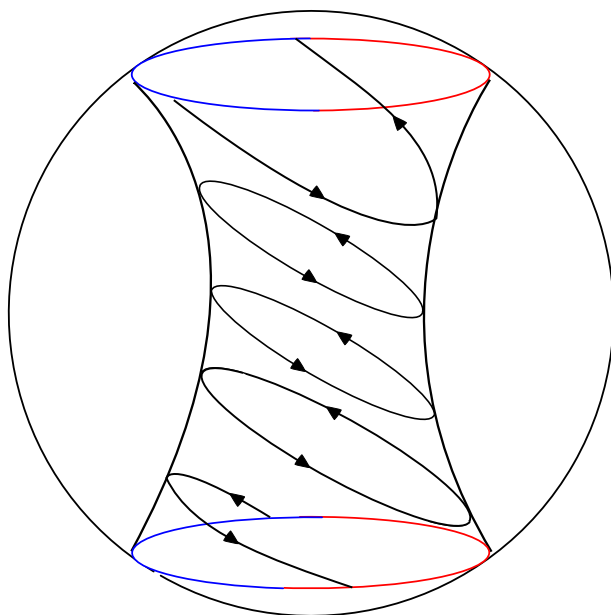


Figura 4.35: Superfície  $G|_{-1} = 0$ .

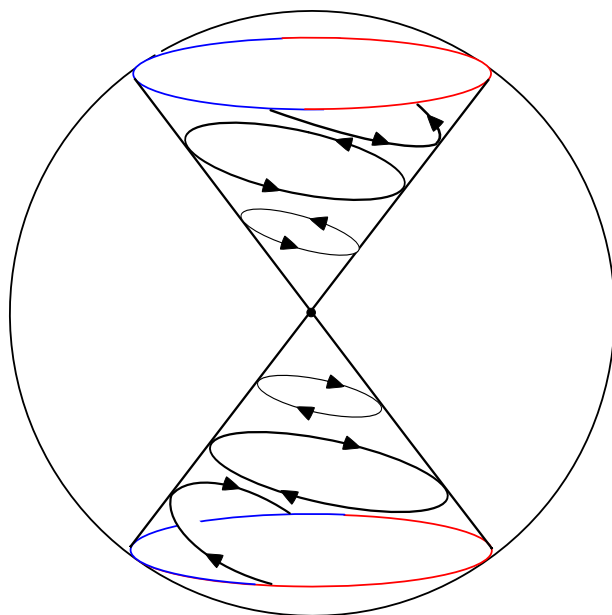


Figura 4.36: Superfície  $G|_0 = 0$ .

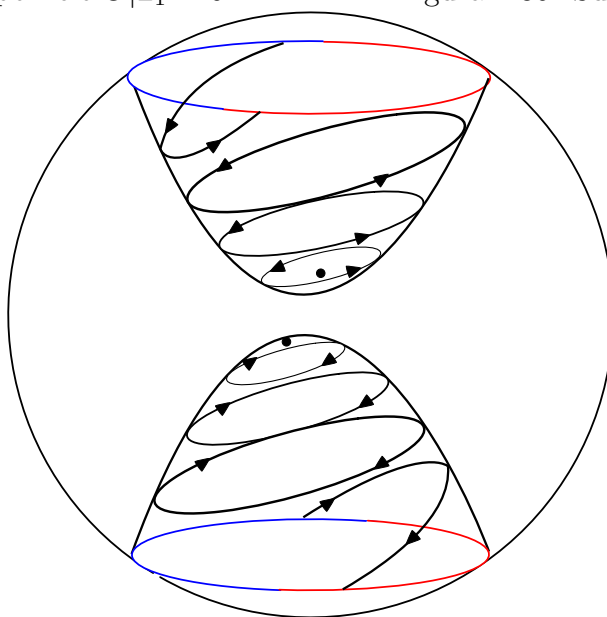


Figura 4.37: Superfície  $G|_1 = 0$ .

# Capítulo 5

## Considerações finais

Neste trabalho, usamos superfícies algébricas invariantes para investigar o comportamento não caótico de sistemas diferenciais em  $\mathbb{R}^3$  e para estudar o comportamento qualitativo dos mesmos, uma vez que essa ferramenta se mostra útil na análise de ambos os casos.

No Capítulo 2 apresentamos uma condição suficiente para estudar o comportamento não caótico de sistemas diferenciais polinomiais definidos em  $\mathbb{R}^3$ . Usando esta condição, determinamos uma abrangente classe de sistemas diferenciais quadráticos não caóticos definidos em  $\mathbb{R}^3$  com uma matriz jacobiana simétrica e posteriormente classificamos classes de *jerk equations* que também não apresentam comportamento caótico e, com isso, apresentando condições relativamente simples para sistemas diferenciais que já existem na literatura não apresentarem tal comportamento. A condição suficiente proposta é bastante geral e pode ser aplicado no estudo de dinâmicas não caóticas de outros tipos de sistemas polinomiais diferenciais em  $\mathbb{R}^3$ . Além disso, o estudo do comportamento não caótico em tipos mais gerais de sistemas diferenciais definidos em  $\mathbb{R}^3$  (mesmo sistemas diferenciais não polinomiais) pode ser considerado, usando extensões da teoria de integrabilidade de Darboux, apresentadas por exemplo, em [18]. Os resultados apresentados neste capítulo dão uma resposta parcial para a conjectura proposta por Zeraouia e Sprott [67] e complementam os resultados obtidos em [22], [23], [43], [68], [69], [70], além de estarem no contexto dos problemas em aberto colocados em [24], relativos à caracterização de dinâmicas caóticas e não-caóticas em sistemas autônomos de equações diferenciais ordinárias.

No Capítulo 3 investigamos condições para os sistemas do tipo Lorenz não apresentar comportamento caótico, através da condição suficiente apresentada no Capítulo 2. Vemos que através dos sistemas diferenciais apresentados em [35], podemos determinar condições para que estes apresentam quádricas invariantes e não apresentem comportamento caótico, com isso classificando uma grande classe de sistemas diferenciais não caóticos. Das condições apresentadas para os sistemas do tipo Lorenz podemos determinar condições para que sistemas diferenciais

conhecidos na literatura, como Rabinovich, Lorenz e Chen, não apresentem comportamento caótico, complementando os trabalhos [32], [33] e [34].

Por fim, no Capítulo 4 estudamos o comportamento qualitativo dos sistemas diferenciais que apresentam uma quádrlica do tipo  $G_p = x^2 + y^2 - z^2 + p$  com  $p \in [-1, 1]$  como superfície algébrica invariante, baseado nos sistemas diferenciais apresentados em [35] e [44]. Inicialmente são obtidas condições para que tais sistemas diferenciais tenham como integral primeira a quádrlica  $G_p = 0$  e assim vemos que o espaço de fase é folheado por essas superfícies. Posteriormente investigamos a restrição desses sistemas diferenciais à quádrlica  $G_p = 0$ , obtendo condições para que essas restrições tenham uma integral primeira ou que estes sistemas diferenciais sejam sistemas Hamiltonianos e conseqüentemente, por essas propriedades, sabemos o comportamento qualitativo desses sistemas diferenciais sobre a quádrlica  $G_p = 0$ . Ainda, mostramos condições para que estes sistemas diferenciais sejam reversíveis (ou tempo reversíveis), que são muito mencionados e estudados na literatura geral. Vemos ainda que, sob certas condições, esses sistemas diferenciais podem apresentar paralelos e meridianos invariantes, confirmando os resultados apresentados em [15]. E, a partir dos paralelos invariantes obtemos órbitas heteroclínicas sobre a intersecção dessas superfícies, gerando assim um comportamento qualitativo interessante e bastante complexo para esses sistemas diferenciais. Apresentamos também condições para que esses sistemas diferenciais apresentem órbitas periódicas. E, por fim, mostramos o comportamento global de uma classe de sistemas obtido através do estudo na esfera de Poincaré.

Acreditamos que a teoria de sistemas diferenciais não caóticos (ou dinâmica não caótica) tem muito ainda a ser estudada, e que as superfícies algébricas invariantes constituem uma ferramenta importante para investigar tais problemas. Como ainda existem inúmeros problemas em aberto que podem ser explorados, pretendemos em um futuro próximo generalizar a condição apresentada no Capítulo 2, com objetivo de enunciar um critério geral que possa descrever a dinâmica não caótica de sistemas diferenciais em  $\mathbb{R}^3$ . Por outro lado, existem ainda problemas em aberto na dinâmica de sistemas diferenciais que apresentam uma quádrlica como superfície algébrica invariante. Já é conhecida a dinâmica em algumas quádrlicas como vemos por exemplo em [44], porém ainda existem sistemas diferenciais não explorados que podem ser estudados no futuro.

# Referências Bibliográficas

- [1] Alligood, K. T., Sauer, T., Yorke, J., *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, New York: Springer-Verlag, 1996.
- [2] Anastassiou, S., Pnevmatikos, S., Bountis T. *Quadratic Vector Fields Equivariant Under the  $D_2$  Symmetry Group*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **23**, 1350017, 2002.
- [3] Argyris, J., Faust, G., Haase, M., Friedrich, R. *An Exploration of Dynamical Systems and Chaos*, Berlin: Springer-Verlag, 2015.
- [4] Aubin, D., Dalmedico, A. D. *Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: Longue Dureé and Revolution, Disciplines and Cultures*, Historia Mathematica **29**, 273–339, 2002.
- [5] Birman, J. S., Williams, R. F. *Knotted periodic orbits in dynamical systems – I: Lorenz’s equations*, Topology **22**, 1, 47–82, 1983.
- [6] Broer, H., Takens, F. *Dynamical Systems and Chaos*, New York: Springer-Verlag, 2011.
- [7] Brown, R., Chua, L. O. *Clarifying Chaos: Examples and Counterexamples*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **6**, 219–249, 1996.
- [8] Brown, R., Chua, L. O. *Clarifying Chaos II: Bernoulli Chaos, Zero Lyapunov Exponents and Strange Attractors*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **8**, 1–32, 1998.
- [9] Brown, R., Chua, L. O. *Clarifying Chaos III: Chaotic and Stochastic Processes, Chaotic Resonance, and Number Theory*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **9**, 785–803, 1999.
- [10] Buzzi, C. A., de Carvalho, T., Euzébio, R. D. *Chaotic planar piecewise smooth vector fields with non-trivial minimal sets*, Ergodic Theory and Dynamical Systems. **36**, 458–469, 2016.
- [11] Cencini, M., Cecconi, F., Vulpiani, A. *Chaos: From Simple Models to Complex Systems*, Singapore: World Scientific, 2010.



- 
- [12] Chen, G., Ueta, T. *Yet another chaotic attractor*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., **9**, 1465–1466, 1999.
- [13] Chirikov, B.V., Izraelev, F.M. *Some numerical experiments with a nonlinear mapping: stochastic component*, Toulouse: Proc. Colloques Internationaux du CNRS, **229**, 409, 1973.
- [14] Chirikov, B.V., Izrailev, F.M., Tayurski, V.A. *Numerical experiments on statistical behavior of dynamical systems with a few degrees of freedoms*, Computer Physics Communications. **5**, 11, 1973.
- [15] Dias, F. S., Llibre, J., Mello, L. F. *When parallels and meridians are limit cycles for polynomial vector fields on quadrics of revolution in the Euclidean 3-space*, Int. J. Bifurcat. Chaos **26**, 1650160, 14, 2016.
- [16] Dumortier, F., Llibre, J., Artés, J.C. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, New York: Springer-Verlag, 2006.
- [17] Galiullin, A. S. *Inverse Problems of Dynamics*, Moscow: Mir Publishers, 1984.
- [18] Giné, J., Grau, M., Llibre, J. *On the extensions of the Darboux theory of integrability*, Nonlinearity **26**, 2221–2229, 2013.
- [19] Gouesbet, G. *Reconstruction of standard and inverse vector fields equivalent to a Rössler system*, Physical Review A, **44**, 6264-6280, 1991.
- [20] Gouesbet, G. *Reconstruction of vector fields: The case of the Lorenz system*, Physical Review A, **46**, 1784-1796, 1992.
- [21] Guckenheimer, J., Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences, **42**, New York: Springer-Verlag, 2002.
- [22] Heidel, J., Zhang, F. *Nonchaotic behavior in three-dimensional quadratic systems II. The conservative case*, Nonlinearity **12**, 617–633, 1999.
- [23] Heidel, J., Zhang, F. *Nonchaotic and chaotic behaviour in three-dimensional quadratic systems: Five-one conservative cases*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., **17**, 2049–2072, 2007.
- [24] Heidel, J., Zhang, F. *Some Open Problems in the Dynamics of Quadratic and Higher Degree Polynomial ODE Systems*, Frontiers in the Study of Chaotic Dynamical Systems with Open Problems, Series B, **16**, Singapore: World Scientific, 2011.

- 
- [25] Hénon, M. *Numerical exploration of Hamiltonian systems*, Chaotic behavior of deterministic system, Les Houches Summers School, Session XXXVI, Amsterdam: North-Holland, 1983.
- [26] Hénon, M., Heiles, C. *The applicability of the third integral of the motion: Some numerical experiments*, *Astronomical Journal*, **69**, 73-79, 1964.
- [27] Jafari, S., Sprott, J. C., Pham, V. T., Volos, C., LI, C. *Simple chaotic 3D flows with surfaces of equilibria*, *Nonlinear Dynamics*, **86**, 2, 1349-1358, 2016.
- [28] Jouanolou, J. P. *Équations de pfaff algébriques*, *Lect. Notes Math.*, **708**, 1979.
- [29] Li, T. Y., Yorke, J. A. *Period three implies chaos*, *The American Mathematical Monthly*. **82**, 985–992, 1975.
- [30] Llibre, J. *Integrability of polynomial differential systems*, *Handbook of differential equations*, Amsterdam: Elsevier/North-Holland, 2004.
- [31] Llibre, J., Messias, M. *Global dynamics of the Rikitake system*, *Phys D: Nonlinear Phenomena* **238**, 241–252, 2008.
- [32] Llibre, J., Messias, M., da Silva, P.R. *On the global dynamics of the Rabinovich system*, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 275210, 21, 2008.
- [33] Llibre, J., Messias, M., da Silva, P.R. *Global dynamics of the Lorenz system with invariant algebraic surfaces*, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **20**, 3137–3155, 2010.
- [34] Llibre, J., Messias, M., da Silva, P.R. *Global dynamics in the Poincaré ball of the Chen system having invariant algebraic surfaces*, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **22**, 1250154, 17, 2012.
- [35] Llibre, J., Messias, M., Reinol, A. C. *Normal forms for polynomial differential system in  $\mathbb{R}^3$  having an invariant quadric and a Darboux invariants*, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **25**, 1550015, 16, 2015.
- [36] Llibre, J., Messias, M., Reinol, A. C. *Darboux invariants for planar polynomial differential systems having an invariant conic.*, *Z. Angew. Math. Phys.*, **41**, 1127-1136.
- [37] Llibre, J., Oliveira, R. D. S. *Quadratic systems with invariant straight lines with total multiplicity two having Darboux invariants*. *Commun. Contemp. Math.*, vol. 17(3), 1450018, 2015.

- 
- [38] Llibre, J., Ramírez, R. *Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications*, Basel: Birkhäuser-Verlag, 2016.
- [39] Llibre, J., Valls, C. *Polynomial first integrals for the Chen and Lü systems*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., **22**, 125-262, 2012.
- [40] Llibre, J., Zhang, X. *On the Darboux integrability of the polynomial differential systems*, Qualit. Th. Dyn. Sys. **11**, 129–144, 2012.
- [41] Lorenz, E.N. *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci. **20**, 130–141, 1963.
- [42] Malasoma, J. M. *A new class of minimal chaotic flows equation for continuous chaos*, Physics Letters A, **305**, 52–58, 2002.
- [43] Malasoma, J. M. *Non-chaotic behavior for a class of quadratic jerk equations*, Chaos, Solitons and Fractals, **39**, 533–539, 2009.
- [44] Messias, M., Reinol, A. C. *Integrability and Dynamics of Quadratic Three-Dimensional Differential Systems Having an Invariant Paraboloid*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., **26**, 1650134, 2016.
- [45] Messias, M., Silva, R. P. *Nonchaotic Behavior in Quadratic Three-Dimensional Differential Systems with a Symmetric Jacobian Matrix*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., **28**, 1830006, 2018.
- [46] Moore, D W., Spiegel, E. A. *A Thermally Excited Non-Linear Oscillator*, Astrophysical Journal, Vol. **143**, 871, 1966.
- [47] Newhouse, S., Ruelle, D., Takens, F. *Occurrence of strange axiom A attractors near quasi-periodic flow on  $T^m$ ,  $m \geq 3$* , Commun. Math. Phys., **64**, 35, 1978.
- [48] Ott, E. *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, London, 2002.
- [49] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems, Third Edition*, Texts in Appl. Math. 7, New York: Springer-Verlag, 2006.
- [50] Pham, T., Volos, C., Jafari, S., Vaidyanathan, S., Kapitaniak, T., Wang, X. *A Chaotic System with Different Families of Hidden Attractors*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., **26**, 2016.
- [51] Poincaré, H. *New Methods of Celestial Mechanics*, American Institute of Physics, **13**, Paris, 1993.

- 
- [52] Rössler, O. E. *An equation for continuous chaos*, Phys. Lett. A, **57**, 397–398, 1976.
- [53] Ruelle, D. *Strange attractors as a mathematical explanation of turbulence*, Statistical models and turbulence: Proceedings of the Symposium at University of California, Lecture Notes in Physics, **12**, 292–299. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
- [54] Ruelle, D., Takens, F. *On the nature of turbulence*, Commun. Math. Phys., **20**, 167, 1971.
- [55] Sander, E., Yorke, J. A. *The Many Facets of Chaos*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., **25**, 1530011, 2015.
- [56] Sayed, W. S. et al. *Self-Excited Attractors in Jerk Systems: Overview and Numerical Investigation of Chaos Production*, Nonlinear Dynamical Systems with Self-Excited and Hidden Attractors, Heidelberg: Springer-Verlag, 2018.
- [57] Schwartz, A. J. *A generalization of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds*, Amer. J. Math., **85**, 453–458, 1963.
- [58] Sparrow, C. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Applied Mathematical Sciences 41, New York: Springer-Verlag, 1982.
- [59] Sprott, J. C. *Some simple chaotic flow*, Phys. Rev. E, **50**, 647–650, 1994.
- [60] Sprott, J. C. *Some simple chaotic jerk functions*, Am. J. Phys., **65**, 537–543, 1997.
- [61] Sprott, J. C. *Simplest dissipative chaotic flow*, Phys. Lett. A, **228**, 271–274, 1997.
- [62] Sprott, J. C. *Simple chaotic systems and circuits*, Am. J. Phys., **68**, 758–763, 2000.
- [63] Sprott, J. C. *Algebraically simple chaotic flows*, International Journal of Bifurcation and Chaos, **5**, 758–763, 2000.
- [64] Sprott, J. C. *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*, London: World Scientific Publishing, 2010.
- [65] Strogatz, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering*, New York: Westview Press, 2001.
- [66] Vaidyanathan, S. *A new 3-D jerk chaotic system with two cubic nonlinearities and its adaptive backstepping control*, Archives of Control Sciences, **27**, 409–439, 2017.
- [67] Zeraoulia, E., Sprott, J. C. *A conjecture that three-dimensional quadratic continuous-time systems with a symmetric Jacobian matrix are not chaotic*, Pre print., 2014.

- 
- [68] Zhang, F., Heidel, J. *Nonchaotic behaviour in three-dimensional quadratic systems*, *Nonlinearity*, **10**, 1289–1303, 1997.
- [69] Zhang, F., Heidel, J. *Chaotic and nonchaotic behaviour in three-dimensional quadratic systems: 5-1 dissipative cases*, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **22**, 1250010, 2012.
- [70] Zhang, F., Heidel, J., Le Borne, R. *Determining nonchaotic parameter regions in some simple chaotic jerk functions*, *Chaos, Solutions and Fractals*, **11**, 1413–1418, 2008.
- [71] Yang, X. S. *Non-chaotic behaviour in non-dissipative quadratic systems*, *Chaos, Solutions and Fractals*, **11**, 1799–1802, 2000.
- [72] Yang, X. S., Chen, G. *On non-chaotic behavior of a class of jerk systems*, *Far East J. Dyn. Syst.*, **4**, 27–38, 2002.
- [73] Yang, X. S., Chen, G. *Non-chaotic behavior in a class of continuous dynamical systems*, *Far East J. Dyn. Syst.*, **4**, 87–95, 2002.
- [74] Wei, Z., Sprott, J.C., Chen, H. *Elementary quadratic chaotic flows with a single non-hyperbolic equilibrium*, *Phys. Lett. A*, **378**, 2184–2187, 2015.
- [75] Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, *Texts in Appl. Math.* 2, New York: Springer, 2003.

# Apêndice A

## Apêndice

### A.1 Processo para encontrar o plano invariante do Teorema 2.3

Dado o sistema diferencial (2.6), podemos associar este sistema ao campo de vetores (2.8) como no texto. Assim, tomando  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$ , estudamos o produto interno:

$$\langle X, \nabla f \rangle = \langle X, \nabla f \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} P + \frac{\partial f}{\partial y} Q + \frac{\partial f}{\partial z} R = kf. \quad (\text{A.1})$$

onde  $k \in \mathbb{R}$ . Fazendo  $\langle X, \nabla f \rangle - kf = 0$ , obtemos o seguinte sistema de equações:

$$a_4 \alpha_1 + \frac{1}{2} a_7 \alpha_2 + \frac{1}{2} a_8 \alpha_3 = 0$$

$$a_7 \alpha_1 + 2a_5 \alpha_2 + a_9 \alpha_3 = 0$$

$$a_8 \alpha_1 + a_9 \alpha_2 + 2a_6 \alpha_3 = 0$$

$$(a_1 - k) \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 = 0$$

$$a_5 \alpha_1 + b_5 \alpha_2 + \frac{1}{2} b_9 \alpha_3 = 0$$

$$a_9 \alpha_1 + b_9 \alpha_2 + 2b_6 \alpha_3 = 0$$

$$a_2 \alpha_1 + (b_2 - k) \alpha_2 + b_3 \alpha_3 = 0$$

$$a_6 \alpha_1 + b_6 \alpha_2 + c_6 \alpha_3 = 0$$

$$a_3 \alpha_1 + b_3 \alpha_2 + (c_3 - k) \alpha_3 = 0$$

$$a_0 \alpha_1 + b_0 \alpha_2 + b_0 \alpha_3 - k \alpha_0 = 0.$$

Temos portanto 10 equações com 24 parâmetros para serem analisados. Com o objetivo de obter o maior número de parâmetros livres nessas equações obtemos as seguintes soluções:

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{m_2^2(k) [b_5 m_2(k) - \frac{3}{2} b_9 m_3(k)] + m_3^2(k) [3b_6 m_2(k) - c_6 m_3(k)]}{m_1^3(k)}, \\
a_5 &= \frac{b_5 m_2(k) - \frac{1}{2} b_9 m_3(k)}{m_1(k)}, \\
a_6 &= \frac{b_6 m_2(k) - c_6 m_3(k)}{m_1(k)}, \\
a_7 &= \frac{2b_5 m_2^2(k) + 2b_6 m_3^2(k) - 2b_9 m_2(k) m_3(k)}{m_1^2(k)}, \\
a_8 &= \frac{b_9 m_2^2(k) + 2c_6 m_3^2(k) - 4b_6 m_2(k) m_3(k)}{m_1^2(k)}, \\
a_9 &= \frac{-2b_6 m_3(k) + b_9 m_2(k)}{m_1(k)}, \\
c_3 &= k + \frac{m_4(k)}{m_3(k)},
\end{aligned}$$

onde  $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_2, b_3, b_5, b_6, b_9, c_0, c_6 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e

$$\begin{aligned}
m_1(k) &= a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_3 k, \\
m_2(k) &= a_1 b_3 - a_2 a_3 - b_3 k, \\
m_3(k) &= a_1 b_2 - a_1 k - a_2^2 - b_2 k + k^2, \\
m_4(k) &= a_1 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_3 + a_3^2 b_2 - a_3^2 k - b_3^2 k,
\end{aligned}$$

com  $m_1(k), m_3(k) \neq 0$ , obtendo assim o plano invariante

$$f(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \quad (\text{A.2})$$

com

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{k} + \frac{m_3(k) c_0 - m_2(k) b_0}{m_1(k) k}, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{-m_2(k)}{m_1(k)}, \quad \alpha_3 = \frac{m_3(k)}{m_1(k)}. \quad (\text{A.3})$$

Os cálculos foram feitos utilizando o software Maple.