

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

DINO BEGHETTO JUNIOR

Espinoros exóticos e espinoros RIM : Aspectos físicos e algébricos

Guaratinguetá

2019

Dino Beghetto Junior

Espinoros exóticos e espinoros RIM : Aspectos físicos e algébricos

Tese apresentada ao Conselho de Curso de Pós-Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Física .

Orientador: Prof^o Dr. Júlio Marny Hoff da Silva
Coorientador: Prof^o Dr. Saulo Henrique Pereira

Guaratinguetá
2019

B416e	Beghetto Junior, Dino Espinoros exóticos e espinoros RIM: aspectos físicos e algébricos / Dino Beghetto Junior – Guaratinguetá, 2019 103 f. : il. Bibliografia: f. 95-98 Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2019. Orientador: Prof. Dr. Júlio Marny Hoff da Silva Coorientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira 1. Spinor - Análise. 2. Cosmologia. 3. Física teórica. I. Título.
-------	---

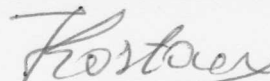
CDU 531.01(043)

DINO BEGHETTO JUNIOR

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM FÍSICA”

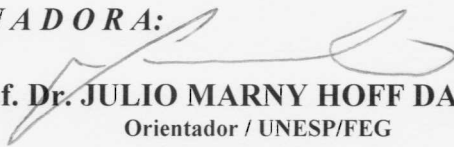
PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. Konstatin Georgiev Kostov
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. JULIO MARNY HOFF DA SILVA
Orientador / UNESP/FEG



Prof. Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA
UNESP/FEG



Prof. Dr. ROGÉRIO TEIXEIRA CAVALCANTI
UNESP/FEG



Prof. Dr. THIAGO ROBERTO DA POSSA CARAMÊS
UFES



Prof. Dr. ROLDÃO DA ROCHA JÚNIOR
Universidade Federal do ABC

Março de 2019

DADOS CURRICULARES

DINO BEGHETTO JUNIOR

- NASCIMENTO** 10 de janeiro de 1983 - São José dos Campos / SP
- FILIAÇÃO** Dino Beghetto
Rosângela da Rocha Caracas Beghetto
- 2001 / 2004** Curso de Graduação - Bacharelado em Música
Faculdade de Artes Santa Cecília - FASC, Pindamonhangaba-SP
- 2005 / 2006** Curso de Pós-Graduação em Composição Musical - nível Especialização
Faculdade de Música Carlos Gomes - FMCG, São Paulo-SP
- 2011 / 2015** Curso de Graduação - Bacharelado em Matemática Computacional
Universidade Federal de São Paulo - UNIFESP, São José dos Campos-SP
- 2013 / 2015** Curso de Pós-graduação em Física e Astronomia - nível Mestrado
Universidade do Vale do Paraíba - UNIVAP, São José dos Campos-SP
- 2015 / 2019** Curso de Pós-graduação em Física - nível Doutorado
Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá-SP

Ao aluno interessado, o



AGRADECIMENTOS

(...) Então podemos dizer que todas as coisas estão aqui dentro desta folha de papel. Você não pode apontar uma única coisa que não esteja aqui- tempo, espaço, a terra, a chuva, os minerais do solo, os raios do sol, a nuvem, o rio, o calor. Tudo coexiste com esta folha de papel. É por isto que eu penso que a palavra interser deveria estar no dicionário. “Ser” é interser. Você simplesmente não pode “ser” por você mesmo, sozinho. Você tem que interser com cada uma das outras coisas. Esta folha de papel é porque tudo o mais é.

(Thich Nhat Hanh)

Agradeço:

- Ao meu orientador e colaborador prof. Júlio, principalmente por todo o ensinamento transmitido por duras disciplinas, estimuladas reuniões e frutíferas conversas. Não sei se tens noção do quanto é inspirador trabalhar contigo.
- Ao meu coorientador prof. Saulo, por sempre estar disponível.
- Aos professores do Departamento de Física e Química, pelos conhecimentos gerados.
- Aos membros da banca, pelo aceite em participar e colaborar com essa fase especial do meu processo de formação, dando importantes conselhos e sugestões.
- Aos meus colegas da FEG, em especial:
 - ~~Thiago Vinicius~~: por simplesmente resolver meu problema de moradia desde o início, pelo clássico macarrão com brócolis e molho branco, por aqueles omeletes monstruosos, pelos incríveis tomates recheados!
 - Rubia Laranja: por chorar de rir quando eu falo da minha reação com o espelho visto da mesa da sala, pelos quase 4 anos de boa vizinhança!
 - Seu Rodigo: por compartilhar as “ideias doidas” sobre física (aquele artigão lóque vai sair...) transmitindo muito conhecimento, por me salvar quando fiquei sem teto no finalzim!
 - Dona Laura: por me ensinar muito de física, pela hospitalidade mineira!
 - Rafael Baiano: pelo companheirismo quando eu precisei, e não pelos lanchões da madrugada!
 - Gabriel Psicodélico: por quebrar meu galho sempre que eu precisei!
 - Bárbara Celi: por lembrar de deixar a porta da sala aberta pra dar uma arejada!
 - Rodolfo Bardento: pelo aprendizado nos papos e trabalhos!
 - Carlos Lhama: principalmente pelos trocadilhos, mesmo os ruins!
 - Ricardo Pinque: por ter comprado o carro e pelos toques sobre imitar o Lhama!

- À Clarinha, por cada “BUONGIORNO!”, por deixar meus quatro anos de doutorado com *cheiro-de-vida-feliz*, por me ouvir “falando de matemática e física”, por cada comemoração, por fazer com que eu me desenvolva e evolua com minha *smorga*, por me ajudar sempre, por ser confortável, porque, simplesmente, “!”, sabes?! Eu sei que cê sabe ((♡))
- À minha mãe, por toda a criação nesses últimos 36 anos, pela primeira canção, por ter *me doutrinado na arte do chá*, por deixar o caminho belezinha desde sempre!
- À minha irmã, por ser minha ermã e às vezes falar “tô ligada que cê tá corrido, mas tô com saudade do ermão!”
- Ao meu cunhado, pelos sempre divertidos papos sobre (rolos sobre) guitarra!
- Ao meu primo Celsixa, por me emprestar a senha do premiere em dias de jogão do Parmera!
- Aos meus amigos do Tempo-Câmara, aos meus amigos da Omega Zero, aos meus amigos todos!
- À todos os professores que tive na vida, sem exceções. Em especial os grandes Dino-pai, Geraldão, Irapa e Vilhena, pelos grandes ensinamentos e amizade!
- Aos meus alunos que tive, dentro e fora da FEG, pela oportunidade de ensinar e aprender.
- À todos os funcionários da FEG, por todo o serviço prestado.
- À todos os contribuintes brasileiros.

O que quero dizer é que agradeço à todos os elementos não-papel que me fazem ser papel. Sem vocês, eu não seria, simplesmente.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (**CAPES**) - código de financiamento 001.

“From the moment they wake, they devote themselves to the perfection of whatever they pursue.”
(Nathan Algren, no filme O Último Samurai)

RESUMO

Espinores exóticos surgem quando a topologia da variedade M tomada como sendo o espaço-tempo é suposta ser não-trivial, no sentido que seu grupo fundamental é não-trivial: $\pi_1(M) \neq 0$. Assim, um novo termo exótico $\partial_\mu \theta$ surge na equação dinâmica destes espinores, e novas propriedades se apresentam. A não-trivialidade de $\pi_1(M)$ pode ser diretamente ligada a própria existência de buracos negros. Assim, estudamos, nesta tese, relações entre estruturas espinoriais exóticas e a taxa de emissão de radiação Hawking por buracos negros assintoticamente *flat* em Relatividade Geral, encontrando equações diferenciais para o termo exótico, o que dá a possibilidade de inferir uma forma explícita para θ . Também, tratamos aqui dos chamados espinores RIM, que são espinores que respeitam uma equação dinâmica não-linear chamada de equação não-linear de Heisenberg. Apresentamos dois lemas relativos a estes espinores: um deles encontrando restrições para ocorrer a decomposição de espinores de Dirac em termos de espinores RIM, e outro que nega a existência de espinores RIM exóticos, ou seja, relaciona a existência de espinores RIM a própria estrutura topológica do espaço-tempo. Ainda, encontramos um método de classificarmos os espinores RIM nas classes de Lounesto. Por fim, apresentamos, na forma de dois teoremas, maneiras de deformar homotopicamente tais espinores no que chamamos de *spinor-plane*.

PALAVRAS-CHAVE: Espinores exóticos. Espinores RIM. Homotopia. Radiação Hawking.

ABSTRACT

Exotic spinors emerge when the topology associated to the manifold M , which is taken as being the spacetime, is supposed to be non-trivial, in the sense that its fundamental group is non-trivial: $\pi_1(M) \neq 0$. Thus, a new exotic term $\partial_\mu \theta$ arises from the dynamical equation related to these spinors, and new properties are in order. The non-triviality of $\pi_1(M)$ may be directly linked to the very existence of black holes. In this vein, we study some relations between exotic spinorial structures and the Hawking radiation emission rate by asymptotically flat black holes solutions of General Relativity, finding an equation from which an explicit form for the exotic term could be inferred. Moreover, we work on the so-called RIM spinors, which are spinor fields satisfying a non-linear dynamical equation known as Heisenberg non-linear equation. We present two *lemmata* related to these spinors: one of them gives us restrictions for the decomposition of Dirac fields in terms of RIM spinors to occur, while the other denies the existence of exotic RIM spinors, i.e., it relates the very existence of RIM spinors to the spacetime topological structure. Besides, we develop a classifying method for RIM spinors into the Lounesto classes. Finally, we present, in the form of two theorems, ways to homotopically deform such spinors in what we call the spinor-plane.

KEYWORDS: Exotic spinors. RIM spinors. Homotopy. Hawking radiation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Noção intuitiva: o mapa $\sigma : M \rightarrow E$ é uma seção do fibrado (E, π, M)	27
Figura 2	Noção intuitiva: o mapa $\delta : M \rightarrow E$ não é uma seção do fibrado (E, π, M) . . .	27
Figura 3	Um (hiper) plano definido por (T_1, X, Y, Z) intersecciona o cone-de-luz definindo uma esfera de Riemann de raio $ T_1 $	45
Figura 4	Visualização da construção da projeção estereográfica.	45
Figura 5	Efeito pictórico da topologia não-trivial na construção do espinor.	48
Figura 6	Visualização geométrica de $\theta(x, y)$	100

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relações entre o grupo <i>Spin</i> e a dimensão da variedade.	43
Tabela 2 – Leis da termodinâmica de buracos negros em analogia com as leis da termodinâmica usual.	55

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	PRELIMINARES MATEMÁTICAS	21
2.1	Variedades topológicas suaves	21
2.1.1	Variedades topológicas	21
2.1.2	Estruturas diferenciáveis	23
2.2	Fibrados, Fibrados principais e Fibrados associados	26
2.2.1	Fibrados	26
2.2.2	Fibrados principais e Fibrados associados	29
2.3	O grupo <i>Spin</i>	32
2.3.1	Álgebra exterior e álgebra de Grassmann	32
2.3.2	Álgebra de Clifford e o grupo <i>Spin</i>	34
2.4	Homotopias e o Grupo Fundamental	35
2.4.1	Homotopias	35
2.4.2	O grupo fundamental e a homotopia de caminhos	36
3	ESPINORES EXÓTICOS	38
3.1	Construindo um espinor	38
3.1.1	Abordagem algébrica	38
3.1.2	Abordagem intuitiva	44
3.2	Diferenças na topologia: os espinores exóticos	47
3.3	Estruturas Espinoriais Exóticas e Buracos Negros em Relatividade Geral	53
3.3.1	Radiação Hawking e exotividade	53
3.3.2	Análise de valores extremos das taxas de emissão para espinores exóticos	56
3.3.3	Relações exóticas de dispersão	60
4	ESPINORES RIM	63
4.1	O que são espinores RIM?	63
4.2	Da obstrução quanto a existência de espinores RIM exóticos	66
4.3	Espinores RIM, homotopias e classificação de Lounesto	69
4.3.1	A classificação de Lounesto	69
4.3.2	Restrições na representação de espinores de Dirac em termos de espinores RIM	71
4.3.3	Espinores de Dimensão de Massa um e espinores RIM	73
4.3.4	<i>Spinor-plane</i> e funções homotópicas	76
4.3.5	Sobre a decomposição RIM e a classificação de Lounesto	83
5	CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS	90

REFERÊNCIAS	95
APÊNDICE A – ELEMENTOS DE FORMAS DIFERENCIAIS DE GRAU 1 (OU 1–FORMAS) E NOÇÕES DE CLASSES DE COHO- MOLOGIA	99

1 INTRODUÇÃO

Antes de iniciarmos, de fato, a introdução desse trabalho, meditemos sobre a célebre frase de Michael Atiyah:

No one fully understand spinors.

É com tal espírito que essa tese, fruto de quatro anos de estudo e pesquisa, foi feita: nada mais estimulante do que uma afirmação como a de *Sir Atiyah* para simbolizar (e aguçar) a curiosidade e a vontade de pesquisa. O que poderia, a princípio, ser uma espécie de bloqueador para se adentrar no âmago de um programa de doutoramento ao mesmo tempo se revela um chamariz para o mergulho pleno e definitivo na vida de pesquisador, que esperadamente é o que ocorre com a conclusão de uma tese. Naturalmente, ademais deve-se considerar o forte interesse sobre o tema por parte do autor. Não obstante, entendemos que ao se pretender pesquisar (o que quer que seja) é preciso estar imbuído desse espírito de busca por entendimento daquilo que ainda não se sabe, levando consigo, também, o pensamento de que sempre se terá mais a saber. E buscar saber. Finito este prelúdio à introdução, podemos nos conduzir ao texto introdutório como requer o protocolo.

Essa tese versa sobre espinores. Embora o termo “espinor” tenha sido cunhado por Paul Ehrenfest nos anos 1920, supostamente em uma carta endereçada a Bartel van der Waerden (VAZ JR.; ROCHA, 2016; PENROSE, 2007), seu conceito intrínscico é mais antigo. De fato, espinores já eram estudados (e utilizados em cálculos estatísticos e engenharia) (VAZ JR.; ROCHA, 2016) antes de Ehrenfest usá-los na teoria quântica. Mas o que é um espinor, afinal? A continuação da frase de Michael Atiyah citada no início dessa tese é categórica quanto a impossibilidade de uma resposta definitiva e completa em tempos atuais:

Their algebra is formally understood, but their geometrical significance is mysterious. In some sense they describe the “square root” of geometry and, just as understanding the square root of -1 took centuries, the same might be true of spinors.

Definiremos formalmente espinores no Capítulo 3. Entretanto, aproveitemos o ensejo da comparação com a história do número complexo $i = \sqrt{-1}$ para discutirmos a seguinte situação: pense nas quantidades quaterniônicas básicas, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , como referindo-se a três eixos mutuamente perpendiculares no espaço euclidiano usual 3–dimensional. Como a unidade imaginária i no plano de Argand (-Wessel-Gauss), podemos interpretar o quatérnion \mathbf{i} como uma rotação positiva no espaço 3–dimensional sobre o eixo- \mathbf{i} , com análoga apreciação sendo válida para \mathbf{j} e \mathbf{k} com relação aos seus respectivos eixos. Contudo, se tais rotações são de fato de ângulos retos $\frac{\pi}{2}$ como o caso de i no plano complexo, as relações de produtos entre \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} da álgebra dos quatérnions não são respeitadas. Para garantirmos que tais relações sejam satisfeitas, temos que rotacionar de dois ângulos retos, π , em vez de um. A princípio isso parece estranho, pois certamente não estamos fazendo uma relação direta com a unidade complexa i . Mais especificamente, o problema parece vir do fato de que se aplicarmos tal rotação duas vezes seguidas obteremos uma rotação de 2π , o que simplesmente retomará o objeto rotacionado

de volta ao seu estado original. Isso aparentemente equivale a dizer que $\mathbf{i}^2 = 1$ em vez do esperado $\mathbf{i}^2 = -1$. É aqui que a (consideravelmente sutil e essencial) noção matemática de espinor surge como sendo (PENROSE, 2007) fundamentalmente um objeto que, quando rotacionado de 2π , torna-se seu negativo, precisando de uma rotação de 4π para retomá-lo novamente. Isso é algo fundamental para a mecânica quântica de partículas básicas como os elétrons, prótons e neutrons. De fato, as matrizes correspondentes às componentes do momento angular

$$\mathbf{L}_1 = \frac{\hbar}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}; \quad \mathbf{L}_2 = \frac{\hbar}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}; \quad \mathbf{L}_3 = \frac{\hbar}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\sigma_3}, \quad (1)$$

chamadas (sem o termo $\hbar/2$) de matrizes de Pauli, satisfazem relações de comutação similares às relações entre os elementos quaterniônicos $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Com efeito, pode-se identificar os quatérnions com as matrizes de Pauli da seguinte maneira: (VAZ JR., 1997)

$$\mathbf{i} \rightarrow -i\sigma_1; \quad \mathbf{j} \rightarrow -i\sigma_2; \quad \mathbf{k} \rightarrow -i\sigma_3. \quad (2)$$

Pesquisar sobre espinores é pesquisar sobre algo extremamente importante que ainda não entendemos completamente. É quase impossível apresentar de modo enfático a importância de campos espinoriais em nosso entendimento de fenômenos físicos. Funções de onda de férmions são objetos espinoriais. Dito de outra forma, a matéria ordinária em nosso universo não existiria sem suas consequências. Campos espinoriais constituem ferramenta irremediavelmente essencial sem as quais a física de partículas fermiônicas em altas energias não pode ser descrita (BEGHETTO; CAVALCANTI; SILVA, 2018). A estrutura algébrica geral por detrás do conceito de espinor tem aplicações que vão de física de partículas, passando por matéria condensada, indo até a cosmologia.

Gostaríamos de levantar um ponto importante sobre o estudo formal de espinores em física. Em alguns casos, de fato é irrelevante a questão de se entender um espinor como uma intrincada definição de seção de um fibrado específico ou como um simples objeto que se transforma como uma matriz coluna de quatro componentes que carrega uma representação irredutível de $SL(2, \mathbb{C})$, contanto que se possa encontrar uma concordância com dados observáveis de interesse. No entanto, uma abordagem pragmática, embora bastante satisfatória e aceitável em alguns casos, nem sempre é livre da estreiteza do laconismo: muitas vezes a ênfase formal leva a outras possibilidades que não as destacadas por meio da abordagem usual. Tal pensamento inclinado ao formalismo permeia as páginas dessa tese.

Em um alto grau de acurácia, o espaço-tempo em que habitamos pode ser tomado como sendo uma variedade M , suave, dotada de uma métrica Lorentziana da Relatividade (Especial ou Geral) de Einstein (PENROSE; RINDLER, 1987). Para objetos espinoriais existirem em M , são necessárias restrições específicas sobre sua topologia. Quando tais restrições são satisfeitas, M é dita ter estrutura spin, e espinores podem ser definidos. A quantidade de configurações espinoriais possíveis é determinada pela estrutura topológica do espaço-tempo e será, de forma geral, maior do que somente uma para o caso de tomarmos M multiplamente conexo (ISHAM, 1978a; ISHAM, 1978b; FORD, 1980). Em outras palavras, nesse caso dizemos que M tem topologia não-trivial, e podemos definir mais de um tipo de

espinor além do usual. Os chamados espinores *twisted* surgiram primeiramente em 1978 no contexto da teoria quântica de campos e, particularmente, gravitação quântica (ISHAM, 1978a; ISHAM, 1978b). No ano seguinte, introduziu-se a noção de espinores exóticos (PETRY, 1979) em supercondutividade. Em ambos os casos, a característica essencial é a topologia não-trivial do espaço em consideração.

De fato, existem tantas estruturas de spin inequivalentes quantos são os elementos do chamado primeiro grupo de cohomologia $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ (ISHAM, 1978a; ISHAM, 1978b; PETRY, 1979; ASSELMeyer-MALUGA; BRANS, 2007). Tal grupo pode ser encarado como, de certo modo, representando os caminhos fechados (laços) inequivalentes não-triviais¹ e combinações destes. Talvez uma forma simples de visualizar o problema é por meio da noção de que em espaços com topologia não-trivial existe um grau de liberdade adicional para partículas fermiônicas (ASSELMeyer; HESS, 1995). Intuitivamente, pode-se entender esse grau de liberdade extra da seguinte maneira: espinores podem ser “contorcidos”² em torno de caminhos fechados não-triviais. Tem-se, a princípio, “classicamente” a ideia de tais espinores descrevendo partículas diferentes. Em contrapartida, “quanticamente” é possível a existência de uma soma de todas as possibilidades. Tal raciocínio é mais próximo da referência (AVIS; ISHAM, 1979). Ademais, em um notável trabalho (PETRY, 1979), Petry percebeu que é possível “traduzir” os diferentes espinores para um mesmo fibrado da variedade. Essencialmente, os espinores contorcidos se comportam como espinores usuais após a “tradução”, com a diferença sendo refletida na conexão agindo sobre os novos espinores, a qual é modificada recebendo um termo adicional (que recebe o nome de termo exótico) representando o efeito da topologia não-trivial ou, mais precisamente, um elemento de $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$. Esses espinores contorcidos “traduzidos” são os espinores exóticos.

Comentando, agora, mais sobre tais objetos para além de sua rigidez matemática, a geração da não-trivialidade do espaço-tempo (e, conseqüentemente, a possibilidade do surgimento de espinores exóticos nesse contexto) pode ser totalmente relacionada à existência de buracos negros (SILVA; VILLALOBOS; ROCHA, 2016). Isso fornece uma situação interessante para se conhecer mais sobre os espinores exóticos em um terreno físico. No Capítulo 3 exploraremos essa conexão, desenvolvendo ainda mais esse ponto de vista e aplicando a construção resultante na investigação de um sistema físico que acreditamos poder servir como um laboratório interessante para examinar questões sobre a topologia não-trivial, suas variações e impacto em física de altas energias. A ideia é explorar em um nível físico uma consequência de relacionar a variação temporal do termo exótico³ com a emissão de radiação Hawking de buracos negros. Ainda, entendendo a própria existência dos buracos negros como engendrando a não-trivialidade das topologias, investigamos como os extremos da taxa de emissão de espinores exóticos são influenciados por variações quase-adiabáticas da área superficial do buraco negro.

É pertinente salientar que nem todo espinor possui uma contrapartida exótica. Um exemplo de uma classe de campos espinoriais cuja existência depende da topologia do espaço-tempo ser topologicamente trivial é tratada nessa tese, classe essa constituída do que chamamos de espinores

¹ Tais caminhos fechados não-triviais são o que determinam a não-trivialidade da topologia da variedade. Pode-se entendê-los como “círculos” no espaço considerado que não podem ser contraídos a um ponto.

² Justificando a alcunha de espinor *twisted*.

³ E, portanto, da dinâmica de férmions exóticos, já que o termo exótico altera a derivada covariante associada ao espinor.

restritos de Inomata-McKinley, ou, de forma abreviada, espinores RIM. Tomando licença para supor que o leitor desconheça tais campos espinoriais, de forma a podermos apropriadamente fornecer um razoável primeiro contato com tais objetos nos remetemos, de início, a teoria não-linear de espinores proposta por Werner Heisenberg. Em uma série de artigos (DURR W. HEISENBERG; YAMAZAKI, 1959; HEISENBERG, 1984; HEISENBERG, 1957)⁴, Heisenberg examinou uma proposta de uma completa teoria quântica de campos e partículas elementares. Tal ambicioso programa, ainda que não obteve o êxito esperado inicialmente, exhibe uma interessante equação não-linear de movimento para campos espinoriais a qual chamamos de equação (não-linear) de Heisenberg e possui soluções que recebem, naturalmente, o nome de espinores de Heisenberg. Posteriormente, Inomata e McKinley apresentaram uma solução particular da equação de Heisenberg na forma de ondas planas (INOMATA; MCKINLEY, 1965). Mais especificamente, nesse trabalho, cujo tema é o estudo de uma teoria geométrica para neutrinos, os autores mostram que a equação de Heisenberg, em certas condições, se revela ser a equação dinâmica para o neutrino. As soluções dessa equação são chamadas de espinores de Inomata-McKinley e compõem uma solução de ondas planas para a equação de Dirac não massiva⁵.

Mais recentemente, Novello retoma o assunto (NOVELLO, 2007a), anunciando uma subclasse das soluções desenvolvidas por Inomata e McKinley: os espinores RIM. Assim, tais espinores são particulares espinores de Heisenberg. Ainda, é mostrado que um neutrino (possivelmente massivo ou não) que satisfaz a equação de Dirac pode ser descrito como uma deformação de espinores RIM. Dito de outra forma, Novello prova que certos espinores de Dirac podem ser decompostos como combinações das componentes dos espinores RIM, evidenciando uma estrutura espinorial linear representada por meio de campos não-lineares. Tal decomposição permitiria um possível entendimento das oscilações de tipos de neutrino sem a necessidade de se assumir que esse processo é uma demonstração de que neutrinos são partículas massivas, pois apresentaria um mecanismo de oscilação ocorrendo para possíveis neutrinos sem massa (NOVELLO, 2007a).

À parte o ponto de vista do estudo de neutrinos, as estruturas algébricas subjacentes aos espinores não-lineares RIM compõem tema com relativamente pouco estudo desenvolvido. Como comentado no início desse capítulo, a preocupação com o lado mais formal acerca dos campos espinoriais (além de seu intrínseco interesse matemático) pode revelar possibilidades físicas não antes aparentes. Dado o aspecto físico relevante dos espinores de Dirac, em particular tais utilizados na decomposição citada no parágrafo anterior, decerto se faz útil o conhecimento sobre quais tipos de campo de Dirac podem ser utilizados nesse contexto. De fato, existem (física e geometricamente) diferentes espinores possíveis no espaço-tempo 4-dimensional satisfazendo a equação de Dirac. Lounesto (LOUNESTO, 2001) criou uma categorização de espinores particularmente importante, que classifica os campos espinoriais em seis classes disjuntas por meio de seus bilineares covariantes, os quais são estruturas algébricas estritamente relacionadas aos observáveis físicos. Dessa forma, no Capítulo 4 apresentamos nosso estudo detalhado sobre os bilineares covariantes associados aos espinores de Dirac decompostos em termos de espinores RIM, organizando-os segundo a classificação de Lounesto. Isso nos fornece informações sobre auto-interações e seus possíveis acoplamentos com

⁴ E outras referências citadas nestes artigos, em especial as seis primeiras em (HEISENBERG, 1957).

⁵ Inomata e McKinley, nesse mesmo artigo, afirmam que o termo geral “neutrino” pode ser utilizado para qualquer campo de Dirac sem massa.

outros campos. Ainda, desenvolvemos uma completa categorização, segundo as classes de Lounesto, de todos os possíveis campos espinoriais passíveis de decomposição em espinores RIM (os quais chamamos de espinores RIM-decomponíveis). Outros resultados relacionando espinores de Heisenberg e a classificação de Lounesto podem ser encontrados em (ARCODÍA; BELLINI; ROCHA, 2019). Mantendo-nos nessa linha de classificação de espinores, ainda no Capítulo 4 colaboramos para o processo do entendimento das propriedades algébricas das estruturas espinoriais apresentando um método de separação dos espinores RIM-decomponíveis em classes de homotopia.

Finalizamos esse texto introdutório com uma breve descrição dos conteúdos de cada um dos capítulos seguintes, visando auxiliar na organização da leitura desse trabalho.

No Capítulo 2 abordamos os resultados matemáticos preliminares⁶ que nos levarão de forma suficientemente consistente a entender os principais objetos tratados nesta tese. Mais especificamente, este capítulo fornece aparato necessário para que espinores sejam definidos, assim como apresenta de forma concisa os conceitos de homotopias e de grupo fundamental de uma variedade, importantes quando tratarmos da topologia do espaço-tempo (e conseqüentemente da construção dos espinores exóticos) além de compor ferramenta necessária para compreensão dos resultados apresentados sobre espinores RIM. O Capítulo 3 é dividido em três Seções bem definidas: a primeira apresenta a construção formal de um espinor por meio de duas abordagens distintas e complementares, as quais chamamos de intuitiva e algébrica. Em conjunto, ambas assentam sólida base para definirmos os espinores exóticos na segunda Seção. Nossa contribuição, neste Capítulo, encontra-se na última Seção, na qual apresentamos resultados relacionando estruturas espinoriais exóticas e o comportamento de buracos negros em Relatividade Geral, em especial estudando variações de taxas de emissão de radiação Hawking.

Podemos dizer que esta tese possui duas “frentes”, ainda que relacionadas, sendo o Capítulo 3 a primeira delas e o Capítulo 4 a segunda, em que tratamos dos espinores RIM. A Seção que inicia este Capítulo é basicamente uma breve revisão da literatura sobre este tipo de espinor, adicionada da explicação detalhada do motivo do termo RIM ser utilizado para tais, termo este cunhado por nós. As Seções que se seguem são resultados de nossa autoria. A estreita relação entre a possibilidade de existência de espinores RIM e a topologia do espaço-tempo é estudada (de fato, deduzida) na segunda Seção, fazendo a ligação entre as duas frentes da tese, sendo a Seção seguinte reservada para a apresentação de resultados algébricos acerca de tais campos espinoriais. Finalmente, no Capítulo 5 apresentamos nossas conclusões e discutimos o que foi visto ao longo desse trabalho, com comentários acerca de atividades futuras.

Gostaríamos de dizer que nossas contribuições autorais apresentadas aqui foram originalmente publicadas em três artigos escritos ao longo do tempo de doutoramento do autor (BEGHETTO; SILVA, 2017; BEGHETTO; CAVALCANTI; SILVA, 2018; BEGHETTO; ROGERIO; VILLALOBOS, 2019).

É oportuno deixar claro que esta tese foi construída pensando-se em ser o mais didático possível, tanto em sua escrita micro-formal quanto sua organização macro-formal. Contudo, ainda que sempre objetivando um texto auto-contido, referências complementares são deixadas para consulta sobre o que não pôde ser escrito nestas páginas devido à imensa profundidade da área. Dito isso, vamos adiante.

⁶ Fazendo jus ao nome do Capítulo.

2 PRELIMINARES MATEMÁTICAS

Este capítulo é reservado a uma breve (re)visão dos principais aspectos matemáticos necessários para o pleno entendimento de muito do que é tratado nesta tese. O conteúdo aqui abordado se encontra de forma sintetizada e resumida, e integra o início deste trabalho com um caráter de completude, procurando ser didático principalmente àqueles não acostumados com o tema¹.

Muito do tratado nesse trabalho utiliza uma linguagem que muitas vezes não é de satisfatório conhecimento de alguns físicos que possam vir a se interessar pelo trabalho desenvolvido ao longo dessa tese. Isso amplia a justificativa do conteúdo abarcado neste capítulo como também uma espécie de complemento teórico para o eventual estudante se iniciando nesta área de pesquisa.

A ideia é de um formato de escrita que seja capaz de deixar o leitor com as ferramentas necessárias para o entendimento do que vem nos capítulos seguintes. Assim, pode-se tanto ler este capítulo antes dos outros (num fluxo natural de leitura dada a ordem de apresentação dos capítulos) quanto iniciar pelo capítulo seguinte e retornar aqui sempre que sentir a necessidade de um complemento matemático. Que o leitor tenha, de qualquer maneira, este capítulo como um porto seguro teórico onde possa se apoiar durante a compreensão do conteúdo da tese.

O mote principal da inicial Seção 2.1 é a construção formal de uma variedade suave. Este é um conceito base para o que será tratado na Seção 2.2, que se inicia com a definição geral de fibrado e é construída levando o leitor ao conceito de fibrado associado. Entender o que é um fibrado associado é substancial na construção do fibrado espinorial, que será tratado no capítulo seguinte. Ainda nesse contexto, uma construção explícita do grupo *Spin* é fornecida na Seção 2.3. Homotopias e o grupo fundamental de uma variedade topológica são conceitos de suma importância em vários pontos desta tese e são apresentados na Seção 2.4, encerrando este capítulo.

O que é apresentado aqui é baseado nas referências (LIMA, 1970; BINZ; SNIATYCKI; FISCHER, 1988; FORGER; JR, 2011; SCHULLER, 2016; LIMA, 2012a; VAZ; ROCHA, 2012).

2.1 VARIEDADES TOPOLÓGICAS SUAVES

2.1.1 Variedades topológicas

Para podermos definir uma variedade topológica começaremos definindo o conceito de espaço topológico.

Definição 1 (Topologia e Espaço topológico). *Sejam M um conjunto e $\mathcal{P}(M)$ o conjunto das partes de M . Uma topologia em M é um conjunto $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(M)$ tal que:*

$$(i) \emptyset, M \in \mathcal{O};$$

$$(ii) U, V \in \mathcal{O} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{O};$$

$$(iii) C_i \in \mathcal{O}, i \in \mathcal{I} \Rightarrow \cup_{i \in \mathcal{I}} C_i \in \mathcal{O},$$

¹ Classe de leitores em que o próprio autor figurava no início de seu doutorado.

em que \mathcal{I} é um conjunto de índices. O par (M, \mathcal{O}) é dito um espaço topológico² (com topologia \mathcal{O}).

Chamamos os elementos da topologia \mathcal{O} de *abertos* do espaço. Uma específica topologia será importante no entendimento do que veremos adiante. Estamos falando da topologia produto, definida a seguir:

Definição 2 (Topologia produto). *Sejam (A, \mathcal{O}_A) e (B, \mathcal{O}_B) espaços topológicos. Então, o conjunto $\mathcal{O}_{A \times B}$, definido implicitamente por*

$$U \in \mathcal{O}_{A \times B} :\Leftrightarrow \forall p \in U, \exists (S, T) \in \mathcal{O}_A \times \mathcal{O}_B : S \times T \subseteq U,$$

é uma topologia em $A \times B$, chamada de topologia produto.

Veremos agora uma propriedade de separação de pontos em um espaço, que faz com que nos restrinjamos a um tipo específico de espaço topológico.

Definição 3 (Espaço Hausdorff). *Um espaço topológico (M, \mathcal{O}) é dito ser Hausdorff se, para quaisquer dois pontos distintos $p, q \in M$, existem vizinhanças abertas disjuntas $U(p)$ e $V(q)$ de p e q , respectivamente. Ou seja,*

$$\forall p, q \in M : p \neq q \Rightarrow \exists U(p), V(q) \in \mathcal{O} : U(p) \cap V(q) = \emptyset.$$

Abaixo seguem as definições de cobertura (aberta) e subcobertura (finita), necessárias para definirmos, depois, o que é a compacidade de um espaço topológico.

Definição 4 (Cobertura e cobertura aberta). *Seja (M, \mathcal{O}) um espaço topológico. Diremos que um conjunto $C \subseteq \mathcal{P}(M)$ é uma cobertura (de M) se a união de elementos de C é igual ao espaço M , ou seja, $\cup C = M$. Ainda, se $C \subseteq \mathcal{O}$, então C é uma cobertura aberta (de M).*

Definição 5 (Subcobertura e Subcobertura finita). *Seja C uma cobertura. Qualquer subconjunto $\tilde{C} \subseteq C$ tal que \tilde{C} é também uma cobertura é chamada de Subcobertura. Também, \tilde{C} é dita ser finita se é finita como conjunto.*

Agora estamos aptos a definir um espaço compacto:

Definição 6 (Espaço compacto). *Um espaço topológico é dito ser compacto se toda cobertura aberta tem uma subcobertura finita.*

Podemos refinar, em um certo sentido, as coberturas de um espaço. Isto está mais claro na definição que se segue:

Definição 7 (Refinamento, Refinamento aberto e Refinamento localmente finito). *Sejam (M, \mathcal{O}) um espaço topológico e C uma cobertura desse espaço. Um refinamento de C é uma cobertura R tal que $\forall U \in R \Rightarrow \exists V \in C : U \subseteq V$. Ainda, R é dito ser:*

(i) *aberto, se $R \subseteq \mathcal{O}$;*

² Diremos, por vezes, que “ M é um espaço topológico” quando alguma topologia \mathcal{O} em M é assumida.

(ii) *localmente finito*, se para qualquer $p \in M$ existe uma vizinhança $U(p)$ tal que o conjunto $\{U \in \mathcal{R} \mid U \cap U(p) \neq \emptyset\}$ é finito como um conjunto.

Vamos definir, agora, uma propriedade de espaços topológicos mais fraca do que ser “compacto”, que é a seguinte:

Definição 8 (Paracompacto). *Um espaço topológico (M, \mathcal{O}) é dito ser paracompacto se toda cobertura aberta tem um refinamento localmente finito.*

Um corolário direto da definição acima é que todo espaço topológico compacto é paracompacto.

Com as definições anteriores devidamente assimiladas, podemos agora definir uma variedade topológica:

Definição 9 (Variedade). *Um espaço topológico (M, \mathcal{O}) paracompacto e Hausdorff é chamado de variedade (topológica) d -dimensional se para cada ponto $p \in M$ existir uma vizinhança $U(p)$ e um homeomorfismo³ $x : U(p) \rightarrow x(U(p)) \subseteq \mathbb{R}^d$.*

Intuitivamente, uma variedade d -dimensional é um espaço topológico que é localmente (isto é, em torno de cada ponto) parecido com o \mathbb{R}^d . Note também que, estritamente falando, o que definimos acima foram variedades topológicas reais. Poderíamos definir variedades topológicas complexas simplesmente exigindo que o homeomorfismo x seja $x : U(p) \rightarrow X(U(p)) \subseteq \mathbb{C}^d$.

Para finalizar a presente subseção, definiremos o conceito de variedade produto, que será de suma importância quando falarmos de fibrados mais adiante.

Definição 10 (Variedade produto). *Sejam (M, \mathcal{O}_M) e (N, \mathcal{O}_N) variedades topológicas de dimensão m e n , respectivamente. Então, $(M \times N, \mathcal{O}_{M \times N})$ é uma variedade topológica de dimensão $m + n$ chamada variedade produto.*

2.1.2 Estruturas diferenciáveis

Nesta subseção iremos definir uma variedade suave, que é um dos conceitos-chave para o pleno entendimento das estruturas espinoriais, dos fibrados espinoriais e, por consequência, do que são espinores. De início, vamos olhar as variedades por meio de uma estrutura chamada atlas. Para este fim, começaremos definindo o que é uma carta.

Definição 11 (Carta). *Seja (M, \mathcal{O}) uma variedade d -dimensional. Então, um par (U, x) (tal que $U \in \mathcal{O}$ e $x : U \rightarrow x(U) \subseteq \mathbb{R}^d$ é um homeomorfismo) é dito ser uma carta para a variedade.*

Uma observação importante é a seguinte: as funções (ou mapas) componentes do homeomorfismo x são os mapas

$$\begin{aligned} x^i : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \text{proj}_i(x(p)) \end{aligned}$$

³ Isto é, uma bijeção contínua com inversa contínua de espaços topológicos.

para $i \in \{1, \dots, d\}$, em que $\text{proj}_i(x(p))$ é a i -ésima componente de $x(p) \subseteq \mathbb{R}^d$. Os $x^i(p)$ são chamados de coordenadas do ponto $p \in U$ com respeito a carta (U, x) .

Sabendo o que são cartas, vamos definir um atlas:

Definição 12 (Atlas). *Um atlas de uma variedade M é uma coleção $\mathcal{A} := \{U_\alpha, x_\alpha\} | \alpha \in A\}$ de cartas tais que $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$, em que A é um conjunto de índices.*

Podemos falar se duas cartas são compatíveis ou não, no seguinte sentido:

Definição 13 (C^0 -compatibilidade de cartas). *Duas cartas (U, x) e (V, y) são ditas C^0 -compatíveis se $U \cap V = \emptyset$ ou o mapa $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ é contínuo.*

O mapa $y \circ x^{-1}$ (e seu inverso $x \circ y^{-1}$) são chamados de mapas de mudança de coordenadas, ou mapas de transição de cartas.

Note que $y \circ x^{-1}$ é um mapa entre subconjuntos de \mathbb{R}^d . Também, perceba que como x e y são homeomorfismos (logo contínuos), a composição também é um homeomorfismo (logo também contínuo). Então duas cartas em uma variedade são sempre C^0 -compatíveis. Entretanto, embora esta definição pareça ser extremamente redundante⁴, ela serve como motivação para mais adiante, quando a refinaremos para entendermos o que é diferenciabilidade em variedades em termos do que chamaremos de C^k -compatibilidade de cartas.

Das definições (12) e (13), definimos o seguinte:

Definição 14 (C^0 -atlas). *Um C^0 -atlas de uma variedade é um atlas de cartas que são C^0 -compatíveis duas-a-duas.*

Pelo mesmo motivo da discussão anterior a esta definição, nota-se que todo atlas é um C^0 -atlas. Enfim, chegamos a definição de um atlas maximal:

Definição 15 (Atlas maximal). *Um C^0 -atlas \mathcal{A} é dito ser um atlas maximal se, para cada $(U, x) \in \mathcal{A}$, temos $(V, y) \in \mathcal{A}$ para todas as cartas (V, y) que são C^0 -compatíveis com (U, x) .*

Finalizando esta inicial exposição motivacional, antes de começarmos a falar de diferenciabilidade, vamos discutir sobre o que obtivemos: podemos, agora, olhar para “objetos” em variedades topológicas de dois pontos de vista. Por exemplo, considere uma curva em uma variedade d -dimensional M (ou seja, um mapa $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$). Ao nos questionarmos sobre a continuidade da curva⁵ γ , a resposta pode ser dada de duas formas. A primeira delas é que $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ é contínua se é contínua como um mapa entre os espaços topológicos \mathbb{R} e M (ou seja, olhamos para os abertos de \mathbb{R} e M). A segunda forma é a seguinte: consideramos apenas um pedaço (um aberto U) do espaço físico M e, em vez de estudarmos diretamente o mapa $\gamma : \text{preim}_\gamma(U) \rightarrow U$, vamos estudar o mapa $x \circ \gamma : \text{preim}_\gamma(U) \rightarrow x(U) \subseteq \mathbb{R}^d$, em que (U, x) é uma carta em M . Ou seja, checaríamos a continuidade da curva “real” $\gamma : \text{preim}_\gamma(U) \rightarrow U$ por meio da continuidade dos mapas de coordenadas $x^i \circ \gamma$.

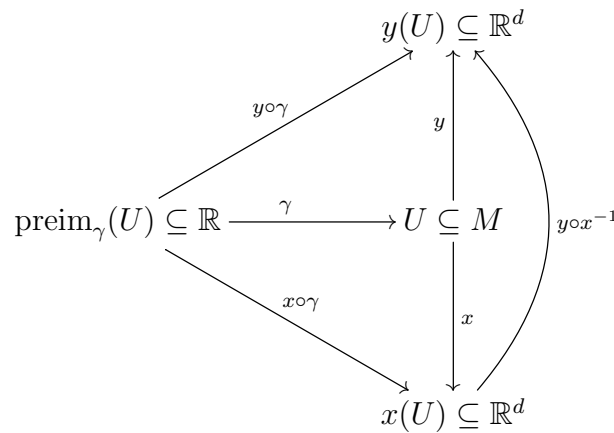
Em algum momento pode-se querer usar um “sistema de coordenadas” diferente para responder alguma outra questão. Nesse caso, poderia-se escolher uma carta diferente (U, y) e então estudar

⁴ E de fato é!

⁵ Pois esta deve ser contínua, se está modelando uma trajetória de uma partícula clássica no “espaço físico” M .

o mapa $y \circ \gamma$ ou seus mapas de coordenadas. Note, entretanto, que alguns resultados (como, por exemplo, a continuidade de γ) obtidos por meio da outra carta (U, x) podem ser “transportados” imediatamente para a nova carta (U, y) via mapa de transição $y \circ x^{-1}$. Ainda, o mapa $y \circ x^{-1}$ nos permite (intuitivamente falando) “esquecer” a estrutura interna (isto é, U e os mapas γ , x e y), que são de certo modo o “mundo real”, e somente considerar suas “coordenadas” (ou seja, $\text{preim}_\gamma(U)$ e $x(U), y(U) \subseteq \mathbb{R}^d$, juntos dos mapas entre eles), que são nossa representação do mundo real.

O diagrama abaixo ilustra o que foi discutido nos dois últimos parágrafos:



Continuando, vamos agora generalizar a noção de C^0 -atlas (mais precisamente, a noção de C^0 -compatibilidade de cartas):

Definição 16 (Generalização de compatibilidade de cartas). *Um atlas \mathcal{A} para uma variedade topológica é chamado de \star -atlas se quaisquer duas cartas $(U, x), (V, y) \in \mathcal{A}$ são \star -compatíveis.*

Sobre o símbolo \star na definição acima, temos que:

- $\star = C^0$: É a definição de compatibilidade que já havíamos visto.
- $\star = C^k$: Os mapas de transição são k -vezes continuamente diferenciáveis como mapas entre subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^{\dim M}$.
- $\star = C^\infty$: Os mapas de transição são suaves; ou equivalentemente, o atlas é C^k para todo $k \geq 0$.

O que segue agora é um importante teorema, devido ao matemático Hassler Whitney, sobre a relação entre um C^k -atlas maximal e C^∞ -atlas:

Teorema 1 (Hassler Whitney). *Qualquer C^k -atlas maximal, com $k \geq 1$, contém um C^∞ -atlas. Ainda, quaisquer dois C^k -atlas maximais que contêm o mesmo C^∞ -atlas são idênticos.*

Uma implicação imediata reside no fato que, se pudermos encontrar um C^1 -atlas para uma variedade, então poderemos também assumir a existência de um C^∞ -atlas para tal variedade. Então se tivermos um C^1 -atlas podemos obter um C^∞ -atlas simplesmente removendo cartas, deixando somente as que são C^∞ -compatíveis. Desse modo, aqui não distinguiremos C^k -variedades e C^∞ -variedades (no sentido descrito nesse parágrafo).

Definição 17 (Estrutura diferenciável). *Um C^k -atlas maximal é chamado de estrutura diferenciável para uma variedade.*

Definição 18 (C^k -variedades). *Uma C^k -variedade é uma tripla $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$, em que (M, \mathcal{O}) é uma variedade topológica e \mathcal{A} é um C^k -atlas maximal.*

Assim, montamos uma variedade suave (ou C^∞ -variedade) equipando uma variedade com uma estrutura diferenciável dada pelo C^k -atlas maximal.

Já demos a definição de compatibilidade de cartas, mas ainda não a de atlas. Ei-la:

Definição 19 (Compatibilidade de atlas). *Dois \star -atlas \mathcal{A} e \mathcal{B} são compatíveis se a união $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é, de novo, um \star . Caso contrário, são incompatíveis.*

Definição 20 (Mapas C^k -diferenciáveis). *Seja $\phi : M \rightarrow N$ um mapa, em que $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$ e $(N, \mathcal{O}_N, \mathcal{A}_N)$ são C^k -variedades. Então, ϕ é dita ser C^k -diferenciável em $p \in M$ se para algumas cartas $(U, x) \in \mathcal{A}_M$ (com $p \in U$) e $(V, y) \in \mathcal{A}_N$ (com $\phi(p) \in V$) o mapa $y \circ \phi \circ x^{-1}$ é k -vezes continuamente diferenciável em $x(p) \in x(U) \subseteq \mathbb{R}^{\dim M}$ no sentido usual.*

Apesar de termos, na definição acima, exigido somente que algumas cartas de dois atlas satisfaçam a propriedade enunciada, não devemos nos preocupar com uma aparente dependência, com relação à definição, das cartas escolhidas: pode-se demonstrar que este “levantamento” da noção de diferenciabilidade (da representação de cartas de ϕ para o nível da variedade) está, felizmente, bem-definida.

O caso de interesse aqui é o de C^∞ -variedades, que está relacionado a mapas suaves. Para tal caso, a análoga definição vale, com também análoga boa-definição de suavidade.

2.2 FIBRADOS, FIBRADOS PRINCIPAIS E FIBRADOS ASSOCIADOS

2.2.1 Fibrados

Produtos de variedades são úteis: é comum, em física, pensar intuitivamente em um produto de duas variedades anexando uma cópia da segunda variedade a cada ponto da primeira. Entretanto, nem toda variedade interessante pode ser entendida como produto de variedades.

Definição 21 (Fibrado (*Bundle*)). *Um fibrado (de variedades topológicas) é uma tripla (E, π, M) , em que E e M são variedades chamadas, respectivamente, de espaço total e espaço base, e $\pi : E \rightarrow M$ é um mapa contínuo e sobrejetivo chamado de mapa de projeção.*

Por vezes, denotamos (E, π, M) como $E \xrightarrow{\pi} M$. Continuando, vamos falar o que é uma fibra sobre um ponto do espaço base.

Definição 22 (Fibra). *Sejam $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado e $p \in M$. Então, $F_p := \text{preim}_\pi(\{p\})$ é chamado de fibra sobre o ponto p .*

Intuitivamente, uma fibra no ponto $p \in M$ é um conjunto de pontos em E anexado ao ponto p . O mapa de projeção manda os pontos da fibra F_p ao ponto p . Um exemplo trivial de um fibrado (*bundle*) é

o fibrado-produto: sejam M e N variedades. Então, a tripla $(M \times N, \pi, M)$ tal que $\pi : M \times N \rightarrow M$ é definido como $\pi(p, q) = p$ é um fibrado, pois facilmente verifica-se que π é contínuo e sobrejetivo. Analogamente, $(M \times N, \pi, N)$ também é um fibrado (com π propriamente definido).

A definição (21) pode ser refinada no seguinte sentido:

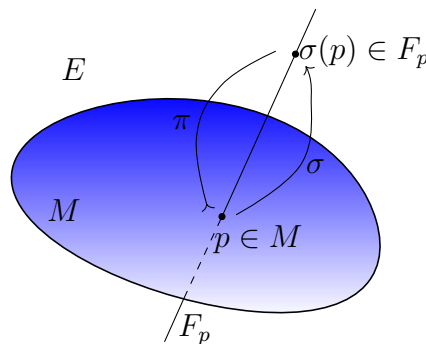
Definição 23 (Fibrado (*Fibre bundle*)). Sejam $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado (*bundle*) e F uma variedade. Assim, $E \xrightarrow{\pi} M$ é dito ser um fibrado (*fibre bundle*), com chamada fibra típica F , se para todo $p \in M$ tem-se $\text{preim}_{\pi}(\{p\}) \cong_{\text{top}} F$, em que \cong_{top} significa “homeomorfo a”.

Um caso de muito interesse é o chamado fibrado vetorial, que é um fibrado, neste novo sentido, com fibra típica F possuindo estrutura de espaço vetorial. Outro exemplo é o fibrado \mathbb{C} -linear sobre M , que é um fibrado (E, π, M) com fibra \mathbb{C} . O termo “linear” aqui vem do fato que $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$.

Definição 24 (Seção (*cross-section*) de um fibrado). Seja (E, π, M) um fibrado. Um mapa $\sigma : M \rightarrow E$ é dito ser uma seção do fibrado se $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$, em que id_M é a aplicação identidade em M .

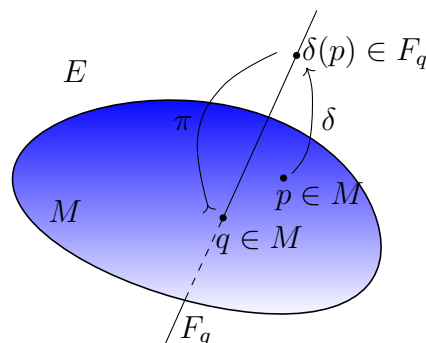
De forma intuitiva, uma seção é um mapa σ que manda cada ponto $p \in M$ para algum ponto $\sigma(p)$ em sua fibra F_p , tal que o mapa de projeção π leva $\sigma(p) \in F_p \subseteq E$ de volta para o ponto $p \in M$. Nos exemplos ilustrados nas Figuras 1 e 2 a seguir, δ não é uma seção (pois $\pi \circ \delta \neq \text{id}_M$), enquanto σ é uma seção (pois $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$).

Figura 1 – Noção intuitiva: o mapa $\sigma : M \rightarrow E$ é uma seção do fibrado (E, π, M) .



Fonte: Produção própria do autor.

Figura 2 – Noção intuitiva: o mapa $\delta : M \rightarrow E$ não é uma seção do fibrado (E, π, M) .



Fonte: Produção própria do autor.

Precisaremos falar sobre o que é considerar um fibrado “igual” a um outro. Antes disso, vamos definir um morfismo de fibrados:

Definição 25 (Morfismo de fibrados). *Sejam $E \xrightarrow{\pi} M$ e $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ fibrados, e sejam $u : E \rightarrow E'$ e $v : M \rightarrow M'$ mapas. Então (u, v) é chamado de morfismo de fibrados se o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{v} & M' \end{array}$$

ou seja, se $v \circ \pi = \pi' \circ u$.

Assim, vamos definir um mapa de fibrados que preserva suas estruturas:

Definição 26 (Isomorfismo de fibrados). *Dois fibrados $E \xrightarrow{\pi} M$ e $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ são ditos isomorfos (como fibrados) se existem dois morfismos de fibrados (u, v) e (u^{-1}, v^{-1}) tais que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{u^{-1}} \xrightarrow{u} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xleftarrow{v^{-1}} \xrightarrow{v} & M' \end{array}$$

é satisfeito. O par (u, v) é chamado de isomorfismo de fibrados e escrevemos $E \xrightarrow{\pi} M \cong_{\text{bdl}} E' \xrightarrow{\pi'} M'$.

Definição 27 (Isomorfismo local). *Um fibrado (E, π, M) é dito ser localmente isomorfo (como fibrado) a um fibrado (E', π', M') se para todo $p \in M$ existe uma vizinhança $U(p)$ tal que o fibrado restrito $(\text{preim}_{\pi}(U(p)), \pi|_{\text{preim}_{\pi}(U(p))}, U(p))$ é isomorfo ao fibrado (E', π', M') .*

Com isso, definiremos trivialidade global e local de um fibrado:

Definição 28. *Um fibrado (E, π, M) é dito ser:*

- (i) *trivial, se é isomorfo a um fibrado-produto;*
- (ii) *localmente trivial, se é localmente isomorfo a um fibrado-produto.*

Faremos uma observação fisicamente importante: em mecânica quântica, o que usualmente é chamado de “função de onda” não é de fato uma função, mas sim uma seção de um fibrado \mathbb{C} -linear sobre um espaço físico. Entretanto, se assumirmos que o fibrado é localmente trivial, então cada seção do fibrado pode ser representado (localmente) por um mapa do espaço base para o espaço total, daí o termo “função de onda” se torna apropriado.

Daqui em diante, vamos considerar somente fibrados localmente triviais.

Para finalizar essa subseção, definiremos um fibrado suave:

Definição 29 (Fibrado suave). *Um fibrado suave é um fibrado (E, π, M) em que E e M são variedades suaves e o mapa de projeção $\pi : E \rightarrow M$ é suave.*

Analogamente ao caso mais geral, temos que dois fibrados suaves (E, π, M) e (E', π', M') são isomorfos se existem difeomorfismos⁶ u, f tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

2.2.2 Fibrados principais e Fibrados associados

Como introdução, podemos dizer que os fibrados principais são fibrados com grupo de Lie como fibra típica. São importantes pois nos permitem entender qualquer fibrado com fibra F no qual um grupo de Lie age, os chamados fibrados associados. É importante entendermos este conteúdo, pois fibrados espinoriais são fibrados associados, como veremos no capítulo seguinte. Começaremos, então, definindo o que é um grupo de Lie:

Definição 30 (Grupo de Lie). *Um grupo de Lie é um grupo (G, \bullet) em que G é uma variedade suave e os mapas*

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \bullet g_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} i : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

são ambos suaves.

Temos também que saber o que é uma ação de grupo de Lie:

Definição 31 (Ação de grupo de Lie à esquerda). *Sejam (G, \bullet) um grupo de Lie e M uma variedade suave. Uma aplicação suave*

$$\begin{aligned} \triangleright : G \times M &\rightarrow M \\ (g, p) &\mapsto g \triangleright p \end{aligned}$$

satisfazendo

$$(i) \quad \forall p \in M : e \triangleright p = p;$$

$$(ii) \quad \forall g_1, g_2 \in G, \forall p \in M : (g_1 \bullet g_2) \triangleright p = g_1 \triangleright (g_2 \triangleright p),$$

é chamado de uma ação de grupo de Lie à esquerda, ou simplesmente G -ação à esquerda, em M .

⁶ Ou seja, isomorfismos diferenciáveis entre fibrados.

Chamaremos uma variedade equipada com uma G -ação à esquerda de G -variedade à esquerda. Similarmente,

Definição 32 (Ação de grupo de Lie à direita). *Uma ação de grupo de Lie à direita (ou G -ação à direita) em M é uma aplicação suave*

$$\begin{aligned} \triangleleft : M \times G &\rightarrow M \\ (p, g) &\mapsto p \triangleleft g \end{aligned}$$

satisfazendo

$$(i) \quad \forall p \in M : e \triangleleft p = p;$$

$$(ii) \quad \forall g_1, g_2 \in G, \forall p \in M : p \triangleleft (g_1 \bullet g_2) = (p \triangleleft g_1) \triangleleft g_2.$$

Em particular, para $(p, g) \in M \times G$, se \triangleright é uma G -ação à esquerda, tem-se que $p \triangleleft g = g^{-1} \triangleright p$ é uma G -ação à direita em M .

Sobre G -variedades, uma interessante definição é a de aplicações equivariantes:

Definição 33 (Aplicações ρ -equivariantes). *Sejam G e H grupos de Lie, e $\rho : G \rightarrow H$ um homomorfismo de grupos. Também, sejam $\triangleleft : G \times M \rightarrow M$ e $\blacktriangleleft : H \times N \rightarrow N$ ações de G e H em variedades suaves M e N , respectivamente. Então, uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$ é dito ser ρ -equivariante se o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \xrightarrow{\rho \times f} & H \times N \\ \triangleleft \downarrow & & \downarrow \blacktriangleleft \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

com $(\rho \times f)(g, p) := (\rho(g), f(p)) \in H \times N$. De forma equivalente,

$$\forall g \in G, \forall p \in M : f(g \triangleleft p) = \rho(g) \blacktriangleleft f(p).$$

Em outras palavras, se $\rho : G \rightarrow H$ é um homomorfismo de grupos de Lie, então as aplicações ρ -equivariantes “preservam as ações” entre a G -variedade M e a H -variedade N .

Para conseguirmos entender a definição precisa de um fibrado principal, precisamos antes definir alguns conceitos envolvendo as ações de grupo.

Definição 34 (Órbita de um ponto). *Seja $\triangleright : G \times M \rightarrow M$ uma G -ação à esquerda. Para cada $p \in M$ definimos a órbita de p como o conjunto*

$$G_p := \{q \in M \mid \exists g \in G : q = g \triangleright p\}.$$

Podemos dizer que a órbita de p consiste de todos os pontos em M que podem ser alcançados de p por sucessivas aplicações da ação \triangleright . Ainda, se definirmos a relação \sim em M como

$$p \sim q :\Leftrightarrow \exists g \in G : q = g \triangleleft p,$$

então \sim é uma relação de equivalência, com classes de equivalência sendo, por definição, as órbitas. Dessa forma, definimos:

Definição 35 (Espaço das órbitas). *Seja $\triangleleft : G \times M \rightarrow M$ uma ação em M . O espaço das órbitas de M é*

$$M/G := M / \sim = \{G_p | p \in M\}.$$

Definição 36 (Estabilizador de um ponto). *Seja $\triangleright : G \times M \rightarrow M$ uma G -ação em M . O estabilizador de $p \in M$ é*

$$S_p := \{g \in G | g \triangleright p = p\}.$$

Note que para cada $p \in M$ o estabilizador S_p é um subgrupo de G .

Definição 37 (Ação livre). *Uma G -ação $\triangleright : G \times M \rightarrow M$ é livre se $\forall p \in M : S_p = \{e\}$.*

Pode-se mostrar que, se \triangleright é livre, então $\forall p \in M : G_p \cong_{dif} G$, ou seja, o espaço das órbitas de p é difeomorfo ao próprio G .

Agora temos o necessário para definirmos um fibrado principal:

Definição 38 (Fibrado G -principal). *Seja G um grupo de Lie. Um fibrado suave (E, π, M) é chamado de fibrado G -principal se E é equipado com uma G -ação livre à direita, e $(E, \pi, M) \cong_{bal} (E, \rho, E/G)$, em que ρ é o mapa quociente, definido como o mapa que manda cada $p \in M$ a sua classe de equivalência (isto é, sua órbita) no espaço das órbitas E/G .*

Note que, como a G -ação em E é livre na definição de um fibrado G -principal, então para cada $p \in E$ tem-se $\text{preim}_\rho(G_p) = G_p \cong_{dif} G$. Falamos no início dessa subseção que um fibrado principal é um fibrado cuja fibra em cada ponto é G . A definição formal que obtivemos agora é que um fibrado G -principal é um fibrado isomorfo a um fibrado cujas fibras são as órbitas sobre uma G -ação à direita, que sabemos serem isomorfas a G pelo fato da ação ser livre.

Agora, sejam M uma variedade suave e T_pM o espaço tangente ao ponto $p \in M$. Considere o espaço

$$L_pM := \{(e_1, \dots, e_{\dim M}) | e_1, \dots, e_{\dim M} \text{ é uma base de } T_pM\}.$$

Da álgebra linear temos que as bases de um espaço vetorial (nesse caso, T_pM) são relacionadas entre si por transformações lineares inversíveis, logo $L_pM \cong_{vec} GL(\dim M, \mathbb{R})$, em que \cong_{vec} significa “isomorfo como espaço vetorial a”. Assim, utilizando a notação \coprod para simbolizar a “união disjunta”⁷, temos a seguinte definição:

Definição 39 (Fibrado de referenciais). *O fibrado formado por $LM := \coprod_{p \in M} L_pM$ com mapa de projeção $\pi : LM \rightarrow M$ que relaciona cada base $(e_1, \dots, e_{\dim M}) \in L_pM$ a um único ponto $p \in M$ tal que $(e_1, \dots, e_{\dim M})$ é uma base de T_pM é chamado de fibrado de referenciais de M .*

⁷ Nesse caso essa notação não é necessária, pois tal união que faremos na definição para fibrados de referenciais é sempre disjunta. Porém, escolhemos utilizá-la para enfatizar tal disjunção.

Pode-se mostrar que, com uma ação apropriada definida para $G = GL(3, \mathbb{R})$ como grupo, tem-se que o fibrado de referenciais $LM \xrightarrow{\pi} M$ é um fibrado G -principal.

Encerrando esta subseção, dizemos que um fibrado associado é um fibrado que é associado (no sentido preciso) a um fibrado G -principal. Mais formalmente:

Definição 40 (Fibrado associado). *Sejam (P, π, M) um fibrado G -principal e F uma variedade suave equipada com uma ação de grupo à esquerda \triangleright . Definimos:*

(i) $P_F := (P \times F) / \sim_G$, em que \sim_G é a relação de equivalência

$$(p, f) \sim_G (p', f') : \Leftrightarrow \exists g \in G : \begin{cases} p' = p \triangleleft g \\ f' = g^{-1} \triangleright f. \end{cases}$$

Denotamos os pontos de P_F como $[p, f]$.

(ii) O mapa

$$\begin{aligned} \pi_F : P_F &\rightarrow M \\ [p, f] &\mapsto \pi(p). \end{aligned}$$

O fibrado associado (a (P, π, M) , F e \triangleright) é o fibrado (P_F, π_F, M) .

2.3 O GRUPO *Spin*

O chamado grupo *Spin* é de extrema importância na definição dos espinores. Aqui iremos apresentar uma construção de tal grupo. Para alcançar tal objetivo, definiremos o que são as álgebras exterior, de Grassmann e de Clifford, para então construirmos o chamado grupo de Clifford-Lipschitz e apresentar, finalmente, um importante subgrupo que é o grupo *Spin*.

2.3.1 Álgebra exterior e álgebra de Grassmann

Seja σ uma permutação de um conjunto $P = \{1, 2, \dots, p\}$ de p elementos, ou seja, uma aplicação bijetora $\sigma : P \rightarrow P$. Definimos o sinal de σ por

$$\epsilon(\sigma) = \begin{cases} +1, & \text{se } \sigma \text{ é par,} \\ -1, & \text{se } \sigma \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Considere um tensor da forma $X_1 \otimes X_2 \otimes \dots \otimes X_p$, em que X denota um vetor (ou um covetor) e os índices enumeram esses elementos. Desse modo, definimos o operador chamado de alternador, denotado por *Alt*, como

$$Alt(X_1 \otimes X_2 \otimes \dots \otimes X_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma) X_{\sigma(1)} \otimes X_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes X_{\sigma(p)},$$

em que S_p é o grupo simétrico, cujos $p!$ elementos são todas as combinações possíveis em P . Assim, podemos definir:

Definição 41 (p -vetor e espaço de p -vetores). *Um p -vetor, denotado por $A_{[p]}$, é um tensor contravariante de ordem p alternado, isto é, é tal que*

$$A_{[p]} = \text{Alt} (A_{[p]}).$$

Ainda, denotaremos por $\Lambda_p(V)$ o espaço dos p -vetores.

Podemos, sobre $\Lambda_p(V)$, definir um produto chamado produto exterior:

Definição 42 (Produto exterior). *Sejam $A_{[p]} \in \Lambda_p(V)$ e $B_{[q]} \in \Lambda_q(V)$. Definimos o produto exterior \wedge como*

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda_p(V) \times \Lambda_q(V) &\rightarrow \Lambda_{p+q}(V) \\ (A_{[p]}, B_{[q]}) &\mapsto \text{Alt} (A_{[p]} \otimes B_{[q]}). \end{aligned}$$

Agora, perceba que ao denotarmos o espaço vetorial $\Lambda(V) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda_p(V)$, podemos associar a $\Lambda(V)$ o produto exterior

$$\wedge : \Lambda(V) \times \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V), \quad (1)$$

e com isso definimos:

Definição 43 (Álgebra exterior). *O par $(\Lambda(V), \wedge)$, com \wedge definido pela equação (1), é denominado álgebra exterior do espaço vetorial V .*

Nessa álgebra podemos definir a operação chamada de involução graduada, denotada por $\#$ (ou por meio do símbolo \hat{x} para significar que a involução graduada está agindo sobre um elemento x), como

$$\# (A_{[p]}) = \hat{A}_{[p]} = (-1)^p A_{[p]},$$

e também a operação de reversão, denotada por meio do símbolo x^\sim sobre o elemento x a ser operado, e definida por

$$(\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p)^\sim = \mathbf{v}_p \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_1.$$

Podemos definir, sobre V , um funcional bilinear simétrico $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, e assim chamamos o par (V, g) de espaço quadrático. Além disso, é possível fazer uma extensão de g para todo o espaço vetorial $\Lambda(V)$. Denotemos tal extensão por G . Para o caso de p -vetores, ou seja, $G : \Lambda_p(V) \times \Lambda_p(V) \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir G por

$$G(\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_p) = \begin{pmatrix} g(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1) & \dots & g(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_p) \\ g(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1) & \dots & g(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g(\mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1) & \dots & g(\mathbf{v}_p, \mathbf{u}_p) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

enquanto que para $A_{[p]} \in \Lambda_p(V)$ e $B_{[q]} \in \Lambda_q(V)$, $p \neq q$, fazemos

$$G(A_{[p]}, B_{[q]}) = 0, \quad p \neq q. \quad (3)$$

Com essa extensão em mãos, podemos definir uma nova álgebra:

Definição 44 (Álgebra de Grassmann). *A álgebra de Grassmann do espaço vetorial V , denotada por $\mathcal{G}(V)$, é a álgebra exterior $(\Lambda(V), \wedge)$ equipada com a extensão G de g dada pelas equações (2) e (3).*

2.3.2 Álgebra de Clifford e o grupo $Spin$

Definição 45 (Álgebra Clifford). *Seja \mathcal{A} uma álgebra associativa com unidade $1_{\mathcal{A}}$ e seja $\gamma : V \rightarrow \mathcal{A}$ uma aplicação linear. O par (\mathcal{A}, γ) é uma álgebra de Clifford para o espaço quadrático (V, g) quando \mathcal{A} é gerada como uma álgebra por $\{\gamma(\mathbf{v}) | \mathbf{v} \in V\}$ e $\{a1_{\mathcal{A}} | a \in \mathbb{R}\}$ e γ satisfaz*

$$\gamma(\mathbf{v})\gamma(\mathbf{u}) + \gamma(\mathbf{u})\gamma(\mathbf{v}) = 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u})1_{\mathcal{A}}.$$

Definição 46 (Álgebra de Clifford universal). *Uma álgebra de Clifford (\mathcal{A}, γ) para o espaço quadrático (V, g) é dita uma álgebra de Clifford universal se para cada álgebra de Clifford (\mathcal{B}, ρ) para (V, g) existir um homomorfismo $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $\rho = \phi \circ \gamma$ e $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$. Denotaremos uma álgebra de Clifford universal para o espaço quadrático (V, g) por $\mathcal{Cl}(V, g)$.*

Fica, a partir daqui, subentendida a universalidade da álgebra sempre que nos referirmos a $\mathcal{Cl}(V, g)$ simplesmente como “álgebra de Clifford”.

Existe um isomorfismo de espaços vetoriais entre a álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(V, g)$ e a álgebra exterior $\Lambda(V)$ (ou a álgebra de Grassmann $\mathcal{G}(V)$), isto é,

$$\mathcal{Cl}(V, g) \cong_{vec} \Lambda(V),$$

de forma que como espaço vetorial, temos

$$\mathcal{Cl}(V, g) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda_p(V),$$

com operadores de projeção denotados por

$$\langle \rangle_p : \mathcal{Cl}(V, g) \rightarrow \Lambda_p(V).$$

Em particular, para a projeção na parte escalar $\langle \rangle_0$, pode-se mostrar que vale $\langle AB \rangle_0 = \langle BA \rangle_0$, para $A, B \in \mathcal{Cl}(V, g)$. Outro resultado importante é que

$$\langle A \tilde{B} \rangle_0 = G(A, B),$$

em que G é a extensão de g para a álgebra de Grassmann. A norma $|A|^2$ é definida como

$$N(A) := |A|^2 = \langle \tilde{A}A \rangle_0.$$

A álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(V, g)$ é uma álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada, e podemos escrever

$$\mathcal{C}\ell(V, g) = \mathcal{C}\ell^+(V, g) \oplus \mathcal{C}\ell^-(V, g),$$

em que

$$\mathcal{C}\ell^\pm(V, g) = \frac{1}{2}(1 \pm \#)(\mathcal{C}\ell(V, g)).$$

É possível verificar que $\mathcal{C}\ell^+(V, g)$ é uma subálgebra de $\mathcal{C}\ell(V, g)$, chamada de subálgebra par. Podemos escrever

$$\mathcal{C}\ell^+(V, g) = \left\{ A \in \mathcal{C}\ell(V, g) \mid A = \#A = \hat{A} \right\}.$$

Agora, seja g uma forma bilinear simétrica em \mathbb{R}^n de assinatura (p, q) , em que $p + q = n$, de modo que, se $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base ortonormal, então temos, para $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$,

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^p (v^i)^2 - \sum_{j=p+1}^n (v^j)^2.$$

Usaremos as notações $\mathbb{R}^{p,q}$ para esse espaço quadrático e $\mathcal{C}\ell_{p,q} = \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ para sua correspondente álgebra de Clifford.

Podemos definir alguns grupos a partir de uma álgebra de Clifford. Um deles é o grupo dos elementos inversíveis, denotado por $\mathcal{C}\ell_{p,q}^* = \{a \in \mathcal{C}\ell_{p,q} \mid \exists a^{-1}\}$. Um subgrupo muito interessante para nosso propósito é o grupo de Clifford-Lipschitz, denotado por $\Gamma_{p,q}$ e definido por

$$\Gamma_{p,q} = \{a \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^* \mid a\mathbf{v}a^{-1} \in V, \forall \mathbf{v} \in V = \mathbb{R}^{p,q}\}.$$

Denotando os elementos do grupo de Clifford-Lipschitz que são pares por

$$\Gamma_{p,q}^+ = \Gamma_{p,q} \cap \mathcal{C}\ell_{p,q}^+,$$

finalmente estamos aptos a definir o grupo *Spin* (reduzido) para o espaço $\mathbb{R}^{p,q}$ como

$$\text{Spin}(p, q) = \{a \in \Gamma_{p,q}^+ \mid N(a) = 1\}.$$

2.4 HOMOTOPIAS E O GRUPO FUNDAMENTAL

2.4.1 Homotopias

Sejam X e Y espaços topológicos. Duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ são ditas homotópicas quando existe uma aplicação contínua

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y,$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Nesse caso, dizemos que H é uma homotopia entre f e g , e denotamos $f \simeq g$ para simbolizar que f e g são homotópicas.

Note que, para cada $t \in [0, 1]$ fixado, podemos considerar uma aplicação contínua $H_t : X \rightarrow Y$ definida por $H_t(x) = H(x, t)$. Dessa forma, obter uma homotopia é equivalente a construir uma família de aplicações contínuas $(H_t)_{t \in [0, 1]}$ definidas em $X \rightarrow Y$.

Pode-se entender o parâmetro t como sendo uma variável temporal. Isso dá à homotopia H a interpretação de um processo de deformação contínua da aplicação f acontecendo em uma unidade de “tempo”: no instante inicial $t = 0$ temos f , e no instante final $t = 1$ temos g . Ainda, para os instantes $t \in (0, 1)$, as aplicações H_t fornecem estágios intermediários do processo de deformação.

A relação $f \simeq g$ é uma relação de equivalência no conjunto de aplicações contínuas definidas em $X \rightarrow Y$. As classes de equivalências construídas por essa relação são chamadas de classes de homotopia.

2.4.2 O grupo fundamental e a homotopia de caminhos

Vamos agora nos restringir a um caso particular de homotopia, chamado de homotopia de caminhos, isto é, de aplicações contínuas do tipo $\gamma : J \rightarrow X$, em que $J = [s_0, s_1]$ é um intervalo compacto. No que segue vamos tomar J como sendo o intervalo unitário $I := [0, 1]$.

Definição 47 (Homotopia entre caminhos). *Seja (X, \mathcal{O}) um espaço topológico. Diremos que dois caminhos $\gamma, \delta : I \rightarrow X$ tais que $\gamma(0) = \delta(0)$ e $\gamma(1) = \delta(1)$ são homotópicos se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow X$ tal que para quaisquer $s, t \in I$ tem-se $H(0, t) = \gamma(t)$, $H(1, t) = \delta(t)$, $H(s, 0) = \gamma(s)$ e $H(s, 1) = \delta(s)$.*

Sendo ainda mais restritivos, focaremos nos chamados laços (ou caminhos fechados), que são aqueles em que $\gamma(0) = \gamma(1)$. Temos que dois caminhos fechados $\gamma, \delta : I \rightarrow X$ são homotópicos quando existe $H : I \times I \rightarrow X$ contínuo tal que, pondo $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in X$, tem-se $H(s, 0) = \gamma(s)$, $H(s, 1) = \delta(s)$ e $H(0, t) = H(1, t) = x_0$ para quaisquer $s, t \in I$.

Ainda sobre caminhos fechados,

Definição 48 (Conjunto dos caminhos fechados). *Seja (X, \mathcal{O}) um espaço topológico. Então, para cada $p \in X$, definimos o conjunto dos caminhos fechados em p como*

$$\mathcal{L}_p := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow X \mid \gamma \text{ é contínuo e } \gamma(0) = \gamma(1)\}.$$

Podemos definir uma operação específica entre caminhos fechados chamada de concatenação:

Definição 49. *Seja \mathcal{L}_p o espaço dos caminhos fechados em $p \in X$. A operação concatenação $*$: $\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_p \rightarrow \mathcal{L}_p$ é definida por*

$$(\gamma * \delta)(\lambda) := \begin{cases} \gamma(2\lambda), & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \\ \delta(2\lambda - 1), & \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1. \end{cases}$$

A concatenação é o caminho que consiste em percorrer primeiro γ e depois δ . O conjunto \mathcal{L}_p com essa operação assim definida será chamado de espaço dos caminhos fechados.

Encerraremos esta Seção e também este capítulo definindo o chamado grupo fundamental de um espaço topológico:

Definição 50. *Seja (X, \mathcal{O}) um espaço topológico. O grupo fundamental $\pi_1(X, p)$ de (X, \mathcal{O}) com base no ponto $p \in X$ é o conjunto*

$$\pi_1(X, p) := \mathcal{L}_p / \sim = \{[\gamma] \mid \gamma \in \mathcal{L}_p\},$$

em que \sim é a relação de equivalência “homotópica a”, junto com o mapa

$$\begin{aligned} \bullet : \pi_1(X, p) \times \pi_1(X, p) &\rightarrow \pi_1(X, p) \\ (\gamma, \delta) &\mapsto [\gamma] \bullet [\delta] := [\gamma * \delta]. \end{aligned}$$

O grupo fundamental $\pi_1(X, p)$ é, então, formado pelas classes de homotopia de caminhos fechados com base no ponto $p \in X$. O elemento neutro de $\pi_1(X, p)$ é o caminho constante no ponto p .

3 ESPINORES EXÓTICOS

Este capítulo está separado em três seções. A primeira delas trata da construção formal de um espinor usual. Isso servirá para que, na segunda seção, vejamos com clareza as diferenças no processo que leva ao surgimento de espinores exóticos. Novos resultados obtidos por nós estão na terceira seção, onde apresentamos e discutimos uma aplicação de espinores exóticos no contexto da Relatividade Geral, incluindo buracos negros e radiação Hawking.

3.1 CONSTRUINDO UM ESPINOR

Vamos abordar duas maneiras para construir um espinor. Na Subseção 3.1.1 teremos um ponto de vista mais algébrico, utilizando as estruturas de spin em uma dada variedade, obtendo um espinor como uma seção de um certo fibrado apropriado. Por outro lado, o conceito de espinor como um objeto “pré-geométrico”, concebido primeiramente por Cartan (CARTAN, 2012), no qual os próprios pontos do espaço-tempo podem ser entendidos como gerados pelas componentes de um espinor (um programa que tem sido eminentemente generalizado por Penrose (PENROSE; RINDLER, 1987)), é o tratamento feito na subseção 3.1.2. Ambas as abordagens são complementares, o que justifica a escolha de suas exposições nesta tese.

3.1.1 Abordagem algébrica

Um espinor é uma seção do chamado fibrado espinorial, que definiremos mais adiante como um fibrado associado a um fibrado de referenciais espinorial. Para que o leitor alcance um entendimento robusto deste conceito, no decorrer dessa subseção procuraremos um equilíbrio entre o formalismo matemático subjacente e a fluência do texto. Assim, começaremos falando sobre o grupo $Spin(n)$ (VAZ; ROCHA, 2012; VAZ JR.; ROCHA, 2016; BINZ; SNIATYCKI; FISCHER, 1988).

O grupo $Spin$ pode ser, de maneira útil, definido como se segue:

Definição 51 (Grupo $Spin(n)$). *O grupo $Spin(n)$ é um recobrimento duplo do grupo especial ortogonal $SO(n) := \{R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n | \langle Rx, Ry \rangle = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^3}, \det(R) = 1\}$, em que $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^3} := x^i y^i g_{ij}$ é o produto interno usual em \mathbb{R}^3 .*

O fato de $Spin(n)$ ser um recobrimento duplo de $SO(n)$ nos permite construir um homomorfismo de grupos de Lie $\rho : Spin(n) \rightarrow SO(n)$ tal que $\text{Ker}(\rho) := \{X \in Spin(n) | \rho(X) = \text{id}_{SO(n)}\} \cong \mathbb{Z}_2$. Em outras palavras, o mapa faz uma correspondência “2 para 1” entre $Spin(n)$ e $SO(n)$. Assim, pelo teorema do isomorfismo de grupos, temos que

$$\frac{Spin(n)}{\mathbb{Z}_2} \cong SO(n). \quad (1)$$

É possível estender a ideia para variedades n -dimensionais com assinaturas do tipo (p, q) tal que $p + q = n$, o que nos permite falar sobre $\rho : Spin(p, q) \rightarrow SO(p, q)$ ainda com $\text{Ker}(\rho) \cong \mathbb{Z}_2$.

Enfatizamos que tudo ocorre no espaço tangente a um ponto da variedade. O importante é que com a abordagem do fibrado principal conseguiremos “distribuir” este resultado pontual sobre toda a variedade.

Para efeito didático, vamos discutir o caso $n = 3$, que é o caso em física não-relativística em três dimensões espaciais. Mostraremos que $Spin(3) \cong SU(2)$. A ideia agora, então, é construir um homomorfismo de grupos de Lie $\rho : SU(2) \rightarrow SO(3)$ tal que $\text{Ker}(\rho) \cong \mathbb{Z}_2$, em que

$$SO(3) := \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | RR^T = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^3}, \det(R) = 1\}. \quad (2)$$

Note que $R \in SO(3)$ é uma aplicação linear $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ (o espaço das matrizes reais 3-dimensionais) sendo o espaço de representação¹.

Podemos sempre representar um grupo de Lie por meio de uma ação adjunta², e para isso precisaremos da álgebra de Lie associada. Mas o que é a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ de $SU(2)$? Vamos fornecer uma forma curta³ de obtê-la: podemos escrever

$$SU(2) := \{U \in \mathbb{C}^{2 \times 2} | UU^\dagger = \mathbb{I}_{\mathbb{C}^2}, \det(U) = 1\}. \quad (3)$$

Consideremos, de forma “rápida”, um elemento de grupo $U = \mathbb{I} + i\epsilon H$, para algum $H \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ e $\epsilon \neq 0$ “pequeno”. Ou seja, U assim definido é de certa forma próximo⁴ da identidade \mathbb{I} . Assim, para a condição $UU^\dagger = \mathbb{I}$ ser satisfeita, temos que

$$(\mathbb{I} + i\epsilon H)(\mathbb{I} + i\epsilon H)^\dagger = \mathbb{I} \Leftrightarrow \mathbb{I} + i\epsilon H - i\epsilon H^\dagger + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \mathbb{I} \Leftrightarrow \mathbb{I} + i\epsilon(H - H^\dagger) = \mathbb{I}.$$

Obtemos, então, que $H = H^\dagger$ é hermitiano. Ainda, para a outra condição $\det(U) = 1$, temos que

$$\det(\mathbb{I} + i\epsilon H) = 1 \Leftrightarrow 1 + \text{Tr}(i\epsilon H) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1,$$

o que nos leva a $\text{Tr}(H) = 0$. Por fim, concluímos que os vetores tangentes à identidade, H , são representados por matrizes hermitianas com traço nulo, em duas dimensões. Definimos, assim,

$$\mathfrak{su}(2) := \{X \in \mathbb{C}^{2 \times 2} | X = X^\dagger, \text{Tr}(X) = 0\}, \quad (4)$$

que é a álgebra de Lie que procuramos. Queremos explicitamente tal álgebra porque sabemos que, em

¹ Lembre-se que uma representação de um grupo G é uma aplicação linear da forma $\text{Rep} : G \rightarrow GL(V, n)$ para um espaço V de dimensão n .

² A ação adjunta de um grupo é como tal grupo age sobre sua álgebra associada. Assim, queremos dizer que podemos encontrar uma representação de um grupo de Lie, chamada de representação adjunta, utilizando sua respectiva álgebra de Lie.

³ Que, infelizmente, não é a mais elegante e formal. Para tal, precisaríamos de um tempo de exposição que está fora do escopo e propósito desta tese: notemos, entretanto, que a forma curta aqui apresentada nos basta.

⁴ O aspecto “não tão formal” que comentamos na nota de rodapé anterior reside no fato que tal soma na definição de U não está bem definida, pois estamos tratando de grupos, com somente operação de produto. Novamente, existe um meio mais formal, porém bem mais trabalhoso.

$\mathfrak{su}(2)$, podemos representar $SU(2)$ por meio da aplicação

$$\begin{aligned} \text{Ad}_U(X) : SU(2) \times \mathfrak{su}(2) &\rightarrow \mathfrak{su}(2) \\ (U, X) &\mapsto UXU^{-1} = UXU^\dagger. \end{aligned} \quad (5)$$

Encontramos uma representação de $SU(2)$ na álgebra $\mathfrak{su}(2)$. Estamos procurando uma aplicação de $SU(2)$ para $SO(3)$. Uma observação importante é que a dimensão de $\mathfrak{su}(2)$ como um espaço vetorial é $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{su}(2)) = 3$. De fato, temos que $X \in \mathfrak{su}(2)$ é da forma

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (6)$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Mas a propriedade $X = X^\dagger = (X^T)^*$ resulta que $a, d \in \mathbb{R}$ e $c = b^* \in \mathbb{C}$. Ainda, $\text{Tr}(X) = 0 \Rightarrow d = -a$, então

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & -a \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Portanto, como $b = \alpha + i\beta$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos que 3 números reais a, α, β podem definir X , ou seja, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{su}(2)) = 3$ como espaço vetorial. Isso significa que a dimensão (real) do espaço de representação $\mathfrak{su}(2)$ de $SU(2)$ é a mesma que a do espaço de representação de $SO(3)$ definido na Equação (2).

Assim, vamos enunciar a seguinte proposição, muito útil para o nosso alvo:

Proposição 1. *Existe um isomorfismo de espaços vetoriais $\mathbb{R}^3 \cong_{\text{vec}} \mathfrak{su}(2)$.*

De fato, podemos construir explicitamente tal isomorfismo. Começamos escolhendo bases para os espaços de interesse. Sejam $e := \{e_1, e_2, e_3\}$ base de \mathbb{R}^3 e $\sigma := \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ base de $\mathfrak{su}(2)$, em que

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Note que o anticomutador entre os elementos de σ é $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2g_{ij}$, com

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Defina, observando as convenções de soma, as aplicações lineares

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathfrak{su}(2) \\ (x^1, x^2, x^3) &\mapsto x^i \sigma_i \end{aligned} \quad (8)$$

e

$$\begin{aligned}\mu^{-1} : \mathfrak{su}(2) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ X &\mapsto \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(X \bullet \sigma^i)e_i,\end{aligned}\tag{9}$$

com $\sigma^i := g^{ij}\sigma_j$, $(g^{ij}) = (g_{ij})$ e o produto \bullet sendo o produto em $\mathbb{C}^{2 \times 2}$. Vamos mostrar que μ^{-1} é a inversa de μ e, em seguida, como são ambos lineares (afirmamos), concluiremos que μ é um isomorfismo entre \mathbb{R}^3 e $\mathfrak{su}(2)$. Então,

$$\begin{aligned}\mu^{-1}(\mu(x)) &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mu(x) \bullet \sigma^i)e_i \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(x^j\sigma_j \bullet (\sigma_k g^{ki}))e_i \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(x^j(\sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j))e^i g^{ki}\right\} \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(x^j 2g_{kj})e_i g^{ki} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(x^j \mathbb{I}_{\mathbb{C}^2})\delta_j^i e_i \\ &= x^i e_i \\ &= x,\end{aligned}$$

logo, μ^{-1} é a inversa de μ . Analogamente, verifica-se que μ é a inversa de μ^{-1} .

Com isso em mãos, temos que

Proposição 2. *Existe um isomorfismo $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}) \cong_{ips} (\mathfrak{su}(2), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{su}(2)})$ entre espaços com produto interno, para um apropriado produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{su}(2)}$.*

Demonstração. Para provar esta proposição precisamos do já construído isomorfismo μ da proposição anterior e mostrar a validade da condição extra

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle \mu(x), \mu(y) \rangle_{\mathfrak{su}(2)}\tag{10}$$

para os produtos internos dos espaços.

Vamos definir o produto interno em $\mathfrak{su}(2)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{su}(2)} : \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(X \bullet Y).\end{aligned}\tag{11}$$

Basta mostrar, então, que este produto assim definido satisfaz a condição extra 10 para termos o

isomorfismo entre espaços com produto interno. De fato,

$$\begin{aligned}
 \langle \mu(x), \mu(y) \rangle_{\mathfrak{su}(2)} &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\mu(x) \bullet \mu(y)) \\
 &= \frac{1}{2} \text{Tr}(x^i \sigma_i \bullet y^j \sigma_j) \\
 &= \frac{1}{2} x^i y^j \text{Tr}(\sigma_i \bullet \sigma_j) \\
 &= \frac{1}{2} x^i y^j \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr}(2g_{ij}) \right\} \\
 &= x^i y^j g_{ij} \\
 &= \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^3}.
 \end{aligned}$$

□

A representação vetorial de $SO(3)$ mantém o produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ invariante. No caso de $SU(2)$, com a representação dada por $\mathfrak{su}(2)$, a representação adjunta mantém $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{su}(2)}$ invariante. De fato, lembrando que $UU^\dagger = \mathbb{I}$ e da propriedade cíclica do traço, temos:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Ad}_U(X), \text{Ad}_U(Y) \rangle_{\mathfrak{su}(2)} &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\text{Ad}_U(X) \bullet \text{Ad}_U(Y)) \\
 &= \frac{1}{2} \text{Tr}(UXU^\dagger UYU^\dagger) \\
 &= \frac{1}{2} \text{Tr}(X \bullet Y) \\
 &= \langle X, Y \rangle_{\mathfrak{su}(2)}.
 \end{aligned}$$

Agora obtemos o homomorfismo de grupos procurado, o qual vamos enunciar em forma de proposição, dessa vez sem demonstração:

Proposição 3. *Existe um homomorfismo de grupos dado por*

$$\begin{aligned}
 \rho : SU(2) &\rightarrow SO(3) \\
 U &\mapsto \rho(U),
 \end{aligned} \tag{12}$$

com $\rho(U) = \frac{1}{2} \text{Tr}(U \sigma_i U^\dagger \sigma^j) e_j \otimes \epsilon^i \in GL(3, \mathbb{R})$, em que ϵ^i é base dual do espaço dual satisfazendo $\epsilon^i(e_j) = \delta_j^i$.

Verifica-se que $\text{Ker}(\rho) := \{U \in SU(2) \mid \frac{1}{2} \text{Tr}(U \sigma_i U^\dagger \sigma^j) = \delta_j^i\}$ é tal que, se U é solução da condição de $\text{Ker}(\rho)$, então $(-U)$ também o é, o que leva a $\text{Ker}(\rho) \cong \mathbb{Z}_2$. Logo, pelo teorema do isomorfismo de grupos, encontramos que $\frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2} \cong SO(3)$ e observando a Equação (1), portanto, finalmente concluímos que $Spin(3) \cong SU(2)$.

O caso para um espaço-tempo com três dimensões espaciais e uma dimensão temporal, $(1, 3)$, é análogo, com $Spin(1, 3) \cong SL(2, \mathbb{C})$. A tabela 1 a seguir apresenta exemplos do grupo $Spin$ para algumas dimensões.

Tabela 1 – Relações entre o grupo $Spin$ e a dimensão da variedade.

n	$Spin(n)$	$(1, n)$	$Spin(1, n)$
2	$\cong U(1)$	$(1, 1)$	$\cong GL(1, \mathbb{R})$
3	$\cong SU(2)$	$(1, 2)$	$\cong SL(2, \mathbb{R})$
4	$\cong SU(2) \times SU(2)$	$(1, 3)$	$\cong SL(2, \mathbb{C})$

Agora que conhecemos o grupo $Spin$, podemos usá-lo para construir os fibrados que nos levarão à definição de espinor.

Definição 52 (Fibrado de referenciais espinorial e estrutura spin). *Seja $OLM \xrightarrow{\pi_{OLM}} M$ o fibrado de referenciais ortogonais, equipado com uma ação de grupo à direita \blacktriangleleft . Um fibrado de referenciais espinorial sobre uma variedade suave M , n -dimensional, equipada com uma métrica Riemanniana é um fibrado $Spin(n)$ -principal $P \xrightarrow{\pi} M$ equipado com uma ação de grupo à direita \triangleleft tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{\varphi} & OLM \\
 \pi \downarrow & \swarrow \pi_{OLM} & \\
 M & &
 \end{array} \tag{13}$$

comuta, com φ (um recobrimento duplo) sendo ρ -equivariante tal que $\varphi(p \triangleleft U) = \varphi(p) \blacktriangleleft \rho(U)$, em que $\rho : Spin(n) \rightarrow SO(n)$ é um recobrimento duplo. O par $(P \xrightarrow{\pi} M, \varphi)$ é chamado de estrutura spin para a variedade Riemanniana (M, g) .

Uma generalização importante do que vimos é a seguinte: análoga construção ocorre para o grupo $Spin(1, n - 1)$ em variedades Lorentzianas de dimensão n (que é o caso das variedades de interesse em Relatividade Geral).

É oportuno fazer uma pausa para um breve comentário sobre a existência de estruturas de spin: a questão de encontrar invariantes para distinguir diferentes fibrados vetoriais é um problema comum tratado em fibrados. O primeiro tal invariante é orientabilidade, e a questão é quais são as condições para que as fibras possam ser orientadas. Por exemplo, a faixa de Möbius não é orientável, pois quando se caminha em torno do círculo base, as orientações das fibras lineares claramente se tornam reversas. Orientabilidade é medida pela chamada primeira classe de Stiefel-Whitney. A segunda classe de Stiefel-Whitney mede um tipo mais refinado de invariante, que é a estrutura spin, a qual acabamos de definir. Classes de Stiefel-Whitney de ordem mais altas medem outros invariantes topológicos, que vão nos informando o quão mais e mais um fibrado vetorial “se parece” com um fibrado produto. Mais precisamente, as classes de Stiefel-Whitney $w_i(E) \in H^i(B, \mathbb{Z}_2)$, definidas para um fibrado vetorial real $E \xrightarrow{\phi} B$, são chamadas de classes características e geram todas as classes de cohomologia⁵ ordinárias com coeficientes em \mathbb{Z}_2 .

Existe um teorema forte que exhibe uma condição necessária e suficiente para a obstrução de estruturas de spin, envolvendo as classes de Stiefel-Whitney. Tal teorema afirma que uma variedade

⁵ Os grupos $H^i(B, \mathbb{Z}_2)$ são chamados de grupos de cohomologia (muito embora sejam, de fato, espaços vetoriais (LIMA, 2000; LIMA, 2012b)). Seus elementos são chamados de classes de cohomologia. Para mais detalhes, o Apêndice A fornece uma introdução ao assunto.

Riemanniana (M, g) admite uma estrutura spin se, e somente se, a segunda classe de Stiefel-Whitney é nula. Para mais detalhes, indicamos ao leitor interessado as referências (MILNOR; STASHEFF, 1974; HATCHER, 2017; ASSELMAYER-MALUGA; BRANS, 2007).

Retornando, precisamos de estruturas de spin para podermos definir o buscado fibrado espinorial:

Definição 53 (Fibrado espinorial). *Um fibrado espinorial é um fibrado vetorial, com fibra típica F , associado ao fibrado de referenciais espinorial por meio de uma ação linear à esquerda dada por $\triangleright : Spin(\mathbb{C}) \times F \rightarrow F$ que é uma representação de $Spin(\mathbb{C})$: ou seja, F é o espaço (vetorial) de representação de $Spin(\mathbb{C})$. Por $Spin(\mathbb{C})$ queremos dizer que a definição vale para $Spin(n)$ ou $Spin(1, n - 1)$ em variedades suaves n -dimensionais.*

E finalmente,

Definição 54 (Espinor). *Um espinor é uma seção do fibrado espinorial.*

Façamos uma curiosa observação: Note que para poder-se definir um espinor, exige-se uma geometria métrica Riemanniana (ou Lorentziana) subjacente à variedade suave: é possível verificar que se tivéssemos LM (que é um fibrado de referenciais GL -principal) no lugar de OLM , não teríamos coberturas duplas, ou seja, espinores não existiriam. Por outro lado, um entendimento de tensores somente exige que a variedade seja suave. É comum encontrarmos em livros de física teórica afirmações como “espinores são objetos mais elementares do que tensores”: isso é verdade, em partes, pois pode-se usar espinores para construir tensores, porém, com espinores agimos somente com OLM e não com o fibrado de referenciais “completo” LM . Logo, um espinor é mais elementar que um tensor quando estamos trabalhando em uma variedade métrica Riemanniana (ou Lorentziana), mas tensores existem mesmo em variedades sem uma métrica acoplada.

3.1.2 Abordagem intuitiva

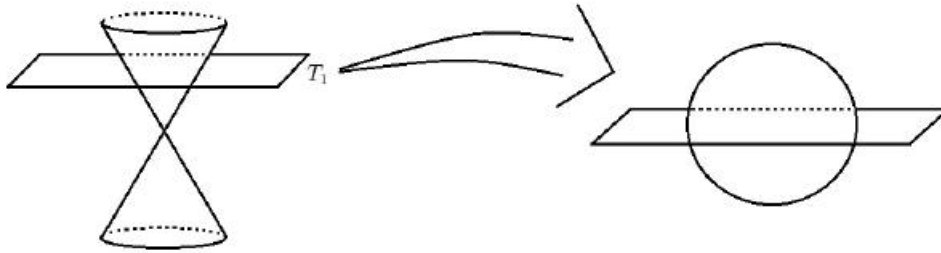
Vejam, agora, um ponto de vista mais geométrico, e portanto mais intuitivo, da construção dos espinores, como forma de complementação do nosso entendimento sobre estes objetos.

Seja v um vetor tipo-luz pertencente ao espaço de Minkowski, tangente a uma variedade base Lorentziana⁶. Tal vetor define um cone-de-luz. Dessa forma, tome a intersecção de um hiperplano definido por (T_1, X, Y, Z) com o cone de luz, em que T_1 é constante. Para facilitar a notação, estamos trabalhando em um sistema tal que a velocidade da luz é $c = 1$. A intersecção que construímos nos fornece uma concha esférica chamada de esfera de Riemann, cujo raio é dado por $|T_1|$. De fato, tal hiperplano tem como equação $X^2 + Y^2 + Z^2 = T_1^2$. Consideremos, agora, a chamada projeção estereográfica, que é um mapa injetivo que faz corresponder cada ponto da esfera de Riemann a um ponto no plano complexo que intersecciona a esfera em $Z = 0$. A Figura 3 a seguir ajuda na visualização dessa situação.

Chamaremos de S^+ a esfera construída para $T_1 > 0$ (ou seja, no cone futuro), sendo similar a construção para a esfera S^- gerada para $T_1 < 0$ (isto é, definida analoga e simetricamente no cone

⁶ O que faz com que possamos construir um fibrado tangente sobre a variedade, permitindo a generalização da abordagem para espaços-tempo planos de Minkowski para espaços-tempo curvos de forma direta.

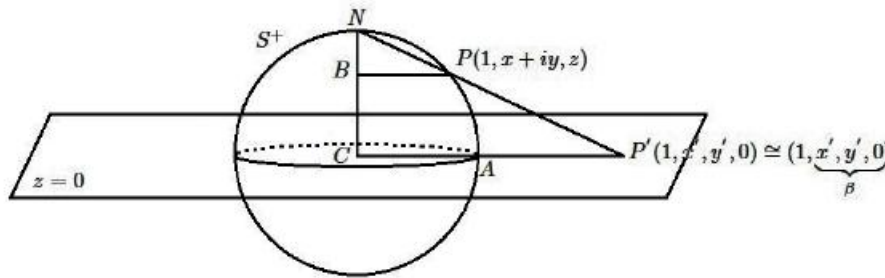
Figura 3 – Um (hiper) plano definido por (T_1, X, Y, Z) intersecciona o cone-de-luz definindo uma esfera de Riemann de raio $|T_1|$.



Fonte: (SILVA; VILLALOBOS; ROCHA, 2016)

passado). Podemos projetar a esfera de Riemann em \mathbb{C} ($\{X + iY\}$), substituindo as coordenadas X, Y, Z em S^+ por um número complexo $\beta = X' + iY'$. Por simplicidade, tomemos $|T_1| = 1$. A Figura 4 que se segue mostra que tal mapa pode ser construído por meio da semelhança dos triângulos $P'CN$ e PBN , de tal forma que $\beta = \frac{X + iY}{1 - Z}$.

Figura 4 – Visualização da construção da projeção estereográfica.



Fonte: (SILVA; VILLALOBOS; ROCHA, 2016)

Notemos que $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Logo, para podermos representar o polo N da esfera (onde $Z = 1$), devemos ter $\beta = \infty$. Em outras palavras, o polo N corresponde ao “ponto no infinito”. Dessa forma, se faz conveniente representar os pontos da esfera por um par de números complexos $(\eta, \xi) \neq (0, 0)$ de modo que

$$\beta = \frac{\xi}{\eta}, \quad (14)$$

sendo o polo N assim descrito por $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tais coordenadas possuem a propriedade de, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ não-nulo, ter-se (η, ξ) e $(\lambda\eta, \lambda\xi)$ representando o mesmo ponto, e por isso são chamadas de coordenadas projetivas⁷.

Assim, o que obtemos foi que um ponto arbitrário da seção transversal do cone-de-luz pode ser obtido do par (η, ξ) . Coordenadas que descrevem eventos no espaço de Minkowski são relacionadas com coordenadas projetivas da projeção estereográfica de uma seção do cone-de-luz no plano complexo, que por sua vez constituem o espinor. Vale enfatizar que, apesar de termos utilizado o cone-de-luz para construir os espinores, o procedimento pode ser aplicado para todo o espaço-tempo.

⁷ Observe que o uso de tais coordenadas é comum em mecânica quântica. Não há correspondência injetiva entre estados físicos e vetores no espaço de Hilbert. Se Ψ e Ψ' diferem apenas por uma fase $e^{i\alpha}$, então $|\Psi|^2 = |\Psi'|^2$, e eles descrevem o mesmo estado, ou seja, levam aos mesmos observáveis.

Ainda, note que podemos escrever $\beta\bar{\beta} = \frac{X^2 + Y^2}{(1 - Z)^2}$, o que leva a

$$X = \frac{\beta + \bar{\beta}}{\beta\bar{\beta} + 1}, \quad Y = \frac{\beta - \bar{\beta}}{i(\beta\bar{\beta} + 1)}, \quad Z = \frac{\beta - \bar{\beta}}{\beta\bar{\beta} + 1}. \quad (15)$$

Tais equações podem ser reescritas utilizando-se a definição (14), fornecendo

$$X = \frac{\xi\bar{\eta} + \eta\bar{\xi}}{\eta\bar{\eta} + \xi\bar{\xi}}, \quad Y = \frac{\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}}{i(\eta\bar{\eta} + \xi\bar{\xi})}, \quad Z = \frac{\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}}{\eta\bar{\eta} + \xi\bar{\xi}}. \quad (16)$$

Logo, o que temos são coordenadas dos vetores descrevendo eventos no fibrado tangente à variedade espaço-temporal sendo dadas em função dos espinores. Isso evidencia o ponto de vista de Cartan de que espinores são objetos pré-geométricos e geradores do espaço-tempo. Dito de outro modo, percebemos que as próprias coordenadas do espaço-tempo podem ser escritas em termos dos espinores.

Vejamus como podemos fazer uma conexão entre as duas concepções de espinor vistas.

Primeiramente, perceba que um vetor v tipo-luz tem coordenadas (t, x, y, z) com respeito a alguma base ortonormal $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^{1,3}$. Denotemos por O a origem de um sistema de coordenadas nesse espaço. O ponto $P(1, X, Y, Z)$ é um ponto arbitrário seção transversal do cone-de-luz com coordenada temporal constante que pode ser representado por qualquer ponto da reta OP . Em particular, se tomamos um ponto R em OP multiplicando o ponto P por $\frac{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}}{\sqrt{2}}$, então observando as equações (16) temos que as coordenadas de R podem ser escritas como

$$t = \frac{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}}{\sqrt{2}}; \quad x = \frac{\xi\bar{\eta} + \eta\bar{\xi}}{\sqrt{2}}; \quad y = \frac{\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}}{i\sqrt{2}}; \quad z = \frac{\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}}{\sqrt{2}}. \quad (17)$$

Perceba que o ponto R não é invariante sobre $(\eta, \xi) \mapsto (\lambda\eta, \lambda\xi)$, $\lambda \neq 0$, porém se mantém quando multiplicado por uma fase, isto é, se preserva sobre uma transformação do tipo $(\eta, \xi) \mapsto (e^{i\theta}\eta, e^{i\theta}\xi)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Continuando, considere agora a seguinte transformação linear:

$$\begin{cases} \xi \mapsto \tilde{\xi} = \alpha\xi + \mu\eta \\ \eta \mapsto \tilde{\eta} = \gamma\xi + \delta\eta \end{cases}, \quad (18)$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \mu \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (19)$$

com $\alpha, \mu, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ tais que $\det \mathbf{A} = \alpha\delta - \mu\gamma \neq 0$ (ou seja, a transformação \mathbf{A} é inversível). Se impusermos, em especial, $\det \mathbf{A} = 1$, tal transformação é chamada de Transformação Espinorial (TS). Assim, $\mathbf{A} \in SL(2, \mathbb{C}) \cong Spin(1, 3)$ é chamada por vezes de matriz espinorial.

Verifica-se diretamente que $\beta = \frac{x + iy}{t - z} = \frac{t + z}{x - iy}$. Ainda, das coordenadas de R dadas pelas

equações (17), temos:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t+z & x+iy \\ x-iy & t-z \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta} \\ \eta\bar{\xi} & \eta\bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Dessa forma,

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \tilde{t}+\tilde{z} & \tilde{x}+i\tilde{y} \\ \tilde{x}-i\tilde{y} & \tilde{t}-\tilde{z} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\xi} & \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{pmatrix} \mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^\dagger, \quad (21)$$

logo

$$\det\tilde{\mathbf{B}} = \det\mathbf{A} \det\mathbf{B} \det\mathbf{A}^\dagger. \quad (22)$$

Note que, se $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ (isto é, \mathbf{A} é unitária), então $\det\mathbf{A}^\dagger = \det\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}$, e então pela equação (22) tem-se que $\det\tilde{\mathbf{B}} = \det\mathbf{B}$, o que é equivalente a

$$\tilde{t}^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad (23)$$

ou seja, o elemento de linha no espaço de Minkowski $ds^2 := t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ é invariante sobre as transformações \mathbf{A} . Em outras palavras, $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$ define uma transformação de Lorentz.

Conclui-se (PENROSE; RINDLER, 1987) dois resultados:

Proposição 4. *Toda transformação espinorial (TS) corresponde a uma única transformação de Lorentz (TL), e cada TL corresponde a precisamente duas TS's (\mathbf{A} e $-\mathbf{A}$).*

Isto significa que $SL(2, \mathbb{C}) \cong Spin(1, 3)$ é o recobrimento duplo de $SO(1, 3) \cong \mathcal{L}^+$, o chamado grupo de Lorentz restrito, que é o subgrupo ortócrono próprio do grupo de Lorentz.

Proposição 5. *Toda TS unitária corresponde a uma única rotação própria (que preserva o sentido do tempo) de S^+ , e toda rotação própria de S^+ corresponde a duas TS's unitárias.*

Isto significa que $SU(2)$ é o recobrimento duplo de $SO(3)$, como já havíamos visto.

3.2 DIFERENÇAS NA TOPOLOGIA: OS ESPINORES EXÓTICOS

O que ocorre quando a variedade-base (o próprio espaço-tempo) é dotada de uma topologia não-trivial? Tal não-trivialidade pode ser devida a existência de buracos negros, encarados como manifestações de um espaço-tempo perturbado no ponto em que eles estão localizados. Dito de outra forma, vamos entender a não-trivialidade da topologia do espaço-tempo como sendo gerada pela própria existência de buracos negros, ou seja, como algo inerente à própria estrutura da variedade-base. Veremos que isso será crucial no surgimento do que chamamos de espinores exóticos. Iniciaremos essa seção com uma abordagem mais próxima do que chamamos de intuitiva, para em seguida complementar com um ponto de vista mais algébrico.

Vimos que espinores surgem quando conseguimos construir fibrados, os quais, dito de uma forma simplista, são uniões de espaços definidos em cada ponto da variedade-base que deve ser, por sua vez, suave. Quando isso é possível, conseguimos definir espinores como seções de tais fibrados. Porém, qual é o efeito de um dado ponto ou uma dada região que obstrui a construção do fibrado como um todo? Espinores como os conhecemos não poderão ser definidos. Pelo ponto de vista da Relatividade Geral, nesse ponto (ou região) a invariância sobre transformações gerais de coordenadas é perdida.

Buracos negros são regiões do espaço-tempo nos quais são gerados campos gravitacionais extremamente fortes, e damos o nome de horizonte de eventos à fronteira que delimita tal região. Na presença de buracos negros muito do que construímos anteriormente se perde, pois na região em que um buraco negro está situado (a qual poderia, de outra forma, se conceber a existência de um ponto ou alguma extensão delimitada pelo horizonte de eventos), sua própria existência proíbe a construção do fibrado como um todo, o que coloca um forte entrave na concepção de espinores usuais como o fizemos até então. Equivalentemente, podemos dizer que nessa região não faz sentido o conceito de pontos no espaço-tempo. A Figura a seguir, quando comparada com a Figura 3 da página 45, auxilia no entendimento do efeito da existência de buracos negros na obstrução da concepção de um espinor.

Figura 5 – Efeito pictórico da topologia não-trivial na construção do espinor.



Fonte: (SILVA; VILLALOBOS; ROCHA, 2016)

Desse modo, a topologia não-trivial da variedade espaço-tempo M , engendrada pelo buraco negro, é refletida por um grupo fundamental não-trivial, ou seja, $\pi_1(M) \neq 0$. Ainda, o grupo de homomorfismos de $\pi_1(M)$ em \mathbb{Z}_2 , denotado por $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$, chamado de primeiro grupo de cohomologia de M (com coeficientes em \mathbb{Z}_2), é tal que sua não-trivialidade é herdada da não-trivialidade de $\pi_1(M)$, ou equivalentemente, da existência de buracos negros. Assim, estamos tratando de um espaço-tempo multiplamente conexo. Além disso, o próprio fibrado espinorial é multiplamente conexo, o que fará surgir diferentes estruturas de spin. Pelo ponto de vista de Cartan, isso significa que teremos projeções estereográficas inequivalentes de seções do cone-de-luz (também inequivalentes) no plano complexo. Em todo caso, estaremos assim definindo novos espinores, chamados espinores exóticos.

O conjunto de estruturas de spin em uma dada variedade M é rotulado pelos elementos de $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ (ISHAM, 1978a; ISHAM, 1978b; PETRY, 1979; ASSELMAYER-MALUGA; BRANS, 2007; ROCHA; BERNARDINI; SILVA, 2011). Assim, a dinâmica dos espinores exóticos deverá levar em consideração a exotividade do espaço-tempo multiplamente conexo por meio de um termo extra (uma 1-forma) advindo de $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ na conexão de spin, afetando a derivada covariante. Dessas considerações, a não-trivialidade topológica de M faz surgir um novo termo na derivada covariante,

definindo um novo operador de Dirac exótico $i\gamma^\mu \tilde{\nabla}_\mu$ em termos do usual $i\gamma^\mu \nabla_\mu$, dado por

$$i\gamma^\mu \tilde{\nabla}_\mu := i \left(\gamma^\mu \nabla_\mu + \frac{1}{2\pi i} \xi^{-1} d\xi \right), \quad (24)$$

em que a conexão afim (geométrica) e a conexão de spin estão sendo levadas em consideração inseridas em ∇_μ , γ^μ são as matrizes de Dirac, e $d : \text{sec}\Lambda^0(TM) \rightarrow \text{sec}\Lambda^1(TM)$ denota o operador de derivada exterior.

O importante elemento ξ , que compõe a 1-forma adicional $B := \frac{1}{2\pi i} \xi^{-1} d\xi$, é uma função unimodular complexa⁸ (PETRY, 1979), que pode ser escrita como $\xi = e^{i\theta(x)}$, de forma que

$$\xi^{-1}(x) d\xi(x) = e^{-i\theta(x)} [id\theta(x)] e^{i\theta(x)} = id\theta(x). \quad (25)$$

Aqui, $\theta(x)$ é uma função real (mais precisamente uma 0-forma) em aberto, definida de M para \mathbb{R} . Ainda, como γ^μ serve como uma base para $\text{sec}\Lambda^1(TM)$ (SILVA; VILLALOBOS; ROCHA, 2016), podemos escrever $d\theta = \gamma^\mu \partial_\mu \theta$, o que nos leva a

$$\xi^{-1} d\xi = i\gamma^\mu \partial_\mu \theta. \quad (26)$$

De um ponto de vista heurístico, B carrega informações de efeito macroscópico da topologia não-trivial (PETRY, 1979; ROCHA; BERNARDINI; SILVA, 2011; SILVA; VILLALOBOS; ROCHA, 2016). Dito de outro modo⁹, B é uma 1-forma real, fechada (mas não exata) definindo uma classe de cohomologia tal que sua integral tomada sobre qualquer curva fechada leva a um valor inteiro:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \xi^{-1} d\xi \in \mathbb{Z}. \quad (27)$$

Desta forma, tem-se que $\xi = e^{in\theta} \in U(1)$, com $n \in \mathbb{Z}$. Localmente, obtem-se

$$\frac{1}{2\pi i} \xi^{-1} d\xi = \frac{n}{2\pi} d\theta, \quad (28)$$

o que, absorvendo o coeficiente numérico em θ , faz com que o operador de Dirac exótico tome a forma

$$i\gamma^\mu \tilde{\nabla}_\mu = i(\gamma^\mu \nabla_\mu + \gamma^\mu \partial_\mu \theta). \quad (29)$$

Pelo ponto de vista mais algébrico, lembremos¹⁰ que uma estrutura spin é composta por um fibrado de referenciais ortogonais $P_{Spin(1,3)} \xrightarrow{\pi_s} M$ e uma recobrimento duplo $s : P_{Spin(1,3)} \rightarrow P_{SO(1,3)}$ tal que $\pi_s = \pi \circ s$ para $\pi : P_{SO(1,3)} \rightarrow M$. Assim, conectando este conceito com o que dissemos até agora nesta subseção, se $\pi_1(M)$ é trivial (e, assim, também $H^1(M, \mathbb{Z}_2) = 0$) então estamos com M simplesmente conexo e tem-se somente uma¹¹ estrutura spin. Porém quando $H^1(M, \mathbb{Z}_2) \neq 0$ estamos

⁸ Isto é, $\xi : M \rightarrow \mathbb{C}$ com $|\xi(x)| = 1, \forall x \in M$.

⁹ Para o que se segue até a dedução da expressão final do operador de Dirac exótico, usaremos resultados descritos com mais detalhes no Apêndice A.

¹⁰ Ver definição 52 na página 43.

¹¹ A menos de isomorfismos de fibrados.

em um espaço-tempo M com topologia não-trivial, permitindo o surgimento de diferentes estruturas de spin $(\tilde{P}_{Spin(1,3)}, \tilde{s})$. Isso dará origem aos espinores exóticos, que serão seções do fibrado espinorial associado ao fibrado principal $\tilde{P}_{Spin(1,3)}$.

Mais precisamente, os chamados espinores clássicos Ψ , que carregam uma representação de $SL(2, \mathbb{C}) \cong Spin(1, 3)$, são seções do fibrado espinorial $P_{Spin(1,3)} \times_{\rho} \mathbb{C}^4$, em que ρ diz respeito ao espaço de representação de Dirac $D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$ de $Spin(1, 3)$ em \mathbb{C}^4 . Isto é,

$$\Psi \in \text{sec} P_{Spin(1,3)} \times_{\rho} \mathbb{C}^4. \quad (30)$$

De forma similar, os espinores exóticos $\tilde{\Psi}$ são seções de $\tilde{P}_{Spin(1,3)} \times_{\rho} \mathbb{C}^4$:

$$\tilde{\Psi} \in \text{sec} \tilde{P}_{Spin(1,3)} \times_{\rho} \mathbb{C}^4. \quad (31)$$

Seguindo em frente, duas estruturas de spin $P := (P_{Spin(1,3)}, s)$ e $\tilde{P} := (\tilde{P}_{Spin(1,3)}, \tilde{s})$ são ditas equivalentes se existir um mapa $Spin(1, 3)$ -equivariante $q : P \rightarrow \tilde{P}$ compatível com s e \tilde{s} , ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{q} & \tilde{P} \\ & \searrow s & \swarrow \tilde{s} \\ & & P_{SO(1,3)} \end{array} \quad (32)$$

comuta.

De acordo com o que foi visto nas subseções 3.1.1 e 3.1.2, podemos definir um homomorfismo (sobrejetivo) de grupos $\zeta : Spin(1, 3) \rightarrow SO(1, 3)$ tal que $Ker(\zeta) \cong \mathbb{Z}_2$. Seja $\cup_{i \in I} U_i$ uma cobertura aberta de M , junto com funções de transição

$$a_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow SO(1, 3), \quad (33)$$

tais que $a_{ij} \circ a_{jk} = a_{ik}$ em $U_i \cap U_j \cap U_k$ e $a_{jj} = \text{id}$. Para uma estrutura spin $(P_{Spin(1,3)}, s)$ em M podemos ter (PETRY, 1979; ROCHA; BERNARDINI; SILVA, 2011) um sistema de funções de transição

$$h_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow Spin(1, 3), \quad (34)$$

satisfazendo

$$\zeta \circ h_{ij} = a_{ij}; \quad h_{ij} \circ h_{jk} = h_{ik}; \quad h_{jj} = \text{id}. \quad (35)$$

Desse modo, tem-se que duas estruturas de spin $(P_{Spin(1,3)}, s)$ e $(\tilde{P}_{Spin(1,3)}, \tilde{s})$ são respectivamente descritas pelos mapas h_{ij} e \tilde{h}_{ij} (ambos definidos de $U_i \cap U_j$ para $Spin(1, 3) = \tilde{Spin}(1, 3)$), tais que $\zeta \circ h_{jk} = a_{jk} = \zeta \circ \tilde{h}_{jk}$. O diagrama a seguir resume o que temos até então (ROCHA; BERNARDINI;

SILVA, 2011):

$$\begin{array}{ccc}
 U_i \cap U_j \subset M & \xrightarrow{h_{ij}} & Spin(1, 3) \\
 \downarrow \tilde{h}_{ij} & \searrow a_{ij} & \downarrow \varsigma \\
 & & SO(1, 3) \\
 \downarrow \tilde{h}_{ij} & \nearrow \varsigma & \downarrow \varsigma \\
 \tilde{Spin}(1, 3) & \xrightarrow{\quad} & \tilde{P}Spin(1, 3) \\
 \downarrow \tilde{h}_{ij} & \searrow \tilde{s} & \downarrow \tilde{s} \\
 & & P_{SO(1,3)} \\
 \downarrow \tilde{h}_{ij} & \nearrow \tilde{s} & \downarrow \tilde{s} \\
 & & P_{Spin(1,3)} \\
 \downarrow \tilde{h}_{ij} & \nearrow \tilde{s} & \downarrow \tilde{s} \\
 & & P_{SO(1,3)} \\
 \downarrow \tilde{h}_{ij} & \nearrow \tilde{s} & \downarrow \tilde{s} \\
 & & P_{SO(1,3)}
 \end{array}
 \quad (36)$$

Agora, definamos um mapa c_{ij} (que diremos ser um cociclo) por meio de $h_{ij}(x) = \tilde{h}_{ij}(x)c_{ij}$, tal que

$$c_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow Ker(\varsigma) = \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow Spin(1, 3), \quad (37)$$

com $c_{ij} \circ c_{jk} = c_{ik}$. Tomemos ρ uma representação irredutível $\rho : \mathcal{Cl}_{1,3} \rightarrow M(4, \mathbb{C})$, em que $\mathcal{Cl}_{1,3} \cong M(2, \mathbb{H})$ é a álgebra (de Clifford) do espaço-tempo de assinatura $(1, 3)$, com \mathbb{H} representando os quatérnions. Como $c_{ij}(x) \in \mathbb{Z}_2$, tem-se que $\rho(c_{ij}(x)) = \pm 1$, pois ρ é uma representação fiel¹². Vamos assumir (PETRY, 1979; ROCHA; BERNARDINI; SILVA, 2011; SPANIER, 1989) a existência de funções unimodulares complexas $\xi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $\xi_i(x) \in U(1), \forall x \in U_i$, satisfazendo

$$\xi_i(x)(\xi_j(x))^{-1} = \rho(c_{ij}(x)) = \pm 1, \quad \xi_i^2(x) = \xi_j^2(x), x \in U_i \cap U_j. \quad (38)$$

Assim, define-se a função unimodular

$$\begin{aligned}
 \xi : M &\rightarrow \mathbb{C} \\
 x &\mapsto \xi(x) = \xi_i^2(x), \forall x \in U_i \subset M.
 \end{aligned}
 \quad (39)$$

Chamamos (PETRY, 1979) a coleção $\{\xi_i\}$ de sistema de raízes quadradas locais de ξ , as quais são ditas geradoras dos cociclos c_{ij} , que por sua vez representam elementos não-triviais do primeiro grupo de cohomologia $H^1(M, \mathbb{Z}_2) \neq 0$. Pode-se mostrar (ASSELMAYER-MALUGA; BRANS, 2007) que essa construção estabelece uma correspondência um-para-um entre estruturas de spin inequivalentes e os elementos de $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$. Isso reflete o seguinte resultado (ROCHA; BERNARDINI; SILVA, 2011): dado um espinor $\Psi \in sec P_{Spin(1,3)} \times_\rho \mathbb{C}^4$, cada componente local $\Psi_i : U_i \subset M \rightarrow \mathbb{C}^4$ satisfaz

¹² Isto é, o homomorfismo que define a representação é injetivo.

a seguinte lei de transição:

$$\Psi_i(x) = \rho(h_{ij}(x))\Psi_j(x), \quad x \in U_i \cap U_j. \quad (40)$$

Mostra-se que componentes locais $\tilde{\Psi}_i$ do espinor exótico $\tilde{\Psi} \in \text{sec}\tilde{P}_{Spin(1,3)} \times_{\rho} \mathbb{C}^4$ também satisfazem uma lei de transição, dada por

$$\tilde{\Psi}_i(x) = \rho(\tilde{h}_{ij}(x))\tilde{\Psi}_j(x) = \rho(h_{ij}(x))\rho(c_{ij}(x))\tilde{\Psi}_j(x), \quad x \in U_i \cap U_j. \quad (41)$$

Agora notemos que $\rho(\xi_i) = \rho(c_{ij}(x))\rho(\xi_j)$, logo

$$\rho(\xi_i)\tilde{\Psi}_i = \rho(c_{ij}(x))\rho(\xi_j)\rho(h_{ij}(x))\rho(c_{ij}(x))\tilde{\Psi}_j(x) = \underbrace{[\rho(c_{ij}(x))]^2}^{\rightarrow 1}\rho(\xi_j)\rho(h_{ij}(x))\tilde{\Psi}_j(x),$$

portanto obtem-se

$$\rho(\xi_i)\tilde{\Psi}_i = \rho(h_{ij}(x))\rho(\xi_j)\tilde{\Psi}_j(x), \quad x \in U_i \cap U_j. \quad (42)$$

Assim, comparando as equações (40) e (42), vemos que $\rho(\xi_i)\tilde{\Psi}_i$ transforma-se exatamente como uma componente local do espinor Ψ . Isso induz um mapa de fibrados f definido como

$$\begin{aligned} f : \tilde{P}_{Spin(1,3)} \times_{\rho} \mathbb{C}^4 &\rightarrow P_{Spin(1,3)} \times_{\rho} \mathbb{C}^4 \\ \tilde{\Psi}_i &\mapsto \rho(\xi_i)\tilde{\Psi}_i = \Psi_i, \end{aligned} \quad (43)$$

tal que (PETRY, 1979; ISHAM, 1978a; ISHAM, 1978b; ROCHA; BERNARDINI; SILVA, 2011; ROCHA; SILVA; BERNARDINI, 2011)

$$\tilde{\nabla}_X f(\tilde{\Psi}) = f(\nabla_X \tilde{\Psi}) + \frac{1}{2} (X \lrcorner (\xi^{-1} d\xi)) f(\tilde{\Psi}) \quad (44)$$

vale para todo $\tilde{\Psi} \in \text{sec}\tilde{P}_{Spin(1,3)} \times_{\rho} \mathbb{C}^4$ e todo campo vetorial $X \in M$, em que o símbolo \lrcorner representa o produto interior.

Resumindo, primeiramente tínhamos um espinor clássico de Dirac, Ψ , definido como uma seção do fibrado $P_{Spin(1,3)} \times_{\rho} \mathbb{C}^4$. Por meio dos cociclos c_{ij} (gerados pelo sistema de raízes quadradas locais $\{\xi_i\}$) encontramos uma estrutura spin inequivalente $(\tilde{P}_{Spin(1,3)}, \tilde{s})$ e, assim, obtivemos um segundo tipo de espinor $\tilde{\Psi}$ definido como uma seção do fibrado $\tilde{P}_{Spin(1,3)} \times_{\rho} \mathbb{C}^4$. Para cada fibrado existe (PETRY, 1979) uma definição canônica para a derivada covariante. Entretanto, por meio da transformação dada pela equação (44), vemos que $\tilde{\Psi}$ pode ser representado de modo diferente, mais precisamente por uma seção $f(\tilde{\Psi}) = \Psi$ do fibrado inicial $P_{Spin(1,3)} \times_{\rho} \mathbb{C}^4$, sendo que a única mudança necessária ocorre na definição da derivada covariante. É importante salientar que esta mudança é apresentada por um termo adicional originado genuinamente da topologia não-trivial do espaço-tempo M . Em outras palavras:

Proposição 6. *Sejam $(P_{Spin(1,3)}, s)$ uma estrutura spin e c_{ij} um cociclo não-trivial gerado por um sistema de raízes quadradas locais de ξ . Em adição aos espinores de Dirac Ψ , os quais são definidos como seções do fibrado $P := P_{Spin(1,3)} \times_{\rho} \mathbb{C}^4$ com derivada covariante ∇ associada, obtem-se um segundo tipo de espinores de Dirac chamado de espinores exóticos, denotados por $\tilde{\Psi}$, os quais podem*

ser descritos por seções $f(\tilde{\Psi}) \in P$, porém com derivada covariante associada dada por meio da equação (44).

Como vimos no início dessa seção (mais precisamente pela equação (29)), tal derivada covariante faz redefinir o operador de Dirac para espinores exóticos, que só podem surgir em variedades multiplamente conexas (isto é, com topologia não-trivial). Sendo assim, a única diferença entre os espinores está em suas dinâmicas, ditadas pelos operadores de Dirac respectivamente associados.

3.3 ESTRUTURAS ESPINORIAIS EXÓTICAS E BURACOS NEGROS EM RELATIVIDADE GERAL

3.3.1 Radiação Hawking e exotividade

A gravitação e o eletromagnetismo possuem, ambos, uma formulação clássica. As equações que descrevem o campo eletromagnético classicamente são as equações de Maxwell e sua quantização é razoavelmente fácil, ao contrário do que ocorre com o campo gravitacional. Na formulação quântica do campo eletromagnético, ondas eletromagnéticas são interpretadas em termos de partículas chamadas fótons. A Teoria Quântica de Campos (TQC) prediz que pares de partículas podem ser criados em regiões de intenso campo elétrico, com o campo eletromagnético gerando a energia necessária para criação desses pares. Algo análogo envolvendo campos gravitacionais intensos levaria à possibilidade de parte da matéria do universo ter sido gerada pouco depois do *big bang*, originando-se de um extremo campo gravitacional. Com isso, formula-se a Teoria Quântica de Campos em espaços-tempo curvos (TQCEC), estendendo a ideia original da TQC (que tem como plano de fundo o espaço-tempo de Minkowski, o qual descreve muito bem o espaço-tempo onde os efeitos da gravidade podem ser desprezados). Uma mais completa introdução ao tema pode ser encontrada na referência (MATSAS, 2005).

A TQCEC também é dita ser uma teoria de Gravitação semiclássica, e com ela é possível antecipar efeitos de origem puramente quântica em gravitação, tal como a radiação Hawking. Ou seja, TQCEC pode trazer à tona efeitos macroscópicos originários da gravitação quântica. Entretanto, antes de falarmos explicitamente sobre esse efeito, vamos fazer uma breve apresentação sobre aspectos de buracos negros, na medida que é interessante para o decorrer deste capítulo.

Hawking e Penrose mostraram (HAWKING; PENROSE, 1970) que buracos negros não podem ser destruídos e, pouco tempo depois, Hawking provou (HAWKING, 1972) um importante resultado: sob certas condições, a soma total da área superficial dos buracos negros nunca decresce com o tempo.

Em especial, a área do horizonte de eventos associado a um buraco negro de Kerr-Newmann (que é caracterizado por sua massa M , momento angular J e carga elétrica Q) é dada por (SMARR, 1973) (com $G = c = 1$)

$$A = 4\pi \left[2M^2 - Q^2 + 2M \left(M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (45)$$

Podemos manipular a Equação (45) para obtermos uma expressão para a massa:

$$M^2 = \frac{A}{16\pi} + \frac{4\pi}{A} \left(J^2 + \frac{Q^4}{4} \right) + \frac{Q^2}{2}, \quad (46)$$

a qual, ao diferenciarmos, fornece

$$dM = \frac{\mathcal{K}}{8\pi}dA + \Omega dJ + \Phi dQ. \quad (47)$$

A Equação (47) resultante relaciona a diferença de massa entre dois buracos negros com pequenas diferenças de área, momento angular e carga elétrica, em que a gravidade superficial é definida por

$$\mathcal{K} = \frac{4\pi (M^2 - Q^2 - J^2/M^2)^{\frac{1}{2}}}{A}, \quad (48)$$

a frequência angular por

$$\Omega = \frac{4\pi J}{MA} \quad (49)$$

e o potencial elétrico sobre o horizonte de eventos por

$$\Phi = \frac{4\pi Q}{A} \left(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - J^2/M^2} \right). \quad (50)$$

A semelhança entre a Equação (47) e a forma diferencial da primeira lei da termodinâmica¹³ leva à relacionar $\mathcal{K}/8\pi$ a uma grandeza tipo temperatura, e a área A a uma grandeza tipo entropia. De fato, percebe-se que, de acordo com Hawking, a área total dos buracos negros nunca decresce, assim como a entropia total de um sistema termodinâmico fechado. Inclusive, em meados dos anos 70, o próprio Hawking mostrou (HAWKING, 1974) que buracos negros irradiam com uma temperatura

$$T = \frac{\mathcal{K}}{2\pi}, \quad (51)$$

com uma entropia associada expressa por

$$S_{bn} = \frac{A}{4}. \quad (52)$$

Logo, observando as duas últimas equações e lembrando da definição dada pela Equação (48), tem-se que quanto menor é o buraco negro maior é a sua temperatura e mais rápida é sua evaporação (HALZEN et al., 1991): dessa forma, buracos negros podiam evaporar até seu possível desaparecimento, algo proibido de acordo com os teoremas anteriores, que não levavam em conta efeitos quânticos¹⁴. A essa evaporação dá-se o nome de radiação Hawking, um dos mais importantes avanços feitos no contexto de gravitação semiclássica.

Pode-se pensar nas flutuações do vácuo como pares de partículas virtuais¹⁵ que aparecem juntas em determinado ponto do espaço-tempo, afastam-se e voltam a se encontrar aniquilando-se mutuamente. Dessa forma, na presença de um buraco negro, uma das componentes (com energia negativa) de tal

¹³ A primeira lei da termodinâmica pode ser escrita como $dE = TdS + dW$, em que a energia E e a massa M são relacionadas por $E = Mc^2$.

¹⁴ Os teoremas que diziam que um buraco negro não podia ser destruído ignoravam o fato de o valor da densidade de energia do vácuo quântico ao redor do buraco ser negativo.

¹⁵ Dizemos “virtuais” para significar que tais partículas não podem ser observadas de forma direta, ou seja, podemos medir seus efeitos indiretamente.

par poderia ser capturada por ele no horizonte de eventos, deixando a outra partícula (com energia positiva) livre para escapar no infinito (HAWKING, 1975). Para um observador distante, as partículas que escapassem do buraco negro constituiriam a radiação Hawking.

A tabela 2 a seguir apresenta uma analogia entre as leis para buracos negros e a termodinâmica clássica, no intuito de auxiliar no entendimento dos resultados.

Tabela 2 – Leis da termodinâmica de buracos negros em analogia com as leis da termodinâmica usual.

Leis	Buracos negros	Sistemas usuais
Lei Zero	\mathcal{K} é constante no horizonte	T é constante no equilíbrio térmico
Primeira Lei	$dM = \frac{\mathcal{K}}{8\pi}dA + \Omega dJ + \Phi dQ$	$dE = TdS + dW$
Segunda Lei	$\delta A \geq 0$ para todo processo físico	$\delta S \geq 0$ para todo processo físico
Terceira Lei	$\mathcal{K} \rightarrow 0$ não ocorre por processos físicos	$T \rightarrow 0$ não ocorre por processos físicos

Um aspecto interessante e até então pouco explorado é a relação entre estes resultados de Hawking e estruturas exóticas. Conforme já vimos, a própria existência de buracos negros faz com que a topologia do espaço-tempo seja não-trivial, revelando a possibilidade, por sua vez, da existência de espinores exóticos. Como mencionado em (SILVA; VILLALOBOS; ROCHA, 2016), o termo exótico não muda a temperatura Hawking, entretanto afeta a taxa de emissão da qual a temperatura é derivada. Esse fato pode alterar o tempo de vida esperado de buracos negros. Na subseção seguinte iremos investigar os possíveis valores extremos para as taxas de emissão Γ , verificando como o termo exótico afeta tais resultados. Para isso, iremos considerar a taxa de emissão de espinores.

A taxa de emissão de radiação Hawking, também interpretada como probabilidade de tunelamento (PARIKH; WILCZEK, 2000; ANGHEBEN et al., 2005; ARZANO; MEDVED; VAGENAS, 2005; JIANG; WU; CAI, 2006), pode ser derivada de forma direta utilizando-se a abordagem de Hamilton-Jacobi para o método de tunelamento. Tal método é baseado na descrição de partículas da radiação Hawking, sobre a hipótese de que a ação da partícula (bosônica) emitida satisfaça a equação de Hamilton-Jacobi relativística, permitindo que partículas viajem classicamente ao longo de trajetórias proibidas, de antes do horizonte em direção ao infinito. Alternativamente, pode-se (KERNER; MANN, 2008) tomar o termo mais relevante da chamada aproximação WKB para a equação de campo. Um pouco mais detalhadamente (VANZO; ACQUAVIVA; CRISCIENZO, 2011):

- Supõe-se que a ação I da partícula satisfaça a chamada equação de Hamilton-Jacobi relativística, $g^{\mu\nu}\partial_\mu I\partial_\nu I + m^2 = 0$ (ou utiliza-se a aproximação WKB).
- Reconstroi-se a ação por meio de $I = \int \partial_\mu I dx^\mu$, em que a integração é feita sobre uma curva orientada chamada de “caminho de tunelamento”, com pelo menos um ponto no horizonte.
- A parte imaginária da ação clássica nos informa sobre a temperatura Hawking.
- Na aproximação WKB, a probabilidade de tunelamento é $\Gamma_{em} = e^{-2\text{Im}I}$, em que $\text{Im}I$ é a parte imaginária de I .

Para o caso fermiônico, substitui-se a equação de Hamilton-Jacobi pela equação de Dirac para espaços-tempo curvos, pois tal equação carrega a dinâmica apropriada para férmions de maneira geral, e a ação

clássica I é acrescida de termos de correção de spin. Maiores detalhes sobre o método de tunelamento podem ser encontrados em (VANZO; ACQUAVIVA; CRISCIENZO, 2011).

Por sua generalidade e compatibilidade com a teoria de Einstein, escolhemos adotar a taxa de emissão associada à solução de Kerr-Newman da teoria da Relatividade. Tal solução pode ser escrita, em coordenadas de Boyer-Lindquist (t, r, ϑ, ϕ) , na forma

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \vartheta}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{2(r^2 + a^2 - \Delta)a \sin^2 \vartheta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\vartheta^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \vartheta}{\Sigma} \sin^2 \vartheta d\phi^2, \quad (53)$$

em que $a = \frac{J}{M}$, $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta$ e $\Delta = r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr$. Vamos, assim, partir dessa taxa de emissão para partículas fermiônicas (VANZO; ACQUAVIVA; CRISCIENZO, 2011; SILVA; VILLALOBOS; ROCHA, 2016), levando o termo exótico em consideração. Dessa forma, obtem-se

$$\Gamma = \exp \left[-4\pi \left(\frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \right) (\omega - j\Omega - q\Phi + \dot{\theta}) \right]. \quad (54)$$

Aqui, ω e q denotam, respectivamente, energia e carga elétrica das partículas. Também, r_+ [r_-] denota o horizonte externo [interno], dado por

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}, \quad (55)$$

com $M^2 \geq Q^2 + a^2$.

3.3.2 Análise de valores extremos das taxas de emissão para espinores exóticos

Poderia-se iniciar uma análise preliminar assumindo-se que os raios dos horizontes, assim como os parâmetros do buraco negro e das partículas emitidas, não mudam consideravelmente com o tempo. De fato, tendo em mente buracos negros astrofísicos, tal hipótese é perfeitamente razoável. Entretanto, neste caso simplificado, a condição de existência para extremos de Γ seria simplesmente $\ddot{\theta} = 0$, ou seja, o termo exótico deveria ser linear. Nosso estudo se torna mais interessante quando relaxamos as condições para os raios, ou seja, quando permitimos que os raios variem com o tempo em nosso modelo. Daqui em diante vamos distinguir dois casos, caracterizados pela existência ou não de um potencial eletromagnético A_μ externo ao buraco negro. Usaremos as seguintes notações:

$$\Gamma_{DN} \equiv \text{Taxa de emissão para o caso de } A_\mu \text{ nulo.}$$

$$\Gamma_{DE} \equiv \text{Taxa de emissão para o caso de } A_\mu \text{ não nulo.}$$

Para espinores exóticos de Dirac sem interação externa, a probabilidade de tunelamento é dada, como anteriormente, por (VANZO; ACQUAVIVA; CRISCIENZO, 2011; SILVA; VILLALOBOS; ROCHA, 2016)

$$\Gamma_{DN} = \exp \left[-4\pi \left(\frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \right) (\omega - j\Omega - q\Phi + \dot{\theta}) \right], \quad (56)$$

e sua primeira derivada por

$$\dot{\Gamma}_{DN} = \frac{4\pi\Gamma_{DN}}{(r_- - r_+)^2} \left\{ (\omega - j\Omega - q\Phi + \dot{\theta}) [(a^2 + r_+^2)(-\dot{r}_- + \dot{r}_+) + 2(r_- - r_+)(a\dot{a} + r_+\dot{r}_+)] + (r_- - r_+)(a^2 + r_+^2)\ddot{\theta} \right\}. \quad (57)$$

Aqui estamos tomando ω , $j\Omega$ e $q\Phi$ como constantes no tempo, e fazendo $\dot{r}^2, \dot{\theta}^2, \ddot{r} \rightarrow 0$, o que significa uma variação adiabática¹⁶. A condição $\dot{\Gamma}_{DN} = 0$ para extremos leva à

$$\ddot{\theta} + (\omega - j\Omega - q\Phi + \dot{\theta}) \left[\frac{(\dot{r}_+ - \dot{r}_-)}{(r_- - r_+)} + 2\frac{(a\dot{a} + r_+\dot{r}_+)}{(r_+^2 + a^2)} \right] = 0, \quad (58)$$

que pode facilmente ser reescrita como

$$\ddot{\theta} + (\omega - j\Omega - q\Phi + \dot{\theta}) \frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \right) \right] = 0. \quad (59)$$

Note que a equação (59), além de ser uma condição para este caso particular de $A_\mu = 0$, fornece uma equação diferencial de segunda ordem para o termo exótico θ . Ademais, este caso também descreve a taxa de emissão de espinores ELKO¹⁷ (SILVA; VILLALOBOS; ROCHA, 2016; CAVALCANTI; ROCHA, 2016; ROCHA; BERNARDINI; SILVA, 2011), que são espinores de dimensão de massa um candidatos a descrição da matéria escura, pois interagem de modo apreciável somente com a gravidade e o campo de Higgs (AHLUWALIA, 2017).

Por outro lado, para o caso de espinores de Dirac exóticos interagindo com um campo A_μ , pode-se expressar a probabilidade de tunelamento Γ_{DE} como

$$\Gamma_{DE} = \exp \left[-4\pi \left(\frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \right) (\omega - j\Omega - q\Phi + \dot{\theta} + \mathcal{A}) \right], \quad (60)$$

com $\mathcal{A} \equiv \gamma_\mu A^\mu$. É importante perceber que, por causa da própria natureza topológica de sua construção, o termo exótico da equação (60) não pode ser incorporado ao campo de gauge. Trataremos disso com mais detalhes na subseção 3.3.3. Por ora, continuemos com os cálculos acerca das derivadas temporais das taxas de emissão.

Das equações (56) e (60) podemos escrever

$$\Gamma_{DE} = \Gamma_{DN} \mathcal{R}, \quad (61)$$

em que $\mathcal{R} \equiv \exp \left[-4\pi \left(\frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \right) \mathcal{A} \right]$, que resulta em

$$\dot{\Gamma}_{DE} = \dot{\Gamma}_{DN} \mathcal{R} + \Gamma_{DN} \dot{\mathcal{R}}. \quad (62)$$

¹⁶ Isto é, apesar da possível taxa de emissão extrema, os raios variam tão lentamente que a solução usual das equações de Einstein estão em boa aproximação.

¹⁷ ELKO é um acrônimo para o termo em alemão “*Eigenspinoren des Ladungskonjugationsoperator*”, designando espinores que são autoespinores do operador de conjugação de carga com estrutura de helicidade dual (AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005; AHLUWALIA-KHALILOVA; GRUMILLER, 2005).

Notemos aqui que a condição para existência de extremos nos deixa com duas possibilidades: $\dot{\Gamma}_{DN} = 0$ ou $\dot{\Gamma}_{DN} \neq 0$. A primeira delas produz

$$\dot{A} + A \frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \right) \right] = 0. \quad (63)$$

Comparando as equações (59) e (63), temos que

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\ddot{\theta}}{\omega - j\Omega - q\Phi + \dot{\theta}}, \quad (64)$$

levando a seguinte condição:

$$A - \dot{\theta} = \omega - j\Omega - q\Phi. \quad (65)$$

Por outro lado, impor $\dot{\Gamma}_{DN} \neq 0$ fornece¹⁸

$$-A - \dot{\theta} = \omega - j\Omega - q\Phi. \quad (66)$$

Novamente, a condição para extremos fixa uma equação diferencial para o termo exótico. Porém a diferença agora é que a variação temporal de θ é completamente determinada pelo campo externo A_μ , pois o lado direito das equações (65) e (66) são ambos constantes no tempo.

Continuando, o próximo passo é investigar as derivadas segundas das taxas de emissão. Da equação (57) segue que

$$\ddot{\Gamma}_{DN} = \frac{4\pi\Gamma_{DN}}{(r_- - r_+)^4} \left\{ \left[4\pi[\mathcal{X}(\alpha + 2\beta) + \sigma\ddot{\theta}] - 2(\dot{r}_- - \dot{r}_+)(r_- - r_+) \right] \right. \\ \left. \times \left[\mathcal{X}(\alpha + 2\beta) + \sigma\dot{\theta} \right] + (r_- - r_+)^2 \left[2\ddot{\theta}(\alpha + 2\beta) + \sigma\ddot{\theta} \right] \right\}, \quad (67)$$

em que

$$\alpha \equiv (a^2 + r_+^2)(-\dot{r}_- + \dot{r}_+), \quad (68)$$

$$\beta \equiv (r_- - r_+)(a\dot{a} + r_+\dot{r}_+), \quad (69)$$

$$\sigma \equiv (r_- - r_+)(a^2 + r_+^2), \quad (70)$$

$$\mathcal{X} \equiv (\omega - j\Omega - q\Phi + \dot{\theta}). \quad (71)$$

Começando com o caso $\dot{\Gamma}_{DN} = 0 = \dot{\Gamma}_{DE}$, definimos

$$\ddot{\Gamma}_{DE} \equiv \ddot{\Gamma}_{DE} \Big|_{\dot{\Gamma}_{DN}, \dot{\Gamma}_{DE}=0}, \quad (72)$$

$$\ddot{\Gamma}_{DN} \equiv \ddot{\Gamma}_{DN} \Big|_{\dot{\Gamma}_{DN}, \dot{\Gamma}_{DE}=0}. \quad (73)$$

¹⁸ Para obtermos as equações (65) e (66), impomos $A(0) = 0$, isto é, o campo externo possui intensidade zero no instante inicial $t = 0$.

Após cálculos longos porém simples, notando que $\dot{\theta} = \ddot{\mathcal{X}}$ e $\ddot{\theta} = \dot{\mathcal{X}}$, encontramos

$$\ddot{\Gamma}_{DE} = \frac{4\pi\Gamma_{DE}}{(r_- - r_+)^2} [f(\mathcal{X}) + f(\mathcal{A})], \quad (74)$$

$$\ddot{\Gamma}_{DN} = \frac{4\pi\Gamma_{DN}}{(r_- - r_+)^2} f(\mathcal{X}), \quad (75)$$

em que $f(y) \equiv 2\dot{y}(\alpha + 2\beta) + \sigma\ddot{y}$. Perceba que os sinais de $\ddot{\Gamma}_{DE}$ e $\ddot{\Gamma}_{DN}$ são fortemente relacionados com os sinais de $f(\mathcal{X})$ e $f(\mathcal{A})$. Neste caso, pela equação (65), tem-se que $\mathcal{X} = \mathcal{A}$. Portanto, o sinal de $f(\mathcal{X}) = f(\mathcal{A})$ define sinais idênticos para $\ddot{\Gamma}_{DE}$ e $\ddot{\Gamma}_{DN}$. Isto significa que, para nosso caso particular de um buraco negro de Kerr-Newman, a presença de um campo externo A_μ não altera o comportamento geral dos extremos de emissão de radiação Hawking para uma partícula exótica, ou seja, esta permanece máxima [mínima] se já era máxima [mínima]. Para estabelecermos se a taxa de emissão é máxima ou mínima para o caso $\dot{\Gamma}_{DN} = 0 = \dot{\Gamma}_{DE}$, devemos saber os sinais dos coeficientes $f(y)$. Verifica-se sem grandes dificuldades que $\sigma < 0$. Em contrapartida, mesmo sendo possível verificar que $\alpha < 0$ e $\beta > 0$, não existe uma forma de determinar o sinal de $\alpha + 2\beta$. De fato, com $z \equiv M^2 - (\frac{J}{M})^2 - Q^2 > 0$ e $\frac{dM}{dt} < 0$, temos que

$$\alpha + 2\beta = \frac{dM}{dt} \left[\left(\frac{4M^2}{\sqrt{z}} + 4 - \frac{2Q^2}{\sqrt{z}} - 8M\sqrt{z} \right) \left(M + \frac{J^2}{M^3} \right) + \left(-8M^2\sqrt{z} - 12Mz - 8z^{\frac{3}{2}} - 8M^3 + \frac{4J^2\sqrt{z}}{M^3} - \frac{8J^2}{M} \right) \right]. \quad (76)$$

Como não temos restrições para J , M e Q além de $z > 0$, o sinal de (76) fica indeterminado. Entretanto, podemos estabelecer as condições que levariam a valores máximos ou mínimos para as taxas de emissão em termos dos sinais das derivadas de $\dot{\theta}$ e \mathcal{A} . Abaixo resumimos todos os casos possíveis, adotando a notação $y \equiv \mathcal{X} = \mathcal{A}$:

1. Caso $\alpha + 2\beta < 0$:

- a) $\dot{y} < 0, \ddot{y} < 0$: $f(y) > 0$, taxa de emissão mínima;
- b) $\dot{y} > 0, \ddot{y} > 0$: $f(y) < 0$, taxa de emissão máxima;
- c) $\dot{y} > 0, \ddot{y} < 0$: ambos os casos são possíveis;
- d) $\dot{y} < 0, \ddot{y} > 0$: ambos os casos são possíveis.

2. Caso $\alpha + 2\beta > 0$:

- a) $\dot{y} < 0, \ddot{y} < 0$: ambos os casos são possíveis;
- b) $\dot{y} > 0, \ddot{y} > 0$: ambos os casos são possíveis;
- c) $\dot{y} > 0, \ddot{y} < 0$: $f(y) > 0$, taxa de emissão mínima;
- d) $\dot{y} < 0, \ddot{y} > 0$: $f(y) < 0$, taxa de emissão máxima.

Finalmente, podemos ver que existem duas condições regendo estes cenários. Com efeito, todas as situações de taxa de emissão máxima estão relacionadas com a condição $\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} < -\frac{1}{2}\frac{\ddot{y}}{\dot{y}}$, enquanto

as situações com taxa de emissão mínima estão vinculadas com $\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} > -\frac{1}{2}\frac{\dot{y}}{y}$. Também, note que $\dot{\sigma} = \alpha + 2\beta$. Os mesmos resultados com respeito ao comportamento das taxas de tunelamento são válidos para toda solução assintoticamente plana em Relatividade Geral, pois fazer $q = 0$ e/ou $J = 0$ não afeta qualquer conclusão que chegamos¹⁹. Ainda, vale notar que em todos os cálculos não fixamos qualquer restrição²⁰ sobre \mathcal{A} .

3.3.3 Relações exóticas de dispersão

Vamos, agora, discorrer sobre a diferença entre o termo exótico e um campo de gauge na equação de Dirac. Sabe-se que o grupo de gauge do eletromagnetismo é o grupo unitário $U(1)$, um grupo de Lie de dimensão 1, cujos elementos podem ser representados por $e^{i\Lambda(x)}$, com $\Lambda \in \mathbb{R}$. Partindo da equação usual de Dirac $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0$, e agindo com uma transformação $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - iA_\mu$, encontra-se $i\gamma^\mu \partial_\mu \rightarrow i\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^\mu A_\mu$, o que faz com que a equação de Dirac exótica se torne

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^\mu A_\mu + i\gamma^\mu \partial_\mu \theta - m)\Psi = 0. \quad (77)$$

Dessa forma, agindo com uma transformação de gauge $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \Lambda$, seria necessário ter $\Lambda = i\theta$ para absorver o termo exótico em uma transformação de gauge: em outras palavras, deveríamos ter θ puramente imaginário. No entanto, por construção do termo exótico, temos que $\theta \in \mathbb{R}$, portanto não é possível ter um termo exótico agindo como um “deslocamento” no campo de gauge. O termo exótico e o campo de gauge possuem naturezas bem distintas. Ora, ambos são campos vetoriais, porém não existe “ajuste” possível que faça com que o termo exótico seja incorporado por um termo de gauge.

Além do fato de suas naturezas totalmente díspares, o campo de gauge e o termo exótico levam a distintas relações de dispersão, enfatizando que $\partial_\mu \theta$ é um vetor mas não um campo de gauge. Daqui em diante, investigaremos um *toy model* simples, mas eficaz, para evidenciar tal ponto.

Definindo

$$\gamma^\mu (A_\mu + i\partial_\mu \theta) \equiv \gamma^\mu \tilde{A}_\mu, \quad (78)$$

temos que a equação (77) nos fornece

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m + \gamma^\mu \tilde{A}_\mu)\Psi = 0. \quad (79)$$

Impondo uma solução tipo onda plana

$$\Psi = \omega(p)e^{\mp i p x}, \quad (80)$$

a equação (79) se torna

$$(\pm \not{p} - m + \gamma^\mu \tilde{A}_\mu)\omega(p) = 0. \quad (81)$$

Assim, de forma a obter uma solução não-trivial para a equação (81), não pode existir uma inversa

¹⁹ Mantendo-se, logicamente, as mesmas hipóteses de ω , $j\Omega$ e $q\Phi$ constantes no tempo e $\dot{r}^2, \dot{\theta}^2, \ddot{r} \rightarrow 0$.

²⁰ Além de $\mathcal{A}(0) = 0$.

para $(\pm\not{p} - m + \gamma^\mu \tilde{A}_\mu)$. Certamente, pode-se escrever

$$(\pm\not{p} - m + \gamma^\mu \tilde{A}_\mu)^{-1} = \frac{(\pm\not{p} + m + \epsilon\gamma^\mu \tilde{A}_\mu)}{(\pm\not{p} - m + \gamma^\mu \tilde{A}_\mu)(\pm\not{p} + m + \epsilon\gamma^\mu \tilde{A}_\mu)}, \quad (82)$$

em que ϵ é um parâmetro real. Dessa forma, reescrevendo o denominador, temos

$$p^2 - m^2 \pm 2\epsilon p^\mu \tilde{A}_\mu + (1 - \epsilon)(m\gamma^\mu \tilde{A}_\mu \pm \gamma^\mu \tilde{A}_\mu \not{p}) + \epsilon \tilde{A}^\mu \tilde{A}_\mu = 0 \quad (83)$$

como uma condição suficiente para se obter solução não-trivial da equação (81). Agora estamos aptos a considerar alguns casos particulares dessa equação. Ei-los:

- $\tilde{A}_\mu \rightarrow 0$:

Nesse caso, a imposição (83) implica $p^2 = m^2$, ou seja, a relação de dispersão usual $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, esperada para ondas planas.

- $\partial_\mu \theta \rightarrow 0$ (ou, de maneira equivalente, θ constante):

Aqui temos que $\tilde{A}_\mu \rightarrow A_\mu$. Fazendo $\epsilon = 1$, tem-se $p^2 = m^2 \mp 2p^\mu A_\mu - A^2$, que por sua vez, usando o gauge de Coulomb, leva a

$$E^2 = m^2 + (\vec{p} \pm \vec{A})^2, \quad (84)$$

revelando um espectro não usual para a solução de onda plana. De qualquer forma, é uma assinatura factível para soluções de onda plana para férmions interagindo com um campo eletromagnético, sem termo exótico.

- $A_\mu \rightarrow 0$:

Esse caso fornece

$$p^2 - m^2 + \epsilon \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta + i[\pm 2\epsilon p^\mu \partial_\mu \theta + (1 - \epsilon)\gamma^\mu \partial_\mu \theta (m \pm \not{p})] = 0, \quad (85)$$

e, então, não existem escolhas para ϵ que leve a uma relação de dispersão real. Note, entretanto, que com $\epsilon = 1$ temos

$$p^2 - m^2 + \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta \pm 2ip^\mu \partial_\mu \theta = 0 \quad (86)$$

e uma topologia que gera θ tal que²¹ $p^\mu \partial_\mu \theta = 0$ pode levar a uma relação do tipo $p^2 = m^2 - \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta$. Nessa situação, temos

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 - \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta. \quad (87)$$

Ainda, por causa da restrição $p^\mu \partial_\mu \theta = 0$, temos que a relação $E^2 = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \theta)^2}{\dot{\theta}^2}$ deve ser considerada e, eventualmente, utilizada para restringir o termo exótico. De qualquer forma, o ponto relevante aqui é que a relação de dispersão

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 - \dot{\theta}^2 + \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{\nabla} \theta \quad (88)$$

²¹ Uma condição suficiente para $p^\mu \partial_\mu \theta = 0$ é $\partial_\mu \theta \sim a_\mu$, a 4-aceleração.

obtida nesse caso é diferente daquela obtida na equação (84), a qual leva somente em conta a interação com o campo de gauge.

Finalmente, temos o caso em que todos os termos (o campo de gauge e o termo exótico) são não nulos, levando a uma diferente relação de dispersão correspondente.

Apesar de simples, a análise que acabamos de fazer aqui demonstra que existe uma possível diferença observacional entre um operador interagente e um operador topológico na equação de Dirac.

4 ESPINORES RIM

A decomposição espinorial de Inomata-McKinley (INOMATA; MCKINLEY, 1965) teve raízes na busca pelo entendimento da física de neutrinos, no contexto da chamada geometrodinâmica de Wheeler (WHEELER, 1955). Mais recentemente, essa decomposição foi empregada para construir espinores de Dirac, que são espinores lineares¹, por meio de uma equação dinâmica não-linear chamada Equação de Heisenberg (HEISENBERG, 1984; NOVELLO, 2007a), cujas soluções são conhecidas como espinores de Heisenberg. Temos os espinores de Inomata-McKinley como uma subclasse destes espinores. A referência (NOVELLO, 2007a) apresenta a construção de espinores de Dirac em termos de uma classe particular de espinores de Inomata-McKinley, os quais batizamos de espinores restritos de Inomata-McKinley, ou espinores RIM².

Na primeira seção deste capítulo iremos definir os espinores RIM e apresentar o método supracitado de decomposição de campos de Dirac em termos destes espinores. A segunda seção é nossa contribuição no que concerne a relação entre espinores RIM e espinores exóticos. Mais especificamente, vamos mostrar que tal relação é de incompatibilidade, ou seja, espinores exóticos não podem ser representados como uma combinação de espinores RIM. Discutiremos, no último capítulo, como este resultado negativo tem forte impacto no estudo da topologia do próprio espaçotempo.

Abrimos a terceira seção com uma breve revisão da chamada classificação de Lounesto. Depois, o que se segue são outras contribuições nossas, desta vez de teor mais algébrico, finalizando este capítulo. De início, fornecemos um método de classificação espinorial em classes de homotopia, condensados na forma de dois teoremas, que enunciaremos e demonstraremos. Por fim, faremos uma completa categorização de uma subclasse de espinores RIM dentro da classificação de Lounesto: tal subclasse é a mais completa possível de espinores RIM neste contexto, pois se trata do conjunto de *todos* os espinores RIM passíveis de se submeterem a tal classificação.

4.1 O QUE SÃO ESPINORES RIM?

Sabemos que a equação dinâmica de Dirac é linear com respeito aos campos espinoriais,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M\mathbb{I}_4) \Psi^D = 0, \quad (1)$$

em que M é um parâmetro de massa e \mathbb{I}_4 é a matriz identidade de dimensão 4. Chamaremos de espinores de Dirac as soluções Ψ^D . A contrapartida não-linear, que chamamos de Equação de Heisenberg, é dada por

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - 2s(A + iB\gamma^5)]\Psi^H = 0, \quad (2)$$

com $A := \bar{\Psi}^H \Psi^H$ e $B := i\bar{\Psi}^H \gamma^5 \Psi^H$ sendo os bilineares covariantes associados ao chamado espinor de Heisenberg Ψ^H , e s uma constante de dimensão (distância)². A Equação de Heisenberg (2) pode

¹ No sentido de que respeitam uma equação dinâmica linear, a Equação de Dirac.

² O termo RIM vem do inglês *restricted Inomata-McKinley*.

ser obtida variando-se a ação construída da lagrangiana

$$L = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi - s J_\mu J^\mu, \quad (3)$$

com respeito ao campo espinorial (JOFFILY; NOVELLO, 2016; HEISENBERG, 1984). Na referência (DURR W. HEISENBERG; YAMAZAKI, 1959), essa equação não-linear foi profundamente investigada sob simetrias discretas. Sem assumir qualquer simetria específica para os espinores, mostra-se que a própria equação dinâmica é invariante perante a ação de simetrias C , P e T , além de transformações de escala.

Mantendo a abordagem de comparar as dinâmicas linear de Dirac e não-linear de Heisenberg, vamos falar de soluções específicas das mesmas. Para o caso linear de um espinor de Dirac Ψ^D , uma particular solução (ondas planas) é caracterizada como

$$\partial_\mu \Psi^D = i k_\mu \Psi^D. \quad (4)$$

No caso não-linear para espinores Ψ^H , é possível encontrar soluções (NOVELLO, 2007a) definidas pela propriedade

$$\partial_\mu \Psi^H = (a J_\mu + b K_\mu \gamma^5) \Psi^H, \quad (5)$$

com $a, b \in \mathbb{C}$ tais que $2s = i(a - b)$. Ainda, a condição de integrabilidade exige que tenhamos $\text{Re}(a) = \text{Re}(b)$. Um espinor Ψ^H que satisfaz a condição (5) é chamado de espinor restrito de Inomata-McKinley, ou simplesmente espinor RIM.

O termo “restrito” foi cunhado por nós (BEGHETTO; SILVA, 2017) pelo motivo de que na decomposição original (INOMATA; MCKINLEY, 1965) o primeiro termo do lado direito da Equação (5) é dado por $K^\lambda \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^5$. O mapeamento entre este termo e J_μ não é algo direto, sendo dado por meio de um operador matricial não-trivial, que chamaremos de G . Vejamos o procedimento:

A equação original é da forma

$$\partial_\mu \Psi = \frac{1}{2} \epsilon \underbrace{(\bar{\Psi} \gamma^\lambda \gamma^5 \Psi)}_{\tilde{a}} \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^5 \Psi - 2 \epsilon \underbrace{(\bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma^5 \Psi)}_{\tilde{b}} \gamma^5 \Psi, \quad (6)$$

em que ϵ é uma constante real. Assim,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Psi &= \underbrace{\tilde{a}(-i)}_a K^\lambda \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^5 \Psi + \underbrace{\tilde{b}(-i)}_b K_\mu \gamma^5 \Psi \Rightarrow \\ \partial_\mu \Psi &= a K^\lambda \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^5 \Psi + b K_\mu \gamma^5 \Psi. \end{aligned} \quad (7)$$

Comparando com a Equação (5), queremos que

$$K^\lambda \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_5 \Psi := \varepsilon J_\mu \Psi \Rightarrow \quad (8)$$

$$K^\lambda \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_5 = \varepsilon J_\mu \mathbb{I}G \xrightarrow{\varepsilon G \rightarrow G}$$

$$K^\alpha \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_5 = J_\mu G. \quad (9)$$

Contraindo com J^μ pela esquerda, obtemos $J^\mu K^\alpha \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_5 = J^2 G$, que nos leva a

$$G = \frac{1}{J^2} (J^\mu K^\alpha \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_5). \quad (10)$$

Como $\{\gamma_\nu, \gamma_\lambda\} = 2\eta_{\nu\lambda}$, podemos escrever $\gamma_\alpha \gamma_\mu = \frac{1}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\mu] + \eta_{\mu\alpha}$. Com isso, e sabendo que J e K são ortogonais, tem-se

$$G = \frac{1}{J^2} \left(J^\mu K^\alpha \frac{1}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\mu] + J \bullet K^0 \right) \gamma_5, \quad (11)$$

e finalmente obtemos a forma explícita do operador que restringe os espinores de Heisenberg ao caso particular dos espinores RIM:

$$G = \frac{1}{2J^2} J^\mu K^\alpha [\gamma_\alpha, \gamma_\mu] \gamma_5. \quad (12)$$

Agora, vamos apresentar o mecanismo utilizado na referência (NOVELLO, 2007a) para escrever um espinor de Dirac Ψ^D em termos do espinor não-linear³ Ψ^H satisfazendo a condição (5), ou seja, os espinores RIM. Tal mecanismo servirá como protocolo a ser utilizado mais adiante. Enfatizamos aqui que a decomposição é feita supondo-se um espaço-tempo E com topologia trivial, no sentido de ter um primeiro grupo fundamental trivial $\pi_1(E) = 0$. Com isso, exigimos que as correntes J_μ e K_μ devam ser irrotacionais (NOVELLO, 2007a). Assim, usando a notação $J \equiv \sqrt{J^2}$, escrevemos

$$J_\mu = \partial_\mu S, \quad (13)$$

$$K_\mu = \partial_\mu R, \quad (14)$$

em que

$$S = \frac{1}{(a + \bar{a})} \ln(J), \quad (15)$$

$$R = \frac{1}{(b - \bar{b})} \ln\left(\frac{A - iB}{J}\right). \quad (16)$$

Colocadas as hipóteses necessárias para se obter a decomposição de Ψ^D , começaremos escrevendo Ψ^H em termos de suas componentes mão-esquerda Ψ_L^H e mão-direita Ψ_R^H :

$$\Psi^H = \Psi_L^H + \Psi_R^H = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma^5) \Psi^H + \frac{1}{2} (\mathbb{I} - \gamma^5) \Psi^H. \quad (17)$$

³ Quando dizemos “espinor não-linear” queremos enfatizar que este obedece uma equação dinâmica não-linear.

O procedimento adotado é o seguinte: vamos supor a existência de funções $F = F(S, R)$ e $G = G(S, R)$ tais que as componentes mão-esquerda Ψ_L^D e mão-direita Ψ_R^D do espinor de Dirac Ψ^D possam ser escritas como

$$\Psi_L^D = e^F \Psi_L^H, \quad (18)$$

$$\Psi_R^D = e^G \Psi_R^H. \quad (19)$$

O que queremos, então, para termos a decomposição sugerida por meio das Equações (18) e (19) é saber quais as propriedades das funções F e G .

Da condição (5) temos

$$\partial_\mu \Psi_L^H = (aJ_\mu + bK_\mu \gamma^5) \Psi_L^H, \quad (20)$$

$$\partial_\mu \Psi_R^H = (aJ_\mu - bK_\mu \gamma^5) \Psi_R^H, \quad (21)$$

o que, utilizando as Equações (18) e (19), nos leva a

$$\partial_\mu \Psi_L^D = \left(\frac{\partial F}{\partial S} J_\mu + \frac{\partial F}{\partial R} K_\mu \right) \Psi_L^D + (aJ_\mu + bK_\mu) \Psi_L^D, \quad (22)$$

$$\partial_\mu \Psi_R^D = \left(\frac{\partial G}{\partial S} J_\mu + \frac{\partial G}{\partial R} K_\mu \right) \Psi_R^D + (aJ_\mu - bK_\mu) \Psi_R^D. \quad (23)$$

Multiplicando essas expressões por $i\gamma^\mu$ e observando a equação de Dirac (1), que deve ser satisfeita por $\Psi^D = \Psi_L^D + \Psi_R^D$, obtem-se as seguintes formas para F e G :

$$F = -\frac{1}{2}(b - \bar{b})R + \left[2is - \frac{1}{2}(b - \bar{b}) \right] S + \frac{iM}{(a + \bar{a})} e^{-(a+\bar{a})S}, \quad (24)$$

$$G = \frac{1}{2}(b - \bar{b})R + \left[2is - \frac{1}{2}(b - \bar{b}) \right] S + \frac{iM}{(a + \bar{a})} e^{-(a+\bar{a})S}. \quad (25)$$

Portanto, substituindo as soluções (24) e (25) nas Equações (18) e (19), finalmente temos

$$\Psi^D = \exp \left[\frac{iM}{(a + \bar{a})J} \right] J^{2\sigma} \left(\sqrt{\frac{J}{A - iB}} \Psi_L^H + \sqrt{\frac{A - iB}{J}} \Psi_R^H \right), \quad (26)$$

em que M é um parâmetro de massa vindo da equação de Dirac, $J^{2\sigma} = \exp \left[\left(2is - \frac{b-\bar{b}}{2} \right) S \right]$, e $\sigma := -\frac{i \operatorname{Im}(a)}{4 \operatorname{Re}(a)}$. Portanto, espinores de Dirac podem ser representados como combinações de espinores RIM, que satisfazem a equação não-linear de Heisenberg (2). Tal procedimento se mostra importante para descrever física de neutrinos (INOMATA; MCKINLEY, 1965; NOVELLO, 2007a).

4.2 DA OBSTRUÇÃO QUANTO A EXISTÊNCIA DE ESPINORES RIM EXÓTICOS

Lembramos que, no caso de espinores exóticos, estamos trabalhando sobre uma variedade multiplamente conexa. A não-trivialidade da topologia da variedade afeta a conexão de spin e, portanto, o operador derivada. A dinâmica do espinor exótico, então, é alterada recebendo uma 1-forma extra θ ,

que chamamos de “termo exótico”. Em outras palavras, a conexão relacionada ao espinor exótico $\tilde{\Psi}$ deve “sentir” a não-trivialidade. Assim, devemos construir novas condições para as correntes levando em consideração a exotividade da topologia subjacente a tal variedade. Definindo a “corrente exótica”

$$\tilde{J}^\mu := \tilde{\Psi} \gamma^\mu \tilde{\Psi}, \quad (27)$$

com $\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}^\dagger \gamma^0$, uma maneira de obter estas novas condições é verificando a forma do operador de derivação que garanta a conservação de \tilde{J}^μ .

Primeiramente vamos reescrever, para efeito de organização, a equação dinâmica exótica:

$$[i(\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^\mu \partial_\mu \theta) - m\mathbb{I}] \tilde{\Psi} = 0. \quad (28)$$

A equação conjugada a esta pode ser escrita como

$$-i\partial_\mu \tilde{\Psi}^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - i\tilde{\Psi}^\dagger \partial_\mu \theta (\gamma^\mu)^\dagger = m\tilde{\Psi}. \quad (29)$$

Multiplicando a Equação (29) por $i\gamma^0$ pela direita, obtemos

$$\partial_\mu \tilde{\Psi} \gamma^\mu = im\tilde{\Psi} - \tilde{\Psi} \partial_\mu \theta \gamma^\mu. \quad (30)$$

Utilizando as equações (29) e (30) no cálculo de $\partial_\mu \tilde{J}^\mu = \left(\partial_\mu \tilde{\Psi}\right) \gamma^\mu \tilde{\Psi} + \tilde{\Psi} \gamma^\mu \left(\partial_\mu \tilde{\Psi}\right)$, tem-se que $\partial_\mu \tilde{J}^\mu = -2\partial_\mu \theta \tilde{\Psi} \gamma^\mu \tilde{\Psi}$, o que é equivalente a

$$(\partial_\mu + 2\partial_\mu \theta) \tilde{J}^\mu = 0. \quad (31)$$

Como θ é uma função escalar em aberto, podemos redefinir $2\theta \rightarrow \theta$ e escrever o novo operador que mantém \tilde{J}^μ invariante como

$$\tilde{\nabla}_\mu := \partial_\mu + \partial_\mu \theta. \quad (32)$$

Note que a forma funcional deste operador já era esperada, olhando para a equação (28).

Dito isto, podemos seguir escrevendo a versão exótica da condição RIM (5) simplesmente redefinindo o operador derivada $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + \partial_\mu \theta$, obtendo

$$\partial_\mu \tilde{\Psi} = (aJ_\mu + bK_\mu \gamma^5 - \partial_\mu \theta) \tilde{\Psi}. \quad (33)$$

Dessa forma, as condições (13) e (14) de irrotacionalidade para as correntes (não mais válidas em um espaço multiplamente conexo) são “atualizadas”⁴:

$$\tilde{J}_\mu = \partial_\mu S + S \partial_\mu \theta, \quad (34)$$

$$\tilde{K}_\mu = \partial_\mu R + R \partial_\mu \theta, \quad (35)$$

com R e S sendo quantidades escalares. Vamos procurar a forma explícita de R e S . Utilizando a

⁴ Note que se fizéssemos θ constante recuperávamos, corretamente, o caso usual.

condição dada pela Equação (33) para calcular $\partial_\mu \tilde{J}_\nu = \left(\partial_\mu \tilde{\Psi} \right) \gamma_\nu \tilde{\Psi} + \tilde{\Psi} \gamma_\nu \left(\partial_\mu \tilde{\Psi} \right)$, encontramos⁵

$$\partial_\mu \tilde{J}_\nu = (\bar{a} \tilde{J}_\mu + \bar{b} \tilde{K}_\mu \gamma^5 - \partial_\mu \theta) \tilde{\Psi} \gamma_\nu \tilde{\Psi} + \tilde{\Psi} \gamma_\nu (a \tilde{J}_\mu + b \tilde{K}_\mu \gamma^5 - \partial_\mu \theta) \tilde{\Psi}, \quad (36)$$

ou de forma mais apropriada,

$$\partial_\mu \tilde{J}_\nu = (a + \bar{a}) \tilde{J}_\mu \tilde{J}_\nu + (b + \bar{b}) \tilde{K}_\mu \tilde{K}_\nu - 2 \partial_\mu \theta \tilde{J}_\nu. \quad (37)$$

Ao multiplicarmos a Equação (37) por \tilde{J}^ν pelo lado direito, temos que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial_\mu \tilde{J}^2}{\tilde{J}^2 (a + \bar{a})} = \tilde{J}_\mu - \frac{2}{(a + \bar{a})} \partial_\mu \theta. \quad (38)$$

Substituindo a definição (34) na Equação (38), e notando que $\frac{\partial_\mu \tilde{J}^2}{\tilde{J}^2} = \partial_\mu \ln(\tilde{J}^2)$, obtemos:

$$S \partial_\mu \theta = \partial_\mu \left[-S + \frac{1}{2(a + \bar{a})} \ln(\tilde{J}^2) + \frac{2\theta}{(a + \bar{a})} \right]. \quad (39)$$

Um fato advindo da Equação (39) se faz crucial neste momento: note que a quantidade entre colchetes do lado direito é um escalar, que vamos chamar de H . Ou seja,

$$H := -S + \frac{1}{2(a + \bar{a})} \ln(\tilde{J}^2) - \frac{2\theta}{(a + \bar{a})}. \quad (40)$$

Pode-se, logo, escrever $S \partial_\mu \theta = \partial_\mu H$, o que faz com que a Equação (34) tome a conflitante forma:

$$\tilde{J}_\mu = \partial_\mu (S + H). \quad (41)$$

O conflito se encontra no seguinte fato: o significado da Equação (41) é que \tilde{J}_μ é o gradiente de uma quantidade escalar $S + H$, ou seja, é irrotacional. Porém, estamos atuando com espinores exóticos, o que, sabemos, significa que é *necessário* termos a condição dada pela Equação (34) como verdadeira se quisermos manter o cenário exótico. De fato, partimos desta para alcançar aquela, o que nos leva a questionar a validade da suposta existência de espinores RIM exóticos.

Vamos ver o que ocorre quando procuramos o escalar R . Com $\tilde{A} \equiv \tilde{\Psi} \tilde{\Psi}$ e $\tilde{B} \equiv -\tilde{\Psi} \gamma_{0123} \tilde{\Psi}$, utilizando a Equação (33) para calcular a derivada $\partial_\mu \tilde{A} = \left(\partial_\mu \tilde{\Psi} \right) \tilde{\Psi} + \tilde{\Psi} \left(\partial_\mu \tilde{\Psi} \right)$, obtemos

$$\partial_\mu \tilde{A} = (a + \bar{a}) \tilde{J}_\mu \tilde{A} + i(b - \bar{b}) \tilde{K}_\mu \tilde{B} - 2(\partial_\mu \theta) \tilde{A}. \quad (42)$$

Analogamente, fazemos $\partial_\mu \tilde{B} = i \left(\partial_\mu \tilde{\Psi} \right) \gamma_5 \tilde{\Psi} + i \tilde{\Psi} \gamma_5 \left(\partial_\mu \tilde{\Psi} \right)$, e a seguinte relação é obtida:

$$\partial_\mu \tilde{B} = (a + \bar{a}) \tilde{J}_\mu \tilde{B} + i(b - \bar{b}) \tilde{K}_\mu \tilde{A} - 2(\partial_\mu \theta) \tilde{B}. \quad (43)$$

⁵ No artigo publicado por nós (BEGHETTO; SILVA, 2017) com este resultado, existe um sinal trocado envolvendo o termo exótico. Felizmente, mantendo a paz de espírito do autor, este sinal não compromete em nada o resultado alcançado.

Agora, atuando pela esquerda com \tilde{K}^μ na Equação (42) e com $(-i\tilde{K}^\mu)$ na Equação (43), e somando os resultados:

$$\begin{aligned} \tilde{K}^\mu(\partial_\mu\tilde{A} - i\partial_\mu\tilde{B}) &= (a + \bar{a})\tilde{K}^\mu\tilde{J}_\mu(\tilde{A} - i\tilde{B}) + (b + \bar{b})\tilde{K}^2(\tilde{A} - i\tilde{B}) - 2\partial_\mu\theta(\tilde{A} - i\tilde{B}) \xrightarrow{\times \tilde{K}_\mu \text{ pela esquerda}} \\ \tilde{K}_\mu &= \frac{1}{(b + \bar{b})(\tilde{A} - i\tilde{B})} \left[\partial_\mu(\tilde{A} - i\tilde{B}) - (a + \bar{a})(\tilde{A} - i\tilde{B})\tilde{J}_\mu + 2\partial_\mu\theta(\tilde{A} - i\tilde{B}) \right] \xrightarrow{\times \frac{\tilde{J}^2}{\tilde{J}^2} \text{ e usando Eq. (38)}} \\ \tilde{K}_\mu &= \frac{1}{(b + \bar{b})} \partial_\mu \left[\ln \left(\frac{|\tilde{A} - i\tilde{B}|}{\tilde{J}} \right) \right], \end{aligned} \quad (44)$$

em que $\tilde{J} := \sqrt{\tilde{J}^2}$. A Equação (44) nos informa que \tilde{K}_μ também é irrotacional, nos levando a um conflito, dessa vez, com a Equação (35).

Portanto, as Equações (34) e (35) não são mais válidas nesse cenário exótico, e acabamos de demonstrar o seguinte Lema, válido em uma variedade com topologia não-trivial:

Lema 1. *Espinores exóticos não podem ser representados por uma combinação de espinores RIM.*

A própria decomposição RIM se apresenta fortemente dependente da trivialidade da topologia da variedade base em que se está trabalhando, algo refletido na condição de irrotacionalidade das correntes. É justamente nesse ponto que nosso resultado se apoia. Logo, o Lema (1) nos diz que, ao trabalharmos com espinores RIM, estamos fixando a topologia do espaço-tempo como sendo trivial. Encontramos então, como consequência de descobrirmos um sistema físico que não possui contrapartida exótica, uma possível ferramenta que auxilia no mapeamento da topologia do próprio espaço-tempo ou, mais rigorosamente, na investigação da trivialidade ou não-trivialidade do grupo fundamental associado à variedade espaçotemporal.

4.3 ESPINORES RIM, HOMOTOPIAS E CLASSIFICAÇÃO DE LOUNESTO

4.3.1 A classificação de Lounesto

Usando as matrizes gama de Dirac γ^μ , que são escritas na chamada representação de Weyl como

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \\ -\gamma_\kappa &= \gamma^\kappa = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\sigma_\kappa \\ \sigma_\kappa & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \kappa \in \{1, 2, 3\}, \\ \gamma^5 &= -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^{0123} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

em que \mathbb{I} é a matriz identidade 2×2 , \mathbb{O} é a matriz nula 2×2 , e σ_κ são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

podemos escrever os chamados bilineares covariantes associados aos espinores: se Ψ é um espinor, então os bilineares covariantes associados a ele são:

- (i) $A = \Psi^\dagger \gamma_0 \Psi$, (um escalar),
- (ii) $\mathbf{J} = J_\mu \theta^\mu = \Psi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \Psi \theta^\mu$, (um vetor),
- (iii) $\mathbf{S} = S_{\mu\nu} \theta^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \Psi^\dagger \gamma_0 i \gamma_{\mu\nu} \Psi \theta^\mu \wedge \theta^\nu$, (um bivetor),
- (iv) $\mathbf{K} = K_\mu \theta^\mu = \Psi^\dagger \gamma_0 i \gamma_{0123} \gamma_\mu \Psi \theta^\mu$, (um pseudovetor),
- (v) $B = -\Psi^\dagger \gamma_0 \gamma_{0123} \Psi$, (um pseudo-escalar),

com $\{\theta^\mu\}$ sendo a base do chamado fibrado exterior $\Lambda(M)$ associado ao espaço-tempo M , cujos bilineares são seções (LOUNESTO, 2001; BRITO; ROCHA, 2016). Os bilineares são vinculados pelas chamadas identidades de Fierz-Pauli-Kofinkki (FPK): definindo a estrutura multivetorial $Z := A + \mathbf{J} + i\mathbf{S} - i\gamma_{0123}\mathbf{K} + \gamma_{0123}B$ denominada Agregado de Fierz, escreve-se as identidades de FPK como

$$Z^2 = 4AZ; \quad (45)$$

$$Z\gamma_\mu Z = 4J_\mu Z; \quad (46)$$

$$Zi\gamma_{\mu\nu} Z = 4S_{\mu\nu} Z; \quad (47)$$

$$Z\gamma_{0123} Z = -4BZ; \quad (48)$$

$$Zi\gamma_{0123}\gamma_\mu Z = 4K_\mu Z. \quad (49)$$

Lounesto (LOUNESTO, 2001; SILVA; CAVALCANTI, 2017) criou uma importante categorização para uma classe de espinores Ψ tais que $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ e $\mathbf{J} \neq 0$, trabalhando com os bilineares covariantes associados aos campos espinoriais. De fato, os vínculos estipulados pelas identidades de FPK levam a chamada classificação de Lounesto, que categoriza os espinores Ψ em seis classes disjuntas:

- 1) $A \neq 0; \quad B \neq 0.$
- 2) $A \neq 0; \quad B = 0.$
- 3) $A = 0; \quad B \neq 0.$
- 4) $A = 0 = B; \quad \mathbf{K} \neq 0; \quad \mathbf{S} \neq 0.$
- 5) $A = 0 = B; \quad \mathbf{K} = 0; \quad \mathbf{S} \neq 0.$
- 6) $A = 0 = B; \quad \mathbf{K} \neq 0; \quad \mathbf{S} = 0.$

Para as classes 1, 2 e 3, vale $\mathbf{K}, \mathbf{S} \neq 0$, e os espinores pertencentes a estas classes são denominados espinores regulares. As classes 4, 5 e 6 consistem dos chamados espinores singulares.

4.3.2 Restrições na representação de espinores de Dirac em termos de espinores RIM

Vimos que o espinor de Dirac Ψ^D pode ser representado em termos de componentes mão-esquerda e mão-direita de espinores RIM. Agora queremos ver em que classe de Lounesto tal espinor se encaixa. Para tanto, iremos escrever explicitamente seus bilineares covariantes em termos de Ψ^H . Primeiramente, reescrevemos o espinor

$$\Psi^D = \alpha J^{2\sigma} \left(\sqrt{\frac{J}{A-iB}} \Psi_L^H + \sqrt{\frac{A-iB}{J}} \Psi_R^H \right), \quad (50)$$

com $\alpha := \exp \left[i \frac{M}{2\text{Re}(a)J} \right]$. Lembrando que as componentes do espinor RIM podem ser representadas como $\Psi_L^H = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \gamma^5)\Psi^H$ e $\Psi_R^H = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \gamma^5)\Psi^H$, e denotando $\beta := \sqrt{\frac{J}{A-iB}}$, obtemos

$$\Psi^D = \alpha J^{2\sigma} [\beta(\mathbb{I} + \gamma^5) + \beta^{-1}(\mathbb{I} - \gamma^5)] \Psi^H. \quad (51)$$

A equação obtida é elegante e nos apresenta o espinor Ψ^D como “proporcional” ao espinor Ψ^H , sendo uma forma útil quando formos calcular os bilineares associados a Ψ^D . Durante o processo, iremos precisar de um importante resultado sobre números complexos:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \frac{z + |z|}{|(z + |z|)|}, \quad (52)$$

isto é,

$$\text{Re}(\sqrt{z}) = \sqrt{|z|} \frac{\text{Re}(z) + |z|}{|(z + |z|)|}, \quad \text{Im}(\sqrt{z}) = \sqrt{|z|} \frac{\text{Im}(z)}{|(z + |z|)|}, \quad (53)$$

para $z \in \mathbb{C}$. O primeiro passo é calcularmos $(\Psi^D)^\dagger$, o que nos fornece

$$(\Psi^D)^\dagger = (\Psi^H)^\dagger \left\{ \frac{2}{\sqrt{2J(J+A)}} [(J+A) + B\gamma^5] \right\} (J^{2\sigma})^{-1} \alpha^{-1}. \quad (54)$$

Feito isso, com (54) em mãos, após alguns cálculos longos construímos os bilineares covariantes associados ao espinor de Dirac Ψ^D :

$$A_D = T_{(ABJ)} \bar{\Psi}^H \left[(A+J-B)(\mathbb{I} + \gamma^5) + \frac{(A+J+B)(A-iB)}{J} (\mathbb{I} - \gamma^5) \right] \Psi^H, \quad (55)$$

$$B_D = iT_{(ABJ)} \bar{\Psi}^H \left[(A+J-B)(\mathbb{I} + \gamma^5) - \frac{(A+J+B)(A-iB)}{J} (\mathbb{I} - \gamma^5) \right] \Psi^H, \quad (56)$$

$$J_D^\mu = T_{(ABJ)} \bar{\Psi}^H \gamma^\mu \left[(A+J+B)(\mathbb{I} + \gamma^5) + \frac{(A+J-B)(A-iB)}{J} (\mathbb{I} - \gamma^5) \right] \Psi^H, \quad (57)$$

$$K_D^\mu = -iT_{(ABJ)} \bar{\Psi}^H \gamma^\mu \left[(A+J+B)(\mathbb{I} + \gamma^5) - \frac{(A+J-B)(A-iB)}{J} (\mathbb{I} - \gamma^5) \right] \Psi^H, \quad (58)$$

em que definimos o escalar $T_{(ABJ)} \equiv \sqrt{\frac{2}{(J+A)(A-iB)}} \in \mathbb{C}$ para deixarmos as equações mais inteligíveis.

Resta-nos agora inspecionar a nulidade dos bilineares obtidos. Antes note que, por construção, não é possível termos $A = 0$ e $B = 0$ simultaneamente, ou seja, os espinores RIM são regulares. Em particular, isso implica que não podemos ter $A - iB = 0$. Salientamos também que $J = \sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$.

Dito isso, podemos continuar: vamos provar que

Lema 2. *Todo espinor de Dirac atuando em um espaço-tempo usual (ou seja, com topologia trivial) escrito em termos de espinores RIM pertence a classe I na classificação de Lounesto.*

Demonstração. Primeiramente, observemos que, como $(\mathbb{I} \pm \gamma^5)$ são ambos não-nulos e linearmente independentes⁶, só nos resta termos simultaneamente nulos $A + J - B$ e $A + J + B$ para obtermos os bilineares todos nulos.

Começemos supondo que

$$A + J - B = 0 \quad (59)$$

nas Equações (55-58). Desse modo, temos que $A + J + B = 2B$. Para obtermos $A + J + B = 0$ devemos ter $B = 0$, que nos leva a condição $A + J = 0$. Entretanto, vimos que se $B = 0$ então necessariamente $A \neq 0$. Ora, como $J \neq 0$, temos $A + J \neq 0$ (de fato, olhe a expressão de $T_{(ABJ)}$), o que evidencia uma contradição! Logo, devemos ter

$$A + J - B \neq 0, \quad (60)$$

e nesse caso nenhum dos bilineares associados a Ψ^D é nulo.

Por outro lado, analogamente vamos supor, nas Equações (55-58), que

$$A + J + B = 0. \quad (61)$$

De forma direta, obtemos que $A + J - B = -2B$. Logo, para termos $A + J - B = 0$, se faz necessário impor $B = 0$, o que leva a condição $A + J = 0$. Novamente, o procedimento deixa explícita uma contradição! Ou seja, nesse caso temos

$$A + J + B \neq 0, \quad (62)$$

e novamente nenhum bilinear é nulo.

Como esgotamos as possibilidades de tentativas de encontrarmos bilineares nulos, o lema está demonstrado. \square

Uma demonstração alternativa e mais curta pode ser feita da seguinte maneira: como observado, a única forma de termos todos os bilineares igualmente nulos é impondo que $A + J - B = 0 = A + J + B$. Isso levaria a termos necessariamente $B = 0$, e só nos restaria termos $A + J = 0$, o que vimos não ser verdade. A demonstração que apresentamos anteriormente é a feita no trabalho original (BEGHETTO; SILVA, 2017).

⁶ De fato, tais grandezas formam os operadores quirais de projeção $\frac{1}{2}(\mathbb{I} \pm \gamma^5)$, que dão origem às componentes mão-esquerda e mão-direita de um espinor.

4.3.3 Espinores de Dimensão de Massa um e espinores RIM

De forma análoga ao que foi feito para espinores de Dirac, vamos analisar a possibilidade de escrevermos um espinor de dimensão de massa um (ou, simplesmente, espinor MDO) (AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005; AHLUWALIA-KHALILOVA; GRUMILLER, 2005; AHLUWALIA, 2017) em termos dos espinores RIM. Continuaremos lidando, então, com a equação não-linear de Heisenberg, porém não mais com a Equação (1) para Ψ^D : os espinores MDO, λ , não satisfazem a equação de Dirac, mas uma equação “tipo-Dirac” (AHLUWALIA-KHALILOVA; GRUMILLER, 2005) da forma

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu \Xi \pm m\mathbb{I})\lambda_h^{S/A}(\mathbf{x}) = 0, \quad (63)$$

em que o índice inferior h simboliza a helicidade $h = \{\pm, \mp\}$ e o índice superior S/A nos diz se o espinor é autoconjugado ou anti-autoconjugado, respectivamente, com relação ao operador de conjugação de carga⁷ \mathcal{C} . Finalizando a apresentação desta nova equação, temos que o operador Ξ é dado, em forma matricial, por (SILVA et al., 2016)

$$\Xi = \begin{pmatrix} \frac{ip \sin \theta}{m} & \frac{-i(E+p \cos \theta)e^{-i\phi}}{m} & 0 & 0 \\ \frac{i(E-p \cos \theta)e^{i\phi}}{m} & \frac{-ip \sin \theta}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-ip \sin \theta}{m} & \frac{-i(E-p \cos \theta)e^{-i\phi}}{m} \\ 0 & 0 & \frac{i(E+p \cos \theta)e^{i\phi}}{m} & \frac{ip \sin \theta}{m} \end{pmatrix}, \quad (64)$$

em que $p = |\mathbf{p}|$. Tal operador satisfaz $\Xi^2 = \mathbb{I}$ e $[\Xi, \gamma^\mu p_\mu] = 0$.

Como pode ser visto na referência (SILVA et al., 2016), é possível construir uma base para o caso de espinores MDO usando álgebra de Clifford, da seguinte forma: para qualquer elemento Γ pertencendo a tal álgebra, as relações de FPK são

$$(\overline{\lambda}_h \Gamma \gamma_\mu \lambda_h) = (\overline{\lambda}_h \Gamma \lambda_h) \lambda_h - (\overline{\lambda}_h \Gamma \gamma_5 \lambda_h) \gamma_5 \lambda_h, \quad (65)$$

em que $\Gamma \in \{\mathbb{I}, \gamma_5, \gamma_\mu, \Xi \gamma_5 \gamma_\mu \Xi\}$. Destas relações, obtem-se

$$J^2 = A^2 + B^2, \quad (66)$$

e também

$$\begin{aligned} (\overline{\lambda}_h \Xi \gamma_5 \gamma_\mu \Xi \lambda_h) \gamma^\mu \lambda_h &= (\overline{\lambda}_h \Xi \gamma_5 \Xi \lambda_h) \lambda_h - (\overline{\lambda}_h \Xi^2 \lambda_h) \gamma_5 \lambda_h, \\ &= (\overline{\lambda}_h \gamma_5 \lambda_h) \lambda_h - (\overline{\lambda}_h \lambda_h) \gamma_5 \lambda_h. \end{aligned} \quad (67)$$

É também possível se mostrar que

$$[\Xi, \gamma_5] = 0, \quad \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \quad \text{e} \quad \Xi^2 = \mathbb{I},$$

⁷ Ou seja, $\mathcal{C}\lambda_h^S = +\lambda_h^S$ e $\mathcal{C}\lambda_h^A = -\lambda_h^A$.

e com isso podemos escrever

$$\begin{aligned} (\overline{\lambda}_h \Xi \gamma_5 \gamma_\mu \Xi \lambda_h) \gamma^\mu \gamma^5 \lambda_h &= -(\overline{\lambda}_h \Xi \gamma_5 \gamma_\mu \Xi \gamma_5 \lambda_h) \gamma^\mu \lambda_h, \\ &= (\overline{\lambda}_h \Xi \gamma_\mu \Xi \lambda_h) \gamma^\mu \lambda_h. \end{aligned} \quad (68)$$

Finalmente, usando as relações (67) e (68), obtemos

$$J_\mu \gamma^\mu \lambda_L = (A - iB) \lambda_R, \quad (69)$$

$$J_\mu \gamma^\mu \lambda_R = (A + iB) \lambda_L, \quad (70)$$

$$K_\mu \gamma^\mu \lambda_L = -(A - iB) \lambda_R, \quad (71)$$

$$K_\mu \gamma^\mu \lambda_R = (A + iB) \lambda_L. \quad (72)$$

Agora que apresentamos (pelo menos no nível necessário para o que segue) o espinor MDO λ , damos início ao nosso processo de decomposição do mesmo em termos de Ψ^H . Vamos seguir o mesmo protocolo visto para o caso do espinor de Dirac na Seção (4.1).

Podemos representar um espinor MDO como

$$\lambda_h^{S/A} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \gamma^5) \lambda_h^{S/A} + \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \gamma^5) \lambda_h^{S/A}, \quad (73)$$

isto é, decompondo-o em componentes mão-direita $\lambda_{R_h}^{S/A}$ e mão-esquerda $\lambda_{L_h}^{S/A}$:

$$\lambda_{R_h}^{S/A} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \gamma^5) \lambda_h^{S/A}, \quad (74)$$

$$\lambda_{L_h}^{S/A} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \gamma^5) \lambda_h^{S/A}. \quad (75)$$

Vamos supor a existência de grandezas⁸ \overline{F} e \overline{G} tais que

$$\lambda_h^{S/A} = e^{\overline{F}} \psi_{L_{h'}}^H + e^{\overline{G}} \psi_{R_{h'}}^H, \quad (76)$$

o que nos leva a escrever as componentes do espinor MDO como

$$\lambda_{L_h}^{S/A} = e^{\overline{F}} \psi_{L_{h'}}^H, \quad (77)$$

$$\lambda_{R_h}^{S/A} = e^{\overline{G}} \psi_{R_{h'}}^H. \quad (78)$$

O próximo passo é encontrar as formas explícitas das funções \overline{F} e \overline{G} de modo que o espinor $\lambda_h^{S/A}$ satisfaça a Equação (63). Derivando as componentes $\lambda_{L_h}^{S/A}$ e $\lambda_{R_h}^{S/A}$, obtemos

$$\partial_\mu \lambda_{L_h}^{S/A} = \left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial S} J_\mu + \frac{\partial \overline{F}}{\partial R} K_\mu \right) \lambda_{L_h}^{S/A} + (a J_\mu + b K_\mu) \lambda_{L_h}^{S/A}, \quad (79)$$

⁸ O símbolo “ $\overline{}$ ” sobre F e G , embora comumente usado para representar o campo dual de λ , está sendo usado aqui simplesmente para denotar as funções relacionadas ao espinor λ na tentativa de decompô-lo em termos de espinores RIM, e não possui nenhuma ligação com o dual do campo espinorial.

e

$$\partial_\mu \lambda_{R_h}^{S/A} = \left(\frac{\partial \vec{G}}{\partial S} J_\mu + \frac{\partial \vec{G}}{\partial R} K_\mu \right) \lambda_{R_h}^{S/A} + (aJ_\mu - bK_\mu) \lambda_{R_h}^{S/A}. \quad (80)$$

Agora faremos uma observação sobre a notação utilizada: a partir daqui iremos trabalhar, de forma abstrata, somente com o espinor λ_h^S . O motivo é simples e justificável: o conteúdo físico se mantém para todos os outros espinores MDO. Dito isso, podemos seguir em frente.

Lembrando da Equação (63), multiplicamos as Equações (79) e (80) por $i\gamma^\mu$ e obtemos

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \lambda_h^S &= i(A - iB) \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial S} - \frac{\partial \vec{F}}{\partial R} + (a - b) \right) \lambda_{R_h}^S + i(A + iB) \left(\frac{\partial \vec{G}}{\partial S} - \frac{\partial \vec{G}}{\partial R} + (a - b) \right) \lambda_{L_h}^S \\ &= m\Xi \lambda_h^S. \end{aligned} \quad (81)$$

Vamos suprimir a notação para o operador Ξ , dado pela Equação (64), e representá-lo na forma

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Xi_2 \end{pmatrix}, \quad (82)$$

com \mathbb{O} sendo a matriz nula de tamanho 2×2 . Usando as relações (69)-(72), consegue-se o seguinte conjunto de equações:

$$\left[(A - iB) \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial S} - \frac{\partial \vec{F}}{\partial R} + (a - b) \right) \mathbb{I} + im\Xi_1 \right] \lambda_{R_h}^S = 0, \quad (83)$$

$$\left[(A + iB) \left(\frac{\partial \vec{G}}{\partial S} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial R} + (a - b) \right) \mathbb{I} + im\Xi_2 \right] \lambda_{L_h}^S = 0. \quad (84)$$

Após cálculos diretos, porém longos, as soluções para as funções $\vec{F} = \vec{F}(S, R)$ e $\vec{G} = \vec{G}(S, R)$ são dadas por

$$\vec{F}_\pm(S, R) = -2isR \pm \frac{p \sin \theta (A + iB) e^{-2(a+\bar{a})S}}{2(a + \bar{a})}, \quad (85)$$

$$\vec{G}_\pm(S, R) = +2isR \pm \frac{p \sin \theta (A - iB) e^{-2(a+\bar{a})S}}{2(a + \bar{a})}. \quad (86)$$

Lembrando que $S = \frac{1}{(a+\bar{a})} \ln \sqrt{J^2}$, temos

$$J^2 = e^{2(a+\bar{a})S}. \quad (87)$$

Usando $A + iB = \frac{J^2}{A - iB}$ e a Equação (87) nas soluções (85) e (86), as reescrevemos na forma

$$e^{\vec{F}^-} = \frac{1}{\vartheta} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{p \sin \theta}{(a + \bar{a})(A - iB)} \right], \quad (88)$$

$$e^{\vec{G}^-} = \vartheta \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{p \sin \theta}{(a + \bar{a})(A + iB)} \right], \quad (89)$$

com $\vartheta \equiv e^{2isR}$. Usando análoga prescrição para as outras soluções, obtemos a forma geral:

$$e^{\vec{F}\pm} = \frac{1}{\vartheta} \exp \left[\pm \frac{1}{2} \frac{p \sin \theta}{(a + \bar{a})(A - iB)} \right], \quad (90)$$

$$e^{\vec{G}\pm} = \vartheta \exp \left[\pm \frac{1}{2} \frac{p \sin \theta}{(a + \bar{a})(A + iB)} \right]. \quad (91)$$

Assim, finalmente escrevemos os espinores MDO em termos de espinores RIM como

$$\lambda_h = \frac{1}{\vartheta} \exp \left[\pm \frac{p \sin \theta}{2(a + \bar{a})(A - iB)} \right] \Psi_{L_h}^H + \vartheta \exp \left[\pm \frac{p \sin \theta}{2(a + \bar{a})(A + iB)} \right] \Psi_{R_h}^H, \quad (92)$$

ou ainda, substituindo p por m ,

$$\lambda = \left(\sqrt{\frac{J}{A - iB}} \right)^\rho \exp \left[\pm \frac{m \sin \theta}{4\text{Re}(a)(A - iB)} \right] \Psi_L^H + \left(\sqrt{\frac{A - iB}{J}} \right)^\rho \exp \left[\pm \frac{m \sin \theta}{4\text{Re}(a)(A + iB)} \right] \Psi_R^H, \quad (93)$$

em que $\rho := \frac{\text{Im}(a) - \text{Im}(b)}{\text{Im}(b)} = \frac{-2s}{\text{Im}(b)}$. Note que omitimos os índices superiores S/A de λ pelo fato já mencionado de tais espinores se diferirem apenas por uma fase global.

4.3.4 Spinor-plane e funções homotópicas

Usaremos o termo “RIM-decomponível” para o espinor que pode ser escrito em termos dos espinores RIM. Dito isso, vamos começar com a definição do tipo de espaço com que passaremos a trabalhar.

Definição 55 (Planos espinoriais (*Spinor-planes*)). Denotaremos por Π^H o espaço bidimensional tal que o conjunto $\mathcal{B} = \{\Psi_L^H, \Psi_R^H\}$, formado pelas componentes mão-esquerda e mão-direita do espinor RIM Ψ^H , forma uma base. Analogamente, denotaremos os espaços Π^D (com base $\mathcal{D} = \{\Psi_L^D, \Psi_R^D\}$ sendo formada pelas componentes do espinor RIM-decomponível de Dirac Ψ^D) e $\Pi^{\mathcal{M}}$ (com base $\mathcal{M} = \{\lambda_L, \lambda_R\}$ consistindo nas componentes do espinor MDO RIM-decomponível λ). Estes espaços serão chamados de planos espinoriais, ou spinor-planes.

Assim, as Equações (26) e (93) são exemplos de espinores RIM-decomponíveis e, por consequência, de espinores representados no espaço Π^H via base \mathcal{B} .

Visando uma melhor organização do texto e das equações que se seguirão, vamos fixar a seguinte

notação para os números complexos inseridos nas decomposições já feitas nas Seções (4.1) e (4.3.3):

$$\alpha \equiv \exp \left[\frac{iM}{(a + \bar{a})J} \right], \quad (94)$$

$$\beta \equiv J^{2\sigma}, \quad (95)$$

$$\delta \equiv \sqrt{\frac{J}{A - iB}}, \quad (96)$$

$$\epsilon \equiv \left(\sqrt{\frac{J}{A - iB}} \right)^\rho, \quad (97)$$

$$\omega \equiv \exp \left[\frac{\pm m \sin \theta}{4\text{Re}(a)(A - iB)} \right], \quad (98)$$

$$\zeta \equiv \exp \left[\frac{\pm m \sin \theta}{4\text{Re}(a)(A + iB)} \right]. \quad (99)$$

Dessa forma, observando as equações dos espinores RIM-decomponíveis (26) e (93), podemos escrever suas componentes como

$$\Psi_L^D = \alpha\beta\delta\Psi_L^H, \quad (100)$$

$$\Psi_R^D = \alpha\beta\delta^{-1}\Psi_R^H, \quad (101)$$

$$\lambda_L = \epsilon\omega\Psi_L^H, \quad (102)$$

$$\lambda_R = \epsilon^{-1}\zeta\Psi_R^H. \quad (103)$$

Isso nos leva a

$$\lambda_L = \chi_1\Psi_L^D, \quad (104)$$

$$\lambda_R = \chi_2\Psi_R^D, \quad (105)$$

$$\Psi_L^D = \chi_1^{-1}\lambda_L, \quad (106)$$

$$\Psi_R^D = \chi_2^{-1}\lambda_R, \quad (107)$$

com os coeficientes definidos por

$$\chi_1 \equiv \epsilon\omega\delta^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}, \quad (108)$$

$$\chi_2 \equiv \epsilon^{-1}\zeta\delta\beta^{-1}\alpha^{-1}, \quad (109)$$

sendo obviamente inversíveis. Logo, estes coeficientes e suas inversas são as ferramentas-chave que produzem mapas entre os espinores RIM e de Dirac e entre os espinores RIM e MDO. Após cálculos

diretos e um pouco longos, chega-se a uma forma explícita destes coeficientes complexos:

$$\chi_1 = \left(\sqrt{\frac{J}{A - iB}} \right)^{\rho-1} \exp \left\{ \frac{1}{2\text{Re}(a)} \left[\pm \frac{m \sin \theta}{2(A - iB)} - i \left(\text{Im}(a) \ln J + \frac{M}{J} \right) \right] \right\}, \quad (110)$$

$$\chi_1^{-1} = \left(\sqrt{\frac{A - iB}{J}} \right)^{\rho-1} \exp \left\{ \frac{1}{2\text{Re}(a)} \left[\mp \frac{m \sin \theta}{2(A - iB)} + i \left(\text{Im}(a) \ln J + \frac{M}{J} \right) \right] \right\}, \quad (111)$$

$$\chi_2 = \left(\sqrt{\frac{A - iB}{J}} \right)^{\rho-1} \exp \left\{ \frac{1}{2\text{Re}(a)} \left[\pm \frac{m \sin \theta}{2(A + iB)} - i \left(\text{Im}(a) \ln J + \frac{M}{J} \right) \right] \right\}, \quad (112)$$

$$\chi_2^{-1} = \left(\sqrt{\frac{J}{A - iB}} \right)^{\rho-1} \exp \left\{ \frac{1}{2\text{Re}(a)} \left[\mp \frac{m \sin \theta}{2(A + iB)} + i \left(\text{Im}(a) \ln J + \frac{M}{J} \right) \right] \right\}. \quad (113)$$

Desse modo, obtém-se

$$\lambda = \frac{1}{2} [\chi_1(\mathbb{I} + \gamma^5) + \chi_2(\mathbb{I} - \gamma^5)] \Psi^D, \quad (114)$$

$$\Psi^D = \frac{1}{2} [\chi_1^{-1}(\mathbb{I} + \gamma^5) + \chi_2^{-1}(\mathbb{I} - \gamma^5)] \lambda. \quad (115)$$

Se definirmos as matrizes

$$M \equiv \frac{1}{2} [\chi_1(\mathbb{I} + \gamma^5) + \chi_2(\mathbb{I} - \gamma^5)], \quad (116)$$

$$N \equiv \frac{1}{2} [\chi_1^{-1}(\mathbb{I} + \gamma^5) + \chi_2^{-1}(\mathbb{I} - \gamma^5)], \quad (117)$$

facilmente verifica-se que $MN = NM = \mathbb{I}$, isto é, $N = M^{-1}$.

Então, acabamos de provar o seguinte Lema:

Lema 3. *Sejam $\varphi_D \in \Pi^D$ e $\varphi_\lambda \in \Pi^M$. Então existe um isomorfismo linear $M : \Pi^D \rightarrow \Pi^M$, dado por meio do operador $M = \frac{1}{2} [\chi_1(\mathbb{I} + \gamma^5) + \chi_2(\mathbb{I} - \gamma^5)]$, tal que*

$$\varphi_\lambda = M\varphi_D, \quad (118)$$

$$\varphi_D = M^{-1}\varphi_\lambda. \quad (119)$$

O Lema 3 mostra um mapa algébrico bijetivo linear entre classes especiais de espinores MDO e de Dirac, isto é, quando ambos são RIM-decomponíveis.

Note que um procedimento análogo pode ser feito entre todas as outras combinações de *spinor-planes*. Desse modo, usando a notação $(v, w)_A$ para as coordenadas de um dado espinor em uma base A de um plano espinorial Π^A , para $A \in \{\mathcal{B}, \mathcal{D}, \mathcal{M}\}$, pode-se representar Ψ^H , Ψ^D e λ como

$$\Psi^H = (1, 1)_B = (\alpha^{-1}\beta^{-1}\delta^{-1}, \alpha^{-1}\beta^{-1}\delta)_D = (\epsilon^{-1}\omega^{-1}, \epsilon\zeta^{-1})_M, \quad (120)$$

$$\Psi^D = (\alpha\beta\delta, \alpha\beta\delta^{-1})_B = (1, 1)_D = (\chi_1^{-1}, \chi_2^{-1})_M, \quad (121)$$

$$\lambda = (\epsilon\omega, \epsilon^{-1}\zeta)_B = (\chi_1, \chi_2)_D = (1, 1)_M. \quad (122)$$

Precisamente, a construção dos operadores (inversíveis) $L : \Pi^H \rightarrow \Pi^D$ and $Q : \Pi^H \rightarrow \Pi^M$ leva a representações matriciais da forma

$$L = \frac{1}{2} [(\alpha\beta\delta)(\mathbb{I} + \gamma^5) + (\alpha\beta\delta^{-1})(\mathbb{I} - \gamma^5)], \quad (123)$$

$$Q = \frac{1}{2} [(\epsilon\omega)(\mathbb{I} + \gamma^5) + (\omega^{-1}\zeta)(\mathbb{I} - \gamma^5)], \quad (124)$$

tais que

$$\Psi^D = L\Psi^H, \quad (125)$$

$$\Psi^H = L^{-1}\Psi^D, \quad (126)$$

$$\lambda = Q\Psi^H, \quad (127)$$

$$\Psi^H = Q^{-1}\lambda. \quad (128)$$

Ilustramos a ação destes operadores por meio do diagrama comutativo abaixo, que evidencia os isomorfismos entre os planos espinoriais estudados:

$$\begin{array}{ccc} \Pi^M & \xleftrightarrow{M} & \Pi^D \\ & \xleftarrow{M^{-1}} & \\ & \searrow Q & \nearrow L^{-1} \\ & \Pi^H & \\ & \swarrow Q^{-1} & \nwarrow L \end{array} \quad (129)$$

Logo, de forma geral, podemos enunciar o seguinte resultado:

Lema 4. *Suponha a existência de um plano espinorial Π^S com base formada pelas componentes mão-esquerda e mão-direita de uma dado espinor $\psi = \psi_L + \psi_R$. Se ψ pode ser decomposto em termos das componentes de pelo menos um dos espinores Ψ^H , Ψ^D ou λ com ambos coeficientes não nulos (em outras palavras, com a decomposição sendo inversível), então ele pode ser escrito em termos de qualquer um dos outros espinores, i.e., $\Pi^S \cong \Pi^H \cong \Pi^D \cong \Pi^M$.*

Demonstração. Trivial, simplesmente usando os resultados do Lema 3 e as Equações (125 - 128). \square

Note que o Lema 3 é um corolário do Lema 4.

Vale destacar aqui que M , Q e L como apresentados no Lema 3 e nas Equações (123) e (124) são todos operadores representados por matrizes diagonais (tais quais, obviamente, suas inversas). Isso se dá pela própria natureza dos operadores quirais de projeção, e assim definimos:

Definição 56 (Espaço dos operadores). *Definimos \mathfrak{M} como sendo o espaço de todos os operadores matriciais R tais que $\psi = R\varphi$, com ψ, φ sendo espinores RIM-decomponíveis. O espaço \mathfrak{M} tem o conjunto de operadores de projeção $\{\frac{1}{2}(\mathbb{I} + \gamma^5), \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \gamma^5)\}$ como base, agindo com combinações com coeficientes complexos para formar os elementos de \mathfrak{M} , i.e.,*

$$\forall R \in \mathfrak{M}, \exists c_1, c_2 \in \mathbb{C} : R = c_1 \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \gamma^5) + c_2 \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \gamma^5). \quad (130)$$

Explicitamente, $R = \text{diag}(c_2, c_2, c_1, c_1)$.

Deve estar claro que, quando $c_1, c_2 \neq 0$, todo elemento $R = \text{diag}(c_2, c_2, c_1, c_1) \in \mathfrak{M}$ é inversível, com $\text{diag}(c_2^{-1}, c_2^{-1}, c_1^{-1}, c_1^{-1}) = R^{-1} \in \mathfrak{M}$.

Finalmente, dado o aspecto de todos os planos espinoriais, podemos entendê-los como sendo, de fato, o mesmo espaço, com as matrizes M, L, Q e suas inversas sendo os operadores de mudança de base entre as bases \mathcal{B}, \mathcal{D} e \mathcal{M} . Ainda, vimos que isso é válido para toda matriz $R \in \mathfrak{M}$ com outra base do plano espinorial. Dessa forma, podemos compreender o espaço \mathfrak{M} como sendo o espaço de todos os operadores de mudança de base no *spinor-plane*.

Logo, encontramos um espaço bidimensional de todos os espinores que podem ser decompostos em termos de espinores RIM (dadas suas componentes mão-esquerda e mão-direita que formam uma base nesse espaço), equipado com um espaço dos operadores de mudança de base. Continuemos, pois, nossa investigação.

A referência (NOVELLO, 2007a) analisa cuidadosamente o domínio dos parâmetros a e b da Equação (5), procurando evitar singularidades nos potenciais S e R . Escrevendo os números complexos $a = a_0 e^{i\phi_1}$ e $b = b_0 e^{i\phi_2}$ em suas formas polares, pode-se separar todos os valores possíveis para estes números em seis, e somente seis, domínios disjuntos:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &\equiv W_1 \otimes Z_1, \\ \Omega_2 &\equiv W_4 \otimes Z_1, \\ \Omega_3 &\equiv W_4 \otimes Z_4, \\ \Omega_4 &\equiv W_2 \otimes Z_2, \\ \Omega_5 &\equiv W_3 \otimes Z_2, \\ \Omega_6 &\equiv W_3 \otimes Z_3.\end{aligned}$$

Os intervalos são definidos como $W_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $W_2 = (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $W_3 = (\pi, \frac{3\pi}{2})$, $W_4 = (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ para ϕ_1 , com análoga definição para Z_1, Z_2, Z_3 e Z_4 como intervalos de ϕ_2 .

O ponto aqui é que, para diferentes escolhas de a e b nesses seis domínios, pode-se construir diferentes configurações espinoriais. Procurando deixar mais clara nossas explicações, definimos a seguir o espaço-s:

Definição 57 (Espaço-s). *Seja $\Omega \equiv \bigcup_{i=1}^6 \Omega_i$ o espaço de todas as escolhas plausíveis dos parâmetros (ϕ_1, ϕ_2) para $a = a(\phi_1)$ e $b = b(\phi_2)$ que definem a constante de Heisenberg $s = \frac{i(a-b)}{2}$ para a solução RIM (5) da Equação de Heisenberg (2). Chamaremos Ω de espaço-s.*

Agora podemos introduzir uma outra interpretação do plano espinorial, mais poderosa: ao fixarmos uma base nesse espaço, digamos, \mathcal{B} , podemos entender que estamos na “cópia RIM” do *spinor-plane*. Nessa cópia, o espinor Ψ^H é uma função linear: mais precisamente, tal espinor é a função identidade $y_H(x) = x$. Ainda nessa mesma “cópia RIM”, temos Ψ^D dado pela função $y_D(x) = \left(\frac{A-iB}{J}\right)x$, e λ por $y_\lambda(x) = \left(\frac{A-iB}{J}\right)^{-2\rho} \omega^{-1} \zeta x$. Para ambos os casos de Dirac e MDO, temos a variável x sendo definida via espaço-s Ω , isto é, $x = x(a(\phi_1), b(\phi_2))$, e também $y = y(a(\phi_1), b(\phi_2))$. Entretanto, uma vez fixado

o par $(\phi_1, \phi_2) \in \Omega$, todas as coordenadas no plano espinorial para todo espinor é um par $(x, y(x))$ em cada base.

Em outras palavras, os espinores Ψ^H , λ e Ψ^D (dependendo de com qual base estamos trabalhando no plano espinorial) são funções implícitas de a e b (ou, via espaço-s, de ϕ_1 e ϕ_2). Ou seja, tais espinores se comportam como funções do tipo

$$\begin{aligned} \varphi_B : \quad \Omega &\longrightarrow \Pi^H \\ (\phi_1, \phi_2) &\mapsto (f_1, f_2)_B, \end{aligned} \quad (131)$$

com f_1, f_2 sendo funções complexas do par $(\phi_1, \phi_2) \in \Omega$. Analogamente, podemos definir as aplicações $\varphi_{\mathcal{D}} : \Omega \rightarrow \Pi^D$ e $\varphi_{\mathcal{M}} : \Omega \rightarrow \Pi^M$. De fato, isso é claramente válido para todo espinor no *spinor-plane*⁹.

Devemos deixar claro que ambos Ψ^D e λ são funções lineares (aliás, a função identidade) quando representados em suas “próprias cópias” do plano espinorial (ou seja, quando escritos em termos das bases \mathcal{D} e \mathcal{M} respectivamente). Com efeito, isso é verdade para todo espinor¹⁰ ψ , como apresentado no Lema 4. Seguindo esta ideia, pode-se enxergar as mudanças de base neste espaço como sendo uma deformação dos pontos (que são funções) no plano espinorial, conduzindo-nos à tentativa de construir uma homotopia nesse espaço. Porém, antes de iniciarmos tal procedimento, precisamos primeiro notar que cada ponto no *spinor-plane* (em cada base fixada) pode ser escrito como $(x, y(x))$, em que $y : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Percebemos, então, que cada $y = y(x)$ é uma função entre espaços topológicos, uma vez determinado $x(\phi_1, \phi_2)$, o que nos permite, de fato, pensar em homotopias. Agora podemos dar início ao processo de construção de tal aplicação com segurança.

Para começarmos, tomemos como exemplo o espinor de Dirac Ψ^D , e o representemos como $(x, f(x))_{\mathcal{D}} = (x, g(x))_{\mathcal{B}}$. Logo, sabemos que $f(x) = x$ e $g(x) = \left(\frac{A-iB}{J}\right)x$. O próximo passo é encontrarmos uma aplicação contínua da forma

$$H : \mathbb{C} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad (132)$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo x . Definindo

$$H(x, t) := (1-t)f(x) + tg(x) = \left[1 + t \left(\frac{A-iB}{J} - 1\right)\right]x, \quad (133)$$

vemos que tal aplicação satisfaz as condições que queremos, e um resultado notável surge: para cada valor fixado $j \in (0, 1)$, a função $H(x, j) \equiv H_j(x)$ induz uma representação para o espinor Ψ^D como um par $(x, H_j(x))_{\mathcal{A}} \in \Pi^A$, o qual corresponde a uma “cópia intermediária” Π^A do plano espinorial ou, de forma equivalente, fornece uma base $\mathcal{A} = \{\Psi_L^A, \Psi_R^A\}$ do *spinor-plane* correspondendo à definição de um “espinor intermediário” Ψ^A . Notando esse fato, e lembrando do resultado do Lema 4, podemos enunciar o teorema a seguir:

Teorema 2. *Sejam $f = f(x)$ e $g = g(x)$ funções tais que $(x, f(x))_{\mathcal{A}_0}$ e $(x, g(x))_{\mathcal{A}_1}$ representam o mesmo espinor no plano espinorial em diferentes bases \mathcal{A}_0 e \mathcal{A}_1 . Então, é possível construir uma*

⁹ Isso é garantido pelo Lema 4.

¹⁰ Isto é, $\Pi^S \ni \psi = (x, x)_S$ no *spinor-plane*.

homotopia $H(x, t)$ entre f e g que define uma família infinita de espinores RIM-decomponíveis Ψ^{A_j} , com cada espinor sendo representado pela função identidade se a base $\mathcal{A}_j = \{\Psi_L^{A_j}, \Psi_R^{A_j}\}$ é utilizada (ou, equivalentemente, cada espinor é representado por $(x, x)_{\mathcal{A}_j}$) para cada $t = j \in [0, 1]$ fixado.

Neste momento se faz útil uma observação: claramente pode-se construir todos os espinores no plano espinorial simplesmente escolhendo um par de números complexos¹¹ (c_1, c_2) e escrevendo explicitamente, por exemplo, $\psi = c_1\Psi_L^H + c_2\Psi_R^H = (c_1, c_2)_B$. Porém, ao utilizarmos o resultado do Teorema 2, podemos deformar continuamente as funções-coordenadas entre dois espinores específicos, em vez de somente escolher, sem qualquer critério, números complexos como sendo as coordenadas. Em outras palavras, apresentamos um método que nos permite obter famílias de espinores relacionados entre si por funções pertencendo às mesmas classes de homotopia.

Ainda, podemos enunciar um outro resultado, dessa vez no que se refere a homotopias e espinores em uma base fixada no plano espinorial:

Teorema 3. *Existe uma relação de equivalência homotópica entre quaisquer dois espinores ψ e φ que podem ser escritos em termos de espinores RIM.*

Demonstração. Olhando para a Equação (131), o que ocorre é que para cada par $(\phi_1, \phi_2) \in \Omega$ fixamos um número complexo $x = f_1$, e assim é determinado um outro número complexo $f_2 = f_2(f_1) = f_2(x)$ para formar o par (f_1, f_2) que representa um espinor em uma dada base do plano espinorial. Portanto, com o espaço-s Ω agindo com um espaço-suporte na construção do conjunto de todos os números complexos permitidos x , podemos entender cada espinor ψ em si como um mapa entre espaços topológicos:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ x &\mapsto (x, y(x)). \end{aligned} \tag{134}$$

Desse modo, podemos agora construir uma homotopia $G_{\mathcal{A}} : \mathbb{C} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^2$ entre dois espinores $\psi = (x, y_{\psi})_{\mathcal{A}}$ e $\varphi = (x, y_{\varphi})_{\mathcal{A}}$ em uma base fixada \mathcal{A} , dada por

$$G_{\mathcal{A}}(x, t) = (x, (1 - t)y_{\psi} + ty_{\varphi}). \tag{135}$$

É evidente que, em uma base fixada \mathcal{A} , temos $G_{\mathcal{A}}(x, 0) = (x, y_{\psi}) = \psi$ e $G_{\mathcal{A}}(x, 1) = (x, y_{\varphi}) = \varphi$. Portanto, $G_{\mathcal{A}}$ explicita uma relação de equivalência entre os próprios espinores ψ e φ . \square

Novamente, façamos uma observação: poderíamos simplesmente construir “à mão” espinores no plano espinorial definindo pontos com a ajuda do espaço-s Ω , mas o forte resultado do Teorema 3 nos permite obter representações $(x, y(x))$ de espinores, em uma dada base, que são deformações intermediárias de dois espinores (homotopicamente relacionados) conhecidos. Ou seja, pode-se aqui pensar em classes de equivalência homotópica de campos espinoriais.

Finalizamos esta subseção comentando que existe um teorema que diz que, se A é um subconjunto convexo de \mathbb{R}^n e X é qualquer espaço topológico, então duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow A$ são

¹¹ Com tais números dependendo dos valores no espaço-s.

homotópicas. Nossos dois teoremas aqui apresentados mostram um resultado particular (ainda que notáveis) deste teorema já conhecido: essas aplicações f e g , com uma escolha conveniente de espaços X e A , podem representar espinores.

4.3.5 Sobre a decomposição RIM e a classificação de Lounesto

É bem sabido (NOVELLO, 2007a; BEGHETTO; SILVA, 2017) que espinores RIM Ψ^H são necessariamente regulares, no sentido da classificação de Lounesto. Isso se faz claro quando olhamos para a equação que rege sua dinâmica: mais detalhadamente, caso os espinores RIM pudessem ser singulares, seria possível termos $A = 0 = B$ (com $A = \bar{\Psi}^H \Psi^H$ e $B = i\bar{\Psi}^H \gamma^5 \Psi^H$), porém nesse caso a Equação de Heisenberg (2), que é não-linear, se reduziria à Equação linear de Dirac (1). Por isso, a possibilidade de termos somente um dos bilineares $A = 0$ ou $B = 0$ (isto é, espinores RIM tipo-2 ou tipo-3) parece perfeitamente plausível, pois em ambos os casos o aspecto não-linear da equação de Heisenberg seria mantido. Entretanto,

Lema 5. *Os espinores RIM Ψ^H são necessariamente tipo-1 na classificação de Lounesto (ou seja, $A, B \neq 0$).*

Demonstração. Primeiramente, note que $R = (b - \bar{b})^{-1} \ln \left(\frac{A - iB}{J} \right)$, o que em particular significa que $(b - \bar{b}) \neq 0$. Com efeito, observando a Equação (14), se assim não fosse teríamos que $K_\mu \rightarrow \infty$, nos levando a um resultado não-físico. Agora, a referência (NOVELO) afirma que J_μ e K_μ constituem uma base para os vetores construídos pela derivada ∂_μ operando em funcionais de Ψ^H , e dessa forma tem-se as seguintes equações (válidas para qualquer μ):

$$\partial_\mu A = (a + \bar{a})AJ_\mu + i(b - \bar{b})BK_\mu, \quad (136)$$

$$\partial_\mu B = (a + \bar{a})BJ_\mu + i(b - \bar{b})AK_\mu. \quad (137)$$

Suponha, então, que $A = 0$ e $B \neq 0$. Logo, a Equação (136) nos fornece $0 = i(b - \bar{b})BK_\mu$, o que é uma contradição, pois Ψ^H é um espinor regular e não podemos ter $K_\mu = 0$, $\forall \mu$. Portanto, Ψ^H não pode ser tipo-3. Continuando, supondo agora que $A \neq 0$ e $B = 0$, a Equação (137) nos indica que $0 = i(b - \bar{b})AK_\mu$, que é uma análoga contradição, nos levando a concluir dessa vez que Ψ^H não pode ser tipo-2 pela mesma razão que o caso anterior. Ora, concluímos portanto, em definitivo, que $A, B \neq 0$ e Ψ^H é um espinor regular tipo-1. \square

Perceba que, enquanto anteriormente vimos que os espinores de Dirac RIM-decomponíveis são necessariamente do tipo-1, agora mostramos que os próprios espinores RIM também o são.

Podemos extrair mais informações sobre os bilineares A e B da forma explícita do potencial escalar R . De fato, notemos de início que $(A - iB) \neq 0$ e $J \equiv \sqrt{J^2} \neq 0$. Dessa forma, lembrando que $J^2 = (A - iB)(A + iB)$, concluímos também que $(A + iB) \neq 0$.

Agora, representemos um espinor RIM como

$$\Psi^H = \begin{pmatrix} \Psi_{11} \\ \Psi_{12} \\ \Psi_{21} \\ \Psi_{22} \end{pmatrix}, \quad (138)$$

em que cada componente $\Psi_{ij} \in \mathbb{C}$. Vamos definir as grandezas

$$A_1 \equiv \Psi_{21}^* \Psi_{11} + \Psi_{22}^* \Psi_{12}, \quad (139)$$

$$A_2 \equiv \Psi_{11}^* \Psi_{21} + \Psi_{12}^* \Psi_{22}, \quad (140)$$

com r^* sendo a notação para o conjugado complexo de $r \in \mathbb{C}$. Logo, lembrando da definição dos bilineares e usando a representação dada pela Equação (138), não é difícil verificar que

$$A = A_1 + A_2, \quad (141)$$

$$B = i(-A_1 + A_2). \quad (142)$$

Com isso em mãos, como $A, B \neq 0$, concluímos que

$$A_1 \neq \pm A_2. \quad (143)$$

Além disso,

$$A + iB = 2A_1 \neq 0 \Rightarrow A_1 \neq 0, \quad (144)$$

$$A - iB = 2A_2 \neq 0 \Rightarrow A_2 \neq 0. \quad (145)$$

Estas condições se revelarão fortes restrições no estudo dos bilineares covariantes associados aos espinores RIM-decomponíveis, que é nosso foco a partir de agora, até o fim deste capítulo.

Seja $\psi = \psi_L + \psi_R$ um espinor RIM-decomponível. Sabemos, então, que existe uma matriz $R \in \mathfrak{M}$ tal que $\psi = R\Psi^H$. Nesse caso, podemos escrever $R = \text{diag}(r_1, r_1, r_2, r_2)$ com decomposição $\psi = r_1\Psi_L^H + r_2\Psi_R^H$. Suponha ainda que o dual desse espinor seja construído ao estilo que chamamos de “dual de Dirac”¹²: $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Vamos representar os bilineares covariantes associados a ψ como $A_\psi, B_\psi, \mathbf{J}_\psi, \mathbf{K}_\psi, \mathbf{S}_\psi$, todos definidos conforme as estruturas apresentadas na Seção 4.3.1.

Queremos categorizar todos os espinores RIM-decomponíveis na classificação de Lounesto. Para tanto, inicialmente precisaremos saber as condições que garantam $\mathbf{J}_\psi \neq 0$, pois essa é uma imposição da classificação. Como $\psi = R\Psi^H$, podemos escrever as componentes de \mathbf{J}_ψ como

$$J_\psi^\mu = (\Psi^H)^\dagger R^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu R \Psi^H, \quad (146)$$

¹² Definir o dual de um campo espinorial dessa forma é o procedimento padrão. Inclusive, para um espinor ser passível de ser classificado via Lounesto, o dual *deve* ser definido assim.

para $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Representando, agora, o espinor RIM como

$$\Psi^H = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad (147)$$

em que

$$\Psi_j = \begin{pmatrix} \Psi_{j1} \\ \Psi_{j2} \end{pmatrix}, \quad (148)$$

para $j \in \{1, 2\}$, obtemos o seguinte:

$$J_\psi^0 = |\Psi_1|^2 |r_1|^2 + |\Psi_2|^2 |r_2|^2, \quad (149)$$

$$J_\psi^1 = -|r_1|^2 (\Psi_{12}^* \Psi_{11} + \Psi_{11}^* \Psi_{12}) + |r_2|^2 (\Psi_{22}^* \Psi_{21} + \Psi_{21}^* \Psi_{22}), \quad (150)$$

$$J_\psi^2 = i \left[-|r_1|^2 (\Psi_{12}^* \Psi_{11} - \Psi_{11}^* \Psi_{12}) + |r_2|^2 (\Psi_{22}^* \Psi_{21} - \Psi_{21}^* \Psi_{22}) \right], \quad (151)$$

$$J_\psi^3 = -|r_1|^2 (|\Psi_{11}|^2 - |\Psi_{12}|^2) + |r_2|^2 (|\Psi_{21}|^2 - |\Psi_{22}|^2). \quad (152)$$

Deve-se procurar as condições que levem a $J_\psi^\mu = 0$, $\forall \mu \in \{0, 1, 2, 3\}$, simultaneamente. Estas formarão as exatas condições que deveremos evitar. Assim, devemos verificar as componentes J_ψ^μ uma por uma. Bem, para obter $J_\psi^0 = 0$, temos três opções:

(i) $r_1 \neq 0$, $r_2 = 0$ e $|\Psi_1|^2 = 0$ (o que, por simetria, é equivalente a $r_2 \neq 0$, $r_1 = 0$ e $|\Psi_2|^2 = 0$).

(ii) $|\Psi_1|^2 = 0 = |\Psi_2|^2$.

(iii) $r_1 = 0 = r_2$.

Claramente, $r_1 = 0 = r_2$ não é uma opção permitida, pois levaria simplesmente ao espinor nulo. Note que a opção (ii) nos guia a $\Psi^H = 0 = \psi$, por isso a descartamos. Agora temos que analisar o caso da opção (i). De fato, verifica-se sem dificuldades que esta opção leva simultaneamente a termos as equações (149-152) todas nulas, isto é,

$$\mathbf{J}_\psi = 0 \Leftrightarrow (i), \quad (153)$$

para espinores não-nulos. Portanto, concluímos que a condição (i) é a que deve ser evitada.

O escalar $A_\psi = \bar{\psi}\psi$ e o pseudo-escalar $B_\psi = i\bar{\psi}\gamma^5\psi$ podem ambos ser escritos em termos das quatro componentes da representação (138) de Ψ^H como segue:

$$A_\psi = (r_1 r_2^*) (\Psi_{21}^* \Psi_{11} + \Psi_{22}^* \Psi_{12}) + (r_1^* r_2) (\Psi_{11}^* \Psi_{21} + \Psi_{12}^* \Psi_{22}), \quad (154)$$

$$B_\psi = i \left[-(r_1 r_2^*) (\Psi_{21}^* \Psi_{11} + \Psi_{22}^* \Psi_{12}) + (r_1^* r_2) (\Psi_{11}^* \Psi_{21} + \Psi_{12}^* \Psi_{22}) \right]. \quad (155)$$

Uma observação interessante para o caso particular de $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ (em outras palavras, se R é real) é que temos que $A_\psi = (r_1 r_2) A$ e $B_\psi = (r_1 r_2) B$, ou seja, $A_\psi \propto A$ e $B_\psi \propto B$. Assim, notamos que $\psi = r_1 \Psi_L^H + r_2 \Psi_R^H$ é sempre tipo-1 quando $r_1, r_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Continuando, para termos ψ como um espinor RIM-decomponível, temos duas opções: $r_1, r_2 \neq 0$ ou $r_1 \neq 0$, $r_2 = 0$ ($r_2 \neq 0$, $r_1 = 0$). Agora, note que não podemos ter a segunda opção quando

$|\Psi_1|^2 = 0$ ($|\Psi_2|^2 = 0$) ocorrer, pois isso levaria a condição (i), que queremos evitar. Para expormos nossa análise ao leitor de forma mais clara e organizada, vamos separar nosso estudo em dois casos.

No caso $r_1 \neq 0, r_2 = 0$, iremos mostrar que

Lema 6. *Para um espinor RIM-decomponível ψ tal que $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, temos*

$$\mathbf{J}_\psi \neq 0 \Rightarrow (\mathbf{K}_\psi \neq 0 \text{ e } \mathbf{S}_\psi = 0), \quad (156)$$

sempre que as condições $r_1 \neq 0$ e $r_2 = 0$ (ou, equivalentemente, $r_2 \neq 0$ e $r_1 = 0$) são satisfeitas.

Demonstração. Vamos procurar pelas condições que façam com que $\mathbf{K}_\psi = 0$ e $\mathbf{S}_\psi = 0$ nesse caso. Inicialmente, vamos analisar \mathbf{K}_ψ . De forma análoga ao que foi feito para obter as Equações (149-152), temos que

$$K_\psi^0 = |\Psi_1|^2 |r_1|^2 - |\Psi_2|^2 |r_2|^2. \quad (157)$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $r_2 = 0$ (então, $r_1 \neq 0$). Perceba, entretanto, que de forma a obter $K_\psi^0 = |\Psi_1|^2 |r_1|^2 = 0$ deve-se ter $|\Psi_1|^2 = 0$, mas isso levaria à condição (i). Portanto, pela relação (153), nesse caso *não podemos ter* $\mathbf{K}_\psi = 0$.

Agora analisemos \mathbf{S}_ψ . De forma similar, escrevemos

$$S_\psi^{01} = -i [(r_2^* r_1)(\Psi_{22}^* \Psi_{11} + \Psi_{21}^* \Psi_{12}) - (r_1^* r_2)(\Psi_{12}^* \Psi_{21} + \Psi_{11}^* \Psi_{22})], \quad (158)$$

$$S_\psi^{02} = (r_2^* r_1)(\Psi_{22}^* \Psi_{11} - \Psi_{21}^* \Psi_{12}) - (r_1^* r_2)(\Psi_{12}^* \Psi_{21} - \Psi_{11}^* \Psi_{22}), \quad (159)$$

$$S_\psi^{03} = -i [(r_2^* r_1)(\Psi_{21}^* \Psi_{11} - \Psi_{22}^* \Psi_{12}) - (r_1^* r_2)(-\Psi_{11}^* \Psi_{21} + \Psi_{12}^* \Psi_{22})], \quad (160)$$

$$S_\psi^{12} = (r_2^* r_1)(\Psi_{21}^* \Psi_{11} - \Psi_{22}^* \Psi_{12}) + (r_1^* r_2)(\Psi_{11}^* \Psi_{21} - \Psi_{12}^* \Psi_{22}), \quad (161)$$

$$S_\psi^{13} = -i [(r_2^* r_1)(\Psi_{22}^* \Psi_{11} - \Psi_{21}^* \Psi_{12}) + (r_1^* r_2)(\Psi_{12}^* \Psi_{21} - \Psi_{11}^* \Psi_{22})], \quad (162)$$

$$S_\psi^{23} = (r_2^* r_1)(\Psi_{22}^* \Psi_{11} + \Psi_{21}^* \Psi_{12}) + (r_1^* r_2)(\Psi_{12}^* \Psi_{21} + \Psi_{11}^* \Psi_{22}). \quad (163)$$

Novamente, sem perda de generalidade, suponha $r_2 = 0$ (e, por consequência, $r_1 \neq 0$). Nesse caso, é claro que sempre temos $S_\psi^{\mu\nu} = 0$, isto é, $\mathbf{S}_\psi = 0$, independente de qualquer condição sobre as componentes Ψ_{ij} do espinor.

Resumindo, encontramos que $\mathbf{J}_\psi \neq 0 \Rightarrow \mathbf{K}_\psi \neq 0$ e $\mathbf{J}_\psi \neq 0 \Rightarrow \mathbf{S}_\psi = 0$, quando $r_1 \neq 0$ e $r_2 = 0$, o que pode ser escrito como $\mathbf{J}_\psi \neq 0 \Rightarrow (\mathbf{K}_\psi \neq 0 \text{ e } \mathbf{S}_\psi = 0)$. Isso encerra a demonstração. \square

Perceba agora que, se tivermos $r_1 \neq 0$ e $r_2 = 0$, então as equações (154) e (155) nos mostram que $A_\psi = 0 = B_\psi$: em outras palavras, nesse caso estamos lidando necessariamente com espinores *singulares*. Mas, usando o Lema 6, notamos que para podermos catalogar os espinores RIM-decomponíveis na classificação de Lounesto, se $r_1 \neq 0$ e $r_2 = 0$, estamos lidando com espinores singulares do tipo-6 (ver seção 4.3.1).

Poderíamos nos perguntar se existem outras possibilidades que nos levariam a ter espinores RIM-decomponíveis singulares. Com efeito, a única opção restante para tal caso seria termos $r_1, r_2 \neq 0$. Olhando as definições dadas pelas por (139) e (140) e as Equações (154) e (155), não é difícil notar

que podemos escrever

$$A_\psi = (r_1 r_2^*) A_1 + (r_1^* r_2) A_2, \quad (164)$$

$$B_\psi = i[-(r_1 r_2^*) A_1 + (r_1^* r_2) A_2]. \quad (165)$$

Logo, como uma última tentativa, se escolhermos $r_1, r_2 \neq 0$, percebemos que não podemos ter simultaneamente $A_\psi = 0 = B_\psi$, o que nos indica que ψ é um espinor regular, e $\mathbf{K}_\psi, \mathbf{S}_\psi \neq 0$. De fato, se impormos $A_\psi = 0 = B_\psi$ com $r_1, r_2 \neq 0$, então obtemos $(r_1 r_2^*) A_1 = -(r_1^* r_2) A_2$ e $(r_1 r_2^*) A_1 = +(r_1^* r_2) A_2$, os quais não possuem solução para r_1, r_2 não-nulos uma vez que sabemos que $A_1, A_2 \neq 0$. Note que isso implica não ser possível termos, de forma alguma, espinores singulares RIM-decomponíveis pertencentes às classes 4 e 5, pois isso esgota todas as possibilidades para r_1 e r_2 na construção de um espinor ψ não nulo.

Assim, mostramos que uma decomposição levando a um espinor singular *precisa* satisfazer $r_1 \neq 0$ e $r_2 = 0$, e que ter $r_1 \neq 0$ e $r_2 = 0$ é *suficiente* para garantir que uma decomposição nos devolva um espinor singular. Portanto, acabamos de demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 7. *Suponha $\psi = R\Psi^H$, com $R = \text{diag}(r_1, r_1, r_2, r_2) \in \mathfrak{M}$ tal que $\psi = r_1\Psi_L^H + r_2\Psi_R^H$, satisfazendo $\mathbf{J}_\psi \neq 0$ e $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Logo, as afirmações abaixo são equivalentes:*

(i) ψ é um espinor singular.

(ii) ψ é um espinor tipo-6.

(iii) $r_1 = 0$ ou $r_2 = 0$ (mas não ambos).

(iv) ψ é projetado somente nos espaços de representação $(0, \frac{1}{2})$ ou $(\frac{1}{2}, 0)$, isto é, $\psi \propto \Psi_L^H$ ou $\psi \propto \Psi_R^H$.

Percebemos, portanto, que uma vez fixadas as condições $r_1, r_2 \neq 0$ estamos lidando com espinores regulares. Nesse cenário temos outras três opções para verificar, a saber: tipo-1 ($A_\psi, B_\psi \neq 0$), tipo-2 ($A_\psi \neq 0$ e $B_\psi = 0$) e tipo-3 ($A_\psi = 0$ e $B_\psi \neq 0$). Como sabemos que os próprios espinores RIM Ψ^H e os Dirac RIM-decomponíveis Ψ^D são ambos tipo-1, somente precisamos investigar sobre a existência das outras duas possibilidades. Primeiramente, se colocamos $A_\psi = 0$, conseqüentemente temos $(r_1 r_2^*) A_1 = -(r_1^* r_2) A_2 \neq 0$, e podemos escrever $B_\psi = 2i(r_1^* r_2) A_2 = -2i(r_1 r_2^*) A_1 \neq 0$. Assim é possível termos espinores RIM-decomponíveis do tipo-2. Analogamente, se colocarmos $B_\psi = 0$, então obtemos $(r_1 r_2^*) A_1 = (r_1^* r_2) A_2 \neq 0$, o que nos leva a $A_\psi = 2i(r_1^* r_2) A_2 = 2i(r_1 r_2^*) A_1 \neq 0$, afirmando também a possibilidade de termos espinores RIM-decomponíveis do tipo-3. Com isso em mãos, enunciamos o seguinte:

Proposição 8. *Suponha $\psi = R\Psi^H = r_1\Psi_L^H + r_2\Psi_R^H$, com $R = \text{diag}(r_1, r_1, r_2, r_2) \in \mathfrak{M}$, satisfazendo $\mathbf{J}_\psi \neq 0$ e $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Então, ψ é um espinor regular se, e somente se, $r_1, r_2 \neq 0$. Ainda, nesse caso tem-se que:*

(i) ψ é um espinor tipo-1 se, e somente se, $A \neq -iB \left(\frac{r_1 r_2^* \pm r_1^* r_2}{r_1 r_2^* \mp r_1^* r_2} \right)$.

(ii) ψ é um espinor tipo-2 se, e somente se, $(r_1^*r_2)^2 \neq (r_1r_2^*)^2$ e $A = -iB \left(\frac{r_1r_2^* + r_1^*r_2}{r_1r_2^* - r_1^*r_2} \right)$.

(iii) ψ é um espinor tipo-3 se, e somente se, $(r_1^*r_2)^2 \neq (r_1r_2^*)^2$ e $A = -iB \left(\frac{r_1r_2^* - r_1^*r_2}{r_1r_2^* + r_1^*r_2} \right)$.

Demonstração. Começamos realçando que já vimos que, nas hipóteses da proposição, a condição $r_1, r_2 \neq 0$ é necessária e suficiente para ψ ser um espinor regular: de fato, este particular resultado pode ser entendido como um corolário da Proposição 7. Agora, notando que $A_1 = \frac{A+iB}{2}$ e $A_2 = \frac{A-iB}{2}$, podemos escrever

$$A_\psi = \frac{1}{2} [A(r_1r_2^* + r_1^*r_2) + iB(r_1r_2^* - r_1^*r_2)], \quad (166)$$

$$B_\psi = -\frac{i}{2} [A(r_1r_2^* - r_1^*r_2) + iB(r_1r_2^* + r_1^*r_2)]. \quad (167)$$

Sabemos que $A_1, A_2 \neq 0$. Ainda, é impossível fazermos $(r_1r_2^* - r_1^*r_2) = 0 = (r_1r_2^* + r_1^*r_2)$ com $r_1, r_2 \neq 0$: com efeito, isso levaria a $A_\psi = 0 = B_\psi$, um caso irrealizável, como já vimos.

Assim, para termos $B_\psi = 0$, precisamos que $A(r_1r_2^* - r_1^*r_2) + iB(r_1r_2^* + r_1^*r_2) = 0$. Ainda, não podemos ter $(r_1r_2^* + r_1^*r_2) = 0$ ou $(r_1r_2^* - r_1^*r_2) = 0$ isolados, porque isso nunca resultaria em $B_\psi = 0$; em outras palavras, devemos ter $(r_1^*r_2)^2 \neq (r_1r_2^*)^2$. Logo, a única opção que nos resta é $A(r_1r_2^* - r_1^*r_2) = -iB(r_1r_2^* + r_1^*r_2)$, que implica $A = -iB \left(\frac{r_1r_2^* + r_1^*r_2}{r_1r_2^* - r_1^*r_2} \right)$. Nesse caso, é garantido que $A_\psi \neq 0$. Isso prova o item (ii).

Agora, se quisermos ter $A_\psi = 0$, por razões análogas ao do caso anterior, teremos $(r_1^*r_2)^2 \neq (r_1r_2^*)^2$ e $A(r_1r_2^* - r_1^*r_2) = -iB(r_1r_2^* + r_1^*r_2)$. Isso implica $A = -iB \left(\frac{r_1r_2^* + r_1^*r_2}{r_1r_2^* - r_1^*r_2} \right)$ (com $B_\psi \neq 0$ garantido), o que prova o item (iii).

Até agora vimos que a única forma de zerarmos A_ψ ou B_ψ sem zerarmos ambos ao mesmo tempo é tendo $A(r_1r_2^* \mp r_1^*r_2) = -iB(r_1r_2^* \pm r_1^*r_2)$. Logo concluímos que não podemos ter essas condições válidas se quisermos manter ambos $A_\psi, B_\psi \neq 0$, ou seja, ter $A \neq -iB \frac{(r_1r_2^* \pm r_1^*r_2)}{(r_1r_2^* \mp r_1^*r_2)}$ é equivalente a dizer que ψ só pode ser tipo-1, provando o item (i). \square

Observamos que, como Ψ^H tem $r_1 = r_2 = 1$, temos que a Proposição 8 trivialmente confirma que Ψ^H é tipo-1, com $A_{\Psi^H} = A$ e $B_{\Psi^H} = B$ sendo facilmente obtidas pelas Equações (166) e (167), como esperado. Como outro exemplo, para o espinor de Dirac Ψ^D tem-se que $r_1 = \alpha\beta\delta$ e $r_2 = \alpha\beta\delta^{-1}$ como definido anteriormente pelas Equações (100) e (101), e assim verifica-se que $\frac{r_1+r_2}{r_1-r_2} = -i \left(\frac{A}{B} \right) \Rightarrow -iB \left(\frac{r_1+r_2}{r_1-r_2} \right) = -A \neq A$, e $\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2} = i \left(\frac{B}{A} \right) \Rightarrow -iB \left(\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2} \right) = \frac{B^2}{A} \neq A$, confirmando que Ψ^D também é um espinor tipo-1.

Vamos terminar essa subseção resumindo seus principais resultados:

As Proposições 7 e 8 fornecem um método fácil de separação de todos os espinores ψ permitidos no plano espinorial¹³ (ou seja, RIM-decomponíveis) na classificação de Lounesto, que exige que olhemos simplesmente para seus coeficientes $(r_1, r_2)_B$ na “cópia RIM” Π^H . O critério pode ser compactado como segue: se ambos os coeficientes são não-nulos, então o espinor é regular (com uma forma fácil de

¹³ Com dual definido como $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.

verificar se é tipo-1, tipo-2 ou tipo-3: simplesmente divida a soma $r_1 r_2^* + r_1^* r_2$ pela diferença $r_1 r_2^* - r_1^* r_2$ e multiplique o resultado por $-iB$ para verificar se isso é igual a A , enquanto se um (e somente um) dos coeficientes é zero então o espinor é singular tipo-6, sem a necessidade da frequentemente trabalhosa construção de todos os bilineares covariantes associados ao espinor de interesse. Como não podemos¹⁴ ter $r_1 = 0 = r_2$, todos os casos plausíveis foram contemplados na nossa análise.

¹⁴ Mais corretamente, não *queremos*, pois assim teríamos um espinor nulo.

5 CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

Nesse último capítulo apresentaremos conclusões acerca de nossas contribuições originais. O formato será de retomada de alguns resultados com apontamentos sobre detalhes importantes. Naturalmente, comentários sobre ideias e possibilidades de trabalhos futuros permeiam os parágrafos que se seguem, pois entendemos o término de uma tese como sendo, além de parte essencial da formação do doutorando, uma projeção do início do que, após, se poderá fazer.

No Capítulo 3 investigamos a relação entre estruturas espinoriais exóticas e a taxa de emissão de espinores por buracos assintoticamente *flat* em Relatividade Geral. Estabelecemos condições gerais para os valores extremos da taxa de emissão em dois casos distintos, isto é, considerando ou não a existência de um campo externo A_μ . Dessas condições gerais encontramos equações diferenciais para o termo exótico. Apontamos que a ausência de campo externo é particularmente interessante devido ao fato de, nesse caso, estarmos descrevendo espinores ELKO, os quais não interagem com campos externos que não sejam a gravidade e o campo de Higgs.

Em particular, podemos notar que a variação temporal do termo exótico, nesse contexto, é relacionada ao comportamento de A_μ , em função de ter ou não valores extremos para a taxa de emissão de espinores de Dirac exóticos que não interagem com qualquer campo externo. Com efeito, percebamos que o lado direito das equações (65) e (66) da página 58 são ambos constantes no tempo. Mais precisamente, denotemos por “partículas DN ” aquelas relacionadas ao espinor de Dirac exótico que não interagem com o campo A_μ , e suponha a situação em que \dot{A} esteja aumentando com o tempo. Logo, se isso ocorre no momento de emissão extrema de partículas DN , o termo exótico $\dot{\theta}$ também aumenta. Por outro lado, se a taxa de tunelamento de partículas DN não está no instante de valor extremo, então $\dot{\theta}$ diminui. Esse fato faz relacionar a dinâmica do campo externo A_μ com o comportamento da exotividade (ou seja, da topologia) do próprio espaço-tempo no caso particular tratado aqui, que é o de buracos negros de Kerr-Newman. Entretanto, é oportuno lembrar que este caso é o mais geral possível em soluções de buracos negros em Relatividade Geral, de forma que tomando os limites naturais para os outros casos (Kerr e Schwarzschild) não alteramos os resultados aqui apresentados.

Ainda, para o caso de ter-se $\dot{\Gamma}_{DN} \neq 0$ nos cálculos de $\dot{\Gamma}_{DE} = 0$ (isto é, a situação em que temos o valor extremo para partículas DE mas não simultaneamente para partículas DN), pela equação (66) da página 58 tem-se $\mathcal{X} + \dot{A} = 0$, o que de modo direto leva, pela equação (60) da página 57, a $\Gamma_{DE} = 1$. Em outras palavras, nesse caso temos emissão máxima de radiação Hawking para partículas DE , com 100% de probabilidade de tunelamento. Dito ainda de outra forma, a situação de extremo de emissão de partículas DE sem as condições simultâneas de extremo de emissão de partículas DN leva, necessariamente, a um cenário com partículas DE tendo radiação máxima.

Portanto a única possibilidade de probabilidade de tunelamento mínimo para partículas DE é com partículas DN na mesma situação (isto é, também com radiação mínima): tal cenário ocorre se $\dot{\Gamma}_{DN} = 0 = \dot{\Gamma}_{DE}$. Para podermos checar as condições de máximo e mínimo para esse caso analisando os possíveis sinais de $f(\mathcal{X}) = f(\dot{A})$, concluímos que o sinal da equação (76) da página 59 é indeterminado, ou seja, a princípio ambos os cenários são possíveis (probabilidade máxima e

mínima de tunelamento). Contudo, encontramos a condição para separar essas situações em termos de desigualdades: taxas máximas ocorrem quando $\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} < -\frac{1}{2}\frac{\dot{y}}{y}$, enquanto taxas mínimas estão relacionadas com a desigualdade com sinal oposto. As condições que levam a tais relações são dispostas nos casos (a-d) para os possíveis sinais de $\alpha + 2\beta$, apresentados no fim da subseção 3.3.1. Nesse sentido, os cenários de máximo e mínimo são condicionados pelo comportamento do termo exótico (que é, nesse caso, o mesmo do potencial eletromagnético externo) codificado pelos sinais de suas primeira e segunda derivadas.

Logo, por meio das taxas de emissão de radiação Hawking, encontramos relações entre os parâmetros de massa, carga e momento angular do buraco negro (por meio do termo $\dot{\sigma} = \alpha + 2\beta$) com a topologia do espaço-tempo (codificada no termo exótico $\dot{\theta}$) e o comportamento de campos externos perto do próprio buraco negro. Isso pode ajudar a dar um passo adiante para o entendimento do ainda não bem conhecido¹ comportamento do termo exótico, potencialmente contribuindo com o desbravamento do caminho em direção a compreensão completa da dinâmica desses espinores, um tema em aberto de nosso interesse o qual queremos continuar explorando.

Ainda sobre espinores em variedades multiplamente conexas, onde espinores exóticos são esperados, no Capítulo 4 investigamos o que ocorre com espinores RIM em tal situação. De fato, não é trivial separar espinores usuais de exóticos, quando ambos são permitidos em um sistema físico. Existem algumas exceções (PETRY, 1979; ROCHA; BERNARDINI; SILVA, 2011), porém tais situações não são muito comuns. Aqui, temos um típico sistema físico que não possui contrapartida exótica. Com efeito, foi demonstrado por meio do Lema 1 da página 69 que não é possível implementar a decomposição RIM em tal contexto. O ponto a ser destacado aqui é que este é um importante resultado negativo, pois ao descrever-se física de neutrinos via decomposição RIM estamos, de início, necessariamente fixando a topologia do espaço base como trivial. Isso significa que a física de neutrinos pode servir como uma ferramenta para o mapeamento da estrutura topológica do espaço-tempo, pelo menos localmente. Nesse contexto, neutrinos agem como um complemento dos espinores ELKO exóticos, cujos acoplamentos adicionais se originam exclusivamente da topologia não-trivial (ROCHA; SILVA; BERNARDINI, 2011; ROCHA; BERNARDINI; SILVA, 2011). Somada a isso, a investigação feita na referência (NOVELLO, 2007a) aponta para a existência de seis famílias disjuntas de espinores² que podem ser, ainda, separadas em dois grandes setores de helicidade, compostos por três famílias cada. Tais setores podem ser conectados por meio de uma transformação linear unitária indicando a possibilidade de descrever oscilação de neutrinos mesmo para o caso não massivo (NOVELLO, 2007a). Tendo em mente o resultado apresentado no Lema 1 da página 69, a eventual observação de neutrinos sem massa implicaria, necessariamente, na trivialidade da topologia subjacente ao espaço-tempo. Mais precisamente, temos que o mecanismo de oscilação *ala* Pontecorvo vincula a oscilação de neutrinos à existência de massa para tais partículas (PONTECORVO, 1957; PONTECORVO, 1968). Por outro lado, com o mecanismo de oscilação descrito em (NOVELLO, 2007a), que utiliza espinores RIM, a necessidade de se ter neutrinos massivos não ocorre. Assim, o nosso Lema 1 faz vincular este mecanismo com a topologia trivial do espaço-tempo, deixando em aberto a possibilidade de oscilação de neutrinos massivos ou não massivos. Em outras palavras, uma topologia não-trivial é incompatível

¹ Até onde sabemos.

² Tais famílias foram utilizadas para construirmos o espaço-s. Ver Definição 57 na página 80.

com oscilação de neutrinos não massivos.

Após deduzirmos este primeiro Lema, o Capítulo 4 segue com um teor cada vez mais inclinado para o formalismo algébrico a respeito dos espinores RIM. Primeiramente, demonstramos que dentre todas as classes de espinores os férmions de Dirac decompostos em termos de espinores RIM são sempre do tipo 1 de acordo com a classificação de Lounesto. Elementos pertencentes a essa classe particular possuem todos os bilineares covariantes necessariamente não identicamente nulos e, portanto, são os espinores que dispõem da estrutura multivetorial mais rica possível. Do ponto de vista físico, isso significa que todos os possíveis acoplamentos são passíveis de estudo, o que permite investigar o maior conjunto de acoplamentos em física de neutrinos.

A três últimas subseções da Seção 4.3 abarcam o segmento mais formal da tese. Remetendo-nos novamente ao Lema 1 da página 69, tal resultado nos permite afirmar que todos os espinores pertencendo ao *spinor-plane* que tem uma equação dinâmica não são exóticos, ou seja, a topologia subjacente ao espaço-tempo em que tais espinores surgem é trivial. Em particular, o *spinor-plane* acomoda um mapa linear bijetivo entre classes especiais de espinores de Dirac e MDO que são RIM-decomponíveis e, portanto, não-exóticos. Esse mapa é natural, no sentido de que utiliza espinores RIM como elemento fundamental para fazer a mediação entre os campos de Dirac e MDO. Ainda que tal mapeamento imponha certas condições sobre os próprios campos³, a bijeção não implica na necessidade de se classificar os espinores via Lounesto, como o mapeamento apresentado em (ROCHA; SILVA, 2007; SILVA; ROCHA, 2009). Dito de outra forma, o mapa desenvolvido aqui transcende o problema da categorização de espinores MDO na classificação de Lounesto, pagando o preço de impor uma restrição a uma subclasse destes campos.

Pode-se, ainda, pensar na utilidade da bijeção construída por nós como ferramenta auxiliar na tarefa de entendermos a matéria escura, a qual propõe-se ser descrita por campos MDO. Uma vez que a matéria escura interage muito fracamente com as partículas do modelo padrão, e aspectos de campos de Dirac são conhecidos nesse contexto (em particular o subconjunto de espinores de Dirac RIM-decomponíveis tratados aqui), nosso mapeamento permite-nos pensar em trabalhar em futuras investigações na extensão do modelo padrão incorporando espinores MDO.

Dentre os principais resultados dessa parte final, gostaríamos de enfatizar o Teorema 2 da página 81, que nos apresenta não somente a possibilidade de escrever explicitamente todos os possíveis espinores que podem ser decompostos em termos de espinores RIM dadas suas componentes mão-esquerda e mão-direita, mas também torna nítida uma relação de equivalência (via a homotopia H) entre todas as funções que representam coordenadas no *spinor-plane*. Por outro lado, o Teorema 3 da página 82 é um outro resultado robusto, fornecendo um modo de deformar espinores no *spinor-plane*, permitindo-se a composição e a eventual classificação de classes de equivalência de espinores homotópicos por meio das homotopias G_A .

Os dois Teoremas são relacionados, no sentido que ambos tratam do assunto de escrever formas explícitas de representação dos espinores RIM-decomponíveis mostrando uma relação de equivalência homotópica. A principal diferença entre eles (que, de fato, os complementa) reside no fato de que o Teorema 2 provê um método de obtenção de componentes mão-esquerda e mão-direita dos espinores

³ Estes precisam ser RIM-decomponíveis.

por meio da construção de uma base para o *spinor-plane*, enquanto o Teorema 3 supre um meio de conseguir pontos⁴ em uma dada base. Em outras palavras, ao passo que com o Teorema 2 estamos continuamente deformando o próprio *spinor-plane* (obtendo novas bases para o espaço), com o outro Teorema estamos continuamente deformando os pontos do plano em uma base fixa (obtendo espinores intermediários entre dois outros fixados).

Mais resultados acerca de questões sobre outras propriedades relacionando as homotopias no *spinor-plane* podem ser investigadas. Também, o estudo do comportamento de espinores MDO e seus bilineares covariantes nesse espaço é uma proposta potencialmente interessante para próximos trabalhos.

Como comentamos no capítulo introdutório, o entendimento da natureza dos objetos espinoriais é um campo de estudo em pleno desenvolvimento, o qual é tão significativo em Física quanto em Matemática. Os dois teoremas apresentados por nós podem compor o início de uma nova maneira de enxergar a construção de espinores, abrindo a possibilidade de descobertas de interessantes relações via a teoria de homotopia, a qual é talvez uma das mais importantes ideias por detrás da topologia algébrica. É nosso intuito, naturalmente, continuar com investigações nessa linha, procurando contribuir cada vez mais com o entendimento da teoria de espinores.

As Proposições 7 e 8 da página 87 facilitam a categorização dos espinores RIM-decomponíveis ψ tais que $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ na classificação de Lounesto: esses resultados fornecem um modo completo e simples de se determinar como estes espinores são classificados via Lounesto quando seus duais são definidos *ala* Dirac, conectando os coeficientes de suas decomposições RIM⁵ diretamente com a classificação de Lounesto. Isso evita a necessidade da construção de todos os seus bilineares covariantes e o (frequentemente trabalhoso) processo de verificação de quais deles são identicamente nulos e quais não são. Em particular, a Proposição 8 é uma generalização do Lema 2 da página 72, que afirma que todo espinor de Dirac RIM-decomponível é tipo-1 de Lounesto.

Como exemplo de possibilidade de aplicações físicas diretas desses resultados finais, pode-se enxergá-los como um método homotópico de construção de todos os possíveis espinores permitidos na chamada *Spinor Theory of Gravity*, uma teoria de gravitação construída por meio de uma classe de soluções da equação de Einstein linearizada da Relatividade Geral formada a partir de espinores RIM (NOVELLO, 2007b; JOFFILY; NOVELLO, 2016), isto é, uma teoria de gravitação com espinores RIM atuando em papéis principais. Ainda, como bilineares covariantes são grandezas associadas a observáveis físicos, desenvolvemos um modo simples de verificação dos possíveis acomplamentos de uma partícula associada a um dado espinor nessa teoria, por meio de seus coeficientes na decomposição RIM. Também, nossos resultados fixam a topologia do espaço-tempo dessa teoria como sendo trivial.

Vale deixar claro que o cerne de nossas contribuições apresentadas nessa última parte do trabalho está na própria ideia de decomposição RIM, no sentido que o elemento principal que conecta todos os Lemas⁶, Proposições e Teoremas das últimas três subseções é o par de coeficientes da decomposição (ou, em outras palavras, as coordenadas no *spinor-plane*) de um dado espinor em termos de espinores RIM. Nessa linha de raciocínio, pode-se estudar propriedades destes e de outros espinores de uma

⁴ Os próprios espinores.

⁵ Ou, em outras palavras, suas coordenadas no *spinor-plane* dadas na base $\mathcal{B} = \{\Psi_L^H, \Psi_R^H\}$.

⁶ Com exceção do Lema 5 da página 83, porém este versa sobre o próprio espinor RIM.

forma análoga se um dado campo espinorial for decomposto em termos de um outro. Assim, provemos um protocolo de trabalho que pode se revelar útil em outros casos na área da teoria de espinores.

Finalizamos, então, esse trabalho de modo análogo à forma que a começamos: com uma citação. Talvez o façamos no espírito de que o fim de um ciclo não implica, necessariamente, em um fim em si. De qualquer forma, dessa vez tomamos uso das palavras do matemático Zoroastro Azambuja Filho, que de certo modo condensa uma das fortes conclusões oriundas da finalização dessa tese:

A verdade nem sempre pode ser dita de uma vez só.

REFERÊNCIAS

- AHLUWALIA, D. V. The theory of local mass dimension one fermions of spin one half. **Advances in Applied Clifford Algebras**, Berna, v. 27, n. 3, p. 2247–2285, 2017.
- AHLUWALIA, D. V.; GRUMILLER, D. Dark matter: A spin one half fermion field with mass dimension one? **Physical Review**, Washington, v. 72, n. 6, p. 7701–7701, 2005.
- AHLUWALIA-KHALILOVA, D. V.; GRUMILLER, D. Spin-half fermions with mass dimension one: theory, phenomenology, and dark matter. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, Trieste, v. 2005, n. 07, p. 012–012, 2005.
- ANGHEBEN, M. et al. Hawking radiation as tunneling for extremal and rotating black holes. **Journal of High Energy Physics**, Trieste, v. 2005, n. 05, p. 014–014, 2005.
- ARCODÍA, M. R.; BELLINI, M.; ROCHA, R. da. The heisenberg spinor field classification and its interplay with the lounesto's classification. **The European Physical Journal C**, Nantes, v. 79, n. 3, p. 260, 2019.
- ARZANO, M.; MEDVED, A. J. M.; VAGENAS, E. C. Hawking radiation as tunneling through the quantum horizon. **Journal of High Energy Physics**, Trieste, v. 2005, n. 09, p. 037, 2005.
- ASSELMEYER-MALUGA, T.; BRANS, C. **Exotic smoothness and physics**. Singapura: World Scientific, 2007. 322 p.
- ASSELMEYER, T.; HESS, G. Fractional quantum hall effect, composite fermions and exotic spinors. **arXiv preprint cond-mat/9508053**, 1995. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/cond-mat/9508053>>. Acesso em: 08 nov. 2017.
- AVIS, S. J.; ISHAM, C. J. Lorentz gauge invariant vacuum functionals for quantized spinor fields in nonsimply connected space-times. **Nuclear Physics B**, Amsterdam, v. 156, n. 3, p. 441–455, 1979.
- BEGHETTO, D.; CAVALCANTI, R. T.; SILVA, J. M. Hoff da. Exotic spinorial structure and black holes in general relativity. **Advances in Applied Clifford Algebras**, Berna, v. 28, n. 5, p. 96–96, 2018.
- BEGHETTO, D.; ROGERIO, R. B.; VILLALOBOS, C. C. The restricted inomata-mckinley spinor-plane, homotopic deformations and the lounesto classification. **Journal of Mathematical Physics**, Melville, v. 60, n. 4, p. 042301–042301, 2019.
- BEGHETTO, D.; SILVA, J. M. Hoff da. The (restricted) inomata-mckinley spinor representation and the underlying topology. **EPL (Europhysics Letters)**, Bristol, v. 119, n. 4, p. 40006p1–4006p5, 2017.
- BINZ, E.; SNIATYCKI, J.; FISCHER, H. **Geometry of classical fields, volume 154 of North-Holland mathematics studies**. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1988.
- BRITO, K. D.; ROCHA, R. D. New fermions in the bulk. **Journal of Physics A**, Bristol, v. 49, n. 41, p. 415403–415403, 2016.
- CARTAN, É. **The theory of spinors**. North Chelmsford: Courier Corporation, 2012. 157 p.
- CAVALCANTI, R. T.; ROCHA, R. da. Dark spinors Hawking radiation in string theory black holes. **Advances in High Energy Physics**, Londres, v. 2016, n. 1, p. 4681902–4681909, 2016.

- DURR W. HEISENBERG, H. M. S. S. V. H.-P.; YAMAZAKI, K. Zur theorie der elementarteilchen. **Zeitschrift für Naturforsch A**, Tübingen, v. 14, n. 1, p. 441–485, 1959.
- FORD, L. H. Vacuum polarization in a nonsimply connected spacetime. **Physical Review D**, Washington, v. 21, n. 4, p. 933–948, 1980.
- FORGER, M.; JR, F. A. **Fibrados, conexões e classes características**. 2011. 156 p. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~forger/pdf/files/fibrados.pdf>>. Acesso em: 12 jun. 2015.
- HALZEN, F. et al. Gamma-rays and energetic particles from primordial black holes. **Nature**, Berna, v. 353, n. 1, p. 807–815, 1991.
- HATCHER, A. **Vector bundles and K-theory**. 2017. Disponível em: <<http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/>>. Acesso em: 21 fev. 2018.
- HAWKING, S. W. Black holes in general relativity. **Communications in Mathematical Physics**, Berlim, v. 25, n. 2, p. 152–166, 1972.
- HAWKING, S. W. Black hole explosions. **Nature**, Berna, v. 248, n. 1, p. 30–31, 1974.
- HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. **Communications in mathematical physics**, Berlim, v. 43, n. 3, p. 199–220, 1975.
- HAWKING, S. W.; PENROSE, R. The singularities of gravitational collapse and cosmology. **Proceedings of the Royal Society of London**, Londres, A314, p. 529–548, 1970.
- HEISENBERG, W. Quantum theory of fields and elementary particles. **Review of Modern Physics**, Washington, v. 29, n. 3, p. 269–278, 1957.
- HEISENBERG, W. Research on the non-linear spinor theory with indefinite metric in hilbert space. **Scientific Review Papers, Talks, and Books Wissenschaftliche Übersichtsartikel, , Vorträge und Bücher. Gesammelte Werke / Collected Works**, Berlim, v. 2, n. 1, p. 119–119, 1984.
- INOMATA, A.; MCKINLEY, W. A. Geometric theory of neutrinos. **Physical Review**, Washington, v. 140, n. 5B, p. 1467–1473, 1965.
- ISHAM, C. J. Spinor fields in four-dimensional space-time. **Proceedings of the Royal Society of London**, Londres, v. 364, n. 1, p. 591–599, 1978.
- ISHAM, C. J. Twisted quantum fields in a curved space–time. **Proceedings of the Royal Society of London A**, Londres, v. 362, n. 1710, p. 383–404, 1978.
- JIANG, Q.-Q.; WU, S.-Q.; CAI, X. Hawking radiation as tunneling from the kerr and kerr-newman black holes. **Physical Review D**, Washington, v. 73, n. 6, p. 064003–064003, 2006.
- JOFFILY, S.; NOVELLO, M. Cosmology of a Heisenberg fluid. **Gen. Rel. Grav.**, Berlim, v. 48, n. 11, p. 151–151, 2016.
- KERNER, R.; MANN, R. B. Fermions tunnelling from black holes. **Classical and Quantum Gravity**, Bristol, v. 25, n. 9, p. 095014–095014, 2008.
- LIMA, E. L. **Elementos de topologia geral**. São Paulo: Ao Livro Técnico, Editôra da Universidade de São Paulo, 1970. 299 p.
- LIMA, E. L. **Curso de análise**. 6. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000. v. 2. 547 p.

- LIMA, E. L. **Grupo fundamental e espaços de recobrimento**. 4. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada., 2012. 214 p.
- LIMA, E. L. **Homologia básica**. 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada., 2012. 201 p.
- LOUNESTO, P. **Clifford algebra and spinors, second edition**. Cambridge-United Kingdom: Cambridge University Press, 2001.
- MATSAS, G. E. A. Gravitação semiclássica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 27, n. 1, p. 137–145, 2005.
- MILNOR, J.; STASHEFF, J. D. **Characteristic classes**. Princeton: Princeton University Press, 1974. 340 p.
- NOVELLO, M. Constructing dirac linear fermions in terms of non-linear heisenberg spinors. **EPL (Europhysics Letters)**, Bristol, v. 80, n. 4, p. 41001p1–41001p5, 2007.
- NOVELLO, M. A spinor theory of gravity and the cosmological framework. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, Trieste, v. 2007, n. 06, p. 018–018, 2007.
- PARIKH, M. K.; WILCZEK, F. Hawking radiation as tunneling. **Physical Review Letters**, Washington, v. 85, n. 24, p. 5042–5042, 2000.
- PENROSE, R. **The road to reality: a complete guide to the laws of the universe**. Nova Iorque: Vintage Books, 2007. 1099 p. (Vintage Series).
- PENROSE, R.; RINDLER, W. **Spinors and space-time: volume 1, two-spinor calculus and relativistic fields (cambridge monographs on mathematical physics)**. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 458 p.
- PETRY, H. R. Exotic spinors in superconductivity. **Journal of Mathematical Physics**, Melville, v. 20, n. 2, p. 231–240, 1979.
- PONTECORVO, B. Mesonium and anti-mesonium. **Journal of Experimental and Theoretical Physics**, Moscou, v. 6, n. 549, p. 429–429, 1957.
- PONTECORVO, B. Neutrino experiments and the problem of conservation of leptonic charge. **Journal of Experimental and Theoretical Physics**, Moscou, v. 26, n. 1717, p. 984–988, 1968.
- ROCHA, R. D.; BERNARDINI, A. E.; SILVA, J. H. da. Exotic dark spinor fields. **Journal of High Energy Physics**, Trieste, v. 2011, n. 4, p. 110–110, 2011.
- ROCHA, R. D.; SILVA, J. Hoff da; BERNARDINI, A. E. Elko spinor fields as a tool for probing exotic topological spacetime features. **International Journal of Modern Physics (Conference Series)**, Londres, v. 3, n. 1, p. 133–142, 2011.
- ROCHA, R. da; SILVA, J. M. Hoff da. From Dirac spinor fields to ELKO. **Journal of Mathematical Physics**, Melville, v. 48, n. 12, p. 123517–123517, 2007.
- SCHULLER, F. P. **Lectures on geometrical anatomy of theoretical physics**. 2016. Disponível em: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLPH7f_7ZlzxTi6kS4vCmv4ZKm9u8g5yic>. Acesso em: 08 nov. 2017.
- SILVA, J. da; VILLALOBOS, C.; ROCHA, R. da. Black holes and exotic spinors. **Universe**, Basileia, v. 2, n. 2, p. 8–20, 2016.

SILVA, J. M. Hoff da; CAVALCANTI, R. T. Revealing how different spinors can be: the Lounesto spinor classification. **Modern Physics Letters**, Londres, v. 32, n. 35, p. 1730032–1730032, 2017.

SILVA, J. M. Hoff da; ROCHA, R. d. From dirac action to elko action. **International Journal of Modern Physics A**, Londres, v. 24, n. 16, p. 3227–3242, 2009.

SILVA, J. M. Hoff da et al. On the bilinear covariants associated to mass dimension one spinors. **European Physical Journal C**, Nantes, v. 76, n. 3, p. 563–563, 2016.

SMARR, L. Mass formula for kerr black holes. **Physical Review Letters**, Washington, v. 30, n. 2, p. 71–71, 1973.

SPANIER, E. H. **Algebraic topology**. Berlim: Springer Science & Business Media, 1989. v. 55. 548 p.

VANZO, L.; ACQUAVIVA, G.; CRISCIENZO, R. D. Tunnelling methods and hawking's radiation: achievements and prospects. **Classical and Quantum Gravity**, Bristol, v. 28, n. 18, p. 183001, 2011.

VAZ, J.; ROCHA, R. da. **Álgebras de Clifford e espinores**. São Paulo: Editora Livraria da Física da USP, 2012. 248 p.

VAZ JR., J. A álgebra geométrica do espaço euclidiano e a teoria de pauli. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 19, 1997.

VAZ JR., J.; ROCHA, R. da. **An introduction to Clifford algebras and spinors**. Oxford: Oxford University Pres, 2016. 242 p.

WHEELER, J. Geons. **Physical Review**, Washington, v. 97, n. 1, p. 511–511, 1955.

APÊNDICE A – ELEMENTOS DE FORMAS DIFERENCIAIS DE GRAU 1 (OU 1–FORMAS) E NOÇÕES DE CLASSES DE COHOMOLOGIA

Esse Apêndice nos pareceu algo útil de ser construído por simples motivo de completeza, visto, ainda, que muito do tratado aqui é algo geralmente de pouco conhecimento por parte de muitos estudantes de Física, além de estudantes de Matemática a nível de graduação que possam, eventualmente, se interessar pelo assunto dessa tese. Em geral, artigos envolvendo uma apresentação sobre espinores exóticos geralmente enunciam que o termo exótico é uma 1–forma real fechada não-exata cuja integral¹ tomada sobre qualquer caminho fechado é um número inteiro, e o relacionam com os fatos do espaço em questão ser multiplamente conexo e o primeiro grupo de cohomologia ser não-trivial. Longe da intenção de prover um arcabouço matemático completo, o intuito aqui é fornecer um material enxuto, em um nível aceitável, que colabore com o leitor em seu entendimento de tais afirmações. Querendo justificar ainda mais a inserção desse Apêndice, dizemos que sua importância reside no fato do termo exótico ser, simplesmente, o que difere as dinâmicas de um espinor exótico e a de um espinor usual. Portanto, ao se estudar campos exóticos, procurar entender tal termo em seu imo tende ao inevitável. O que segue nas próximas páginas tem como base principal o capítulo IV da referência (LIMA, 2000), além de alguns pontos dos três primeiros capítulos da referência (LIMA, 2012a).

Definição 58 (1–forma). *Uma forma diferencial de grau 1, ou simplesmente uma 1–forma, em um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\omega : X \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ que associa a cada ponto $x \in X$ um funcional linear $\omega(x)$ sobre \mathbb{R}^n .*

O espaço dual $(\mathbb{R}^n)^*$ possui uma base canônica (dx_1, \dots, dx_n) , formada pelos funcionais definidos por $dx_i \cdot v = \alpha_i$ para um vetor $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Todo funcional linear se exprime, de maneira única, como combinação linear $\sum_{i=1}^n a_i dx_i$, logo dar uma 1–forma ω em $X \subset \mathbb{R}^n$ equivale a definir n funções reais $a_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ tais que, para cada $x \in X$, se tenha

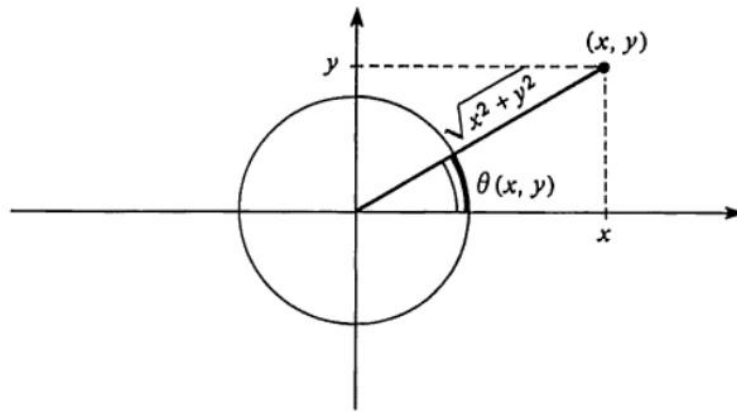
$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i. \quad (1)$$

Assim, para cada $x \in X$ a aplicação do funcional $\omega(x)$ no vetor $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ resulta no número

$$\omega(x) \cdot v = \sum_{i=1}^n a_i(x) \alpha_i \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Um exemplo importante é a 1–forma chamada de “elemento de ângulo”, definida em $U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, que provém da tentativa de definir uma função $\theta : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, em cada ponto $(x, y) \in U$, o valor $\theta(x, y)$ seja uma determinação, em radianos, do ângulo que o eixo das abscissas forma com o raio que liga a origem ao ponto (x, y) . A Figura 6 ajuda a clarear as ideias.

¹ Multiplicada por $\frac{1}{2\pi}$.

Figura 6 – Visualização geométrica de $\theta(x, y)$.

Fonte: (LIMA, 2000)

Consideremos, de início, um aberto qualquer $V \subset \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Uma função $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se uma função-ângulo quando, em cada ponto $(x, y) \in V$, tem-se $\theta = \theta(x, y)$ satisfazendo

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \text{sen } \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3)$$

Claramente não existe função-ângulo contínua definida em todo $U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, porém podemos nos restringir a um aberto para o qual θ apresente continuidade. Em outras palavras, embora não exista uma função-ângulo contínua $\theta : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida globalmente, ela existe localmente, isto é, todo ponto $z \in U$ pertence a um aberto no qual se pode definir uma função-ângulo contínua. Mais, pode-se mostrar que tal função é de classe C^∞ e, se V é conexo e θ_1, θ_2 são funções-ângulo contínuas definidas em V , então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta_2(z) - \theta_1(z) = 2k\pi$ para todo $z \in V$. Nesse caso, em particular tem-se $d\theta_1 = d\theta_2$.

Desse modo, embora não exista $\theta : U \rightarrow \mathbb{R}$, é como se existisse a diferencial $d\theta : U \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$. Porém, como $d\theta$ não é, de fato, a diferencial de uma função globalmente definida em U , usaremos o símbolo $\delta\theta$ para representá-la, e definimos:

Definição 59 (Forma elemento de ângulo). *Seja $U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Chamamos de elemento de ângulo a 1-forma $\delta\theta : U \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$, de classe C^∞ , tal que para cada $(x, y) \in U$ tem-se*

$$\delta\theta(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy. \quad (4)$$

A integral da forma elemento de ângulo ao longo de um caminho $\lambda : [a, b] \rightarrow U$, de classe C^1 por partes, é a “variação líquida”² do ângulo que $\lambda(t)$ faz com o eixo das abcissas quando t varia de a até b . Mais precisamente,

Teorema 4. *Dado um caminho $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, de classe C^1 por partes, seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 por partes tal que $\lambda(t) = |\lambda(t)| \cdot (\cos \alpha(t), \text{sen } \alpha(t))$ para todo $t \in [a, b]$.*

² Isto é, a variação positiva menos a variação negativa.

Então,

$$\int_{\lambda} \delta\theta = \alpha(b) - \alpha(a). \quad (5)$$

Em particular,

Corolário 1. *Se o caminho $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, de classe C^1 por partes, é fechado, então*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\lambda} \delta\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \quad (6)$$

é um número inteiro (positivo, negativo ou zero).

Com efeito, como λ é fechado tem-se $\lambda(a) = \lambda(b)$. Pela hipótese do Teorema 4, obtem-se $\cos \alpha(a) = \cos \alpha(b)$ e $\sin \alpha(a) = \sin \alpha(b)$, e então $\alpha(b) - \alpha(a)$ é um múltiplo inteiro de 2π . Portanto, $\frac{1}{2\pi} \int_{\lambda} \delta\theta \in \mathbb{Z}$.

No caso de λ ser fechado de classe C^1 por partes, o número inteiro $\frac{1}{2\pi} \int_{\lambda} \delta\theta$ é chamado de número de voltas que o caminho λ descreve em torno da origem 0 de \mathbb{R}^2 , quando t varia de a até b .

Continuando,

Definição 60 (Forma exata). *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, então a forma diferencial $\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ é dita ser exata em A quando existe uma função diferenciável $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega = df$.*

Assim, é imediato notar que $\delta\theta$ não é exata em $U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Por outro lado,

Definição 61 (Forma fechada). *Uma forma $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$, de classe C^1 , é dita ser fechada quando $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$.*

Toda forma exata de classe C^1 é fechada, porém a recíproca é falsa: de fato, $\delta\theta$ é fechada (como facilmente se verifica da definição (59)) mas não é exata.

Definição 62 (Homotopia livre). *Uma homotopia livre entre os caminhos fechados $\lambda, \mu : [a, b] \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua $H : [a, b] \times I \rightarrow X$ tal que $H(s, 0) = \lambda(s)$, $H(s, 1) = \mu(s)$ e $H(a, t) = H(b, t)$ para quaisquer $s \in [a, b]$ e $t \in I$.*

Assim, dizemos que os caminhos fechados $\lambda, \mu : [a, b] \rightarrow X$ são livremente homotópicos quando existir uma homotopia livre entre eles. Desse modo, temos:

Teorema 5. *Seja ω uma forma fechada em um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Se $\lambda, \mu : [a, b] \rightarrow A$ são caminhos fechados, C^1 por partes e livremente homotópicos em A , então $\int_{\lambda} \omega = \int_{\mu} \omega$.*

Em especial,

Corolário 2. *Seja $\lambda : [a, b] \rightarrow A$ um caminho fechado, seccionalmente C^1 e livremente homotópico a um caminho constante no aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Então, para toda forma fechada $\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ tem-se $\int_{\lambda} \omega = 0$.*

Temos também que, se $\lambda : [a, b] \rightarrow U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ é qualquer caminho fechado (apenas contínuo), podemos definir sem ambiguidade o número de voltas que λ percorre em torno da origem usando o Corolário (1), pois $\delta\theta$ é fechada. Se λ e μ são livremente homotópicos, então seus números de voltas em torno da origem são iguais.

Particularmente, se um caminho fechado $\lambda : [a, b] \rightarrow A$ é livremente homotópico a uma constante, então $\pi_1(A, p) = 0$ para todo $p \in A$.

Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo quando X é conexo por caminhos e, além disso, todo caminho fechado em X é livremente homotópico a uma constante (ou, dito de outra forma, $\pi_1(X, p) = 0, \forall p \in X$). Com isso, é possível mostrar que

Teorema 6. *Se um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo, então toda 1-forma fechada em A é exata.*

Isso equivale a dizer que se existe (pelo menos) uma 1-forma fechada que não é exata em A , então A é multiplamente conexo. Em particular, note que, como $\mathbb{R}^2 - E$ é conexo por caminhos para qualquer E enumerável, tem-se que para qualquer aberto $A \subset U$ em que se pode definir uma forma elemento de ângulo conclui-se que A é multiplamente conexo, e $\pi_1(A, p) \neq 0, \forall p \in A$.

Agora, seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho. A cada partição $P = \{t_0, \dots, t_k\}$ de $[a, b]$, defina o número $\ell(f; P) := \sum_{i=1}^k |f(t_i) - f(t_{i-1})|$, que intuitivamente é o comprimento da poligonal inscrita no caminho f com vértices nos pontos $f(t_i)$. Se ao fazermos P variar entre todas as partições possíveis obtivermos o conjunto dos números $\ell(f; P)$ sendo limitado, diremos que f é um caminho retificável.

Dada uma função contínua $f = u + iv : A \rightarrow \mathbb{C}$ definida no aberto $A \subset \mathbb{C}$, para todo caminho retificável $\lambda : [a, b] \rightarrow A$ tem sentido a integral $\int_{\lambda} f(z)dz$. Aqui, $f(z)dz$ é uma forma diferencial complexa:

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = udx - vdy + i(vdx + udy). \quad (7)$$

Desse modo,

$$\int_{\lambda} f(z)dz = \int_{\lambda} udx - \int_{\lambda} vdy + i \int_{\lambda} (vdx + udy). \quad (8)$$

Quando u e v são funções diferenciáveis em A , as equações de Cauchy-Riemann mostram que a forma $f(z)dz$ é fechada³ se, e somente se, a função $f(z)$ é holomorfa⁴. Logo, quando $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa de classe C^1 e λ é um caminho fechado livremente homotópico em A a um caminho constante, o Corolário (2) afirma que $\int_{\lambda} f(z)dz = 0$. Esta é uma formulação do chamado Teorema de Cauchy, uma das pedras fundamentais da teoria das funções complexas.

Assim, tomemos $f : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $f(z) = \frac{1}{z}$. Logo,

$$f(z)dz = \frac{dz}{z} = \frac{dx + idy}{x + iy} = \frac{(x - iy)(dx + idy)}{x^2 + y^2} = \frac{xdx + ydy + i(xdy - ydx)}{x^2 + y^2}. \quad (9)$$

Para todo caminho fechado $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$, temos

$$\int_{\lambda} \frac{dz}{z} = \int_{\lambda} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + i \int_{\lambda} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}. \quad (10)$$

³ Isto é, sua parte real $udx - vdy$ e sua parte imaginária $vdx + udy$ são ambas fechadas.

⁴ Isto é, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ possui derivada $f'(z)$ em todos os pontos do aberto A .

Note que a forma $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = d(\ln\sqrt{x^2 + y^2})$ é exata em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, logo naturalmente a primeira integral do segundo membro da equação (10) é zero. Por outro lado, o integrando do último termo dessa mesma equação é justamente o elemento de ângulo $\delta\theta$. Logo, podemos reescrever a igualdade (10) como

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda} z^{-1} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda} \delta\theta \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

o que, pelo Corolário 1, permite-nos representar por meio de uma integral complexa o número de voltas que o caminho fechado λ faz em torno da origem.

Por fim, dizemos que duas 1-formas fechadas ω_1, ω_2 de classe C^1 em um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ são equivalentes quando existe uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $\omega_1 - \omega_2 = df$, e escrevemos $\omega_1 \sim \omega_2$. Nesse caso, para todo caminho fechado λ seccionalmente C^1 em A tem-se $\int_{\lambda} \omega_1 = \int_{\lambda} \omega_2$. A relação $\omega_1 \sim \omega_2$ compõe um conjunto das 1-formas fechadas de classe C^1 em A como união disjunta de classes de equivalência

$$[\omega] := \{\omega + df; f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^2\}. \quad (12)$$

Podemos introduzir a soma de duas classes e o produto de uma classe por um número t definindo

$$[\omega] + [\phi] = [\omega + \phi]; \quad t \cdot [\omega] = [t \cdot \omega]. \quad (13)$$

Seja $H^1(A)$ o conjunto cujos elementos são as classes de equivalência $[\omega]$ das 1-formas fechadas de classe C^1 em A . As operações definidas em (13) equipam $H^1(A)$ com uma estrutura de espaço vetorial, formando o que tradicionalmente é conhecido como primeiro grupo de cohomologia do aberto A . Assim, seus elementos são chamados de classes de cohomologia. O elemento neutro (zero) do espaço vetorial $H^1(A)$ é, claramente pela definição dada pela equação (12), a classe $[df]$ das 1-formas exatas em A . Em particular, note que $[\delta\theta] \neq 0$, pois a forma elemento de ângulo é uma 1-forma fechada não-exata. Assim, relacionamos a existência de $\delta\theta$ definida em A (que sabemos implicar A multiplamente conexo e um grupo fundamental $\pi_1(A)$ não-trivial) com a não-trivialidade do primeiro grupo de cohomologia $H^1(A)$.