

DANIEL ZARPELÃO PORCEL

Análise de um sistema de colheita de energia baseado em uma equação de Duffing e a investigação de seus pontos críticos através do método de Cardano - Tartaglia

BAURU/SP

Junho/2019

DANIEL ZARPELÃO PORCEL

Análise de um sistema de colheita de energia baseado em uma equação de Duffing e a investigação de seus pontos críticos através do método de Cardano - Tartaglia

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Bauru, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Linha de Pesquisa: Sistemas de Energia.

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"- Faculdade de Engenharia de Bauru – FEB - Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Adj. Antonio Roberto Balbo

Co-Orientadora: Profa. Dra. Célia Aparecida dos Reis

BAURU/SP

Junho/2019

Porcel, Daniel Zarpelão.

Análise de um sistema de colheita de energia baseado em uma equação de Duffing e a investigação de seus pontos críticos através do método de Cardano - Tartaglia/ Daniel Zarpelão Porcel. -- Bauru, 2019
57p. :Il., tabs., fotos

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Engenharia, Bauru
Orientador: Antonio Roberto Balbo
Coorientadora: Célia Aparecida dos Reis

1. Sistema de Colheita de Energia. 2. Material Piezoelétrico. 3. Equação de Duffing. 4. Método de Cardano - Tartaglia. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Bauru



ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE DANIEL ZARPELÃO PORCEL, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 06 dias do mês de junho do ano de 2019, às 08:30 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação da FEB, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO - Orientador(a) do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, Prof. Dr. HASSAN COSTA ARBEX do(a) Departamento de Matemática / Faculdade Galileu / Botucatu, Profª. Drª. TATIANA MIGUEL RODRIGUES DE SOUZA do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de DANIEL ZARPELÃO PORCEL, intitulada **UM SISTEMA DE COLHEITA DE ENERGIA BASEADO EM UMA EQUAÇÃO DE DUFFING E A INVESTIGAÇÃO DE SEUS PONTOS CRÍTICOS ATRAVÉS DO MÉTODO DE CARDANO - TARTAGLIA**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final:
APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO 

Prof. Dr. HASSAN COSTA ARBEX 

Profª. Drª. TATIANA MIGUEL RODRIGUES DE SOUZA 



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Bauru

PROPOSTA DE ALTERAÇÃO DO TÍTULO

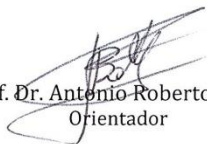
A COMISSÃO EXAMINADORA PROPÕE A ALTERAÇÃO DO TÍTULO DO TRABALHO DO ALUNO: **DANIEL ZARPELÃO PORCEL**

DE: "UM SISTEMA DE COLHEITA DE ENERGIA BASEADO EM UMA EQUAÇÃO DE DUFFING E A INVESTIGAÇÃO DE SEUS PONTOS CRÍTICOS ATRAVÉS DO MÉTODO DE CARDANO - TARTAGLIA"

PARA:

Análise de um sistema de colheita de energia baseado
em uma equação de DUFFING e a investigação de
seus pontos críticos através do método de CARDANO -
TARTAGLIA.

Bauru, 06 de junho de 2019.


Prof. Dr. Antônio Roberto Balbo
Orientador



Faculdade de Engenharia de Bauru – Pós-graduação
Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01 17033-360 Bauru - SP
tel. (14) 3103-6108 spg@feb.unesp.br www.feb.unesp.br

Dedico aos meus pais Pedro e Maria Andriete, que não mediram esforços para que eu pudesse chegar até mais essa etapa.

Ao meu irmão David e todos os meus colegas e amigos que sempre torcem por mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por tantas graças em minha vida, por me abençoar, me dar oportunidades e colocar pessoas em meu caminho com sede de querer ajudar, aprender e me fazer crescer sempre mais.

Aos meus pais, Pedro Donisete Porcel e Maria Andriete Zarpelão Porcel, por sempre terem se dedicado e se esforçado a me dar o melhor estudo e me proporcionar a melhor formação, com tudo isso, agradeço por nunca desistirem de mim e por sempre apoiarem e acreditarem em meu potencial. Ao meu irmão David Zarpelão Porcel por estar morando comigo em Bauru desde 2013 e me dar total apoio e carinho com minhas decisões. .

Ao meu orientador professor Dr. Antonio Roberto Balbo, pela paciência, sabedoria, atenção e carinho que me fez sentir motivado diante dos estudos e de minha carreira. Minha co-orientadora professora Dra. Célia Aparecida dos Reis, pelo apoio, atenção e todos os ensinamentos que foram fundamentais para minha formação.

Agradeço de modo especial a todos os meus amigos que sempre torceram por mim e que de uma forma ou de outra, sempre estiveram demonstrando todo apoio quanto a minha formação.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica pela oportunidade e a todos os professores, minha gratidão a cada ensinamento e apoio durante esta trajetória.

RESUMO

Atualmente a produção e o consumo de energia têm suma importância para a realização de diversas atividades humanas, o que implica em uma grande quantidade a ser produzida para atender a demanda, que, com o passar do tempo, aumenta cada vez mais. Esse aumento do consumo faz com que pesquisas sejam desenvolvidas com relação a sistemas de captação ou colheita de energia, que são chamados de “*energy harvesting*”. Estas possibilitam sua conversão em energia elétrica, que pode ser diretamente utilizada ou armazenada para uso posterior. Um sistema de colheita de energia captada através de material piezoelétrico é aquele que colhe a energia gerada por vibração mecânica. Neste trabalho fez-se um estudo, em termos do plano de fase e estabilidade assintótica, de um modelo de vibração massa-mola-amortecedor associada a sistemas de colheita de energia, o qual é baseado em uma equação de Duffing. O modelo é formulado através de um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares e, para análise de suas soluções de equilíbrio, foi utilizado o método de Cardano - Tartaglia. Testes com um problema real são realizados apresentando as soluções obtidas pelo método, bem como uma simulação numérica do retrato de fase de dois pontos críticos destes, utilizando o software MatLab.

Palavras-chave: Sistema de Colheita de Energia, Material Piezoelétrico, Equação de Duffing, Método de Cardano -Tartaglia

ABSTRACT

Currently the production and consumption of energy is very important for the performance of various human activities, which entails a great demand to be met and, with the passage of time, increases more and more. This increase in energy consumption makes researches are developed in relation to energy harvesting systems called energy harvesting. These enable their conversion into electrical energy, which can be directly used or stored for later use. A system of energy harvesting captured by piezoelectric material is one that harvests the energy generated by mechanical vibration. In this work is investigated a mass-spring-damper vibration model associated with an energy harvesting system, which is based in a Duffing's equation. This model is formulated through a system of ordinary nonlinear differential equations and, to analyze of their equilibrium solutions, the Cardano – Tartaglia's method was used. Tests with an actual problem are done, presenting the solutions obtained by the method, as well as a numerical simulation a phase portrait analysis of two critical points of this, using the MatLab software.

Key words: Energy Harvesting System, Piezoelectric Material, Duffing's Equation, Cardano – Tartaglia Method

Sumário

Introdução	1
Capítulo 1 Modelo de vibrações	6
1.1 A Modelagem Matemática	6
1.2 Análise de Estabilidade Assintótica.....	7
1.3 Simulações Numéricas	10
Capítulo 2 A colheita de energia	15
2.2 Aplicação nos dias atuais.....	17
2.3 Modelagem matemática de um sistema de colheita de energia.....	18
Capítulo 3 A equação polinomial do 3º. Grau e o método de Cardano - Tartaglia	21
Capítulo 4 Resultados numéricos obtidos para um sistema de colheita de energia	28
4.1. Análise da estabilidade de Lyapunov para os pontos críticos do sistema (2.8)	32
4.2. Análise dos resultados reais obtidos para o sistema de colheita de energia.	36
4.2.1. Simulação computacional em torno do ponto crítico $P5$	37
4.2.2. Simulação computacional em torno do ponto crítico $P6$	39
Conclusões	42
Trabalhos publicados.....	43
Bibliografia	44
Apêndice A	49
A.1. Conceitos básicos: plano de fase, caminhos e pontos críticos.	49
A.1.1. Natureza dos pontos críticos.	51
A.1.2. Estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade	53
A.2. Teoria de Lyapunov para sistemas não lineares.....	55
A.2.1. Linearização de sistemas autônomos	56
A.2.2. Método da linearização de Lyapunov	57

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Plano de fase no tempo com $ \xi < 1$ e $\Omega = 0,10$	11
Figura 1.2: Plano de fase com $ \xi < 1$ e $\Omega = 0,10$	11
Figura 1.3: Resposta no tempo com $ \xi < 1$ e $\Omega = 0,10$	12
Figura 1.4: Plano de fase no tempo com $ \xi < 1$ e $\Omega = 2$	12
Figura 1.5: Plano de fase com $ \xi < 1$ e $\Omega = 2$	13
Figura 1.6: Resposta no tempo com $ \xi < 1$ e $\Omega = 2$	13
Figura 2.1: Esquema do sistema de colheita de energia	18
Figura 4.1: Variação da amplitude do sistema (2.8)	37
Figura 4.2: Variação angular do sistema (2.8).....	38
Figura 4.3: Plano de fase do sistema (2.8).....	38
Figura 4.4: Variação da amplitude do sistema (2.8).....	39
Figura 4.5: Variação angular do sistema (2.8).....	40
Figura 4.6: Plano de fase do sistema (2.8).....	40
Figura A.1: Os diferentes tipos de pontos em nó: a) plano de fase autovalores negativos. b) autovalores repetidos. c) autovalor repetido com um autovetor associado.....	52
Figura A.2: O ponto de sela.....	52
Figura A.3: : Ponto de espiral ou foco	53
Figura A.4 : Ponto de Centro.....	53
Figura A.5: Conceito de estabilidade, mas não assintoticamente estável.....	54
Figura A.6: O conceito estabilidade assintótica.....	54
Figura A.7: O conceito de instabilidade.....	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1: Parâmetros para análise assintótica de um problema de colheita de energia encontrados em Ghouli et al (2016).....	28
Tabela 4.2: Valores encontrados a partir das substituições dos pontos no sistema.....	31

Introdução

O estudo de vibrações teve início a partir do descobrimento dos primeiros instrumentos musicais datados de 4000 a. C. provavelmente com apitos ou tambores (Rao, 2009; Miller, D. C. 1935). Deve-se a Pitágoras (582 – 507 a. C.) a primeira investigação com base científica relacionada aos sons musicais, com contribuições importantes de Aristóteles por volta de 350 a. C., Galileu Galilei (1564 – 1642), Isaac Newton (1642 – 1727), Daniel Bernoulli (1700 – 1782), Jean D’Alembert (1717 – 1783), J. B. Fourier (1768 – 1830), Joseph Lagrange (1736 – 1830) dentre outros (Rao, 2009). Atualmente, o estudo das vibrações evoluiu com o estudo da vibração torcional no projeto de eixos de hélices de navio a vapor, em absorvedores de vibrações atuantes, por exemplo, em sistemas de levitação magnética (os trens Maglevs), no estudo das vibrações de vigas, cabos, etc. As pesquisas desenvolvidas por Duffing e Van der Pol resultaram nas primeiras soluções relacionadas a vibrações não lineares e destacam sua importância na Engenharia (Rao, 2009).

Segundo Rao (2009), as vibrações estão presentes em inúmeras atividades humanas, pois, o ato de respirar só é possível quando nossos pulmões vibram. O ato de caminhar apresenta uma oscilação periódica entre mãos e pernas. A audição humana envolve vibração nos tímpanos, enxergamos porque as ondas de luz sofrem vibração, entre outras atividades.

Basicamente há dois tipos de vibrações: as naturais, como ondas sonoras, vibrações do ar e dos mares, eventos sísmicos, dentre outros, e as chamadas aplicadas externamente, como em projetos de máquinas, fundações, estruturas, motores, sistemas de controle e outros exemplos. Dependendo do sistema físico, as vibrações são prejudiciais e, em outros, de grande importância e proveito. Por exemplo, a energia gerada pelas vibrações induzidas por terremoto e tsunamis pode ser extremamente danosa, enquanto que a energia proveniente de vibrações mecânicas pode ser utilizada beneficemente para acionar máquinas de lavar, escovas de dente elétricas, brocas odontológicas, aparelhos elétricos de massagens e outros. Além disso, podem ser citadas ainda as vibrações das ondas do mar e ventos que podem ser convertidas, por exemplo, em energia elétrica (Chen, 2000; Rao, 2009; Reis, 2014-a, 2014-b, 2015-a, 2015-b, 2017).

É sabido que massa, mola e amortecedor são componentes básicos de sistemas oscilatórios e como os sistemas físicos são inerentemente não lineares, as não linearidades podem ser introduzidas nas equações diferenciais que governam os modelos matemáticos de tais sistemas através desses componentes. Como exemplos de problemas de vibrações não lineares podem ser citados as vibrações de um pêndulo, de vigas, de cabos, de alguns isolantes de circuitos elétricos (Chen, 2000; Rao, 2009; Reis, 2014-a, 2014-b, 2015-a, 2015-b, 2017; Brennan e Kovacic, 2011).

A equação não linear que modela um sistema oscilatório apresentando uma não linearidade cúbica é denominada equação de Duffing. Esta designação é uma homenagem ao pesquisador e engenheiro alemão Georg Duffing, que em 1918 escreveu um livro relacionado a este tema, o qual foi explorada em (Brennan e Kovacic, 2011; Reis, 2014-a, 2014-b, 2015-a, 2015-b, 2017).

Desde esta época, uma grande quantidade de estudos tem sido publicada envolvendo a mesma, incluindo o desenvolvimento de métodos de soluções, tanto analíticos quanto numéricos, além do uso desses para investigar o comportamento dinâmico de sistemas físicos que são descritos pelas várias formas desta equação. Devido à sua aparente simplicidade e ao acúmulo de informações relacionadas a esta equação, ela tem sido usada por muitos pesquisadores como um modelo aproximado de diversos sistemas físicos, ou como um modelo matemático convenientemente usado na investigação de novos métodos de soluções. Por exemplo, desde os anos 70, ela tem sido útil para descrever o comportamento caótico de um sistema (Rao, 2009; Brennan e Kovacic, 2011; Medeiros, 2017). Daí a importância do estudo de problemas relacionados a esta equação. Em Reis, (2014-b, 2015-b, 2017) estudos do primeiro modo de vibração de uma viga e das vibrações de um cabo ambos modelados por uma equação de Duffing podem ser encontrados.

O primeiro objetivo deste trabalho é investigar um sistema oscilatório cujos componentes básicos são massa, mola e amortecedor, tendo em vista que tais sistemas são de natureza não linear e modelados com um sistema de equação de Duffing. Para a análise da estabilidade desse sistema oscilatório foi utilizada a teoria de sistemas dinâmicos, descrita no Apêndice A. A importância do estudo desse sistema relaciona-se à consideração de fontes de vibração mecânica para captação e produção de energia, considerando materiais piezoelétricos.

“Energy harvesting” ou colheita de energia tem como objetivo a exploração de energias provenientes do meio ambiente e sua conversão em energia elétrica de modo que, ela seja ilimitada e com a possibilidade de ser armazenada e utilizada de forma direta em locais de demandas específicas (CELLULAR, 2016; ARBEX, 2016). Esse processo de colheita de energia ocorre através da captação de energia mecânica, realizada através de uma fonte de vibração do ambiente (ILIUK, 2011).

Tendo em vista esse cenário, começaram os estudos sobre “energy harvesting”, relativo a sistemas que, como o próprio nome indica, realizam a colheita de energia captada através de vibrações por meio de sistemas mecânicos ou piezoelétricos. Estes sistemas buscam o desenvolvimento de tecnologias para o atendimento do consumo energético relativo às atividades humanas e industriais, com redução de poluentes, de forma que consiga abastecer a demanda energética em qualquer local e a qualquer momento, podendo ser utilizada como um meio profissional ou até mesmo como entretenimento, sem haver a dependência do uso de fontes não renováveis, tais como a de combustíveis fósseis (queima do carvão, petróleo, gás, entre outros), produzidas apenas com fontes de energia provenientes de meios naturais, ou seja, que são consideradas renováveis, tais como fontes provenientes das ondas do mar, solar, eólica e geotérmica, incluindo as de reaproveitamento de biomassas.

A colheita de energia, captada através da energia cinética do movimento (vibração) possibilita a sua conversão em energia elétrica. Há a presença desse tipo de captação em vários lugares, sejam eles em meios industriais, no qual o grande nível de vibrações harmônicas facilita a sua captação e conversão (WILLIAMS; YATES, 1996; CELLULAR, 2016). Por meio de acoplamento piezoelétrico são explorados e captados os níveis de vibrações encontrados em grandes quantidades de aplicações, que incluem o movimento humano, como é o caso específico de dois exemplos, associados a vibrações em campos de futebol, o primeiro no Japão, em que a energia é captada pela vibração dos torcedores e o outro no Brasil, em que a movimentação dos jogadores é captada e convertida em energia elétrica para a iluminação do campo. Mas há também, além de captação através de movimentos do corpo humano, a captação por aparelhos domésticos, movimentos de automóveis, prédios, pontes, entre outros. Os sistemas de energy harvesting, em geral, são sistemas não lineares de equações diferenciais ordinárias (EDO's) ou parciais (EDP's), que podem ser analisados através de técnicas desenvolvidas

à resolução destes, tais como as técnicas de análise e controle de sistemas, lineares e não lineares, as quais encontram-se em grande expansão. Exemplos destas são as técnicas não lineares baseadas na teoria de estabilidade de Lyapunov e os métodos de linearização exata no espaço de estado (REIS et al, 2013a, 2013b, 2014a, 2014b, 2014c, 2015a, 2015b, 2015c; REIS; VASCONCELLOS; OLIVEIRA NETO, 2015; SILVA, 2003; SLOTINE, 1991).

Também é objetivo desse trabalho investigar um sistema de colheita de energia, definido através de um modelo matemático associado a um sistema não linear de equações diferenciais ordinárias de colheita de energia, o qual explora materiais piezoelétricos e foi proposto inicialmente em Ghoulí et al (2016). Esses autores, em sua resolução, utilizam um método complexo para a determinação das soluções de equilíbrio desse sistema, chamado de método quase-periódico. A partir desse modelo, pretende-se explorar um método mais simples para a sua resolução, conhecido como método de Cardano Tartaglia, o qual, de acordo com Elon (1987), é um método algébrico que possibilita determinar raízes exatas de um polinômio de grau 3. Para encontrar esse polinômio, no sistema de equações não lineares do modelo analisado, são efetuadas transformações algébricas propostas em Ghoulí et al (2016), que possibilitam analisar os pontos críticos deste sistema.

A partir de condições de 1ª ordem impostas ao sistema, para determinar estes pontos, é feita uma mudança de variável conveniente, a qual resulta em um polinômio do 6º grau. Com uma nova mudança de variável, esse polinômio é expresso em um polinômio de grau 3, cujas raízes podem ser determinadas pelo método algébrico citado. Assim, após encontrar as três raízes exatas deste polinômio, com substituições adequadas, estas serão convertidas nas soluções de equilíbrio do sistema de colheita de energia investigado. Após determinar as soluções de equilíbrio do sistema, através de simulações numéricas realizadas no software Matlab, que exploram o método numérico de Runge-Kutta Felberg, verifica-se que as suas soluções reais apresentam comportamento assintoticamente estável, o qual é ilustrado com seus respectivos planos de fase. Dessa forma, o objetivo principal do trabalho é o de investigar e determinar soluções de equilíbrio para um sistema de colheita de energia, formulado para materiais piezoelétricos através do método de Cardano Tartaglia. A análise de sua estabilidade, feita através da teoria de Lyapunov, é objeto de estudo futuro.

Neste trabalho, no Capítulo 1, apresenta-se um modelo de vibração baseado na equação de Duffing, que será investigado através de resultados revistos no Apêndice A. Em seguida no Capítulo 2, apresentam-se exemplos de aplicações de modelos de colheita de energia. No Capítulo 3 é modelado um sistema de colheita de energia, o qual foi definido para materiais piezoelétricos. No Capítulo 4, a determinação dos pontos críticos deste sistema é realizada de forma algébrica através do método de Cardano Tartaglia. No Capítulo 5, resultados numéricos obtidos por este método são apresentados, considerando uma aplicação deste modelo vista em Ghoully et al (2016). Na sequência são feitas as Conclusões do trabalho e apresentadas as Referências utilizadas para o desenvolvimento deste.

Capítulo 1 Modelo de vibrações

Neste capítulo é apresentada uma modelagem matemática associada a um sistema de vibração, expresso através da equação de Duffing. Para este sistema são determinados seus pontos de equilíbrio e são feitas, análise do estudo da estabilidade assintótica desses pontos. Estes são considerados como base para o estudo do sistema de colheita de energia, a ser visto no Capítulo 2.

1.1 A Modelagem Matemática

Considera-se, inicialmente, o oscilador de Duffing, conforme é descrito em (Rao, 2009; Brennan e Kovacic, 2011; Reis, 2014-a) e definido pela equação diferencial ordinária não linear de segunda ordem:

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \alpha x + \gamma x^3 = F \cos \Omega t \quad (1.1)$$

em que:

- x é o deslocamento;
- ξ é o raio de amortecimento;
- α é o parâmetro de rigidez;
- γ é o parâmetro de rigidez não linear;
- F é a amplitude de excitação;
- Ω é a frequência de excitação.

Conforme estudado por Brennan e Kovacic (2011), Reis (2014-a, 2014-b, 2015-a, 2015-b, 2017), quando $\xi = 0$ e $\alpha = 1$ a Equação (1.1) modela as vibrações de um cabo uniforme de comprimento L e suspenso, com deslocamento x e o movimento do primeiro modo de vibração de uma viga bi-apoiada nas extremidades, de comprimento L .

Escrevendo a Equação (1.1) na forma de espaço de estados, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 - 2\xi x_2 - \gamma x_1^3 + F \cos \Omega t \end{cases} \quad (1.2)$$

sendo $x = (x_1, x_2)$ o vetor de estados.

A Equação (1.2) pode ser escrita no espaço de estados, com um acréscimo de uma entrada de controle $u(t)$, de acordo com Reis (2014-a, 2015-b, 2017), apresentado da seguinte forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(t) \quad (1.2-a)$$

sendo:

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\alpha x_1 - 2\xi x_2 - \gamma x_1^3 \end{pmatrix}, g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u(t) = F \cos \Omega t + v(t) \quad (1.2-b)$$

e $v(t)$ uma entrada de controle auxiliar.

Para a determinação dos pontos críticos, de acordo com Equação (1.2), tem-se que:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1(-\alpha - \gamma x_1^2) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

A partir da Equação (1.3), determina-se o valor de x_1 , de modo que:

$$x_1 = 0, x_1 = \sqrt{\frac{-\alpha}{\gamma}}, x_1 = -\sqrt{\frac{-\alpha}{\gamma}}. \quad (1.4)$$

Os pontos críticos da dinâmica não linear de Equação (1.1), através do sistema de Equação (1.2), são dados por:

$$P_1 = (0,0), P_2 = \left(\sqrt{\frac{-\alpha}{\gamma}}, 0\right), P_3 = \left(-\sqrt{\frac{-\alpha}{\gamma}}, 0\right). \quad (1.5)$$

Se $\alpha = 0$ ou se $\alpha \neq 0$ e α, γ possuem sinais contrários, na Equação (1.5) existe somente o primeiro ponto crítico denominado de P_1 . Nota-se que os pontos críticos P_2 e P_3 estão fora da origem.

1.2 Análise de Estabilidade Assintótica

Como início do estudo de vibrações para a base da pesquisa em colheita de energia, a análise da estabilidade assintótica da dinâmica não linear de Equação (1.1), será efetuada em torno do ponto crítico P_1 .

Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -2\xi \end{pmatrix}$ a matriz Jacobiana deste sistema calculada em torno deste ponto P_1 (Ferrara, 2009; Reis, 2014-a, 2015-a). Obtém-se assim, a equação

característica e os autovalores desta dinâmica que são apresentados respectivamente, em (1.6):

$$\lambda^2 + 2\xi\lambda + \alpha = 0 \text{ e } \lambda = -\xi \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad (1.6)$$

sendo o discriminante desta equação denominado por Δ e dado pela expressão:

$$\Delta = 4(\xi^2 - \alpha). \quad (1.7)$$

Dessa forma, quando o discriminante for nulo ($\Delta = 0$), a equação característica possui um autovalor real de multiplicidade dois, a saber: $\lambda = -\xi$ (através da Equação (1.6)). Além disso:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \xi = \pm\sqrt{\alpha}, \alpha > 0. \quad (1.7-a)$$

Assim, de acordo com nossos estudos e com a análise feita, determina-se que o ponto de equilíbrio $P_1 = (0, 0)$, é classificado como nó ou ponto espiral (Ferrara, 2009). Além disso, quanto a estabilidade assintótica, tem-se que (Reis, 2014-a, 2015-a):

$$\text{a) Se } \Delta = 0 \text{ e } \xi < 0, \text{ então } P_1 \text{ é instável;} \quad (1.8)$$

$$\text{b) Se } \Delta = 0 \text{ e } \xi > 0, \text{ então } P_1 \text{ é assintoticamente estável} \quad (1.9)$$

Se $\Delta > 0$, a equação característica de equação (1.6) apresenta dois autovalores reais e distintos, denominados de: $\lambda_1 = -\xi + 2\sqrt{\xi^2 - \alpha}$ e $\lambda_2 = -\xi - 2\sqrt{\xi^2 - \alpha}$. Sendo que:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow -\infty < \xi < -\sqrt{\alpha} \cup \sqrt{\alpha} < \xi < +\infty \text{ e } \alpha > 0. \quad (1.10)$$

Dessa forma, é possível observar que se $\sqrt{\alpha} < \xi < +\infty$ então $\lambda_1 = -\xi + 2\sqrt{\xi^2 - \alpha} < 0$ e $\lambda_2 = -\xi - 2\sqrt{\xi^2 - \alpha} < 0$.

De fato, suponha $\lambda_1 > 0$

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -\xi + 2\sqrt{\xi^2 - \alpha} > 0 &\Leftrightarrow -\xi > -2\sqrt{\xi^2 - \alpha} \Leftrightarrow \xi < 2\sqrt{\xi^2 - \alpha} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \xi^2 < 4|\xi^2 - \alpha| = \begin{cases} 4(\xi^2 - \alpha) & \text{se } \xi^2 - \alpha > 0 \\ 4(-\xi^2 + \alpha) & \text{se } \xi^2 - \alpha < 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Na equação (1.11), a sua primeira inequação gera $0 < -\alpha$, o que não se verifica, pois, analisando a equação (1.10), ela apresenta $\alpha > 0$. A segunda inequação leva a:

$$\begin{aligned} \xi^2 < 4(-\xi^2 + \alpha) \text{ e } \xi^2 < \alpha &\Leftrightarrow 5\xi^2 < 4\alpha \text{ e } \xi^2 < \alpha \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \xi^2 < \frac{4\alpha}{5} \text{ e } \xi^2 < \alpha &\Leftrightarrow |\xi| < \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{\alpha} \text{ e } |\xi| < \sqrt{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

A desigualdade (1.12) não se verifica, pois $\sqrt{\alpha} < \xi < +\infty$, então $\lambda_1 = -\xi + 2\sqrt{\xi^2 - \alpha} < 0$. Desta forma, conforme Ferrara (2009), se $\Delta > 0$ e $\sqrt{\alpha} < \xi < +\infty$, tem-se que P_I é um nó estável.

$$\begin{aligned} \text{Agora, se } -\infty < \xi < -\sqrt{\alpha} \text{ e } \alpha > 0, \text{ então } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 > 0. \text{ De fato, suponha } \lambda_2 < 0 \\ -\xi - 2\sqrt{\xi^2 - \alpha} < 0 &\Leftrightarrow -\xi < 2\sqrt{\xi^2 - \alpha} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \xi^2 < 4|\xi^2 - \alpha| = \begin{cases} 4(\xi^2 - \alpha), & \text{se } \xi^2 - \alpha > 0 \\ 4(-\xi^2 + \alpha), & \text{se } \xi^2 - \alpha < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.13)$$

De acordo com a equação (1.13), na primeira inequação, $0 < -\alpha$. Isto não ocorre, pois por (1.10), $\alpha > 0$. A segunda equação leva a:

$$\begin{aligned} \xi^2 < 4(-\xi^2 + \alpha) \text{ e } \xi^2 < \alpha &\Leftrightarrow 5\xi^2 < 4\alpha \text{ e } \xi^2 < \alpha \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \xi^2 < \frac{4\alpha}{5} \text{ e } \xi^2 < \alpha &\Leftrightarrow |\xi| < \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{\alpha} \text{ e } |\xi| < \sqrt{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Logo, a desigualdade (1.14) não se verifica. Segundo Ferrara (2009), com $\Delta > 0$ e $-\infty < \xi < -\sqrt{\alpha}$, tem-se que P_I é um nó instável.

Se $\Delta < 0$, a equação característica de Equação (1.6) apresenta um par de autovalores complexos conjugados, a saber: $\lambda_1 = -\xi + 2j\sqrt{\alpha - \xi^2}$ e $\lambda_2 = -\xi - 2j\sqrt{\alpha - \xi^2}$. Além disso:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{\alpha} < \xi < \sqrt{\alpha} \text{ e } \alpha > 0. \quad (1.15)$$

Observa-se que se $-\sqrt{\alpha} < \xi < 0$ então a parte real de λ_1 e λ_2 são positivas. Então segundo Ferrara (2009), P_I é um ponto espiral instável.

Se $0 < \xi < \sqrt{\alpha}$ então a parte real de λ_1 e λ_2 são negativas. Então segundo Ferrara (2009), P_I é um ponto espiral assintoticamente estável.

As simulações relativas à análise da estabilidade assintótica do plano de fase do ponto P_1 , são apresentadas na seção 1.3. Para trabalhos futuros destaca-se que, os pontos P_2 e P_3 , definidos em (1.5), encontram-se deslocados da origem do sistema (1.2), sendo assim, será utilizada a técnica de Lyapunov, vista no Apêndice A, juntamente a translação desses pontos por meio de mudança de variáveis de estado, possibilitando a análise da estabilidade assintótica em torno da origem do sistema transladado.

1.3 Simulações Numéricas

A Figura 1.1, a seguir, mostra o plano de fase da dinâmica não linear de Equação (1.2) para os valores de parâmetros, adotados na Tabela 1.1 e variações dos parâmetros ζ e Ω (Porcel, 2017; Reis, 2014-a).

Como interessa vibrações naturais, nesta seção serão excluídos os valores de parâmetros tais que o sistema não linear se torna instável de acordo com os resultados obtidos nas Equações (1.8), (1.11), (1.12) e (1.13).

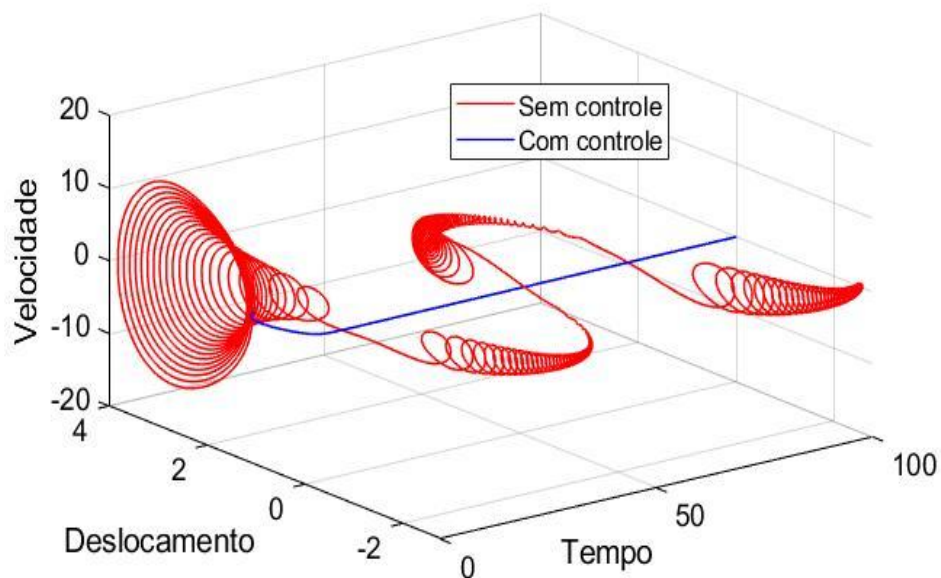
Tabela 1.1. Valores de parâmetros.

<i>Parâmetro</i>	α	γ	F
<i>Valor</i>	1	5	0,3

Com o objetivo de estabilizar o sistema em um intervalo de tempo bastante pequeno, Reis (2014-a) introduz um controle não linear, mediante variações da frequência de oscilações, usando a técnica de linearização exata.

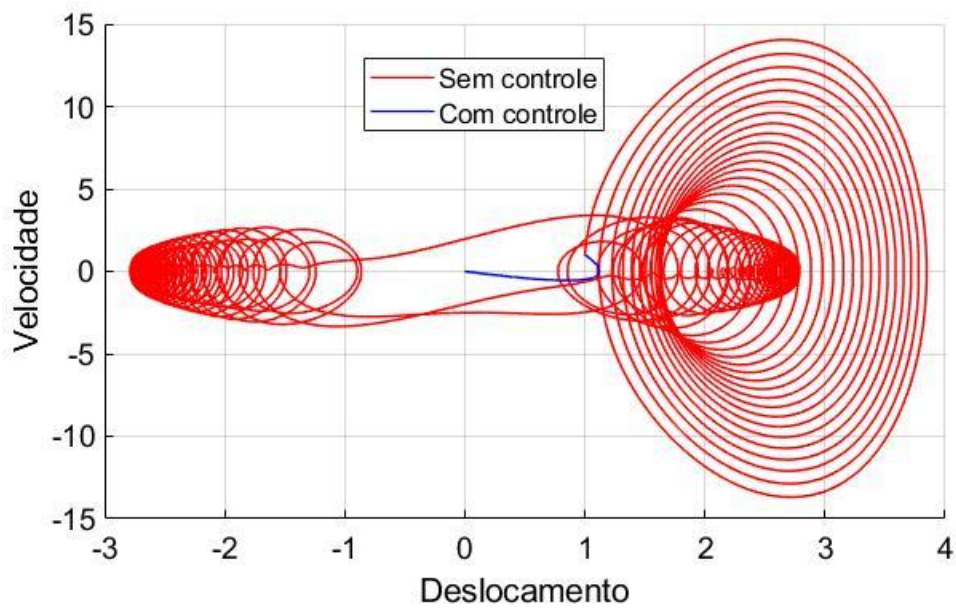
As Figuras 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 e 1.6 mostram o plano de fase e a resposta no tempo da dinâmica de Equação (1.2), as quais avaliam o comportamento desta dinâmica não linear (Porcel, 2017; Reis, 2014-a), de acordo com os valores de parâmetros da Tabela 1.1.

Figura 1.1: Plano de fase no tempo com $|\xi| < 1$ e $\Omega = 0.10$.



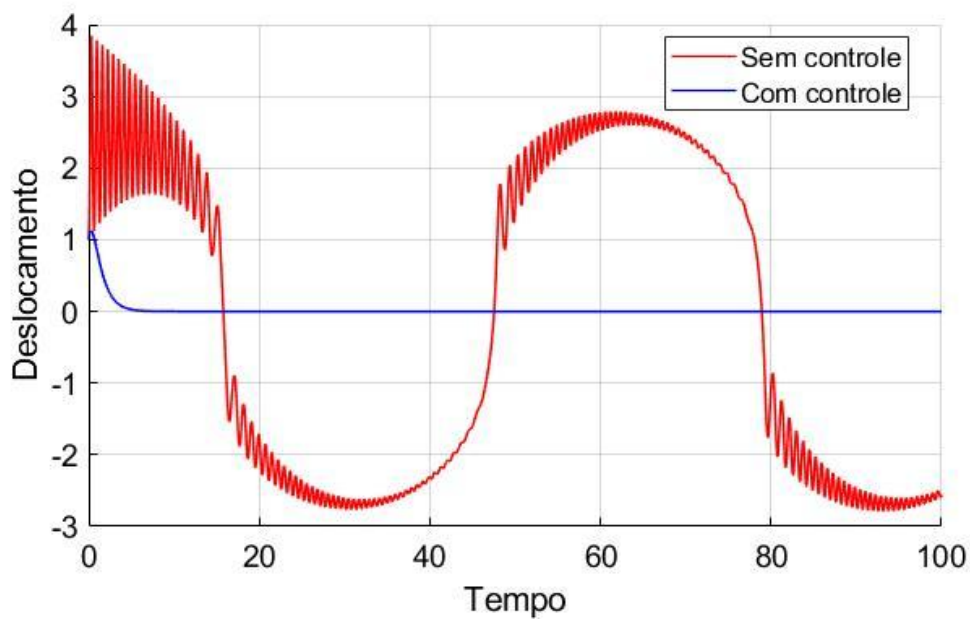
Fonte: Reis (2014-a).

Figura 1.2: Plano de fase com $|\xi| < 1$ e $\Omega = 0,10$.



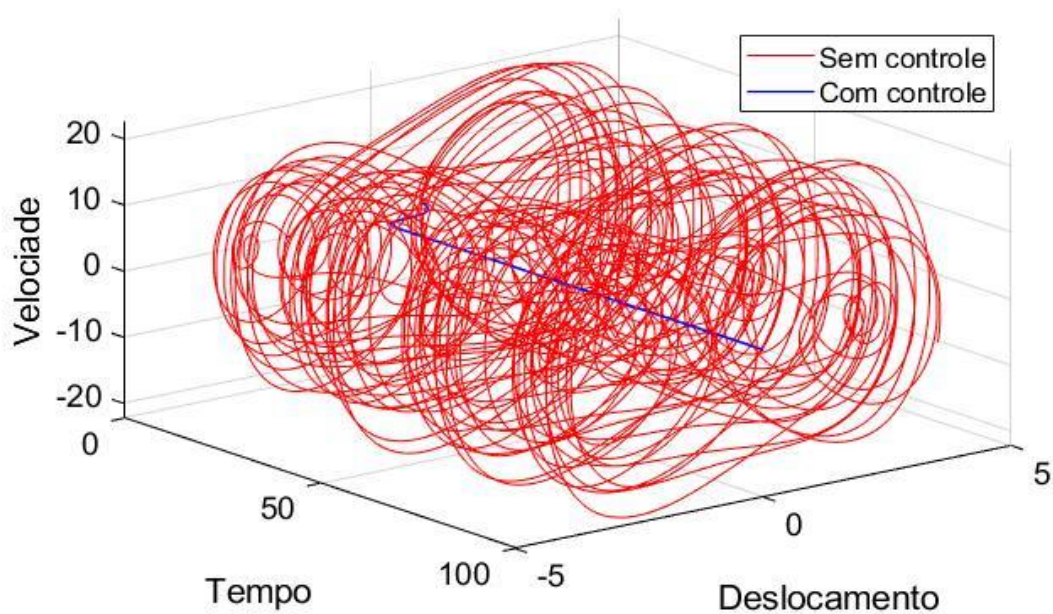
Fonte: Reis (2014-a).

Figura 1.3: Resposta no tempo com $|\xi| < 1$ e $\Omega = 0,10$.



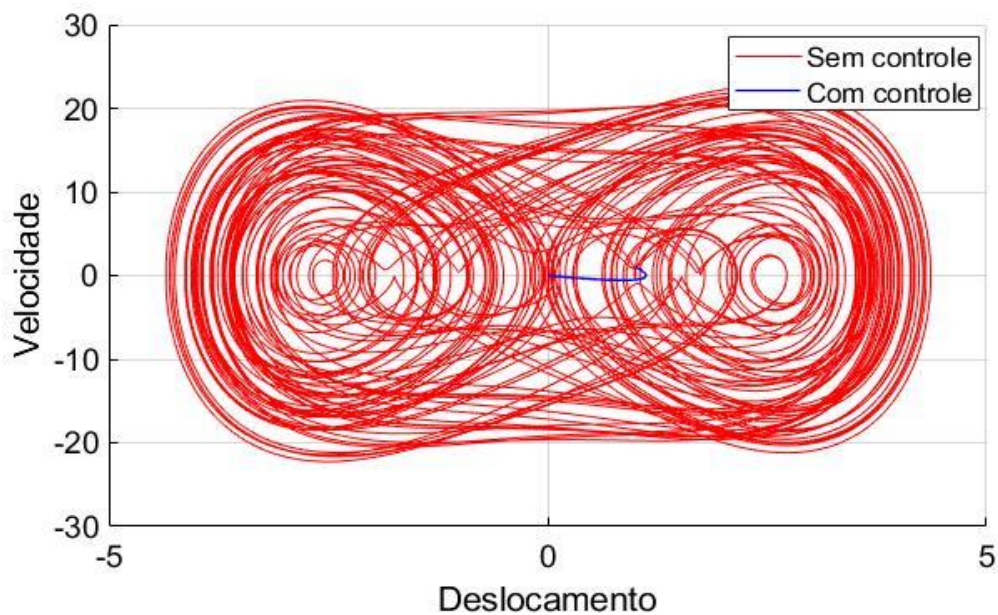
Fonte: Reis (2014-a).

Figura 1.4: Plano de fase no tempo com $|\xi| < 1$ e $\Omega = 2$.



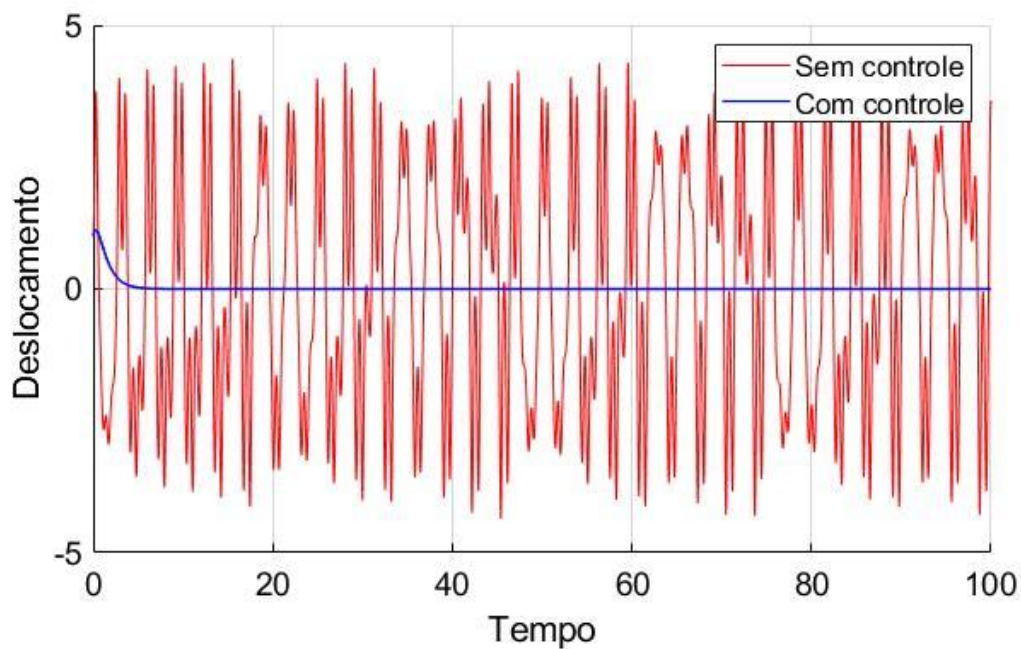
Fonte: Reis (2014-a).

Figura 1.5: Plano de fase com $|\xi| < 1$ e $\Omega = 2$.



Fonte: Reis (2014-a).

Figura 1.6: Resposta no tempo com $|\xi| < 1$ e $\Omega = 2$.



Fonte: Reis (2014-a).

Depreende-se das Figuras 1.1 a 1.6 um comportamento bastante irregular com variações significativas em sua amplitude, o que leva a inferir em um comportamento

caótico, como provado em Bender e Orszag (1978, p. 547), Zwillinger (1997, p. 122), Reis (2014-a), justificando a importância da equação de Duffing no estudo de uma grande gama de comportamentos conhecidos em sistemas dinâmicos não lineares. Vale ressaltar que Medeiros (2017) utiliza a mesma para exemplificar a ocorrência de ciclos limites.

De Reis (2014-a), as Figuras 1.1 a 1.6 mostram também o efeito no sistema de um controle não linear $u(t)$ (Equação 1.2-a), para eliminação do comportamento oscilatório acentuado, como também bastante eficiente no sentido de eliminação do caos existente conforme Bender e Orszag (1978, p. 547), Zwillinger (1997, p. 122), Reis (2014-a).

O modelo estudado nesse Capítulo 1 e a classificação feita em relação à análise de estabilidade de suas soluções, serão importantes para a continuidade dos estudos sobre o modelo de colheita de energia a ser visto nos capítulos 2 e 3, em que se pretende utilizar a teoria de Lyapunov à investigação dos pontos críticos deste e comparar com os resultados obtidos, de forma algébrica, pelo Método de Cardano-Tartaglia, vistos no Capítulo 4.

Capítulo 2 A colheita de energia

A colheita de energia consiste em um processo de conversão de uma fonte de energia presente no ambiente nas mais variadas formas, como na luz do sol, no calor do sol, no movimento dos ventos, em energia elétrica para algum uso específico. A grande diferença entre a energia que está armazenada nas baterias e a energia através de "energy harvesting" é que, esta é potencialmente infinita, quando se leva em consideração todos os tipos de energia que são explorados pelas diversas formas (ALMEIDA, 2011).

A transformação de energia presente no ambiente em energia elétrica não é um conceito novo, no entanto, projetar e integrar de forma eficiente dispositivos de colheita de energia para transformá-los em energia elétrica e atender as necessidades energéticas, constitui-se em um ramo novo de pesquisa e que está em ascensão (RAGHUNATHAN et al, 2005).

Vários métodos de colheita de energia estão presentes no cotidiano, por exemplo o sistema de colheita de energia solar, térmica, eólica e de vibrações, assim como é o escopo deste trabalho, em que será apresentado no próximo capítulo um modelo através de materiais piezoelétrico.

Segundo Almeida (2011), a energia proveniente da luz solar é o tipo de colheita de energia mais conhecida e com maior aplicabilidade, pois é utilizada tanto em escala industrial quanto doméstica. Esse tipo de fonte de energia é considerado não despachável, pois não se pode extrair energia a qualquer momento, ou seja, é dependente de algumas condições naturais como o clima por exemplo. Porém, pode ser chamada de fonte energética previsível, uma vez que seu comportamento é previsível mediante os suportes meteorológicos.

Além de energia proveniente da luz solar, há também a geração de energia elétrica por meio de fontes térmicas que é utilizada para grandes demandas de energia, como aquecimento das caldeiras em usinas termoelétricas, quanto para colheita de energia de baixa potência.

Para este trabalho, o principal objetivo é o estudo de colheita de energia através de materiais Piezoelétricos que captam energia por meio de vibração.

Em 1880, os irmãos Pierre e Jaques Curie, físicos e franceses, descobriram um fenômeno denominado de “piezoeletricidade”, no qual alguns materiais minerais têm capacidade de gerar corrente elétrica quando deformados por uma pressão mecânica. Esse efeito é encontrado nos cristais e também na cerâmica, visto que os cristais estão presentes no sensor de vibração e podem gerar tensões muito altas quando submetidos a esforços mecânicos e que podem servir a um sistema elétrico, porém a cerâmica oferece melhores propriedades depois de polarizadas e que também oferecem dimensões flexíveis por serem fabricadas por meio da sinterização de pós cerâmicos conformados via prensagem ou extrusão (SILVEIRA, 2010).

Um material é considerado piezoelétrico se a aplicação mecânica causa o desenvolvimento de um deslocamento elétrico interno, em que esse deslocamento causa uma polarização ou o aparecimento de cargas elétricas na superfície do material. Todos os materiais piezoelétricos conseguem converter uma forma de energia em outra (SILVEIRA, 2010).

A geração de energia Piezoelétrica não se aplica para grandes demandas, ela se restringe ao uso particular de baixa potência. Nos dias de hoje, há inúmeras aplicações para essa fonte de energia, uma delas está presente em alguns estádios de futebol, que aproveitam a energia mecânica produzida pelo movimento da torcida para gerar eletricidade e manter os equipamentos elétricos do estádio funcionando.

Segundo Motter (2018), a colheita de energia piezoelétrica (PEH, do inglês *Piezoelectric Energy Harvesting*) funciona, basicamente, através do princípio físico chamado efeito piezoelétrico. Esse efeito acontece com alguns tipos de cristais encontrados na natureza, por exemplo: quartzo, mica e calcita, ou até mesmo em tecidos biológicos. Os cristais são usados na fabricação de placas piezoelétricas que, para gerarem energia elétrica, são submetidas a uma força mecânica, isso faz com que haja um diferencial elétrico nos cristais.

A recíproca dessa propriedade também é verdadeira, ou seja, se aplicarmos um diferencial elétrico na placa piezoelétrica ela responderá com ondas mecânicas, e se as ondas geradas estiverem numa frequência superior a 20 KHz temos o chamado ultrassom, utilizado em muitas áreas da medicina (CALLISTER, 2000).

Na próxima seção, serão apresentados exemplos desse tipo de colheita de energia presentes nos dias atuais e que pode ser observado em alguns lugares do mundo.

2.2 Aplicação nos dias atuais

O estudo de colheita de energia vem se tornando cada vez mais comum nos dias atuais, no entanto, há uma complexidade em saber onde e como atuar com esse estudo. Nesta seção, serão apresentados dois exemplos que colhem energia através de fontes de vibração do corpo humano, uma que ocorre em um estádio do Japão e outro em um campo de futebol presente no Brasil

Dado o avanço dos estudos de cientistas japoneses, foi possível ser encontrada uma maneira de reduzir os gastos com a energia elétrica em um estádio de futebol, para isso há uma grande dependência dos torcedores que estiverem presentes no local durante a partida. Em um moderno estádio na cidade de Kobe há um gasto expressivo de energia elétrica e a partir desse cenário os estudiosos da área, convocaram a torcida para ajudar na captação de energia e redução de gastos desse estádio.

Para que isso ocorra, basta que o torcedor vibre durante o jogo, pois foram instaladas placas que captam a energia de acordo com o movimento do público presente, o que faz com que, quanto mais se moverem, mais energias vão produzir.

Outro fato acontece no Brasil, na cidade do Rio de Janeiro, em um campo de futebol *society* que ganhou iluminação da captação de energia proveniente do movimento dos próprios jogadores. Uma empresa holandesa investiu em um projeto e colocou aproximadamente 200 placas que capturam energia de acordo com a movimentação dos jogadores. Essas telas ficam debaixo do gramado e assim que capta o movimento das pessoas, elas agem como geradores, convertendo e transmitindo energia elétrica a painéis solares que foram instalados em torno do campo, cujo objetivo é de “alimentar” os holofotes.

Essa empresa holandesa já instalou esses painéis por algumas estações de trem na Europa, por centros comerciais na Austrália e no Terminal 3 do Aeroporto de Heathrow, em Londres. Assim como essa empresa, os cientistas japoneses já instalaram placas em uma Prefeitura do Japão e em uma ponte de Tóquio, com a qual captam energia através dos movimentos dos carros a qual ajuda na iluminação dos locais.

Na próxima seção, será apresentada a modelagem matemática de um sistema de colheita de energia de materiais piezoelétricos, o qual foi proposto por Ghoulí et al (2016), o qual é o objetivo principal de estudo deste trabalho.

2.3 Modelagem matemática de um sistema de colheita de energia

Nesta seção, é considerado um sistema de colheita de energia modelado por equações não lineares do seguinte modo:

$$\ddot{x}(t) + \delta \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \gamma x(t)^3 - X^{v(t)} = \alpha x(t - \tau) + f \cos(\lambda t) \quad (2.1)$$

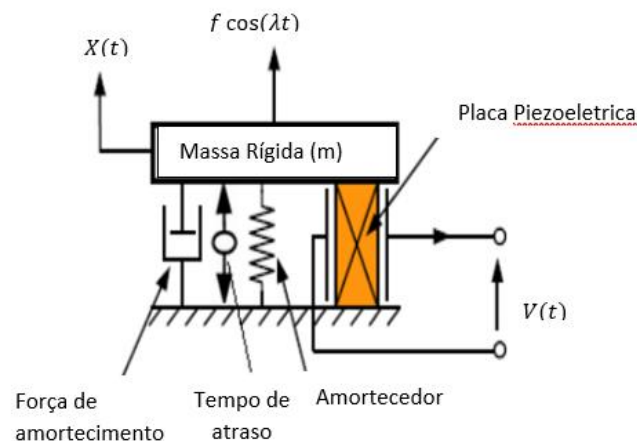
$$\dot{v}(t) + \beta v(t) + k \dot{x}(t) = 0 \quad (2.2)$$

O sistema descrito em (2.1) e (2.2) é proposto com a definição de parâmetros e variáveis dependentes do tempo, definidas a seguir

- $x(t)$ é o deslocamento relativo da massa rígida m (Kg) ;
- $v(t)$ é a tensão elétrica (V);
- δ é a taxa de amortecimento mecânico $\left(\frac{Ns}{m}\right)$;
- γ é o parâmetro de rigidez $\left(\frac{N}{m}\right)$;
- X é o termo de acoplamento piezoelétrico na equação mecânica;
- k é o termo de acoplamento piezoelétrico no circuito elétrico;
- β constante de tempo do circuito elétrico;
- α é o ganho e τ o tempo de atraso (s);
- f e λ são, respectivamente, a amplitude e a frequência de excitação (Hz).

Sendo este modelo, estudado por Ghoul et al (2016) conforme pode-se ser visto na Figura 2.1.

Figura 2.1: Esquema do sistema de colheita de energia.



Fonte: Ghoul et al (2016).

A colheita de energia através de materiais piezoelétricos propõe que certos materiais têm a capacidade de gerar potência elétrica através da energia mecânica. Dessa forma o sistema massa-mola-amortecedor apresentado nas Equações (2.1) e (2.2) e mostrado na Figura 2.4 apresenta uma força que é aplicada para cima e causa assim um deslocamento $x(t)$ na direção indicada, além disso, possui uma estrutura de rigidez e um amortecedor que gera uma tensão no dispositivo piezoelétrico.

Este modelo é útil para fornecer informações quanto ao deslocamento, velocidade e aceleração da massa rígida, além de permitir cálculos da energia armazenada no material piezoelétrico devido a rigidez da viga e o deslocamento da massa, tornando esse modelo eficaz para descrever fenômenos mecânicos relativos a vigas.

Com os estudos feitos por Ghouli et al (2016), é possível fazer substituições de parâmetros das Equações (2.1) e (2.2) do seguinte modo:

$$\delta = \varepsilon\tilde{\delta}, \quad \gamma = \varepsilon\tilde{\gamma}, \quad X = \varepsilon\tilde{X}, \quad \alpha = \varepsilon\tilde{\alpha}, \quad f = \varepsilon\tilde{f}, \quad \sigma = \varepsilon\tilde{\sigma}. \quad (2.3)$$

Com as substituições feitas, as Equações (2.1) e (2.2), podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x = \varepsilon[-\tilde{\delta}\dot{x}(t) - \tilde{\gamma}x(t)^3 + \tilde{X}v(t) + \tilde{\alpha}x(t - \tau) + \tilde{f} \cos(\lambda t)] \quad (2.4)$$

$$\dot{v}(t) + \beta v(t) + kx(t) = 0 \quad (2.5)$$

O novo sistema formado pelas equações (2.4) e (2.5), é reescrito e alterado, de forma equivalente, através da técnica conhecida como múltipla escala. Tais alterações fazem com que a solução do sistema (2.1) e (2.2) pode ser investigada a partir das expressões (2.4) e (2.5), consideradas em Ghouli et al (2016), expressas a seguir:

$$x(t) = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^3) \quad (2.6)$$

$$v(t) = v_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon v_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 v_2(T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^3), \quad (2.7)$$

onde $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t$. Substituindo no sistema principal de Equações (2.1) e (2.2) as Equações (2.6) e (2.7), de acordo com Ghouli et al (2016), é obtido um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, da forma:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{C_1}{2\omega_0}a + \frac{f}{2\omega_0}\sin(\varphi) \\ a\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C_2}{2\omega_0}a - \frac{C_3}{2\omega_0}a^3 + \frac{f}{2\omega_0}\cos(\varphi) \end{cases} \quad (2.8)$$

onde a é a amplitude e θ o período e tem-se definidos as variáveis a seguir:

$$C_1 = -\delta\omega_0 - \alpha \sin(\omega_0\tau) - \frac{\kappa\beta\chi\omega_0}{(\beta^2 + \omega_0^2)};$$

$$C_2 = 2\omega_0\sigma + \alpha \cos(\omega_0\tau) - \frac{\kappa\beta\chi\omega_0^2}{(\beta^2 + \omega_0^2)};$$

$$C_3 = \frac{3\gamma}{4};$$

$$\varphi = \tilde{\sigma}T_2 - \theta.$$

A partir do sistema apresentado em (2.8), será feita a análise de seus pontos críticos, os quais são determinados por um método diferente do proposto em Ghoulí et al (2016), denominado de método quase-periódico. Os cálculos para a determinação dos pontos críticos do sistema (2.8), os quais, com uma mudança de variável, possibilitam determinar esses pontos de uma forma algébrica, através de uma equação polinomial, cujas raízes são determinadas pelo método de Cardano - Tartaglia, será explorado no próximo capítulo.

Capítulo 3 A equação polinomial do 3º. Grau e o método de Cardano - Tartaglia

O método de Cardano – Tartaglia tem a finalidade de encontrar as raízes de uma equação de grau 3, por meio de manipulações algébricas. Para ser desenvolvido no sistema (2.8) apresentado, é preciso obter um polinômio de grau 3 no processo de determinação de seus pontos de equilíbrio.

Com isso, é necessário que sejam feitas várias substituições de modo que, ao impor as condições de primeira ordem no sistema (2.8), a fim de encontrar seus pontos críticos, obtém-se uma equação de grau 6, para, a seguir, com novas manipulações algébricas, transformá-la em uma equação polinomial de grau 3, em que através de correlações estabelecidas entre seus parâmetros, simplificam os cálculos a serem feitos. Desta maneira, aplica-se o método de Cardano – Tartaglia na equação de grau 3, possibilitando determinar suas raízes, para depois determinar as da equação de grau 6. Tais raízes satisfazem as condições de primeira ordem impostas pela Equação (3.1) no sistema não linear apresentado em (2.8), que são descritas abaixo:

$$\frac{da}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (3.1).$$

Sob estas condições, considerando a primeira linha da equação (2.8), obtém-se:

$$a = \frac{-f}{C_1} \text{sen}(\varphi), \quad \text{sen}(\varphi) = \frac{-C_1}{f} a, \quad \text{cos}(\varphi) = \frac{\sqrt{f^2 - C_1^2 a^2}}{f}. \quad (3.2).$$

Fazendo-se a substituição de $\text{cos}(\varphi)$ definido em (3.1) à segunda linha do sistema de Equação (2.8), determina-se um polinômio de grau 6, expresso por:

$$C_3^2 a^6 - 2C_2 C_3 a^4 + (C_1^2 + C_2^2) a^2 - f^2 = 0; \quad (3.3)$$

Após a equação de grau 6 ser encontrada, é preciso fazer uma nova transformação de modo que esta seja equivalente a uma equação polinomial de grau 3 para assim ser utilizado o método de Cardano Tartaglia. Desta forma, é definida as seguintes substituições, para $C_3 \neq 0$, a serem feitas na Equação (3.3):

$$x = a^2, \quad A = -\frac{2C_2 C_3}{C_3^2}, \quad B = \frac{(C_1^2 + C_2^2)}{C_3^2}, \quad C = -\frac{f^2}{C_3^2}, \quad (3.4)$$

essas substituições são reescritas e expressas através de outra equação polinomial do 3º

grau da seguinte forma:

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0. \quad (3.5)$$

Feitas as modificações e encontrando a equação do 3º grau descrita em (3.5), é possível que esta seja estudada através do método de Cardano Tartaglia. Com isso, foram feitas outras substituições conforme este método descreve, para assim encontrar suas raízes.

Para início, é feita a seguinte substituição:

$$x = y - \frac{A}{3} \quad (3.6)$$

Fazendo a substituição de (3.6) em (3.5), encontra-se a Equação (3.7):

$$y^3 + \left(B - \frac{A^2}{3}\right)y + \left(C - \frac{AB}{3} + \frac{2A^3}{27}\right) = 0 \quad (3.7)$$

Tomando como $p = B - \frac{A^2}{3}$ e $q = C - \frac{AB}{3} + \frac{2A^3}{27}$ e substituindo na Equação (3.7), obtemos (3.8):

$$y^3 + py + q = 0 \quad (3.8)$$

Como uma equação desta forma possui pelo menos uma raiz real, então ela será obtida da forma $y = u + v$, substituindo na Equação (3.8) e obtém-se:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0 \Leftrightarrow \quad (3.9)$$

$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0 \Leftrightarrow \quad (3.10)$$

$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0 \quad (3.11)$$

Utilizando a última equação apresentada em (3.11) e sendo imposta a condição de que $p = -3uv$ e $q = -(u^3 + v^3)$, determina-se:

$$u^3 v^3 = \frac{-p^3}{27} \text{ e } u^3 + v^3 = -q \quad (3.12)$$

Após os cálculos feitos, considera-se u^3 e v^3 como variáveis, o problema equivale a resolução de uma equação do 2º grau do seguinte modo:

$$z^2 - S z + P = 0 \quad (3.13)$$

considerando, S como a soma das raízes: $u^3 + v^3$ e P como o produto das raízes: $u^3 v^3$. Dessa forma é resolvida a equação do 2º grau do seguinte modo:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (3.14)$$

Assim, é feita a resolução da equação do 2º grau (3.14), de modo que se obtêm as partes u e v da primeira raiz: $r_1 = u + v$. Para a obtenção dessa raiz é calculado o discriminante:

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \quad (3.15)$$

A primeira raiz (r_1) encontrada satisfaz a equação original (3.5) e levando em conta a translação ocorrida em (3.6), será dada por:

$$r_1 = u + v - \frac{A}{3} \quad (3.16)$$

Com a expressão da raiz dada em (3.16), a equação original (3.5) é expressa através de um polinômio do segundo grau encontrado abaixo:

$$p(x) = x^2 + (A + r_1)x - \frac{C}{r_1} \quad (3.17)$$

Do polinômio do 2º. grau dado em (3.17), é possível determinar as outras duas raízes de acordo com o sinal do determinante, de tal forma que as três raízes procuradas são determinadas:

i) se $D < 0$, encontramos os seguintes valores:

$$r = \sqrt{\frac{-(-3uv)^3}{27}}, \text{ então:}$$

$$r_1 = 2 \sqrt[6]{\frac{-(-3uv)^3}{27}} \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{u^3+v^3}{2r}\right)}{3}\right) - \frac{A}{3}; \quad (3.18a)$$

$$r_2 = 2 \sqrt[6]{\frac{-(-3uv)^3}{27}} \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{u^3+v^3}{2r}\right) - 6uv i}{3}\right) - \frac{A}{3}; \quad (3.18b)$$

$$r_3 = 2 \sqrt[6]{\frac{-(-3uv)^3}{27}} \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{u^3+v^3}{2r}\right) - 12uv i}{3}\right) - \frac{A}{3}. \quad (3.18c)$$

ii) Se $D > 0$:

$$r_1 = u + v - \frac{A}{3}; \quad (3.19a)$$

$$r_{2,3} = \frac{-(A+u+v-\frac{A}{3}) \pm \sqrt{(u+v-\frac{A}{3}+A)^2 + \frac{4C}{u+v-\frac{A}{3}}}}{2}. \quad (3.19b)$$

iii) Se $D = 0$, $(u + v - \frac{A}{3} + A)^2 + \frac{4C}{u+v-\frac{A}{3}} = 0$, então:

$$r_1 = u + v - \frac{A}{3}; \quad (3.20a)$$

$$r_{2,3} = \frac{-(A+u+v-\frac{A}{3})}{2}. \quad (3.20b)$$

Desse modo, foi possível realizar os cálculos para a determinação de raízes da equação polinomial de grau 3 definida em (3.5) através do método de resolução de Cardano Tartaglia.

As três raízes encontradas, nos casos i) – (3.18a) a (3.18c), ii) - (3.19a) e (3.19b) e iii) - (3.20a) e (3.20b), para a Equação (3.5), deverão ser reescritas através dos termos expressos em (3.4), de modo que seja feita a substituição desses termos e obtenha-se as raízes da Equação (3.3). Os pontos críticos ou soluções de equilíbrio do sistema de colheita de energia (2.8), devido à imposição das condições vistas em (3.1), as expressões definidas em (3.4), auxiliam na determinação das soluções de equilíbrio deste sistema, as quais são determinadas, inicialmente, como as raízes da equação polinomial (3.5) associadas à variável de amplitude a do sistema, conforme os cálculos

feitos a seguir:

- i) Com $D < 0$, feitas as substituições, é possível encontrar as seguintes raízes:

$$r = \sqrt{\frac{-\left(\frac{C_1^2 + C_2^2}{C_3^2} + \frac{\left(\frac{2C_2C_3}{C_3^2}\right)^2}{3}\right)^3}{27}}, \text{ então:}$$

$$r_1 = 2\sqrt{\frac{-\left(\frac{C_1^2 + C_2^2}{C_3^2} + \frac{\left(\frac{2C_2C_3}{C_3^2}\right)^2}{3}\right)^3}{27}} \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{\frac{f}{C_3^2} + \frac{-2C_2C_3 \cdot (C_1^2 + C_2^2) + \frac{2C_2C_3}{27C_3^2}}{3C_3^4}}{2r}\right)}{3}\right) - \frac{\frac{2C_2C_3}{C_3^2}}{3}; \quad (3.21a)$$

$$r_2 = 2\sqrt{\frac{-\left(\frac{C_1^2 + C_2^2}{C_3^2} + \frac{\left(\frac{2C_2C_3}{C_3^2}\right)^2}{3}\right)^3}{27}} \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{\frac{f}{C_3^2} + \frac{-2C_2C_3 \cdot (C_1^2 + C_2^2) + \frac{2C_2C_3}{27C_3^2}}{3C_3^4}}{2r}\right) + 2\left(\frac{C_1^2 + C_2^2}{C_3^2} + \frac{\left(\frac{2C_2C_3}{C_3^2}\right)^2}{3}\right)i}{3}\right) - \frac{\frac{2C_2C_3}{C_3^2}}{3}; \quad (3.21b)$$

$$r_3 = 2\sqrt{\frac{-\left(\frac{C_1^2 + C_2^2}{C_3^2} + \frac{\left(\frac{2C_2C_3}{C_3^2}\right)^2}{3}\right)^3}{27}} \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{\frac{f}{C_3^2} + \frac{-2C_2C_3 \cdot (C_1^2 + C_2^2) + \frac{2C_2C_3}{27C_3^2}}{3C_3^4}}{2r}\right) + 4\left(\frac{C_1^2 + C_2^2}{C_3^2} + \frac{\left(\frac{2C_2C_3}{C_3^2}\right)^2}{3}\right)i}{3}\right) - \frac{\frac{2C_2C_3}{C_3^2}}{3}. \quad (3.21c)$$

- ii) Com $D > 0$, obtém-se os seguintes resultados:

$$r_1 = u + v - \frac{A}{3} \quad (3.22a)$$

$$r_{2,3} = \frac{\left(\frac{2C_2}{C_3} - a^2 \pm \sqrt{\frac{a^6 C_3^2 - 4C_2 C_3 a^4 + 4C_2^2 a^2 - 4f}{a^2 C_3^2}}\right)}{2}. \quad (3.22b)$$

- iii) Com $D = 0$, obtém-se os seguintes resultados:

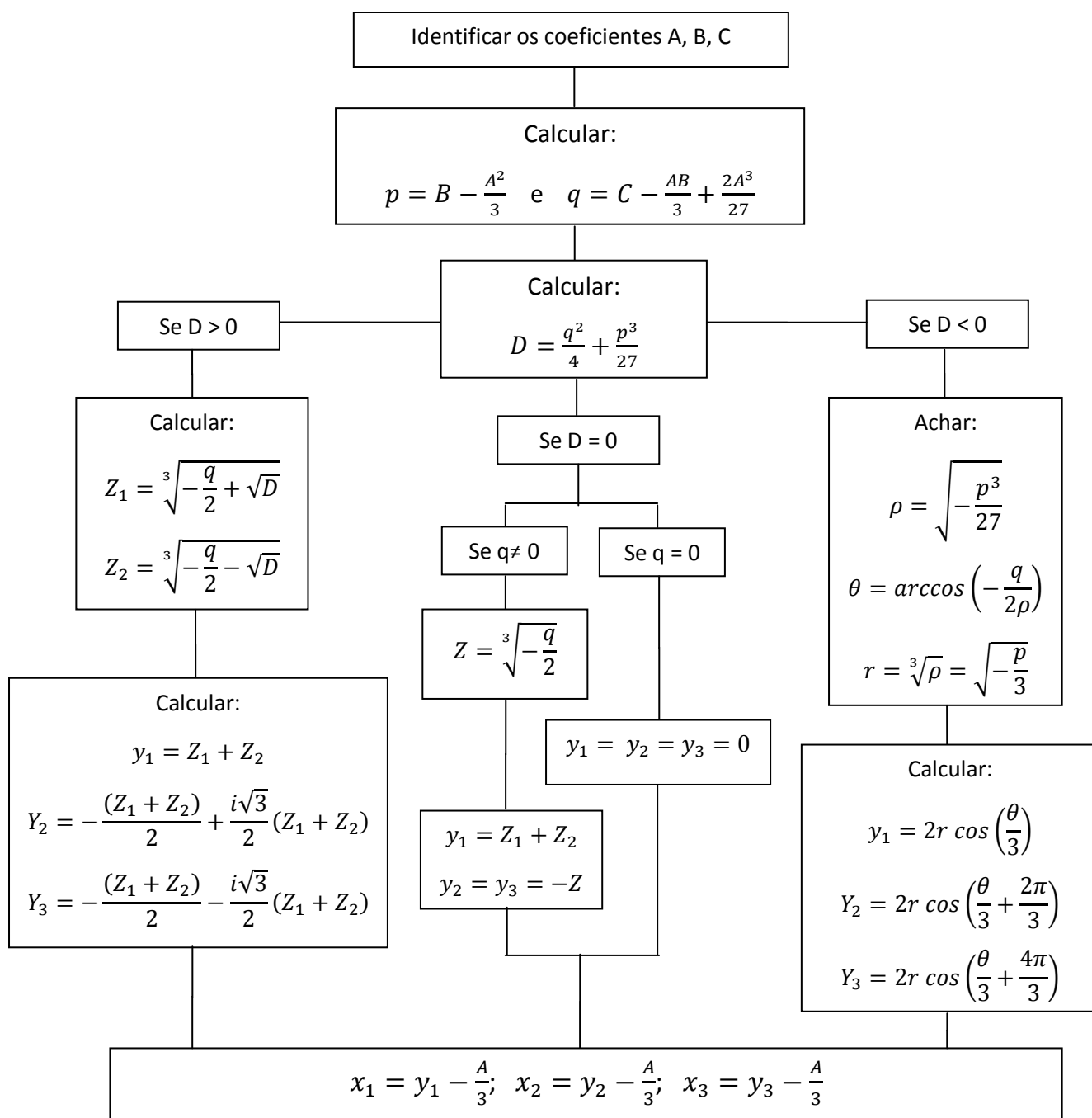
$$r_1 = u + v - \frac{A}{3}; \quad (3.23a)$$

$$r_{2,3} = \frac{\left(\frac{2C_2}{C_3} - a^2\right)}{2}. \quad (3.23b)$$

Para cada solução obtida nos casos i) – (3.21a) a (3.21c), ii) - (3.22a) e (3.22b) e iii) - (3.23a) e (3.23b), considerando-se (3.4), determinam-se as raízes da equação polinomial (3.3) associadas à variável a . Com as soluções de (3.3) calculadas, consideram-se as expressões em (3.2), para se determinar as soluções do sistema (2.8), relativas ao período φ .

De forma resumida é possível escrever todos esses cálculos através de um algoritmo, apresentado a seguir:

Algoritmo de resolução do método de Cardano - Tartaglia



Assim, a partir do desenvolvimento e obtenção de soluções de equilíbrio determinadas nesta seção, através do método de Cardano-Tartaglia, foi possível determinar soluções de equilíbrio para o sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares expresso em (2.8), que é associado ao problema de colheita de energia estudado por Ghouli et al (2016), formulado pelas Equações (3.1) e (3.2). No próximo capítulo, as soluções obtidas no Capítulo 3 são exploradas e as estabilidades analisadas.

Capítulo 4 Resultados numéricos obtidos para um sistema de colheita de energia

Após a determinação, no Capítulo 3, das soluções associadas à equação polinomial de 3º. Grau (3.5), utilizadas para obter as soluções da equação polinomial de 6º. Grau (3.3) e que, a partir destas, possibilitaram a obtenção dos pontos críticos relativos ao sistema de colheita de energia definido em (2.8), foi realizada a análise da estabilidade assintótica desses pontos de acordo com a teoria de Lyapunov, além de testes numéricos realizados, considerando-se os dados utilizados à resolução de um problema real, relativo a um sistema de colheita de energia através de uma placa de captação piezoelétrica, extraídos de Ghouli et al (2016) e apresentados na Tabela 4.1:

Tabela 4.1: Parâmetros para análise assintótica de um problema de colheita de energia encontrados em Ghouli et al (2016)

Parâmetros do artigo	Valores
k	0.5
f	0.2
X	0.05
α	0.4
ω_0	0.6
β	0.9
δ	0.001
τ	0.5
σ	0.03
γ	0.07

Através dos parâmetros da Tabela 4.1, tem-se que o valor do discriminante expresso na Equação (3.14), calculado numericamente como $D = 49,3839$, satisfaz a condição ii) – (3.22a) e (3.22b), apresentada nesta seção.

Dessa forma, foi possível determinar u e v usando a primeira raiz para $\Delta > 0$.

$$x = u + v - \frac{A}{3} = a^2$$

Substituindo os valores numéricos encontrados, através do Software MatLab versão 2016a, tem-se os seguintes valores de x_1, x_2 e x_3 :

$$x_1 = 7,7192 + 2,1041i;$$

$$x_2 = 7,7192 - 2,1041i$$

$$x_3 = 0,226$$

Pelas raízes encontradas podemos calcular os valores de a , considerando que $a^2 = x$. Porém, x_1 e x_2 são números complexos da forma $z = a + bi$, então suas raízes devem ser calculadas por meio da Segunda Fórmula de Moivre, definida para um número complexo da seguinte maneira:

$$z = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right) \quad (3.24)$$

no qual k e $n \in \mathbb{N}$, tal que $k = 0, 1, \dots, n - 1$; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\theta = \arccos \frac{a}{|z|}$

Desta forma, utilizando a Equação (3.24) para as raízes complexas obtidas em x_1 e x_2 , assim encontrando as seis raízes quais são elas:

$$a_1 = 2,8036 + 0,3752i;$$

$$a_2 = -2,8036 - 0,3752i;$$

$$a_3 = 2,8036 - 0,3752i;$$

$$a_4 = -2,8036 + 0,3752i;$$

$$a_5 = 0,4761 ;$$

$$a_6 = -0,4761 .$$

Para achar φ , voltamos na Equação (3.2) e aplicamos as substituições:

$$a = \frac{-f}{C_1} \text{sen}(\varphi) \Rightarrow \varphi = \text{arcsen}\left(\frac{-C_1}{f} \cdot a\right);$$

Resultando nos seguintes valores de φ :

$$\varphi_1 = 1,4130 + 1,2258i;$$

$$\varphi_2 = -1,4130 - 1,2258i;$$

$$\varphi_3 = 1,4130 - 1,2258i;$$

$$\varphi_4 = -1,4130 + 1,2258i;$$

$$\varphi_5 = 0,3155;$$

$$\varphi_6 = -0,3155.$$

Então, os pontos que satisfazem o sistema (2.8), segundo os parâmetros considerados, são:

$$P_1(2,8036 + 0,3752i ; 1,4130 + 1,2258i);$$

$$P_2(-2,8036 - 0,3752i ; -1,4130 - 1,2258i);$$

$$P_3(2,8036 - 0,3752i ; 1,4130 - 1,2258i);$$

$$P_4(-2,8036 + 0,3752i ; -1,4130 + 1,2258i) \quad (4.1)$$

$$P_5(0,4761 ; 0,3155);$$

$$P_6(-0,4761 ; -0,3155).$$

Para fins de validação numérica dos resultados encontrados, podemos substituir os valores dos pontos, mostrados acima (4.1), no sistema (2.8), obtendo os seguintes resultados:

Tabela 4.2: Valores encontrados a partir das substituições dos pontos no sistema.

Pontos encontrados: $P(a, \varphi)$ em (4.1)
$P_1(2,8036 + 0,3752i ; 1,4130 + 1,2258i);$
$P_2(-2,8036 - 0,3752i ; -1,4130 - 1,2258i);$
$P_3(2,8036 - 0,3752i ; 1,4130 - 1,2258i);$
$P_4(-2,8036 + 0,3752i ; -1,4130 + 1,2258i);$
$P_5(0,4761 ; 0,3155);$
$P_6(-0,4761 ; -0,3155).$

Na Tabela 4.2, pode-se notar que, ao calcular os pontos em (4.1) no sistema de equações diferenciais (2.8), tem-se valores muito próximos de zeros, tanto para os pontos com coordenadas complexas (P_1, P_2, P_3 e P_4), quanto para os pontos de coordenadas reais puros (P_5 e P_6). Isso mostra que os parâmetros adotados junto as raízes obtidas, fazem o sistema convergir aos pontos estáveis. Sendo assim, podemos concluir que o sistema (2.8) tem um comportamento estável em torno da vizinhança dos pontos críticos encontrados numericamente.

Nessa seção foram apresentadas as raízes do sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares, através da determinação de uma equação de grau 6 que foi transformada em uma nova equação do 3º grau e desenvolvida através do método de Cardano Tartaglia. A seguir será apresentada a análise da estabilidade assintótica através da Teoria de Lyapunov, abordada com mais detalhes no Apêndice A.

4.1. Análise da estabilidade de Lyapunov para os pontos críticos do sistema (2.8)

A princípio, considera-se o Sistema (2.8) e a seguinte mudança de variável, a fim de simplificar as manipulações algébricas sem perda de generalidade:

$$J = \frac{c_1}{2\omega_0}, K = \frac{f}{2\omega_0}, H = \frac{c_2}{2\omega_0} \text{ e } L = \frac{c_3}{2\omega_0} \quad (4.2)$$

Considerando $P = (m_1, n_1)$ um ponto crítico do sistema (2.8), para a análise de estabilidade assintótica é necessário a seguinte translação:

$$x_1 = a - m_1 \Rightarrow a = x_1 + m_1; \quad (4.3)$$

$$y_1 = \varphi - n_1 \Rightarrow \varphi = y_1 + n_1 \quad (4.4)$$

Assim, com as novas variáveis de estado definidas, temos um novo sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = J(x_1 + m_1) + K \operatorname{sen}(y_1 + n_1) \\ \frac{dy_1}{dt} = H - L(x_1 + m_1)^2 + K \frac{\cos(y_1 + n_1)}{x_1 + m_1} \end{cases} \quad (4.5)$$

Fazendo o desenvolvimento dos termos em evidência:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = Jx_1 + Jm_1 + K \operatorname{sen}(y_1 + n_1) \\ \frac{dy_1}{dt} = H - Lx_1^2 - 2Lx_1m_1 - Lm_1^2 + K \frac{\cos(y_1 + n_1)}{x_1 + m_1} \end{cases} \quad (4.6)$$

A matriz Jacobiana relativa à origem do sistema transladado:

$$D_P = \begin{bmatrix} J & K \cos(y_1 + n_1) \\ -2Lx_1 - 2Lm_1 - \frac{K \cos(y_1 + n_1)}{(x_1 + m_1)^2} & \frac{-K \operatorname{sen}(y_1 + n_1)}{(x_1 + m_1)} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Devido à translação dos pontos considerada em (4.3) e (4.4), considerando a matriz D_P , expressa em (4.7), aplicada o ponto origem do sistema $P(0,0)$, obtém-se:

$$D_P = \begin{bmatrix} J & K \cos(n_1) \\ -2Lm_1 - \frac{K \cos(n_1)}{n_1^2} & \frac{-K \operatorname{sen}(n_1)}{n_1} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Fazendo novas substituições, da seguinte maneira:

$$G = K \cos(n_1), \quad E = -2Lm_1 - \frac{K \cos(n_1)}{n_1^2}, \quad W = \frac{-K \sin(n_1)}{n_1} \quad (4.9)$$

para a matriz jacobiana D_P em (4.8), obtemos:

$$D_P = \begin{bmatrix} J & G \\ E & W \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

para realizar a análise de autovalores do sistema (4.6), em relação à origem deste, consideramos o determinante: $|D_P - \lambda I| = 0$.

Assim,

$$\begin{vmatrix} J - \lambda & G \\ E & W - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (J - \lambda)(W - \lambda) - GE = 0 \quad (4.11)$$

$$JW - J\lambda - \lambda W - \lambda^2 - EG = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - (J + W)\lambda + (JW - EG) = 0 \quad (4.12)$$

$$\Delta = J^2 + 2JW + W^2 - 4JW + 4EG \quad (4.13)$$

$$\Delta = J^2 + W^2 - 2JW + 4EG; \quad (4.14)$$

obtemos as raízes a seguir:

$$\lambda_1 = \frac{J+W+\sqrt{J^2+W^2-2JW+4EG}}{2}, \quad (4.15)$$

$$\lambda_2 = \frac{J+W-\sqrt{J^2+W^2-2JW+4EG}}{2}. \quad (4.16)$$

Desta forma, temos três possíveis resultados:

- I. Para $\Delta > 0 \Leftrightarrow (J - W)^2 > -4EG$, de acordo com a Teoria de Lyapunov, vista no Apêndice A, temos as seguintes condições de estabilidade assintótica:
 - i. Se $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, então $P(m_1, n_1)$ é instável;
 - ii. Se $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, então $P(m_1, n_1)$ é assintoticamente estável;
 - iii. Se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ então nada se pode afirmar sobre a estabilidade.

- II. Para $\Delta < 0 \Leftrightarrow (J - W)^2 < -4EG$, de acordo com a Teoria de Lyapunov, vista no Apêndice A, temos as seguintes condições de estabilidade assintótica:

- i. Se λ_1 e λ_2 complexas conjugadas com parte real negativa, então $P(m_1, n_1)$ é assintoticamente estável;
 - ii. Se λ_1 e λ_2 complexas conjugadas com parte real positiva, então $P(m_1, n_1)$ é instável;
 - iii. Se λ_1 e λ_2 imaginários puros, então é estável.
- III. Se $\Delta = 0 \Leftrightarrow (J - W)^2 = -4EG$, então λ_1 e λ_2 não serão complexos conjugados, ou seja, os seus valores estarão em quadrantes opostos. Desta forma, de acordo com a Teoria de Lyapunov, vista no Apêndice A, nada se pode concluir quanto a sua estabilidade.

Para os pontos críticos encontrados e a Tabela 4.1 considerada, temos os seguintes resultados numéricos:

- a) Através dos parâmetros da Tabela 4.1, tem-se a matriz jacobiana, calculada no ponto de equilíbrio $P_1 = (2,8036 + 0,3752i ; 1,4130 + 1,2258i)$, para a análise numérica da estabilidade assintótica, de acordo com a teoria de Lyapunov, vista no Apêndice A,

$$\overline{D}_{P_1} = \begin{bmatrix} -0,1086 & 0,0485 - 0,2562i \\ 0,3159 + 0,0569i & -0,1373 + 0,0902i \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

cujas raízes associadas ao polinômio característico são:

$$\lambda_1 = 0,1140 + 0,2128i, \quad (4.18)$$

$$\lambda_2 = -0,3599 - 0,1226i. \quad (4.19)$$

Desta forma, tem-se que os autovalores (4.18) e (4.19) não satisfazem a condição de estabilidade assintótica do Teorema A.1.2 do Apêndice A, portanto nada se conclui sobre sua natureza e estabilidade.

- b) Através dos parâmetros da Tabela 4.1, tem-se a matriz jacobiana, calculada no ponto de equilíbrio $P_2 = (-2,8036 - 0,3752i ; -1,4130 - 1,2258i)$, para a

análise numérica da estabilidade assintótica, de acordo com a teoria de Lyapunov, vista no Apêndice A,

$$\overline{D}_{P_2} = \begin{bmatrix} -0.1086 & 0,0485 - 0,2562i \\ -0,1748 - 0,0088i & -0,1373 + 0,0902i \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

cujas raízes associadas ao polinômio característico são:

$$\lambda_1 = 0,0042 + 0,2145i, \quad (4.21)$$

$$\lambda_2 = -0,2500 - 0,1243i \quad (4.22)$$

Desta forma, tem-se que os autovalores (4.21) e (4.22) não satisfazem a condição de estabilidade assintótica do Teorema A.1.2 do Apêndice A, portanto nada se conclui sobre sua natureza e estabilidade.

Para os pontos P_3 e P_4 os resultados numéricos são análogos aos pontos P_1 e P_2 , respectivamente. Sendo assim, seguem as análises numéricas dos dois pontos críticos reais P_5 e P_6 :

- c) Através dos parâmetros da Tabela 4.1, tem-se a matriz jacobiana, calculada no ponto de equilíbrio $P_5(0,4761; 0,3155)$, para a análise numérica da estabilidade assintótica, de acordo com a teoria de Lyapunov, vista no Apêndice A,

$$\overline{D}_{P_5} = \begin{bmatrix} -0.1086 & 0,1584 \\ -1,5501 & -0.1639 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

cujas raízes associadas ao polinômio característico são:

$$\lambda_1 = -0,1363 + 0,4948i, \quad (4.24)$$

$$\lambda_2 = -0,1363 - 0,4948i \quad (4.25)$$

Desta forma, tem-se que os autovalores (4.24) e (4.25) satisfazem a condição de estabilidade assintótica do Teorema A.1.2 do Apêndice A, cuja a natureza,

segundo o Teorema A.1.1 do Apêndice A, portanto P_5 é uma espiral assintoticamente estável.

- d) Através dos parâmetros da Tabela 4.1, tem-se a matriz jacobiana, calculada no ponto de equilíbrio $P_6(-0,4761; -0,3155)$, para a análise numérica da estabilidade assintótica, de acordo com a teoria de Lyapunov, vista no Apêndice A,

$$\overline{D_{P_6}} = \begin{bmatrix} -0.1086 & 0,1584 \\ -1,5501 & -0.1639 \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

cujas raízes associadas ao polinômio característico são:

$$\lambda_1 = -0,1363 + 0,5080i, \quad (4.27)$$

$$\lambda_2 = -0,1363 - 0,5080i \quad (4.28)$$

Desta forma, tem-se que os autovalores (4.27) e (4.28) satisfazem a condição de estabilidade assintótica do Teorema A.1.2 do Apêndice A, cuja a natureza, segundo o Teorema A.1.1 do Apêndice A, portanto P_6 é uma espiral assintoticamente estável.

Na próxima seção, utilizando o software MatLab, são feitas as análises sobre os dois pontos críticos reais e o sistema não linear (2.8), onde foram obtidas as curvas soluções e os retratos de fase, utilizando o método de Runge-Kutta Felberg, nas proximidades de P_5 e P_6 , respectivamente.

4.2. Análise dos resultados reais obtidos para o sistema de colheita de energia.

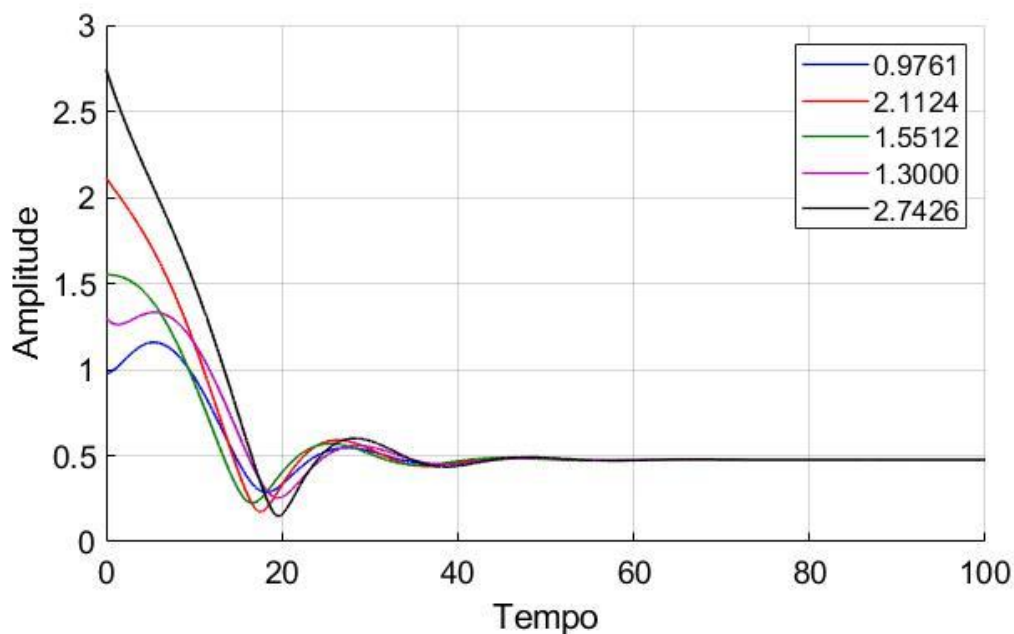
Após o desenvolvimento do sistema de colheita de energia e a resolução através do método de Cardano Tartaglia, é possível fazer algumas análises dos gráficos das variações de amplitude e angular do sistema (2.8). Considerando os parâmetros já definidos pelo autor Ghoul et al (2016), conforme visto na Tabela (4.1) do Capítulo 4.

Definidos os parâmetros, foram feitas algumas simulações utilizando o programa computacional *MatLab* 2016a, que resolve o sistema (2.8) pelo método numérico Runge-Kutta Felberg de quarta ordem.

4.2.1. Simulação computacional em torno do ponto crítico P_5

Para a análise do retrato de fase do ponto crítico P_5 tomamos, aleatoriamente, cinco pontos iniciais, tais que $a, \varphi \in [0,3]$, como partida para as simulações, no qual podemos ver a seguir, através da Figura 4.1, as curvas período-tempo convergindo para: $a_5 = 0,4761$.

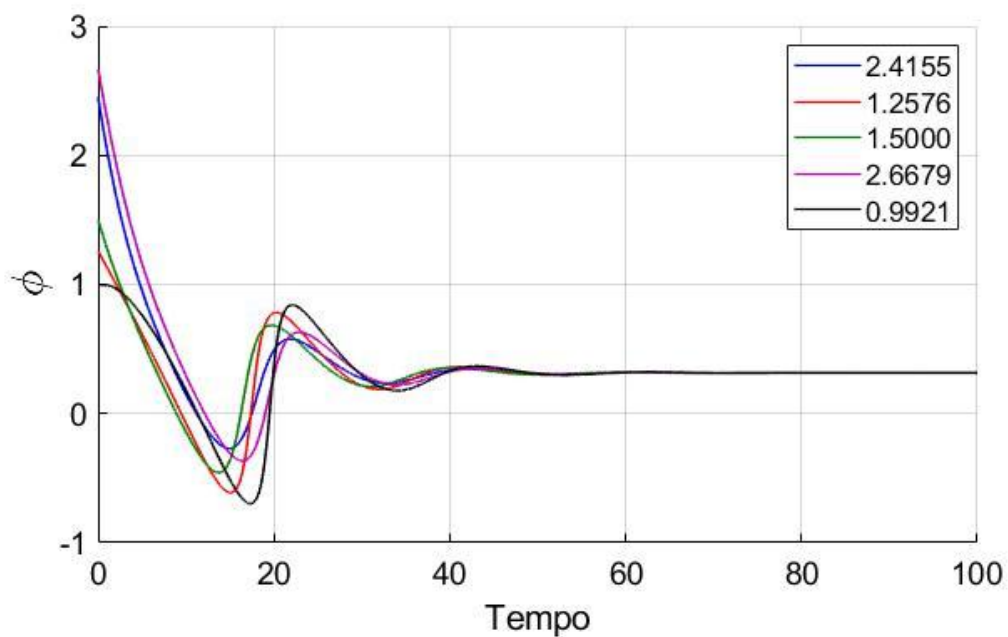
Figura 4.1: Variação da amplitude do sistema (2.8)



Na Figura 4.1 temos o histórico no tempo da variável a que representa a amplitude do sistema de colheita de energia. Observa-se que as oscilações apresentam comportamentos semelhantes durante o tempo analisando.

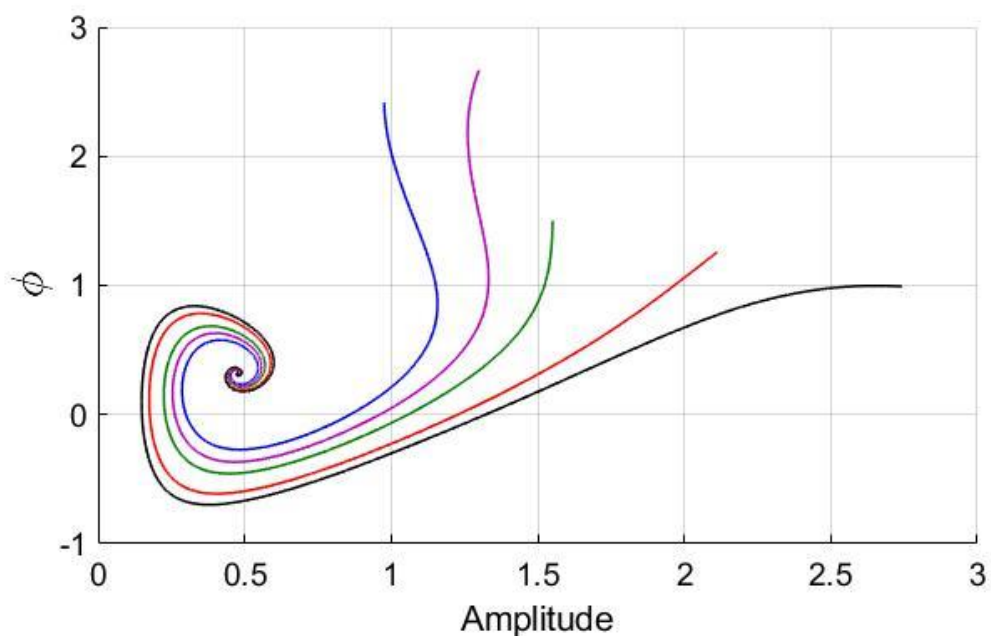
A Figura 4.2, mostra as curvas de variação angular ao longo do tempo, também para um intervalo de convergindo para $\varphi_5 = 0,3155$ a partir do tempo igual a 50.

Figura 4.2: Variação angular do sistema (2.8)



Na Figura 4.3 temos o plano de fase - histórico no tempo, das variáveis de estado a_6 e φ_6 , que expressam, respectivamente, a amplitude e o período do sistema, quando o tempo tende a infinito positivamente. Observamos que a curva converge para próximo da solução $P_5 = (0,4761 ; 0,3155)$.

Figura 4.3: Plano de fase do sistema (2.8)

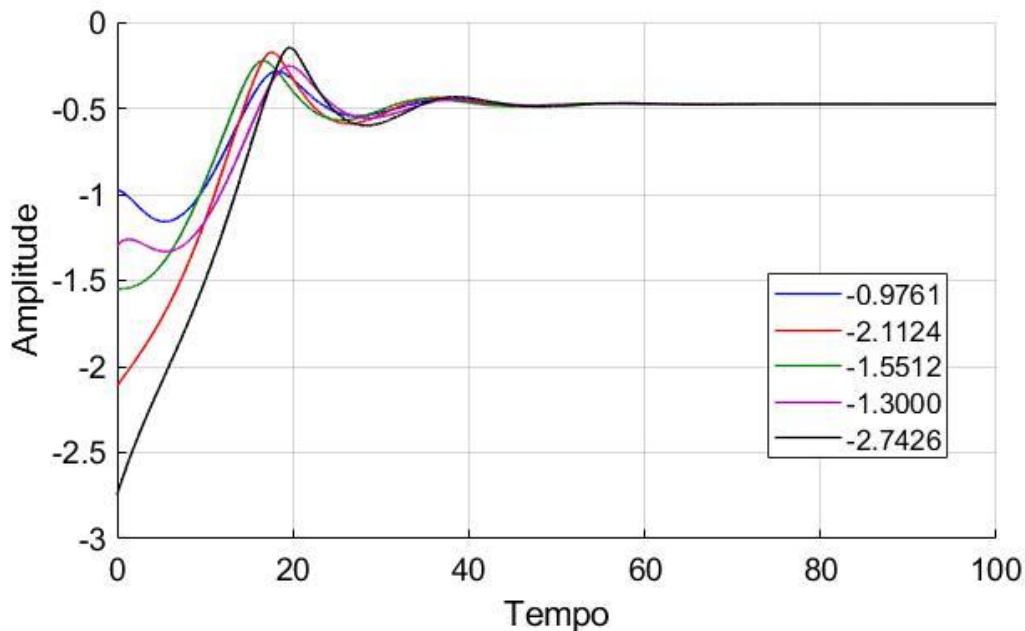


Na Figura 4.3, podemos observar a convergência do sistema (2.8) para o ponto crítico $P_5 = (0,4761 ; 0,3155)$, que possui características de um ponto assintoticamente estável do sistema (SLOTINE, 1991).

4.2.2. Simulação computacional em torno do ponto crítico P_6

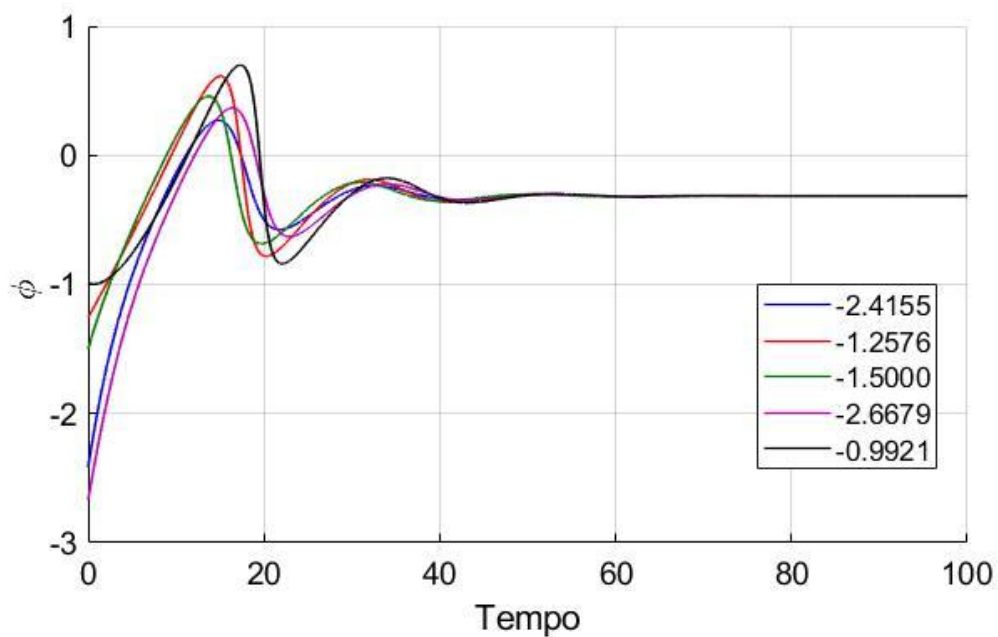
Para a análise do retrato de fase do ponto crítico P_6 tomamos um ponto inicial $(-0,3761 ; -0,2155)$ como ponto de partida para as simulações, no qual podemos ver a seguir, através da Figura 4.4, a curva período-tempo convergindo para: $a_6 = -0,4761$

Figura 4.4: Variação da amplitude do sistema (2.8)



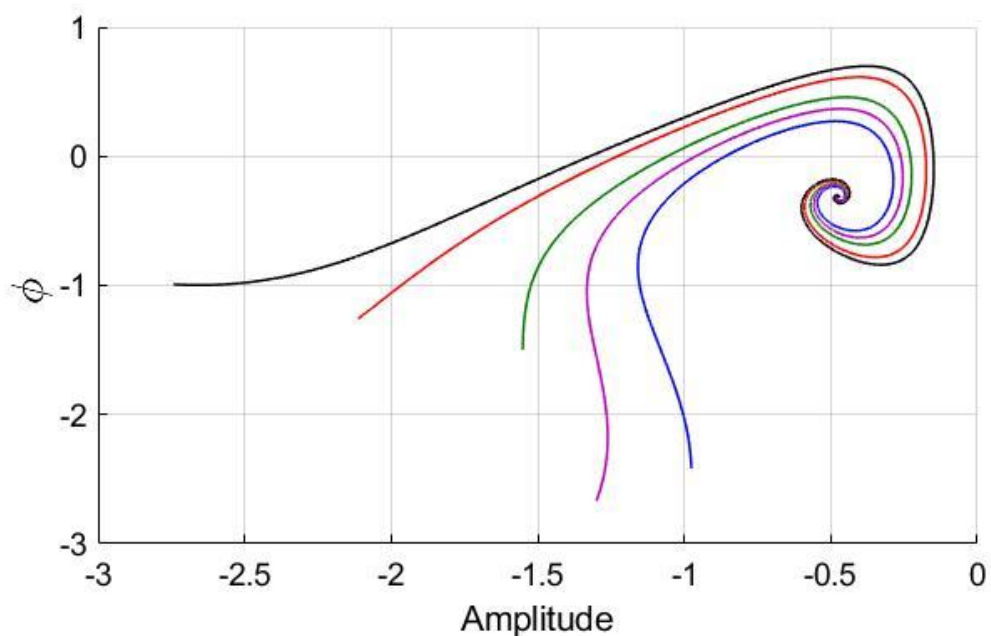
Na Figura 4.4, temos o histórico no tempo da variável a que representa a amplitude do sistema de colheita de energia. Nota-se que a oscilação se estabiliza quando o tempo tende a infinito positivamente. A Figura 4.5, mostra a curva variação angular ao longo do tempo convergindo para $\varphi_6 = -0,3155$.

Figura 4.5: Variação angular do sistema (2.8)



A Figura 4.6 mostra o plano de fase - histórico no tempo, das variáveis a_6 e ϕ_6 , que expressam, respectivamente, a amplitude e o período do sistema, quando o tempo tende a infinito positivamente. Observamos que a curva converge para próximo da solução $P_6 = (-0,4761 ; -0,3155)$.

Figura 4.6: Plano de fase do sistema (2.8)



Na Figura 4.6, podemos observar a convergência do sistema (2.8) para o ponto crítico $P_6 = (-0,4761; -0,3155)$, que possui características de um ponto assintoticamente estável do sistema (SLOTINE, 1991).

A partir dos resultados encontrados na Tabela 4.2, pelo método de Cardano Tartaglia, pode-se comparar com resultados diretos do sistema não linear (2.8) e concluir de que o método estudado possibilita a determinação de valores exatos para a resolução deste sistema. Através dos resultados encontrados é possível fazer uma breve análise, baseada no estudo de Lyapunov, que indica que os valores obtidos convergem para um ponto crítico, sendo assim considerado como um ponto estável deste sistema, conforme mostra as simulações presentes nessa seção. Essa análise será feita em trabalhos futuros.

Feito todas as simulações computacionais do sistema (2.8), através do método de Runge-Kutta Felbergh, programado no *software MatLab*, é possível mostrar que, depois de um determinado tempo, as curvas representando uma sequência de pontos obtida por esse método, se estabilizam quando se aproximam dos pontos de equilíbrio indicados na Tabela 4.2. Como mostram as figuras 4.1, 4.2 e 4.3, de início há uma grande amplitude e variação angular para a sequência de pontos representados, porém essas vão diminuindo e se estabilizando à medida que se aproximam de um ponto de equilíbrio determinado pelo método de Cardano-Tartaglia.

Conclusões

Neste trabalho, foi apresentada uma equação de Duffing baseada em sistemas de vibrações mecânicas e analisado um modelo de colheita de energia, captada através de materiais piezoelétricos.

O sistema de colheita de energia, modelado através de equações diferenciais ordinárias não lineares, foi proposto por Ghouli et al (2016). Estes autores apresentaram uma resolução complexa para determinar soluções de equilíbrio deste sistema, utilizando um método chamado de Quase Periódico, que determinava os seus pontos críticos através de expressões e cálculos de difícil entendimento.

Este trabalho diferencia-se de Ghouli et al (2016) por utilizar um método, conhecido como Método de Cardano Tartaglia, em que, com o sistema inicial, foi possível, através de algumas condições impostas, gerar uma equação polinomial de grau 6 no qual, foi reduzida para de grau 3 e, a partir disso, determinar suas raízes. As soluções deste polinômio possibilitaram explicitar os pontos de equilíbrio do sistema de colheita de energia investigado. Testes numéricos foram realizados considerando-se um problema real de colheita de energia, a análise de sua estabilidade assintótica e simulações computacionais foram feitas através do software MatLab. Desta forma, foi possível validar os resultados obtidos para o sistema testado, de maneira explícita, por meio dos valores determinados pelo método de Cardano Tartaglia.

Para a continuidade do trabalho, serão realizadas as análises da estabilidade assintótica dos pontos críticos complexos, com parte imaginária não nula, obtidos a partir do sistema de energia investigado. Além disso, possivelmente, um novo modelo de sistema de colheita de energia será investigado explorando a técnica de linearização exata.

Trabalhos publicados

PORCEL, D. Z.; BALBO, A. R.; REIS, C. A; TANAKA, G. C. **Um sistema de colheita de energia investigado através do método de Cardano-Tartaglia.** In: Revista Eletrônica Paulista de Matemática, 2019, v. 14, Bauru. 2019. p. 198-213.

PORCEL, D. Z.; BALBO, A. R.; REIS, C. A. *Análise de solução de um sistema de colheita de energia através do método de Cardano-Tartaglia.* In: Encontro regional de matemática aplicada e computacional, 2018, Bauru. 2018.

PORCEL, D. Z.; BALBO, A. R.; REIS, C. A. *A Análise do Plano de Fase de Sistemas Modelados por uma Equação de Duffing.* In: Encontro regional de matemática aplicada e computacional, 2017, Bauru. 2017.

PORCEL, D. Z.; BALBO, A. R.; REIS, C. A. *Um sistema de colheita de energia via método de Cardano Tartaglia.* In: VIII Seminário da Pós-graduação em Engenharia Elétrica, 2018, Bauru. 2018.

PORCEL, D. Z.; BALBO, A. R.; REIS, C. A. *Análise e controle de um sistema de colheita de energia via técnica de linearização exata.* In: VII Seminário da Pós-graduação em Engenharia Elétrica, 2017, Bauru. 2017.

Bibliografia

ABDELHALIM, Z. *Why and how is silicon prevailing as a semiconductor?* 2012. Acessado em: 13 de Janeiro de 2018. Disponível em: <https://www.researchgate.net/post/Why_and_how_is_silicon_prevailing_as_a_semiconductor>19.

ARBEX, H. C. **Análise dinâmica de um modelo matemático não-linear e não-ideal de um dispositivo MagLev para a coleta de energia do meio ambiente.** 2016. 83 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Unesp, Bauru, 2016.

BASSANEZI, R. C. e FERREIRA JUNIOR, W. C. **Equações diferenciais com Aplicações.** São Paulo: Harbra Ed., 1988. 572 p.

BENDER, C. M. AND ORSZAG, S. A. **Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers,** New York: McGraw-Hill, p. 547, 1978.

BESSA, G. R. *Teoria da estabilidade de equações diferenciais ordinárias e aplicações: modelo presa-predador e competição entre espécies.* 2011. 95 f. Dissertação (mestrado profissional em matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociência e Ciências Exatas. UNESP, Rio Claro. 2011.

CELLULAR, A. C. S. **Análise da influência de efeitos não-lineares em sistemas de colheita de energia baseados em vibração utilizando materiais piezoelétricos.** 2016. 72 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação e Pesquisa de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

CHEN, L., **Controlling Chaotic Oscillations With Input-Output Linearization,** Journal of Shanghai University, 2000.

DE ALMEIDA, Pedro Machado. **Condicionamento da Energia Solar Fotovoltaica para Sistemas Interligados Rede Elétrica.** 2011. 190 f. Dissertação (mestrado em engenharia elétrica) – Universidade Federal de Juiz de Fora. Programa de Pós – Graduação em Engenharia Elétrica, UFJF, Juiz de Fora. 2011.

FALNES, J., (2007). **A Review Of Wave-Energy Extraction**, Departamento f Physics and Centre of Ships and Ocean Structures, Norwegian University of Science and Technology NTNU, NO-7491 Trondheim, Norway, Setembro de 2007.

FERRARA, N. F., PRADO, C. P. C. **Caos Uma Introdução**, São Paulo: Edgard Blucher, 1994.

GARBI, G.G. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo: Makron Books, 1997.

GHOULI, Z. et al. Energy harvesting in a delayed and excited Duffing harvester device. **MATEC Web of Conferences**, v. 83, 2016.

ILIUK, I. et al. On a vibrating model of energy harvest, with nonlinear piezoelectric coupling and excited by a non-ideal Motor. In: CONFERENCE ON DYNAMICAL SYSTEMS - THEORY AND APPLICATIONS, 11., 2011. Lodz, **Proceedings...** Lodz, Poland: [s.n], 2011, p.391-396.

KOVACIC, I., BRENNAN, M.J. **The Duffing Equation Nonlinear Oscillators and Their Behavior**, John Wiley & Sons, Ltd. 2011.

LIMA, E.L. A equação do terceiro grau, **Revista Matemática Universitária**, n..5, p. 9-23, 1987.

MEDEIROS, E.S., CALDAS, I.L., BAPTISTA, M.S., FEUDEL, U. **Trapping Phenomenon Attenuates the Consequences of Tipping Points for Limit Cycles**, Scientific Reports, 2017.

MONTEIRO, L. H. A., **Sistemas dinâmicos**. 2. Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006. 625 p.

MOTTER, G. G. **Colheita de energia: protótipo de um módulo energeticamente autônomo para aplicações de instrumentação**. 2018. 74 f. Trabalho de conclusão de curso (bacharel em engenharia elétrica) – Universidade Estadual de Londrina. Centro de Tecnologia e Urbanismo, Departamento de Engenharia Elétrica, UEL, Londrina. 2018.

OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. LTC – Livros Técnicos e Científicos S. A.: 3 ed., 1998.

PORCEL, D. Z.; BALBO, A. R.; REIS, C. A. *A Análise do Plano de Fase de Sistemas Modelados por uma Equação de Duffing*. In: Encontro regional de matemática aplicada e computacional, 2017, Bauru. 2017.

RAMADASS, Y. e CHANDRAKASAN, A. **A battery-less thermoelectric energy harvesting interface circuit with 35 mv startup voltage**. *Journal of Solid-State Circuits*, v.46, n.1, 2011.

RAO, S.S. **Vibrações Mecânicas**, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2009.

REIS, C. A. et al. Asymptotic stabilization and internal dynamics of a simplified model of a Maglev system. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 22., 2013, Ribeirão Preto. **Proceedings...** Ribeirão Preto: [s.n], 2013a.

REIS, C. A.; BALTHAZAR, J.M.; BARBANTI, L. The input-state linearization of a maglev vehicle type. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL , 22., 2013. Ribeirão Preto. **Proceedings...** Ribeirão Preto: [s.n] 2013-b.

REIS, C. A.; COLON, D; BALTHAZAR, J. M.; ROSA, S. R. F.; ROCHA, R. T.. **O Comportamento de Sistemas Mecatrônicos usando Ferramentas da Dinâmica Zero**. In: Airam Sausen; Paulo Sausen; Sandro Sawicki.. (Org.). *Coleção Modelagem Matemática Aplicada à Resolução de Problemas nas Engenharias: 1ed*. Ijuí; Editora Unijuí da Universidade Regio-nal do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, v. 3, p. 169-194, 2014-a.

REIS, C. A., BALTHAZAR, J. M., COLON, D., ROSA, S. R. F., ROCHA, R. T.; *Análise das vibrações forçadas de um oscilador de duffing via linearização Exata*. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 8., 2014, Uberlândia. **Anais do VIII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2014) (CONEM 2014)**, Uberlândia: ABCM/UFU, 2014-b.

REIS, C. A., VASCONCELOS, L. A. S., NETO, O. L., ROCHA, R. T. *Análise das deflexões grandes de uma viga com rigidez não linear utilizando a linearização exata a*

realimentação. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL (CNMAC), 35., 2014, Natal. **Proceedings...** Natal: [s.n], 2014-c.

REIS, C. A., COLON, D., ROSA, S. R. F., Balthazar, J. M.(2015-a). **Analysis Of Phase Plan Of The Duffing Oscillator And The Internal Dynamics Associated With The Feedback Linearization**. In: 23rd ABCM International Congresso of Mechanical Engineering – COBEM, 2015, Rio de Janeiro.

REIS, C. A. COLON, D.; FLORENTINO, H. O.; CANTANE, D.; ROSA, S. S. R. F.; BALTHAZAR, J. M., F. J. DA COSTA, A. F. DA ROCHA. Análise de um modelo populacional do mosquito transmissor da dengue via linearização exata. In: SAUSEN, A.; SAUSEN, A; SAWICKI, S. (Org.). **Pesquisas aplicadas em modelagem matemática**. Ijuí: Unijuí, 2015-b. V.4, 304 p.

REIS, C. A. , H. O., CANTANE, D., COLON, D., ROSA, S. F., BALTHAZAR, J. M. Feedback linearization of a population dynamics of the mosquito dengue transmitter. In: INTERNATIONAL CONGRESSO OF MECHANICAL ENGINEERING, 23., 2015. **Proceedings...** Rio de Janeiro: ABCM, 2015-c.

REIS, C. A.; VASCONCELLOS, L. A. S.; OLIVEIRA NETO, L. Um estudo da dinâmica interna para um problema com rigidez não linear. In: CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, 2015, Natal. **Proceedings...** Natal: [s.n], 2015.

REIS, C. A. , COLON, D., ROSA, S. R. F. (2017). **Applications of Duffing Equation in Analysis Non Linear Systems cables and beams via the technique of linearization Exact and Internal Dynamics**. Capítulo de livro aceito para publicação.

SILVA, G. V. M. **Controlo não linear**, Setúbal: Escola Superior de Tecnologia, 2003.

SILVEIRA, E. **Eletricidade do aperto**. Revista FAPESP. p. 75, 2010.

SLOTINE, J. -J.E.; LI, W. **Applied nonlinear control**. New Jersey: Prentice Hall, 1991.

TANAKA, G. C. *Análise da dinâmica não linear do processo de biodigestão em um biodigestor indiano no espaço de estados via técnica de Lyapunov*. 2018. 64 f. Dissertação (mestrado acadêmico em engenharia elétrica) – Universidade Estadual Paulista. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Faculdade de Engenharia de Bauru, UNESP, Bauru. 2018.

THOMPSON, J. M. T., STEWART, H. B. **Nonlinear Dynamics and Chaos**, John Wiley & Sons, Ltd. 2002.

WILLIAMS, C. B.; YATES, R. B. Analysis of a micro-electric generator for Microsystems. **Sensors and Actuators A**, v.52, n. 1-3, p. 8-11, 1996.

Zill, D. G.; CULLEN, M. R. Equações diferenciais. Pearson Makron Books, 2001.

ZWILLINGER, D., **Handbook of Differential Equations**, Academic Press, San Diego, 1997.

Apêndice A

Neste Apêndice apresenta-se uma revisão matemática de sistemas autônomos não lineares de acordo com a literatura, os quais foram utilizados como base para o desenvolvimento desse trabalho.

A maioria dos eventos são de natureza não linear e encontrar uma solução analítica para o seu modelo pode ser uma tarefa complexa e, por vezes, impossível de ser realizada através de um método exato. Em sistemas regidos por um sistema de equações diferenciais não lineares, dependendo das condições, podemos utilizar o método de Lyapunov para obter as soluções analíticas desses modelos (SILVA, 2003; MONTEIRO, 2006; BESSA, 2011). Tais conceitos são de suma importância para este trabalho, uma vez que o modelo estudado permite a utilização da teoria de sistemas autônomos para sua análise de estabilidade.

A.1. Conceitos básicos: plano de fase, caminhos e pontos críticos.

Esta seção trata a teoria de sistemas autônomos para dinâmicas bidimensionais e n-dimensional. Com base em Bassanezi (1988), Slotine (1991), Silva (2003); Monteiro (2006), Bessa (2011) e Tanaka (2018),

A princípio, tomaremos as definições dos principais elementos desta teoria.

Definição A.1.1: Considera-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = G(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = H(x, y) \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

um sistema de equações diferenciais no qual a variável independente t não aparece explicitamente nas funções G e H é denominado *sistema autônomo*.

Observação: Pode-se provar que dado o valor inicial $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$, considerando o sistema (A.1), sendo t_0 , dado, (x_0, y_0) pertencente a um retângulo no plano x e $G(x, y), H(x, y)$ de classe C^1 , então o sistema (A.1) tem uma única solução:

$$x = g(t), y = h(t), \quad (\text{A.2.})$$

Definição A.1.2: Se $x = g(t)$, $y = h(t)$ em (A.2) são constantes, isto é, $x = g(t) = x_0$, $y = h(t) = y_0$, então as curvas (A.2) são denominadas um *caminho*, ou *órbita* ou *trajetória* do sistema (A.1).

Observação: Considere o sistema (A.1) podemos dividir a primeira linha pela segunda e, eliminando t entre as duas equações deste sistema, obtêm-se:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H(x,y)}{G(x,y)}. \quad (\text{A.3})$$

A equação (A.3) fornece a *inclinação da reta tangente* ao gráfico dos caminhos do sistema (A.1), passando através do ponto (x, y) , quando $G(x, y)$ e $H(x, y)$ são não nulos.

A família a um parâmetro de soluções da equação diferencial (A.3) fornece uma família a um parâmetro de caminhos de (A.1). Em um ponto (x_0, y_0) no qual $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são nulos, a inclinação da reta tangente ao caminho, quando definida por (A.3), é indeterminada. Tem-se a seguinte definição.

Definição A.1.3: Dado o sistema autônomo $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases}$, um ponto (x_0, y_0) , nos

quais ambas as funções $F(x_0, y_0) = 0$ e $G(x_0, y_0) = 0$ é denominado um *ponto crítico* ou *ponto de equilíbrio* ou *ponto singular* desse sistema.

Observação: Se (x_0, y_0) é um ponto crítico do sistema, então as funções constantes:

$$\begin{cases} x = f(t) = x_0 \\ y = g(t) = y_0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

satisfazem as equações em (A.2). Tal solução é denominada uma *solução de equilíbrio* do sistema. Note que a trajetória de uma solução de equilíbrio consiste de um único ponto e, se o sistema for não linear, pode haver mais de um ponto de equilíbrio ou nenhum.

A.1.1. Natureza dos pontos críticos.

Os pontos críticos de um sistema autônomo, Definição A.1.3, podem ser classificados de acordo com seu retrato de fase ou pela sua estabilidade. A princípio trataremos de seu retrato fase, também chamada de natureza dos pontos críticos.

Para a análise da natureza do ponto crítico e de sua estabilidade, vamos introduzir alguns resultados que facilitarão tal análise. Inicialmente, considera-se um sistema linear autônomo da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

O sistema (A.5) pode ser escrito na forma matricial, isto é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ou } \dot{X} = AX. \quad (\text{A.6})$$

Note que $(0, 0)$ é um ponto crítico de (A.6). Será assumido que a matriz A é não singular, ou seja, $\det(A) \neq 0$. Portanto $(0, 0)$ é o único ponto crítico desse sistema. Pode ser provado, em Zill (2001), que as funções: $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ e $y(t) = c_3 e^{\lambda_1 t} + c_4 e^{\lambda_2 t}$ são soluções do sistema (A.5) e λ satisfaz a equação:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (\text{A.7})$$

A equação (A.7) é dita *equação característica* do sistema (A.5) ou (A.6).

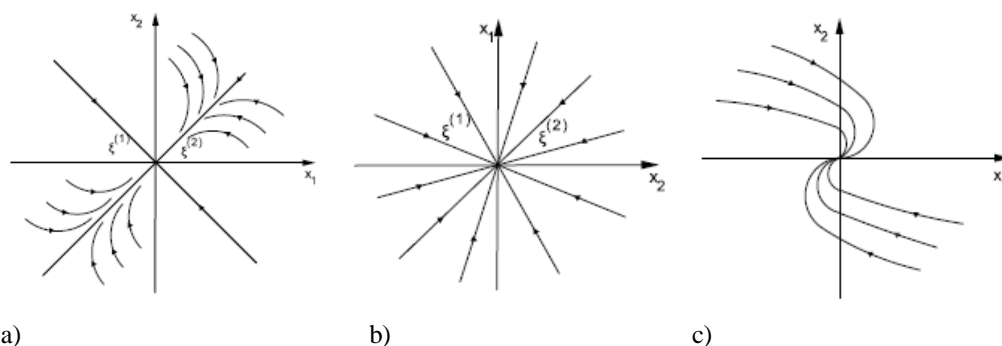
A natureza do ponto crítico $(0, 0)$ pode ser determinada dependendo da natureza das raízes da equação característica (A.7). Esses resultados serão enunciados a seguir.

Teorema A.1.1: Natureza do ponto crítico

1. Se as raízes λ_1 e λ_2 são reais e de mesmo sinal, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema (A.5) é um nó. Dessa forma temos três possibilidades de nó: nó impróprio com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, nó próprio com $\lambda_1 = \lambda_2$ (ou ponto estrela) e nó impróprio

degenerado com $\lambda_1 = \lambda_2$. Tais pontos são representados respectivamente na figura abaixo:

Figura A.1: Os diferentes tipos de pontos em nó: a) plano de fase autovalores negativos. b) autovalores repetidos. c) autovalor repetido com um autovetor associado.

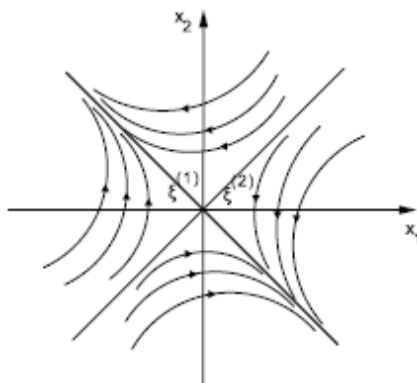


Fonte: Boyce e Diprima.

No qual $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ são autovalores associados aos autovalores obtidos.

2. Se as raízes λ_1 e λ_2 são reais e de sinais opostos, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema (A.5) é um ponto de sela, como mostra a figura a seguir:

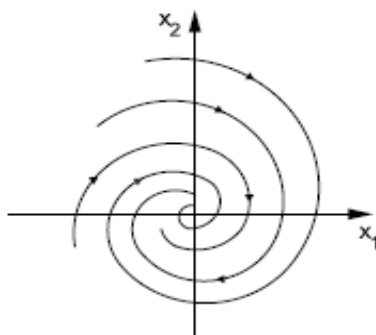
Figura A.2: O ponto de sela.



Fonte: Boyce e Diprima.

3. Se as raízes λ_1 e λ_2 formam um par complexo conjugado com parte real não nula, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema (A.5) é um ponto de espiral ou foco, como segue na figura a seguir:

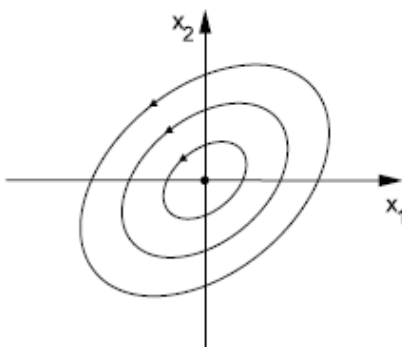
Figura A.3: Ponto de espiral ou foco.



Fonte: Boyce e Dprima.

4. Se as raízes λ_1 e λ_2 são imaginários puros, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema (A.5) é um centro. A Figura A.4, a seguir, ilustra um centro.

Figura A.4: Ponto de Centro



Fonte: Boyce e Dprima.

A.1.2. Estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade

Assumindo-se que $(0, 0)$ é ponto crítico isolado do sistema autônomo:

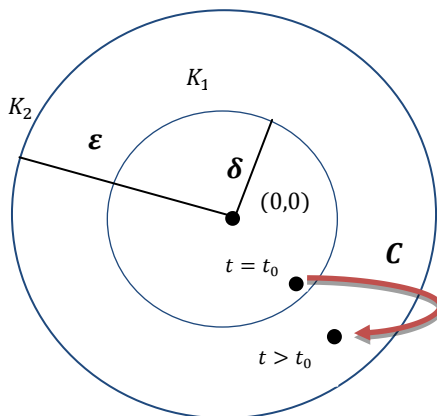
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases}, \quad (\text{A.8})$$

Deseja-se introduzir o conceito de estabilidade desse ponto crítico. Para tal considere um caminho C definido por $x = f(t)$, e $y = g(t)$.

Seja $D(t) = \sqrt{(f(t))^2 + (g(t))^2}$ a distância entre os pontos $(0, 0)$ e $P = (f(t), g(t))$ sobre C .

Definição A.1.4.: O ponto crítico $(0, 0)$ é dito *estável* se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que, todo caminho $C(t)$ para o qual $D(t_0) < \delta$, para algum t_0 , está definido para todo $t \geq t_0$, é tal que $D(t) < \varepsilon$, para todo $t_0 \leq t < +\infty$.

Figura A.5: Conceito de estabilidade, mas não assintoticamente estável

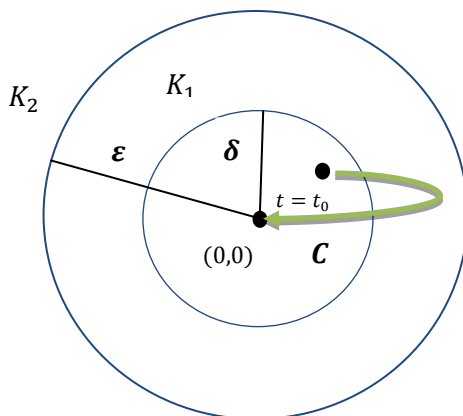


Fonte: Tanaka (2018).

Definição A.1.5.: O ponto crítico $(0, 0)$ é dito ser *assintoticamente estável* se:

1. Atende a Definição A.1.4;
2. Existe um número $\delta_0 > 0$, tal que se $D(t_0) < \delta_0$, para algum t_0 , então $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$.

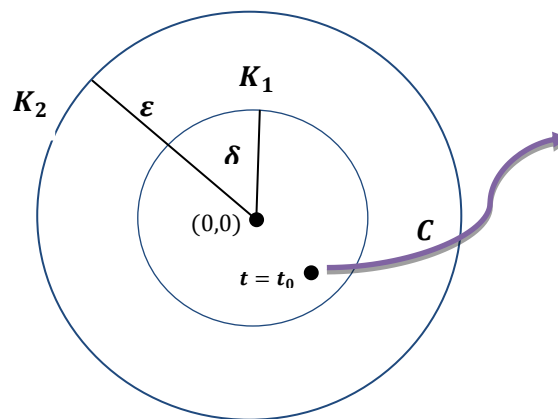
Figura A.6: O conceito estabilidade assintótica



Fonte: Tanaka (2018).

Definição A.1.6.: O ponto crítico $(0, 0)$ é dito ser *instável* se ele não é estável.

Figura A.7: O conceito de instabilidade



Fonte: Tanaka (2018).

Teorema A.1.2: Estabilidade assintótica

1. Se ambas as raízes λ_1 e λ_2 são reais e negativas ou complexas conjugadas com parte real negativa, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema (A.8) é assintoticamente estável;
2. Se as raízes λ_1 e λ_2 são imaginários puros, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema (A.8) é estável, mas não assintoticamente estável;
3. Se qualquer uma das raízes λ_1 e λ_2 são reais e positivas ou se as raízes são complexas conjugadas com parte real positiva, então o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema (A.8) é instável (ZILL, 2001).

A.2. Teoria de Lyapunov para sistemas não lineares

Um dos primeiros a desenvolver estudos sobre sistemas autônomos foi o matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912), que é responsável pelos conceitos de retrato de fase, análise de pontos críticos e estabilidade.

O matemático e físico russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857 – 1918) publicou seu primeiro trabalho sobre estabilidade em 1892 como tese de doutorado,

intitulado “The General Problem of Motion Stability” (SILVA, 2013; MONTEIRO 2006).

Segundo Silva (2003), o método da linearização de Lyapunov, também conhecido como primeiro método de Lyapunov, é devido a Poincaré, que divulgou seu trabalho com o nome de linearização de Lyapunov. Este método possibilita investigar localmente a estabilidade assintótica de um sistema não-linear a partir da contraparte linear associada ao sistema original. Para isso basta aproximar o sistema não linear em torno de seus pontos de equilíbrio por série de Taylor, encontrando a matriz Jacobiana, e a sua estabilidade assintótica é definida através do sinal dos autovalores da matriz. Trata-se de um resultado de grande relevância prática, pois serve de base para projetos de controladores utilizando modelos linearizados em torno dos pontos de equilíbrio.

Nesta seção trataremos da teoria de Lyapunov para sistemas não lineares, a qual foi utilizada neste trabalho. De acordo Bessa (2015), Silva (2003) e Monteiro (2006). Começando pela linearização de sistemas autônomos descrita a seguir.

A.2.1. Linearização de sistemas autônomos

Seja o sistema

$$\dot{X} = f(X), \text{ no qual } X \in \mathbb{R}^n \text{ e } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\text{A.9})$$

Considerando que $f(X)$ seja definida na origem e derivável uma vez, ou seja, de classe C^1 , podemos reescrever o sistema (A.9) como:

$$\dot{X} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{X_e} X + g(X), \quad (\text{A.10})$$

em que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{X_e}$ representa o primeiro termo do desenvolvimento de $f(X)$ em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio $X_e = 0$ e $g(X)$ representa os termos não lineares.

Por definição, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ é a matriz Jacobiana de $f(X)$, que será chamada de A :

$$A = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right) & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Reescrevendo o sistema (A.10) temos:

$$\dot{X} = AX + g(X), \quad (\text{A.12})$$

Para linearizar o sistema (A.12) deve-se desprezar os termos não lineares $g(X)$, obtendo apenas:

$$\dot{X} = AX. \quad (\text{A.13})$$

A.2.2. Método da linearização de Lyapunov

O método da linearização de Lyapunov, ou primeiro método de Lyapunov consiste em analisar a matriz A do sistema linearizado (A.13) para concluir sobre a estabilidade do sistema não linear, e afirma que (SILVA, 2003):

Teorema A.1.3. Primeiro método de Lyapunov

1. Se o modelo linearizado (A.13) é assintoticamente estável, então o sistema original (A.9) é assintoticamente estável em torno de X_e .
2. Se o modelo linearizado (A.13) é instável, então o sistema original (A.9) é instável em torno de X_e .

A partir do Teorema A.1.3. pode-se dizer que, se o modelo linearizado (A.13) é estável, mas não assintoticamente estável, ou seja, algum autovalor de A , em (A.13), tem parte imaginária não nula, nada se pode afirmar sobre o sistema original (A.13).