

---

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

---

**BRUNO LEITE FERREIRA**

**“O QUE SABEM SOBRE AS CURVAS CÔNICAS?”  
UMA POSSÍVEL LEITURA PARA O PROCESSO DE  
PRODUÇÃO DE SIGNIFICADO EM UM GRUPO DE ESTUDOS**

Rio Claro

2019



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

BRUNO LEITE FERREIRA

“O QUE SABEM SOBRE AS CURVAS CÔNICAS?”  
UMA POSSÍVEL LEITURA PARA O PROCESSO DE  
PRODUÇÃO DE SIGNIFICADO EM UM GRUPO DE ESTUDOS

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Orientadora: Rúbia Barcelos Amaral Schio

Rio Claro - SP

2019

F383“ Ferreira, Bruno Leite  
“O que sabem sobre as curvas cônicas?” Uma possível  
leitura para o processo de produção de significado em um  
Grupo de Estudos / Bruno Leite Ferreira. -- Rio Claro,  
2019  
269 p. : il., tabs., fotos  
  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista  
(Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio  
Claro  
Orientadora: Rúbia Barcelos Amaral Schio  
  
1. Geometria Gráfica. 2. Seções Cônicas. 3. Geometria  
Projetiva. 4. Grupo de Estudos Independente. 5. Modelo  
dos Campos Semânticos. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo  
autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

BRUNO LEITE FERREIRA

“O QUE SABEM SOBRE AS CURVAS CÔNICAS?”  
UMA POSSÍVEL LEITURA PARA O PROCESSO DE  
PRODUÇÃO DE SIGNIFICADO EM UM GRUPO DE ESTUDOS

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de  
Geociências e Ciências Exatas do Campus de  
Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista  
“Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos  
requisitos para obtenção do título de Doutor em  
Educação Matemática.

Comissão Examinadora

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Rúbia Barcelos Amaral Schio – Unesp, Rio Claro (Orientadora)

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Heloisa da Silva – Unesp, Rio Claro

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Rosa Monteiro Paulo – Unesp, Guaratinguetá

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Helena Wyllie Lacerda Rodrigues - UFRJ

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Valéria Ostete Jannis Luchetta - IFSP

Resultado: APROVADO.

Rio Claro, 27 de maio de 2019

A Deus, o sentido da minha vida,  
a todos que acreditam em uma educação libertadora  
e, em especial, ao meu pai Luiz Ferreira da Silva (*in memoriam*).

## AGRADECIMENTOS

O mais importante no caminhar não é o caminho, mas sim, aqueles com quem dividimos a estrada, que nos dão a mão para seguir, para dividir, para partilhar, para compartilhar, para ensinar, para 'ser com'. Neste sentido, gostaria de agradecer a todos que de modo direto ou indireto contribuíram para a tese estar da forma que está.

A Deus, por me amar incondicionalmente de modo que pude senti-Lo durante o processo de doutoramento, me dando forças, me ensinando a lidar com minhas fraquezas e limitações. Por estar dentro de mim, sentindo minhas dores quando ninguém mais podia fazer, por me compreender mesmo quando eu não O compreendia. Por fazer do meu processo de escrita também uma maneira de me enxergar. Por ser meu primeiro Amor, me ensinando a me amar, me amando por meio das pessoas e em tudo que me cerca. Sem Ele eu não estaria aqui, sem Ele eu não seria quem sou. Minha eterna gratidão àquele que deu a vida por mim.

À minha (enfim) esposa Juliana que começou comigo a jornada de quatro anos como uma amiga, se tornando minha namorada, noiva e, agora, eterna companheira. Por dividir angústias, conquistas e superações nesse processo de doutoramento, sendo parceira nas pequenas e grandes acontecimentos e me ajudando a extrair o meu melhor. Por ser exemplo de pesquisadora e profissional em suas atuações na UNESP e congressos. Por todos os momentos que dividimos, desde os cafés depois das aulas, as partilhas, viagens, congressos, trabalhos da pós, até as risadas incontroladas nas lojas Americanas (e alguns outros lugares). Esses e outros momentos que tornaram mais leve o caminhar.

Aos familiares, especialmente a Dione, Iara, Gugu, Tereza, Arthur, Tassiana, Tito, João Guilherme e Luiz Filipe, Camilla e Tia Lúcia por acalentarem meu coração a cada visita a Recife, ajudando, apoiando e encorajando-me a investir no meu sonho, em minha formação.

Aos compadres e comadres Brayan, Fabiola, Sônia e Luimar por serem uma segunda família sempre presentes, disponíveis, torcendo e rezando por mim.

A Simone, minha amiga irmã, que me apresentou o PPGEM e sempre esteve acompanhando e dividindo cada nova etapa da vida acadêmica e pessoal. Hoje, nos realizamos na conquista um do outro que outrora vislumbrávamos tão distante. Qual é nosso próximo sonho a ser compartilhado?

Aos amigos da Igreja do Espinheiro nas pessoas de Mazinho, Neni, Val, Ana Cláudia, Carmita, Jonas, Talita, Ana Lira, Josinha que permaneceram em contato me dando força e rezando por mim.

À Família LEG/LDP, nas pessoas de Thyana, Lílian, Claudinha, Núbia e Auta que me inspiram e ensinam a ser um melhor profissional na área de Expressão Gráfica. A Núbia e Beth por terem me substituído realizando um excelente trabalho no Colégio de Aplicação (CAp).

Aos professores Mario Duarte e Alcy Costa pela amizade e por se disponibilizarem a tirar algumas dúvidas de Geometria Projetiva.

Aos amigos do CAp, em especial a Fabiana, Fernanda, Marquinhos e Rodrigo por proporcionarem um ambiente de trabalho com muitas risadas e estarem perto nesse período de distância física. A Marize, Lavínia e Madson que sempre se colocaram a disposição para encaminhar questões ligadas ao meu afastamento. A todos os alunos do CAp que me instigam a ser um professor melhor representados na pessoa de Lara Viana que fez linda surpresa na minha ida para Rio Claro.

À Universidade Federal de Pernambuco por financiar meu afastamento e permitir minha capacitação.

Aos membros da banca: Heloisa, Maria Helena, Rosa, Rúbia e Valéria, pelas riquíssimas contribuições na pesquisa e fora dela. Obrigado por serem exemplo de profissionais para mim e apresentarem, cada uma em sua área, elementos de posturas epistemológicas que constituem o pesquisador que sou hoje. Em especial à minha orientadora Rúbia pela paciência, parceria, conselhos e orientações ao longo desses quatro anos. Obrigado por ver o humano por detrás do acadêmico. Que venham novas parcerias.

Aos membros do GPIMEM pelas contribuições na minha formação e na pesquisa, tanto na realização do Piloto 1, como nos comentários em textos e discussões. Em especial aos professores Marcelo Borba pelas caminhadas/conversas sobre a pesquisa.

Às professoras Sônia Clareto, Maria Bicudo, Sueli, Paula, Rosana, Deuza e aos professores Henrique Lazari, Carrera, Antônio Garnica, Ole Skovsmose, Marcus Teixeira, Gustavo Barbosa, Marcelo, Maltempi, Ricardo, Roger, Rômulo (in memoriam) e Irineu Bicudo (in memoriam) por todos os ensinamentos nas disciplinas ou em outros ambientes de convivência acadêmica.

A todos os ministrantes dos Seminários em Educação Matemática (SMEM) e Jornadas que por meio deles me ajudaram a ampliar minha visão para outros campos da Educação Matemática. Destaco a importância deste espaço como ambiente formativo do pesquisador.

A Inajara e Elisa pela ajuda nas burocracias da Pós.

À professora Miriam Penteado por ter disponibilizado espaço na disciplina de Desenho Geométrico e Geometria Descritiva (DGGD) em 2015 para realizar o Piloto 2. Obrigado pelos ensinamentos e pela amizade sua e do Ole.

Aos alunos da disciplina de DGGD (ano de 2015) por terem contribuído com o Piloto 2. Foi pelo trabalho de vocês que pude configurar o estudo principal.

Aos membros do Grupo de Estudos Guilherme, Rafael, Sabrina e William, pessoas essenciais para produção de dados do modo como foi. Foi por meio da participação de vocês que houve tanta riqueza de informações. Obrigado pela amizade gerada, pela dedicação de tempo, pela parceria, por acolherem a proposta do grupo mesmo tão atarefados com o curso de Matemática. Espero continuar tendo contato com vocês em outros espaços, pois não tenho dúvida que serão ótimos profissionais.

Ao professor e amigo Daniel Wyllie pela disponibilidade, ajuda e partilhas geométricas.

I also would like to thank professors Zsolt Lavicza and Markus Hohenwarter from STEM JKU (Linz, Austria) who arranged a wonderful stay and together with other people contributed to improve my research. Especially Diego, Fabian, Sara, Beth with whom I shared the same office and many talks as well.

Aos grupo dos Ursinhos Carinhosos Alex (Lelec), Carol (Duendinha), Luiz (Tio Luiz), José Milton (Zé) e Miliam (Miliâm) por renderem muitas gargalhadas durante esses quatro anos.

Aos amigos Amanda, Bruna, Luana, Guilherme que conviveram mais de perto dividindo, ajudando e compartilhando vidas nesse período.

A Ive e Pluto (meus doguinhos) por serem meus filhos e me darem amor incondicional, cada um com seu temperamento, mas sempre companheiros e manhosos.

Aos amigos Vini, Maitê, Carla, Jonjon, Egidio, Sandro, Lara e Mazi que ajudaram em diferentes situações sempre se colocando disponíveis.

Aos integrantes do Grupo de Oração Universitário (GOU) e Grupo de Partilha de Profissionais (GPP) nas pessoas de Fábio, Amanda, Flávia, Juliana, Fran, Flor, Iara e Laise por juntos comigo, por meio da partilha e do serviço buscaram estar mais perto de Deus, aliviando as dificuldades da caminhada.

A Idania pelo cuidado, atuação profissional enquanto psicoterapeuta e orientando em aspectos da pesquisa fazendo uma diferença significativa no meu equilíbrio mental e emocional. Muito obrigado.

Obrigado a todos que mesmo não sendo citados fazem parte da minha história e vida e que estão torcendo por mim.



*“No ato de narrar [...] o sujeito toma consciência do seu próprio processo de constituição.”*

(Adair Mendes Nacarato)

## RESUMO

A presente pesquisa partiu da motivação do seu autor sobre o processo de investigação matemática com estudantes. Entendendo que a Matemática não é produzida do mesmo modo que é apresentada nos livros voltados para o seu estudo, foi intencionado na tese elaborar compreensões sobre o processo de produção de significado para determinadas noções matemáticas em um contexto investigativo de aprendizagem. Desse modo, a pesquisa configurou-se em uma abordagem qualitativa, apoiando-se na Teoria do Modelo dos Campos Semânticos para realizar uma possível leitura desse processo, enfatizando-se a contribuição deste trabalho no diálogo do referencial teórico com o campo da Geometria. Para tal, foi organizado um Grupo de Estudos Independente sobre curvas cônicas composto por quatro estudantes do curso de graduação em Matemática e o pesquisador, autor desta tese de doutorado. Não houve um programa pré-definido, permitindo que os participantes conduzissem as discussões partindo da seguinte pergunta: *O que vocês sabem sobre curvas cônicas?* Como instrumento de produção de dados, foram utilizadas gravações em vídeo-áudio dos vinte e dois encontros que ocorreram ao longo do ano de 2016, conversas no aplicativo para smartphone WhatsApp (em grupo e em pares) e diários dos participantes. Em consonância com o objetivo, o estilo de escrita da tese adotado como estética buscou evidenciar tanto o processo de produção de conhecimento (matemático) como também o de conhecimento científico (o fazer pesquisa). A análise consistiu em realizar uma leitura plausível da dinâmica de produção de significado do ponto de vista de um dos sujeitos. Por meio dela, foi possível estabelecer sete Movimentos caracterizados pelas operações de elementos das cônicas em variados Campos Semânticos. Destacou-se a operação do elemento ponto impróprio no processo de generalização das cônicas como também o uso preferencial da elipse e da parábola para realizar as analogias de elementos nas outras curvas. Por fim, considerou-se que, ao trabalhar com diferentes abordagens e/ou modelos, é necessário analisar os elementos que são operados a fim de que se possam fazer as devidas analogias e evitar desconexões.

**Palavras-chave:** Geometria Gráfica. Seções Cônicas. Geometria Projetiva. Grupo de Estudos Independente. Modelo dos Campos Semânticos.

## ABSTRACT

The present research is based on the motivation of its author on the mathematical investigation process with students. Understanding that Mathematics is not produced in the same way as it is presented in textbooks, it was intended in elaborating understandings about the producing meaning process for certain mathematical notions in a research context of learning. In this way, the research is framed on a qualitative approach, based on Semantic Field Model Theory to carry out a possible reading of this process, so that the contribution of this work is emphasized in the dialog of the theoretical reference with the Geometry's field. For that, a Study Group on conic curves was composed by four undergraduate students in Mathematics and the researcher, author of this doctoral thesis. There was no predefined program, allowing participants to conduct the discussions from referrals through the following question: *What do you know about conic curves?* As a data production tool, video-audio recordings of the twenty-two meetings that took place throughout 2016, conversations in the WhatsApp smartphone application (in group and in pairs) and participants' diaries were used. In agreement with our aim, the text form of the thesis sought to evidence both the process of production of knowledge (mathematical) as well as of scientific knowledge (to do research). The analysis consisted in making a plausible reading of the dynamics of meaning production from the point of view of one of the subjects. Through it, it was possible to establish seven Movements characterized by the operation of conic elements in various Semantic Fields. The operation was emphasized in the notion of an improper point in the process of generalization of the conics as well as the preferential use of the ellipse and the parabola to perform the analogies of elements in the other curves. Finally, it is considered that, when working with different approaches and/or models, it is necessary to analyze the elements that are operated in order to make the necessary analogies and avoid disconnections.

**Keywords:** Graphic Geometry. Conics Sections. Projective Geometry. Independent Study Group. Semantic Fields Model.

## LISTA DE FIGURAS E QUADROS

Figura 1 – Estante com 3 nichos.....	30
Figura 2 – Tela em branco.....	32
Figura 3 – Comentário no Google Docs.....	39
Figura 4 – Rascunho da construção do triângulo XYZ.....	39
Figura 5 – Construção do triângulo usando o controle deslizante.....	40
Figura 6 – Construção do triângulo no Geogebra sem o controle deslizante.....	41
Figura 7 – Construção do triângulo por raciocínio algébrico.....	41
Figura 8 – Expressão gestual.....	45
Figura 9 – Logomarca da Mitsubishi.....	54
Figura 10 – Esboço do raciocínio da construção da logo da Mitsubishi (e QR-Code).....	56
Figura 11 – Logomarca desenhada no Geogebra.....	56
Figura 12 – Verificação empírica de não proporcionalidade.....	57
Figura 13 – Desenho da divisão de um segmento em três partes iguais (método de William). .....	59
Figura 14 – Primeira (à esquerda) e segunda (à direita) estratégia de construção da logomarca. .....	64
Figura 15 – Desenho de parte da logomarca da Vaio no Geogebra.....	65
Figura 16 – Desenho expressando os “dois cones” e um plano de seção e (QR-Code).....	82
Figura 17 – Desenho de um cone e de uma seção (e QR-Code).....	84
Figura 18 – Desenho de uma superfície cônica e de uma superfície de um cone (e QR-Code). .....	84
Figura 19 – Geratrizes da superfície cônica (a), eixo da superfície (b) e ângulos e variação da superfície (c) (e QR-Code).....	87
Figura 20 – Desenho de circunferências e ponto (e QR-Code).....	89
Figura 21 – Desenho de duas circunferências paralelas, cujos centros pertencem a uma reta perpendicular aos planos que as contêm.....	89
Figura 22 – Desenho a giz de um “pseudocone” gerado por duas circunferências.....	90
Figura 23 – Modelagem computacional de superfície gerada por duas circunferências (SketchUp à esquerda, Geogebra à direita).....	90
Figura 24 – Paradigma Euclidiano à esquerda, paradigma projetivo à direita (e QR-Code).....	91
Figura 25 – Foco de luz projetando na lousa formando uma circunferência (a), uma elipse (b), uma hipérbole (c) e uma parábola (d).....	94

Figura 26 – Esboço de vista ortogonal da seção de um plano paralelo a uma das geratrizes do cone (e QR-Code).	96
Figura 27 – Exemplos de linhas.	99
Figura 28 – Hélice.	99
Figura 29 – Hipérbole (a), parábola (b) e elipse (c).	103
Figura 30 – <i>Layout</i> do AutoCAD (a) e do Rhino (b).	106
Figura 31– <i>Layout</i> do SketchUp (a) e do Geogebra (b).	107
Figura 32 – Comando <i>cone</i> na barra de ferramentas do Geogebra (a). Comandos <i>cone</i> e <i>coneinfinito</i> na barra de entrada do Geogebra (b).	108
Figura 33 – Diretrizes e geratriz do modelo 1 (a), rastro da geratriz com vértice e raio da circunferência estáticos (b) e rastro da geratriz com vértice e raio da circunferência em movimento (c).	110
Figura 34 – Comandos “superfície”.	111
Figura 35 – Equação do cone oblíquo.	111
Figura 36 – Superfície Cônica Oblíqua com círculo diretor tangente à origem.	112
Figura 37 – Superfície cônica transladada.	113
Figura 38 – Equação da superfície cônica e <i>print</i> da superfície com centro do círculo diretor na origem.	113
Figura 39 – Dedução das equações da circunferência.	115
Figura 40 – Projeções da reta nos planos de coordenadas.	117
Figura 41 – Dedução da equação simétrica da reta.	118
Figura 42 – Desenho de seção cônica quando o plano está paralelo à geratriz (e QR-Code).	122
Figura 43 – (a) Esboço de uma seção em um cone em vista; (b) Esboço simulando o movimento do plano de seção em um cone; (c) Esboço simulando o movimento do plano de seção até cortar outro ramo do cone (e QR-Code).	123
Figura 44 – Desenho de segmento próprio (acima) e segmento com uma das extremidades imprópria (abaixo) (e QR-Code).	124
Figura 45 – Modelo de seção cônica produzido no Geogebra: elipse (e QR-Code).	125
Figura 46 – Modelo de seção cônica produzido no Geogebra: parábola (e QR-Code).	126
Figura 47 – Desenho de seção cônica, geratrizes e seus pontos correspondentes na seção (e QR-Code).	127
Figura 48 – Desenho de plano de seção em um cone passando pelo vértice paralelamente ao quadro (a) e oblíquo ao quadro (b) e (QR-Code).	128
Figura 49 – Gestos da explicação de Guilherme sobre a generalização das cônicas.	130

Figura 50 – Indicação de região interna em um esboço de circunferência (a); Região interna da parábola destacada com pontos (b) (e QR-Code).	133
Figura 51 – Região interna da Hipérbole no cone (a) e no plano de seção (b) (e QR-Code).	134
Figura 52 – Explicação por meio de desenho de distâncias de um ponto da curva aos focos.	135
Figura 53 – Soma dos raios vetores.	135
Figura 54 – Adaptação de eixos da elipse na circunferência (e QR-Code).	136
Figura 55 – (a) Eixos da parábola; (b) movimento simulando eixo secundário da elipse; (c) desenho de superfície cônica com três planos de seção gerando circunferência, elipse e parábola (e QR-Code).	137
Figura 56 – (a) Eixo principal da hipérbole; (b) indicação de suposto centro da hipérbole (e QR-Code).	139
Figura 57 – Vértices da elipse e adaptação na circunferência (a) e vértices da parábola (b).	140
Figura 58 – Movimento circular para simular como o eixo maior da hipérbole se comporta.	140
Figura 59 – Menor distância entre os vértices $V_1$ e $V_2$ da hipérbole.	141
Figura 60 – (a) Indicação de eixo menor na elipse; (b) indicação de eixo imaginário da hipérbole.	143
Figura 61 – Simulação de eixo imaginário na elipse (dedo paralelo ao eixo menor da elipse).	144
Figura 62 – Tangentes nos vértices da elipse (e QR-Code).	145
Figura 63 – Vértices na hipérbole.	146
Figura 64 – Modelo das tangentes da elipse e da hipérbole (e QR-Code).	147
Figura 65 – Dedução da equação da circunferência por William.	149
Figura 66 – Desenho de elipse e distâncias do ponto aos focos.	150
Figura 67 – Desenho de elipse com centro fora da origem.	150
Figura 68 – Dedução da equação geral da elipse.	152
Figura 69 – Comportamento do gráfico da parábola variando seus parâmetros (e QR-Code).	153
Figura 70 – Esboço e dedução da equação da parábola.	154
Figura 71 – Dobras no papel com desenho de circunferência e ponto interno (e QR-Code).	155
Figura 72 – Esboço de construção do lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes a um ponto e uma circunferência (e QR-Code).	156

Figura 73 – Construção no Geogebra de lugares geométricos usando a ferramenta <i>locus</i> : elipse (a), hipérbole (b) circunferências (c) e ponto (e QR-Code). .....	157
Figura 74 – Lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes a um ponto e uma circunferência quando $B$ é impróprio (a) e quando o centro $A$ é impróprio (b) (e QR-Code). .....	158
Figura 75 – Esboço de construção da parábola (e QR-Code).....	160
Figura 76 – Esboço da parábola, pontos e a paralela à diretriz (a) e esboço de construção da parábola (b).....	161
Figura 77 – Esboço da segunda construção da parábola (e QR-Code). .....	162
Figura 78 – Esboço da construção da elipse e da parábola (e QR-Code).....	162
Figura 79 – Detalhes do esboço da construção da parábola (e QR-Code). .....	163
Figura 80 – Detalhe do esboço da construção dos vértices secundários da elipse (e QR-Code). .....	164
Figura 81 – Esboço da construção de um ponto da parábola e (QR-Code).....	165
Figura 82 – Esboço da analogia para construção da hipérbole.....	166
Figura 83 – Esboço da construção da assíntota de uma hipérbole (e QR-Code).....	167
Figura 84 – Diferentes abordagens de um mesmo objeto. ....	172
Figura 85 – Ilustração de um quadrado. ....	179
Figura 86 – (a) Agentes na comunicação clássica; (b) comunicação clássica; (c) agentes na comunicação no MCS; (d) comunicação no MCS. ....	182
Figura 87 – Construção da mediatriz de um segmento usando dobradura. ....	183
Figura 88 – Construção a régua e compasso de uma mediatriz de um segmento. ....	184
Figura 89 – Construção do circuncentro ( $C$ ) de um triângulo $XYZ$ .....	184
Figura 90 – Recorte do primeiro diagrama de análise à luz do MCS.....	194
Figura 91 – Recorte da tabela de uma das organizações dos dados. ....	196
Figura 92 – Recorte do quarto diagrama de organização dos dados. ....	197
Figura 93 – <i>Layout</i> das janelas de trabalho no <i>Atlas.ti</i> . ....	199
Figura 94 – Projeções da lanterna do celular na parede. ....	207
Figura 95 – Ilustração da seção cônicas em vista (e QR-Code). ....	209
Figura 96 – Circunferências concêntricas. ....	210
Figura 97 – Projeção de um plano em vista básica.....	211
Figura 98 – Desenho de uma linha em forma de S e de uma parábola. ....	214
Figura 99 – Ilustração de uma estrada. ....	221
Figura 100 – Triângulo com vértice $C$ tendendo ao infinito (e QR-Code).....	221

Figura 101 – Vistas do cone e do plano de seção (e QR-Code) .....	223
Figura 102 – Ponto médio de um segmento (e QR-Code). .....	224
Figura 103 – Planos paralelos.....	225
Figura 104 – Modelo da seção cônica no Geogebra.....	225
Figura 105 – Diferença entre o desenho da parábola. ....	227
Figura 106 – Generalização das cônicas (e QR-Code).....	228
Figura 107 – Posição da elipse em relação aos eixos de coordenada.....	231
Figura 108 – Dedução da equação da parábola. ....	233
Figura 109 – Simulação de dobra no papel (e QR-Code).....	235
Figura 110 – Delineamento da elipse por suas tangentes (e QR-Code). ....	235
Figura 111 – Construção da hipérbole.....	236
Figura 112 – Construção da parábola. ....	237
Figura 113 – Diferenciação de cores e traçados na construção da elipse.....	239
Figura 114 – Relação da soma dos raios vetores de uma elipse.....	240
Figura 115 – Construção da hipérbole.....	242
Figura 116 – Construção da parábola. ....	244
Figura 117 – Construção da elipse. ....	246
Figura 118 – Analogias entre a construção da parábola e da elipse. ....	247
Figura 119 – Esquema de analogias entre os métodos construtivos das cônicas. ....	248
Figura 120 – <i>Layout</i> do Modelo utilizado na pesquisa de Sousa (2017).....	252
Figura 121 – Tela do computador contendo o resumo da tese. ....	257
Quadro 1 – Ambientes de Aprendizagem.....	30
Quadro 2 – Cronologia da Investigação. ....	190
Quadro 3 – Expressão dos Movimentos ao longo do Grupo de Estudos. ....	249
Quadro 4 – Caracterização das expressões utilizadas no modelo de Sousa (2017). ....	252



## SUMÁRIO

<b>PRÓLOGO.....</b>	<b>17</b>
<i>A quem escrevo .....</i>	<i>17</i>
<i>Recomendações para a leitura.....</i>	<i>17</i>
<i>Introduzindo o ‘eu’ na pesquisa .....</i>	<i>19</i>
<b>SEÇÃO 1 – CONSTITUINDO UM AMBIENTE PARA A PRODUÇÃO DE DADOS ..</b>	<b>25</b>
<b>INVESTIGANDO A INVESTIGAÇÃO .....</b>	<b>26</b>
<b>INVESTIGAÇÃO PILOTO 1 – GPIMEM .....</b>	<b>37</b>
<b>INVESTIGAÇÃO PILOTO 2 – DISCIPLINA DE DG ΘD.....</b>	<b>51</b>
<b>GRUPO DE ESTUDOS .....</b>	<b>68</b>
<b>SEÇÃO 2 – RESÍDUOS DE UMA INVESTIGAÇÃO: A ESTRADA DE TIJOLOS</b>	
<b>CÔNICOS.....</b>	<b>77</b>
<b>PRÓLOGO .....</b>	<b>78</b>
<b>O PONTO DE PARTIDA: O(S) CONE(S), AS SUPERFÍCIES E SUAS LEIS DE GERAÇÃO</b>	<b>81</b>
<b>LINHAS, CURVAS E SEÇÕES .....</b>	<b>93</b>
<b>TIRANDO “FÉRIAS” COM A SUPERFÍCIE CÔNICA.....</b>	<b>105</b>
<b>RETOMANDO E AVANÇANDO O ASSUNTO: GENERALIDADES DAS CÔNICAS E SEUS</b>	
<b>PONTOS IMPRÓPRIOS .....</b>	<b>121</b>
<b>OS ELEMENTOS DAS CURVAS CÔNICAS.....</b>	<b>132</b>
<b>ALGUMAS EQUAÇÕES DAS CÔNICAS .....</b>	<b>148</b>
<b>CONSTRUINDO AS CURVAS CÔNICAS .....</b>	<b>154</b>
<b>SEÇÃO 3 – CONSTITUINDO UMA LEITURA A PARTIR DOS DADOS .....</b>	<b>168</b>
<b>ORGANIZANDO AS IDEIAS.....</b>	<b>169</b>
<i>... como contá-la? .....</i>	<i>169</i>
<i>... o interesse em compreender como estudantes de Matemática exploram as curvas cônicas .....</i>	<i>171</i>
<i>... reflexão sobre o objeto matemático .....</i>	<i>174</i>
<i>... o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) .....</i>	<i>178</i>
<i>... retomar a pergunta da pesquisa à luz do MCS.....</i>	<i>185</i>
<b>COMO MAPEAR A ESTRADA DE TIJOLOS CÔNICOS.....</b>	<b>187</b>
<i>... processo indutivo de análise prévio à teoria do MCS .....</i>	<i>187</i>

... uma análise à luz da Teoria do MCS .....	192
<b>MAPEAMENTO DOS MOVIMENTOS DA NOÇÃO DE CURVAS CÔNICAS.....</b>	<b>201</b>
<i>Curvas Independentes</i> .....	202
<i>Cônicas que saem do cone</i> .....	206
<i>Seções Cônicas</i> .....	207
<i>Das linhas às Seções Cônicas Curvas</i> .....	212
<i>Cônica(s) Projetiva(s)</i> .....	219
<i>As cônicas analíticas</i> .....	229
<i>Construções gráficas das cônicas</i> .....	234
<i>Síntese dos Movimentos</i> ... ..	248
<b>EPÍLOGO.....</b>	<b>254</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>262</b>
<b>Apêndice A .....</b>	<b>268</b>

## PRÓLOGO

### *A quem escrevo*

À comunidade, aos profissionais, professores e alunos de disciplinas de Expressão Gráfica, Matemática e Educação Matemática, no intuito de aproximar e dialogar com essas áreas de conhecimento.

### *Recomendações para a leitura*

Gostaria de convidá-lo(a) a se abrir a uma experiência de leitura distinta da que estamos habituados a encontrar em textos acadêmicos, no que concerne à estética (estrutura e estilo literário) desta tese de doutorado. Instigo-o(a) a acompanhar o processo de constituição e desenvolvimento de uma pesquisa, de modo a perceber algumas das angústias, escolhas, descartes, mudanças, alegrias, ponderações e conclusões possíveis que um pesquisador vivenciou, ou possa vir a vivenciar, durante um curso de doutorado. Tal proposta visa expressar a subjetividade do autor desta tese, por meio de narrativas fictícias, envolvendo personagens reais em monólogos e diálogos possíveis, no intuito de problematizar, discutir e teorizar, com base nas leituras realizadas e nos dados produzidos.

Àqueles que aceitarem o convite, proponho que sigam, por gentileza, para a próxima seção (Introduzindo o eu na leitura).

Aos mais ansiosos e/ou que preferem vislumbrar alguns dos tijolos da estrada antes de pisá-los, apresento como o texto foi organizado. Ainda no prólogo, além das recomendações de leitura, apresento, na seção seguinte, as moções que me conduziram ao tema de pesquisa desta tese de doutorado, o qual corresponde, de modo geral, ao processo de investigação matemática. Para tal, compus monólogos cujos narradores são pessoas que fizeram parte da minha história, encarnando-os enquanto sujeitos cognitivos constituídos por mim para a produção textual.

Após o prólogo, a tese é dividida em três partes, chamadas, neste trabalho, de Seções. Eles adotam uma estrutura mais cronológica que sintética, visando expressar o processo de produção da tese em analogia ao tema da pesquisa, ou seja, seus elementos são apresentados buscando se aproximar do modo como eles fizeram sentido para este pesquisador que lhe escreve. Neste sentido, cabem, no texto, mudanças com relação às noções teóricas à medida que me deparo com novas perspectivas epistemológicas. Do mesmo modo, a pergunta de pesquisa e o objetivo não se expressam inicialmente de modo definido; é apenas com o

aprofundamento de determinados aspectos teóricos e metodológicos que esses elementos são claramente descritos e delimitados.

As Seções têm como marco divisor o antes, o durante e o depois da produção de dados. Desse modo, a primeira corresponde às minhas compreensões sobre algumas temáticas prévias à produção de dados. Seguindo a estética do prólogo, opto por continuar a narrar o processo, dando voz a outros sujeitos cognitivos por meio de monólogos. As narrativas compreendem minha postura sobre a investigação matemática como possibilidade de trabalho em sala de aula e, conseqüentemente, a postura adotada no ambiente de produção de dados; algumas reflexões sobre a pesquisa qualitativa; a organização de estudos pilotos que me permitiram selecionar os instrumentos de produção de dados e a configuração do Grupo de Estudos sobre curvas cônicas, com base em Murphy e Lick (1998), sendo este o meu ambiente de produção de dados.

Na segunda Seção, apresento uma síntese da investigação em forma de episódios, narrados ficticiamente pelos participantes do Grupo de Estudos. Minha intenção, nessa Seção, é permitir que o leitor tenha a dimensão do todo da investigação, mesmo que esse todo não seja o objeto de análise da tese. Desse modo, opto por apresentá-la por conta de o recorte só ter sido definido após a produção de dados com base em toda a investigação, imprimindo, assim, o processo dessa escolha.

Na terceira Seção, trago narrativas de um único sujeito, o pesquisador, o qual reorganiza as ideias anteriormente estabelecidas por pressupostos teóricos, levando em consideração as experiências vividas e os novos questionamentos. Neste sentido, apresento, no início da Seção, as noções que considero importantes para analisar meu objeto de estudo, como também a postura epistemológica assumida e o modelo teórico que adoto para analisar os dados, qual seja, o Modelo dos Campos Semânticos de Lins (2012). Com base no Modelo, realizei uma possível leitura para o processo de produção de significado acerca da noção de curvas cônicas em um Grupo de Estudos, destacando alguns dos elementos constituintes dessa noção. Para expor esta leitura, apresento como delineei os procedimentos de análise, seguido da categorização dos dados em Movimentos da dinâmica do processo de produção de significado de um dos sujeitos. Em seguimento, apresento um resumo das características gerais e específicas dos Movimentos, a fim de destacar os elementos desse processo.

Subseqüente às três Seções, apresento um epílogo, também em forma de monólogos e encarnando outros sujeitos cognitivos, de modo a apresentar uma síntese do trabalho, bem como as contribuições da pesquisa para a Educação Matemática, algumas considerações e apontamentos de possibilidades de pesquisas futuras.

Por meio desta breve síntese, busquei atender os anseios do que está por vir nas próximas páginas, as quais preocupam-se mais em apresentar um processo do que um texto que melhor sintetize a pesquisa.

Sem mais, desejo-lhe uma leitura que o mova.

### ***Introduzindo o 'eu' na pesquisa***

\*\*\*

Há poucos dias, em uma manhã de domingo, enquanto lia o jornal, ouvi a campanha tocar. Ao abrir a porta, vi meu filho caçula com a cabeça raspada e a primeira pergunta que me veio à mente foi: por que ele fez isso? Não fazia sentido, ele saiu cedo para olhar o resultado do vestibular de alguns colegas, então, a única explicação lógica, mas não racional, seria ter raspado a cabeça em razão de algum colega ter passado no exame. Qual foi minha surpresa ao ser informado que ele tinha realizado a prova vestibular escondido e foi aprovado para o curso de Licenciatura em Desenho e Plástica na Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).

Apesar de surpreso, fiquei muito feliz por essa conquista e, ao mesmo tempo, temeroso por não saber com o que iria trabalhar. Pelo que me lembro, ele sempre falou que gostaria de ser arquiteto. Desde pequeno, entrava no meu escritório para mexer nos meus instrumentos de desenho e olhar os projetos sobre a prancheta. Talvez minha profissão de engenheiro possa ter influenciado sua escolha, visto que Arquitetura foi o curso escolhido em seu primeiro vestibular, ocasião em que não obteve aprovação. Neste mesmo ano, realizou a seleção para o curso técnico de Edificações, sendo aprovado. Foi durante esse curso que Bruno, sorrateiramente, realizou o exame de vestibular no qual foi aprovado.

Não sei se a profissão de professor é algo que gostaria para meu filho, devido ao baixo salário e à falta de reconhecimento. Além disso, nem sei se ele sabe que um curso de Licenciatura forma professores, muito menos o quê e onde irá ensinar. Espero que consiga mudar de curso.

\*\*\*

A maior alegria de um professor é encontrar seus alunos já adultos, realizados, bem empregados e saber que contribuiu para sua formação profissional, principalmente quando eles seguem seu exemplo e escolhem a docência. Nem sempre essa é a primeira escolha dos alunos do curso de Licenciatura em Desenho e Plástica, dentre os quais um grupo enxerga o curso como “trampolim” para outros cursos mais concorridos, como Arquitetura e Design. Contudo,

outra parte desses alunos, cedo ou tarde, se descobrem professores durante o curso. Costumo pensar que é a docência que nos escolhe. Bruno foi um desses, ingressou no curso pretendendo transferir-se para Arquitetura, mas aos poucos foi se destacando, não pela sua dificuldade de escrita ou de interpretação de texto, mas pela sua aptidão para as disciplinas técnicas, sua curiosidade e pré-disposição para docência.

Pude acompanhar de perto seu amadurecimento durante a trajetória acadêmica, visto que fui sua professora em várias disciplinas da graduação, coordenadora do curso, orientadora de monitoria, orientadora do trabalho de conclusão de curso, acompanhei sua aprovação como professor substituto em nosso Departamento (de Expressão Gráfica), fui membro da banca de qualificação e possivelmente serei da banca de defesa da dissertação de mestrado em Educação Matemática e Tecnológica. Hoje à tarde, recebi a grata notícia de que foi aprovado no concurso para professor efetivo de Desenho no Colégio de Aplicação (CAp) da UFPE.

Posso dizer que vê-lo realizado é o mesmo que ver um filho realizado e é assim que o considero, como um filho acadêmico.

\*\*\*

Desenho Geométrico é uma das disciplinas de que mais gosto, tanto pela facilidade que tenho com o conteúdo como pela maneira que o professor ensina. Ele é meio doido, brincalhão, mas sem deixar de ser exigente. Uma das suas características é adorar perguntar o porquê das coisas, ou seja, não adianta a gente conseguir fazer uma construção, temos que justificá-la, mas não é justificar descrevendo o passo-a-passo (ele detesta isso), é explicar as propriedades geométricas que utilizamos.

Apesar de ter sido difícil, no início do ano letivo, para me acostumar com essa maneira de pensar (pois é no 8.º ano do ensino fundamental que estudamos Desenho pela primeira vez no CAp), percebi que, se eu tivesse apenas decorado as construções, não iria dar conta de resolver os problemas agora no segundo semestre, que são mais complicados, sendo necessário “misturar” várias propriedades que não são necessariamente óbvias, e isso não dá para estudar na véspera de uma avaliação individual. Além disso, não temos livro didático de Desenho, apenas fichas com resumos das propriedades, que não são suficientes para entender como aplicá-las a um problema, só para conhecê-las. Tio Bruninho diz que organizou as fichas bem resumidas de propósito, para nos estimular a fazermos anotações durante as aulas (meus colegas sempre pedem meu caderno para tirar xerox).

Uma coisa que ele fez para nos ajudar foi criar um documento compartilhado, com toda a turma, no Google Docs<sup>1</sup>. Isso nos permitia expor dúvidas sobre o conteúdo e ele também colocava algumas perguntas. A ideia era que nós mesmos (alunos) respondêssemos às dúvidas e perguntas. No início, a gente não perguntava muito, então ele vinha com perguntas e íamos respondendo, outros complementando e as dúvidas iam surgindo. O documento acabou servindo como material de apoio e o interessante é que, às vezes, a dúvida de um colega era a de outro.

O documento não era como um livro que já mostra as respostas certas, ou mesmo uma definição de cara. Quando alguém apresentava uma construção, um colega ou tio Bruninho questionava sobre aquele procedimento, fazendo a gente pensar outras coisas que não pensaríamos se simplesmente recebêssemos a resposta certa. Quando alguém explicava algo errado, toda a discussão para corrigir e fazê-lo entender ajudava ainda mais para compreender o conteúdo.

Vou sentir saudades das aulas de Tio Bruninho no próximo ano, pois ele vai fazer doutorado e só volta daqui a quatro anos, ou seja, após eu terminar o ensino médio. Espero que ele volte com muitas ideias novas para ajudar os alunos a aprenderem.

\*\*\*

Em uma manhã de quarta-feira do mês de janeiro de 2015, procuro apressadamente a sala 6 do bloco G1 da Unesp (Campus Rio Claro) para iniciar meu primeiro dia de aula do doutorado. Durante a busca, emergem as expectativas... Ou melhor, anseios sobre o que vou encontrar/confrontar/refletir durante o curso, como também ideias iniciais da minha pesquisa, projetando, assim, o que ela pode vir a ser.

Meus pensamentos são interrompidos pelo abrir de porta da sala 6, que faço instintivamente. Percebo todos olharem-me, mesmo não enxergando ninguém à minha frente, e sento-me no primeiro lugar disponível que encontro. Como se já não bastasse meu constrangimento por chegar atrasado e interromper a fala da professora justamente quando questionava a turma sobre quem poderia ficar com um tal de *cadernos de bordas*, minha entrada, mesmo que silenciosa, juntamente com os olhares dos outros estudantes, responde à sua pergunta quase que instantaneamente. Recebo o caderno apreensivo, sem ter como negá-lo, encontrando, por detrás da capa amarela, laudas imaculadas que seriam preenchidas, naquele momento, por mim.

---

<sup>1</sup> Disponível em <https://www.google.com/docs/about/>.

O caderno de bordas passaria pelas mãos dos alunos ao longo do semestre para que, durante as aulas e/ou durante a semana (para aqueles que o levassem para casa), pudessem expressar os seus “atravessamentos” com relação à disciplina, fossem eles relacionados diretamente aos textos que discutiríamos ou não, podendo, inclusive, contemplar sentimentos sobre as aulas ou memórias de vivências. Esta expressão poderia se apresentar em forma de texto (acadêmico, poético etc.), desenhos ou qualquer outra maneira que considerássemos pertinente, refletindo, assim, não apenas o que aconteceu dentro das aulas, como também nas “bordas” da sala de aula.

O amarelo da capa do caderno lembrava-me a estrada de tijolos amarelos do Mágico de Oz, a qual serviu de rota para Dorothy encontrar o mágico que a ajudaria a voltar para casa. Em meio ao caminho, a jovem garota se deparou com personagens, não esperados, cada um com suas faltas, anseios e desejos, mas que ajudaram e foram ajudados no percurso dessa estrada. Do mesmo modo, ao contemplar as laudas do caderno, me questionei por quais caminhos as disciplinas cursadas no doutorado iriam conduzir (contribuir para) minha pesquisa.

Durante o semestre, ao me deparar com autores e ideias até então desconhecidas, me senti como o espantalho em busca de um cérebro. Conhecimento? Matemática(s)? E tantas outras palavras que faziam parte do meu cotidiano começaram a perder o significado prévio. Fui desconstruído, aguardando que o entendimento viesse, mas ele não veio de início.

Após ser promovido de estudante sênior para pesquisador júnior, aos poucos, o corpo “sangrando” a cada atravessamento de texto começou não a entender, mas a acompanhar o movimento, desenrijecendo cada articulação, como o homem de lata que estava enferrujado há tanto tempo, estagnado em seus paradigmas. Homem de lata que anseia por um coração, para não mais racionalizar, não definir, mas se permitir sentir, experimentar, experienciar. Permaneci na espera do *Eterno Retorno* (NIETSCHE, 2012), não o retorno do mesmo, mas o retorno reescrito, revivido sob um novo olhar, produzindo um entendimento no após, não na experiência vivida e, como me disseram, é melhor que venha depois.

A experiência de expressar livremente aquilo que nos “atravessou” durante a disciplina me permitiu enxergar outras possibilidades para a pesquisa, talvez não com a clareza de quando a produção de dados começou a acontecer, mas me dando indícios de que caminhos eu gostaria de seguir.

Dentre as possibilidades, retomei uma experiência vivenciada no Colégio de Aplicação (CAp), quando utilizei um documento digital compartilhado com uma turma de 8.º ano do ensino fundamental para discutir e aprofundar algumas questões que não caberiam (por questão de tempo) em sala de aula. Surpreendi-me ao perceber que a discussão do conteúdo nos



conduziu a reflexões que fugiram do trivial, ou seja, em vez da simples descrição de procedimentos “corretos” de construção, houve uma exploração da construção e essa exploração/questionamento partia, geralmente, dos alunos que não estavam habituados àquelas técnicas, fazendo com que outros alunos, que as conheciam, pudessem refletir e explicar, produzindo novos significados.

Esta experiência no CAp trouxe-me similaridades com minha experiência de aluno de graduação na disciplina de Geometria Descritiva A<sup>2</sup>. Por vezes, ao assistir a uma aula e compreender o conteúdo, considerava que o que aprendi era suficiente para conhecer “tudo” sobre ele. Entretanto, ao explicar a um colega sobre algo que ele não havia entendido, algumas vezes, o conteúdo não era compreensível para ele. Desse modo, era preciso entender o mesmo problema/conceito/contéudo por outro caminho que fizesse sentido para ele. Acredito que foram essas experiências que despertaram em mim o interesse em ser professor, pois o ensinar me permitia, além de ajudar o outro, produzir novos significados, gerando intimidade e habilidade de manipulação com os objetos, no meu caso, objetos geométricos.

Nesta mesma direção, ao refletir sobre as experiências seja com meus colegas na graduação, seja com meus alunos no CAp, percebo que a sistematização de um conteúdo, apresentada pelo professor ou nos livros didáticos dos diferentes níveis de ensino, não é produzida de modo linear, como é apresentada em seu resultado final. A exemplo disso, a Geometria axiomática dedutiva de Euclides (séc. IV a.C.), descrita na célebre obra *Elementos* (EUCLIDES, 2010), é resultado de uma síntese de conhecimentos matemáticos existentes naquela época; contudo, não tenho acesso às discussões, aos “erros” e “acertos”, às escolhas e aos descartes, rascunhos e modelos que ocorreram e/ou foram utilizados por e com Euclides. Tanto conhecimento foi produzido, mas apenas parte das informações sobre esse conhecimento se expressa em um livro.

Tal devaneio me faz retomar o agora e me inquieta a questionar sobre o que ocorre, matematicamente falando, em uma investigação. Que conceitos e propriedades matemáticas emergem ao se estudar um objeto matemático? Irei dar uma lida em outras pesquisas, mesmo aquelas que não abordam exatamente o meu interesse, pois elas podem me ajudar a clarear o que realmente quero fazer. Meu interesse está nas relações matemáticas que ocorrem nesse processo de investigação, e analisá-lo pode contribuir para o conhecimento específico do conteúdo. Do mesmo modo, pode contribuir para elaborar estratégias de ensino, nos diferentes

---

<sup>2</sup> O conteúdo de Geometria Descritiva era dividido em três disciplinas na grade curricular: A, B e C. A Geometria Descritiva A correspondia ao estudo das operações projetivas do ponto, da reta e do plano.

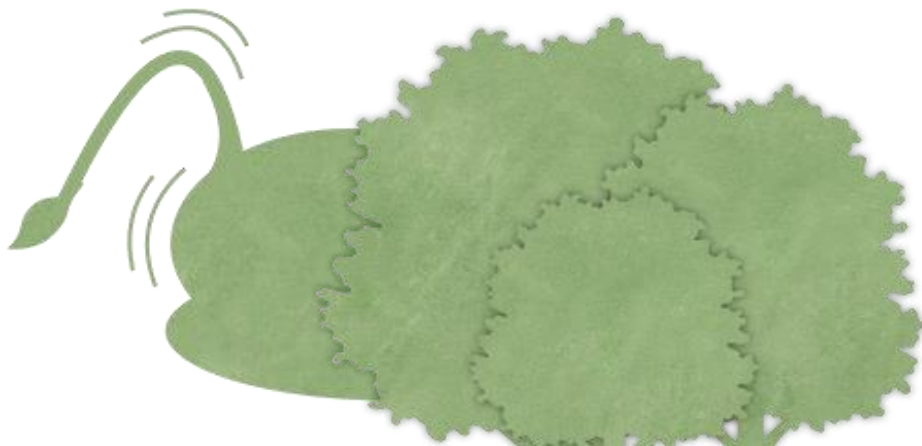
níveis, que se aproximem de uma reflexão crítica sobre a Matemática, sustentada inicialmente nas próprias convicções produzidas pelo sujeito, decorrendo na validação da Matemática enquanto Ciência.

Pensar sobre essas possibilidades ainda me causa medo e insegurança, medo do desconhecido, de não dar conta. Falta-me coragem, assim como no leão covarde. Estes três personagens habitam em mim – o espantalho, o homem de lata e o leão – cada um com suas incompletudes, ansiando por encontrar um mago que lhes desse um cérebro, um coração e coragem.

\*\*\*

## SEÇÃO 1

### CONSTITUINDO UM AMBIENTE PARA A PRODUÇÃO DE DADOS



*"Eu estou com um medo enorme de cair – disse o Leão Covarde –, mas suponho que a única coisa a fazer é experimentar. Assim, suba nas minhas costas e vamos tentar."*

(Lyman Frank Baum)

## INVESTIGANDO A INVESTIGAÇÃO

Orientar um estudante nos diferentes níveis de ensino, seja na graduação ou na pós-graduação (mestrado e doutorado), é um momento de refletir e ressignificar sobre nossas próprias experiências enquanto alunos, de modo a minimizar as inevitáveis vivências sofríveis que os orientandos perpassam. Para tal, nós, professores, reproduzimos modelos de ensino que consideramos exitosos, criamos métodos com base em nossa experiência e estudo e evitamos cometer os mesmos equívocos que cometeram conosco.

Ao conhecer Bruno, enquanto orientando de doutorado, com sua formação inicial atípica dos demais alunos da Educação Matemática, voltada para uma área específica da Matemática – Desenho Geométrico ou, como ele chama, Geometria Gráfica –, vislumbrei a possibilidade de desenvolver, juntamente com ele, uma pesquisa que apresentasse um novo olhar para a Geometria, campo da Matemática ao qual me dedico.

Inicialmente, pretendíamos desenvolver a pesquisa de doutorado voltada para o estudo e a produção de um livro didático de Geometria Gráfica; contudo, Bruno propôs uma nova direção: analisar o processo de “produção matemática” em uma investigação sobre algum conteúdo de Geometria. Apesar de a proposta se afastar um pouco dos meus interesses principais de pesquisa, o tema em questão não fugia do meu interesse, visto ainda abordar a Geometria e indicar possibilidades de novos modos de se apresentar as compreensões de um conteúdo. Tais modos podem fundamentar futuras pesquisas sobre a elaboração de livros didáticos de Desenho Geométrico, os quais, em sua maioria, destinam-se à descrição de métodos de construção sem justificativas, com pouca ou nenhuma associação da Geometria Plana, principalmente nas coleções da primeira década do século XXI, como aponta Zuin (2011), ao analisar livros didáticos que tratam de construções geométricas a partir de meados do século XIX à primeira década do século XX.

Além de haver proximidade com meus interesses, considero que uma pesquisa deve ser desenvolvida a partir do que move o pesquisador, e não por imposições. Por esse motivo, abracei a proposta apresentada por Bruno, por entender que essa questão da investigação é cerne do seu trabalho docente, permitindo, assim, a constituição de uma possível pergunta de pesquisa que se engendra em questionamentos e inquietações pessoais. Para responder a tais inquietações, ele terá que ir além de suas experiências prévias, debruçar-se em um estudo metódico (com rigor científico) para compreender o problema em questão, seja presente na realidade ou na literatura (FIORENTINI; LORENZATO, 2012).

Há diferentes modos e estratégias para compreender um problema. Como professora em Educação Matemática, compreendo que a abordagem qualitativa é frequente nas pesquisas nessa área de conhecimento no Brasil e a praticamos não por modismo, mas por nossa preocupação estar voltada para as qualidades dos dados, e não para valores estatísticos que os dados possam expressar, o que seria o foco das abordagens quantitativas.

Diferente desta última, a investigação qualitativa apresenta, como fonte direta de dados, o ambiente natural, ou seja, o pesquisador busca estar presente nos locais de estudo, no intuito de compreender o contexto, sem perder de vista o significado, o qual é de importância vital para tal abordagem, pois é por meio dele que os sujeitos dão sentido às suas vidas. Tais significados não são independentes, como afirma Garnica (1999), mas sim atribuídos, dependem das compreensões dos sujeitos envolvidos e do contexto cultural, social e histórico.

Desse modo, a pesquisa qualitativa caracteriza-se também como descritiva, permitindo uma abordagem detalhada do ambiente investigado, com a ideia de que nada é trivial e que os detalhes podem fornecer informações importantes para a análise. Neste sentido, o investigador se torna o principal instrumento na produção dos dados, preocupando-se mais com o processo do que com os resultados, realizando a análise de modo indutivo, o que quer dizer que não há hipóteses prévias, mas que as abstrações são construídas ao longo do processo. Tais características são descritas por Bogdan e Biklen (1994)<sup>3</sup> e referenciadas por Lüdke e André (1987), Garnica (1999) e Araújo e Borba (2014), ratificando esta compreensão sobre a investigação qualitativa ao longo dos anos.

Diante do novo direcionamento do projeto, observo algumas questões que Bruno precisará aprofundar no estudo e explicitar em seu texto. A primeira delas é justificar por que sua pesquisa se enquadra em uma investigação qualitativa, visto que a prerrogativa de a maioria das pesquisas em Educação Matemática adotar tal abordagem não isenta a justificativa de sua escolha. Isso significa que os métodos assumidos devem atender às demandas e aos questionamentos do pesquisador, de modo a expressar a sua subjetividade, e não o contrário, ou seja, o pesquisador seguir determinado método ou procedimento sem questionar se este atende à sua pergunta.

Ademais, o questionamento apontado por Bruno me suscita outras questões, tais como: O que compreende sobre produção matemática? Que postura de investigação pretende adotar? Como pretende produzir os dados? Como pretende analisar? Que pergunta busca responder? Considero que a pergunta de pesquisa perpassará todas as outras questões, constituindo-se como

---

<sup>3</sup> A primeira edição foi publicada em 1982.

elemento orientador da pesquisa. Contudo, ela não é estática, vai se moldando com o caminhar do trabalho desenvolvido e do aprofundamento da leitura, configurando o que Lincoln e Guba (1985) chamam de *design emergente*.

Creio que já tenho pontos de pauta suficientes para discutir com Bruno em nossa próxima reunião de orientação.

\*\*\*

Vida de doutoranda não é fácil, mas se tem uma coisa que amo nesse processo é conhecer pessoas de todo o Brasil, com costumes e sotaques diferentes, expressando, cada um, um pouco da diversidade do nosso país. Essa diversidade também se mostra nas pesquisas desenvolvidas em nosso Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática aqui em Rio Claro. Há pesquisas em História da Matemática/Educação Matemática, Filosofia da Matemática/Educação Matemática, Resolução de Problemas, Tecnologias Digitais e claro que não poderia deixar de citar o campo em que estou inserida, que é o de Inclusão. Para pensar sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática para estudantes com deficiência, adoto, em minha pesquisa, a perspectiva teórica da Educação Matemática Crítica, a qual tem por objetivo, dentre outros, contribuir para que os alunos desenvolvam a *matemacia*. Este conceito “não se refere apenas a habilidades matemáticas, mas também à competência de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela matemática” (SKOVSMOSE, 2008, p. 16) (acho que já li tanto que decorei).

Nessa semana, o Bruno veio conversar comigo sobre sua pesquisa, pois comentei com ele que também pretendo trabalhar com investigações matemáticas, mas dentro da perspectiva da Educação Matemática Crítica. Foi bem produtiva nossa conversa.

O Bruno começou falando das suas inquietações, que pretendia encontrar uma abordagem de investigação para utilizar em sua produção de dados que se aproximasse da sua postura como professor. Ele comentou que leu Ponte, Brocado e Oliveira (2009) sobre Investigação Matemática na sala de aula e também sobre Cenários para Investigação do Skovsmose (2000), mas não estava conseguindo diferenciar bem as duas abordagens.

Na minha visão, ambas as abordagens propõem que o aluno seja protagonista do processo e o professor como partícipe do processo. Na primeira perspectiva, Ponte, Brocado e Oliveira (2009) trazem características da investigação de um matemático e propõem estratégias para o ensino da Matemática. Dentre as características, os autores destacam momentos que ocorrem durante a investigação:

- *Exploração e formulação*: quando o problema é apresentado ou identificado no intuito de reconhecê-lo, partindo para explorar a situação e a formulação de questões;
- *Conjecturas*: quando ocorre a organização dos dados e a formulação de conjecturas, ou mesmo afirmações sobre as conjecturas;
- *Testes e reformulação*: quando ocorrem experimentações para testar e refinar as conjecturas;
- *Justificativa e avaliação*: quando é necessário justificar as conjecturas e avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Esta organização não visa dividir os momentos que ocorrem em uma investigação de modo sequencial, como fases a serem percorridas consecutivamente; pelo contrário, identifica momentos importantes que podem, inclusive, ocorrer simultaneamente a outros, ou mesmo retornar a um momento já ocorrido de acordo com a necessidade.

Outro ponto a ser destacado é quando os autores diferenciam exercício/problema de uma investigação. Tanto o exercício quanto o problema são entendidos como questões planejadas pelo professor. Contudo, o primeiro pode ser resolvido por um método já conhecido; já no segundo, o aluno não consegue perceber um método de resolução de imediato. Em ambos, é conhecido onde se quer chegar, bem como os dados fornecidos. Em contraponto, na investigação, a questão é aberta, ou seja, a pergunta não está bem definida no início, cabendo ao investigador defini-la durante o processo. Do mesmo modo, diferentes investigadores podem partir do mesmo ponto, mas podem chegar a resultados distintos.

Na segunda abordagem, Skovsmose (2000) também traz uma compreensão sobre exercício e investigação, chamando de paradigma do exercício situações que envolvem o professor, ora expondo o conteúdo, ora os alunos resolvendo questões, geralmente do livro didático, o qual possui proposições que possuem soluções definidas e esperadas, elaboradas por um grupo externo à sala de aula, ou seja, não há participação dos alunos e, algumas vezes, nem do próprio professor na escolha das questões.

Rompendo este paradigma do exercício, o autor apresenta uma proposta de cenários para investigação, a qual se configura como um ambiente propício para o ato de investigar, em que os alunos, convidados por esse cenário, assumem uma postura crítico-reflexiva sobre a situação a ser analisada. Desse modo, o professor tem papel importante em tornar o ambiente convidativo, visto que só é considerado um cenário para investigação se o aluno aceita o convite; contudo, este aceite depende tanto do modo que o professor aborda o aluno para

investigar, como das possibilidades matemáticas que o cenário propicia, como dos interesses dos estudantes, suas prioridades etc. Portanto, um ambiente pode se configurar como cenário de investigação para um estudante e para outro não, sendo esta caracterização possível apenas pela prática empírica da investigação.

Para melhor compreender um cenário, Skovsmose (2000) descreve seis possíveis ambientes de aprendizagem (Quadro 1), os quais podem se distinguir tanto com relação às características do paradigma do exercício e do cenário para investigação, como no que diz respeito à referência em que as situações matemáticas estão inseridas.

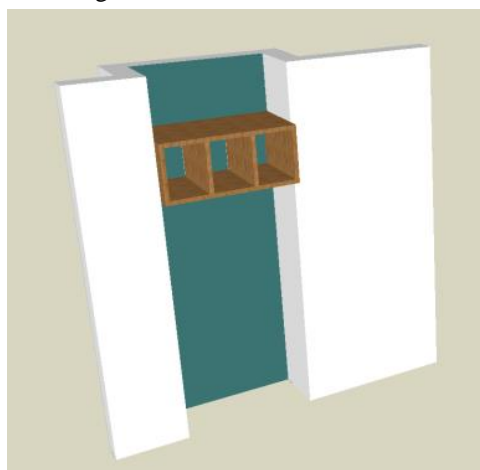
Quadro 1 – Ambientes de Aprendizagem.

	Paradigma do Exercício	Cenário para Investigação
Referências à Matemática Pura	(1)	(2)
Referências à Semirrealidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2000, p. 73).

Supondo que um professor proponha a seguinte atividade para os alunos: Encontre o valor de  $x$  que atenda à expressão  $3x = 90$ . Se pensarmos em uma aula em que o professor explica o conteúdo, em seguida escreve no quadro a questão, deixa os alunos por um tempo resolvendo e, depois, resolve a questão no quadro, estamos no paradigma do exercício (primeira coluna). Como os dados da questão não fazem alusão a nenhuma situação real, apenas referindo-se a uma questão puramente matemática, este ambiente se caracteriza como o (1). Porém, se ainda no paradigma do exercício, o professor propõe a seguinte questão contextualizada: *João trabalha em uma loja de móveis planejados. Um cliente deseja preencher um vão de 90 cm de comprimento com uma estante suspensa formada por 3 nichos* (Figura 1). *Quantos cm de comprimento deve ter cada nicho?*

Figura 1 – Estante com 3 nichos.



Fonte: Do autor.



Neste caso, o enunciado se utiliza de um contexto possível, desconsiderando outros dados da realidade, visto que o foco da questão poderia ser o estudante conseguir dividir 90 por 3. Este exemplo trata de um ambiente do tipo (3). No entanto, se considerarmos esta questão como uma situação real, não podem ser ignorados outros dados, como exemplo, a espessura das divisórias e laterais da estante, conduzindo o estudante a outro tipo de cálculo. Outra característica de um ambiente com referência à realidade é que não necessariamente medidas reais apresentam valores inteiros. Nesta direção, se acrescentarmos ao enunciado essas variáveis, fornecendo seus valores, a questão se enquadra no ambiente (5).

Como já expliquei, o que diferencia o paradigma do exercício do cenário para investigação é o aceite do convite por parte do aluno. Contudo, a organização do ambiente por parte do professor é ponte-chave desse processo. Isso quer dizer que posso imaginar as três situações anteriores dentro da perspectiva do cenário para investigação. Ao invés da metodologia adotada anteriormente – professor expõe conteúdo, propõe exercício e corrige no quadro – o professor poderia, por exemplo, na situação referente à Matemática Pura, questionar os alunos sobre quantas e de que maneiras pode-se dividir 90 por 3, ou de que outras formas é possível representar essa fração etc. Esses questionamentos podem suscitar outros questionamentos por parte dos alunos, talvez não previstos pelo professor, permitindo que professor e aluno trabalhem em colaboração, mesmo que em uma zona de risco, tornando a atividade produtiva, e não uma experiência ameaçadora (SKOVSMOSE, 2000). Quando isso ocorre, no exemplo citado, caracteriza-se o ambiente (2).

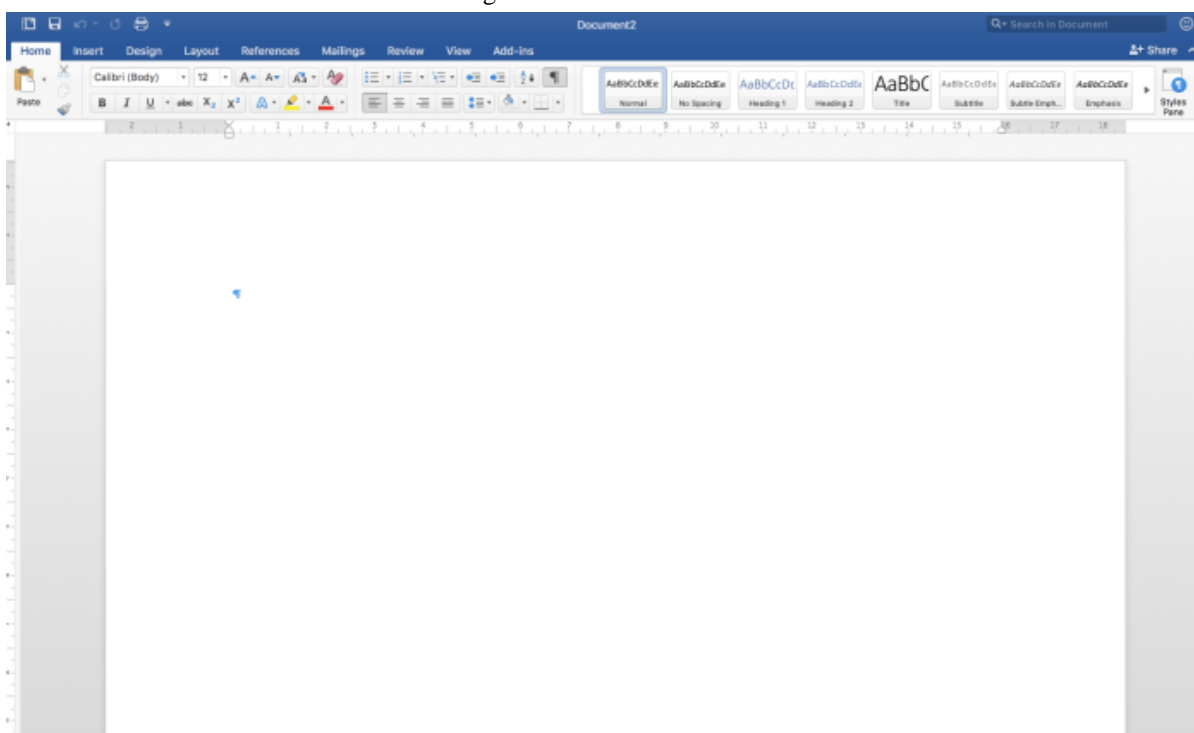
Analogamente, adotando uma abordagem que privilegie o engajamento, a autonomia e reflexão dos estudantes, é possível reconfigurar as situações dos ambientes (3) e (5) para ambientes (4) e (6), respectivamente. No exemplo da semirrealidade, o professor poderia apresentar a questão, com os seguintes dados: vão de 90 cm de comprimento e estante com dois nichos. Em seguida, seria questionado como poderíamos descobrir a medida de cada vão. Após a discussão, poder-se-ia perguntar como dividir um vão de medida desconhecida em duas partes. Em sequência, mudar o número de divisões para 3, nos dois casos. Neste exemplo, caracterizando o ambiente (4), os alunos podem expressar outras maneiras de realizar essa divisão, distintas da algébrica, como, por exemplo, usar um barbante com a medida do vão e dobrá-lo ao meio para descobrir a medida de um dos nichos. Não obstante, eles poderiam questionar sobre a espessura das divisórias, conduzindo-os a uma situação real, levando em consideração todas as outras variáveis existentes. Nesta situação, apesar de a proposta do professor ser direcionada para um ambiente do tipo (4), as indagações dos alunos os conduziram para um ambiente do tipo (6), ou seja, motivado pelos seus interesses. O professor

também poderia pensar o mesmo exemplo partindo do ambiente (6), questionando como eles poderiam dividir um vão em 2 ou 3 partes, permitindo que apresentassem suas possibilidades, e questionando os alunos sobre todas as variáveis possíveis. Poderia, inclusive, utilizar algum vão que exista na própria escola para refletir, conjuntamente, sobre as possibilidades também de modo prático, e não apenas teórico.

Bem... foi por esse caminho que eu expliquei para o Bruno. Espero que o tenha ajudado. Também foi bom para mim, porque pude lembrar e reorganizar algumas coisas para minha tese. Por falar nela, acho que já está na hora de parar de pensar e tentar colocar essas ideias no papel.

\*\*\*

Figura 2 – Tela em branco.



Fonte: Do autor.

Ao olhar para a página em branco do editor de texto (Figura 2), fico inerte com os dedos sobre o teclado, esperando que o texto venha à minha mente, quase como em um ato psicográfico. A mente fervilhando de ideias, ainda desconexas, visualizando uma suposta tese pronta, acabada, mas sem conseguir escrever a primeira linha. Creio que Dorothy, ao percorrer a estrada de tijolos amarelos, também se imaginava de volta a sua casa, sem ter noção de todo o processo que comporia o resultado da sua jornada, o retorno ao lar. Mas como começar? Qual o primeiro passo? Que tijolo da estrada será primeiramente percorrido? Creio que algumas dessas questões acompanham a jornada de um pesquisador em formação.

Ao ler um texto acadêmico, ou mesmo literário, suscita-me a curiosidade de compreender sobre o seu engendramento, os motivos que levaram o autor a escrevê-lo, bem como a sua evolução desde a primeira versão. O mesmo ocorre ao assistir a um filme, quando analiso os efeitos especiais tentando imaginar que recursos foram utilizados, como foi gravado etc., isto é, o processo é, para mim, mais importante do que os resultados e é por meio dele que posso analisar esses resultados.

Esta inquietação pelo processo me acompanha desde a graduação, refletindo na minha prática docente e na pesquisa; na verdade, acredito que a curiosidade é uma das minhas características e, atrelada a ela, experimentei uma abordagem da Geometria a que não estava habituado na Educação Básica. Meu contato com a Geometria nos ensinos fundamental e médio foi na disciplina de Matemática, geralmente dividida em aulas específicas de Álgebra, Aritmética e Geometria, às vezes, com professores específicos para cada campo. Nas aulas de Geometria, trabalhávamos esse conteúdo atrelado ao tratamento numérico, ou seja, a maioria dos problemas visava encontrar o valor de uma medida a partir de um contexto geométrico. No primeiro ano do ensino médio, tive meu primeiro contato com o Desenho Geométrico; nesse momento, havia um professor específico e era uma disciplina à parte da Matemática. Nessas aulas, estudávamos métodos construtivos a régua e compasso, mas não havia exploração das justificativas das construções, também não havia uma associação da disciplina de Desenho com a Geometria vista na Matemática.

Na graduação, me deparei com outro modo de operar a Geometria, não mais com enfoque algébrico aritmético, mas no estudo da forma por meio das representações gráficas. O currículo do curso de Licenciatura em Desenho e Plástica (hoje chamado de Licenciatura em Expressão Gráfica) era voltado, prioritariamente, para o estudo e o ensino das representações no plano do desenho das formas bi e tridimensionais e suas aplicações. Neste contexto, tive aulas com professores cuja formação variava entre as áreas de engenharia, arquitetura, desenho e plástica, desenho industrial, artes e educação. Pontualmente, tive uma professora com formação em Matemática e outra em ciências da computação. Isso mostra como o enfoque gráfico era presente no curso.

Durante o curso, fui compreendendo que, para ser professor dessa abordagem geométrica, era necessário saber além da aplicação dos métodos construtivos, ou seja, o domínio técnico não poderia estar desassociado do conhecimento teórico. Esta percepção foi se tornando nítida quando observei meus professores que ensinavam disciplinas supostamente desconexas, como se fossem especialistas em todas. Um exemplo foi o professor Mário Duarte Costa, com quem tive aula de Geometria Projetiva (GP), Geometria Descritiva B (GDB) e C

(GDC), e Desenho Topográfico (DT). Eu admirava como ele conseguia falar de todos esses temas com profundidade e que, na minha visão, aparentavam ser tão distintos. Ao final do segundo semestre, tendo aulas com ele, me dei conta de que todas as disciplinas tinham por fundamento a mesma teoria, que era a Geometria Projetiva; as demais tratavam de aplicações dessa Geometria com relação a objetivos específicos. Desse modo, cabia à disciplina de GP o estudo das transformações projetivas e os fundamentos da Geometria Projetiva; à GDB e GDC, o estudo das formas poliédricas e superfícies curvas, respectivamente, por meio de suas projeções no plano. E ao DT, o estudo das formas topográficas por meio de projeções no plano. Se eu pudesse fazer uma analogia grosseira para os matemáticos, seria: Geometria Projetiva está para a Geometria Descritiva, assim como Análise está para o Cálculo.

Esta percepção ampliou minha capacidade de operar com a forma de modo generalizado, ou seja, o objeto de estudo deixa de ser as técnicas utilizadas na Geometria Descritiva, ou no Desenho Topográfico, por exemplo, e passa a ser a forma geométrica estudada por meio das projeções no plano.

Esse enfoque no estudo da forma, e não da técnica construtiva, já é pauta de discussão entre os profissionais que atuam nessa área de conhecimento e participam de congressos nacionais e internacionais ligados à Associação Brasileira de Expressão Gráfica (ABEG), refletindo, em muitas universidades do país, na mudança de nomenclaturas de departamentos e disciplinas. Por exemplo, o curso de Licenciatura em Desenho e Plástica mudou para Licenciatura em Expressão Gráfica, como também as disciplinas de Desenho Geométrico e Geometria Descritiva passaram a se chamar Geometria Gráfica Bidimensional e Tridimensional, respectivamente.

Esta reflexão não é recente, pois Mário (COSTA; COSTA, 1996) já considerava a Geometria Gráfica (GG) como o estudo da forma e de suas propriedades por meio do desenho plano, podendo concentrar-se tanto nos aspectos bidimensionais no que se refere, especificamente, às figuras planas e operações no plano, como nos aspectos tridimensionais quando se utilizam os sistemas de representação de formas tridimensionais no desenho plano. Essa compreensão me coloca na posição de refletir sobre esse componente na atual sociedade, imersa nas tecnologias. Por essa razão, considero que compete também à Geometria Gráfica o estudo da forma apoiada em diferentes mídias, sejam elas computacionais, modelos concretos, materiais de desenho, origamis, dentre outras. Este adendo permite uma ampliação do estudo da forma, no sentido de que o uso de diferentes tecnologias promova outras significações que transpõem o espaço no papel, propiciando a integração com diferentes áreas de conhecimento: a Matemática, as Artes, a Física, a Química e a Computação.

Em meio a esta visão de Geometria é que se encontra o meu interesse de pesquisa, que é a preocupação pelo *durante* em uma investigação. Para pensar em como posso pesquisar esse tema, retomo alguns dos questionamentos que minha orientadora lançou.

Dentre as abordagens de pesquisa, meus interesses se aproximam da qualitativa. Minha preocupação não está em mensurar algo, mas em discutir sobre as qualidades do que é produzido em uma investigação. Por esse motivo, a descrição do processo é indispensável para expressar as qualidades, cabendo à análise evidenciá-las. No meu caso, apesar de estar interessado em como estudantes podem investigar um conteúdo matemático, não sei que aspectos irão se mostrar; por isso, considero que, assim como a pesquisa qualitativa, a análise se desenvolve por um método indutivo. E paralelamente ao que emerge (intencionado pelo meu olhar), vou buscando referências que possam me ajudar a compreender os aspectos que se mostram.

Neste sentido, se pretendo olhar como estudantes investigam um conteúdo matemático, esse olhar não pode ser a partir do estático, mas sim do movimento: movimento que constitui a investigação como um todo, não apenas como produto acabado; movimento de uma realidade inexprimível, em sua totalidade, por melhor que seja o modelo teórico ou síntese (FIORENTINI; LORENZATO, 2012).

Se a realidade é inexprimível, como é possível descrevê-la e analisá-la? Não se trata aqui de reproduzir a realidade, pois, como afirma Larossa (2002), a experiência é única para cada indivíduo e, mesmo que a vivenciasse novamente, seria outra experiência; desse modo, considero que a experiência está sujeita ao tempo, ao espaço e à subjetividade. Em vista disso, ao buscarmos descrever e analisar a realidade, não a reproduzimos, mas descrevemos versões dela, localizadas em um contexto cultural e social, carregadas de nossas intencionalidades.

Por tais apontamentos, compreendo que seja necessário diferenciar as investigações às quais me refiro. Há a referente à tese (a pesquisa em si) e a que corresponde ao método de trabalho em que estarão envolvidos os sujeitos. Ao me reportar a ambas, pretendo falar do movimento, de modo que o meu processo enquanto pesquisador esteja em consonância com a postura de trabalho no ambiente de produção de dados. Mas que tipo de investigação (postura didático-pedagógica) pretendo assumir nesse ambiente?

Após conversar com uma colega de doutorado sobre as abordagens de investigação (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2009; SKOVSMOSE, 2000) como propostas de ensino, percebi que não necessariamente haveria uma postura que se “encaixasse” perfeitamente, visto que já carrego algumas concepções a partir da minha prática, a qual aponta para o modo como compreendo o investigar. Dito isto, os autores apresentam aproximações e distinções, das quais

aproprio-me de algumas características para descrever o ambiente no qual pretendo desenvolver minha pesquisa.

As duas abordagens se apresentam como possibilidades para o ensino da Matemática, no intuito de colocar o aluno em outra posição que não a de um aprendiz passivo, mas a de um protagonismo crítico-reflexivo. Cabe salientar que esta modalidade (a investigação), para ambas as abordagens, não se coloca como única possibilidade eficaz de ensino, mas que ela deve estar integrada ao currículo nos seus diferentes níveis.

Quanto aos momentos apresentados por Ponte, Brocado e Oliveira (2009)<sup>4</sup>, compreendo que estes podem ser trabalhados, ou mesmo analisados, no cenário proposto por Skovsmose (2000). Isso não significa que ambas as abordagens dizem a mesma coisa de modo diferente; pelo contrário, ambas se voltam para aspectos distintos. Ponte, para os momentos desse processo, e Skovsmose, para o desenvolvimento da matemacia por meio de uma organização de cenários que permeiam a Matemática Pura, a semirrealidade e a realidade. Neste sentido, compreendo que as duas abordagens podem ser integradas.

Ao pensar sobre a minha pesquisa, o que me aproxima tanto das ideias de Ponte como das de Skovsmose é a noção de investigação e o papel dos sujeitos envolvidos nesse processo (professor e alunos) que ambas as abordagens comungam. A primeira é entendida como uma atividade do matemático. Desse modo, um exercício/problema ou mesmo dúvidas sobre um conteúdo podem ser tomados como objeto de estudo, o que muda é a postura crítica assumida pelo sujeito (seja ele professor ou aluno) de não apenas encontrar uma resposta, mas de questionar o produzido no percurso. Por esse motivo, considero que olhar para a investigação compreendendo os seus momentos pode me ajudar a organizar os dados para análise, assim como o modo de organizar um cenário pode contribuir para produzir dados que me permitam analisar o processo de uma investigação.

Acerca dos ambientes de aprendizagem descritos por Skovsmose (2000), pretendo trabalhar com o ambiente (2), o qual traz referências à Matemática Pura, com alunos do curso de Matemática. A escolha desses estudantes justifica-se por considerar que tal trabalho pode contribuir para a formação de futuros professores, propiciando-lhes experimentar outras possibilidades para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Além disso, trabalhar com um ambiente (2) pode me permitir analisar se a zona de risco não só aumenta quando o ambiente se aproxima do (6), mas que existe outra variável que pode interferir nesse aumento: o conhecimento matemático dos envolvidos na investigação.

---

<sup>4</sup> Doravante, ao mencionar o nome do primeiro autor, me refiro à obra dos três autores citados.

Diante deste contexto, minha intenção é compreender como os estudantes operam com a Matemática em um processo de investigação, movimento de idas e vindas que ampliam a compreensão do vivido a cada novo olhar.

Compreendo que esta é a primeira versão do meu objetivo, mas conforme minha orientadora comentou, a pergunta vai se modificando com o caminhar da pesquisa e considero que, no meu caso, ela será mais bem definida após a produção de dados. Isso porque, a partir dos dados é que poderei direcionar o meu olhar. Para me ajudar a encontrar direções, vou propor uma investigação piloto no grupo de pesquisa do qual participo, quem sabe, de lá surjam novos apontamentos que me ajudem a direcionar a pesquisa.

Aos poucos, a página vai tomando cor (mesmo que preta), linha após linha, um passo atrás do outro, frases soltas que exprimem ideias plantadas como sementes em solo fértil vão tomando forma, compondo mais um membro de um mesmo corpo, que se move e se modifica a cada movimento nesta coreografia que chamo de tese.

\*\*\*

## **INVESTIGAÇÃO PILOTO 1 – GPIMEM**

\*\*\*

Estou no meu segundo ano de doutorado e faço parte do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM<sup>5</sup>). Nas reuniões semanais, discutimos textos de Educação Matemática e atividades matemáticas. Além disso, temos a oportunidade de receber e dar contribuições em produções textuais dos integrantes e em atividades pilotos das pesquisas. Ao todo, somos trinta e três participantes, fazendo parte desse grupo mestrandos, doutorandos e professores da pós-graduação.

Na última reunião, um dos integrantes propôs uma atividade matemática (piloto de sua pesquisa). Ele apresentou um “problema” que teremos que discutir durante quinze dias em um editor de texto on-line compartilhado (Google Docs). Após esse período, vamos comentar presencialmente a atividade na reunião seguinte.

O documento on-line continha orientações sobre o uso da ferramenta (Google Docs) e sugestões de organização na edição do texto para facilitar a comunicação no ambiente (Apêndice A). Todas as orientações foram repassadas presencialmente na última reunião para que pudéssemos tirar as dúvidas.

---

<sup>5</sup> <http://www.rc.unesp.br/gpimem/>.

Até então, tudo bem. Durante a semana, acessei o *link* da atividade, revisei as orientações e me deparei (acho que “parei” seria a palavra mais apropriada) com o seguinte enunciado:

*“Como você resolveria o seguinte problema: Construa um triângulo de vértices  $XYZ$  e lados  $x$  (oposto ao vértice  $X$ ),  $y$  (oposto ao vértice  $Y$ ) e  $z$  (oposto ao vértice  $Z$ ) conhecendo as medidas do lado  $x$ , do lado  $y$  e da altura relativa ao lado  $x$  ( $h_x$ ).”*

Para ser sincero, eu nem consegui me concentrar no enunciado como um todo, porque a primeira frase já me incomodou. Eu não resolveria o “problema” de modo algum! Para mim, isto não é um problema... Eu tentaria resolver no momento em que o enunciado se tornasse um, o enunciado não me movimentou a resolver. Se a ideia era elaborar um texto colaborativamente, o convite deveria ser feito de outra maneira. Mas, afinal, o que é um problema?

\*\*\*

O que é para fazer nesse problema? Só a construção? Será que está faltando alguma informação no enunciado? Deixe-me ler de novo... Parece legalzinho, vou construir no Geogebra<sup>6</sup>. Uma das características desse programa é a questão da dinamicidade, ou seja, qualquer construção geométrica, ou expressão algébrica inserida, pode ser manipulada sem alterar suas propriedades; além disso, é possível manipular um mesmo objeto, seja na sua forma algébrica, ou geométrica, de modo a observar seu comportamento nos dois tipos de representações. Eu poderia passar horas aqui falando das diversas ferramentas que o Geogebra tem, mas a que mais gosto é o controle deslizante<sup>7</sup>, sempre que possível tento utilizá-lo nas minhas construções.

Ah! O Bruno respondeu ao meu comentário, deixa eu dar uma olhada (Figura 3)...

Então a gente pode fazer o que quiser? Ótimo! Alguém comentou no Google Docs que conseguiu construir o triângulo sem o controle deslizante, justificando que a altura não é aleatória. Bem... eu acho que seria legal construir com controle deslizante para cada lado do triângulo; assim, o aluno consegue visualizar a condição de existência do triângulo. Vou tentar construir, mas não agora (risos).

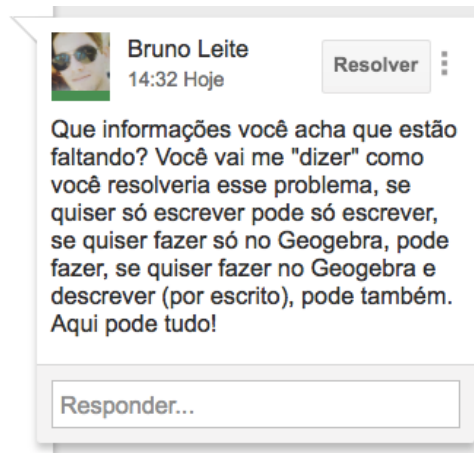
---

<sup>6</sup> *Software* de matemática dinâmica utilizado para o ensino de ciências, tecnologia, engenharia e matemática para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, planilha de cálculo, probabilidade, estatística, e cálculos simbólicos. Disponível em <https://www.geogebra.org/>.

<sup>7</sup> Esse comando permite criar uma barra com um ponto que desliza sobre ela variando entre um intervalo numérico ou angular pré-estabelecido. O valor correspondente à posição do ponto na barra controla um parâmetro que pode ser utilizado em uma construção ou expressão algébrica. Desse modo, o usuário pode verificar variações de uma mesma construção movendo apenas o controle deslizante.



Figura 3 – Comentário no Google Docs.



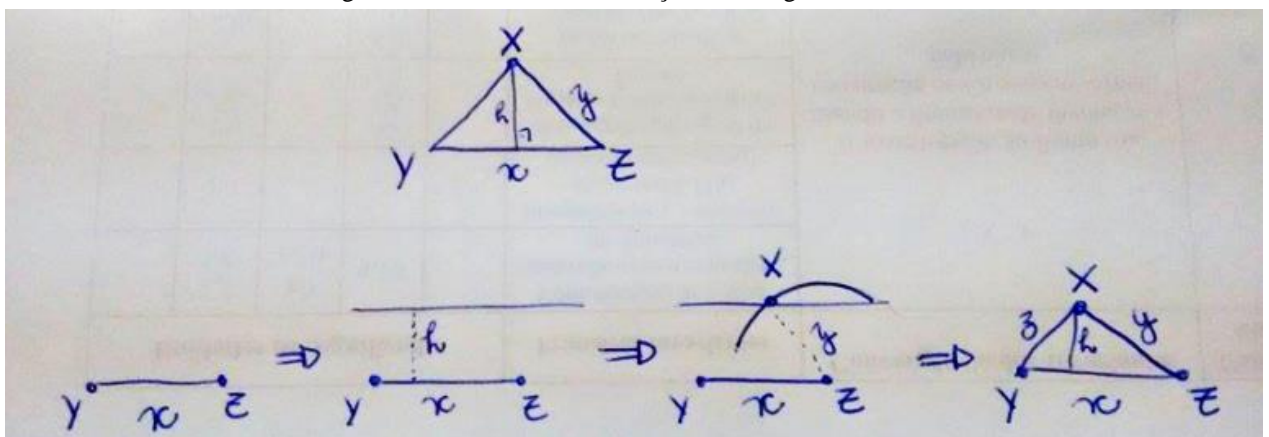
Fonte: Do autor, adaptado dos dados.

\*\*\*

Não sei usar o controle deslizante, mas sei o que significa... mas não entendo por que usar nesse problema como estão comentando... até pensei em alguma construção para variar os lados do triângulo e deixar a altura fixa; assim, teríamos sempre a mesma área, mas não sei como fazer isso no Geogebra, depois vejo como se faz isso no programa.

Voltando ao problema, eu resolvi assim: Primeiro, construí um segmento de medida  $x$ . Tracei uma reta paralela ao segmento  $x$  ( $\overline{YZ}$ ) a uma distância  $h$ . Então, tracei uma circunferência com centro em  $Z$  (uma das extremidades do segmento  $x$ ) e raio igual à medida  $y$  dada. O ponto de intersecção entre a reta paralela e a circunferência, chamei de  $X$ , construindo o segmento  $y$  ( $\overline{XY}$ ). Viva! Triângulo  $XYZ$  construído (Figura 4a)! P.S.: foi muito difícil escrever exatamente o que eu queria no Google Docs.

Figura 4 – Rascunho da construção do triângulo XYZ.



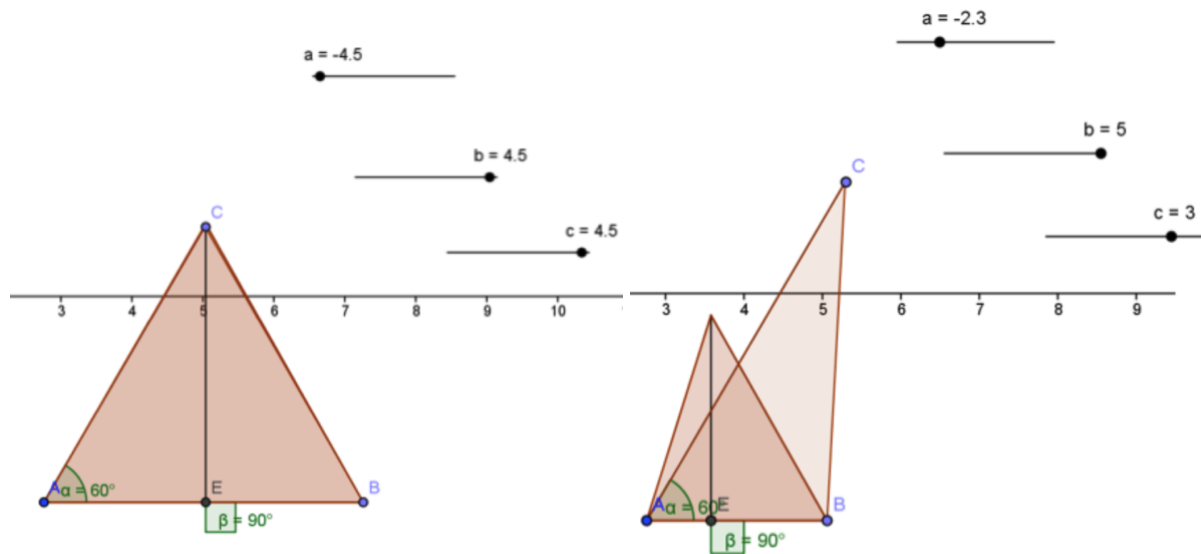
Fonte: Dos dados do Piloto 1 (Documento do Google Docs).

Acabei de ver a pergunta do Bruno sobre minha explicação... “*Quantas soluções há para essa estratégia de resolução?*”... Depende da altura, certo? Agora já fiquei pensando...

Se a altura é menor que  $y$ , tem duas soluções, porque a circunferência vai cortar a reta paralela em dois pontos, havendo duas possibilidades para o ponto  $X$  e, assim, duas medidas para o lado  $z$  ( $\overline{YX}$ ). Mas se a altura tem a mesma medida de  $y$ , a circunferência vai ser tangente à reta paralela, tendo uma única possibilidade para o  $X$ . Agora, se a altura for maior que  $y$ , o triângulo não existe... mas aí não faz sentido, se você pede para construir esse triângulo... seria uma mega pegadinha.

A Mariana<sup>8</sup> (que adora usar o Geogebra) também comentou minha construção... deixa eu ver... hum... ela disse que fez a construção no Geogebra usando o controle deslizante, mas deu um probleminha... Aparentemente, ficou certo (Figura 5a), mas quando ela manuseou os controles, apareceram dois triângulos (Figura 5b) e apenas um deles tinha a altura do problema.

Figura 5 – Construção do triângulo usando o controle deslizante.



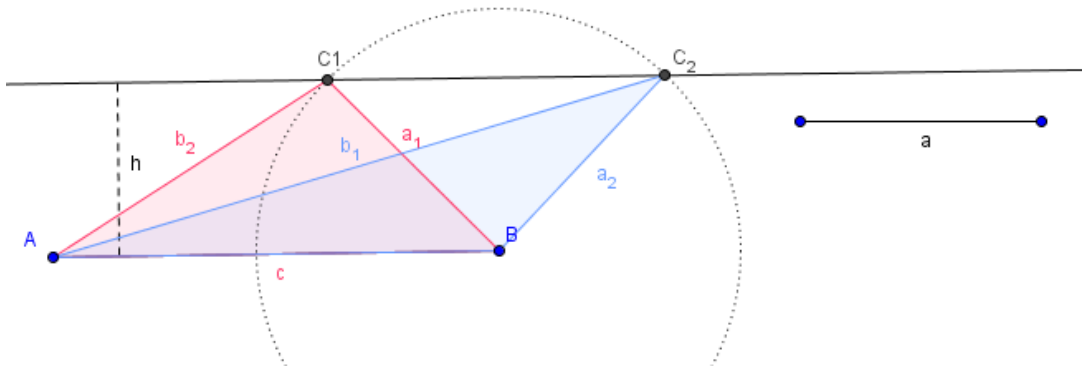
(a) Fonte: Dos dados do Piloto 1 (Documento do Google Docs). (b)

Confesso que, para mim, isso está confuso... O controle deslizante permite que você varie as medidas desses segmentos... certo? Mas o problema fornece dois lados e a altura que NÃO varia! Não entendi por que ela fez isso... O ponto  $C$  não está na reta paralela que ela criou... (ela criou essa paralela para fazer a altura?) e teria que estar... porque a altura é fixa... fixa e dada. Acho que eu mesma vou tentar fazer no Geogebra, mas é tudo diferente... não é fácil trabalhar com um comprimento qualquer... fica tudo solto... se mexer em alguns pontos, desconfigura tudo!

<sup>8</sup> Os nomes dos membros do GPIMEM foram modificados para preservar a identidade.

Pronto, não fiz com as medidas fixas. Considerei  $c = x$  e  $a = y$  porque o Geogebra não aceita renomear os segmentos para  $x$  e  $y$  (Figura 6).

Figura 6 – Construção do triângulo no Geogebra sem o controle deslizante.

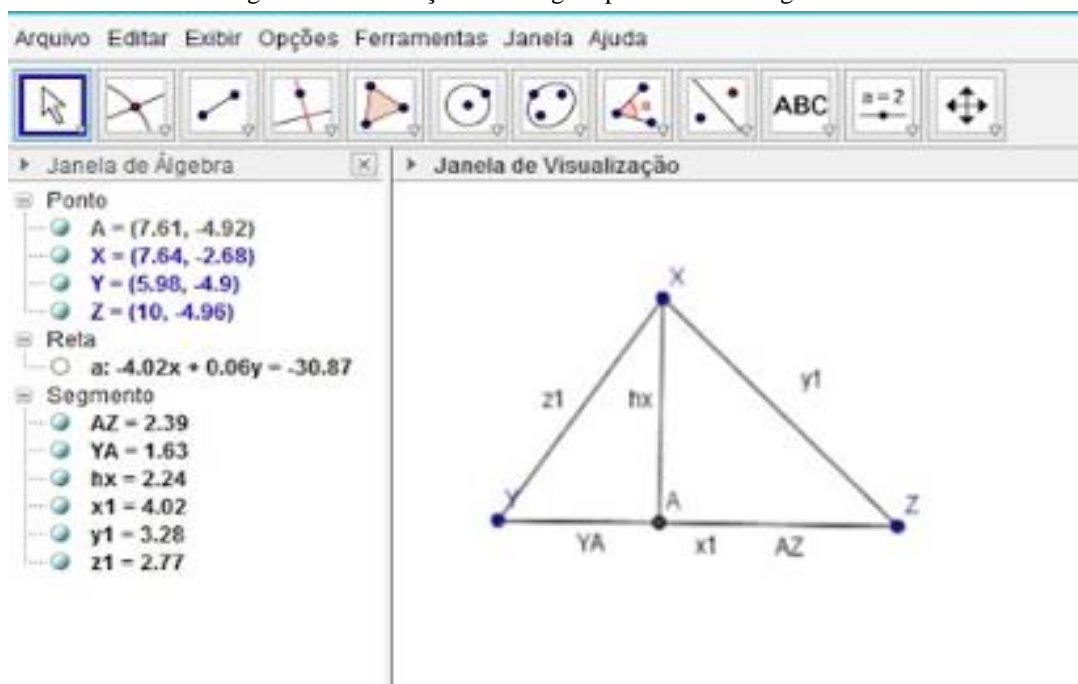


Fonte: Dos dados do Piloto 1 (Documento do Google Docs).

\*\*\*

Não sei se entendi muito bem o que tem que ser feito, mas vamos lá. Usando a ideia de altura e triângulo retângulo, eu penso que é simples. Fiz no Geogebra (Figura 7), mas ainda acho que não entendi o que é para ser feito. Se eu tenho a medida da altura ( $\overline{AX}$ ) e o lado  $y$  ( $\overline{XZ}$ ), é possível encontrar  $\overline{AZ}$  utilizando o teorema de Pitágoras, que, no meu caso, deu 2.39. Na sequência, encontro o valor de  $\overline{YA}$  pela expressão  $\overline{YA} = x - \overline{AZ} = 1.65$ . Após isso, uso o teorema de Pitágoras, mais uma vez, para encontrar  $z$ . Era isso que tinha que ser feito?

Figura 7 – Construção do triângulo por raciocínio algébrico.



Fonte: Dos dados do Piloto 1 (Documento do Google Docs).

\*\*\*

\*\*\*

Analisar a atividade que propus para o GPIMEM não foi tão simples como imaginei. Primeiro, porque eu não podia perder de vista o objetivo do piloto, que difere da atividade. Em muitos momentos, eu me empolgava com os dados e tendia a olhá-los como dados da pesquisa em si, mas esse não era meu foco. O objetivo principal desse piloto foi analisar a configuração do ambiente e dos instrumentos de produção de dados, no intuito de propor uma situação que permitisse uma investigação, como também que fosse possível olhar para o que emerge dessa investigação. Neste sentido, não me deterei, neste momento, nas estratégias expressas pelos participantes para não confundir as análises. Deixarei esse enfoque para um artigo.

Confesso que houve dois momentos na minha análise que trouxeram compreensões distintas, mas complementares, do piloto: um durante os 15 dias enquanto a atividade ocorria no Google Docs, e outro após a reunião presencial, quando discutimos sobre a atividade.

O objetivo da atividade (não do piloto<sup>9</sup>) foi olhar para o que emerge das discussões em uma investigação sobre um dado conteúdo matemático. Nesse momento, o conteúdo matemático foi apenas um meio para olhar para as discussões. Evidente que, mudando o conteúdo, o teor da discussão também muda, mas como ainda não era nítido o que eu gostaria de focar, me utilizei desse piloto para ver o que me chamava mais atenção.

Diferente da experiência que tive no CAP com o Google Docs, quando atuei apenas como docente e não como pesquisador, pude estar atento, nesse estudo piloto, a outras questões que considero importantes, inclusive para melhoria de metodologias de ensino. Sei que as duas situações podem trazer apontamentos diferentes, por estarem em contextos distintos, mas se colocar diante da experiência sob o olhar de pesquisador muda também minha atuação na atividade por estar atento a outros aspectos e, conseqüentemente, mudam os resultados da análise.

Bem... para ajudar a organizar minhas ideias, vou tentar responder a duas perguntas sobre o piloto, uma diz respeito aos instrumentos de produção de dados e à configuração do ambiente de investigação: *De que modo os instrumentos utilizados interferiram na produção de dados do piloto?* E a outra se refere ao direcionamento do objetivo de pesquisa: *O que me chamou atenção nas discussões que ocorreram?*

Pois bem, quanto à primeira pergunta, uma qualidade que se destacou no ambiente desse piloto foi a predominância de um modo de interação no ambiente que poderia chamar de

---

<sup>9</sup> Ratificando, o objetivo desse piloto é analisar se os instrumentos de produção de dados propostos atendem à necessidade da pesquisa de se voltar para o processo de investigação de um dado conteúdo matemático.

*interação não contínua*, ou seja, na sua maioria, os membros realizaram seus comentários e não voltavam a acessar o documento, diferenciando em dois comportamentos: ou liam os comentários dos outros membros e respondiam pressupondo as respostas anteriores; ou respondiam ao problema sem considerar as outras respostas. Em ambos os comportamentos, não houve continuidade das discussões entre os membros, ficando alguns questionamentos sem resposta. Considero três fatores que influenciaram essa característica de interação no ambiente.

O primeiro seria o perfil dos sujeitos envolvidos. Já é de se esperar que mestrandos, doutorandos e professores da pós-graduação estejam envolvidos com suas pesquisas e disciplinas, isso significa que uma atividade que não está diretamente ligada aos seus interesses não será prioridade (prioridade no sentido de dedicar uma hora por dia durante quinze dias para essa atividade, quem faria isso? Eu!). Inclusive, foi comentado, na reunião presencial, que seria difícil encontrar um grupo de alunos que se engajasse apenas por prazer. Uma opção, para fugir dessa sensação de “obrigatoriedade”, seria realizar um curso de extensão com alunos; assim, quem se inscrevesse estaria, por pressuposto, interessado. Desse modo, além do interesse pelo estudo, o aluno ganharia um certificado e todo mundo sairia feliz. Diferente desse piloto, a experiência no CAP envolvia alunos de uma disciplina que (gostando ou não) precisavam compreender os conteúdos. Neste sentido, o documento se tornou um local para tirar dúvidas, como também um manual didático para estudo.

Um segundo fator que considero ter influenciado na interação não contínua foi a quantidade de pessoas em um mesmo documento. Após os 15 dias, o documento do Docs já estava com quinze páginas, isso porque nem todos os membros fizeram comentários. Agora imagina alguém que deixou para acessar a atividade faltando três dias para a reunião. Ter que ler as orientações, tentar compreender a atividade, tentar compreender os comentários dos colegas, comentar as respostas dos outros e ainda apresentar a sua resposta. Vamos combinar que esse não seria um dos compromissos mais divertidos da programação semanal, principalmente se não estivesse ligado diretamente aos seus interesses. Diante deste fato, foi sugerido na reunião, com base nos trabalhos de Heitmann (2013), Zampieri (2013) e Souto (2013), que, em vez de trabalhar com um grupo grande, este fosse dividido em menores, os quais possuiriam o próprio documento; assim, não seria trabalhoso demais acompanhar as discussões<sup>10</sup>.

---

<sup>10</sup> Nas pesquisas de mestrado de Heitmann (2013) e Zampieri (2013), o Docs foi utilizado em um estudo piloto com um grupo de alunos divididos em duplas para acompanhar a produção colaborativa de um texto como resultado de uma discussão sobre uma atividade matemática. Na pesquisa de doutorado de Souto (2013), a

Ao ler as pesquisas sugeridas, percebi que a quantidade de pessoas dos grupos era sempre pequena (entre dois e cinco integrantes), porém a escolha dessa quantidade é apenas justificada na pesquisa de Souto (2013), no intuito de observar as diferentes resoluções da atividade, e não necessariamente porque é melhor um número reduzido de pessoas. De todo modo, as pesquisas indicadas validam a possibilidade de trabalhar com números reduzidos, ao contrário, como pude observar na prática, de um número elevado de participantes interagindo em um mesmo ambiente, podendo, assim, interferir negativamente na interação.

O terceiro fator que considero ter influenciado a interação foi o tempo destinado para a atividade. Como a intenção não era apenas discutir a atividade em si, mas permitir que outras discussões brotassem acerca dos conteúdos envolvidos no problema, talvez fosse necessário mais tempo. A experiência no CAP ocorreu durante todo o ano letivo, permitindo que os alunos pudessem aprofundar determinadas discussões à medida que amadureciam seus conhecimentos. No caso do piloto, associado aos fatores anteriores, os quinze dias não foram suficientes para aprofundar as discussões que foram iniciadas, visto que muitos dos questionamentos feitos no ambiente só foram retomados na reunião presencial, ou mesmo não tiveram continuidade.

Outra qualidade com relação ao ambiente utilizado (Google Docs) foi a questão da *comunicação*. Quando falo de comunicação, me refiro àquela que envolve um emissor, um receptor e uma mensagem, e o meio pelo qual a mensagem é transmitida é a linguagem<sup>11</sup>. Diferente de uma comunicação oral, que pode estar associada a outros elementos de comunicação, como gestos, expressões faciais, entonação de voz, os quais interferem na compreensão da mensagem, a comunicação escrita requer uma explicitação de algumas informações que queiram ser transmitidas na mensagem. Por exemplo, quando alguém pergunta a um aluno “como foi a aula de Bruno?” e ele responde “foi ótima”, apenas pela frase eu poderia concluir que realmente a aula foi ótima, mas se analiso o tom de voz irônico e a expressão facial com os olhos revirando, posso compreender que ele queria dizer exatamente o contrário.

Do mesmo modo, ao tentar comunicar ideias matemáticas, os gestos podem trazer informações que não precisam ser explicitadas na fala, por exemplo: se estou explicando para os meus alunos sobre distância e, enquanto digo (expressão oral) “a distância da minha cabeça

---

pesquisadora utilizou uma sala de bate-papo em um ambiente virtual de aprendizagem (AVA) com uma turma para discutir atividades matemáticas; além da sala principal, a turma foi dividida em quatro subgrupos compostos por cinco integrantes. Cada subgrupo dispunha de uma sala de bate-papo particular para discutir as atividades.

<sup>11</sup> A noção de comunicação descrita não é a assumida nesta tese de doutorado, a qual será apresentada na Seção 3. Contudo, por coerência à escolha na forma de escrita, em que se evidencia o movimento da pesquisa contemplando as mudanças de paradigmas, opto por apresentar, nesta seção, a noção tal como exposta.

para a parede”, faço um movimento com a mão (expressão gestual, Figura 8), ao fazer o movimento, o gesto pode expressar a ideia de que a linha imaginária da trajetória do dedo está perpendicular em relação à parede. Por esse motivo, a comunicação escrita requer informações que deem conta da ausência de outros modos de expressão.

Figura 8 – Expressão gestual



Fonte: Do autor.

No piloto, percebi que as tentativas de comunicação não se restringiram a expressões descritivas (escrita propriamente dita), mas também a expressões gráficas (desenhos) e algébricas. Quando se tratava de expressões descritivas, houve relatos de dificuldade ao escrever exatamente o que se estava pensando, como também de descrições confusas ou conflitantes que dificultavam a comunicação. Esses conflitos também se mostraram em algumas expressões gráficas, quando o desenho não apresentava elementos suficientes para comunicar a ideia, ou não estava relacionado diretamente com a escrita.

A interferência dos modos de expressão na comunicação que se mostrou nesse estudo piloto me levou a refletir se adotar o Google Docs como instrumento de produção de dados era favorável para atender ao meu objetivo de pesquisa. Por um lado, o uso desse ambiente permite que os sujeitos possam colocar seus comentários no momento que eles consideram oportuno, ou mesmo quando a inspiração e a vontade venham, como também me permite observar e analisar os comentários dos sujeitos já transcritos por eles. Uma ferramenta que pode me ajudar nessa análise é o recurso de *histórico de versões*, pelo qual é possível acompanhar o processo de edição do texto, inclusive as partes que não foram contempladas na versão final do

documento. Esta percepção sobre função de histórico também foi observada por Heitmann (2013) e Zampieri (2013). Por outro lado, as dificuldades de comunicação oriundas do ambiente podem ser um obstáculo na produção de dados, pois a limitação de modos de expressão pode desfavorecer os sujeitos na exposição de suas ideias. Entendo que a dificuldade de expressar uma ideia não está apenas ligada a saber utilizar um instrumento, mas também ao conhecimento sobre o objeto de estudo associado à linguagem que se quer utilizar para expressar. Por isso, acredito que realizar um outro estudo piloto com grupos menores pode me dar mais elementos para analisar o uso do Docs.

Outra qualidade do ambiente foi o estilo de escrita. Apesar de alguns terem relatado o quão difícil foi escrever o que estavam pensando, percebi que, na maioria das interações, a forma de expressão era descritiva, porém uma descrição coloquial. Percebi que, no estudo piloto, a escrita coloquial permitia uma desinibição e fluidez na exposição das ideias. Esta percepção me fez lembrar dos momentos em que elaborava fichas de conteúdo para os alunos do CAP, em que a linguagem era formal, e das conversas com os alunos por mensagens (de e-mail ou em rede social) para tirar dúvidas. Ao analisar as duas escritas, eu gostava mais dos textos das conversas pela internet do que a formalidade da ficha de conteúdo. Por conta da sinteticidade da escrita das fichas, esse fato não me permitia adentrar em detalhes que emergiam nas conversas. Isso não quer dizer que a linguagem coloquial sempre será clara, mas a escrita sem amarras permite que as ideias sejam expostas, para depois serem questionadas, reescritas, gerando, assim, mais discussões. Por esse motivo, considero que esta qualidade deve ser estimulada no próximo piloto para facilitar a exposição das ideias.

Com relação à atividade em si, que também configura o ambiente, a questão do “ser ou não ser” um problema me chamou atenção. Mesmo sendo um comentário pontual, a irreduzibilidade de Pedro de não querer fazer a atividade me moveu. Eu já havia visto na teoria que um cenário para investigação se configura pelo aceite dos sujeitos (SKOVSMOSE, 2000), lindo na teoria, mas pude sentir, na prática, como esse aceite é necessário; por mais que exista a intenção do pesquisador, o aceite é do sujeito. Não quero dizer que Pedro foi o único que não aceitou o convite, mas ele foi o porta-voz de outros que simplesmente silenciaram ou interagiram por obrigação. Minha intenção com a forma do enunciado era deixar questões abertas ligadas às possibilidades de construção, seja com relação aos instrumentos ou aos conteúdos envolvidos. Essa maneira de expor um problema faz parte do meu cotidiano e do meu modo de trabalhar e de pensar um problema, mas não necessariamente faz sentido para os outros.



Uma outra questão que destaco para reflexão foi sobre a minha atuação na atividade. Durante o experimento, tentei deixar que os participantes interagissem, me colocando mais como um provocador do que como alguém que daria as respostas ou conduziria as discussões. Neste sentido, à medida que as postagens ocorreram, fiz perguntas e comentários que colocassem os membros do grupo de pesquisa a pensarem sobre suas postagens, não na intenção de validar ou não, mas sim com o intuito de refletir junto. Minha preocupação foi encontrar um meio termo, pois respondendo a todas as dúvidas ou comentando tudo, poderia não abrir espaço para as pessoas interagirem. Por outro lado, se ficasse calado só observando, não estimularia a participação nem ajudaria a dar continuidade a discussões que aparentemente pudessem estar sem saída.

Como as minhas interações foram decorrentes das mensagens dos participantes, pude observar que outras pessoas não adentravam nas discussões que não foram propostas por elas, ou seja, as conversas ocorriam geralmente entre mim e um participante. Devido à comunicação assíncrona e ao fato de a atividade se estender por quinze dias, nem sempre meus comentários eram respondidos, deixando algumas questões em aberto. Em contrapartida, mesmo nas interações ocorrentes em pares, outros participantes puderam acompanhar. Do mesmo modo, os diálogos ocorridos geraram discussões interessantes que poderiam ser mais exploradas se houvesse mais tempo.

Diante deste cenário, entendo que um pesquisador que atua como professor não deixa de influenciar no processo, ou seja, assim como em toda pesquisa qualitativa, a interferência desse profissional não é neutra, é carregada de subjetividade e intencionalidade. E no caso dessa postura de “perguntador”/provocador, o pesquisador deve estar atento às possibilidades e deixas que aparecem durante a investigação.

Passando para a segunda pergunta, me pus a analisar sobre o que me chamou atenção nessa investigação piloto, quais temas emergiram e quais deles vão ao encontro dos meus interesses.

Um primeiro tema foi sobre as discussões matemáticas que emergiram na investigação. Apesar de o problema ser de um conteúdo específico de Geometria (construção de triângulos), ele não se amarra a uma abordagem por meio da qual deve ser resolvido. Essa não especificação de algumas informações foi proposital para que os sujeitos envolvidos pudessem discutir sobre variados modos de explorar a atividade. Das abordagens que se

mostraram posso apontar duas, uma gráfica e outra algébrica<sup>12</sup>. A gráfica foi predominante e, inclusive, na algébrica, a utilização de expressões gráficas estava presente na análise do problema. O que considerei interessante é que as expressões matemáticas, sejam elas descritivas, gráficas ou algébricas, compreendem uma linguagem, que, nesse caso, é a linguagem matemática. Entendo a Matemática como uma linguagem e investigar como se mostra a Matemática no ambiente de produção de dados seria um tema interessante.

Outro tema é o uso de ferramentas para resolver um problema. Durante o piloto, percebi que o uso das ferramentas utilizadas influenciou diretamente os caminhos de resolução do problema e também na Matemática que emergiu. Por exemplo, quando Raissa fez um rascunho no papel usando a caneta, não havia a rigidez de uma construção, tampouco a precisão, seja de instrumentos tradicionais de desenho (régua, compasso, esquadros...), seja de ferramentas computacionais. Essa não rigidez permitiu que ela visualizasse o triângulo e analisasse as relações entre os dados do problema. Porém, não foi possível, pelo desenho, a mão perceber a questão da operacionalização de algumas construções, ou seja, ela sabia que precisava construir uma perpendicular ao lado  $x$ , mas só percebeu como se constrói essa perpendicular ao realizar a construção no Geogebra.

Ainda sobre esse tema, uma das ferramentas utilizadas foi o Geogebra e seu uso foi um tema que me incomodou (no bom sentido) bastante. Logo no início da discussão, propuseram construir no Geogebra utilizando o controle deslizante. Foi notório como o uso desse programa modificou o modo de pensar o problema, pois o foco mudou de resolver o problema para como resolver o problema no Geogebra com controle deslizante. Pode parecer sutil a diferença, ou até mesmo desprovida de importância, mas essa mudança introduziu elementos (de caráter instrumental) que dificultaram a compreensão da atividade por parte dos sujeitos. Pelos comentários, é possível observar que algumas das construções foram utilizadas para analisar o problema, e não para construir o triângulo a partir dos dados. Por exemplo, na resolução que usa o teorema de Pitágoras, a construção é meramente ilustrativa para que se possa entender o cálculo algébrico das medidas dos lados do triângulo. Porém, o autor da resolução deixa subentender que, conhecendo os valores das medidas dos lados, é conhecido o triângulo, porém não é explicado como construir o triângulo, seja pelos dados da questão ou pelos lados do triângulo.

---

<sup>12</sup> A abordagem gráfica é entendida como a operação dos elementos da forma por meio de expressões gráficas (desenhos analógicos ou digitais, figuras, gráficos, modelos concretos, dentre outros) e a algébrica quando se opera com equações.

Não estou dizendo que estas estratégias de resolução não expressam conhecimento matemático, tampouco que estratégias apresentadas pelos sujeitos ao discutirem sobre o controle deslizante não são interessantes. O que quero destacar é que essa situação traz uma reflexão importante, uma vez que estou em um grupo de pesquisa que trabalha com tecnologia e Matemática: de que modo a utilização de uma tecnologia (computacional ou não) transforma o problema? Coloco esta reflexão não para criticar o uso da tecnologia, pois, assim como Lévy (1993), enxergo-a como potencializadora dos modos operantes; isso significa que ela é o meio que utilizo para resolver um problema, ou seja, meu objeto de estudo é o processo de exploração de um conteúdo matemático e não a ferramenta utilizada, diferente de uma pesquisa em que poderia analisar as potencialidades de uma dada tecnologia ao resolver problemas matemáticos. Neste caso, a tecnologia seria objeto de estudo e o conteúdo matemático, o contexto.

Do mesmo modo que enfatizo esse cuidado, destaco que tanto o uso do Geogebra como do papel e da caneta foram importantes no processo de análise do problema por parte dos sujeitos. Este fato mostra a necessidade de um modelo (seja ele um rascunho ou uma figura de análise no computador) que antecipe a visualização da solução permitindo analisar o problema. Neste sentido, entendo que as escolhas tecnológicas moldam os modos operantes da mesma maneira que os sujeitos os modificam, ou por que não dizer, ressignificam as tecnologias em uma moldagem recíproca (BORBA; VILLARREAL, 2005). Por exemplo, o uso do controle deslizante permite romper o paradigma de que os dados da questão são estáticos, fixos, transitando para outra lógica, a da variação, da dinamicidade, mas sem deixar de lado a análise dos elementos dependentes e independentes que existem nos dois contextos (o estático e o dinâmico). Do mesmo modo, a dinamicidade poderia ser explorada por outras ferramentas, sejam elas analógicas ou digitais. Assim, a tecnologia molda o sujeito e o sujeito molda a tecnologia para operar de acordo com o que ele quer responder, não necessariamente pelo caminho pensado pelo programador da ferramenta.

Além disso, poderia pensar sobre a interpretação do enunciado, pois como ele permitiu leituras distintas, o considerar ou não um problema vai depender se os sujeitos envolvidos concebem os dados fornecidos como elementos do objeto em questão.

Eu poderia seguir por qualquer um desses temas. Não importa qual seja, irei perpassar os demais; a diferença é o que será o macarrão e o que será o molho. Outros temas também foram sugeridos na reunião presencial, como a questão da interação ou mesmo do ambiente que discuti anteriormente, mas não posso negar que olhar para a Matemática emergente da investigação é o que me move. Isso não significa que o ambiente e as tecnologias utilizadas

serão desconsiderados, pois tudo perpassa o processo de emersão das discussões sobre um objeto matemático.

Para organizar o ‘coreto’, vou sintetizar algumas ideias para planejar o próximo estudo piloto. Se pretendo olhar para a investigação como um processo, não posso observar momentos pontuais, preciso encontrar maneiras de acompanhar o desenvolvimento. O Google Docs foi um possível ambiente para acompanhar esse processo, contudo com número reduzido de sujeitos. O tema da investigação, como ela própria, deve ser do interesse dos sujeitos e, para conhecê-los melhor, seria interessante que eu estivesse mais perto deles, em vez de estar apenas em momentos pontuais.

Se a produção de dados for em uma disciplina da graduação, posso atuar como estagiário docente para conhecer mais a turma e acompanhar o estudo não apenas como pesquisador. Também resolveria a questão do tempo, pois acredito que um semestre (quatro meses) é um período considerável para os alunos investigarem um tema e apresentar uma síntese. Quem sabe não possa fazer um piloto este ano e, no próximo, repeti-lo em um estudo principal? Já vou colocar, na minha lista de tarefas, o propósito de conversar com a professora da disciplina de Desenho Geométrico e Geometria Descritiva do próximo semestre para ver a possibilidade de ser estagiário docente e realizar a produção de dados na disciplina.

Talvez descrever os pilotos possa aparentar um tanto cansativo; talvez, ao ler a tese, o leitor espere que eu relate apenas as considerações que estejam ligadas diretamente ao que me interessa na pesquisa. Porém, se quero falar sobre o processo de investigação acerca de um conteúdo matemático, por que não apresentar a tese mostrando o processo da constituição da pesquisa? Pois, se considero importante compreender como se dá esse movimento em sala de aula, na mesma medida entendo ser coerente descrever a tese do mesmo modo.

Neste sentido, considero que o Piloto 1 evidencia alguns cuidados que o pesquisador deve ter seja ao elaborar um estudo preliminar como um estudo principal. Seja com relação ao sujeitos envolvidos, a como os dados serão produzidos e armazenados, bem como a possibilidade que eles dão de tratamento. Ou seja, não necessariamente esse estudo me diz de como analisar o processo de investigação, mas sim sobre possibilidades de como organizar este ambiente de investigação para ser analisado.

Espero que, ao começar a escrever, eu consiga dar conta de fazer com que a descrição e a análise tenham significado para este trabalho.

\*\*\*

## INVESTIGAÇÃO PILOTO 2 – DISCIPLINA DE DG|GD

\*\*\*

Neste semestre, estou responsável pela disciplina de Desenho Geométrico e Geometria Descritiva para o segundo ano do curso de Matemática da Unesp, Rio Claro. Como em todas as disciplinas do Departamento de Educação Matemática que ministro, gosto de entregar o plano de ensino aos alunos no primeiro dia de aula, para que eles possam se organizar previamente para as atividades.

Antes de começar o semestre, um aluno da pós-graduação me procurou para conversarmos sobre a possibilidade de realizar estágio de docência na disciplina de Desenho e nela fazer um estudo piloto para sua pesquisa. Considerei oportuno, por conta de a sua formação ser voltada para a especificidade da disciplina e por ser professor desse conteúdo em sua universidade, o que permitiria aprendermos um com o outro a partir das nossas experiências.

Na reunião de planejamento da disciplina que tive com o Bruno, ele me explicou sobre sua pesquisa e começamos a discutir em que parte do plano de ensino sua produção de dados poderia ser inserida. Expliquei que costumo trabalhar com Pesquisa Orientada (PO) como um dos instrumentos de avaliação e que a investigação poderia estar inserida dentre os temas que os alunos poderiam escolher para desenvolver uma pesquisa.

Algumas possibilidades que eu já havia selecionado: análise de como os conteúdos de Desenho Geométrico (DG) e Geometria Descritiva (GD) são abordados em um livro didático na educação básica; entrevistas com professores que ensinam DG e GD; e levantamento de teses, dissertações e artigos científicos que tratassem do ensino e da aprendizagem de DG e GD. Bruno propôs mais um tema para a sua produção de dados, a Investigação Geométrica. Nesta modalidade, os alunos escolheriam um conteúdo, ou problema, ou situação, ligado ao Desenho, para investigar experimentalmente e encontrar possíveis construções/soluções a partir de justificativas matemáticas.

Além de acompanhar os alunos na PO de Investigação Geométrica, Bruno continuaria a se reunir comigo periodicamente para prepararmos as tarefas das aulas. Além disso, ele também ministraria aulas como uma exigência do seu estágio, bem como ofereceria monitoria aos alunos em horários extra-aula.

Após o início das aulas, apresentamos a proposta da PO aos alunos. A turma de trinta alunos se organizou em grupos de dois a três componentes, dentre os quais três grupos escolheram a Investigação Geométrica como tema – dois grupos com três integrantes e um com dois.

Para acompanhar as atividades, Bruno disponibilizou a cada um dos três grupos um documento no Google Docs, possibilitando-lhe acompanhar as discussões sobre o tema e a elaboração de um trabalho escrito, a ser entregue no final do semestre. Além do relatório escrito, os alunos deveriam fazer uma apresentação oral para a classe sobre como e o que pesquisaram.

Acredito que os dados produzidos por Bruno, no âmbito da disciplina, trarão elementos significativos para sua pesquisa. No que diz respeito à disciplina, nossa parceria foi bem proveitosa e fundamental para atingirmos os objetivos propostos.

\*\*\*

Não sei se posso dizer que eu escolhi o tema de Investigações da PO ou se ele me escolheu, pois diferentemente de outros grupos que já haviam decidido desde o primeiro dia, demorei muito e, quando fui olhar nas divisões das equipes, só haviam sobrado dois temas (já que a quantidade de grupos por tema deveria ser equilibrada). Convidei um colega que estava na mesma situação e começamos a trabalhar.

Na verdade, com o início do semestre, tivemos demandas mais emergenciais de outras matérias do que a investigação, que era apenas para o final do semestre. Não que isso impedisse o Bruno de nos procurar periodicamente e ver o que estávamos fazendo. Foi por meio desses “incentivos” que meu grupo produziu alguma coisa.

Demorou um pouco para decidirmos o conteúdo que iríamos pesquisar, pois como o Google Docs não era assim tão familiar, não tínhamos o costume de acessar o documento com frequência e só víamos a pergunta um do outro muito tempo depois. O Bruno teve que marcar uma reunião presencial para agilizar o trabalho, queríamos apresentar algumas construções e explicá-las, mas ele comentou que a ideia era partirmos dos nossos conhecimentos para investigar, e não partir de respostas prontas para depois justificá-las. Ok, a ideia era interessante, mas isso levaria tempo e, na correria do semestre, eu não tinha esse tempo todo para me dedicar a essa atividade, então fui direto na internet procurar o que tinha sobre o conteúdo, depois tentar entender e, por último, tentar sistematizar isso em uma apresentação.

Sugeri inicialmente (não tão inicialmente, pois já estávamos em mais da metade do semestre) investigarmos a construção de algum polígono regular com cinco ou mais lados. Depois de vários dias, Caio sugeriu a trissecção do ângulo e por mim poderia ser qualquer um dos temas, até pensei em apresentar um caso geral, mas Bruno comentou que teríamos pouco tempo para trabalhar este último tema, pois faltava um mês para a entrega do trabalho. Então ele pôs, no arquivo compartilhado, umas perguntas sobre o estudo que a professora da disciplina pediu. Como tínhamos que apresentar essas respostas até a aula seguinte, Bruno nos ajudou a

definir o tema e acabamos ficando com a inscrição dos polígonos regulares em uma circunferência. Eu queria tentar uma construção para o polígono de  $n$  lados, porém ele falou que tem um método, mas é de aproximação. No final, acabamos definindo que iríamos investigar o processo de divisão da circunferência em partes iguais para determinar polígonos regulares e as limitações desse processo.

Um outro grupo também trabalhou um tema parecido. A proposta dele foi investigar com a construção de polígonos áureos, ou seja, aqueles que envolvessem a proporção áurea no seu processo construtivo. Achei interessante a proposta deles. A Gabi, que era desse grupo, me disse que eles também tiveram que ter uma reunião presencial para fazer alguns ajustes, mas eles renderam mais que o meu grupo. Ela comentou que a mudança para o WhatsApp também ajudou. No caso do meu grupo, não sentimos necessidade dessa mudança. O Google Docs acabou servindo mais para escolhermos o tema e apresentarmos o que sistematizamos do que para discutirmos o conteúdo em si. O Bruno até fazia algumas perguntas, mas como estava próximo da data de apresentação, o nosso foco estava no trabalho escrito, e não na investigação.

\*\*\*

Usar o Google Docs para discutirmos a PO foi uma experiência interessante, mas não era sempre que lembrávamos de acessar o documento; na verdade, acho que acessávamos mais por “obrigação”. Nós até discutimos lá, mas não vou negar que a conversa fluiu bem mais quando o Bruno resolveu mudar do Google Docs para um grupo no WhatsApp<sup>13</sup>. Acho que foi melhor pelo fato de usarmos esse aplicativo no nosso cotidiano e, além disso, sempre que alguém fazia algum comentário, aparecia uma mensagem no celular nos avisando. Hoje ficamos até pouco mais de meia noite discutindo sobre o trabalho, cada um em um lugar diferente, um no ônibus, outro no quarto pelo computador, outro na cozinha, não tinha hora nem lugar e, quando alguém se empolgava, os outros tentavam acompanhar, foi engraçado. Não sou muito de falar, então, mesmo o Bruno pedindo para colocar as dúvidas lá no WhatsApp, eu fiquei tentando acompanhar mais a discussão e, quando tinha dúvida, perguntava no particular. Ainda bem que minha equipe é ótima.

Quando a professora pediu para dividir os grupos, tratei logo de chamar o pessoal do “Ninguém quer fazer”. É assim que chamamos nosso grupo de amigos. Somos quatro, mas como a PO só podia ser de três, tiramos no palitinho para ver quem iria sair. Foi triste termos que deixar um de fora, mas não tinha o que fazer e graças a Deus que não fui eu. Não que eu

---

<sup>13</sup> Aplicativo de compartilhamento de mensagens de texto, imagens, áudio, vídeo e documentos, disponível para aparelhos de smartphones e tablets. Para mais informações, acesse <https://www.whatsapp.com/>.

não goste dos outros colegas, mas fazer trabalho com amigos é bem melhor, a gente se entende sem precisar falar muito.

Sobre o tema do trabalho, pedimos ao Bruno para sugerir um, mas ele falou que seria melhor a gente escolher. Depois de conversarmos sobre as possibilidades, alguém sugeriu (não lembro quem foi) para investigarmos sobre a Geometria que está por trás das logomarcas. Achei genial, porque o raciocínio era: se eu precisasse redesenhar uma logomarca, como faria? Inclusive, sugeri tentar construir a logo de várias formas diferentes. Já fomos pesquisar várias logos na internet para ver quais a gente poderia escolher e encontrei algumas até mostrando como se desenha, mas o Bruno disse que era melhor a gente tentar pensar no nosso jeito de fazer. Pensamos em trabalhar categorias diferentes, uma com formas poligonais, outra curva etc. O Bonner teve a brilhante ideia de, no final, a gente criar uma logo para o “Ninguém quer fazer”, juntando as características de todas as categorias. Todo mundo ficou muito empolgado e partimos para a escolha da primeira logo.

Como não sabíamos por onde começar, pedimos para o Bruno escolher uma. Ele sugeriu a da Mitsubishi (Figura 9) para incentivar (acho que ele estava pensando que ia ser simples). Depois disso, ele orientou que poderíamos fazer onde quiséssemos, no papel, no computador, no celular e, se tivéssemos alguma dúvida sobre o uso de qualquer instrumento, era só perguntar para ele. Após as orientações, meu celular não parou de apitar nas próximas vinte e quatro horas.

Figura 9 – Logomarca da Mitsubishi.



Fonte: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mitsubishi\\_logo.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mitsubishi_logo.svg).

\*\*\*

*William:* Pessoas, inseri a imagem no Geogebra e acho que já entendi como se faz a logo da Mitsubishi. A imagem toda é um triângulo equilátero, com cada lado dividido em três. Daí cada negócio vermelho (losango) é formado ligando esses pontos. Vou tentar construir... Droga! Como se divide um segmento em três?



*Bruno:* Calma, vamos listar as subtarefas. 1.<sup>a</sup>: construir o triângulo equilátero; 2.<sup>a</sup>: dividir o lado em três partes...

*William:* Isso! Depois eu tenho que encontrar o centro.

*Bruno:* E por que você precisa encontrar o centro?

*William:* Porque... eu tenho que fazer uma imagem simétrica?

*Bruno:* Investigue.

*William:* Bem, quando eu estava olhando a imagem da logo no celular, a primeira coisa que notei foram os três losangos e tentei encontrar a relação entre eles. Quando eu girei a tela do meu celular, eu vi que eles eram congruentes. Daí enxerguei o triângulo equilátero. Bem, em seguida, eu vi que os três têm um vértice em comum que coincide com o centro do triângulo.

*Sabrina:* Ai, menino! Estou no ônibus agora! Não consigo fazer também... Abri a foto e agora estou acompanhando... É um triângulo equilátero, menos três triângulos equiláteros congruentes! Gostei 😊!

*William:* E agora eu pensei que, como eu não sei dividir um segmento em três partes iguais (sem usar medições de uma régua), eu poderia talvez tentar partir do centro do triângulo inicial, construindo triângulos isósceles menores que corresponderiam à metade dos losangos.

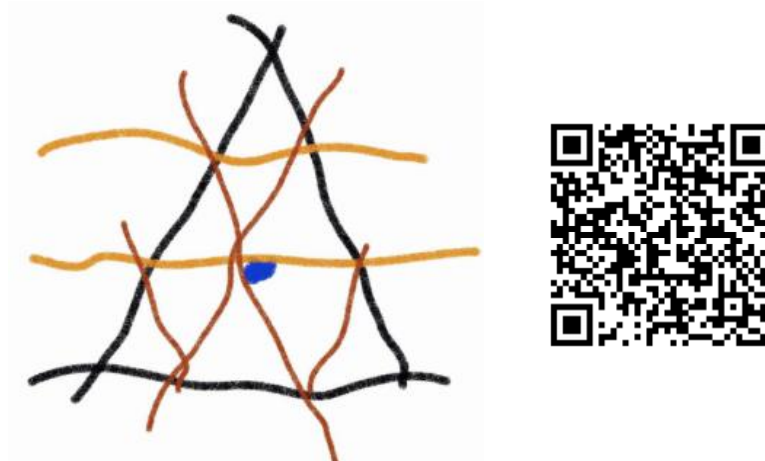
*Sabrina:* Hum! Estou pensando num jeito diferente de construir isso aí. Só que o ruim é que eu estou sem papel para esboçar o que estou pensando. Vou fazer no celular (

Figura 10). Obs.: gente, desenho à mão livre, no celular, com o carro em movimento está super dando certo (só que não, kkk). Tipo, se você observar os losangos como a união de três triângulos equiláteros, dá para perceber que toda a figura é formada a partir de nove triângulos equiláteros e congruentes. O que pensei era que, olhando para a base do triângulo grande, nós poderíamos fazer um segmento paralelo à base passando pelo centro, depois outra paralela acima com a mesma “largura”.

*William:* Nossa! Genial! Os losangos também são paralelogramos! Se eu fizer isso para cada base, está pronto! Não precisa dividir segmentos em três (acho que é isso), vou ver... Não precisa fazer a segunda paralela, é só fazer a primeira, que já dá certo (acho). Mas como faz a paralela mesmo? Kkkkk!

*Bruno:* Onde você vai fazer a construção?

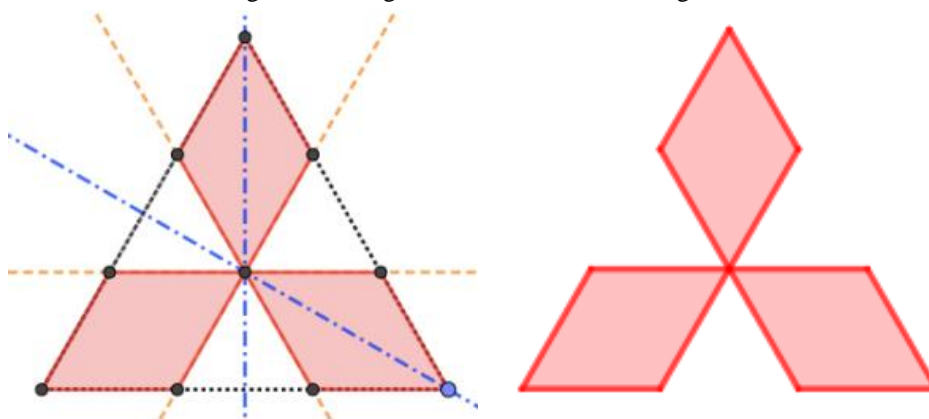
Figura 10 – Esboço do raciocínio da construção da logo da Mitsubishi (e QR-Code<sup>14</sup>).



Fonte: Dos dados do Piloto 2 (Grupo do WhatsApp) e QR-Code do autor.

*William:* No papel! Só tenho um par de esquadros e lápis. Vou fazer no Geogebra primeiro, depois faço no papel... Deu certo (Figura 11). Achei o centro do triângulo pela interseção das mediatrizes (linhas azuis), porque um ponto na mediatriz equidista dos vértices do segmento referencial, então um ponto que está nessas três mediatrizes equidista dos três vértices do triângulo equilátero grande. Daí, se eu traço a paralela de cada lado do triângulo que passa pelo centro (linhas laranjas), eu posso construir esses paralelogramos. Minha nossa, eu fiz a logo da Mitsubishi! E não teria conseguido sem a ajuda da Feiti. Já posso vender meus carros com essa logo! Eu que fiz!

Figura 11 – Logomarca desenhada no Geogebra.



Fonte: Dos dados do Piloto 2 (Grupo do WhatsApp).

<sup>14</sup> O QR-Code é um código de barras que pode ser escaneado por aplicativos de smartphone (como sugestão, indico o Barcode Scanner, disponível para Android e IOS). Eles são utilizados nesta tese para fornecer uma leitura alternativa da imagem, de modo que seja possível observar outros aspectos que não seriam possíveis na imagem apresentada. Há duas maneiras de acessar o QR-Code. Caso esteja lendo a versão em PDF, basta clicar em cima da imagem do QR-Code que, automaticamente, será encaminhado para o *link* correspondente. Caso esteja lendo a versão física (em papel) da tese, basta abrir o aplicativo de leitura de código de barras e direcionar a câmera para o QR-Code e, automaticamente, é fornecido um *link* de acesso.

*Bruno:* Ótimo! Agora como vocês fariam pela divisão dos lados em três partes iguais? Tentem primeiro pensar por vocês, qualquer coisa, vão perguntando por aqui.

*Pedro:* Gente... que absurdo! Me falem o que rolou por aqui.

*Sabrina:* Já terminamos o trabalho aqui e você dormindo aí, moço, kkk. Brincadeira, nós construímos a logo da Mitsubishi por um método e agora estamos pensando em outro.

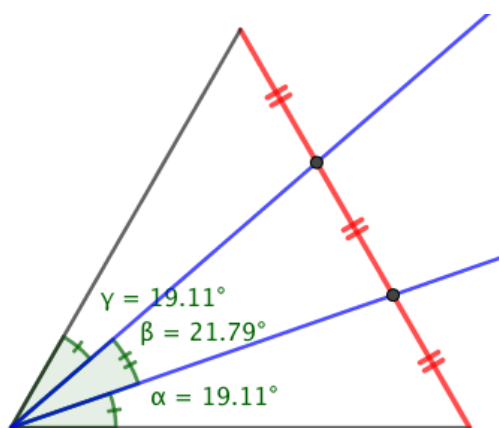
*Pedro:* Vou demorar um pouquinho para ler tudo! Calma aí kkk, até ler tudo já terei chegado no metrô.

*Sabrina:* Tenho uma teoria, mas preciso de um conhecimento que eu não tenho, ou, pelo menos, ainda não tentei fazer. Essa semana estávamos construindo ângulos na aula de Desenho Geométrico, não foi? Como eu construo um ângulo de  $20^\circ$ ? Partindo do triângulo equilátero, sei que cada vértice tem  $60^\circ$ . Teríamos que dividir o ângulo em três e, por consequência, dividiríamos os lados opostos a cada vértice em três.

*Bruno:* Você está supondo que os ângulos são proporcionais aos segmentos? Wil, faz o seguinte: verifica na tua figura do Geogebra. Liga os pontos do lado dividido ao vértice oposto, meça os ângulos e veja se são iguais.

*William:* Eita, eles não são iguais (Figura 12).

Figura 12 – Verificação empírica de não proporcionalidade.



Fonte: Do autor.

*Bruno:* Tem um teorema bem famoso que vai ajudar vocês a dividir um segmento.

*Sabrina:* Eu sei, eu sei, esqueci o nome do teorema. Aquele das transversais que cortam as paralelas. Jesus, esqueci o nome, socorro! Você falou dele essa semana na aula, não foi, Bonner?

*William:* Falei, sim. Teorema de Tales, certo? Ele diz que dadas três retas paralelas e duas transversais... a razão do comprimento dos segmentos de umas é proporcional ao das outras... não sei se expliquei direito.

*Sabrina:* Eu acho que entendi a relação do nosso triângulo com o teorema de Talles.

*William:* Que bom! Porque eu ainda não, kkk!

*Sabrina:* Usando aquela minha ideia inicial de fazer as duas paralelas acima da base, nós teríamos as três paralelas do teorema e as duas transversais seriam os outros dois lados do triângulo... Aí teremos as tais proporções que o teorema enuncia. Quando fazemos isso a partir de cada uma das bases, além de encontrarmos os nove triângulos, conseguimos afirmar que eles vão ser equiláteros e congruentes justamente pelo “cruzamento das proporções” (ai, agora já me enrosquei para explicar), mas o que a gente consegue ver é que os segmentos/lados dos triângulos não serão apenas proporcionais, mas congruentes entre si.

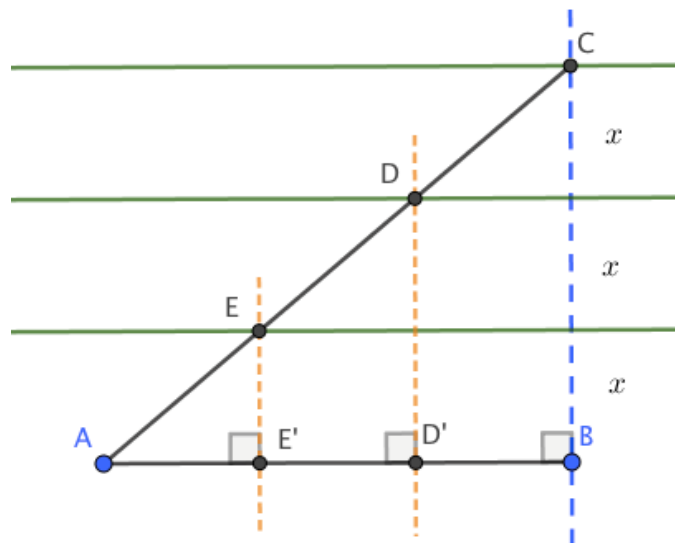
*William:* Isso explica a construção que a gente fez, mas não sei se seria a forma geral de encontrar  $1/3$  do segmento.

*Pedro:* Gente, espera... de onde é esse vértice e para que vocês querem dividir ele em três?

*Sabrina:* Peu, nós queríamos dividir o ângulo em três, porque eu acreditava que isso garantiria que o lado oposto ao vértice ficaria dividido em três partes iguais, mas não deu certo. E o que o Bruno perguntou agora é como a gente poderia dividir um segmento qualquer em três partes iguais (que foi a ideia inicial do Bonner). Acho que vou dar uma pausa aqui. Logo mais eu volto a queimar uns neurônios.

*William:* Descobri! Descobri como dividir um segmento em três! Deixa eu ver como explicar... Eu pensei no seguinte: Você tem lá seu segmento  $\overline{AB}$  (Figura 13), daí você traça três retas paralelas a esse segmento (linhas verdes). A primeira, a uma distância  $x$  dele, a segunda, a uma distância  $2x$  e a terceira, a uma distância  $3x$ . Então, você traça uma reta ortogonal a esse segmento que passe por  $B$  (linha azul) e chama de ponto  $C$  a interseção dessa reta ortogonal com a terceira reta paralela que traçou. Depois você chama de  $D$  e  $E$  as interseções do segmento  $\overline{AC}$  com as outras duas retas paralelas, respectivamente. Aí, você constrói mais duas retas ortogonais (linhas laranjas), a primeira passa por  $D$  e a segunda por  $E$ . As interseções,  $D'$  e  $E'$ , dessas duas retas com o segmento inicial  $\overline{AB}$  dividem o segmento em três. O teorema de Tales está por trás, porque da mesma maneira que cada reta paralela está a uma mesma distância  $x$  das que estão ao seu lado, o ponto  $A$  está a uma distância  $x$  de  $D$ , que está a uma distância  $x$  de  $E$ , que está a uma distância  $x$  de  $C$  e, conseqüentemente,  $A$  está a uma distância  $x$  de  $D'$ , que está a uma distância  $x$  de  $E'$ , que está a uma distância  $x$  de  $B$ . Provavelmente, tem um jeito muito mais fácil, mas eu pensei nesse.

Figura 13 – Desenho da divisão de um segmento em três partes iguais (método de William).



Fonte: Dos dados do Piloto 2 (Grupo do WhatsApp).

*Pedro:* Achei digno, melhor que eu, que não pensei em nada, hahaha!

*Bruno:* Wil, essa é uma maneira sim. Vamos tentar limpar mais essa construção, ok? Vamos todos pensar: A reta  $\overline{AC}$  pode ter qualquer inclinação? A reta  $\overline{BC}$  e suas paralelas precisam ser ortogonais a  $\overline{AB}$ ? Teriam um modo de construir sem precisar das paralelas a  $\overline{AB}$ ?

*William:* Verdade! A reta  $\overline{BC}$  não precisa ser ortogonal. Bastam as retas  $\overline{DD'}$  e  $\overline{EE'}$  serem paralelas a  $\overline{BC}$ .

*Bruno:* Então, a única coisa que precisa é que  $\overline{AE}$ ,  $\overline{ED}$  e  $\overline{DC}$  tenham medidas iguais para que AB seja dividido proporcionalmente.

*William:* Isso, mas não dá para fazer sem paralelas de  $\overline{AB}$ . Porque, sem elas, não dá para saber onde vão os pontos  $D$  e  $E$ .

*Bruno:* E você não pode definir a posição deles? Se escolher a posição de  $D$ ,  $E$  já fica determinado.

*William:* Certo, espera... Eu sei que  $D$  e  $E$  estão, cada um, em uma paralela de  $\overline{BC}$ .

*Bruno:* Certo, mas você concorda que, antes de fazer as paralelas, poderia escolher a posição de  $D$  e por consequência definir  $E$  e  $C$ ?

*William:* Ah, você marca um ponto  $D$  onde quiser, daí marca outro ponto  $C$ , onde quiser também, e  $E$  vai ser o ponto médio entre esses dois... Espera, acho que não é isso... Marca o  $D$ , daí marca  $E$ , tal que  $E$  pertença à reta  $\overline{AD}$  e  $\overline{AD} = \overline{DE}$ . Então, marca  $C$ , tal que  $C$  pertença à reta  $\overline{AD}$  também e  $\overline{DE} = \overline{EC}$ . Daí você marca a reta  $\overline{CB}$  e mais duas paralelas a ela: uma passando por  $E$  e outra passando por  $D$ , assim você consegue  $D'$  e  $E'$  nos lugares certos.

*Bruno:* Muito bem! Agora, como você aplica isso à logo?

*William:* Bem. Voltando à logo. Eu tenho lá meu triângulo equilátero (agora sou eu que estou no ônibus), daí, divido cada lado em três, como a gente descobriu como faz aqui em cima. E marca o centro.

*Bruno:* Você precisa marcar o centro?

*William:* Verdade, não precisa marcar o centro. Só para finalizar a construção, você liga os  $D'$  e  $E'$  de lado do triângulo de forma a desenhar o logo.

*Bruno:* Então beleza, já dá para fazer sem o teorema de Tales e com o teorema. Agora pense no seguinte: Quando estava analisando a logo, você virou o celular, o que percebeu?

*William:* Que ele não mudava, era simétrico.

*Bruno:* Observa só o losango. O que você pode dizer dele?

*William:* Bem, é que, na verdade, eu só percebi que eram losangos porque, quando virei o celular, vi a simetria, o que queria dizer que as três figuras eram iguais. Assim, os lados de cada uma dessas figuras só poderiam ter as mesmas medidas.

*Bruno:* Mas olhando para o losango, ele é um losango qualquer?

*William:* É um losango bonitinho, “regular”, hehehe, com dois ângulos de  $60^\circ$ , porque dois dos lados coincidem com os do triângulo.

*Bruno:* Kkk, gostei do bonitinho. Só um parêntese: eu entendi o que você falou, mas o losango não é regular, pois para ser regular, ele precisa ser equilátero e equiangular.

*William:* Nesse caso, é um quadrado.

*Bruno:* Exato. Fechou o parêntese. Esse losango pode ser decomposto?

*Sabrina:* Bom dia! Eita! Estou gostando disso aqui! Produção constante! Nem dou conta de acompanhar. Mas vou entrar na discussão... O losango da figura é formado por dois triângulos equiláteros.

*William:* Mas como a gente sabe que são equiláteros? Tipo, eles são, mas... não consigo ver uma justificativa... Ah! Acho que entendi. Porque a diagonal do losango coincide com a bissetriz e a soma dos ângulos é  $360^\circ$ . Como ele também é um paralelogramo, os ângulos opostos têm a mesma medida, por isso, se ele tem dois ângulos de  $60^\circ$ , os outros dois só podem ser de  $120^\circ$ , ou seja, os triângulos são equiláteros.

*Bruno:* Então daria para vocês construírem o losango tranquilo, não é? O que foi feito com o losango para obter a logo inteira?

*William:* Ele foi rotacionado em torno de um de seus vértices com ângulo agudo a um ângulo de  $60^\circ$ ... espera...  $60^\circ$  não...  $120^\circ$ .

*Bruno:* Beleza, ele foi rotacionado. Isso é o que chamamos de simetria rotacional. Porque temos a simetria axial e a simetria rotacional. Na rotacional, temos o centro (ou polo),

o domínio (que será o elemento no qual percebemos a simetria), no nosso caso, o losango, e precisamos saber a ordem da simetria, ou seja, quantas vezes a figura inicial se repete (2, 3, 4, 5...). Por exemplo, um pentágono regular possui simetria de ordem quinária, pois se eu rotacionar o lado em torno do centro, obtenho o pentágono. Ou (pensando de outro modo), se eu considerar um pentágono  $ABCDE$  e rotacioná-lo em torno do centro, quantas vezes o pentágono assume a mesma posição até o ponto  $A$  voltar à mesma posição? Cinco, ou seja, são duas maneiras de pensar a mesma coisa.

*William:* Ah, acho que entendi. Não fazia ideia que era isso que você estava perguntando.

*Sabrina:* Senhor Jesus! Consegui ler tudo! Hehehe, quinze minutos só para alcançar vocês na discussão.

*Pedro:* Misericórdia... quanta mensagem! Calma que eu já alcanço também.

*Sabrina:* Bonner, espetacular! E Bruno, muitíssimo obrigada por nos nortear nessas construções! Caramba! Em menos de vinte e quatro horas conseguimos montar a logo da Mitsubishi de três maneiras diferentes. Muito obrigada pela ajuda. Você despertou a curiosidade na gente.

*William:* Foi muito motivador trabalhar com você, Bruno, nem com minha orientadora eu tenho tanto contato, hehehe.

*Bruno:* Que bom, pessoal! Fico feliz em contribuir e aprender junto com vocês. Agora é ir para o Google Docs, sistematizar as construções e partir para as outras logomarcas.

\*\*\*

Estar novamente em sala de aula (mesmo como estagiário docente) me deixou um tanto eufórico, só ali percebi o quanto estava com saudade de ensinar e aprender com os alunos. Fui com tanto entusiasmo que enchi a professora da disciplina de ideias e ela sabiamente foi podando os excessos e aceitando o que era adequado. Este foi outro ponto crucial: o trabalho em equipe. Nós, professores, estamos habituados a reinar na sala de aula e a conduzirmos do modo que queremos, mas voltar à sala de aula com outro professor me ajudou a rever minha prática, aprender com a experiência dos mais experientes, ouvir, ceder, melhorar...

Além de voltar para a sala de aula, pude dar andamento à minha pesquisa, ou seja, unir o útil ao agradável. Minha ideia inicial era aplicar o piloto este ano (2015) e desenvolver o estudo principal, quando a disciplina de DG e GD fosse ofertada novamente, no ano seguinte (2016).

Para produzir os dados, me utilizei de registros no Google Docs, como também no grupo do WhatsApp. Dois dos três grupos utilizaram, como ambientes de discussão, o WhatsApp e um deles optou por não migrar, permanecendo apenas no Docs. Além disso, filmei as apresentações dos grupos no final do semestre. Após o semestre terminar, recolhi todos os registros para compor meus dados, do mesmo modo como fiz no Piloto do GPIMEM. Li os documentos e assisti aos vídeos algumas vezes sem uma ‘lente’ específica, de modo que naturalmente questionamentos pudessem me suscitar o interesse. Ao definir algumas questões iniciais, li e assisti novamente, selecionando os trechos que produziram significado em mim, sendo esses trechos os dados de análise.

Neste segundo Piloto, me chamaram atenção mais questões sobre o que foi investigado do que as do ambiente em si, porém ainda houve o que se avaliar e considerar sobre o ambiente. Nesta nova configuração, não posso dizer que todos os grupos caracterizaram um cenário para investigação, pois apesar de todos realizarem o trabalho, a postura de alguns integrantes não demonstrou, na prática, o aceite. Não entrarei no mérito de julgar as razões pelas quais não houve o engajamento ou mesmo se o engajamento é verídico ou não, mas destacarei algumas características desse ambiente que apontem evidências para uma reconfiguração.

A primeira característica a ser destacada é o *contexto disciplinar*, o qual pressupõe que, para o aluno conseguir o seu diploma, deve cursar certas disciplinas obrigatórias, ou seja, não necessariamente ele quer estar ali, mas por premissa, tem que estar naquele curso semestral. Do mesmo modo, as disciplinas necessitam de instrumentos que avaliem os alunos com relação aos seus objetivos, cabendo ao professor estruturar tais instrumentos. Isso quer dizer que, independentemente da vontade dos alunos de estarem ali, ou de quererem realizar as atividades, eles são obrigados a fazer para serem avaliados. Não que eles não queiram estar, mas há outras variáveis que interferem nas suas motivações. É como costume dizer para meus alunos: motivação é o “motivo” para a ação, então posso até estar motivado, mas, dentre os motivos que me levam à ação, o maior não necessariamente é o de aprender. Não que levado por outras motivações um aluno não possa aprender, pode, mas minha intenção é organizar um ambiente em que o principal motivo dos sujeitos envolvidos seja o de aprender mais sobre alguma coisa; assim, acredito que possa ter mais elementos para analisar o processo de produção de conhecimento em uma investigação. Entendo que a estrutura de ensino que temos hoje, seja para o ensino básico ou superior, é disciplinar, ou seja, ainda foge da proposta apresentada, porém considero que essa configuração pode ser adotada como parte agregadora do currículo, em que o aluno tenha liberdade para fazer suas escolhas com relação ao que quer estudar.



Outro comportamento observado foi o de deixar para fazer o trabalho próximo à data de apresentação (bem típico de muitos de nós). Esse comportamento interfere diretamente no processo da investigação, como no piloto anterior, pois o foco passa do ato de investigar ao de concluir um trabalho a ser apresentado, o que deveria ser consequência do primeiro. Com base nesta análise, me questionei: em que medida um contexto não disciplinar pode propiciar uma investigação? Talvez configurar um ambiente com esta característica seja uma maneira de responder a essa pergunta.

Gostaria de destacar algumas características com relação aos instrumentos de produção de dados, os quais também compuseram o ambiente. Sem o uso do WhatsApp, eu não teria acesso ao processo da investigação a menos que tivesse encontros periódicos presenciais; desse modo, a *comunicação a distância* permitiu não só discutir o tema para além das possibilidades de um espaço físico compartilhado concomitantemente pelos sujeitos, como também registrar esse diálogo. O mesmo poderia ser dito com relação ao Google Docs, mas como os próprios alunos destacaram, a familiaridade e, conseqüentemente, a praticidade do WhatsApp potencializaram as discussões.

O grupo que permaneceu no Google Docs não quis migrar para o WhatsApp, considerando ser suficiente para a discussão, porém as discussões no ambiente restringiram-se ao planejamento e à sistematização da pesquisa. O meu destaque refere-se às motivações dos alunos ao investigar e expor suas ideias, as quais interferem também na interação no ambiente. Este contraponto coloca essas duas ferramentas como possibilidades de uso, mas há outras variáveis (por exemplo, as motivações dos sujeitos) que merecem ser melhor investigadas em futuras pesquisas. Como meu interesse é a configuração do ambiente, neste piloto, o WhatsApp se mostrou uma favorável ferramenta de comunicação e de registros de fonte de dados.

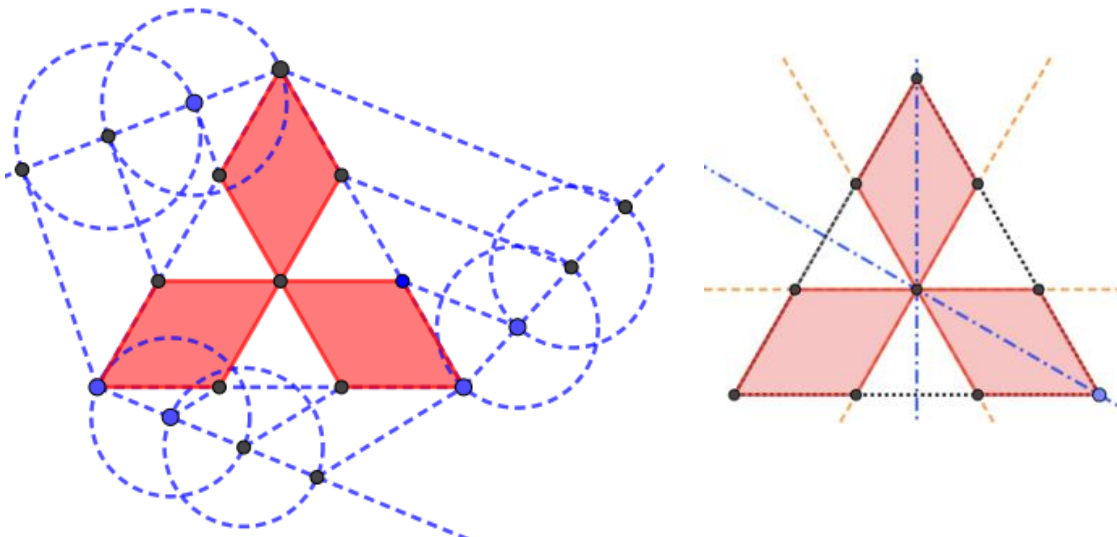
O uso dessas ferramentas permitiu o acompanhamento de ações dos alunos, mas não eximiu a conversa presencial. Os três grupos, em momentos distintos, solicitaram ou foram convidados para uma conversa presencial a fim de esclarecer algumas orientações sobre a PO. Isso indica, como possibilidade, um trabalho articulado entre encontros presenciais e a distância, de modo que os sujeitos envolvidos possam expressar suas ideias, seja pela fala e por gestos, seja pela escrita.

Sobre a investigação em si, mesmo diante do contexto disciplinar, uma das equipes apresentou expressões do processo de produção que permitiram me aproximar do caminhar da investigação. A partir dessas expressões, faço algumas considerações que podem me ajudar na análise do estudo principal.

Um primeiro evento que me chamou atenção foi a mudança de referenciais conceituais, quando um dos sujeitos, ao explorar uma logomarca, identifica a propriedade de simetria na imagem – momento de exploração e formulação (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2009) – e, em seguida, começa a levantar conjecturas de como pode construir a figura, apoiando-se em outros conceitos (divisão de segmentos em partes proporcionais). Este evento me faz questionar como se estabelecem as relações entre abstração e operacionalização em um processo de investigação. Esta questão poderia ser um possível foco de pesquisa. Vou pensar melhor sobre isso.

Outro evento que caracterizou a maioria das construções foi a simplificação na operacionalização, ou seja, ao apresentarem uma estratégia e validá-la, após a discussão, surgia outra estratégia com menos traçados e consideradas por eles mais simples para resolver o problema. Por exemplo, quando os sujeitos produziram uma estratégia para construir a logomarca da Mitsubishi, primeiro expuseram a possibilidade de dividir os lados em três partes iguais, o que demandou mais traçados. Após o término da primeira, foi sugerido outro modo, o qual foi considerado por eles mais simples que a primeira estratégia apresentada (Figura 14).

Figura 14 – Primeira (à esquerda) e segunda (à direita) estratégia de construção da logomarca.



Fonte: Do autor.

A redução de traçados também foi potencializada em função do instrumento utilizado, pois o Geogebra apresenta ferramentas que desenham a mediatriz e a reta paralela a partir de objetos pré-selecionados, diferentemente de um desenho no papel com régua e compasso, em que seriam necessárias outras linhas de construção para representá-las.

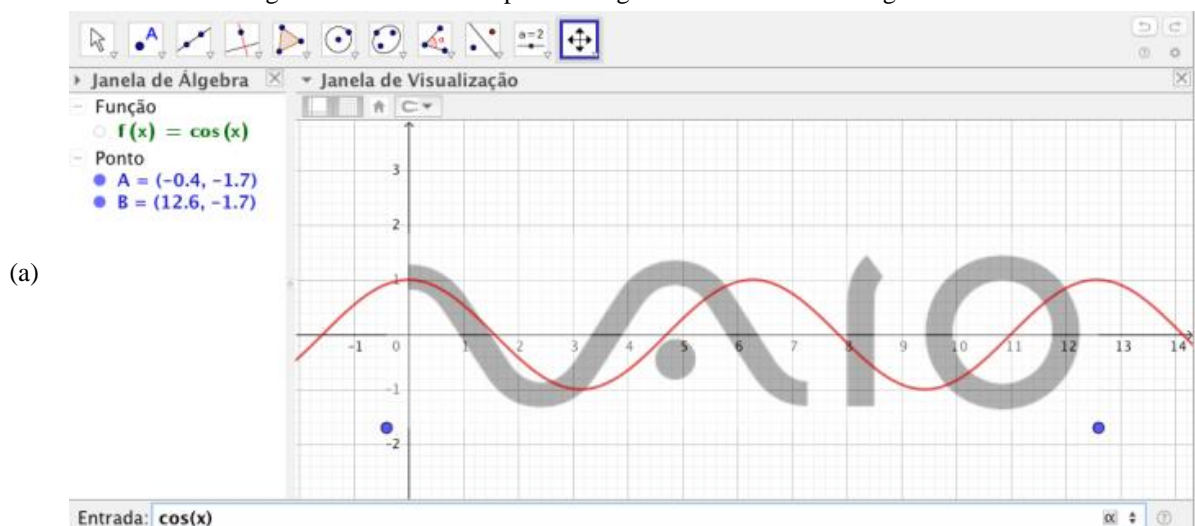
Sobre o uso dos instrumentos, foi perceptível como a escolha da ferramenta utilizada influenciou no modo de construção. Por exemplo, ao investigar a logomarca da Vaio, os alunos

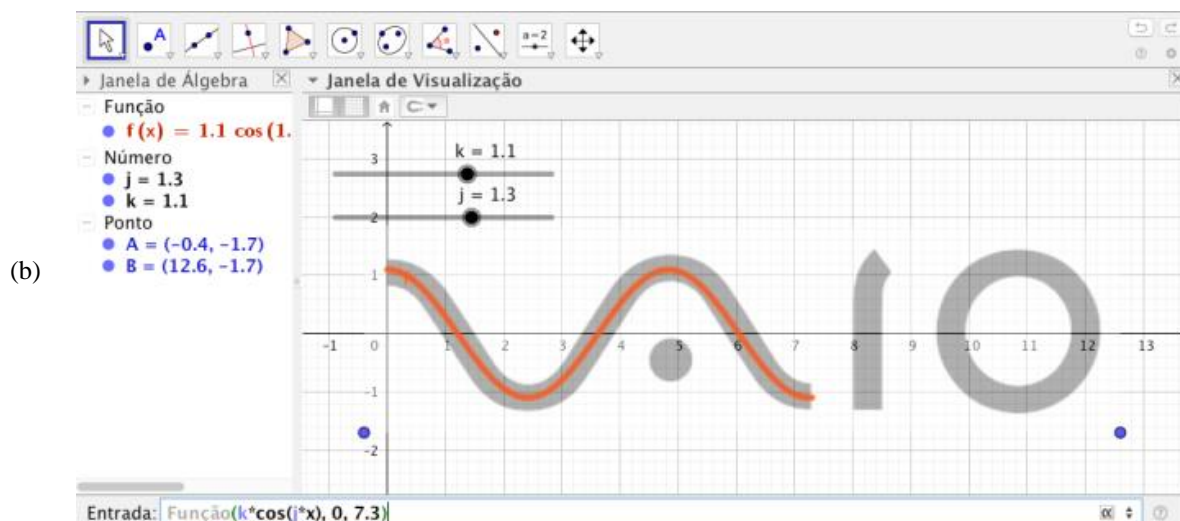
relatarem, na apresentação, que associaram a linha que representa as letras *V* e *A* com a função trigonométrica do cosseno. Devido à proximidade do dia da entrega do trabalho, eles não discutiram no WhatsApp, o que resultou na apresentação como relato da investigação dessa logo. Ou seja, não tive acesso ao processo em si, mas sim à leitura deles sobre o ocorrido. Para esse detalhe da logo, eles citaram que pensaram inicialmente em como construir usando régua e compasso, mas desistiram por terem que fazer ponto a ponto do gráfico, o que não seria possível. Propuseram fazer no Geogebra. Para desenhar no programa, eles inseriram a logo na janela de visualização e, em seguida, escreveram  $\cos(x)$  no campo de entrada; automaticamente, o gráfico da função foi expresso, porém ele não se encaixa com a linha da logo (Figura 15a).

Os alunos sabiam que, acrescentando algumas variáveis na expressão, era possível alterar as proporções da linha (ótimo, porque eu mesmo não sabia) e também conheciam a ferramenta *Função*, pela qual é possível inserir pelo campo de entrada a função e o intervalo desejado. Então, criaram controles deslizantes para as constantes ( $k$  e  $j$ ) e inseriram a função com o intervalo correspondente ao comprimento da linha da logomarca. Movendo os controles deslizantes, foi possível aproximar o gráfico da função da forma da linha (Figura 15b).

Ao analisar o uso do Geogebra na construção das logomarcas, percebi que a primeira (Mitsubishi) pode ser construída com estratégias próximas ao desenho no papel; já para a da Vaio, por não ser possível uma “replicação” dos processos construtivos no papel, foram necessárias outras funcionalidades do programa. Isso me leva também a questionar sobre como o uso de determinada mídia pode influenciar nas estratégias de resolução de um problema geométrico (mais uma para o ‘saquinho’ de possibilidade de tema ou tópico da pesquisa).

Figura 15 – Desenho de parte da logomarca da Vaio no Geogebra.





Fonte: Dos dados do Piloto 2.

Outro evento que merece destaque foi o fato de as apresentações, no final do semestre, mostrarem apenas o produto final por um processo dedutivo, ou seja, enunciava-se o que pretendia fazer e, em seguida, como se constrói, não sendo contempladas as primeiras inferências, as ideias descartadas que ajudaram a explicar por que escolheram determinada estratégia e não outra (talvez porque tentaram a outra e não deu certo). Com relação a esse evento, me lembro que, durante a disciplina, ao trabalharmos alguns problemas gráficos, os alunos comentaram que nunca chegariam àquela resposta sozinhos. Isso pode ser reflexo de uma cultura de produção acadêmica na Matemática, reforçada desde a graduação, em que o processo não é considerado como elemento a ser expresso em um artigo, por exemplo, ou seja, a importância se dá aos resultados, e não como se chegou a eles. Neste sentido, acredito que explicitar o processo de investigação pode contribuir para a elaboração de estratégias de ensino que promovam aproximação da teoria e da prática acerca de determinado objeto matemático, como também no desenvolvimento da autonomia e do raciocínio de alunos e professores.

Bem, recapitulando... Os objetivos dos pilotos foram: avaliar se a organização de cada ambiente era favorável para investigação; considerar se os instrumentos utilizados dariam conta de produzir dados que ajudassem a compreender o processo de investigação; e elencar possíveis focos de análises de pesquisa.

Com base na análise desse piloto, pontuo as seguintes características para meu cenário de pesquisa:

- Perfil dos sujeitos: que tenham um interesse em comum de investigação<sup>15</sup>;

<sup>15</sup> A intenção de priorizar sujeitos com interesse comum, neste momento, vislumbrou a possibilidade de emergirem mais dados com relação ao processo, e não à tentativa de organizar um ambiente ideal de aprendizagem. Contudo,

- Quantidade de participantes: se for trabalhar com muitas pessoas, dividi-las em pequenos grupos;
- Duração: evitar curtos períodos e/ou encontros muito espaçados, considerando que investigar requer amadurecimento e os envolvidos têm outras atividades, ou seja, é necessário tempo e periodicidade para esse desenvolvimento;
- Meios de comunicação: presencial, redes sociais e aplicativos de mensagem instantânea;
- Contexto: minimizar as relações hierárquicas e de poder para que os participantes possam expressar suas ideias livremente;
- Instrumentos de produção de dados: registros (texto, áudio e imagem) dos aplicativos de comunicação e vídeo gravação dos encontros presenciais.

Acho que é isso... agora é pensar em como minimizar as relações hierárquicas... E se... e se eu tentar formar um grupo de estudos? Hum... vou dar uma pesquisada para ver se encontro algo sobre isso. Mas antes, deixa eu me questionar sobre os possíveis focos da pesquisa.

No geral, meu interesse é compreender como graduandos de Matemática exploram um objeto matemático (que ainda não defini qual é). Ainda é muito amplo...

Dos temas que me chamaram atenção, eu poderia indicar algumas perguntas:

- Quais estratégias os alunos utilizaram para explorar um conteúdo matemático?
- Quais abordagens sobre o conteúdo emergiram e que conexões entre elas foram produzidas?
- Quais mídias utilizaram e como elas interferiram no processo de investigação?
- Quais as relações entre o processo de abstração e operacionalização?

Ainda não sei se consigo englobar essas questões em uma só pergunta, ou se terei que escolher alguma delas e refinar... ou mesmo se, no próprio estudo, irão surgir outras questões também interessantes. Bem... vamos por partes. Eu sei que quero olhar para o processo, só não sei o que especificamente, então vou dar mais uma pesquisada para ver se há algo sobre grupo de estudos e depois tentar afunilar mais essa bendita pergunta de pesquisa.

\*\*\*

## GRUPO DE ESTUDOS

\*\*\*

Realizar um levantamento bibliográfico, atualmente, pode aparentar ser mais fácil do que antigamente, quando não havia internet e a busca se restringia às pesquisas que estavam ao alcance do pesquisador, demandando um esforço físico maior para fazer uma pesquisa consistente. Contudo, com a internet, temos acesso a milhares de informações que não necessariamente serão úteis, ou mesmo não sabemos o que fazer com elas. A chave está em saber onde procurar e como filtrar essas informações.

Minha primeira ideia, ao procurar pesquisas sobre grupo de estudos, foi acessar o banco de teses e dissertações<sup>16</sup> da CAPES<sup>17</sup>; dependendo do número de ocorrências, buscaria outras fontes. No *site*, inseri a expressão *grupo de estudos* na caixa de busca, obtendo retorno de mais de 986.874 pesquisas (não era bem isso que esperava). Olhando as primeiras ocorrências, percebi que o sistema de busca procura por pesquisas que tenham a palavra *grupo*, ou *estudo*, mas não necessariamente as duas juntas, o que justificou o número elevado, pois qual pesquisa não trabalha com um grupo ou realiza um estudo? Lembrei que, para procurar uma expressão específica, é necessário escrever o termo entre aspas. O retorno diminuiu para 1.176 ocorrências (ainda não está bom), então decidi filtrar ainda mais a busca. Utilizando o conectivo *AND* entre duas expressões, o *site* retorna trabalhos que as contenham; desse modo, inseri "*grupo de estudos*" *AND* "*educação matemática*". O resultado da busca mostrou 85 resultados (agora podemos começar a conversar), dentre eles, 17 explicitam, no título, a expressão *grupo de estudos*. Ao olhar algumas das pesquisas que não continham o termo específico no título, identifiquei que a expressão geralmente se referia a uma citação de um grupo de pesquisa que continha esse nome, não necessariamente a um tipo de abordagem. Não considero que tenha contemplado todas as pesquisas que abordam o tema, porém pondero que essa amostra será suficiente para sinalizar os modos que vêm sendo empregados pelos grupos de estudos no âmbito da pesquisa científica no Brasil.

Além das pesquisas retornadas, encontrei mais duas pesquisas que, por algum motivo, não foram referenciadas no *site* da CAPES, totalizando 19 pesquisas: 1 tese de doutorado<sup>18</sup> e

---

<sup>16</sup> <http://bancodeteses.capes.gov.br/>.

<sup>17</sup> Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

<sup>18</sup> Vieira (2013).

18 dissertações de mestrado, sendo 5 destas de mestrado profissional<sup>19</sup> e as demais (13) de mestrado acadêmico<sup>20</sup>.

À medida que lia os trabalhos, percebi alguns padrões entre eles. Então, para melhor organizar a revisão, decidi fazer um fichamento, elencando algumas características, como objetivo da pesquisa, sujeitos, embasamento teórico para o grupo de estudos, configuração do grupo de estudos, tema de estudo, algumas contribuições, entre outras. Cabe salientar que essa organização só tomou forma após algumas idas e vindas nas primeiras seis pesquisas. Após esse momento, optei por olhá-las em ordem cronológica, pois algumas citavam as anteriores; assim, pude observar a “evolução” da pesquisa com grupos de estudo no Brasil.

Todos os estudos, sem exceção, abordaram, em parte da sua fundamentação teórica, o desenvolvimento profissional docente, seja na formação inicial ou continuada. Na maioria das pesquisas (16 das 19), os sujeitos eram professores da educação básica que ensinavam Matemática (desconsiderando os pesquisadores como possíveis sujeitos); dentre elas, em 14 constavam apenas professores e, nas outras duas, professores e licenciandos. Das outras três, duas envolviam apenas licenciandos. Outra envolve pós-graduandos, professores de pós-graduação (15) e dois licenciandos. Nenhuma das pesquisas teve, como integrante de um grupo de estudos, alunos da educação básica. Estes dados, associados à predominância do tema das pesquisas, apontam o grupo de estudos como uma tendência de desenvolvimento profissional docente.

Os objetivos de pesquisa versaram sobre a análise dos impactos de um grupo de estudos no desenvolvimento profissional docente, ou buscavam analisar como professores (ou futuros professores) exploram determinado tema em um grupo de estudos. Esses temas variaram entre uso da tecnologia, ou estratégias de ensino, relacionadas a um conteúdo matemático, ou tendências em Educação Matemática. Não se encontrou, nas pesquisas, um grupo de estudos que tenha optado apenas por uma investigação matemática. Todos aqueles que abordaram um conteúdo específico voltaram-se para o contexto de ensino, o que me leva a questionar como futuros professores exploram um objeto matemático desassociado desse contexto. Quando me refiro a essa desassociação, não desconsidero a importância de refletir sobre estratégias de ensino de um conteúdo. Porém, entendendo que a falta de conteúdo matemático por parte do professor é um dos obstáculos para o desenvolvimento profissional

---

<sup>19</sup> Bazet (2014), Costa (2011), Maciel (2008), Peranson (2015) e Sessa (2014).

<sup>20</sup> Bispo (2017), Boesing (2009), Etcheverria (2008), Gimenes (2006), Lima (2009), Marchi (2011), Miola (2008), Orfão (2012), Paula (2009), Rodrigues (2015), Santos (2011), Silva (2010) e Zotto (2014).

docente (SERRAZINA, 1998), direciono meu olhar para este aspecto específico, que interfere no modo como se ensina.

As pesquisas que li, tanto as que propunham estudo teórico como as que abordavam a elaboração de atividades, partiam de materiais (textos e/ou atividades) pré-selecionados pelos pesquisadores. Diante disso, me questiono: e se eles não tivessem esses materiais, o que aconteceria? Meu interesse vai nesta direção: analisar como um grupo explora a Matemática a partir dos próprios conhecimentos, ou seja, olhar para o que emerge do atrito com o que cada participante conhece sobre um dado objeto matemático. Há divergências? O que interessa a eles saber? Que estratégias usam para explorar o conteúdo? Que modelos são construídos por eles para ajudar a compreender o objeto de estudo? Que mídias são escolhidas para construir os modelos? Que conteúdos matemáticos perpassaram a investigação, seja na elaboração dos modelos ou na exploração em si? O conhecimento produzido perpassa o currículo dos cursos de Matemática? Estas e outras questões podem surgir no decorrer da produção de dados.

Voltando às pesquisas, com relação ao embasamento teórico para organizar os grupos de estudos, poucas não explicitam o embasamento, mas descrevem como o organizaram. Na maioria, os trabalhos apoiavam-se em referenciais variados, dentre eles, o mais citado convergia para o modo de organização que eu pretendia adotar. Por esse motivo, fui em busca dessa referência para produzir as minhas compreensões sobre o que os autores discutem.

Com base na experiência ao longo dos anos em mais de 1.000 grupos de estudos organizados em torno de 100 escolas, Murphy e Lick (1998) escreveram o livro *Whole-Faculty Study Groups: a powerful way to change schools and enhance learning*, no qual propõem um método para promover mudanças na escola e melhoria na qualidade de aprendizagem. No método, os autores apresentam duas possibilidades de trabalho com grupos de estudos. A primeira está diretamente ligada ao projeto político pedagógico (PPP) do colégio, ou seja, faz parte dinâmica da escola, tem objetivos voltados às suas necessidades comuns, podendo envolver professores, gestores e técnicos. Por exemplo, o colégio pode criar um grupo de estudos para aprofundar questões referentes à inclusão, de modo a trazer reflexões sobre o tema, implicando mudanças na escola, sejam de ordem estrutural, pedagógica ou mesmo ideológica. A segunda proposta, menos estruturada, funciona como um grupo de estudos independente, não é vinculado a nenhuma organização institucional, ou seja, parte de interesses individuais. Por exemplo, três professores de Matemática de uma escola percebem que os alunos em geral apresentam dificuldade com equação de 2.º grau, então se organizam para estudar métodos de ensino que os auxiliem a minimizá-la. Nada impede que um professor de outra escola, ou aluno da graduação, que queira aprofundar seu conhecimento sobre esse tema, possa participar do



grupo, visto que o cerne é o interesse pelo tema, e não o perfil dos sujeitos. Neste sentido, é o próprio grupo que define quem participa.

Com relação ao grupo de estudos independente, Murphy e Lick (1998) apontam ser este um importante instrumento de desenvolvimento individual e que não deve ser minimizado em relação ao outro tipo. Consideram como pontos fortes:

- Os participantes são os únicos a controlar o grupo, ou seja, não dependem de uma instância maior para funcionar, ou tomar decisões;
- As ações podem ser variadas, pois não estão ligadas à necessidade institucional;
- Os horários e locais da reunião são mais flexíveis, por conta de o grupo poder funcionar fora do horário e espaço da escola;
- Apesar de funcionar fora de uma organização institucional, o que foi aprendido muito provavelmente irá afetar a instituição de algum modo.
- Grupo de estudos independente não precisa partir de referenciais pré-estabelecidos, ampliando as possibilidades de estudo, diferente de grupos ligados a um projeto institucional, em que há alguns pressupostos teóricos definidos.

Com relação aos pontos fracos, os autores indicam:

- Menos provável de aplicar seus resultados em uma instituição;
- Geralmente não mantém uma rotina definida;
- Membros habitualmente deixam de realizar seu trabalho;
- Resultados pretendidos são menos claros;
- A motivação pode ser centrada em “o que o grupo pode fazer por mim?”;
- Uma vez que os indivíduos satisfazem suas necessidades pessoais, deixam de frequentar;
- Há geralmente pouco comprometimento para um propósito maior.

Diante desta configuração de grupo voltado para a formação de professores considerei utilizá-la como suporte na estruturação do ambiente de produção de dados. Essas características irão me ajudar não só a organizar o grupo, mas também a compreender que determinados comportamentos estão dentro da “normalidade” para esse tipo de grupo. Minha preocupação, nessa organização, será tentar potencializar os pontos positivos e minimizar os negativos.

Para estruturar o grupo, Murphy e Lick (1998) estabelecem o número máximo de seis integrantes, de maneira a proporcionar a participação de todos nas discussões em suporte mútuo, sem se preocupar com a composição, pois o que define o grupo é o interesse pelo mesmo tema. Caso haja mais interessados, pode-se formar mais de um grupo em torno do mesmo tema,

cada um com agenda e planejamento próprios. Os autores sugerem que se estabeleça uma agenda de encontros regulares, optando por configurações de encontros de curta duração, porém frequentes, do que encontros longos com intervalos grandes (mais de 15 dias). Este número de participantes e espaçamentos entre as reuniões vai ao encontro do que já havia analisado nos Pilotos anteriores.

Entendendo que em grupo de estudos cada participante possui interesses individuais, é necessária uma organização coletiva, ou seja, o planejamento deve partir do grupo, estabelecendo normas na primeira reunião, de modo a configurar um espaço de desenvolvimento profissional dos participantes, onde todos refletem, testam ideias, compartilham, confrontam teoria e prática, por meio de aprendizado mútuo. Neste sentido, não deve haver hierarquia na figura de um coordenador, ou alguém que sempre ensina. Os autores sugerem que haja um rodízio na condução das reuniões para estimular o senso de responsabilidade e, caso sintam necessidade, os participantes podem convidar alguém externo para tratar de um ponto que não dominem. Além disso, ressaltam a importância de os membros fazerem diários sobre o que foi discutido nas reuniões, além de colocarem comentários individuais, uma vez que, ao visitarem esse material, poderão avaliar o andamento do grupo e redefinir questões.

Por meio dessas ações, Murphy e Lick (1998) comentam que o desenvolvimento do grupo cresce em complexidade, decorrendo em implementação de novas práticas, mudança de comportamentos, demonstrando novas habilidades e conhecimentos. Para que ocorra esse desenvolvimento, os participantes devem estabelecer relações de sinergia, as quais envolvem os objetivos comuns, a interdependência, interação e integração entre os sujeitos, o empoderamento individual, o envolvimento participativo e a escuta atenta do outro. Do contrário, podem se estabelecer relações autodestrutivas, quando há pouca ou falta de comunicação, falta de confiança, egocentrismo, maledicências e competição interna.

Relações autodestrutivas fazem com que os sujeitos gastem mais energia com os aspectos indicados do que criando ou produzindo. Outro tipo de relação que pode se estabelecer é a estática, quando os sujeitos trabalham na lei do “mínimo esforço” e geralmente o trabalho produzido em grupo seria igual ao de cada indivíduo isoladamente. Diferentemente desses dois tipos de relações, as de sinergia produzem resultados que vão além da soma de esforços individuais, ou seja, as interações de um participante movem os outros a produzirem uma “energia criativa” para além daquilo que eles fariam sozinhos, não sendo possível obterem os mesmos resultados se não estivessem em grupo.

Compreendo a importância de se estabelecer relações de sinergia no grupo, porém não há como garantir que, seguindo todos os passos, essas relações irão acontecer (e não é isso que os autores propõem), pois depende da abertura de cada integrante. Por esse motivo, tenho que estar atento ao convidar pessoas que gostam e queiram trabalhar colaborativamente.

Outros autores, como Ferreira (2003) e Fiorentini (2004), confluem para a ideia de trabalhos colaborativos como uma proposta potencializadora do desenvolvimento profissional docente. Esses autores descrevem características de um grupo colaborativo similares ao proposto por Murphy e Lick (1998) (grupos pequenos, interesse comum, todos são igualmente responsáveis etc.). Neste sentido, defendo que, em tal tipo de proposta, os participantes devam produzir o seu planejamento e material dentro do próprio grupo.

Ao olhar as pesquisas sobre grupo de estudos, observo que, predominantemente, antes de iniciá-lo, os pesquisadores envolvidos selecionam textos, e/ou atividades a serem exploradas no grupo, e estabelecem um cronograma a ser seguido, cabendo aos participantes discutir o tema com base nos textos, examinar com atenção as atividades propostas e elaborar materiais a serem utilizados em sala de aula, por exemplo.

No tocante à proposta de grupo de estudos na qual os autores das pesquisas se apoiam, considero que se a intenção é compor um ambiente em que não haja hierarquia (ou mesmo que ela seja minimizada), o planejamento das ações deve ser acordado conjuntamente; caso contrário, como diferenciaríamos um grupo de estudos de um curso/formação com abordagem investigativa? Pressuponho que, nesta configuração, em ambos os casos, há um planejamento prévio de determinados elementos do ambiente, mas não necessariamente o modo como as ações seriam realizadas.

Ancorado na proposta de grupo de estudos independente de Murphy e Lick (1998), a qual instrumentaliza minhas considerações provenientes dos estudos pilotos anteriores, irei definir apenas o tema: explorar um conteúdo de Geometria por meio de uma abordagem investigativa. As demais definições quero tomar juntamente com os outros participantes.

Diferentemente das outras pesquisas e dos preceitos de Murphy e Lick (1998), que se voltaram para questões de ensino, busco direcionar meu olhar para o desenvolvimento pessoal dos participantes com relação ao conteúdo específico (se, em algum momento, o grupo irá propor tratar de alguma questão de ensino é outra história). Neste sentido, posso elaborar métodos de ensino que se aproximem do ato operante de aprender, associado ao modo como eu compreendi uma propriedade do objeto.

Este foco de pesquisa emerge da minha prática docente, quando comecei a estudar para concurso de professor e dar aula. Ao estudar determinados conteúdos de Geometria, não

havia materiais (ou eu não sabia procurar) que satisfizessem em totalidade minhas dúvidas (acho que permaneci naquela fase em que a criança só pergunta o porquê das coisas), então, geralmente optava por uma exploração empírica e complementava com leitura de materiais. Essa prática de estudo acabou refletindo no meu modo de ensinar e de experienciar a Geometria. Depois do segundo piloto na disciplina de Desenho, em contato com os alunos de Matemática, percebi que eu também não estava habituado a operar com a Geometria de modo dedutivo e formal, como geralmente ela é trabalhada nos cursos de Matemática, mas sim de modo indutivo e experimental. Por esse motivo, também vislumbrei a possibilidade do grupo de estudos como um espaço de troca, no qual eu também quero aprender, em que sou sujeito e, ao mesmo tempo, pesquisador.

O meu papel dentro do ambiente de investigação, nos estudos pilotos anteriores, correspondeu ao que propõem Ponte, Brocardo, Oliveira (2009) e Skovsmose (2000): atuar como um partícipe no processo de aprendizagem. Neste grupo de estudos, esse papel sofre algumas alterações, pois o professor, apesar de ser também um colaborador, não tem um programa definido que precisa seguir. Isso não significa que não haja objetivos desejados, ou possibilidades de caminhos, mas eles não são impostos, ou mesmo explicitados. Cabe ao professor aproveitar as oportunidades que o trabalho colaborativo propicia para inserir seus objetivos, mas também se abrir aos colocados pelos outros sujeitos envolvidos. Esta postura põe o professor também como um investigador, minimizando a estrutura hierárquica dentro do grupo de estudos. Neste sentido, apesar de carregar comigo a bagagem de experiência de ensino que os estudantes de licenciatura ainda não possuem, isso não significa que eu não tenha o que aprender com eles. Por esse motivo, o conteúdo escolhido deve ser algo que eu também tenha interesse em explorar e aprender mais.

Colocando-me como sujeito, volto ao dilema da pergunta de pesquisa, pois se sou sujeito, não posso estruturar a pergunta focada no estudante de licenciatura. Não que meu olhar tenha que estar voltado apenas para eles, mas meu maior interesse é na produção do grupo. Desse modo, almejando que os participantes estabeleçam relações de sinergia, o trabalho coletivo desenvolvido irá ocorrer para além da soma dos trabalhos individuais, ou seja, não posso desconsiderar a participação de um dos membros, pois todos irão ser influenciados pelos demais, tal como deve ser o trabalho investigativo.

Após o término do segundo estudo piloto, os alunos da disciplina de Desenho me indicaram um colega que queria desenvolver uma pesquisa de iniciação científica relacionada com Geometria. Vislumbrei a possibilidade de organizar com ele um grupo de estudos, marcando então uma reunião para explicar a proposta de explorarmos um conteúdo de

Geometria, obtendo seu aceite de imediato. Discutimos sobre possíveis temas, mas ao questioná-lo sobre sua preferência, pediu sugestões por considerar que eu conhecia mais possibilidades do que ele. Por fim, escolhemos as curvas cônicas, por ser um conteúdo que ambos queríamos conhecer mais. Eu conhecia uma abordagem geométrica do conteúdo (mas que precisava aprofundar) e ele havia trabalhado mais recentemente na disciplina de Geometria Analítica, porém não lembrava de muita coisa. Ao final da conversa, perguntou se poderia chamar um colega. Óbvio, respondi. Avisei que iria convidar mais dois alunos que cursaram a disciplina de Desenho. Assim, formou-se o Grupo de Estudos<sup>21</sup> sobre curvas cônicas com dois alunos do segundo ano da Matemática, dois do terceiro ano e eu, totalizando cinco integrantes.

Antes da primeira reunião, criei um grupo no WhatsApp para acertarmos dia e hora do nosso encontro, como também lancei uma pergunta disparadora para as discussões, de modo que cada um pudesse ir pensando sobre o tema. Escolhemos uma das salas de seminário do Departamento de Educação Matemática da Unesp de Rio de Claro para reuniões semanais com duração de uma hora cada.

Definido o tema, minha pergunta de pesquisa vai na seguinte direção (até o momento): *Como um grupo de estudos independente produz compreensões sobre curvas cônicas a partir dos seus conhecimentos?*<sup>22</sup> (Já está começando a melhorar).

Retomando algumas ideias: o intuito de olhar para um ambiente estruturado como grupo de estudos independente é por entender que, nesse ambiente, os membros têm maior liberdade para explorar seus interesses do que em um ambiente de sala de aula tradicional. Refiro-me a compreensões coletivas porque a intenção não é olhar para o que cada sujeito individualmente compreende, mas sim para o que todos, em comum acordo, produzem sobre esse objeto matemático. Por que partir dos próprios conhecimentos? Acredito que uma das principais características de um professor (ou mesmo para qualquer pessoa que queira dominar um conteúdo) deve ser a autonomia no estudo, ou seja, não estar preso a materiais, mas utilizá-los para complementar as compreensões que já possui sobre dado objeto; assim, o conhecimento sobre ele será fundado a partir dos próprios questionamentos.

Ao participar do Grupo de Estudos apenas com meus conhecimentos, irei optar por uma estratégia um tanto quanto não convencional para as pesquisas acadêmicas. Vou deixar o levantamento das pesquisas sobre o tema para após a produção de dados, pois ao lê-las, posso

---

<sup>21</sup> Doravante, para distinguir o ambiente de produção de dados desta pesquisa dos demais grupos de estudos, usarei letra maiúscula nas iniciais.

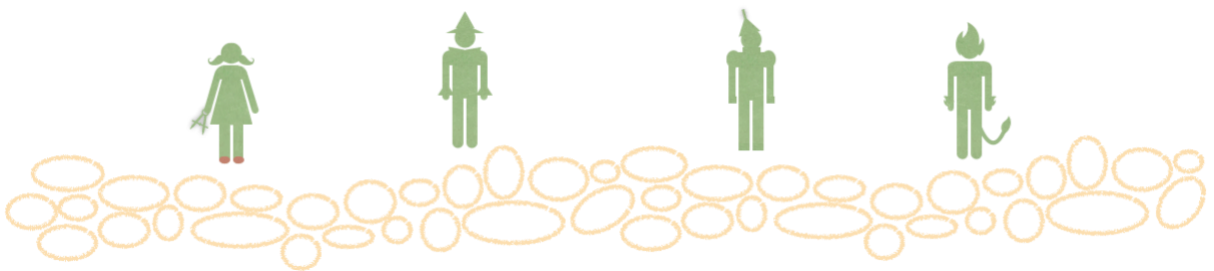
<sup>22</sup> A pergunta de pesquisa ainda não está expressa em sua completude. Ela será integralizada em sua expressão na Seção 3.

encontrar informações que interfiram no tipo de investigação indutiva que me proponho. Por esse motivo, minha pergunta será mais bem delineada após a produção de dados.

\*\*\*

## SEÇÃO 2

### RESÍDUOS DE UMA INVESTIGAÇÃO: A ESTRADA DE TIJOLOS CÔNICOS



*“Havia inúmeros caminhos nas proximidades,  
mas ela não demorou muito para encontrar a  
estrada calçada com tijolos amarelos”*

(Lyman Frank Baum)

## PRÓLOGO

\*\*\*

Decidi tratar este documento como algo mais pessoal, como um diário, por isso, abandonarei toda a “disciplina” e o rigor que eu tentei usar antes, mas não apagarei o que já foi escrito (pelo menos por enquanto), porque talvez seja útil.

Concluí que transcrever o que foi falado nos encontros é (muito chato? Sim!) trabalho do Bruno. Então, só vou relatar algumas memórias das reuniões (que talvez não tenham sido muito claras) e de coisas que pensei no dia a dia. Não sei como os outros membros do Grupo estão fazendo, mas é assim que me sinto à vontade de fazer.

Antes, trago alguns fatos que talvez influenciem em minha atuação no Grupo de Estudos. Sou aluno do curso de Licenciatura em Matemática da Unesp, campus Rio Claro, estou iniciando o terceiro ano do curso.

Sobre a Geometria, foi apenas quando cursei essa e a disciplina de Geometria Elementar no primeiro ano da faculdade que me interessei de verdade pela Geometria, pois na escola não foi algo que me marcou tanto, ela era ensinada dentro da disciplina de Matemática pelo mesmo professor. No terceiro ano do ensino médio, estudei Geometria Analítica, me lembro das equações da reta e do plano, algo do gênero, mas que é diferente da outra Geometria, na qual recordo ter estudado algumas noções de figuras planas e sólidos, no entanto nunca tinha estudado desenho até antes da disciplina da graduação.

No semestre passado, cursei a disciplina de Desenho Geométrico e Geometria Descritiva, na qual o Bruno foi estagiário docente, um tipo de auxiliar do professor ou, como os alunos costumavam chamar, de “Pokémon do professor”. A disciplina trouxe para mim uma certa praticidade para a Geometria, algo um pouco além, como associar as figuras geométricas às técnicas, principalmente na Pesquisa Orientada (um dos trabalhos da disciplina), quando pude ver as técnicas em “ação” ao investigar a Geometria que está por trás de determinadas logomarcas, trazendo significado ao meu aprendizado. Esta experiência também contribuiu para o desenvolvimento do meu raciocínio lógico e pensamento crítico, por exercitar meu cérebro ao ver a logomarca e ter que pensar ao contrário para imaginar uma maneira para que ela pudesse ser desenhada.

Quanto ao Grupo de Estudos, entrei com a intenção de ajudar a pesquisa do Bruno e de estudar algo interessante fora do horário das aulas da graduação.

\*\*\*



\*\*\*

Hoje tive vontade de começar a escrever sobre as minhas expectativas das reuniões do Grupo de Estudos e, posteriormente, pretendo escrever sobre as experiências vivenciadas nesse Grupo como um relatório. Quem sabe essa prática pode me ajudar a escrever o trabalho da Iniciação Científica (IC).

Fiquei muito empolgado quando o Bruno me convidou para participar desse grupo e falou da ideia de investigação geométrica, era exatamente o que eu queria fazer na IC. Sempre quis pesquisar alguma coisa envolvendo Geometria, pois gosto muito dessa área, talvez influenciado pelos meus professores de Matemática do ensino médio, que sempre que possível, relacionavam a Geometria com outro conteúdo ou com algo do cotidiano. Ao contrário, foi uma decepção quando estudei Geometria Analítica nesse nível de ensino. O professor tentou introduzir os conceitos, mas não funcionou, a sala não tinha interesse. Ainda sobre minha pesquisa de IC, gostaria de fazer algo diferente do que simplesmente demonstrar teoremas, não que isso não seja importante, mas eu queria explorar mais do que demonstrar.

Tenho curso técnico em Mecânica, o que me torna mais habituado com o desenho técnico, projeções e alguns modos de representar os objetos. Atualmente, estou no segundo ano do curso de Matemática, mas já sei que quero fazer licenciatura (pois essa escolha deve ser realizada até o final do segundo ano). Por conta disso, acredito que o grupo também pode contribuir para a minha formação docente.

Sugeri ao Bruno convidar outras pessoas para participar do grupo, para melhorar a discussão. Ele disse que já tinha pensado nisso e que iria chamar o Bonner e a Feithi do terceiro ano. Eu pensei em chamar o Bêlo da minha sala, acho que cinco pessoas é o suficiente.

Este texto está mais com cara de um diário do que de um relatório, mas não importa, já que eu quero fazer algo diferente, por que não fazer diferente também na escrita? Assim, não fico tão preso e consigo me expressar livremente.

\*\*\*

Querido diário... mentira, nunca escrevi essa frase antes no meu diário, mas hoje comecei para fazer graça. No final do semestre passado, quando fizemos a disciplina de Desenho, o Bruno estava como Pokémon da Prof.<sup>a</sup> Míriam e nos oferecemos, caso ele precisasse de ajuda na pesquisa. Hoje o Bruno convidou o Bonner e eu para fazermos parte de um Grupo de Estudos sobre curvas cônicas, acho que vai ser legal.

Meu interesse pela Geometria vem desde a escola, tenho até hoje guardados uns polígonos... poliedros... não lembro bem o nome, que fiz na 5.<sup>a</sup> série do fundamental. Já na 7.<sup>a</sup>

e 8.<sup>a</sup> séries, tive aulas de Desenho Geométrico dentro da disciplina de Matemática, eram cinco aulas e uma delas era de Desenho. Essa base me ajudou muito quando cursei Geometria Elementar na faculdade e, conseqüentemente, DGGD (Desenho Geométrico e Geometria Descritiva).

Se a experiência no Grupo de Estudos for igual ou melhor do que a do trabalho da Pesquisa Orientada na disciplina de DGGD, vai ser maravilhoso, adoro coisas práticas e aplicáveis. E é claro que eu, como uma boa aluna do terceiro ano de Licenciatura em Matemática, não poderia deixar de escrever, no meu diário, as minhas compreensões, dúvidas, etc. sobre os encontros.

\*\*\*

Não sou muito de escrever, tenho mais intimidade com números, mas as letras, só quando fazem parte de uma equação, acho que por isso optei pelo Bacharelado em Matemática. Em contrapartida, estou aqui escrevendo, me permitindo, assim como aceitei o convite que o Melão me fez para participar de um Grupo de Estudos sobre curvas cônicas. Achei interessante, eu sou muito ruim em Geometria, tenho muita dificuldade, não que eu não goste, pelo contrário, até gosto, só não entendo. Quem sabe não é uma oportunidade de aprender, assim como esta não é também uma oportunidade de escrever mais?

\*\*\*

Em meio a essas primeiras linhas, me ponho pensativo sobre o que virá a emergir desse Grupo de Estudos. Me sinto tão ansioso quanto os meninos, pois também eu tenho dúvidas e curiosidades sobre o tema. Até cheguei a pensar em não me considerar como sujeito da pesquisa, mas se bem me conheço, seria impossível não estar imerso na investigação. Posso até imaginar possíveis caminhos, mas o ser humano é imprevisível. Já conheço alguns dos participantes e, assim como outros alunos que já tive, eles me afastam da minha linha de raciocínio, me conduzindo para outros lugares; por consequência, minha visão é ampliada. Deixo a condição de apenas pesquisador produzindo uma tese, ou mesmo de professor, e me deparo com o *eu investigador* que também quer aprender, que chega em casa, se debruça sobre os livros e o computador, criando relações e querendo compartilhar com o Grupo. Acabo investigando tanto os constructos teóricos que possam me auxiliar na tese como o conteúdo em si, o qual me encanta dentre os conteúdos da Geometria pela possibilidade de diversos olhares e de relações matemáticas.

Este movimento de também ser sujeito da pesquisa está sendo para mim de suma importância, pois me colocando também como investigador, posso inquirir sobre os

questionamentos dos outros participantes, gerando novas questões, levando-as ao grupo. Vejo-me, muitas vezes, pensando nas possíveis indagações, mas não tenho certeza se vão ocorrer ou de que modo ocorrerão. Considero que pode emergir algo referente às equações das curvas cônicas em decorrência de os meninos terem estudado Geometria Analítica na graduação, o que faz da situação uma ótima oportunidade para aprender esse conteúdo, visto que, em minha graduação, não experienciei disciplinas com essa abordagem analítica da Geometria. De qualquer modo, acredito que todos têm a acrescentar, eu com minha experiência na Geometria Gráfica e eles, na Analítica. O mais interessante será fazer a articulação entre essas diferentes abordagens.

Bem que eu gostaria de estar na cabeça de cada um deles e saber o que se passa. Saber exatamente nunca saberei, mas espero que, pelas reuniões do Grupo de Estudos, dos diários pessoais e do grupo do WhatsApp, possa observar que compreensões sobre as cônicas brotam dessas discussões.

Destaco, também, que, em minha pesquisa, o foco não está em quem disse, mas sim no que foi dito, que conexões foram produzidas, desconstruídas e reconstruídas, de modo a fazer sentido para esse grupo.

\*\*\*

## **O PONTO DE PARTIDA: O(S) CONE(S), AS SUPERFÍCIES E SUAS LEIS DE GERAÇÃO**

\*\*\*

Tudo começou com uma simples pergunta que o Bruno fez no grupo do WhatsApp uma semana antes da nossa primeira reunião: *O que vocês entendem por curvas cônicas e o que vocês sabem sobre elas?* Eu estava muito ansioso para começar as reuniões do Grupo de Estudos, para saber o que poderíamos descobrir e que atividades o Bruno levaria para a gente.

Quão surpreso fiquei ao perceber que não necessariamente existiam conceitos pré-estabelecidos aos quais o Bruno gostaria que a gente chegasse, mas que iríamos elaborar questões para investigar a partir das nossas discussões e chegar às nossas próprias conclusões. Então vamos à questão de partida.

Bem, óbvio que a palavra “cônicas” está relacionada com cones, e eu sei que curvas cônicas têm esse nome por representarem diferentes cortes num par de cones com o vértice em comum. Mas, como assim, “cortes”? Primeiro, você imagina os dois cones alinhados pelo

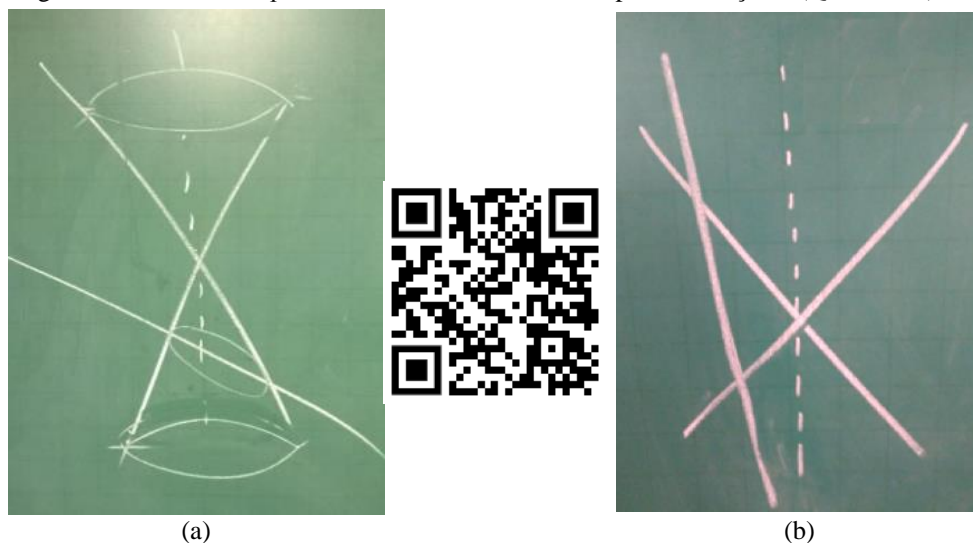
‘bico’, daí imagina diferentes possibilidades de um plano interceptar esse par de cones que imaginou (interceptar igual a cortar). A intercessão do plano com o cone, retratada nesse plano, é uma curva, uma curva cônica.

\*\*\*

Nossa! Não entendi muita coisa do que o Bonner falou sobre as curvas cônicas lá no grupo do WhatsApp. A única coisa do que eu me lembro sobre o assunto foi visto na disciplina de História da Matemática quando assistimos ao filme *Ágora*, que conta a história de uma matemática grega, Hipátia. No filme, ela pegava um cone e ia tirando as partes... era muito legal. Só consegui associar que as curvas cônicas vinham do cone, mas não entendi quando o Bonner explicou sobre as seções.

Quando ele reexplicou na reunião, não entendi por que tinham que ser dois cones. Ele foi ao quadro e fez um desenho representando os dois cones e um plano cortando (Figura 16a), e começou a explicar que, quando o plano for paralelo à base do cone, a interseção vai ser uma circunferência; quando tocar em alguma coisa, que eu não me lembro, vai ser uma reta. Tudo bem, eu até estava acompanhando a fala dele, mas ainda não entendia os dois cones. Interrompi a explicação e perguntei: “Mas você disse que eram dois cones por quê?” Ele disse: “Para fazer a hipérbole; se fosse só um cone, não ia ter as duas partes da hipérbole”. Ele fez um outro desenho mais simples dos dois cones e uma reta, que representou o plano cortando os cones (Figura 16b). Aí, sim, fizeram sentido os dois.

Figura 16 – Desenho expressando os “dois cones” e um plano de seção e (QR-Code<sup>23</sup>).



Fonte: Dos dados.

<sup>23</sup> Ative as caixas do plano de seção, da seção cônica e do eixo. Mova o controle deslizante  $p$  para observar quando o plano de seção corta um ou dois ramos da superfície cônica.

Em seguida à explicação do Bonner, o Bruno veio dizer que não eram dois cones a serem cortados, e sim um só. Só pensei: como assim? Então os dois cones são um só? Em vez de ele explicar, começou a perguntar.

\*\*\*

Definitivamente, eu não estava entendendo nada do que explicaram nas conversas no WhatsApp, até acompanhei algumas coisas nos encontros do Grupo de Estudos, como, por exemplo, quando o Bonner explicou o corte nos dois cones; mesmo não assimilando muito bem, estava fazendo sentido. Mas sempre que acho que estou entendendo, vem o Bruno e faz uma pergunta que desconstrói o que eu pensava.

Após a explicação do Bonner, o Bruno perguntou: “O que é um cone? O que é seccionado é o cone?” Tudo bem, não é, apenas a casca é cortada. Mas ele continuou: “Se cortarmos o cone que o Bonner citou, a seção é uma curva cônica?” Na minha cabeça, a resposta era óbvia, claro que sim. Ele fez um desenho no papel (Figura 17) e perguntou se o segmento de reta na base do cone fazia parte da curva cônica. Caramba, claro que não. Espera aí, então como vai ser esse cone que gera as curvas cônicas?

O Melão disse que, se girarmos duas retas concorrentes, podemos gerar a superfície<sup>24</sup>. Então o Bruno perguntou se a reta tinha limite, prontamente dissemos que não, e ele questionou como é a superfície gerada por essas duas retas. Só aí nos demos conta de que a superfície também é infinita, ou seja, não são dois cones, e sim duas partes, ou ramos, como Bruno chamou, de uma mesma superfície cônica. Logo em seguida, mais uma vez para acabar com a alegria, o Bruno pergunta: “E qual a diferença entre cone, superfície de um cone e superfície cônica?” Eu achava que superfície de um cone era a ‘casca’ e a superfície cônica era tudo. O Melão fez um desenho (Figura 18) para explicar o que ele achava.

Para o Melão, a superfície cônica era infinita, e o cone não. Mas, como sempre, o Bonner tem que discordar do Melão (ou vice-versa), ele disse que a superfície de um cone é a coisa oca e o cone é o sólido maciço, como a diferença entre a caixa e um cubo.

Quando esses dois começam a filosofar, o céu é o limite.

---

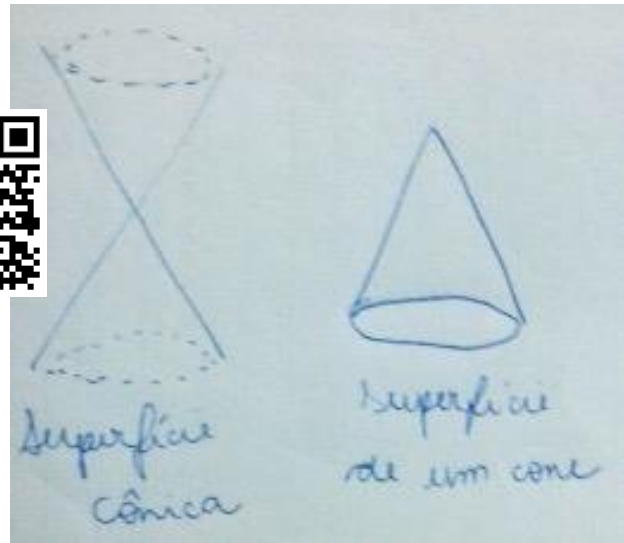
<sup>24</sup> As retas citadas referem-se a duas geratrizes coplanares ao eixo da superfície cônica que giram em torno desse eixo apoiadas em uma diretriz circular. Para fins matemáticos, uma geratriz seria suficiente para gerar a superfície, contudo a afirmação do sujeito não invalida o resultado desejado, porém ela omite outros elementos (eixo e diretriz).

Figura 17 – Desenho de um cone e de uma seção (e QR-Code).



Fonte: Dos dados.

Figura 18 – Desenho de uma superfície cônica e de uma superfície de um cone (e QR-Code).



Fonte: Dos dados.

\*\*\*

Para mim, entendo o cone como uma superfície cônica limitada, mas o Bonner entende a superfície cônica como algo que tem forma de um cone, ou seja, na minha visão, o cone é derivado da superfície cônica, já o Bonner considera o contrário. Eis uma indagação: Quem veio primeiro, o ovo ou a galinha? O cone ou a superfície cônica?

Mas se pensarmos com calma, é um caso de *se somente se*, ou seja, um implica o outro. Um cone pode gerar uma superfície cônica se tirarmos a base e prolongarmos; já no caso contrário, se quisermos criar um cone a partir de uma superfície cônica, que é ilimitada, basta colocarmos um limite.

Podemos dizer, então, que o cone é o sólido maciço (o volume); a superfície de um cone é a parte redonda (correspondendo à superfície cônica limitada) mais a parte plana (a circunferência); e a superfície cônica é a superfície ilimitada. Desse modo, toda superfície de algo é ilimitada.

Se bem que, como o Bruno comentou, tanto a esfera como a superfície de uma esfera, assim como a superfície esférica<sup>25</sup> são limitadas. Então, não necessariamente um objeto é limitado, nem uma superfície ‘objética’ é infinita. Por exemplo, podemos pensar em um cone infinito (não me refiro apenas à casca, mas incluindo a parte interna). Já em um cilindro, por

---

<sup>25</sup> No caso, a superfície esférica corresponde à mesma superfície de uma esfera, pois o sólido é composto pelo mesmo tipo de superfície, diferente de um cone, por exemplo, que é composto por dois tipos de superfície, uma plana e outra cônica.

exemplo, a sua superfície é limitada, porém composta por dois tipos de superfícies: uma cilíndrica e outra plana.

Toda essa discussão me fez lembrar do que o Bruno falou sobre a geração de uma superfície, que possui elementos geradores e elementos diretores: os diretores são elementos fixos que dirigem os elementos geradores a partir de uma lei de geração. Então vou pensar quais são os elementos que geram uma superfície cilíndrica. Hum... o eixo do cilindro pode ser a diretriz<sup>26</sup>, e a geratriz pode ser uma reta paralela ao eixo que se move mantendo a mesma distância do eixo. De outro modo, a superfície cilíndrica pode ser vista como um conjunto de pontos equidistantes a uma reta no espaço.

E um plano? Qual é a sua lei de geração? Posso dizer que o elemento diretor é um ponto e a geratriz é uma reta que passa por esse ponto? Não, a reta vai girar em todas as direções, dessa maneira vai gerar o espaço tridimensional (R3). Tenho que pensar em um modo de limitar essa reta para girar apenas no espaço bidimensional (R2).

Nas aulas de Geometria Elementar, eu ouvi que um plano pode ser definido por três pontos não colineares. Se eu tomar uma reta definida por dois pontos e um terceiro ponto não colinear como elementos diretores, e uma outra reta geratriz que passa pelo ponto e por todos os pontos da reta diretriz, eu tenho o plano. Sensacional!

Mas espera um pouco, eu estava tentando visualizar aqui, e o problema é que parece que vai ficar um ‘buraco’ no plano que estou gerando. Faltam os pontos da reta paralela à reta diretriz que passa no ponto. Já sei até como provar por absurdo que não forma um plano.

Chamemos a reta fixa de  $d$ , a reta geratriz de  $g$  que passa por um ponto  $P$ , que não pertence a  $d$ . Supondo que há uma lei de geração do plano com esses elementos e ela funciona, todos os pontos de uma reta  $r$  paralela a  $d$  que passe por  $P$  vão ser pontos desse plano. Isso significa que todos os pontos de  $r$  são pontos de alguma posição da reta  $g$  (assim como todos os outros pontos do plano). O ponto  $P$  sempre é ponto de  $g$ , do mesmo modo que existe um ponto  $X$  que está em  $d$  e  $g$  ao mesmo tempo. Tomemos agora um ponto  $K$  de  $r$  diferente de  $P$ . Desse modo,  $K$  está em  $g$  porque ele é gerado pelo método, ou seja, se  $P$ ,  $X$  e  $K$  pertencem a  $g$ , então eles são colineares, mas, ao mesmo tempo,  $K$  e  $P$  estão em uma reta e  $K$  e  $X$  estão em outra, o que é um absurdo.

---

<sup>26</sup> Nesta situação, o significado atribuído para diretriz é o de elemento fixo, o qual difere do significado utilizado na Matemática, que é a linha constantemente interceptada pela reta móvel que gera superfície. Doravante, para não haver confusão com a linguagem matemática, o termo ‘diretriz’ será substituído por ‘elemento fixo’ ou ‘eixo’ (quando se referir, especificamente, ao elemento fixo da superfície cônica).

Pode parecer confuso, mas vou mostrar essa prova no grupo do WhatsApp para discutir com o pessoal.

\*\*\*

Ao questionar os garotos sobre o que sabiam acerca das curvas cônicas, esperava que trouxessem inicialmente relações com a Geometria Analítica. Qual foi minha surpresa ao me deparar com a abordagem sintética descrita por William, na qual a ideia de cone remete à primeira explanação das cônicas, até então conhecida pelo matemático grego Menecmo (380 - 320 a.C.) por volta de 360 ou 350 a.C., ao tratar da seção de um cone para obter três curvas. Apenas com Apolônio (262 - 190 a.C.) é que a superfície seccionada é abordada sob a ótica de uma superfície gerada por uma reta (geratriz) apoiada em outra reta (eixo) girando em torno desta e mantendo o mesmo ângulo. Essa discussão abriu espaço para aprofundarmos o conceito de superfície cônica e de como elas são geradas.

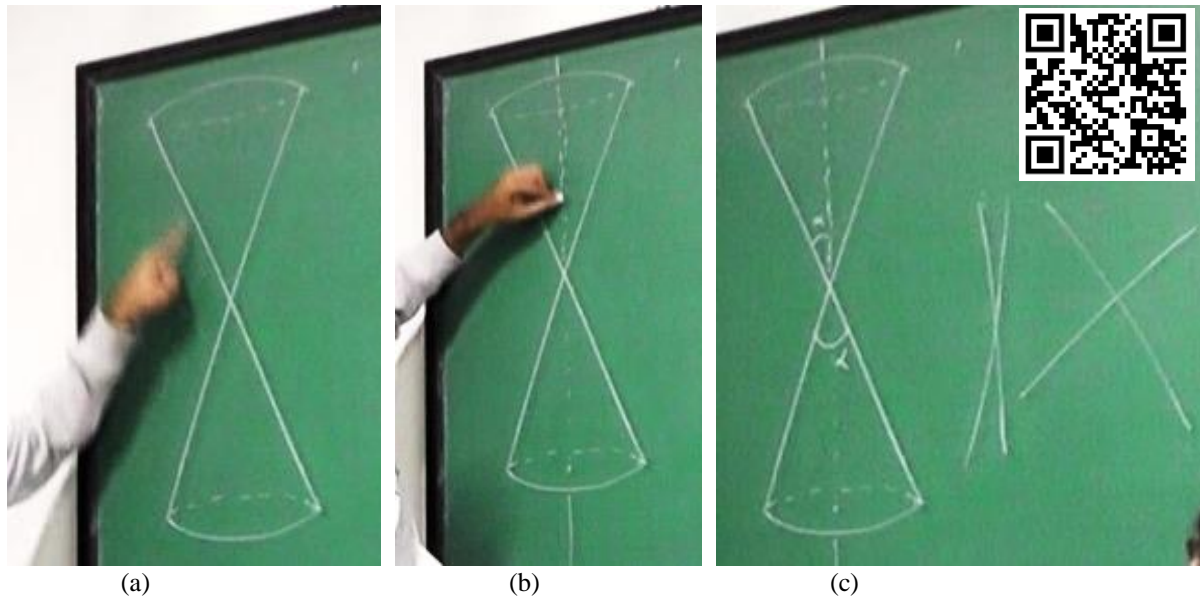
Após toda a discussão de como gerar uma superfície cônica de revolução, questionei os meninos sobre as possíveis variáveis no engendramento dessa superfície. Em retorno, William disse que pensou em duas retas concorrentes para construir um cone que passa por elas; não era o que eu tinha em mente, mas segui seu raciocínio. Apesar de a fala não delimitar claramente os elementos, ele fez um desenho no quadro e complementou: “Eu teria essas duas retas geratrizes [...] e todas essas retas em volta são geratrizes” (Figura 19a), referindo-se a duas retas concorrentes como geratrizes, “o elemento fixo seria o que passa por dentro do cone” (Figura 19b), “o que varia é se o cone é gordinho ou magrinho, daí ele pode ser magrinho assim ou gordinho assim” (Figura 19c), “o ângulo que pode estar variando entre as geratrizes, ou esse outro entre a geratriz e o eixo”.

Não foi percebido por William que seria necessária apenas uma reta geratriz e, caso se mantivessem as duas geratrizes, o elemento fixo deveria ser a bissetriz entre as retas. Não interrompi, na esperança de alguém comentar, o que foi feito por Guilherme, mesmo não sendo o comentário que eu esperava. Ele disse: “O ângulo entre duas geratrizes quaisquer não é sempre o mesmo; já se você pega o ângulo entre o eixo e a geratriz, ele é padrão. Você vai ter um padrão de que todas as geratrizes formam o mesmo ângulo com o eixo. Mas, se eu pego duas geratrizes de um cone que estão uma do lado da outra, elas podem não formar o mesmo ângulo. Então acho que faz mais sentido se pegarmos o ângulo entre a geratriz e o eixo”. Sabrina



complementou, indicando que as geratrizes devem ser “opostas”<sup>27</sup> para que o ângulo entre elas seja o mesmo.

Figura 19 – Geratrizes da superfície cônica (a), eixo da superfície (b) e ângulos e variação da superfície (c) (e QR-Code)<sup>28</sup>.



Fonte: Dos dados.

Neste ponto, todos concordaram que tanto o ângulo das geratrizes opostas como o ângulo entre a geratriz e o eixo poderiam ser considerados variáveis; contudo, um dependia do outro. Desse modo, caso o primeiro fosse escolhido como variável independente, o outro seria automaticamente determinado como variável dependente, ou vice-versa.

Em seguida, William apontou que o ângulo entre a geratriz e o eixo não poderia ser  $0^\circ$  nem  $90^\circ$ ; caso contrário, não seria uma superfície cônica. Os meninos tentaram entender o porquê dessa condição, e à medida que analisaram, cada um complementou a resposta do outro, indicando que, quando o valor é igual a  $0^\circ$ , a forma gerada coincide com o eixo e, quando for  $90^\circ$ , a forma gerada é um plano.

Adotamos, como ângulo entre a geratriz e eixo, a nomenclatura  $g^\circ$ , onde

$$0^\circ < g^\circ < 90^\circ.$$

Concluída a análise, questionei se há outros modos de se gerar uma superfície cônica. Rafael propôs girar a reta geratriz em torno da reta fixa, porém esse giro não poderia ser aleatório. Após simular possíveis movimentos da geratriz em torno do eixo com auxílio de duas

<sup>27</sup> O termo “ser opostas”, na fala do sujeito, pode ser entendido como duas geratrizes coplanares ao eixo.

<sup>28</sup> Ao acessar o *link*, ative a caixa de seleção de eixo da superfície cônica e mova o controle deslizante  $g^\circ$ .

canetas, Sabrina inferiu que a geratriz deveria se mover concorrente ao eixo com um ângulo fixo.

Percebendo que a única superfície cônica que eles comentaram foi a de diretriz circular, apresentei um conceito mais geral: A superfície cônica é gerada por uma reta móvel (geratriz), que mantém um ponto fixo (vértice) e desliza se apoiando numa curva plana (a diretriz), porém não contida no mesmo plano desta. Os meninos estranharam inicialmente, por sempre imaginarem uma superfície cônica como circular; entretanto, ao discutirmos alguns exemplos, imaginando uma diretriz em “forma de S” e um ponto fora do seu plano, eles disseram que nunca tinham pensado numa superfície cônica dessa maneira, mas concordaram com o conceito, inclusive que essa linha poderia não estar contida em um plano.

Ao ser questionado sobre outras maneiras de gerar uma superfície cônica, Guilherme me respondeu que poderíamos tomar a circunferência como elemento diretor, e Rafael complementou que a reta geratriz percorreria toda a circunferência. Apesar de o raciocínio ser coerente, Guilherme deu outra sugestão: “A gente podia tomar por referência dois círculos diretores e um ponto, porque se a gente pega só dois círculos, ele pode formar um cilindro, entendeu”? E Sabrina inferiu: “Eu passaria uma reta que liga os dois centros, daí eu teria o eixo”. O problema gerado, nesta situação, foi a confusão entre elementos geradores e diretores, no nosso caso, estávamos chamando de elementos dependentes e independentes. Os meninos estavam com dificuldade de eleger elementos fixos mínimos, ou seja, que não inviabilizassem a lei de geração.

Interferi questionando se a reta que liga os centros é dependente ou independente das circunferências e do ponto, ou seja, se variássemos a posição das circunferências, a reta mudaria de posição. Ao receber a resposta de que a posição mudaria e de que ela seria dependente, enfatizei que a reta não seria o elemento fixo se partíssemos das duas circunferências e do ponto.

Continuei indagando se seriam necessários os três elementos fixos citados para gerar a superfície. Até o momento, não tinha sido feito nenhum outro desenho que auxiliasse a visualização, como também nenhuma outra manipulação de materiais concretos. Ao desenhar no quadro duas circunferências e um ponto, propositalmente deslocado da posição que poderia ser o vértice da superfície (Figura 20), os meninos perceberam que os três elementos não poderiam ser diretores, visto que uma reta geratriz não poderia estar apoiada, ao mesmo tempo, nos três elementos. Tal associação ocorreu por conta de os meninos imaginarem intuitivamente os supostos elementos diretores em posições que se adequavam à solução esperada, ou seja, em posições particulares, não atendendo a situações genéricas.

Figura 20 – Desenho de circunferências e ponto (e QR-Code).



Fonte: Dos dados.

Apesar de ter afirmado que é possível gerar uma superfície tendo por elementos fixos uma circunferência e um ponto, Guilherme sugeriu duas circunferências como tais elementos; todavia, mais uma vez, indicou que estivessem em lugares específicos. Novamente percebi os meninos mencionando frases que não traduziam o que realmente queriam dizer, apesar de serem compreendidos pelos outros participantes na maioria das vezes. Por exemplo: quando Guilherme disse: “As circunferências têm que ser concêntricas”, ao ser questionado sobre o significado de concêntrico e responder corretamente, imediatamente se deu conta de que sua frase não fazia sentido, mesmo o seu raciocínio estando correto. Poderíamos traduzir sua frase para: “Os centros deveriam estar alinhados perpendicularmente aos planos das circunferências e estes planos deveriam ser paralelos” (Figura 21).

Figura 21 – Desenho de duas circunferências paralelas, cujos centros pertencem a uma reta perpendicular aos planos que as contêm.

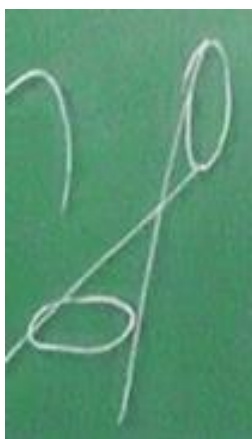


Fonte: Dos dados.

Insisti em perguntar se era possível gerar uma superfície cônica tendo por elementos diretores duas circunferências. Ao tentar esboçar a superfície (Figura 22), tracei tangentes à perspectiva das circunferências para visualizar as geratrizes de contorno do cone. Contudo, por tenderem a enxergar uma superfície cônica, não foi possível observar outras posições para as geratrizes. Para visualizar essas possibilidades, moldei a situação em um programa computacional de modelagem (SketchUp<sup>29</sup>), desenhando as duas circunferências em planos não paralelos e traçando segmentos de retas entre pontos das circunferências opostas (Figura 23 à esquerda). Entretanto, ainda não conseguíamos visualizar a superfície como um todo, visto que, no programa, era necessário desenhar cada segmento por vez e, para estendê-lo (simulando uma reta), era preciso copiar cada segmento. Pelo desenho, identificamos a superfície como um tronco de cone, diferentemente de como foi percebida anteriormente (uma superfície cônica com os dois ramos). Além disso, as geratrizes também passavam pela parte interna do objeto.

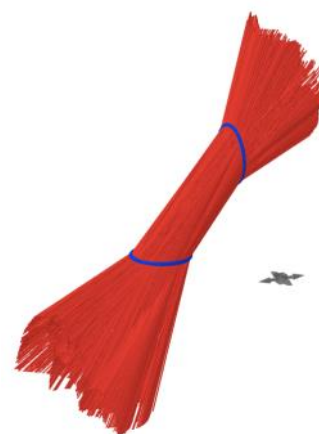
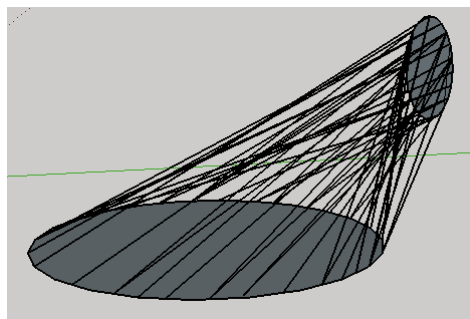
No intuito de analisar outras características dessa superfície que não estavam se mostrando a nós naquele momento, fiz outro modelo no Geogebra. A escolha do Geogebra se deu por conta de o programa simular retas (não apenas segmentos) e da praticidade de visualizar várias geratrizes a partir do rastro de uma única geratriz (Figura 23 à direita). Nesse modelo, percebemos que não se tratava de uma superfície cônica, visto que os esboços no quadro eram, para aquela discussão, insuficientes para analisar a questão. Não sabíamos que superfície era aquela, mas o que consideramos importante para o momento foi identificar que não se tratava de uma superfície cônica.

Figura 22 – Desenho a giz de um “pseudocone” gerado por duas circunferências.



Fonte: Dos dados.

Figura 23 – Modelagem computacional de superfície gerada por duas circunferências (SketchUp à esquerda, Geogebra à direita).



Fonte: Dos dados.

<sup>29</sup> Disponível em <https://www.sketchup.com/pt-BR>.

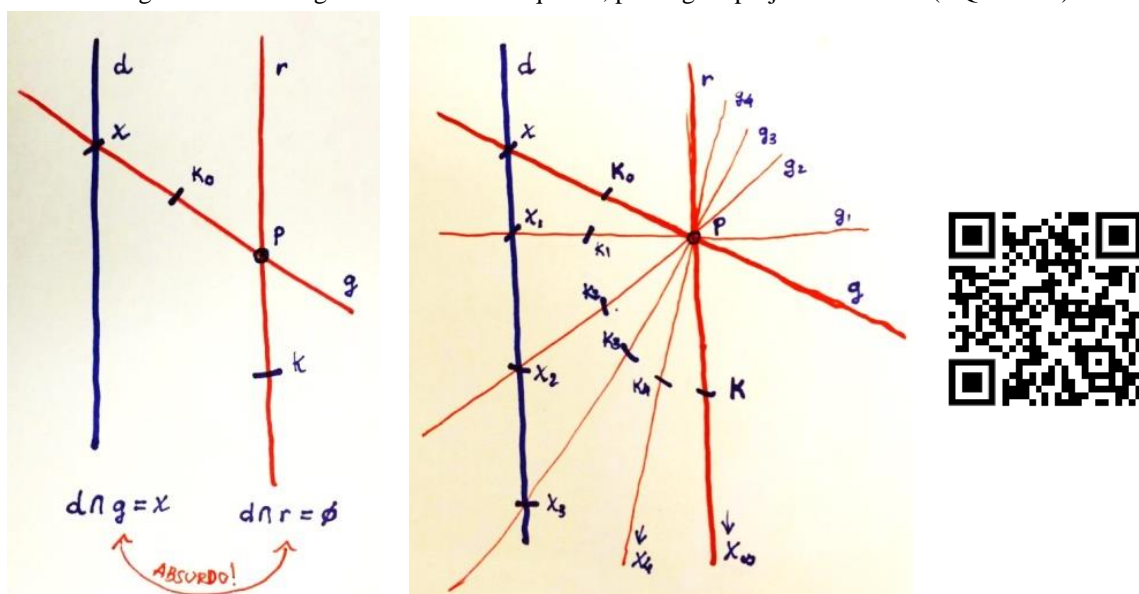
Esta discussão sobre a geração de uma superfície rendeu frutos para além da reunião. Foi possível continuá-la no grupo do WhatsApp, no qual conversamos sobre a lei de geração de algumas superfícies. Dentre elas, a que me chamou atenção foi a geração do plano, pois além de discutirmos uma contraprova por absurdo, buscamos formalizar que tal lei não atendia ao paradigma euclidiano, sendo cabível apresentar outro paradigma que permitisse estabelecer generalizações à situação.

Para compreender a explicação no grupo do WhatsApp sobre contraprova por absurdo, precisei esboçar a situação no papel; na verdade, além do papel, mandaram áudio, explicaram uma, duas, três vezes até conseguirmos nos entender. A minha compreensão do que foi explicado foi a seguinte: supondo que um plano pode ser gerado por uma reta  $g$  que passa por um ponto  $X$  de uma reta  $d$  e por um ponto  $P$  (não contido em  $d$ ), então, um ponto  $K$  qualquer de  $g$  (distinto de  $P$  e  $X$ ) está alinhado com  $P$  e  $X$ , porém, quando  $g$  está paralela à  $d$  (reta  $r$ ), não há interseção entre  $g$  e  $d$ , o que é um absurdo (Figura 24 à esquerda)!

Isso significa que essa lei de geração não gera um plano (euclidiano). O mais interessante é que, com essa discussão, pude introduzir alguns aspectos da Geometria Projetiva, como o princípio da continuidade que, aplicado a este caso, compreende que duas retas paralelas se encontram em um ponto infinitamente afastado, chamado de ponto impróprio.

Esta ideia permite que situações da Geometria Euclidiana sejam ampliadas, evitando situações particulares e permitindo generalizações. Neste sentido, as retas  $d$  e  $r$  se encontram em um ponto  $X$  infinitamente afastado (Figura 24 à direita), validando a lei de geração, exposta a partir da Geometria Projetiva.

Figura 24 – Paradigma Euclidiano à esquerda, paradigma projetivo à direita (e QR-Code).



Fonte: Do autor.

Retomando a questão da lei de geração de um plano sob o paradigma euclidiano, esta foi descrita como a rotação de uma reta (geratriz) perpendicular à outra reta (elemento fixo)<sup>30</sup>. Tal situação foi associada à explicação da geração de uma superfície cônica em que o ângulo entre a geratriz e o elemento fixo não pode ser igual a  $90^\circ$ , justamente por gerar um plano.

A partir dessa discussão, perguntei qual a diferença entre a superfície cônica e a cilíndrica. William respondeu que nenhuma, projetivamente, pois nos dois casos, as geratrizes convergem para um ponto, mas no caso do cilindro, o ponto (vértice) é impróprio, ou seja, é um caso particular da superfície cônica. Ficamos nós dois empolgados: ele por “derrubar o véu” da Geometria Euclidiana e se permitir ver além, e eu por ver como ele compreendeu e aplicou rápido o princípio.

Essa experiência com o Grupo de Estudos tem sido realmente gratificante para mim, pois aos poucos os meninos que ainda estavam acostumados à posição de alunos começam a se colocar em outro lugar. Do mesmo modo, me vi muitas vezes agindo como professor, tentando ensinar quando percebia que algo que eles falavam poderia ser uma deixa para introduzir um conceito e algumas vezes adentrávamos em outras discussões que se mostraram tão interessantes quanto o nosso foco principal. Aos poucos, também fui deixando de prevalecer a postura de professor que disfarça os seus não saberes e passei a mostrar as minhas dúvidas, minhas ideias inacabadas. Ou seja, estamos nos permitindo assumir outros papéis que não os habituais de uma sala de aula tradicional.

O discurso despreocupado, seja na escrita, na fala, ou nos desenhos no quadro, nem sempre eram suficientes para visualizar a situação, levando alguns dos garotos a considerarem conjecturas como verdades, sem validá-las. Neste sentido, procurei estar atento a essas situações e questioná-los sobre tais inferências, bem como trazer modelos que contribuíssem na visualização. Além disso, houve algumas frases que não apresentaram nexos, porém atreladas ao contexto (com gestos e desenhos) se fizeram compreensíveis, ou mesmo expressaram fragilidades na compreensão de alguns conceitos. Entretanto, não considero essas ocorrências como negativas; pelo contrário, pois é na tentativa de se fazer claro para o outro que as noções podem ser reelaboradas e, assim, há produção de significado em desenvolvimento.

\*\*\*

---

<sup>30</sup> Nesta situação, não foi explicitado, ou percebido, que a reta perpendicular deve passar por um ponto fixo da reta; desse modo, os elementos fixos seriam uma reta ( $d$ ) e um ponto ( $P$ ) contido nessa reta, e o elemento gerador uma reta ( $g$ ) ortogonal a  $d$  passante por  $P$ .

## LINHAS, CURVAS E SEÇÕES

\*\*\*

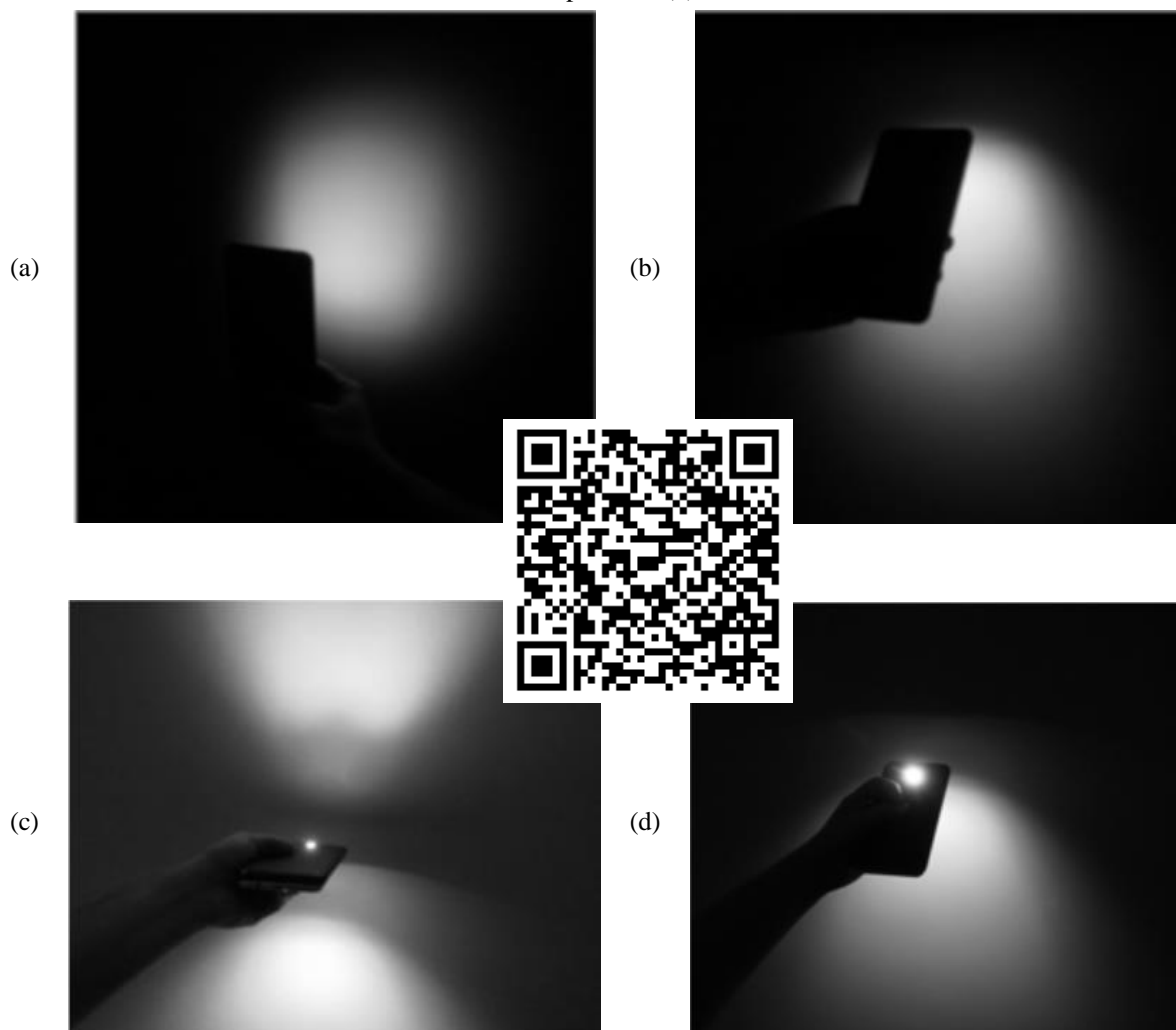
Olá, diário, só hoje tive tempo para escrever um pouco sobre o que aconteceu nas reuniões do Grupo de Estudos. Eu queria retomar a discussão que ocorreu antes de falarmos sobre a superfície cônica em si. Não sei por que esse tópico ficou na minha mente, mas uma maneira de tirá-lo é escrevendo.

Em um dos primeiros encontros, o Bonner tentou explicar como seccionar o cone de um jeito diferente. Primeiro, ele disse para não pensarmos, a princípio, na superfície cônica, e sim no plano  $\mathbb{R}^2$  como sendo a parede (como sempre, falando de álgebra, mas vamos lá). Depois disso, pediu que imaginássemos a superfície cônica se movendo em relação ao plano. Se já estava difícil imaginar o cone parado, avalie se movendo. Enquanto ele continuava com a viagem do cone infinito, o Bruno se levantou, pediu uma lanterna de celular e apagou a luz.

Todos ficaram sem entender até o momento em que o Bruno apontou a lanterna em direção à parede e perguntou que forma tinha o foco de luz. Gente, era uma circunferência, quer dizer, tudo bem que a luz da lanterna do celular não era assim tão circular, mas fez sentido. A superfície cônica era a luz que saía da lanterna (vértice) e a interseção da luz com a parede (plano) era a curva cônica, no caso a circunferência (Figura 25a). O Melão percebeu que o celular precisava estar paralelo à parede para formar essa curva, então pediu para deixar “menos paralelo”, ou seja, para não ficar paralelo, até porque, ou é paralelo, ou não é. De todo jeito, entendemos o que ele falou e visualizamos a elipse (Figura 25b).

Em seguida, o Melão pediu para deixar o celular perpendicular à parede. Ao visualizar, afirmou ser uma parábola; porém, o Bruno lembrou que o cone possui dois ramos, então, pegou outro celular, colocou um de tela pro outro com as lanternas em sentidos opostos e pediu para o Bonner mover os dois juntos. Nossa, quando os celulares estavam perpendiculares ao quadro, visualizamos uma hipérbole, pois cada feixe de luz que saía de um celular (ramos da superfície cônica) interceptava a parede em um ramo da hipérbole (Figura 25c). Ao mover os dois celulares, chegava a um ponto em que um dos ramos da hipérbole sumia. Agora, sim, todos concordaram que era uma parábola (Figura 25d). Ficamos muito empolgados, foi um arraso, o Rafa disse que ia usar um dia quando fosse dar aula, o Melão disse que, com certeza, utilizaria no trabalho de Geometria Elementar, foi uma loucura. Comentamos que seria melhor se a luz do celular fosse bem circular, mas conseguimos analisar, mesmo ela sendo meio quadrada.

Figura 25 – Foco de luz projetando na lousa formando uma circunferência (a), uma elipse (b), uma hipérbole (c) e uma parábola (d).



Fonte: Do autor.

\*\*\*

A ideia do Bruno, com os diários, era que toda semana a gente fizesse um resumo do que ficou da reunião, mas também temos a liberdade de colocar ideias que surgiram durante a semana. Como ele já percebeu, não estávamos usando muito o diário, inclusive uma das reuniões do Grupo de Estudos foi só para acordar algumas questões administrativas. Como ele mesmo disse, ele não quer impor, então estamos livres para usar o diário como quisermos e, caso consideremos que não está funcionando, podemos pensar em outra possibilidade. Eu não tenho escrito nele com frequência, mas tem algumas (poucas) vezes que me dá uma inspiração. Nesses dias, fico até de madrugada. Hoje é um deles.

Dando início ao pensamento e à construção de alguma discussão, conversamos sobre a existência das “cônicas”, o porquê desse nome e qual a relação com um ou mais cones (ou estruturas cônicas). Seções? Projeções? Depois da discussão sobre “de onde saem as curvas”,



tivemos uma demonstração prática com lanterna. Essa demonstração prática parte da ideia de iluminar (com a lanterna do celular, no caso) a parede, e verificar aquilo que é projetado nela. Foi tão interessante que, ao chegar em casa, fui mostrar para minha família. Eles não sabiam o que eram curvas cônicas, então usei o celular para mostrar cada uma delas. Acharam muito legal como um objeto do nosso cotidiano pode ajudar a explicar relações matemáticas.

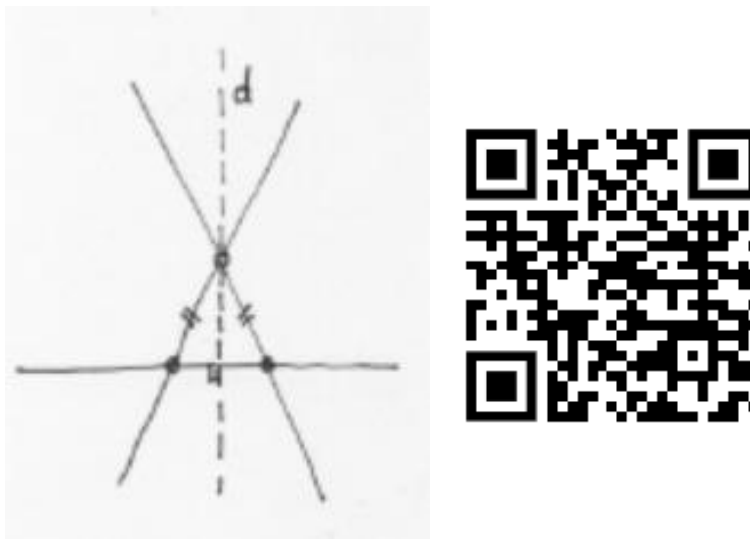
Voltando ao Grupo de Estudos, chegamos à conclusão de que, conforme mudávamos o ângulo do celular em relação ao plano de projeção, mudávamos a “cônica” projetada.

Na sequência ao experimento do Bruno com a lanterna, ele fez um desenho no quadro de duas retas concorrentes representando uma vista ortogonal do cone e uma reta cortando as duas anteriores para ilustrar o plano de seção também em vista. Ao terminar o desenho, perguntou qual era o limite para obter cada curva.

Iniciei comentando que o plano poderia estar paralelo, “mas paralelo a quê?”, perguntou o Bruno. O Bêlo disse que era paralelo ao solo. Não era ao solo que me referia, até porque não tem solo nesse modelo, apenas a superfície e o plano. Ao encontro do meu pensamento, o Bruno nos lembrou do experimento da lanterna e perguntou: “A parede (plano de seção) estava paralela a quem?”. Completando minha fala, respondi: “a uma das retas geratrizes”, tendo como resultado da seção uma parábola. O Bêlo complementou dizendo que o resultado era uma parábola porque o plano só interceptava uma das geratrizes (Figura 26). Pode parecer que a frase não tem coerência com o que estávamos falando, visto que, se o plano cortava a superfície cônica, então várias geratrizes seriam cortadas e não apenas uma, mas ele não estava se referindo a todas as geratrizes do cone, mas àquelas duas que estavam desenhadas no quadro. Desse modo, fez sentido dizer que, dentre aquelas geratrizes, apenas uma ia ser cortada quando o plano fosse paralelo à outra.

Dando continuidade, o Bruno voltou à sua série de perguntas e questionou se a parábola é uma curva aberta ou fechada. Meu primeiro pensamento foi imaginar: lógico que era aberta, até porque quando imaginei a seção, paralela a uma geratriz, o corte abre cada vez mais, ou seja, a linha do corte não fecha. Para fechar, o plano tinha que cruzar a outra geratriz (aquela a que o Bêlo se referiu), não podia estar paralelo, tendo por consequência a geração de uma elipse, que é uma curva fechada.

Figura 26 – Esboço de vista ortogonal da seção de um plano paralelo a uma das geratrizes do cone (e QR-Code).



Fonte: Do autor com base nos dados<sup>31</sup>.

Pensei também que, quando o plano corta as duas geratrizes, podia formar uma circunferência (outra curva fechada), ou seja, quando a reta intercepta a mesma distância do ponto para as geratrizes. Confusa esta última frase, não é? O Bruno também achou, ele comentou que entendeu o que eu disse, mas eu não disse o que pensei. Vou tentar explicar. Quando a reta, que representava o plano em vista ortogonal, interceptava as geratrizes em pontos equidistantes do ponto de interseção entre as geratrizes (vértice do cone), a seção seria uma circunferência. Para que essa distância seja a mesma, o plano deve estar perpendicular ao eixo do cone. Bem que eu poderia ter dito apenas essa última frase, mas o crédito dela foi do Bêlo, bem mais simples. Isso não invalida minha explicação, que também está correta e que mostra diferentes modos de chegar a um mesmo resultado.

Neste ponto, eu pensava que faltava apenas determinar o limite de mais uma curva: a hipérbole. No entanto, o Bonner disse que existiam várias outras curvas, dentre elas o ponto. Como assim, “o ponto”? Ponto não é uma curva, mas ele se referia às curvas cônicas como resultado de todas as interseções do plano com o cone. Indo por esse raciocínio, concordei a princípio. Ele explicou que o ponto pode ser determinado se movêssemos o plano que determinava a circunferência até passar pelo vértice do cone. Porém, o ponto também podia ser determinado por um plano que passa pelo vértice, mas que não era ortogonal ao eixo, tinha que passar pela região externa ao cone, isso foi apontado pelo Bonner. E quando a seção passava na região interna, a seção era uma hipérbole (dessa vez, fui eu que falei, ponto para mim).

---

<sup>31</sup> A reprodução do desenho buscou seguir o mesmo padrão adotado pelo sujeito.

Para imaginarmos melhor a situação, o Bruno sugeriu que pensássemos em uma casquinha de sorvete sendo cortada pelo vértice e perguntou qual seria a seção. A Feithi disse que era uma parábola, depois se corrigiu e disse que era um triângulo, entretanto só quando o Bonner disse que era um  $V$ , é que todos concordaram. Realmente, não era a hipérbole, pois para ter esse resultado, não poderia passar pelo vértice, tampouco um triângulo, visto que se a casquinha era oca, iria faltar um dos lados. Então, se prolongarmos essa casquinha infinitamente, a interseção resultará em duas retas concorrentes (ou seja, o ponto não foi meu, e sim do Bonner).

Por essa linha de raciocínio concluí que uma reta pode também ser uma curva cônica, quando a reta (que representa o plano) for uma geratriz, ou melhor, quando o plano tangencia o cone. A Feithi questionou se a reta também era uma curva cônica e, por um milagre, o Bonner concordou comigo dizendo que era, mas o Bruno perguntou qual era a diferença entre curvas cônicas e seções cônicas. Quando começamos a discutir isso, a reunião acabou, ficando para continuarmos pelo grupo do WhatsApp.

\*\*\*

*Bruno* – Olá, meninos, o que vocês têm pensado sobre curvas? Podemos conversar por aqui pelo grupo do WhatsApp?

*William* – Mas Bruno, na sua concepção, o que é uma curva?

*Bruno* – Ao invés de dizer qual a minha concepção, vou pensar junto com vocês. Quando penso em curva, me refiro à linha curva. Então, antes de falar de curvas, acho que precisamos falar sobre linhas. Quais as linhas que vocês conhecem e como as classificam?

*Guilherme* – Linha? Vários tipos de linhas? Tem a “linha reta”... e a “linha torta”.

*Bruno* – Ótimo, como é a linha reta? O que faz ela ser reta? Todas as linhas retas são iguais?

*Guilherme* – Não sei se é nesse sentido a questão, mas sei que a linha reta tem um coeficiente angular constante, diferente da “torta”.

*Bruno* – Certo, e toda linha torta é igual?

*Guilherme* – Não também, temos as diferentes “possibilidades” que discutimos ontem. Pode ser hipérbole, elipse, parábola...

*Bruno* – Então, quando não for reta, só pode ser ou hipérbole, ou elipse, ou parábola? E ainda pergunto: toda linha reta é igual?

*Guilherme* – Não, toda reta não é igual. Elas têm coeficientes angulares diferentes. Mas se elas não forem retas... ah, não necessariamente.

*Bruno* – Se não considerarmos a posição, toda linha reta é igual? Ou seja, a natureza da linha reta é a mesma?

*Guilherme* – Sem considerar posição, elas são as mesmas. E se isso diferenciar curva de não curva? Estou viajando?

*Bruno* – Pode viajar. Teríamos alguma linha que não seja reta e não seja curva? Um segmento de reta é uma linha reta?

*Guilherme* – Linha não curva e não reta? Não consigo imaginar. Um segmento tem característica de uma reta. Na verdade, é parte de uma reta.

*Bruno* – Certo, vou refazer minha pergunta. Se linha reta for uma classificação de linha, o segmento de reta se enquadra na classe linha reta? E a reta se enquadra na classe linha reta?

*Rafael* – Sim, eu acho que sim para as duas perguntas.

*Bruno* – Ok, Rafa, qual a diferença entre o segmento de reta e a reta?

*Rafael* – Nenhuma, o segmento é uma parte da reta.

*Bruno* – Então segmento de reta e reta são a mesma coisa?

*Rafael* – Bem, creio que sim... que confuso.

*Bruno* – Calma, concordo que os dois são da classe ‘linha reta’, pois ambos são retilíneos, mas qual a diferença entre uma reta e um segmento de reta?

*Rafael* – Ah, não sei (risos) ... uma é limitada, no caso o segmento, e a reta não.

*Bruno* – Olhem para essas linhas (Figura 27). Qual a diferença entre elas? Só um detalhe: as duas que estão sem nome são  $f$  (que se cruza) e  $g$ <sup>32</sup>.

*Rafael* – Algumas são tortas e outras são formadas por vários segmentos de retas.

*Bruno* – Então a linha pode ser classificada como reta, “vários segmentos”... o que mais?

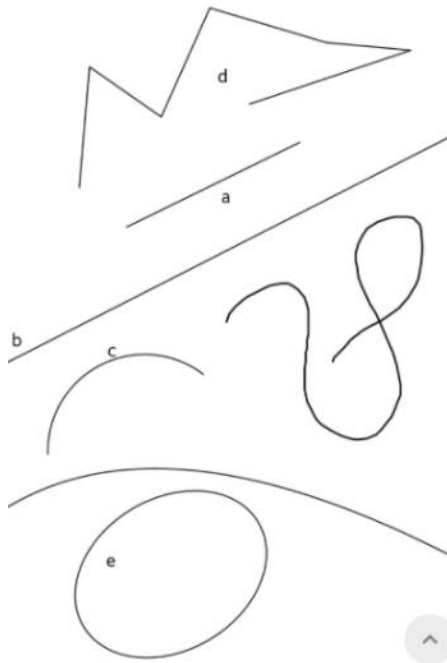
*William* – Eu acho que a principal ideia de um pensamento analítico (matemático) seria ver como elas são iguais, não diferentes. Todas estão no plano, todas têm uma dimensão. Uma dimensão no sentido de que não há área nem volume, só é possível medir o comprimento, além disso  $b$  e  $g$  são ilimitadas, as outras não.

*Bruno* – Entendi. Então você quer dizer que elas estão contidas em um plano, ou seja, são curvas planas, por exemplo, a hélice, que é uma curva espacial (Figura 28)?

---

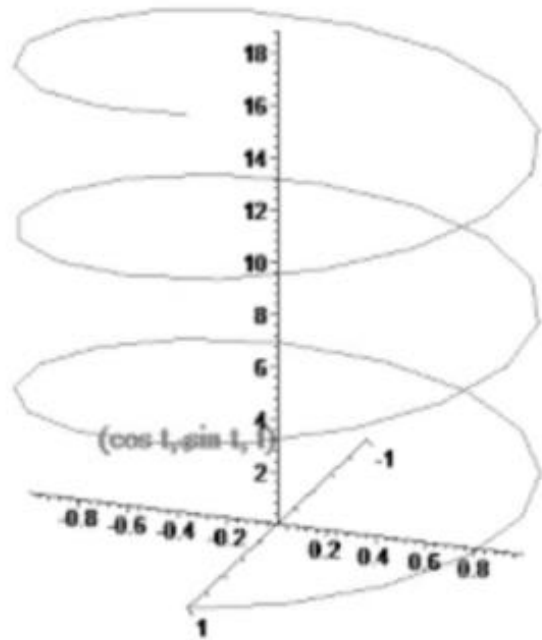
<sup>32</sup> A linha  $g$  é a única linha da Figura 27 que não possui notação.

Figura 27 – Exemplos de linhas.



Fonte: Dos dados.

Figura 28 – Hélice.



Fonte: Dos dados.

*Rafael e William* – Sim!

*William* – Mas uma “linha” plana também é (ou pode ser) uma linha espacial.

*Bruno* – Poderíamos chamar de não plana.

*William* – Certo, mas precisamos definir o que diferencia.

*Bruno* – O que seria uma linha plana?

*Rafael* – Seria o lugar geométrico que contém diversos pontos?

*Bruno* – Rafa, ótimo trazer o conceito de lugar geométrico, porém lugar geométrico já é um conjunto de pontos que obedecem a uma mesma condição.

*William* – Um “conjunto contínuo” de pontos, todos pertencentes ao plano.

*Guilherme* – É. Eu estava digitando isso.

*William* – (Risos) Mas eu preciso melhorar minha escrita, não está claro.

*Bruno* – Então linha é o lugar geométrico de pontos consecutivos e linha plana, o conjunto de pontos consecutivos em um mesmo plano?

*Guilherme* – Concordo. Estou tentando articular o fato de a reta no espaço se manter num plano, mas não sei dizer isso, porque pensei na reta que mantém uma coordenada fixa pertencendo a um tal plano. Porém, a reta  $xyz$ , por exemplo, como se fosse a “diagonal do cubo” formado pelos 3 planos ( $xy$ ,  $yz$  e  $xz$ ), não tem uma coordenada fixa, mas pertence a um plano específico (um feixe de planos, na verdade).

*William* – Ah, é simples: Qualquer reta está, pelo menos, em um plano, certo? O espaço contém todos os planos, então todas as retas estão no espaço porque, para cada uma delas, existe um plano que a contém. Coordenada é algo referencial, uma reta pode ter uma coordenada fixa, mas se você muda a referência, a mesma tem as três coordenadas variando.

*Guilherme* – Isso, isso, isso! A reta que eu disse como exemplo não tem uma coordenada fixa, mas se girar os eixos, ela pode ter uma coordenada fixa.

*William* – As coordenadas vêm de três retas sortudas que você escolheu para organizar seu espaço, mas você pode trocá-las. Isso quer dizer que as coordenadas vêm das retas, não o contrário.

*Guilherme* – É, faz sentido.

*Bruno* – Resumindo, o que caracteriza a reta não é a posição relativa. Então, só para não nos perdermos, na classificação das linhas, identificamos que elas podem ser planas e não planas (espaciais) ...

*William* – Espera! Agora eu queria trocar esse “não planas”. Todas as linhas são espaciais, certo? A gente concorda nisso?

*Bruno* – Concordo. O que você entende por geometria plana e geometria espacial?

*William* – Geometria espacial estuda todos os tipos de elementos do espaço e a geometria plana é um caso particular da geometria espacial.

*Bruno* – E se o espaço for bidimensional?

*William* – Os elementos do espaço, que também são elementos de um plano (que, por sua vez, é um elemento do espaço) ... calma, assim você está me confundindo. Estamos falando da Geometria, mas se falamos de coisas analíticas da Matemática, então o espaço pode ser um plano, uma reta, um ponto, um espaço de quatro dimensões, infinitas etc. Também não utilizamos a palavra linha, usamos curvas para tudo, isso vem de função. Mas se estou falando de Geometria, espaço é espaço, tridimensionalmente, e o espaço bidimensional seria o plano. Essa troca de termos matemáticos e exclusivamente geométricos é confusa e eu não sei qual é o que você quer que usemos. Mas se estamos definindo tudo do zero, então podemos definir que o plano é um espaço bidimensional. Não sei se estou viajando.

*Bruno* – Você está certíssimo. É esse termo que usamos. Na área de Geometria Gráfica, chamamos de Geometria Bidimensional o estudo da forma no plano e de Geometria Tridimensional o estudo da forma do espaço tridimensional. Agora entendi quando você diz que toda linha é uma curva.

*William* – Então vamos pensar tudo genericamente?

*Bruno* – O que faz mais sentido para vocês: chamar tudo de curva ou diferenciar a reta da curva? Independente da escolha, tem que justificar (risos).

*William* – Prefiro curva.

*Bruno* – Toda linha é uma curva (segundo a sua premissa). Um ponto é uma linha?

*William* – Eu diria que sim. Agora por quê? Pensa na função  $f(x) = 1$ . É uma função dos reais nos reais. Agora vamos pensar em outra função do  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^2$ , dada por  $f(x) = (1, 1)$ . O gráfico dessa última é algo no espaço, ou seja, a imagem da função é um ponto no  $\mathbb{R}^2$ . Sempre que uma função sai do  $\mathbb{R}$  e vai pra  $\mathbb{R}^n$  ( $n$  um número natural diferente de zero) a imagem é uma curva, essa é a definição que aprendi.

*Bruno* – Hum... entendi. Se chama curva porque não tem como representar graficamente essa função no  $\mathbb{R}^n$ , então chama genericamente de curva, visto que, dependendo do grau do  $\mathbb{R}$ , o “gráfico” pode tomar formas diferentes, é isso?

*William* – Isso! Não dá para desenhar o gráfico de uma função que sai de  $\mathbb{R}$  e vai pra  $\mathbb{R}^n$ , mas dá para desenhar a imagem dela.

*Bruno* – Ok, mas estamos trabalhando, no estudo das cônicas, com  $\mathbb{R}^0$ ,  $\mathbb{R}^1$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^4$  ... ou  $\mathbb{R}^n$ ?

*William* –  $\mathbb{R}^2$ .

*Bruno* – e  $\mathbb{R}^3$ , visto que estamos olhando para a seção de uma superfície cônica (forma tridimensional).

*William* – Verdade.

*Bruno* – Então, para mim, não faz sentido chamar tudo de curva. Se dizemos que “tudo” é curva, então seções cônicas é igual a curvas cônicas.

*William* – Bem, depois de toda essa discussão, estou começando a achar que não.

*Bruno* – Entendendo que curva é algo que não é reto, temos como curvas cônicas apenas a circunferência, elipse, parábola e hipérbole, as demais (ponto, reta e retas concorrentes) são seções cônicas, assim como as curvas cônicas também são.

*William* – Verdade, faz sentido.

*Bruno* – Nossa, nem tinha visto a hora. Vou dormir, que já é tarde, boa noite.

*William* – Se alguém ainda quiser conversar sobre o assunto, estarei por aqui, vou ficar mais um pouco, quem sabe não escrevo no diário.

\*\*\*

Agora que sabemos o que é uma superfície cônica, imagine o espaço novamente com uma dessas dentro dele. Não vamos pensar em nenhuma complicada demais por enquanto, por

isso considere a superfície cônica gerada a partir da rotação da reta  $g$  em torno da reta  $d$ . Chamemos de  $V$  o ponto de interseção de  $d$  e  $g$ .

Imagine agora um plano (que chamaremos de  $\alpha$ ) em algum lugar desse espaço. O plano é infinito, a superfície cônica também é infinita, portanto, em algum momento, eles vão se interceptar.

Para ficarem bem esclarecidas as definições seguintes, lembre que essa interseção é o conjunto de pontos comuns aos dois objetos que temos no nosso espaço. Mantendo a superfície cônica fixada e variando a posição de  $\alpha$  conforme a sua imaginação permitir, a interseção em questão poderá ter várias formas.

Imagine que  $\alpha$  necessariamente passa pelo ponto  $V$ . Sob esta condição, resta observar os possíveis ângulos que  $\alpha$  pode formar com  $d$ :

- Supondo que esse ângulo seja de  $0^\circ$ , teremos que  $d$  é uma reta inteiramente contida em  $\alpha$  e a figura que se formará é a de um “X” (retas concorrentes);
- À medida que esse ângulo vai crescendo, a reta  $d$  deixa de estar inteiramente contida em  $\alpha$  e a figura formada passa a ser um “X” cada vez mais “magro”, até que o ângulo entre  $\alpha$  e  $d$  coincida com o ângulo entre  $g$  e  $d$ . Nesse caso, o “X”, que já era bem magrinho, passa a ter a forma de um “I” (reta);
- E quando o ângulo passa a ser maior que o ângulo entre  $g$  e  $d$ , o único elemento que está, ao mesmo tempo, na superfície cônica e no plano  $\alpha$  é o ponto  $V$  (ponto).

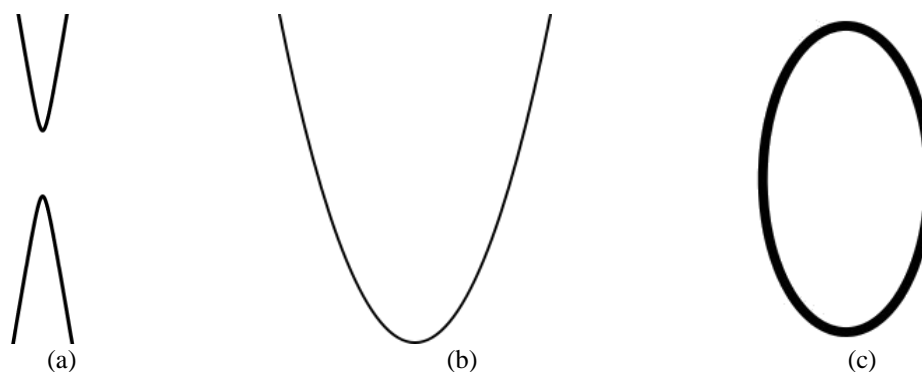
Imagine agora que  $\alpha$  intercepte  $d$  em um ponto que não seja  $V$  e façamos este processo novamente:

- Basta que o ângulo entre  $\alpha$  e  $d$  seja um pouquinho maior que zero, que a figura formada pela interseção seja algo parecido com a Figura 29a;
- E conforme o ângulo vai crescendo, a figura vai ficando cada vez mais “aberta”, até que, quando ele coincide com o ângulo entre  $g$  e  $d$ , nós obtemos algo parecido com a Figura 29b;
- Depois disso, ao aumentarmos o ângulo, podemos observar uma forma semelhante à Figura 29c;
- Até que chegamos ao momento de o ângulo entre  $\alpha$  e  $d$  medir  $90^\circ$  e, nesse caso, temos algo parecido com um círculo perfeito (circunferência).

Vale observar que, no caso de  $\alpha$  interceptar  $d$  em nenhum ponto, isto é, o plano  $\alpha$  ser paralelo à reta  $d$ , obtemos novamente o caso da hipérbole. Logo, é fácil visualizar que, para qualquer outra possível posição que o plano  $\alpha$  possa admitir, sempre retornaremos para algum dos casos acima citados.



Figura 29 – Hipérbole (a), parábola (b) e elipse (c).



Fonte: Dos dados (diário individual do sujeito).

As interseções entre o plano e a superfície cônica (retas concorrentes, reta, ponto, hipérbole, parábola, elipse e circunferência) chamamos de “seções cônicas” (ou apenas “cônicas”, para os íntimos). Um par de retas paralelas também é considerado uma seção cônica, mas particularmente não entendo muito bem o que precisamos fazer com nosso plano  $\alpha$  para que a interseção com a superfície cônica tenha esta forma. Lembro que é algo relacionado com uma distância infinitamente grande, pois chegamos a comentar sobre essa formação em alguma reunião, mas a dissertação sobre esse tema vai ficar para alguma outra seção deste documento.

Antes de darmos continuidade a este maravilhoso assunto, que é “Curvas Cônicas”, precisamos fazer um *pit stop* em “Linhas”, para que fique mais do que incandescente o que é uma curva.

Particularmente, tenho muita dificuldade em definir o que exatamente é uma linha, mas há quem diga que é um conjunto de pontos consecutivos do espaço. Esses pontos podem muito bem pertencer a um mesmo plano; logo, linhas podem existir no plano e no espaço. Mas, como assim, “consecutivos”? Para quem já tem a ideia em mente, é fácil de visualizar, mas a palavra “consecutivo” transmite uma ideia muito abrangente e disso eu não sou muito fã.

Uma visualização meio louca que tenho é a seguinte: um ponto no espaço tem vários “vizinhos imediatos”, isto é, pontos que estão diretamente “ligados” a ele. A linha é um subconjunto do espaço, cuja regra é que todos os pontos da linha possuam uma quantidade finita de vizinhos imediatos dentro da linha e que existam infinitos pontos com apenas dois vizinhos imediatos. Assim, um ponto está na extremidade da linha se possui apenas um vizinho imediato dentro da linha, enquanto a maioria (se não todos) dos pontos restantes possui dois: o anterior e o posterior. Caso a linha se cruze com ela mesma, esses cruzamentos possuirão mais que dois vizinhos imediatos, mas ainda é uma quantidade finita deles.

Essa visualização não me veio do nada. Na realidade, existe um certo embasamento com uma definição que vi na disciplina de Espaços Métricos, de “caminhos em um espaço

métrico”. Para resumir bem resumido, uma métrica é uma “função distância”, ou seja, uma lei que calcula a distância entre quaisquer dois pontos de um mesmo conjunto, respeitando certas propriedades, e um espaço métrico não passa de um conjunto associado a uma métrica. Quando falamos de caminho, necessariamente falamos do caminho entre dois pontos (chamemos de  $A$  e  $B$ ) de um espaço métrico. Um caminho não passa de uma função  $f$  que leva valores do intervalo  $[0, 1]$  a pontos do espaço métrico em questão, com  $f(0) = A$  e  $f(1) = B$ , que é *contínua*. A continuidade da função é de extrema importância para esta definição, caso contrário, a imagem de  $f$  poderia ser a maior bagunça possível dentro do espaço métrico em questão e, ainda assim, respeitar a condição das imagens do  $0$  e do  $1$  ( $A$  e  $B$  respectivamente), mas não parecer nada com um caminho. A importância da métrica entra na definição de continuidade.

Mas o que é continuidade?

Dizer que uma função é contínua é dizer que ela é contínua em todos os pontos de seu domínio. E dizer que uma função é contínua num ponto é (mais ou menos) dizer que, para qualquer subconjunto do contradomínio que contenha a imagem desse ponto, existe um subconjunto do domínio que contém o tal do ponto, cuja imagem está inteiramente contida naquele subconjunto do contradomínio citado antes. Perceba que eu disse “[...] para *qualquer* subconjunto [...]” e esta é uma afirmação muito forte, porque sempre somos capazes de imaginar subconjuntos bem pequeninhos e, como vale para qualquer um, eles podem ser tão pequenos quanto a gente queira. Por meio do exposto, podemos notar uma ideia semelhante com a de consecutividade. A teoria de métrica é importante, porque esses subconjuntos do domínio e contradomínio são criados a partir da ideia de distância, por exemplo, “conjunto de pontos cuja distância até o ponto ciclano é menor que fulano”. Existem, no mínimo, outras três definições de continuidade diferentes, porém equivalentes, que não convém comentar aqui.

A relação disso com a minha visualização maluca é a seguinte: sempre podemos ver uma linha como um caminho. Na verdade, caminhos são a generalização das linhas onde, no caso das linhas, nosso espaço métrico é o espaço tridimensional conhecido com a métrica usual. O fato é que, comparando linhas com caminhos, podemos imaginar a existência dessa continuidade entre linhas e o intervalo  $[0, 1]$ , e sabemos que, dentro dos números reais, existe uma coisa chamada ordem (dados quaisquer dois números reais, temos que: ou eles são iguais, ou um é menor/maior que o outro). Assim, dentro da linha, também existe uma forma de ordem, oriunda da ordem dentro dos números reais, por conta da existência da continuidade entre essas duas coisas. É como se disséssemos: “para quaisquer dois pontos pertencentes a uma linha, temos que, ou eles são coincidentes, ou um vem antes/depois do outro”. Daí a minha ideia de “vizinhos imediatos”. Matematicamente, a existência de uma função contínua entre dois

conjuntos não garante essas “transferências” de propriedades de um conjunto para o outro. Para esses tipos de garantia, é necessário que a função seja bijetora e, às vezes, até mesmo mais condições! O que eu observei, em Espaços Métricos, e relacionei com linhas foi mais uma inspiração para minha definição e menos um embasamento (talvez eu devesse deixar especificado no documento em si).

Acredito que já transitei muito por esse assunto de linhas; em um próximo momento, volto a falar das cônicas, talvez depois das férias de julho.

\*\*\*

## **TIRANDO “FÉRIAS” COM A SUPERFÍCIE CÔNICA**

\*\*\*

Almejava descansar nesse recesso de julho e esquecer um pouco da tese, porém aquele último encontro suscitou em mim algumas inquietações. Percebi que os modelos utilizados, até então, contribuíram não só para visualizar o cone seccionado pelo plano, como também possibilitou que os meninos e eu analisássemos a situação e gerássemos novas questões. Apesar desses contributos, ainda não me dei por satisfeito. Algo me incitava a explorar as potencialidades do programa e aperfeiçoar o modelo, de modo a aprofundar as características das cônicas. Ao idealizar um modelo (visto que os meninos não aderiram à ideia de elaborar um), vislumbrei um que simulasse um ambiente tridimensional da superfície cônica, no qual fosse possível variar a posição de determinados elementos sem interferir nas propriedades do objeto.

Os programas de modelagem tridimensional conhecidos por mim até então (e sabia utilizá-los) eram AutoCAD<sup>33</sup>, Rhinoceros<sup>34</sup> e SketchUp<sup>35</sup>. Adotei este último para modelar uma superfície cujos elementos fixos são duas circunferências; contudo, por preferir um modelo que pudesse manipular dinamicamente, arrisquei-me a utilizar as ferramentas tridimensionais do Geogebra. As ferramentas bidimensionais desse programa já eram conhecidas por mim; ao lançarem a atualização do programa com a versão tridimensional, não me interessei, a priori, em explorá-las, por haver algumas distinções dos programas com que estava acostumado a trabalhar.

---

<sup>33</sup> <http://www.autodesk.com.br/products/autocad/overview>.

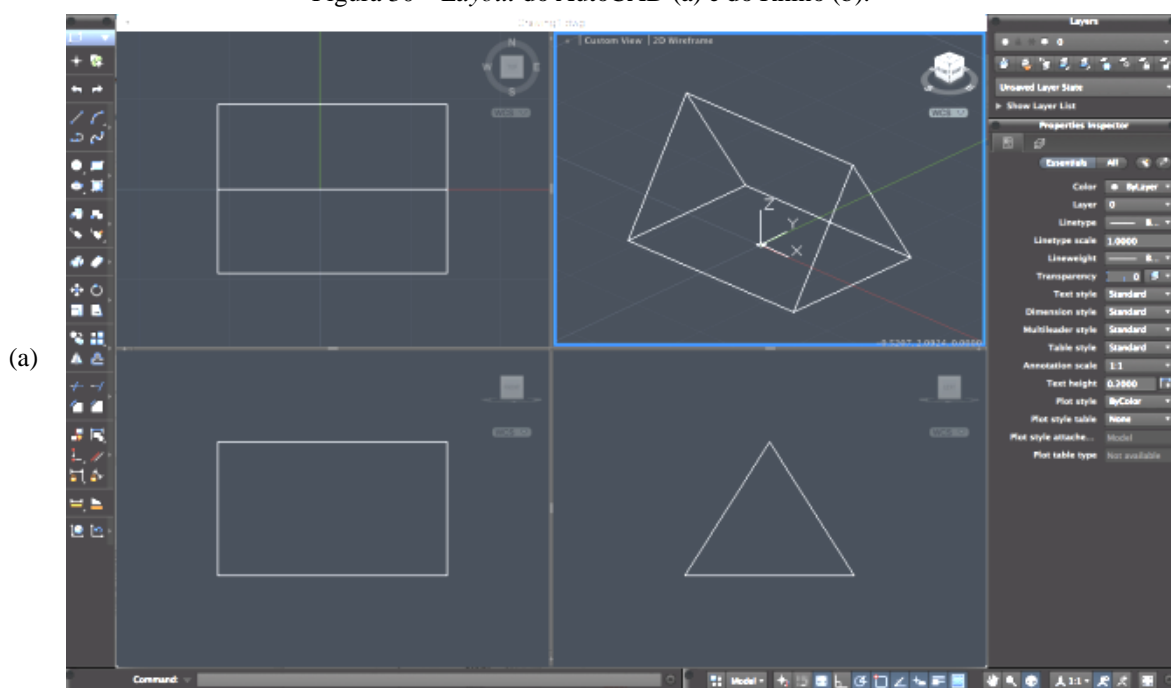
<sup>34</sup> <http://www.rhino3d.com/>.

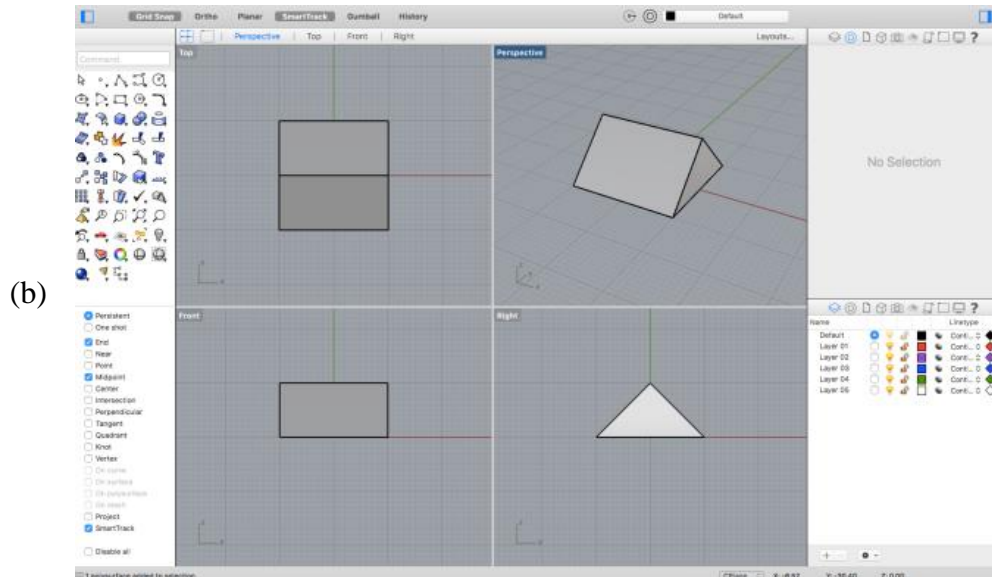
<sup>35</sup> <http://www.sketchup.com/pt-BR>.

Por exemplo, o AutoCAD e o Rhino (para os íntimos) apresentam, em seu *layout*, quatro vistas do mesmo ambiente, sendo três delas organizadas conforme o sistema de representação americano (vista frontal abaixo da superior, uma lateral) e uma perspectiva (Figura 30). Além disso, ambos são programas profissionais pagos. O SketchUp é um programa profissional, porém é disponível em versão gratuita e paga (com mais recursos) e, diferentemente dos anteriores, apresenta apenas uma única vista do ambiente (Figura 31a).

Em contraponto, o Geogebra é um programa educacional gratuito, traz como principal diferença dos demais a dinamicidade, que é a possibilidade de mover determinados elementos, mantendo a propriedade da forma. Ele dispõe de uma janela de álgebra e uma de visualização (bidimensional), onde qualquer objeto inserido, em qualquer uma das janelas, será representado analítica e graficamente, respectivamente. Também é possível exibir uma janela de visualização 3D e vistas criadas a partir de faces ou planos (Figura 31b), além de outras janelas (planilha, CAS, protocolo de construções e calculadora de probabilidade).

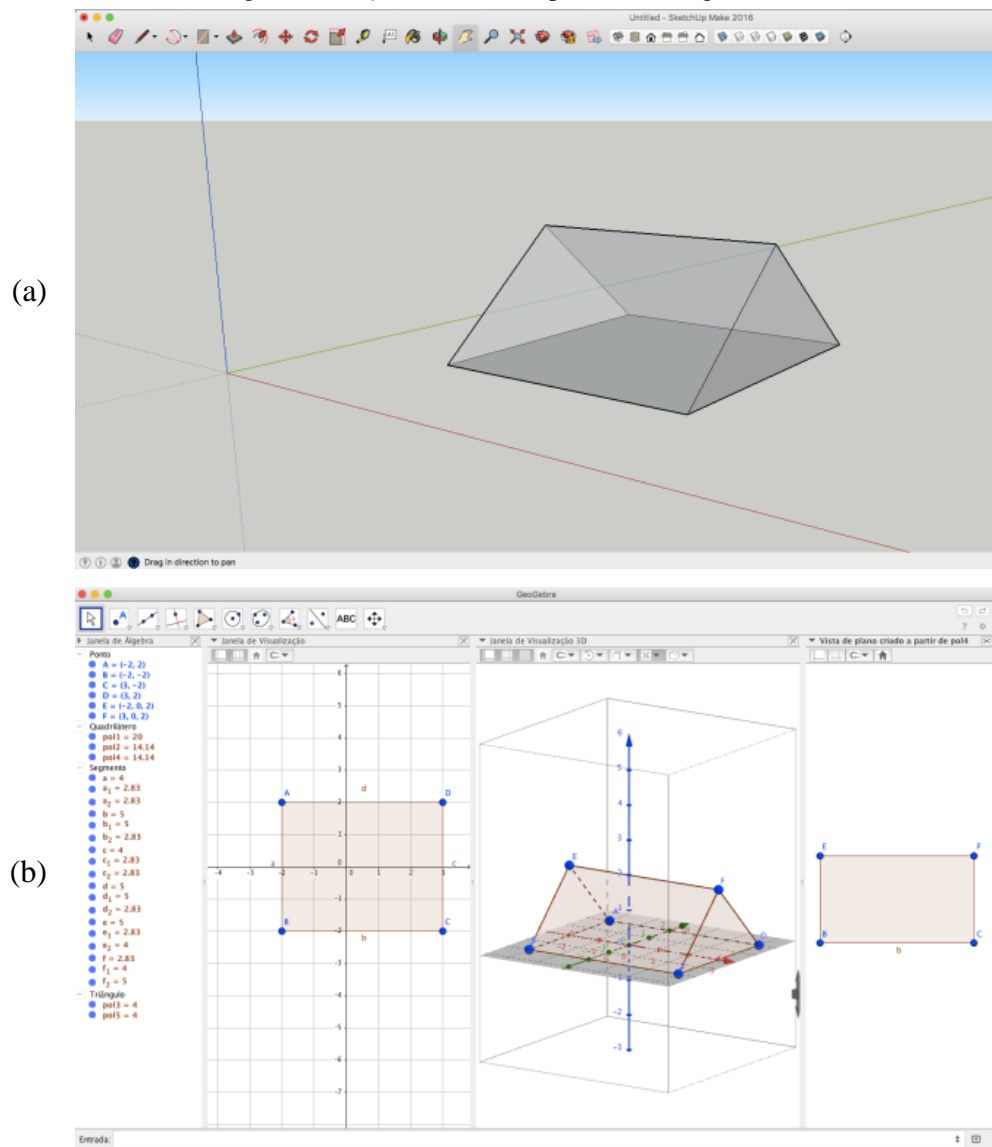
Figura 30 – *Layout* do AutoCAD (a) e do Rhino (b).





Fonte: Do autor.

Figura 31– Layout do SketchUp (a) e do Geogebra (b).



Fonte: Do autor.

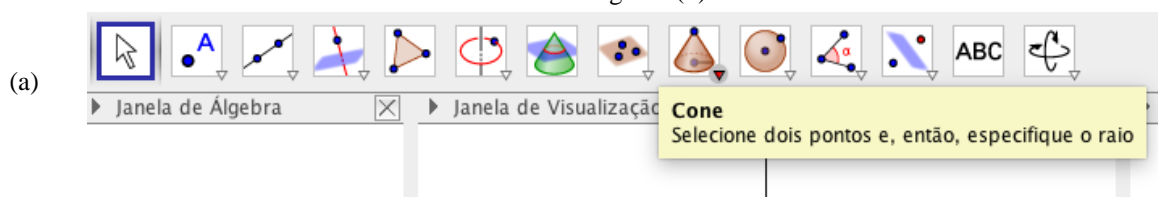
Poderiam me perguntar: por que não me interessei inicialmente pelos recursos 3D do Geogebra? Por um detalhe muito sutil. Acostumado a trabalhar com vistas, ou seja, projeções de um determinado objeto em um plano, não fazia sentido para mim o modo como o Geogebra representava uma situação tridimensional na janela de visualização e nas vistas. Nos três primeiros programas mencionados, é possível ver, em uma vista superior, por exemplo, todo o objeto, como se estivéssemos olhando de cima. No Geogebra, apenas na janela de visualização 3D é possível visualizar as vistas de todo o objeto; nas demais janelas de visualização, é ilustrado apenas o que está contido no plano<sup>36</sup>. Minha zona de conforto em trabalhar com vistas associadas não me permitiu perceber isso de imediato, causando-me estranheza de início.

Um modo prático de observar a característica de dependência entre janelas é quando se modela qualquer forma tridimensional no Geogebra pela janela de visualização 3D. Por exemplo, um prisma reto triangular com uma das faces laterais sobre o plano base. Esse plano base é definido pelos eixos  $x$  e  $y$ , o qual também é visualizado na janela de visualização (bidimensional). Quando observarmos essa janela, não enxergaremos a vista do prisma (Figura 31b) como nos outros programas (Figura 30), veremos apenas o que estiver contido no plano, ou seja, os pontos  $E$  e  $F$  não ficarão visíveis. Do mesmo modo acontece com as janelas de vistas auxiliares, onde posso escolher qualquer face ou plano para criar uma vista de tudo que está contido nele, por exemplo, uma outra face lateral do prisma (Figura 31b).

Ao compreender esse detalhe, voltei a mexer no Geogebra, instigado pelo desafio de construir um modelo dinâmico. Além disso, os meninos indicaram o Geogebra como meio para elaborar um modelo.

Iniciei tentando modelar uma superfície cônica no Geogebra; contudo, conhecia apenas comandos para modelar cones retos, seja pela barra de ferramentas superior no ícone *cone* (Figura 32a), seja pela barra de entrada na parte inferior, na qual é possível inserir um comando digitando seu nome (Figura 32b).

Figura 32 – Comando *cone* na barra de ferramentas do Geogebra (a). Comandos *cone* e *coneinfinito* na barra de entrada do Geogebra (b).



<sup>36</sup> Não cito as janelas algébrica, planilha, CAS, protocolo de construções e calculadora de probabilidade, por razões óbvias.

(b)



Fonte: Do autor.

O ícone *cone*, na barra de ferramenta, corresponde ao comando  $Cone[<Ponto>, <Ponto>, <Raio>]$  na barra de entrada, pois em ambos são requisitados, para selecionar ou digitar, dois pontos e um raio. O primeiro ponto selecionado é o centro da circunferência diretora; o segundo, o vértice do cone (elemento fixo) e, ao definirmos o raio, é gerado um cone circular reto. Esses dois comandos podem ser associados ao comando  $Cone[<Círculo>, <Altura>]$  por possuírem os mesmos elementos diretores dos anteriores. Todavia, este último inicia pela circunferência, para depois determinar o eixo. Desse modo, dependendo do comando, o programa interpreta que o próximo elemento é implicitamente ortogonal ao primeiro. Por esse motivo, é possível inserir este último (raio ou altura) na forma algébrica.

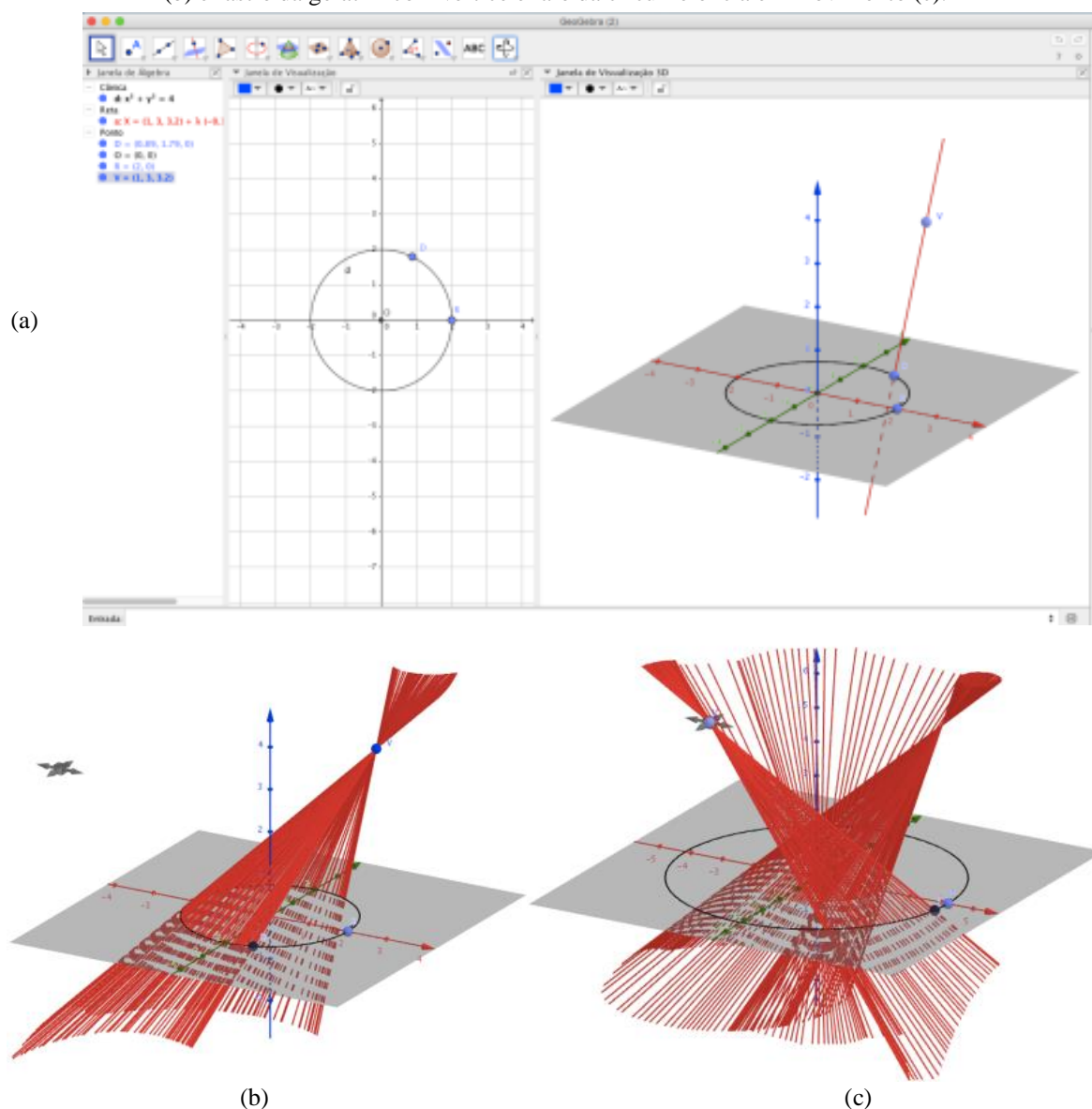
Os demais comandos associam-se à lei de geração, que contém um eixo ( $d$ ) do cone (definido por dois pontos, ou um ponto e um vetor, ou um ponto e uma reta) e um ângulo ( $g^\circ$ ) entre  $d$  e uma reta geratriz. Em todos os casos, o primeiro ponto selecionado corresponde ao vértice do cone e o segundo elemento determina a direção de  $d$ , podendo ser um ponto contido nesta, um vetor ou uma reta paralela a  $d$ .

Outra possibilidade é modelar cones ilimitados, os quais eram do meu interesse, pois como discutimos no Grupo de Estudos, as curvas cônicas são geradas por superfícies cônicas ilimitadas. Mas como modelar um cone oblíquo no Geogebra se conhecia apenas comandos que modelam cones retos? Meu desejo era modelar um cone oblíquo e um plano seccionando-o, de modo que pudesse mover o vértice do cone e o plano, e ainda fosse possível visualizar a seção. Seria esse meu desejo possível ou apenas um devaneio? Se não havia meios de fazer a superfície propriamente dita, talvez um caminho fosse tentar modelar elementos desta que ajudassem a visualizar.

Comecei inserindo uma circunferência  $d$  e um ponto qualquer  $V$  (fora do plano  $xy$ ) na janela de visualização 3D. Escolhi-os como meus elementos diretores, pois foram criados sem depender de nenhum outro elemento, por isso são chamados de *objetos livres*. Em seguida, criei

uma reta que passa por  $V$  e por um ponto  $D$  de  $c$ , ou seja, uma geratriz ( $g$ ) (Figura 33a). O ponto  $D$  sobre  $d$  pode ser classificado de *semilivre* ou *semidependente* por depender da circunferência, mas ainda é possível movê-lo sobre ela. Minha intenção em fazer esta geratriz era visualizar a superfície por meio do seu *rastro* (Figura 33b). O rastro é uma ferramenta do Geogebra que, como o próprio nome sugere, descreve um rastro ao mover um objeto, contudo ele não é reconhecido como um objeto (não é possível selecioná-lo, como também não aparece na janela algébrica) e desaparece se a imagem for ampliada ou reduzida. Além disso, ao mover o vértice com o rastro de  $g$  ativado, é gerada uma linha de percurso que não corresponde à superfície (Figura 33c); por essa razão, não considerei apropriado utilizar o modelo por meio do rastro, para visualizar a superfície variando o vértice ou o raio da circunferência.

Figura 33 – Diretrizes e geratriz do modelo 1 (a), rastro da geratriz com vértice e raio da circunferência estáticos (b) e rastro da geratriz com vértice e raio da circunferência em movimento (c).



Fonte: Do autor.



Instigado pela vontade de modelar uma superfície tal como a da ferramenta *coneinfinito*, com o adicional de mover os elementos diretores sem perder as propriedades da superfície, debrucei-me a pesquisar sobre essa possibilidade, tornando-se minha odisseia de férias.

Tentei, inicialmente, verificar se havia algum comando no Geogebra para modelar superfícies, visto que já tinha observado alguns *applets* do Geogebra (modelos digitais manipuláveis disponíveis na internet<sup>37</sup>) que apresentavam superfícies mais complexas. Por esse motivo, deduzi que fosse possível modelar um cone oblíquo. Ao digitar ‘superfície’ na barra de entrada, apareceram duas opções (Figura 34); contudo, as descrições dos comandos me soavam familiares tanto quanto o idioma grego (importante destacar que não sei grego).

Figura 34 – Comandos “superfície”.



Fonte: Do autor<sup>38</sup>.

Diante daquele impasse, realizei uma pesquisa na internet para tentar entender esse comando, sem muito sucesso. Contudo, descobri que é possível modelar qualquer superfície a partir da sua equação. Como não sabia muita coisa (quase nada) de Geometria Analítica, busquei pela expressão “equação cone oblíquo”, todavia o *site* de busca retornava apenas *links* referentes à equação do cone reto.

Por não ter encontrado uma solução plausível na pesquisa, entrei em contato via Facebook com o professor Henrique Lazzari, que foi meu professor de Fundamentos da Geometria em uma das disciplinas do doutorado. Perguntei se ele sabia a equação do cone oblíquo e, gentilmente, ele me indicou um livro: *Matemática Pura*, de Francoeur (1839), e a página em que havia a equação (Figura 35).

Figura 35 – Equação do cone oblíquo.

d'onde se deduz  $(az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = 2r(z - c) \cdot (az - cx)$ .

Esta é a equação do cone oblíquo de base circular, cujo vertice S tem por coordenada  $a, b, c$ .

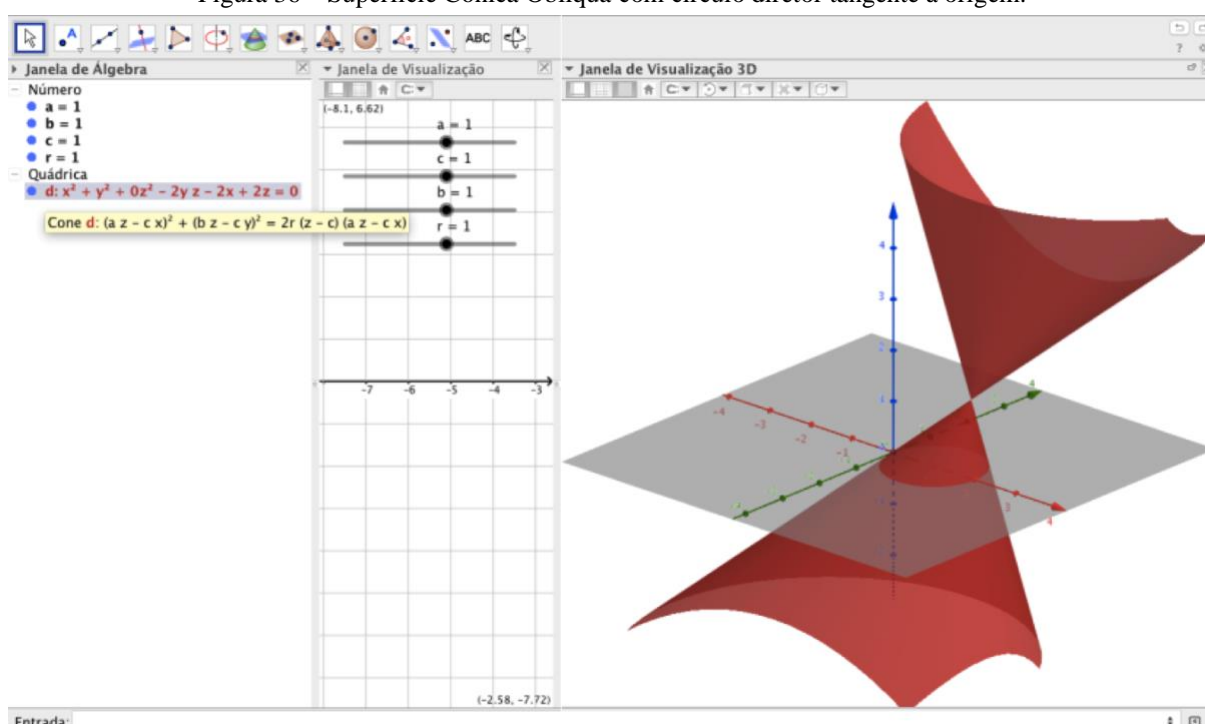
Fonte: Francoeur (1839, p. 247).

<sup>37</sup> <https://www.geogebra.org/search/>.

<sup>38</sup> Print da versão on-line do Geogebra, disponível em <https://www.geogebra.org/apps/>.

Ao digitar a equação na barra de entrada do Geogebra e clicar *Enter*, o programa retornou perguntando se eu queria criar *controles deslizantes* para as variáveis  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $r$ . Quando confirmei, o programa gerou a imagem do cone que eu tanto queria (Figura 36), se não fosse por um detalhe: era o cone oblíquo, porém a circunferência diretora (a interseção da superfície com o plano  $xy$ ) estava tangente à origem do sistema de coordenadas. Não haveria problema em trabalhar com essa superfície; contudo, por uma questão estética, me propus a buscar uma solução para mover a superfície, de modo que o centro da circunferência coincidisse com a origem do sistema.

Figura 36 – Superfície Cônica Oblíqua com círculo diretor tangente à origem.



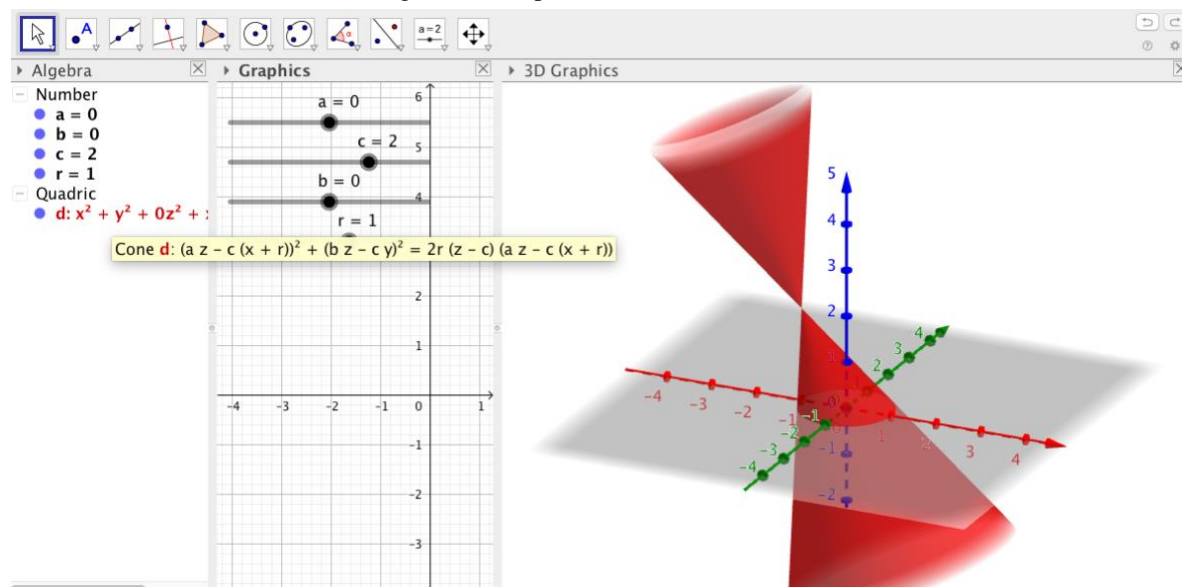
Fonte: Do autor.

Se a superfície estava com o círculo diretor à direita da origem e com centro na coordenada  $C(r, 0, 0)$ , bastaria movê-la na direção “ $-r$ ” (menos raio). Tal operação poderia parecer simples para alguém que estudou Geometria Analítica, o que não era o meu caso.

A fim de encontrar uma resposta rápida, mandei uma mensagem para Daniel, um amigo meu e professor da UFRJ, com quem gosto de discutir alguns problemas de Geometria, perguntando como ficaria a equação após transladar o cone na direção “ $-r$ ”. Eficientemente, ele me sugeriu substituir o  $x$  da equação por  $x + r$ , ocasionando na movimentação de toda a superfície para a esquerda. Prontamente fiz as modificações e visualizei o círculo diretor exatamente onde eu queria. Ao mover os controles deslizantes, percebi que, ao assumir valor zero para as variáveis  $a$  e  $b$ , a superfície não correspondia a um cone reto (Figura 37). Se  $a$ ,  $b$  e

$c$  eram as coordenadas do vértice, então a superfície deveria ser reta quando os dois primeiros valores assumem valor zero.

Figura 37 – Superfície cônica transladada.

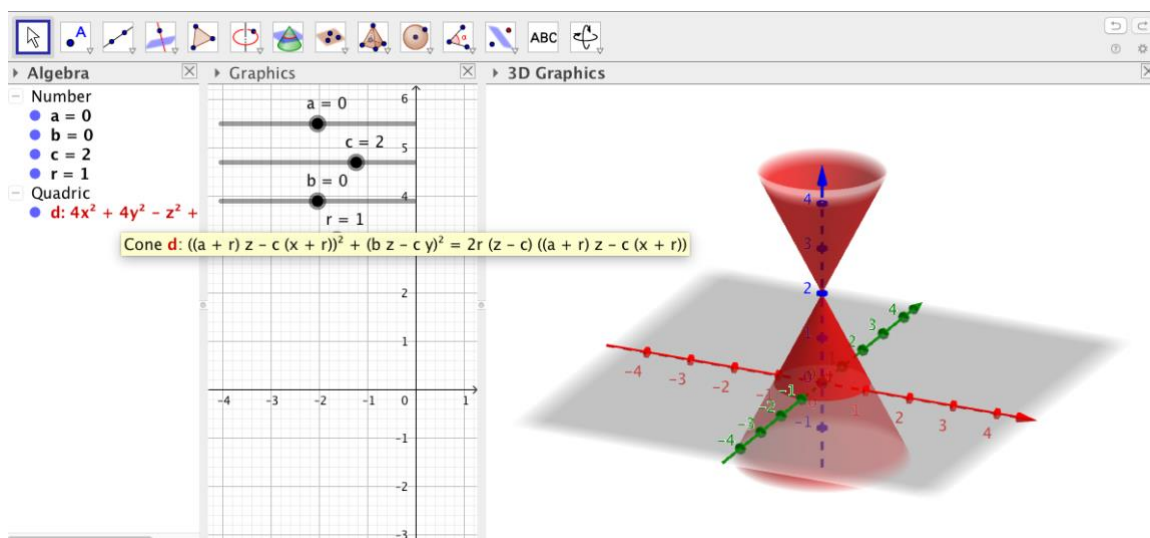


Fonte: Do autor.

Após um breve momento de observação, percebi o óbvio: ao transladar o cone para a esquerda, o vértice também se movia. Desse modo, a operação de translação deveria ser aplicada apenas na circunferência, e não em toda a superfície. Mande novamente uma mensagem, explicando meu equívoco no pedido, e ele me enviou a então sonhada equação (Figura 38).

Figura 38 – Equação da superfície cônica e *print* da superfície com centro do círculo diretor na origem.





Fonte: Conversa no Messenger do Facebook e *print* do autor.

Findava a jornada em busca da equação, porém não me dei por satisfeito. Havia uma pergunta que ecoava em minha mente: como chegar a essa equação? Eis meu novo desafio. Sei que poderia perguntar novamente para Henrique ou Daniel, mas não queria mais perturbá-los, como também gostaria de ter o prazer de deduzir sozinho.

Meus conhecimentos em Geometria me permitiam inferir que a superfície cônica circular é o lugar geométrico de todas as retas que passam por um ponto  $V$  e por um ponto  $C$  de uma circunferência, onde  $d$  é o plano da circunferência e  $V$  não pertence ao plano  $d$ . Isso significa que precisava encontrar a equação de uma reta  $g$ , em função de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , que passa por ponto  $V$ , de coordenadas  $x_V$ ,  $y_V$ , e  $z_V$ , e por uma circunferência cuja equação é... bem, esta não me vinha à memória, então voltei ao livro do Francoeur (1839) e observei que, no parágrafo anterior ao que é citada a equação da superfície cônica oblíqua, o autor faz referência à equação da circunferência que tangencia a origem, expressa por:

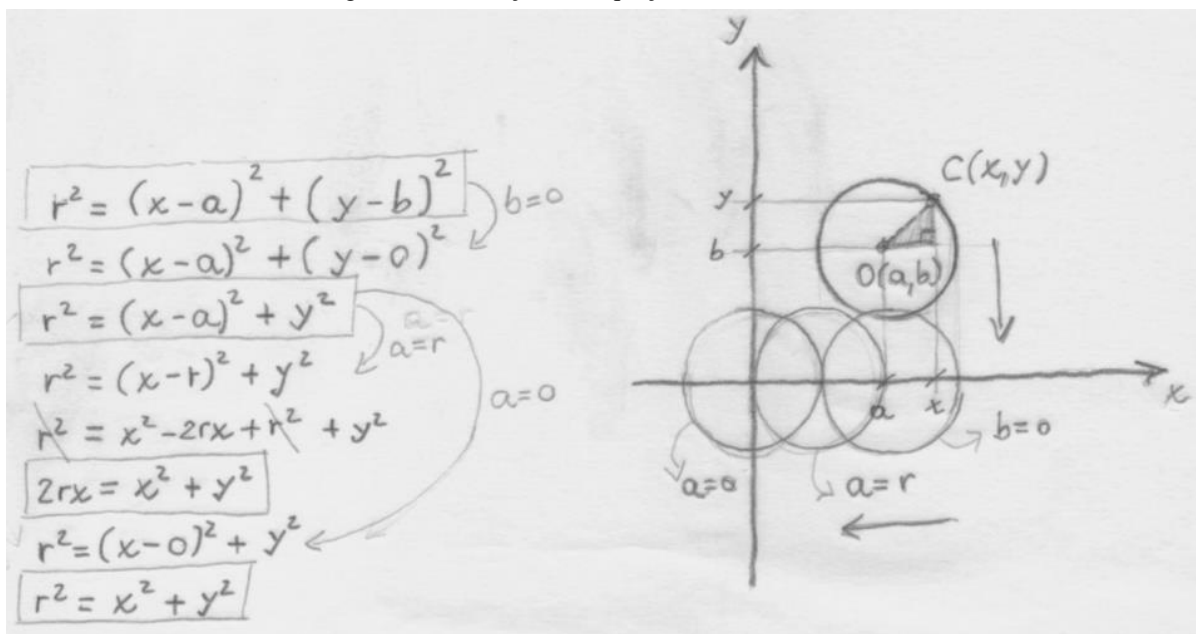
$$z = 0; y^2 + x^2 = 2rx$$

Entendendo que um ponto qualquer dessa circunferência assume as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , foi fácil associar que  $z$  é igual a zero por conta de todos os pontos da circunferência estarem sobre o plano  $xy$ . Mas e a outra equação? Precisei rabiscar em um papel a circunferência com os eixos  $x$  e  $y$ , para entender o comportamento de cada elemento (Figura 39).

Dada uma circunferência qualquer de centro  $O$  de coordenadas  $a$  e  $b$ , todos os pontos da circunferência são equidistantes do centro cuja distância é igual ao raio ( $r$ ). Marcando um ponto qualquer  $C(x,y)$ , percebi um triângulo retângulo possível de estabelecer relações. Aplicando o teorema de Pitágoras, pude deduzir que o quadrado do raio é igual à soma do

quadrado dos catetos, os quais correspondem à medida de  $x$  menos a medida de  $a$  e a medida de  $y$  menos a medida de  $b$  (Figura 39).

Figura 39 – Dedução das equações da circunferência.



Fonte: Do autor.

Como a equação expressa no livro era a de uma circunferência tangente à origem com o centro sobre o eixo  $x$ , o valor de  $b$  era igual a zero. Ademais, o ponto de tangência era a origem e também um dos pontos da circunferência; logo, a distância da origem para o centro era o raio. Isso significa que  $a = r$ . Desenvolvendo a equação, cheguei à mesma equação do livro de Francoeur e, do mesmo modo, pude deduzir a equação quando o centro está na origem, pois tanto  $a$  como  $b$  apresentavam valores iguais a zero (Figura 39).

Conhecendo a equação da circunferência, restava apenas a equação da reta. Parecia-me fácil, visto que me recordava do gráfico da equação de primeiro grau expresso por uma reta; desse modo, inferi que poderia utilizá-la. Contudo, me atentei para o fato de que a equação de primeiro grau tem por gráfico uma reta no plano, já a reta geratriz que se apoia no vértice e na circunferência se encontrava no espaço tridimensional.

Voltei ao livro de Francoeur, ao início da seção (FRANCOEUR, 1839, p. 240), de modo a acompanhar o raciocínio do autor, que trata de superfícies e curvas de dupla curvatura, discorrendo sobre a dedução da equação de uma esfera e, em seguida, de uma superfície cilíndrica reta. Nesta parte, o autor traz algo sobre o qual eu nunca tinha pensado:

Um ponto fica determinado por três equações entre  $x$ ,  $y$  e  $z$ , que são as coordenadas; uma superfície por uma só equação; uma curva por duas, que vem a ser as das duas superfícies, que na sua intersecção determinam esta linha. [...] podemos tomar para

equação de uma curva as equações de suas projecções sobre dous planos coordenados. (FRANCOEUR, 1839, p. 242-243)<sup>39</sup>.

Esta linguagem geométrica se aproximava do meu repertório, me permitindo pensar em uma curva (linha em geral, reta ou não) como intersecções entre superfícies, semelhante ao caso do nosso Grupo de Estudos, quando discutimos sobre uma superfície cônica e um plano que determina uma curva cônica. De outro modo, pensei inversamente: primeiro na curva; em seguida, nas possíveis superfícies que a gerariam.

Para exemplificar, considere a equação de uma circunferência no espaço tridimensional na posição paralela ao plano  $xy$  a uma altura  $h$  como resultado da intersecção entre um cilindro circular reto com eixo ortogonal ao plano  $xy$  e um plano paralelo a  $xy$  a uma altura  $h$ . Logo, a equação do plano é  $z = h$ , pois não importam os valores de  $x$  e  $y$ , uma vez que se todos os pontos preservam o valor  $h$  para  $z$ , eles sempre pertencem a esse plano.

O cilindro pode ser pensado como  $x^2 + y^2 = r^2$  (equação da circunferência no plano), pois não importam os valores de  $z$ . Todos os pontos que pertencem a essa circunferência, nas mais variadas alturas, pertencem à superfície cilíndrica. Concluí, então, que a equação de uma circunferência no espaço pode ser expressa, por exemplo, por duas equações, quais sejam,  $z = h$ ;  $x^2 + y^2 = r^2$ , visto que todos os pontos da circunferência estão à mesma altura com medida  $h$ .

Do mesmo modo, pensei na equação de uma reta pelas suas projecções nos planos  $xy$  e  $yz$ . Supondo que a reta é oblíqua a  $xy$  e paralela a  $yz$ , logo, a projecção em  $xy$  é expressa por uma equação do tipo  $x = k$ , pois é uma reta paralela ao eixo  $y$ , e a projecção em  $yz$  é expressa por uma equação do tipo  $ay + b = z$ , ambas equações de primeiro grau (Figura 40).

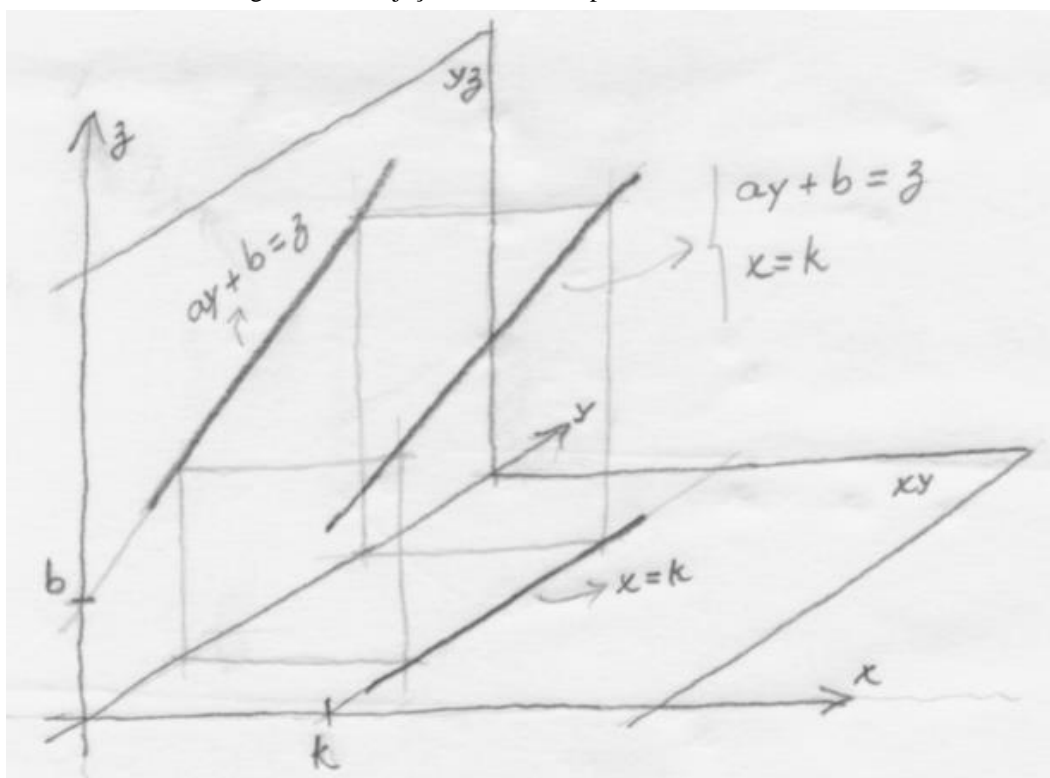
É importante destacar como o conhecimento em Geometria Descritiva me ajudou na análise de situações de Geometria Analítica, pois, apesar de serem tratadas em distintas disciplinas e expressões (gráficas e analíticas, respectivamente), ambas podem representar os mesmos objetos matemáticos por linguagens diferentes<sup>40</sup>.

---

<sup>39</sup> A citação usa palavras da época que podem aparentar errôneas para os dias atuais. Optei por deixar como o original por se tratar de uma citação.

<sup>40</sup> Esta noção muda após a produção de dados e será apresentada na próxima Seção.

Figura 40 – Projeções da reta nos planos de coordenadas.

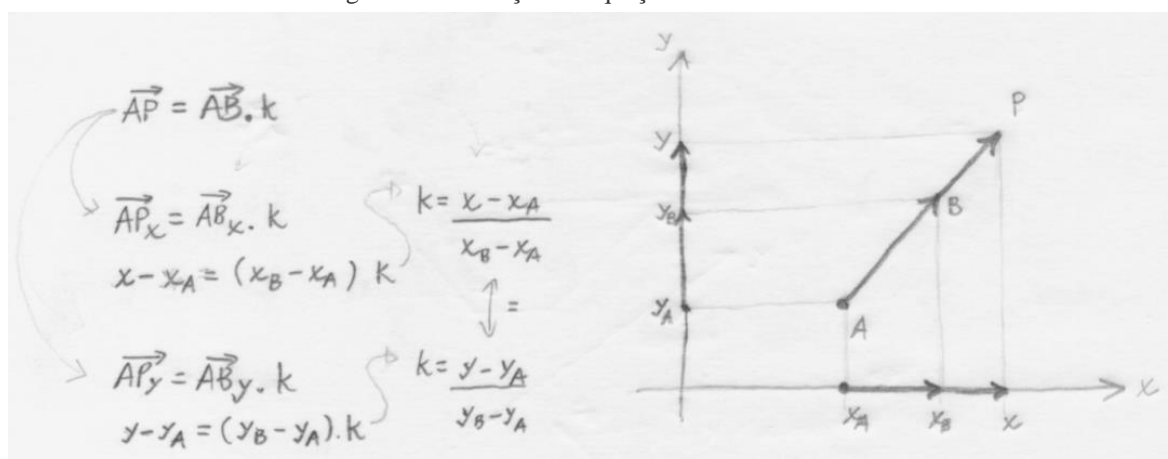


Fonte: Do autor.

Na tentativa de continuar estabelecendo relações entre os meus conhecimentos e a Geometria Analítica, comecei a pensar na geratriz do cone que é uma reta. Sobre a reta analítica, tinha conhecimento apenas de que uma de suas equações está em função do coeficiente angular e de onde a reta corta um dos eixos, contudo o que conhecia da geratriz eram apenas dois dos seus pontos (o vértice e um dos pontos da circunferência diretora). Ao conversar com minha namorada Juliana (que é professora de Matemática, doutoranda do mesmo programa de Pós-Graduação), ela me falou que posso representar uma reta por vetores, então abandonei as ideias de equação de reta anteriores e fui pesquisar sobre esse tipo de expressão.

Juliana me explicou que um vetor possui módulo, direção e sentido, fato já conhecido por mim, e que infinitos vetores com mesma direção e origem estão sobre uma mesma reta. Desse modo, se conheço dois pontos  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$  que determinam uma reta e minha intenção era encontrar uma equação no plano para todos os pontos  $P(x, y)$  que satisfaçam a essa equação, pude concluir que  $A$ ,  $B$  e  $P$  são colineares, permitindo-me inferir que há um vetor  $\overrightarrow{AP}$ , resultado do produto de um vetor  $\overrightarrow{AB}$  com um valor  $k$ , ou seja,  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \cdot k$ . Olhando para as projeções dos vetores nos eixos de coordenada (Figura 41), percebi que o módulo do vetor  $\overrightarrow{AP}_x$  (projeção do vetor  $\overrightarrow{AP}$  no eixo  $x$ ) é  $x - x_A$ . Analogamente à relação entre os vetores  $\overrightarrow{AP}$  e  $\overrightarrow{AB}$ , pude concluir que  $x - x_A = (x_B - x_A) \cdot k$ , do mesmo modo para as projeções no eixo  $y$ .

Figura 41 – Dedução da equação simétrica da reta.



Fonte: Do autor.

Como ambas as equações estão em função de  $k$ , isolei a incógnita e igualei as equações de  $x$  e  $y$ , chegando à expressão:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

Ao deduzir essa expressão, lembrei das minhas pesquisas sobre a equação da reta, a qual pode ser representada por diferentes expressões algébricas, dentre elas, a equação simétrica, semelhante à que deduzi. Neste momento, a equação simétrica tomou um novo significado para mim, extrapolando a analogia do seu nome à sua forma simétrica, produzindo significado a partir da sua origem.

Conhecendo a equação da reta e da circunferência, foi possível montar a equação da superfície. A geratriz é determinada por dois pontos, o vértice do cone  $V(x_V, y_V, z_V)$  e um ponto da circunferência  $C(x_C, y_C, z_C)$ ; logo:

$$\begin{array}{l} \text{Considerando o vetor } \overrightarrow{CV} \text{ tenho} \\ \frac{x - x_C}{x_V - x_C} = \frac{y - y_C}{y_V - y_C} = \frac{z - z_C}{z_V - z_C} \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} \text{e considerando o vetor } \overrightarrow{VC} \text{ tenho} \\ \frac{x - x_V}{x_C - x_V} = \frac{y - y_V}{y_C - y_V} = \frac{z - z_V}{z_C - z_V} \end{array}$$

Cabe destacar que é indiferente o sentido do vetor, a reta é a mesma, pois reta não tem sentido, conseqüentemente, não importa se utilizo o vetor  $\overrightarrow{CV}$  ou  $\overrightarrow{VC}$ ; por ambos poderia chegar à equação. Como a circunferência diretora estava assente no plano  $xy$ , o valor de  $z_C$  era zero. Para que o modelo me proporcionasse o mínimo de posições repetidas da superfície, fixei o vértice no plano  $xz$ , com valores positivos para as coordenadas  $x$  e  $z$ . Portanto, a equação da geratriz da superfície cônica do modelo expressou-se por:

$$\begin{array}{l} \text{Considerando o } \overrightarrow{CV} \\ \frac{x - x_C}{x_V - x_C} = \frac{y - y_C}{-y_C} = \frac{z}{z_V} \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} \text{e considerando } \overrightarrow{VC} \text{ temos} \\ \frac{x - x_V}{x_C - x_V} = \frac{y}{y_C} = \frac{z - z_V}{-z_V} \end{array}$$



Para analisar qual dessas duas expressões seria melhor para deduzir a equação do cone e sabendo que ela deve satisfazer à equação da circunferência diretora expressa por  $z_C = 0$ ;  $x_C^2 + y_C^2 = r^2$ , isolei os valores de  $x_C$  e  $y_C$  na equação da reta para fazer as substituições. Por conta de as incógnitas citadas aparecerem apenas uma vez na equação derivada do vetor  $\overrightarrow{VC}$ , a escolhi para facilitar o tratamento algébrico.

Por utilizar praticamente as coordenadas do vértice e o raio, denominei  $x_V$  de  $a$  e  $z_V$  de  $b$  e utilizei as equivalências que não apresentavam as duas incógnitas ( $x_C$  e  $y_C$ ) simultaneamente, ou seja,

$$\frac{x - a}{x_C - a} = \frac{z - b}{-b} \quad ; \quad \frac{y}{y_C} = \frac{z - b}{-b}$$

Isolando as incógnitas, cheguei às respectivas equações:

$$x_C = \frac{bx - az}{b - z} \quad ; \quad y_C = \frac{by}{b - z}$$

Substituindo na equação da circunferência:

$$r^2 = \left( \frac{bx - az}{b - z} \right)^2 + \left( \frac{by}{b - z} \right)^2$$

Não posso deixar de dizer que, no processo de desenvolver a equação, cometi alguns erros algébricos e só depois de retomar algumas vezes é que cheguei à equação posta.

Definida a equação, fui ansiosamente validá-la no Geogebra para gerar a superfície; contudo, ao inserir a expressão, o programa retornou a seguinte mensagem: “Equação Inválida: por favor, especifique uma função polinomial em  $x$  e  $y$ ”. Mais uma vez, em meu repertório, não havia muita informação sobre polinômio, visto que a última vez que escutei esse termo foi no ensino médio. Novamente, em uma busca rápida na internet, encontrei: “Uma Função Polinomial é uma função dada por um polinômio, ou seja, para todo  $x$  pertencente ao domínio da função, encontramos o valor de  $y$  na imagem da função calculando o valor de um polinômio no valor de  $x$  do domínio” (MAKIYAMA, [s.d]).

Foi notório, para mim, que a linguagem adotada pelo autor não esclareceu minha dúvida, levando-me a realizar uma nova busca:

Polinômios são expressões algébricas formadas pela adição de monômios. Ambos são constituídos por números conhecidos e números desconhecidos. [...] Monômios são constituídos pelo produto entre números conhecidos e incógnitas (números desconhecidos comumente representados por letras). Divisões por incógnitas não são consideradas monômios, mas são chamados de frações algébricas (SILVA, [s.d]).

Por meio desta segunda pesquisa, compreendi que basta desenvolver a equação de modo a não apresentar frações algébricas que naturalmente os monômios aparecem.

Desenvolvendo,

$$r^2(b - z)^2 = (bx - az)^2 + (by)^2$$

Et voilà! Esta é a equação da superfície cônica circular em função das coordenadas do vértice (com  $y_V = 0$ ) e do raio do círculo diretor. Todavia, esta não é a equação que Daniel me enviou, mas ambas expressam o mesmo cone, fato que foi validado quando inseri as duas equações no Geogebra, gerando duas superfícies sobrepostas. A diferença é que cada uma delas proveio de equações distintas, a de Daniel é resultado de uma translação em uma superfície cônica cujo círculo diretor é tangente à origem; logo, a sua equação foi derivada da equação  $x^2 + y^2 = 2rx$ , além disso, o  $y_V$  não é nulo.

A fim de finalizar o modelo da superfície simulando o manuseio, optei por não utilizar o controle deslizante, visto que a manipulação de um ponto é uma experiência distinta, inclusive cognitiva, da manipulação dos controles deslizantes. Neste último caso, um ponto se move apenas em uma direção de acordo com a movimentação do ponto do controle deslizante escolhido, e não do ponto o qual se quer movimentar. Já no primeiro caso, é possível mover o ponto desejado em direções paralelas ao plano  $xy$  ou ao eixo  $z$ . Neste sentido, o controle deslizante é utilizado em muitos modelos em que o valor do controle é importante para a análise do movimento, podendo ser usado em outros que não têm esse fim. No caso do modelo da superfície cônica, o foco está na observação do movimento do vértice em relação à superfície, de modo a inferir se é reta ou oblíqua, e não em como os valores das coordenadas do vértice interferem na superfície. Pelo exposto, optei pela manipulação direta do ponto.

Para realizar as adaptações, simplesmente substituí os valores  $a$ ,  $b$  e  $r$  da equação pelas coordenadas dos pontos definidos. Para isso, foi necessário criar antecipadamente os pontos ( $V$  e  $C$ ) como objetos livres e/ou pontos que determinassem as distâncias, ou seja, criei um ponto  $A$  como projeção do vértice em  $xy$ , um ponto  $B$  como projeção do vértice em  $yz$  e um ponto  $D$  na origem; dessa maneira, a equação poderia ser expressa por:

$$\overline{CD}^2(\overline{AV} - z)^2 = (\overline{AV}x - \overline{BV}z)^2 + (\overline{AV}y)^2$$

Ou simplesmente:

$$x[C]^2(z[V] - z)^2 = (z[V]x - x[V]z)^2 + (z[V]y)^2$$

Nesta segunda opção, o  $z[V]$  se refere a um comando no Geogebra em que o programa retorna o valor da coordenada  $z$  do ponto  $V$ . Por essa maneira não é necessário criar os pontos  $A$ ,  $B$  e  $D$ . Destaco que descobri essa função algum tempo depois, fato que pode me ajudar na implementação desse modelo em situações futuras.

Modelada a superfície, resta adicionar os outros elementos (plano de seção, planos diretores, esferas, entre outros) para ter o modelo completo.

\*\*\*

## **RETOMANDO E AVANÇANDO O ASSUNTO: GENERALIDADES DAS CÔNICAS E SEUS PONTOS IMPRÓPRIOS**

\*\*\*

De volta às reuniões do Grupo de Estudos, o Bruno tentou retomar um pouco do que havíamos discutido nos encontros passados. Muita coisa eu não lembrava mais, mas sabia que tínhamos discutido. Até tentei imaginar alguma coisa, mas não consegui, estava com preguiça de tentar desenhar algo e acabei esquecendo. Fiquei até com vergonha de dizer que não lembrava das posições do plano de seção para cada curva cônica, porém, quando o Bruno percebia que eu não estava entendendo, perguntava de outra maneira, refletindo sobre uma situação que não havíamos discutido antes. Esse novo modo de pensar a mesma coisa acaba levando a gente para outras discussões.

Um exemplo disso foi quando o Bruno pediu para pensarmos na posição do plano de seção diferente de quando havíamos discutido no semestre anterior (já que eu não lembrava, risos). Anteriormente, mudávamos o ângulo entre o plano e o eixo ( $p^\circ$ ) para analisar. Dessa vez, ele pediu para fixarmos o  $p^\circ$  e imaginarmos o plano se movendo, sempre partindo da sua posição passando pelo vértice. Então, se ele passa pelo vértice formando  $90^\circ$  com o eixo, a seção é um ponto. Se o movermos sem mudar o ângulo, a seção vai ser uma circunferência (esse foi fácil lembrar).

Eu sabia que, se mudasse um pouco o ângulo, a seção ainda seria um ponto e, movendo o plano, seria a elipse, mas eu não lembrava qual era o limite, então sugeri que o plano fosse paralelo ao eixo. Se passar pelo vértice, a seção é um “X” e, à medida que afasta o plano, a seção é uma hipérbole, pois ele corta parte superior e inferior do cone; quando corta só uma, a seção é uma elipse. Mas eu também não sabia qual era o limite do ângulo. Na verdade, eu não estava sabendo identificar o ângulo, porque o plano sempre formava dois ângulos com o eixo, um maior que  $90^\circ$  e um menor (a menos que fosse igual a  $90^\circ$ , pois seriam iguais). Então o Bruno disse que poderíamos padronizar que o ângulo formado entre o plano e o eixo seria sempre o menor ângulo.

Antes de revisarmos esses limites, o Bruno perguntou: “Em que posição a seção vai ser uma reta?” O Melão respondeu que seria quando ela passa pelo vértice e por uma geratriz. Então o Bruno pediu para eu mover o plano (no caso, desenhar o resultado do movimento) para outro lugar que não o vértice. Eu fiz o desenho (Figura 42), mas não lembrava qual cônica seria. O Melão disse que era a parábola, concordei, mas sem lembrar o porquê.

Figura 42 – Desenho de seção cônica quando o plano está paralelo à geratriz (e QR-Code<sup>41</sup>).



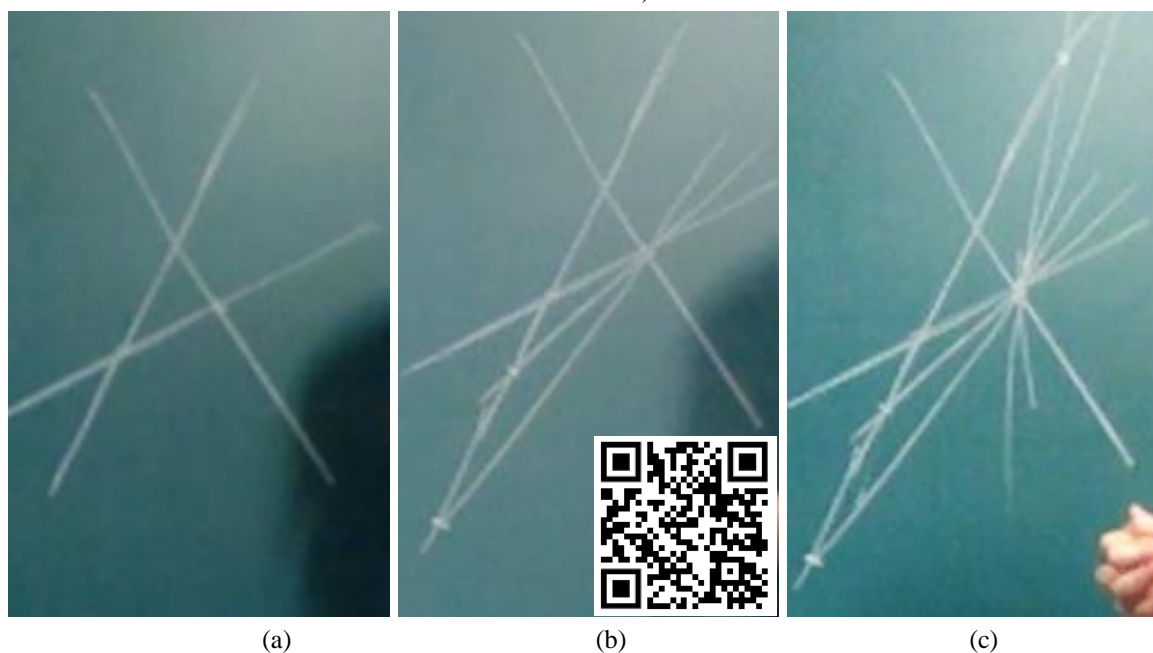
Fonte: Dos dados.

Depois o Bruno fez o desenho de um cone e uma seção que daria uma elipse (Figura 43a) e pediu para analisarmos os dois pontos em que o plano corta as duas geratrizes. Ele fixou um dos pontos e perguntou: “O que acontece com o outro ponto se mudássemos o ângulo do plano de seção (Figura 43b)?” O Melão comentou que, quanto mais inclinássemos o plano, o ponto iria se afastando até passar para a parte de cima (Figura 43c). E o Bruno perguntou: “Onde estaria o ponto se o plano cortasse a superfície cônica numa parábola?” No infinito, respondeu o Melão, mas o Bruno comentou que o infinito não é um lugar, e sim uma ideia, então, no caso, o ponto estaria infinitamente afastado.

---

<sup>41</sup> Ao acessar o *link* do QR-Code, posicione o controle deslizante  $p^\circ$  até ficar igual a  $g^\circ$  (no caso  $40^\circ$ ) e observe a vista em corte à esquerda.

Figura 43 – (a) Esboço de uma seção em um cone em vista; (b) Esboço simulando o movimento do plano de seção em um cone; (c) Esboço simulando o movimento do plano de seção até cortar outro ramo do cone (e QR-Code<sup>42</sup>).



Fonte: Dos dados.

O Bruno aproveitou a situação para explicar umas propriedades da Geometria Projetiva. Falou das principais operações, que são o projetar e o cortar, e falou de uma tal transformação geométrica chamada homologia. Quando ele falou de transformação geométrica, eu me lembrei de transformação linear, mas não sei se essa era a relação que ele estava esperando. Discutimos sobre os vários tipos de transformações geométricas a partir das transformações que conhecíamos (isometria, simetria...) até chegar na homologia (que ninguém estava entendendo o que era). Então, para simplificar, em vez de explicar sobre a homologia, o Bruno explicou sobre o espaço projetivo, em que no  $R^3$  há espaço próprio (conjunto de pontos próprios) e um espaço impróprio (conjunto de pontos impróprios, ou seja, pontos que estão infinitamente afastados). Ele deu o exemplo da reta, que toda reta possui apenas um ponto impróprio. Em seguida, fez um questionamento: “Se eu tenho um segmento de reta e seu ponto médio e afasto um das extremidades infinitamente (Figura 44), onde vai estar o ponto médio?”

<sup>42</sup> Ao acessar o *link* do QR-Code, mova o controle deslizante  $p^\circ$  até o plano assumir as posições correspondentes da Figura.

Figura 44 – Desenho de segmento próprio (acima) e segmento com uma das extremidades imprópria (abaixo) (e QR-Code).



Fonte: Dos dados.

Falei no impulso: infinito sobre dois! Mas o Melão me lembrou que não existe infinito sobre dois, pois como o Bruno disse, infinito não é um número, é uma ideia. Além disso, ele não queria saber uma medida, mas onde está o ponto, o que foi respondido pelo Melão: “também lá” (infinitamente afastado). É como se o ponto impróprio fosse um buraco negro que puxa todo mundo que está “perto”, até porque, se a reta possui apenas um ponto impróprio, então todos os pontos impróprios sobre essa reta vão estar sobre o mesmo ponto impróprio (Eureca!).

Depois de entender essa história de ponto impróprio da reta, consegui deduzir que a interseção entre dois planos paralelos (pergunta que o Bruno fez) é uma reta imprópria, pois um plano possui apenas uma reta imprópria; logo, se dois planos são paralelos, eles se interceptam na mesma reta imprópria.

O Bruno até fez uma “tabelinha” para a gente ir fazendo a relação entre elemento e seus pontos impróprios:

- Uma reta (uma dimensão) possui... um ponto impróprio (adimensional)<sup>43</sup>;
- Um plano (duas dimensões) possui... uma reta imprópria (uma dimensão);
- O  $R_3$  (três dimensões) possui... (esse não foi tão rápido de responder)... um plano impróprio (duas dimensões);
- Com isso, inferi que  $R_4$  (quatro dimensões) possui um  $R_3$  impróprio<sup>44</sup>; logo, um  $R_n$  possui um  $R_{(n-1)}$  impróprio.

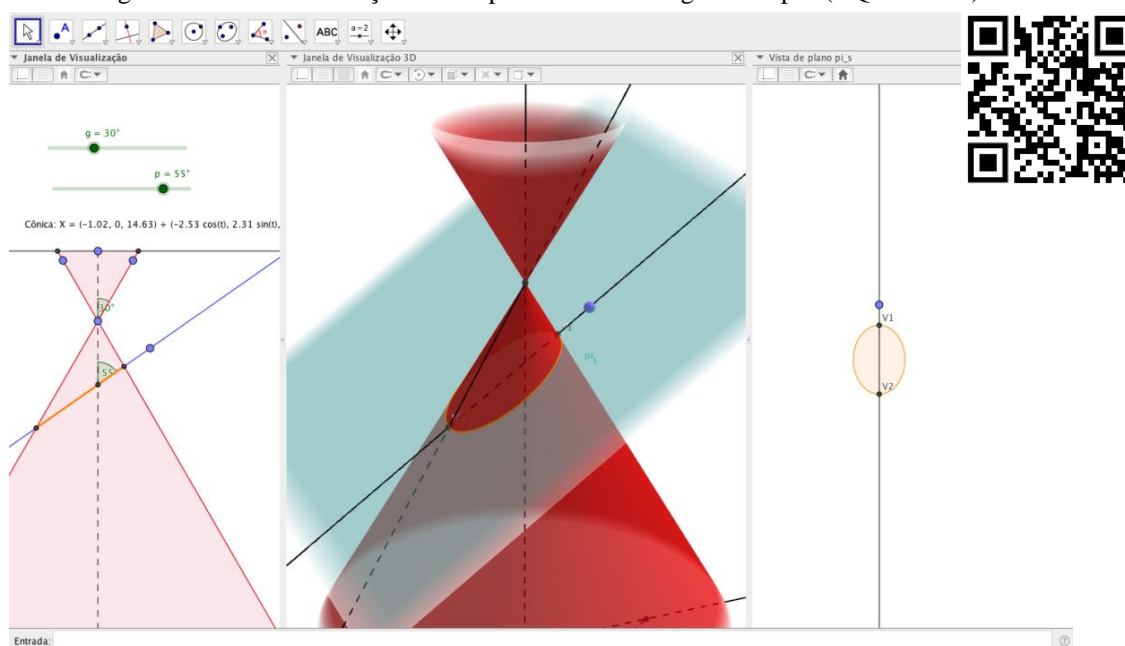
<sup>43</sup> Em termos formais, uma reta possui, como lugar geométrico dos pontos impróprio, o ponto, porém isso não significa que há apenas um ponto impróprio. Se pensarmos em todos os pontos médios entre os que estão impróprios e os próprios, teremos todos os pontos médios impróprios. O mesmo deve ser considerado, analogamente, para os três itens (ponto, reta e plano). Na linguagem coloquial, os participantes se referiram à forma do lugar geométrico, e não à quantidade de elementos.

<sup>44</sup> Esta afirmação expressou-se como uma inferência, porém não foi aprofundado o estudo sobre o espaço de quatro dimensões no Grupo de Estudos. Para mais informações sobre o tema, indico as obras *Geometry of four dimensions*

Tendo todos concordado com esse princípio projetivo, o Bruno pergunta (e não parava de perguntar): “Quantos pontos impróprios tem cada curva cônica? A elipse tem ponto impróprio?” Enquanto eu pensava, respondi: “Não... sei, acho que não.” Lá vai o Bruno colocar a gente para pensar.

Ele mostrou um modelo que fez no Geogebra (Figura 45) em que tinha uma vista em perspectiva no centro, uma vista da seção à direita, uma vista lateral à esquerda e, acima dela, dois controles deslizantes que correspondiam ao ângulo da geratriz com o eixo ( $g^\circ$ ) e ao ângulo do plano com o eixo ( $p^\circ$ ). Em seguida, ele perguntou novamente sobre os pontos impróprios da elipse. O Melão e eu dissemos que essa curva não tinha pontos impróprios, porque víamos todos os pontos da curva e ela era fechada, porém o Bruno disse: “Na verdade, *vocês* a veem fechada”. Realmente, pois pelo paradigma projetivo, todas as curvas são fechadas.

Figura 45 – Modelo de seção cônica produzido no Geogebra: elipse (e QR-Code<sup>45</sup>).



Fonte: Do autor.

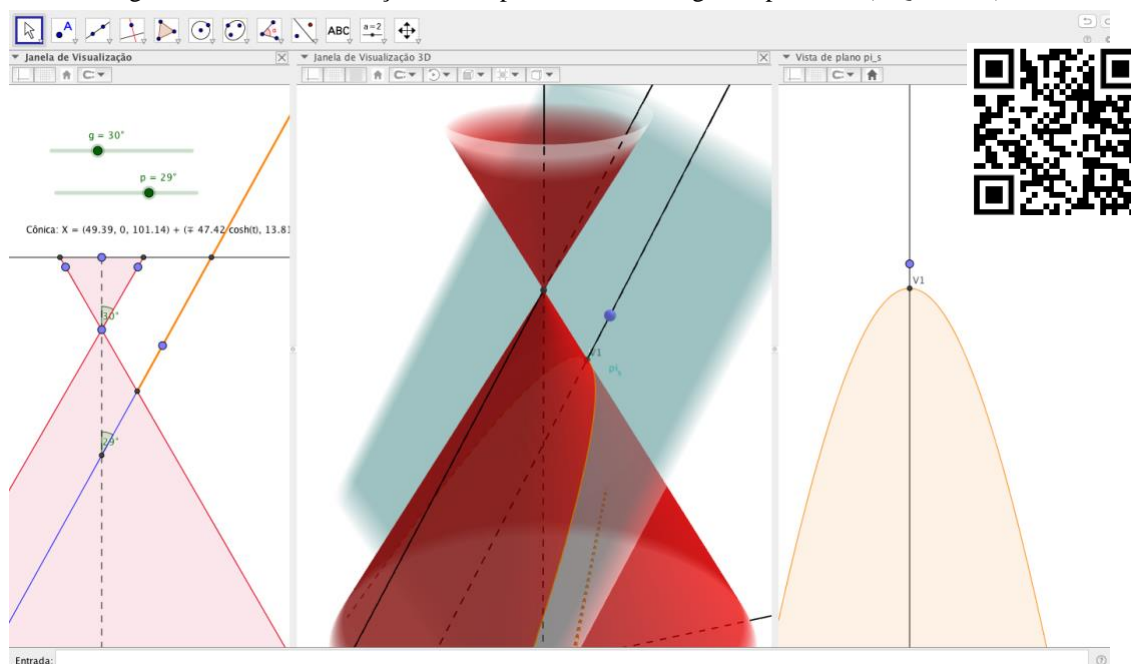
Ao mover os controles deslizantes mudando os valores de  $g^\circ$  e  $p^\circ$ , observamos que o vértice de baixo ( $V2$ ) se afastava cada vez mais do outro vértice, até o momento em que os dois ângulos ficavam iguais. O plano ficava paralelo à geratriz e não era mais possível ver o ponto (Figura 46), ou seja, ele ia para “o além”.

---

do autor Henry Parker Manning, disponível em <https://www.passeidireto.com/arquivo/16907098/henry-parker-manning-geometry-of-four-dimensions>, e *Four-dimensional Descriptive Deometry* do autor C. Ernesto S. Lindgren.

<sup>45</sup> Ao acessar o *link*, ative os itens *e* e  $V1$   $V2$ . O modelo do QR-Code é uma versão atualizada.

Figura 46 – Modelo de seção cônica produzido no Geogebra: parábola (e QR-Code).



Fonte: Do autor.

Como eu não lembrava das posições para cada seção, acabamos não voltando ao assunto dos pontos impróprios das cônicas e ficamos só revisando as posições a partir do modelo. Vimos tanto o caso para cada curva como os casos particulares, quando o plano passa pelo vértice.

Fazer essa revisão foi muito bom, tanto por vermos coisas novas como também por podermos utilizar o modelo. Eu tenho dificuldade em imaginar; no modelo, a gente conseguiu enxergar essa parte que vai para o infinito, porque quando a gente só imagina, a única imagem que me vinha era o cone que vimos em GA<sup>46</sup>. Porém, se eu penso esse exemplo para o ensino fundamental ou médio e o professor pede para imaginar o plano cortando o cone, nunca que eu iria conseguir imaginar uma elipse, uma parábola ou a hipérbole. Nisso o modelo ajuda muito, é quase um material manipulável. Para nós, estudantes universitários, é mais um incremento para ajudar a visualizar.

\*\*\*

Hoje o Bruno retomou a conversa que tivemos outro dia sobre pontos impróprios das cônicas. Me empolgo muito quando a gente começa a viajar nessa coisa de infinito e descobre propriedades nas quais nunca tínhamos pensado antes.

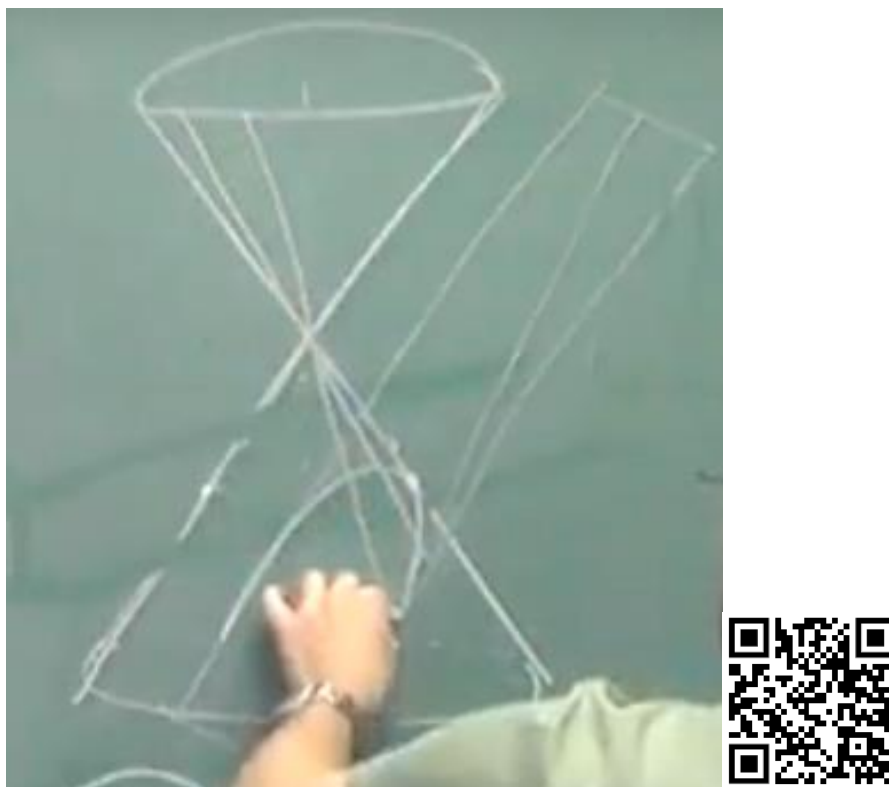
---

<sup>46</sup> Geometria Analítica.



Pois bem, sobre a circunferência e a elipse, foi fácil dizer que elas não possuem pontos impróprios por conta de “vermos” todos os seus pontos, então fomos pensar na parábola e na hipérbole. Para analisarmos a parábola, o Bruno fez o desenho no quadro da superfície cônica, o plano de seção e traçou várias geratrizes com seus pontos correspondentes na curva (Figura 47). Ele foi explicando que cada geratriz ia interceptar um ponto do plano e nos questionou sobre a geratriz que está paralela ao plano. Eu respondi que ela vai interceptar o plano no ponto impróprio. Conseqüentemente, inferimos que a parábola possui apenas um ponto impróprio. O Bruno endossou que, se o plano passasse pelo vértice, ele tangenciaria a superfície justamente na geratriz que era paralela, aquela que passaria no ponto impróprio.

Figura 47 – Desenho de seção cônica, geratrizes e seus pontos correspondentes na seção (e QR-Code<sup>47</sup>).



Fonte: Dos Dados (E09).

Já para a hipérbole, sem pensar muito, diria que não tem nenhum, pois quando acaba um “lado”<sup>48</sup> da curva, começa o outro, mas depois de refletir mais um pouco, comentei que tem, pelo menos, um ponto que liga os dois “lados”, porque ela é duas “coisas”, mas, na verdade, ela é uma coisa só. Com essa inferência, partimos para fazer o mesmo raciocínio que fizemos na parábola (induzido pelo Bruno). Escolhemos uma posição para passar o plano de

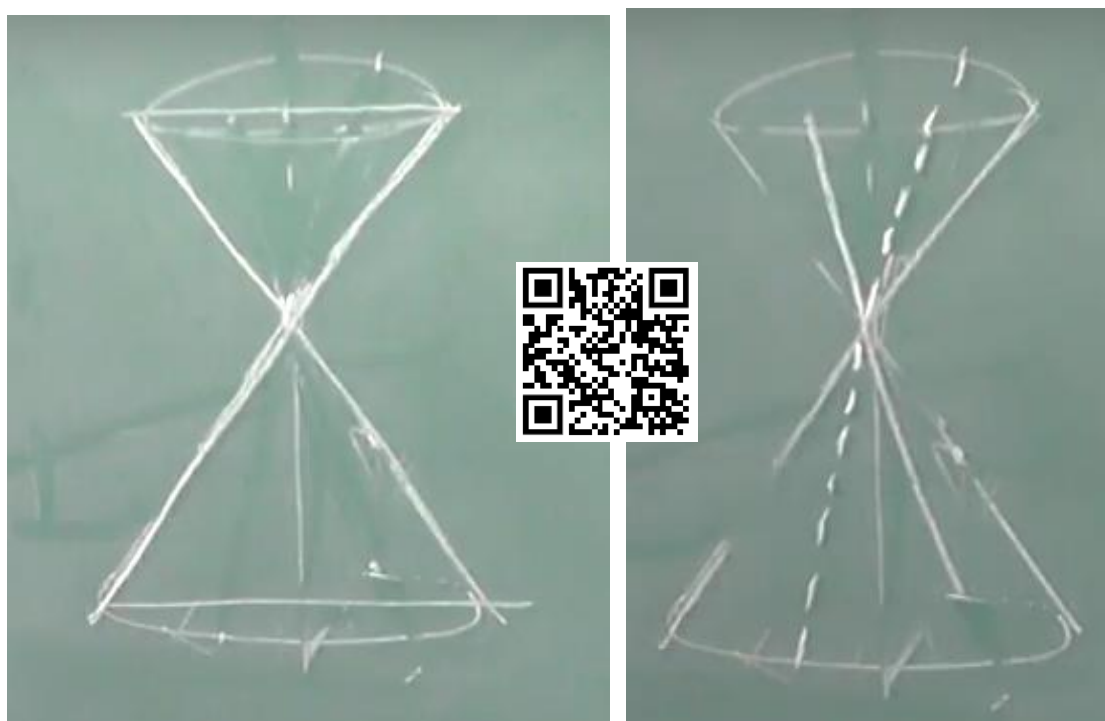
<sup>47</sup> Ao acessar o *link*, ative o item *P* e *g* e, em seguida, mova o ponto *P*.

<sup>48</sup> Quando o sujeito cita o lado, ele se refere ao ramo da hipérbole.

seção, com um ângulo menor que o da geratriz para que desse uma hipérbole, só que passando pelo vértice (escolhemos  $p^\circ = 0^\circ$ ). No caso, a interseção eram duas retas concorrentes, como já sabido.

Para facilitar a visualização no desenho, optamos por considerar que as retas de interseção seriam as mesmas utilizadas para desenhar o cone, ou seja, era como se o plano de seção estivesse paralelo ao quadro (Figura 48a). Fizemos essa escolha a partir da sugestão do Melão, porque não estávamos conseguindo visualizar a partir do outro desenho que o Bruno fez (Figura 48b).

Figura 48 – Desenho de plano de seção em um cone passando pelo vértice paralelamente ao quadro (a) e oblíquo ao quadro (b) e (QR-Code<sup>49</sup>).



Fonte: Dos dados.

Em seguida, o Bruno simulou o movimento do plano com as mãos, como se o plano se afastasse do quadro. Nessa posição, a seção seria uma hipérbole, como previsto. Nessa hora, todo mundo se confundiu (menos o Bruno), então tentei retomar o que a gente estava fazendo: igual como fizemos na parábola, passamos o plano pelo vértice obtendo duas retas concorrentes; afastando esse plano, entendemos que era a hipérbole a interseção. Eu inferi que essas duas retas se encontram no mesmo ponto, mas o Bruno lembrou que duas retas concorrentes só possuem um ponto em comum e elas já se cruzavam no vértice. Com isso,

<sup>49</sup> Ao acessar o *link*, desative *p* e *sc* e ative *g//*. Mude o ângulo do controle deslizante  $p^\circ$  até aparecerem duas retas concorrentes. Rotacione a vista em perspectiva até se parecer com as imagens da figura.

percebi que o ponto impróprio de cada reta não podia ser o mesmo e, conseqüentemente, que a hipérbole possui dois pontos impróprios, pois essas duas retas concorrentes são paralelas ao plano que contém a hipérbole e se cruzam em dois pontos infinitamente afastados.

Fazendo uma pausa para uma viagem, comentei que se tivéssemos duas retas paralelas e um plano paralelo a elas, as duas retas se encontrariam em um ponto impróprio e o plano cruzaria as duas retas no mesmo ponto impróprio. Genial! Essa coisa de ponto impróprio, infinito, Geometria Projetiva é muito interessante.

\*\*\*

Esse semestre não está fácil, com tantos trabalhos, provas, PET, PIBIC, é muita coisa para dar conta, além disso tem as reuniões do Grupo de Estudos. No início, eu estava bem empolgada, mas quando vi que as discussões foram mais para a Geometria propriamente dita, e não para algo prático, comecei a perder um pouco o interesse e dar prioridades para problemas mais urgentes. Não quis falar nada porque os garotos estavam todos empolgados com a história do ponto impróprio e de que as cônicas eram uma coisa só. Mas isso não quer dizer que não seja interessante, eu só estava um tanto atolada.

Na última vez em que fui à reunião, o Melão foi me colocar a par do que estavam discutindo e começou a fazer todo um teatrinho bem didático para eu entender, achei uma graça. Ele fez um círculo com os braços e pediu para imaginá-lo sendo uma circunferência e disse que os focos dela e o centro estavam no mesmo lugar. Enquanto ele falava, o Bruno segurou um giz na posição do centro (Figura 49a). Então o Melão quebrou o giz e foi separando os dois pedaços, dizendo que, quando os focos estavam juntos, a curva era uma circunferência, mas ao separar, era uma elipse e, quanto mais os focos estavam afastados, a elipse ficava “maior” (Figura 49b). Chegou um momento em que ele não conseguia mais afastar, então ele entregou um dos pedaços de giz para o Bonner e pediu para ele ir o mais longe possível, dizendo que o foco foi lá para o ponto impróprio; com isso, não poderíamos vê-lo. Neste caso, a curva seria a parábola. Mas quando o foco voltasse a aparecer, ele daria uma voltinha e apareceria do outro lado. Nessa hora, o Melão apontou para o Bruno, que estava no lado oposto da sala, e fez a analogia com aqueles joguinhos de videogame em que o personagem sai de um lado da tela e aparece do outro, achei uma onda a comparação, mas fez total sentido. Aí ele explicou que o foco era inicialmente um ponto próprio, depois foi lá para longe se tornando impróprio, em seguida voltou a ser próprio, então a curva não seria mais uma elipse, mas uma hipérbole (essa fui eu que respondi). O Bruno até ajudou com os braços enquanto o Melão explicava como a

“bundinha” da curva que estava de um lado (Figura 49c) tinha vindo para o outro lado na mesma posição (Figura 49d), por isso virava uma hipérbole.

Quando eu pensei que era isso que o Melão queria me explicar, ele disse que, na verdade, eles estavam discutindo sobre o centro da curva, então, no início, o centro estaria no meio dos focos (no caso da elipse). Mas onde estaria o centro quando fosse a hipérbole? (ele esticou os braços apontando um para cada lado). Essa fui eu que respondi de novo, vai estar *so far away*, pois o centro não podia estar fora da curva, ou seja, as cônicas vão virando uma na outra, é tudo uma coisa só.

Figura 49 – Gestos da explicação de Guilherme sobre a generalização das cônicas.



(d)



Fonte: Dos dados.

Mas por mais interessante que fosse (e era), minha cabeça estava atolada de outras demandas que tinha que dar conta. Fiquei muito mal por isso, pois comecei a faltar à reunião do Grupo de Estudos para dar prioridade ao curso e à pesquisa em que estava inserida (inclusive, minha pesquisa foi premiada). Porém, isso não justificava minha ausência, já conversei com o Bonner que estou sem cara para falar com o Bruno, mas vou criar coragem, é melhor eu sair do que ficar empurrando com a barriga e atrapalhar o grupo. Espero que ele não fique chateado.

\*\*\*

Discutir sobre os pontos impróprios de cada curva cônica é algo muito prazeroso, pois me fascina como a Geometria Projetiva me permite generalizar algumas propriedades, por exemplo, de todas as cônicas.

Embora as discussões no grupo estejam sendo muito produtivas, notei que Sabrina estava faltando a algumas reuniões e isso começou a interferir na sua participação nas reuniões, deixando de estar protagonizando as discussões e passando mais a acompanhar e comentar. Não que esse tipo de postura fosse considerado inadequado, o Rafa, por exemplo, é mais calado e sua participação é mais quando questionado, é o perfil dele, mas no caso de Sabrina, notei que ela não estava bem por algum motivo. Tentei procurar saber se estava acontecendo algo, mas não consegui nenhuma resposta a princípio.

Depois de algumas tentativas, ela finalmente expôs a situação de que estava difícil conciliar o Grupo de Estudos com outras atividades, mas que o principal motivo foi o direcionamento que as discussões tomaram, indo para algo mais geométrico do que prático ou aplicado. Entendi perfeitamente a situação, pois sei que ela é uma ótima pessoa e aluna, não era um caso de irresponsabilidade ou desleixo. Perguntei se eu poderia fazer alguma coisa ou se gostaria de trabalhar alguma situação prática da escolha dela, mas ela disse que os meninos estavam muito empolgados com o modo que estava sendo feito e não preferia deixar de participar. Notei que ela ficou preocupada de prejudicar a pesquisa ou que eu ficasse chateado,

mas expliquei que não havia problema, pois tinha dados para fazer umas cinco teses. Pedi apenas para que ela comparecesse à última reunião de avaliação.

\*\*\*

## OS ELEMENTOS DAS CURVAS CÔNICAS

\*\*\*

Acho que hoje a caixa de pandora abriu, eu vi na cara do Bruno o seu contentamento porque a gente conseguiu analisar vários elementos das cônicas de modo genérico. Sabe aquele momento em que o véu cai e você vê que existe um mundo ao seu redor? É quase como no filme Matrix, em que você enxerga tudo de um jeito diferente. Foi assim que eu me senti quando a gente conseguiu fazer várias generalizações.

Tudo começou com o Bruno perguntando quais os elementos das cônicas que conhecíamos. Citamos alguns: vértice, foco, centro. Então tentamos pensar em elementos específicos de algumas cônicas e analisar se eles existiam para todas.

Lembramos que a parábola tem eixo, a circunferência tem raio, a elipse tem eixo maior e eixo menor. O Bruno continuou perguntando por outros elementos, enfatizando que o foco, por exemplo, era um ponto que tinha relação com a curva, mas que não necessariamente era da curva e ficou insistindo sobre a parábola. Existia algum elemento nela que não estávamos dizendo, pois ele falou  $n$  vezes na parábola, eu até questionei isso, mas ele desviou o foco (não da cônica, risos) para a circunferência. Ele perguntou sobre as nossas experiências com a circunferência em Geometria no ensino médio. Que Geometria? Mal estudei Geometria no ensino médio, a única coisa que lembro é a equação da circunferência... e também sei calcular o perímetro.

O Bruno seguiu com suas perguntas e a conversa começou a ficar dinâmica.

\*\*\*

*Bruno* – Que pontos têm relação com as cônicas? Onde eles podem estar?

*William* – Podem estar dentro ou fora.

*Guilherme* – Mas o que é interno e o que é externo?

*Rafael* – O que está contido na curva.

Guilherme – Mas o que você quer dizer com contido na curva? Quando você tem isso aqui dá (Figura 50a), aí você tem uma região aqui dentro.

*William* – Lembrando que a gente está na Geometria Projetiva, não é?

*Bruno* – Isso. Na circunferência, qual a parte interna e externa?

*William* – A parte interna é a que está com o centro (Figura 50).

*Bruno* – Ok, agora vamos tentar interligar com o que a gente já discutiu sobre seção cônica. A parte que vocês disseram que é interna da circunferência corresponde a que parte do cone?

*Guilherme* – À parte interna.

*Bruno* – Então onde é a parte interna da parábola?

*William* – Hum! Vão ser em todos esses pontos que o Guilherme está marcando (Figura 50b). E a parte interna da hipérbole?

Figura 50 – Indicação de região interna em um esboço de circunferência (a); Região interna da parábola destacada com pontos (b) (e QR-Code).



Fonte: Dos dados.

*Guilherme* – A gente tinha o cone aqui... ela está aqui (Figura 51a)... aí a parte interna é essa aqui (Figura 51b).

*William* – Genial! Sabe o que fico pensando? É como se todas as cônicas fossem a mesma coisa, só que se você muda os elementos, vai ter coisas diferentes.

*Guilherme* – Eu também parei para pensar nelas como uma mesma coisa. Se a gente pensar em um intervalo de tempo para o plano de seção e ele for interceptando, vai gerar todas. É a mesma coisa, porque o plano não transladou, ele só está mudando a rotação. Muito legal! Eu queria encontrar similaridades entre elas.

*Bruno* – Ótimo! Então vamos continuar a análise para as outras curvas. Alguém tem dúvida sobre a região interna da elipse? Não? Outra pergunta: existem pontos que podem ocupar posições específicas em relação às curvas?

Figura 51 – Região interna da Hipérbole no cone (a) e no plano de seção (b) (e QR-Code<sup>50</sup>).



Fonte: Dos dados.

*William* – Tipo, mesma distância? Na circunferência, tem o centro.

*Guilherme* – Será que o ponto que está equidistante na parábola é o ponto impróprio? Porque ele está infinitamente afastado de todos os pontos igualmente... ele é o único que vai ter a mesma distância? Faz sentido, não é? Se for pensar nisso, a circunferência tem dois pontos: o centro dela e esse ponto que está infinitamente distante.

*William* – Será que vai ter um ponto desse na elipse também?

*Guilherme* – Sim, a gente é induzido a dizer que é um ponto no centro.

*Bruno* – Será que esse ponto vai ter a característica de equidistância para todas as curvas?

*Guilherme* – Não, daí a gente mistura com focos.

*Bruno* – E o que podemos falar sobre os focos? Onde estão os focos na circunferência?

*Guilherme* – No centro.

*William* – Mas é o centro ou ponto de equidistância?

*Guilherme* – Centro. E se o centro não for o ponto de equidistância, mas sim o ponto de maior e menor distância da curva? Porque ele está equidistante de todos, mas também é a maior e a menor distância.

<sup>50</sup> Após acessar o *link*, mova o controle deslizante  $p^\circ$  até o ângulo  $2^\circ$  e observe a janela da vista à esquerda e a janela à direita.



*Bruno* – É isso aí! Vocês lembram o conceito de elipse que a gente viu no encontro passado? Elipse é...?

*Guilherme* – O ovo!

*William* – Conjunto de pontos cuja...

*Guilherme* – A soma das distâncias dos focos!

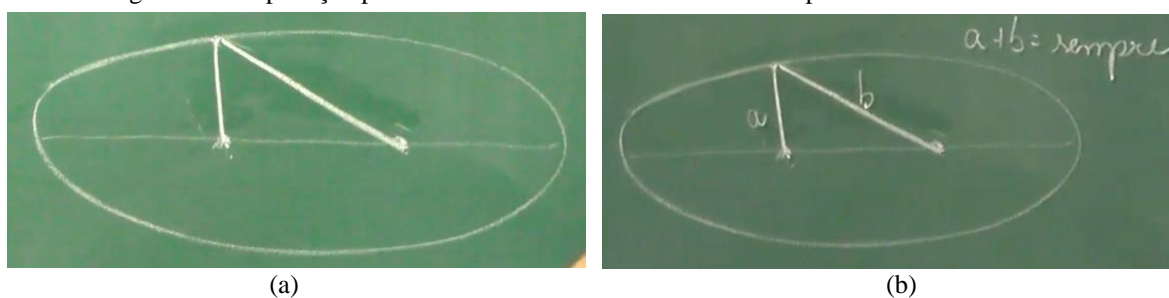
*William* – Do jeito que você está falando dá para entender que é a distância entre os focos, mas na verdade é a distância do ponto até os focos.

*Guilherme* – Ah tá, desse ponto (um ponto da curva) à soma dos focos (Figura 52a).

*Bruno* – O que você está pensando está certo, mas o que fala está estranho.

*William* – A soma delas é constante, que é o eixo maior. Você soma a medida de  $a$  e  $b$  e varia o ponto ao longo da curva (Figura 52b).

Figura 52 – Explicação por meio de desenho de distâncias de um ponto da curva aos focos.

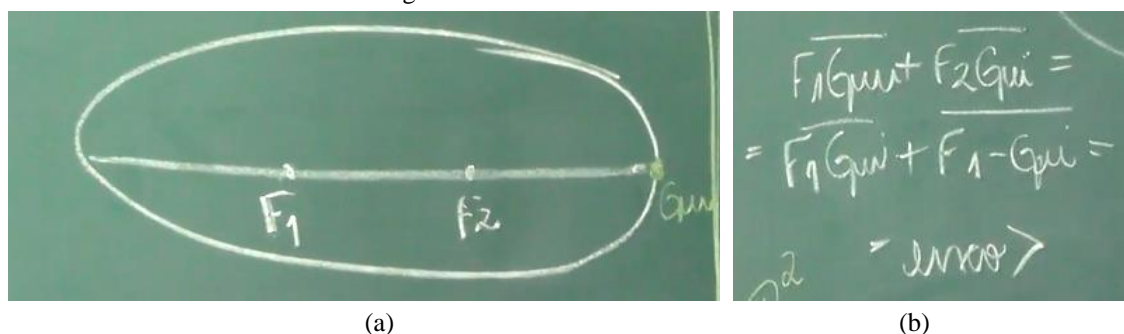


Fonte: Dos dados.

*Bruno* – Mas por que é igual ao eixo maior?

*Guilherme* – Se eu pego esse ponto aqui (Figura 53), vou chamar ele de *Guilherme*, e eu sei que ele é um ponto da elipse, quando eu somar a distância até os focos, a soma vai ser igual para qualquer outro ponto da elipse. Então, essa soma vai ser de  $F_1$  ao ponto *Gui* mais de  $F_2$  ao ponto *Gui*. Só que eu sei que essa última distância,  $\overline{F_2Gui}$ , é igual à medida de  $F_1$  até o oposto desse ponto,  $-Gui$  (outro ponto do eixo maior que pertence à curva). E como o eixo maior é  $\overline{F_2(-Gui)} + \overline{F_1F_2} + \overline{F_2Gui}$ , então a soma das duas distâncias é igual ao eixo maior.

Figura 53 – Soma dos raios vetores.



Fonte: Dos dados.

*Bruno* – Isso! E o que é esse eixo maior?

*Guilherme* – É a maior distância entre pontos da elipse.

*Bruno* – Ok. Tem outra característica para esse eixo?

*Guilherme* – Se eu rotacionar em torno desse eixo, a elipse se mantém. É um eixo de simetria da elipse?

*Bruno* – É, sim. Então, quais eixos a gente pode encontrar nas curvas?

*William* – Ah! Os eixos de simetria, todas têm. A elipse tem o eixo menor, não é? Faz um ângulo reto com o eixo maior.

*Bruno* – Indo pela ideia do Guilherme, o que é o eixo secundário?

*William* – A menor distância.

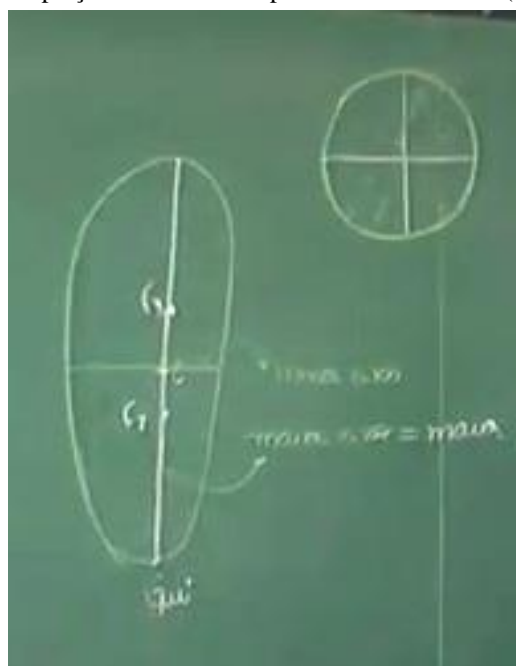
*Rafael* – Acho que não, porque se você pegar dois pontos perto um do outro, fica uma coisa diferente do eixo.

*Guilherme* – Então seria a menor distância de dois pontos da elipse que passa pelo centro. Vamos pensar na circunferência. Os eixos iam ser todos os diâmetros.

*Bruno* – Então qualquer um pode ser. Mas se a gente fosse adaptar a elipse na circunferência, como iria ficar?

*William* – Seria uma cruz (Figura 54).

Figura 54 – Adaptação de eixos da elipse na circunferência (e QR-Code<sup>51</sup>).



Fonte: Dos dados.

<sup>51</sup> Após acessar o *link*, ative as caixas V1 V2 e V3 V4; em seguida, observe o comportamento dos eixos ao mover o controle deslizante  $\rho^\circ$  até ficar igual a  $90^\circ$ .

*Bruno* – Agora faz a parábola e os eixos (Figura 55a). Onde está o outro eixo?

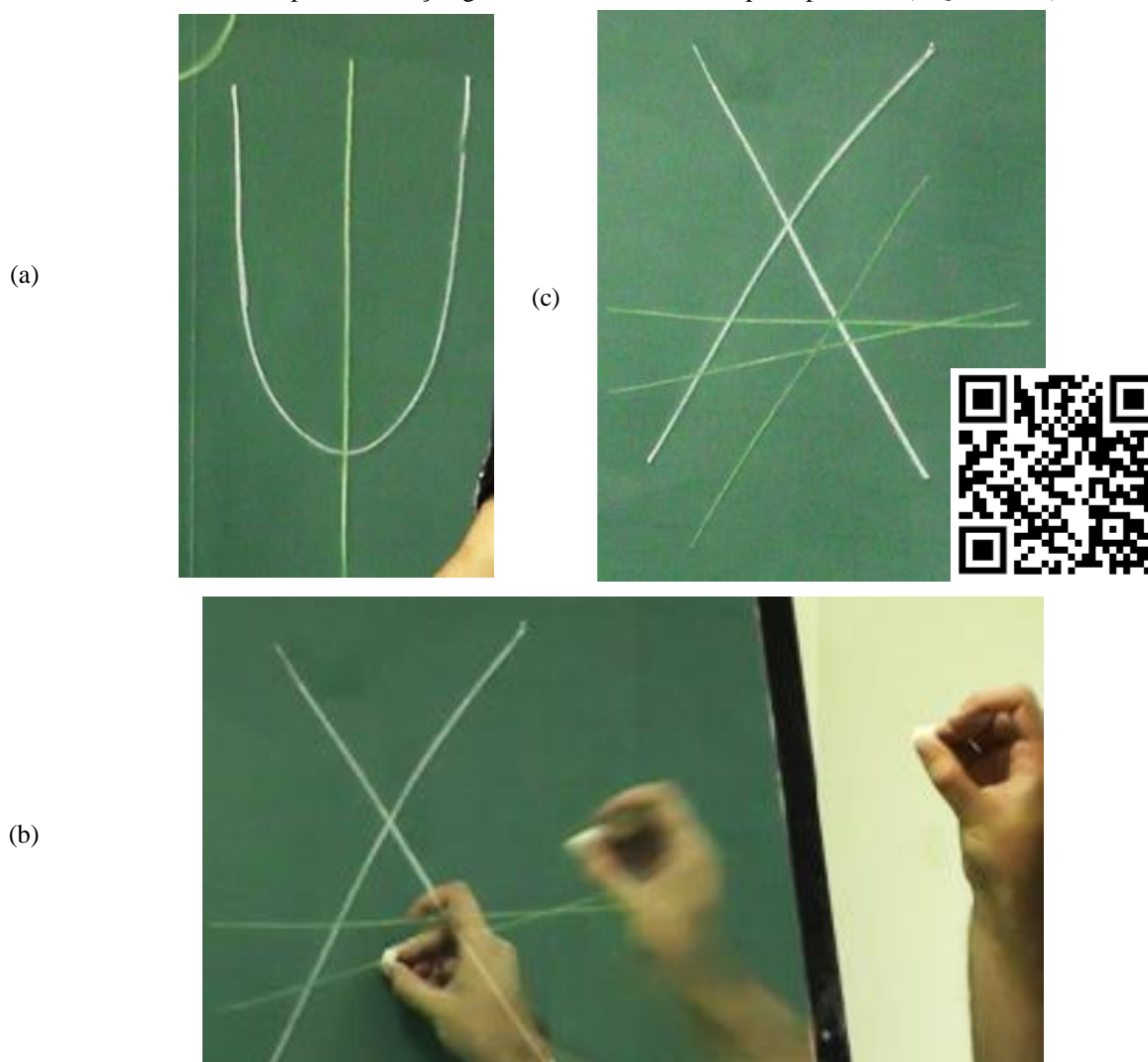
*Guilherme* – Está lá embaixo, não dá para ver, ele é impróprio.

*William* – E por que lá embaixo?

*Bruno* – E por que é impróprio?

*Guilherme* – Pensa no movimento que fez a cônica. Tinha a superfície cônica que, seccionada, resulta na circunferência. Aí a gente mexeu um pouquinho e deu a elipse. Se a gente pensar nela, um dos eixos vai estar aqui entrando (Figura 55b) e o outro pode ser a reta amarelinha. Na hora que vai fazer a parábola, um eixo é a reta amarelinha e o outro sumiu para lá (Figura 55c).

Figura 55 – (a) Eixos da parábola; (b) movimento simulando eixo secundário da elipse; (c) desenho de superfície cônica com três planos de seção gerando circunferência, elipse e parábola (e QR-Code<sup>52</sup>).



Fonte: Dos dados.

<sup>52</sup> Após acessar o *link*, ative as caixas V1 V2 e V3 V4; em seguida, observe o comportamento dos eixos ao mover o controle deslizante  $p^\circ$  até ficar igual ao ângulo do controle deslizante  $g^\circ$ .

*Bruno* – O outro vai estar no ponto médio do eixo maior. Então o ponto médio entre o vértice e o que está infinitamente afastado é um ponto infinitamente afastado. Entenderam? Pensa comigo, qual o conjunto de pontos impróprios do  $R^2$ ?

*William* – É uma reta imprópria.

*Bruno* – Então todos os pontos impróprios têm que estar nessa reta. Esse eixo vai cruzar a reta imprópria em quantos pontos?

*Guilherme* – Um.

*Bruno* – Quantos pontos impróprios tem a parábola?

*Guilherme* – Um.

*Bruno* – O centro também está em cima dessa reta e também o foco. Todos eles estão caindo sobre o mesmo ponto porque estão sobre a mesma reta, que é o eixo maior.

*William* – Faz sentido, se você imagina que a reta possui só um ponto impróprio, o foco coincide com o centro. Se cruzasse em mais de um ponto, iria cruzar em todos. Então o outro eixo é a reta imprópria porque ela tem que passar pelo centro. Por isso que você falou que o ponto médio entre um ponto “normal” e um ponto infinitamente distante é um ponto impróprio, ok.

*Bruno* – Só um detalhe que você perguntou: por que o eixo é embaixo?

*William* – É que não é embaixo, é em cima. Ele falou que era embaixo.

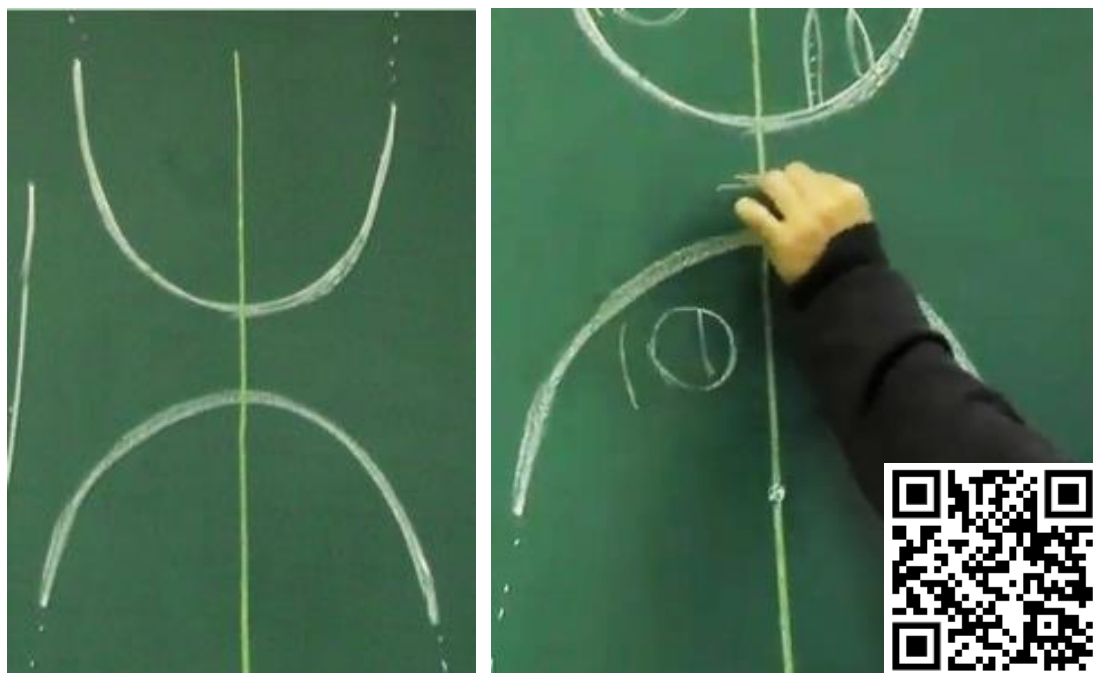
*Guilherme* – É em cima desse (Figura 55a) e embaixo desse (Figura 55c).

*Bruno* – Mas se eu fosse sair dessa posição em que está o desenho da parábola (Figura 55a) e ir para a direção do ponto impróprio, é mais perto por cima ou por baixo?

*William* – É igual, ou seja, tanto faz. Legal, agora vamos para os eixos da hipérbole. Temos que pensar no centro e nos focos. A gente sabe que um dos eixos passa pelos dois focos e o centro, que é o eixo maior (Figura 56a). O eixo menor é impróprio porque, como o centro é comum aos dois eixos, ele é um ponto impróprio.

*Bruno* – Por que o centro da hipérbole é um ponto impróprio? Por que não poderia dizer que o centro é esse aqui (Figura 56b)?

Figura 56 – (a) Eixo principal da hipérbole; (b) indicação de suposto centro da hipérbole (e QR-Code<sup>53</sup>).



Fonte: Dos dados.

*William* – Porque o eixo menor não pode passar por aí. Tem que passar pela curva, assim como nas outras.

*Bruno* – Como vamos chamar os pontos que o eixo secundário toca?

*William* – Vértices.

*Bruno* – Então vamos chamar os vértices do eixo maior de  $V1$  e  $V2$ .  $V2$  vai ser o mais próximo de  $F2$  e  $V1$  de  $F1$ . Os do eixo secundário chamaremos de  $V3$  e  $V4$  (Figura 57a). E na parábola, onde vão estar  $V1$  e  $V2$ ?

*Guilherme* – Aqui é  $V1$  (Figura 57b) e  $V2$  é impróprio coincidindo com o centro.

*Bruno* – A gente representa o ponto impróprio com uma setinha e um símbolo do infinito. E  $V3$  e  $V4$ , onde vão estar na parábola?

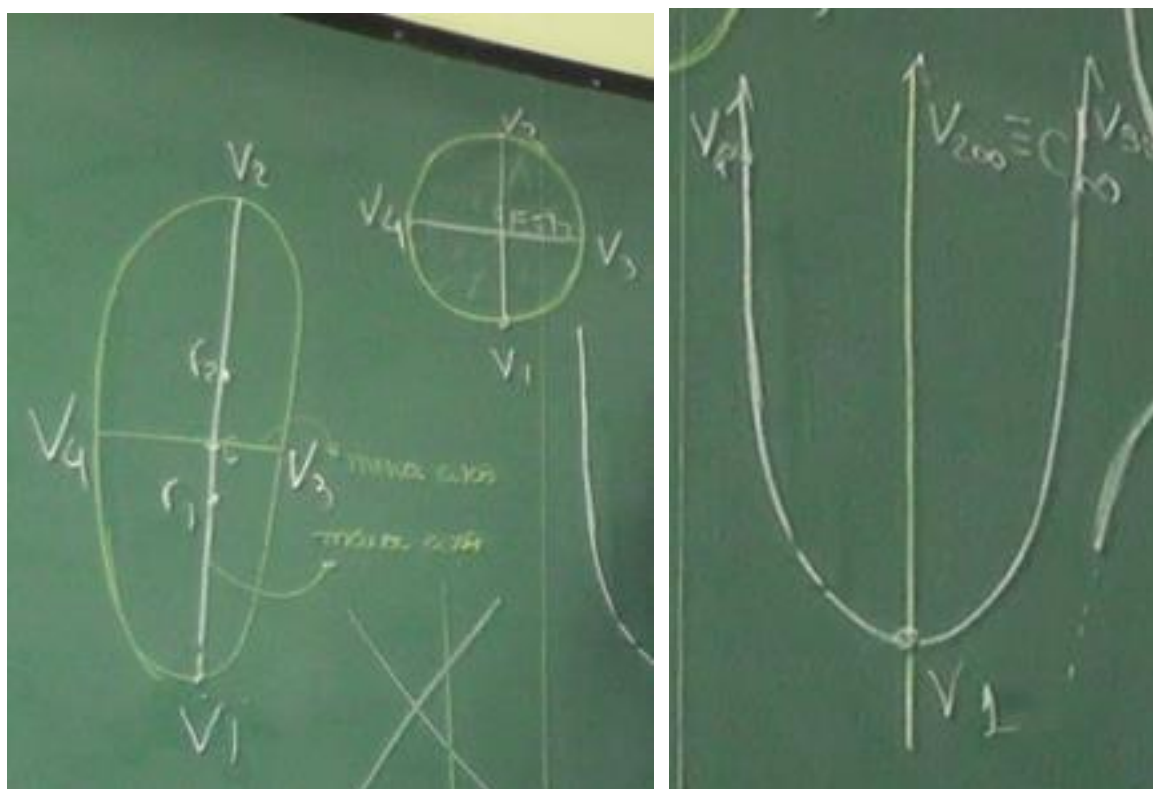
*Rafael* – Sobre a parábola (Figura 57b).

*Bruno* – Agora na hipérbole. *William* disse que o eixo secundário é uma reta imprópria, por quê?

*William* – Tem a ver com os vértices. E também ele passa pelo centro e pela região interna. Então aqui (Figura 56b) não pode ser o centro ( $C$ ), é um outro centro, diferente do da elipse.

<sup>53</sup> Após acessar o *link*, ative as caixas  $V1$   $V2$  ; em seguida, observe o comportamento do eixo maior e do centro ao mover o controle deslizante  $p^\circ$  até ficar maior que o ângulo do controle deslizante  $g^\circ$ .

Figura 57 – Vértices da elipse e adaptação na circunferência (a) e vértices da parábola (b).



(a)

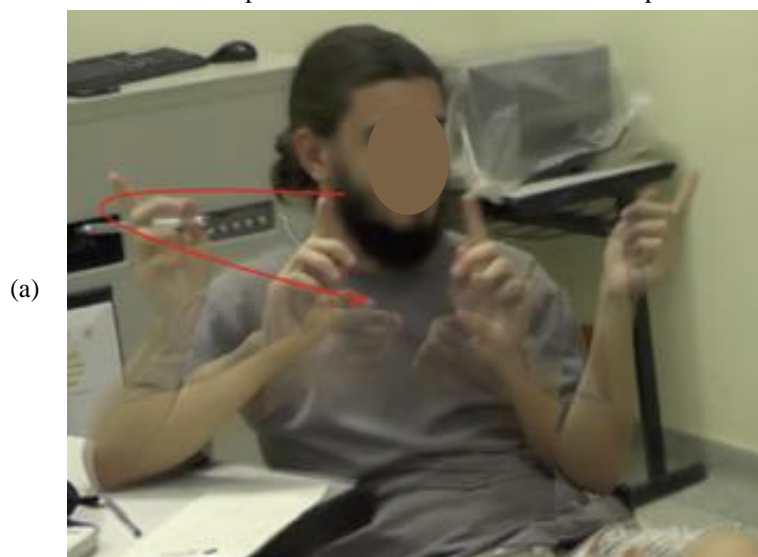
(b)

Fonte: Dos dados.

*Bruno* – A gente pode chamar de centro inverso. Ok! Sabemos que o eixo secundário passa pelo centro e o eixo maior também, como a gente pode ver na elipse (Figura 57a). Então na parábola, o eixo maior vai neste sentido obrigatoriamente (de  $V_1$  para  $V_2$  passando pela região interna). E na hipérbole?

*Rafael* – Faz assim (Figura 58a)... (Figura 58b) isso aí.

Figura 58 – Movimento circular para simular como o eixo maior da hipérbole se comporta.



(a)

(b)



Fonte: Dos dados.

*William* – Calma, buguei!

*Bruno* – Vou perguntar diferente: Onde está essa distância (Figura 59) nas outras curvas?

Figura 59 – Menor distância entre os vértices  $V_1$  e  $V_2$  da hipérbole.

Fonte: Dos dados.

*Guilherme*: Fora.

*William* – Na elipse, o eixo maior é um segmento, só que o segmento está dentro de uma reta. Então se considerar a reta que contém esse segmento e excluir ele da reta, tem a medida que você indicou. No caso da hipérbole, o eixo maior é um segmento infinito. É como se esse negocinho (o segmento externo) fosse o complementar do eixo maior. Ah! Acho que entendi uma coisa: tem a reta  $V1V2$ , a reta  $V3V4$  e elas se interceptam no centro, dá para ver na elipse... Acho que entendi errado. É que o centro inverso da elipse seria a outra interseção dessas duas retas perpendiculares representadas na hipérbole.

*Guilherme* – É muito intuitivo falar que esse centro na hipérbole, no meio, lá no meio, é o ponto impróprio.

*Bruno* – Mas se você está vendo ele, não é impróprio. Ok, é bom fazer isso, porque você está relacionando com a elipse, em que esse ponto é impróprio.

*Guilherme* – É porque se a gente pensar nisso, sabendo que, na hipérbole, esse ponto (centro inverso) não é o centro e que ele não é impróprio, a gente conclui que, quando ele é impróprio, o maior eixo tem parte imprópria, então para ser o eixo menor, que passe pelo centro, não está em nenhum lugar na hipérbole, ele está todo lá, sozinho no impróprio.

*Bruno* – Pergunta: esse eixo  $\overline{V3V4}$  (Figura 60a) tem interseção com essa reta (Figura 60b)? Elas são a mesma?

*Guilherme* – Ah! Não pode ser a mesma. Porque se fosse o centro, não estaria ali na elipse. Na hipérbole, o centro é impróprio, então a única possibilidade de ser é se elas tivessem o mesmo centro, o mesmo ponto impróprio. E elas já não têm o mesmo ponto impróprio porque elas são retas que se interceptam no centro inverso.

*Bruno* – Qual o ponto impróprio dessa reta (Figura 60b)?

*Guilherme* – É o centro? Acho que não, porque qualquer outra reta que não intercepta ela seria o centro. Ops, o que eu falei não justificou ser ou não, só complementou as possibilidades de ser ou não. Deixa eu tentar de novo: essa reta tem um ponto impróprio diferente do eixo maior, porque elas só podem ser concorrentes em um único ponto e já são concorrentes em um ponto próprio na hipérbole. Se fossem paralelas, iriam se cruzar no mesmo ponto impróprio.

*Bruno* – E o eixo secundário da elipse passa por onde?

*Rafael* – Pelos vértices.

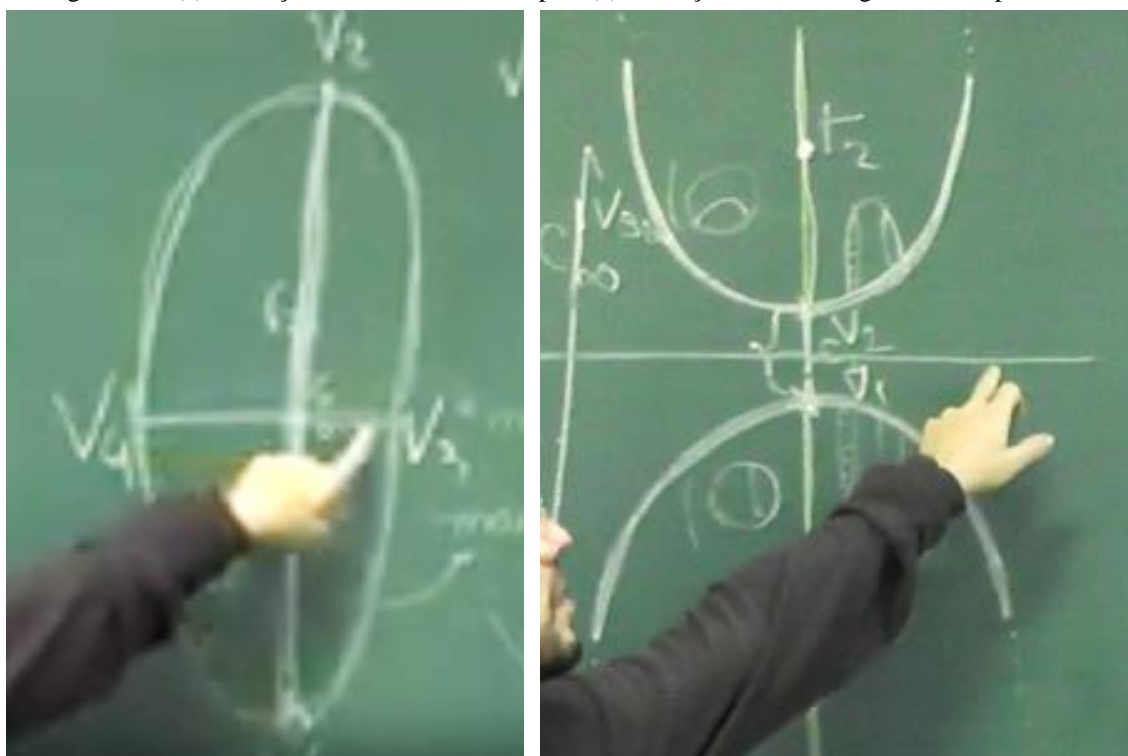
*Bruno* – Então se o eixo secundário da hipérbole é impróprio...

*William* – Ah! Entendi!  $V3$  e  $V4$  são impróprios.

*Bruno* – Onde o eixo secundário cruza essa reta (Figura 60b)?



Figura 60 – (a) Indicação de eixo menor na elipse; (b) indicação de eixo imaginário da hipérbole.



Fonte: Dos dados.

*Guilherme* – No centro?

*Bruno* – Vamos chamar a reta do eixo maior de  $eM$  e a do eixo menor de  $em$  e essa outra reta aqui (Figura 60b) de  $ei$  de eixo inverso, inventei agora. William disse que a interseção de  $ei$  com  $eM$  é igual a quem?

*William* – Ao centro inverso.

*Bruno* – Ok, então quem vai interceptar com quem para eu encontrar o centro?

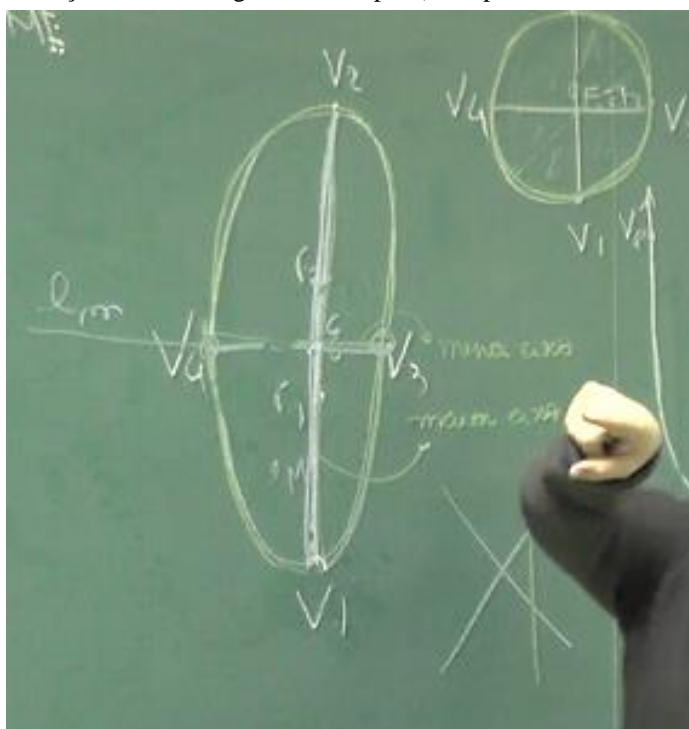
*Guilherme* – Eixo maior e eixo menor.

*Bruno* – Isso é verdade para todas as cônicas?

*Guilherme/William* – Sim.

*Bruno* – E qual a interseção entre  $ei$  e  $em$ ? Na hipérbole, ele é próprio ou impróprio? Eles têm que se interceptar porque ambas estão no  $R^2$ . Para saber quem ele é, olhem na elipse. O eixo inverso da elipse está aqui (Figura 61).

Figura 61 – Simulação de eixo imaginário na elipse (dedo paralelo ao eixo menor da elipse).



Fonte: Dos dados.

Guilherme – Ele é impróprio.

Bruno – Se ele é impróprio, ele cruza  $em$  em um ponto impróprio...

Guilherme – Calma, o eixo inverso está no meio do final da hipérbole, então ele vai estar também no meio do final da elipse, só que impróprio, como se fosse paralelo ao eixo menor.

Bruno – Então se  $eM \cap em = C$  e  $eM \cap ei = Ci$ , então,  $em \cap ei =$  um ponto diferente de  $C$  e  $Ci$ , que vamos chamar de  $Q$ . Entenderam?

Guilherme/William – Sim.

Bruno – Mais uma coisa. Quais as tangentes da elipse que se encontram no ponto impróprio?

William – As que passam por  $V4$  e  $V3$ . Elas são paralelas ao eixo maior e se encontram no mesmo ponto impróprio, que é o centro inverso.

Bruno – Passando as tangentes à  $V1$  e  $V2$ , encontramos  $Q$  impróprio (Figura 62). Então eu endosso que o eixo imaginário não é o eixo secundário. Agora eu pergunto: onde estão as quatro tangentes nas outras curvas? Na circunferência, é tranquilo fazer a analogia.

William – Eu acho que não tem como fazer na hipérbole, porque ela tem dois vértices impróprios, então só tem como passar a tangente em  $V1$  e  $V2$ . Logo, as outras duas vão ser a mesma reta imprópria porque só tem uma reta imprópria no plano.

Figura 62 – Tangentes nos vértices da elipse (e QR-Code<sup>54</sup>).



Fonte: Dos dados.

*Bruno* – Onde estão  $V3$  e  $V4$  na hipérbole? Indo por aqui, vai encontrar quem?

*Guilherme* –  $V3$ , por ali embaixo à esquerda vai ser  $V4$ , em cima à direita  $V4$  também, não é  $V3$  e o que sobrou é  $V3$  (Figura 63a).

*Bruno* – Ele faz esse percurso: sai de  $V1$ , passa por  $V3$  impróprio, volta,  $V2$ , vai pra  $V4$  impróprio e volta pra  $V1$ . Mas  $V3$  e  $V4$  são pontos diferentes. Vamos passar a tangente que passa por  $V4$ , ela tem que passar por  $Ci$ , não é? Então se eu ligo esses dois pontos, saindo de  $Ci$ , essa reta vai sempre se aproximar da curva, mas nunca vão se tocar... Deixa eu fazer com que essa assíntota... ops... essa hipérbole pareça uma hipérbole (Figura 63b).

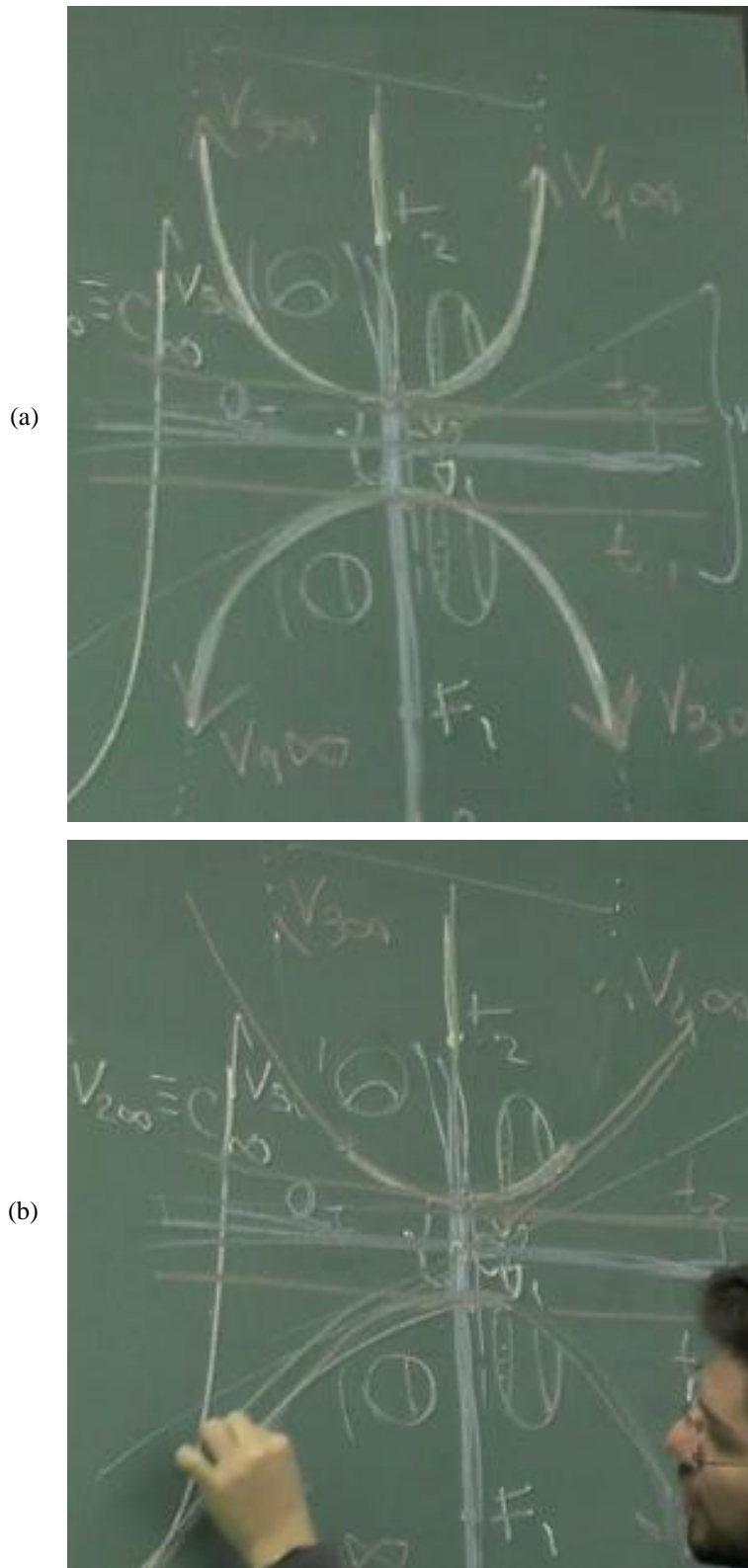
*William* – Ah! Por isso que estava estranho! Por isso que existem assíntotas.

*Bruno* – E as assíntotas vão corresponder a quê na elipse?

*Guilherme* – Às retas tangentes que passam nos vértices do eixo menor.

<sup>54</sup> Após acessar o *link*, ative  $V1$   $V2$ ,  $V3$   $V4$  e  $t1$   $t2$   $t3$   $t4$ . Em seguida, observe o comportamento das tangentes, dos vértices e dos centros  $C$  e  $Ce$  ao mover o controle deslizante  $p^\circ$ . Essa análise pode ser também utilizada para a Figura 63.

Figura 63 – Vértices na hipérbole.



Fonte: Dos dados.

*Bruno* – Vou fazer o desenho de um modelo que eu pensei para tentar visualizar esses elementos. Primeiro, marco  $C$  e  $Ci$ . Eu sei que o primeiro é próprio para a elipse e o segundo é

próprio para a hipérbole, então vou desenhar uma elipse de centro  $C$  e uma hipérbole para o  $Ci$  (Figura 64). Ligando esses dois centros, tenho o eixo maior. A hipérbole tem pontos impróprios em  $V3$  e  $V4$ , então vou distorcer a hipérbole para passar no mesmo  $V3$  e  $V4$  da elipse. Agora vou traçar as tangentes nos vértices do eixo menor da elipse, que são paralelas e se encontram em  $Ci$ . Nesse modelo, o eixo secundário e o eixo imaginário são paralelos. Por ele seria possível visualizar todos os elementos impróprios da elipse e hipérbole.

Figura 64 – Modelo das tangentes da elipse e da hipérbole (e QR-Code).



Fonte: Dos dados.

\*\*\*

Eu não sabia que as cônicas tinham tantos elementos. Muito menos, que eles são comuns a todas. Fazendo uma listinha de todos os elementos que a gente discutiu, poderia dizer o seguinte:

Toda curva cônica possui dois focos, dois centros (um interno e um externo), dois eixos de simetria, diâmetros, duas regiões (uma interna e outra externa), excentricidade, soma dos raios focais constante, quatro vértices, tangentes, duas diretrizes e dois círculos diretores, ufa... acho que foi isso. O que vai diferenciar uma curva da outra é quais desses elementos são impróprios.

\*\*\*

## ALGUMAS EQUAÇÕES DAS CÔNICAS

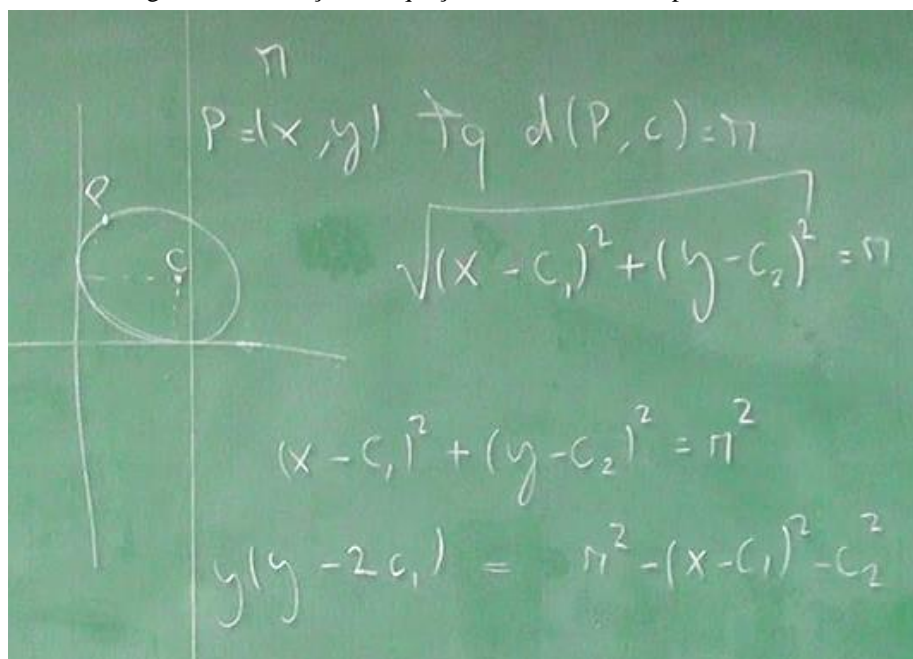
\*\*\*

Estou gostando muito de estudar essa abordagem geométrica das cônicas e o legal é que pudemos também fazer algumas relações com o que vimos em Geometria Analítica. Eu me lembro que, já no primeiro encontro, tanto eu como Bonner citamos que toda cônica pode ser escrita pela expressão  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ . Mas isso não significa que eu lembre como se chega a ela. Do mesmo jeito, sei que cada curva pode ser escrita por equações distintas, e que não era só uma para cada, tinha a reduzida, a simétrica, a paramétrica, mas eu sempre confundia qual era qual, porque uma tem mais (+), a outra tem menos (–), ou uma é  $a$  sobre  $b$  ( $a/b$ ) e a outra é  $b$  sobre  $a$  ( $b/a$ ). Ficava ruim, pois a gente praticamente só decorava as fórmulas.

Logo quando a gente voltou das férias, o Bruno nos mostrou como ele fez o *applet* no Geogebra das seções cônicas, explicando toda a lógica utilizada para modelar a superfície cônica. Inclusive, ele utilizou a equação da circunferência ( $x^2 + y^2 = r^2$ ) que eu já conhecia (conhecer não significa lembrar, ou seja, só quando a gente via a expressão, é que a gente dizia: é essa!). Só voltamos a tratar das cônicas analiticamente vários encontros depois, quando o Bruno perguntou se a gente achava interessante as analisarmos por essa abordagem. É claro que eu achava interessante, pois seria uma ótima oportunidade para pensar em método de deduzir todas elas.

Iniciamos tentando lembrar da equação da circunferência, mas o Bruno lembrou que seria importante a gente tentar deduzir a partir das propriedades que a gente conhecia, e não pela própria equação. Daí o Bonner fez lá o desenho da circunferência qualquer, marcou o centro, um ponto da curva e começou: dado o raio ( $r$ ) e um ponto da circunferência  $P$  de coordenadas  $x$  e  $y$ , tal que a distância de  $P$  para  $C$  é igual ao raio. Depois ele calculou a distância e chegou a uma expressão com a qual não dava para fazer muita coisa e, com certeza, não era aquela a equação da circunferência (Figura 65).

Figura 65 – Dedução da equação da circunferência por William.



Fonte: Dos dados.

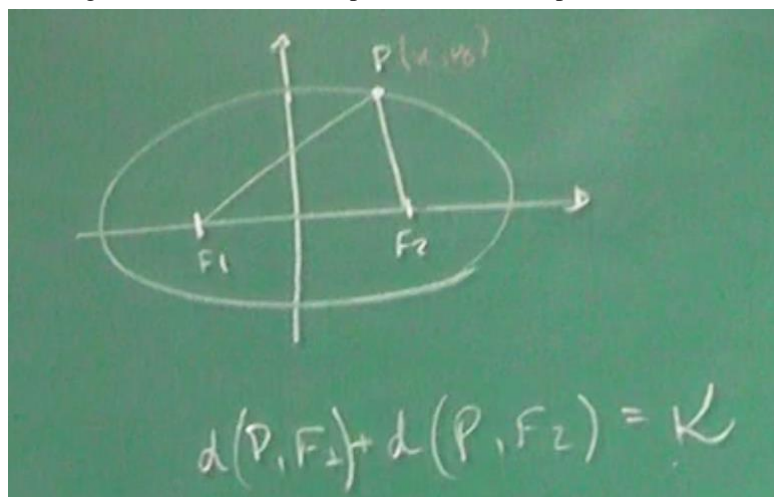
O Bruno pediu para mostrar como ele tinha deduzido durante as férias. Segundo ele, o seu pensamento é bem menino de quinta série, pois ele utilizou o triângulo retângulo, e não a fórmula de distância que a gente viu em GA, que dá na mesma, pois a fórmula vem do triângulo; a diferença é que a gente já a aplica direto. No meio da explicação, o Bonner percebeu que ia dar a mesma coisa, ou seja, ele já tinha encontrado a equação, que era  $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$ ; a diferença é que o Bruno usou  $a$  e  $b$  como coordenadas do vértice em vez de  $c_1$  e  $c_2$ .

Depois foi a vez da parábola... nossa... essa era a que a gente pensava ser simples, mas foi a que deu mais trabalho. Passamos umas três reuniões ruminando até conseguirmos chegar a algo aceitável. O problema todo foi porque, depois de encontrarmos a expressão  $y = x^2/4f$ , queríamos porque queríamos justificar a equação  $y = ax^2 + bx + c$ , mas essa parte a gente só fez depois que decidi assumir as minhas responsabilidades de participante do Grupo de Estudos e fiz a dedução da elipse. O pobre do Bruno já não aguentava mais pedir pra a gente trazer alguma coisa que tínhamos feito em casa, mas nunca acontecia, por isso arrumei tempo, foi uma questão de honra.

Comecei pensando no que eu sabia sobre a elipse: que ela tem formato de um quibe (risos, tudo culpa do Bonner, que fez o desenho de uma superfície cônica em perspectiva em que a base era para aparentar uma elipse, mas no desenho tinha duas 'quinas' parecendo um quibe, tiramos muita onda dele); sei que ela tem dois focos e uma lei de geração sobre a qual a gente já tinha conversado em outro encontro... como é mesmo... é o lugar geométrico onde a medida da soma das distâncias de um ponto da curva aos focos é uma constante. Por exemplo,

a distância do ponto P para F1 mais a distância de P para F2 é constante, então, se eu mudar esse pontinho P de lugar, a soma vai continuar igual (Figura 66).

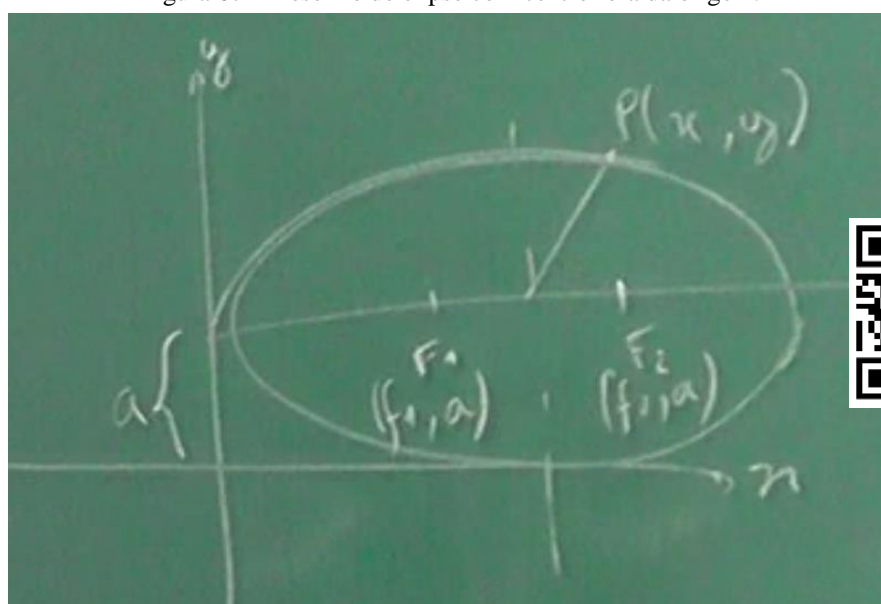
Figura 66 – Desenho de elipse e distâncias do ponto aos focos.



Fonte: Dos dados.

A partir disso, eu coloquei as coordenadas  $x$  e  $y$  para o ponto da curva, porque ele pode variar; não coloquei nenhum número, senão iria valer para todo mundo. Também coloquei coordenada nos focos. Como a gente deduziu a circunferência fora<sup>55</sup>, pensei em fazer o mesmo com a elipse (Figura 67). Pus os pontos e comecei a algebrizar. Juro que tentei chegar a alguma coisa que fizesse sentido sem pesquisar nada, mas os erros começaram a aparecer.

Figura 67 – Desenho de elipse com centro fora da origem.



Fonte: Dos dados.

<sup>55</sup> Com o centro distinto da origem.



Cheguei a uma expressão “linda” (só que não) que não me dizia nada, não consegui colocar em função de  $x$  e  $y$ , ela tinha muitos valores que não seriam úteis e eu sabia que a elipse tem  $x$ ,  $y$ ,  $a$  e  $b$ . Não que eu soubesse como ela era, mas lembrava que tinha essas incógnitas. Fiquei tão frustrado que joguei fora o papel dos cálculos (o Bruno até comentou que queria ter visto, mas já era tarde).

Passado o momento de frustração, fui atrás da dedução da elipse, mas não de todo o desenvolvimento. Para não acabar com a graça, pesquisei apenas a posição da elipse no plano cartesiano e quais dados iniciais eram considerados. Encontrei que o centro dela coincidia com a origem  $(0,0)$  e que foram usadas as coordenadas  $j$  e  $k$  para um ponto  $P$ , mas esse não é o ponto que vai ser utilizado para deduzir elipse. O Bruno até me perguntou quem era esse ponto, mas não soube responder; o Bonner foi que disse que era o vértice do eixo menor. Isso fez total sentido, pois se o vértice menor faz parte da elipse, então ele atende a propriedade de que a soma das suas distâncias aos focos é constante para qualquer ponto da curva.

Dito isso, chamei a distância do vértice ao foco de  $a$ , do foco ao centro de  $c$  e do centro ao vértice de  $b$ , formando um triângulo retângulo; logo,  $a^2 = b^2 + c^2$ . Então eu tenho isso e a coordenada dos dois focos. O Bruno questionou quem era o  $a$  e eu disse: a distância do foco para o ponto  $P$ , mas o Bonner complementou que  $a = k/2$ , onde  $k$  é a constante. É claro, como não pensei nisso, mas o Bruno insistiu na pergunta, ou seja, tinha mais alguma coisa a ser falada. Foi quando me deu um *insight*: o  $a$  é a metade do eixo maior, pois quando o  $P$  estiver no vértice do eixo principal, então  $2a = \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ , conseqüentemente  $a = \overline{CP}$ <sup>56</sup>, onde  $C$  é o centro.

Continuando, pus as coordenadas para cada um dos elementos:  $P = (x, y)$ ;  $F_1 = (-c, 0)$ ;  $F_2 = (c, 0)$ ; e  $V_m = (0, b)$ , onde  $V_m$  é o vértice do eixo menor. Em seguida, fiz o cálculo das distâncias pela fórmula que aprendi em Geometria Analítica (o Bruno até me perguntou se eu sabia como chegar a ela ou se tinha decorado, mas apesar de ter ido direto para a fórmula, eu sabia como deduzi-la) e desenvolvi a equação (Figura 68<sup>57</sup>).

---

<sup>56</sup> Esta relação já havia sido tratada em encontros anteriores; por esse motivo, a informação de que  $\overline{V_2F_2} = \overline{V_1F_1}$ , necessária para concluir que  $a = \overline{CP}$ , é implícita na afirmação.

<sup>57</sup> A leitura da imagem deve ser realizada da direita para a esquerda, de cima para baixo. Além disso, há um detalhe que precisa ser destacado. A equação geral da elipse é  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  e não  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . O resultado encontrado decorreu da operacionalização na penúltima linha do cálculo (lado esquerdo da imagem), em que o sujeito substituiu o termo  $c^2 - a^2$  no denominador da segunda fração por  $b^2$  em vez de  $-b^2$ . Uma possível leitura para essa operacionalização é o fato de o sujeito ter associado o termo substituído à expressão  $a^2 = b^2 + c^2$  e ter isolado o parâmetro  $b^2$  mentalmente, acarretando o equívoco.

Figura 68 – Dedução da equação geral da elipse.

$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}$   
 $xc = a^2 - a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}$   
 $xc - a^2 = -a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}$   
 $a^2 - xc = a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}$   
 $a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$   
 $a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$   
 $x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$   
 $\frac{x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2}{a^2(c^2 - a^2)} = \frac{a^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)}$   
 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$P = (x, y)$   
 $F_1 = (-c, 0)$   
 $F_2 = (c, 0)$   
 $m = (0, b)$

$d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$   
 $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$   
 $\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = (2a - \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2})$   
 $x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$

$a^2 = b^2 + c^2$

Fonte: Dos dados.

Fiquei muito feliz de ter deduzido a elipse, isso me deu mais segurança para investigar outras coisas. Em seguida, começamos a discutir sobre a equação da hipérbole, na verdade, tentamos falar sobre a equação, mas, para isso, precisávamos pensar em algumas propriedades e tentamos fazer as analogias dos parâmetros da elipse. Mas como nos empolgamos nas discussões (como sempre) sobre as propriedades da hipérbole, acabamos não voltando para a equação e a reunião acabou. Também não tentei investigar fora do Grupo de Estudos, porque o semestre está muito puxado, por isso tenho me dedicado a fazer as coisas mais nas reuniões.

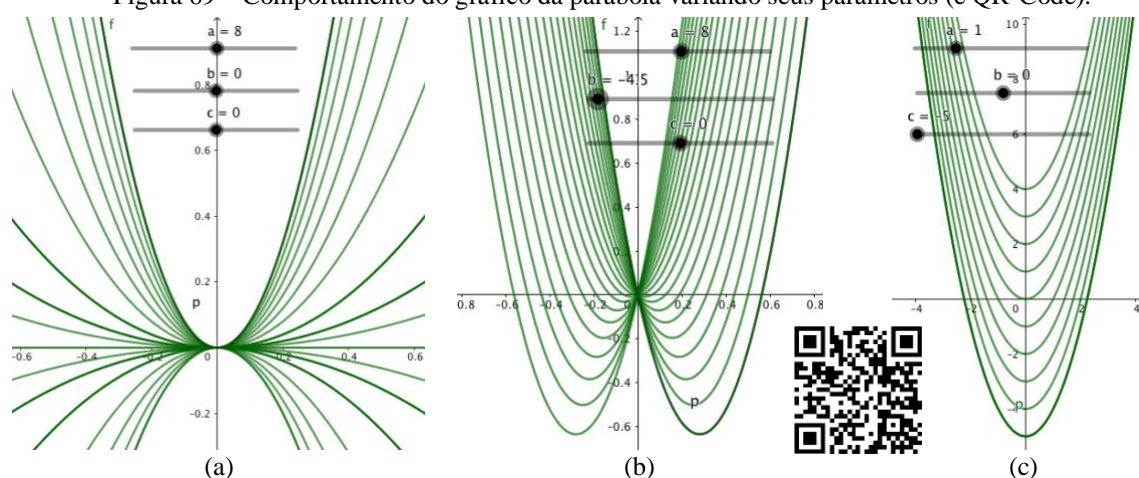
\*\*\*

Estamos discutindo, nos encontros do Grupo de Estudos, sobre as equações das curvas. Na última reunião, tentamos pensar na equação da parábola. Achei engraçado como o Bruno, que não estudou essa parte de álgebra, se maravilhava com algumas coisas que, para quem é da Matemática, é normal. Por exemplo, nós tínhamos noção de que o gráfico da equação  $ax^2 + bx + c = 0$  tem por gráfico uma parábola, mas o Bruno queria saber o que cada parâmetro iria interferir na cônica. Daí ele usou Geogebra para plotar o gráfico a partir da equação. O programa criou um controle deslizante para cada parâmetro e, por meio deles, o Bruno foi observando o comportamento da curva.

O parâmetro mais óbvio para mim é o  $c$  que move a parábola para cima e para baixo, todos sabíamos que o seu valor corresponde à ordenada do eixo  $y$  que a curva corta (Figura 69a). O  $a$  interfere na concavidade da curva, tanto que, se for igual a zero, o gráfico fica uma reta (Figura 69b), pois a equação fica apenas  $bx + c = 0$ . Essa foi a parte em que o Bruno ficou

boquiaberto, não pela relação algébrica, por ver o movimento do gráfico até se tornar uma reta. Enquanto ele analisava lá: “oh meu Deus”, a gente estava: “sim, mas isso a gente já sabia”, foi uma onda, tiramos muito sarro dele. O parâmetro  $b$  desloca a parábola no eixo  $x$ , mas o Bruno não concordava muito, então o Melão explicou que não era na horizontal; a parábola se move na mesma proporção, mas interceptando o mesmo ponto no eixo  $y$  (Figura 69c). Aí, sim, ele concordou e comentou que apenas o parâmetro  $a$  muda a forma<sup>58</sup> da parábola, os outros apenas transladam a curva.

Figura 69 – Comportamento do gráfico da parábola variando seus parâmetros (e QR-Code).



Fonte: Do autor.

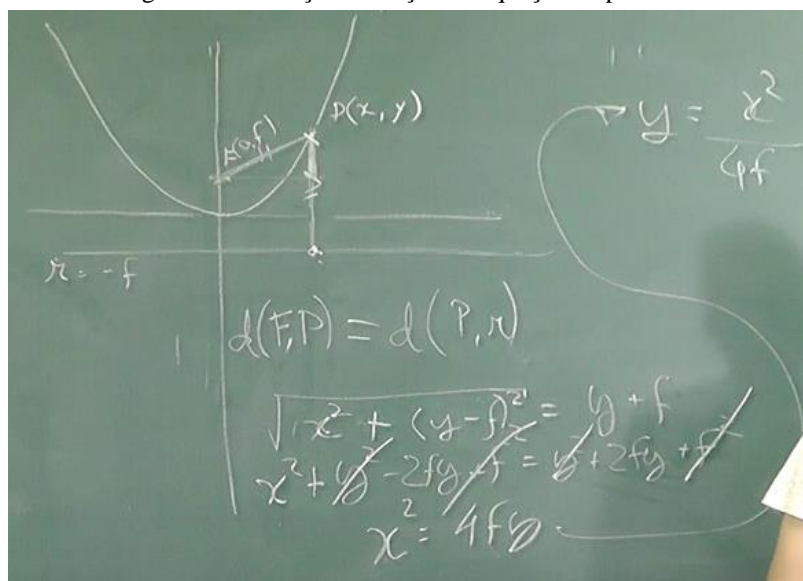
Bem, voltando à dedução da equação da parábola o Bruno não queria que partíssemos da fórmula, mas que tentássemos chegar a uma por meio das propriedades que conhecíamos. Ele já tinha pedido para pensarmos durante a semana, mas como ninguém além dele pensou, ficou para ele o papel de explicar.

A princípio, ele pensou a parábola com a diretriz ( $r$ ) no eixo  $x$ , mas quando viu que as contas iam ficar com frações (porque ele chamou a distância de  $F$  para  $r$  de  $f$ ), então ele mudou para que o vértice ficasse na origem  $(0,0)$ . Depois ilustrou no desenho a propriedade que a gente já conhecia: a distância do foco para um ponto da curva é igual à distância desse ponto à diretriz.

<sup>58</sup> No contexto do Grupo de Estudos, o fato de uma figura não alterar a forma é entendido como figura que, após dada transformação, preserva a propriedade de semelhança. Após o término do Grupo de Estudos e aprofundando o tema, constatei que não há mudança na forma da parábola, pois, assim como a circunferência, a excentricidade da parábola é constante (0 e 1, respectivamente); logo, a proporção é preservada. Já a elipse e a hipérbole que variam a excentricidade podem ser distorcidas, respeitando os limites das suas excentricidades. Isso significa que, ao alterar o parâmetro  $a$  da parábola, há um efeito visual de que a curva está sendo distorcida, porém, se colocarmos o foco no gráfico enquanto há a variação, verificaríamos que ele também desloca, respeitando a proporção. Para visualizar o efeito com o foco, acesse <https://brunolf.wixsite.com/tese?lightbox=dataItem-jszfxjvj>. Uma explicação algébrica considerando apenas os pontos da parábola pode ser vista no vídeo disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=hoh4TmPzu1w&index=3&list=PLdVLqP8PdpWNfgjZ-dY1mh-EGzvg38nKg&t=0s>.

Então ele começou a algebrizar até chegar à fórmula (Figura 70). Durante o processo, o Melão não entendeu por que a distância de  $P$  para  $r$  era igual a  $y + f$ , pois ele estava habituado a aplicar a fórmula de distância entre dois pontos que aprendeu na disciplina de Geometria Analítica ( $d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ ). Já o Bruno fez olhando direto no desenho, mas depois o Melão viu que dava na mesma.

Figura 70 – Esboço e dedução da equação da parábola.



Fonte: Dos dados.

Esperávamos encontrar a equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , mas não teve problema, pois o importante foi que encontramos uma equação.

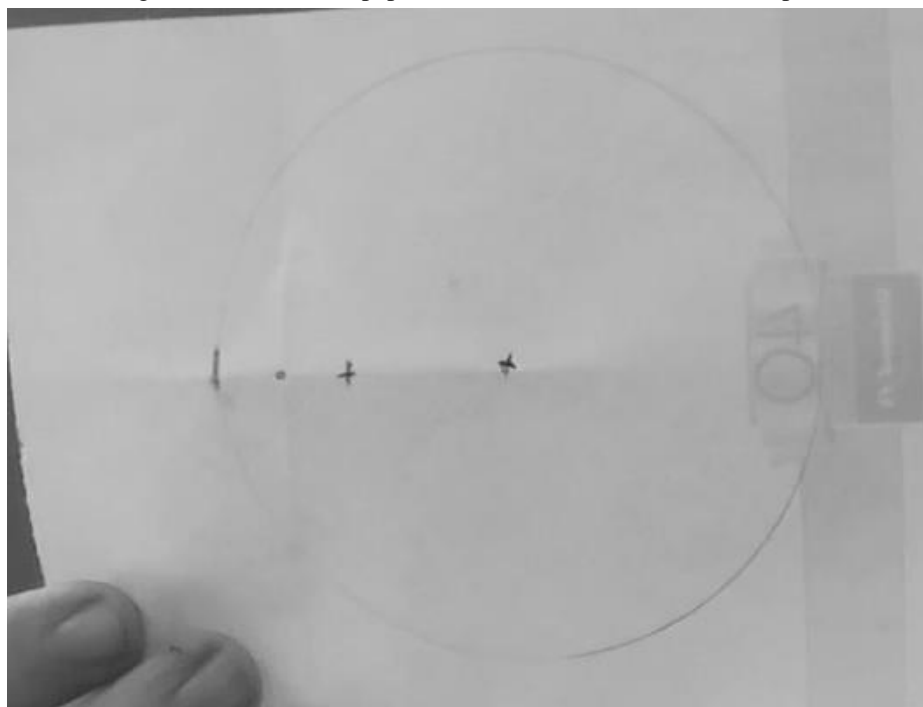
\*\*\*

## CONSTRUINDO AS CURVAS CÔNICAS

Hoje estávamos discutindo sobre o centro de uma curva cônica e o Melão usou uma elipse recortada no papel para dobrar e determinar os eixos de simetria e encontrar o centro. Depois disso, o Bruno fez aquela cara de quem teve uma ideia e propôs a gente fazer uma atividade. Ele fez um desenho em um papel de um círculo (com compasso) de centro  $C$  e um ponto  $P$  no seu interior. Em seguida, ele pediu para alguém marcar pontos que estivessem à mesma distância da circunferência e de  $P$ . O Melão sugeriu fazer o ponto médio entre  $P$  e a circunferência (mas como assim? Existe isso?), pegou o papel e o dobrou, de modo que o ponto estivesse sobre a circunferência, dizendo que estava fazendo uma mediatriz. Eu vi que, só com a dobra, não seria suficiente para determinar o ponto, então sugeri dobrar o papel no raio que

passa pelo ponto da circunferência; assim, o raio cruzaria a mediatriz. Com isso, percebemos que era necessário fazer primeiro o raio para depois fazer a dobra da mediatriz, pois o ponto equidistante estava na interseção do raio e da mediatriz (Figura 71).

Figura 71 – Dobras no papel com desenho de circunferência e ponto interno (e QR-Code).



Fonte: Dos dados

Quando o Bruno pediu para encontrar outros pontos, o Melão já disse que iria dar uma elipse e que esse ponto era o de menor distância entre os dois elementos, mas o Bruno insistiu para fazer, assim seria possível visualizar a elipse, e que também cobrisse com caneta as dobras das mediatrizes. Enquanto fazíamos isso no papel, ele fez o desenho no quadro de uma circunferência e do ponto e pediu para o Melão reproduzir a construção (Figura 72).

Figura 72 – Esboço de construção do lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes a um ponto e uma circunferência (e QR-Code<sup>59</sup>).



Fonte: Dos dados.

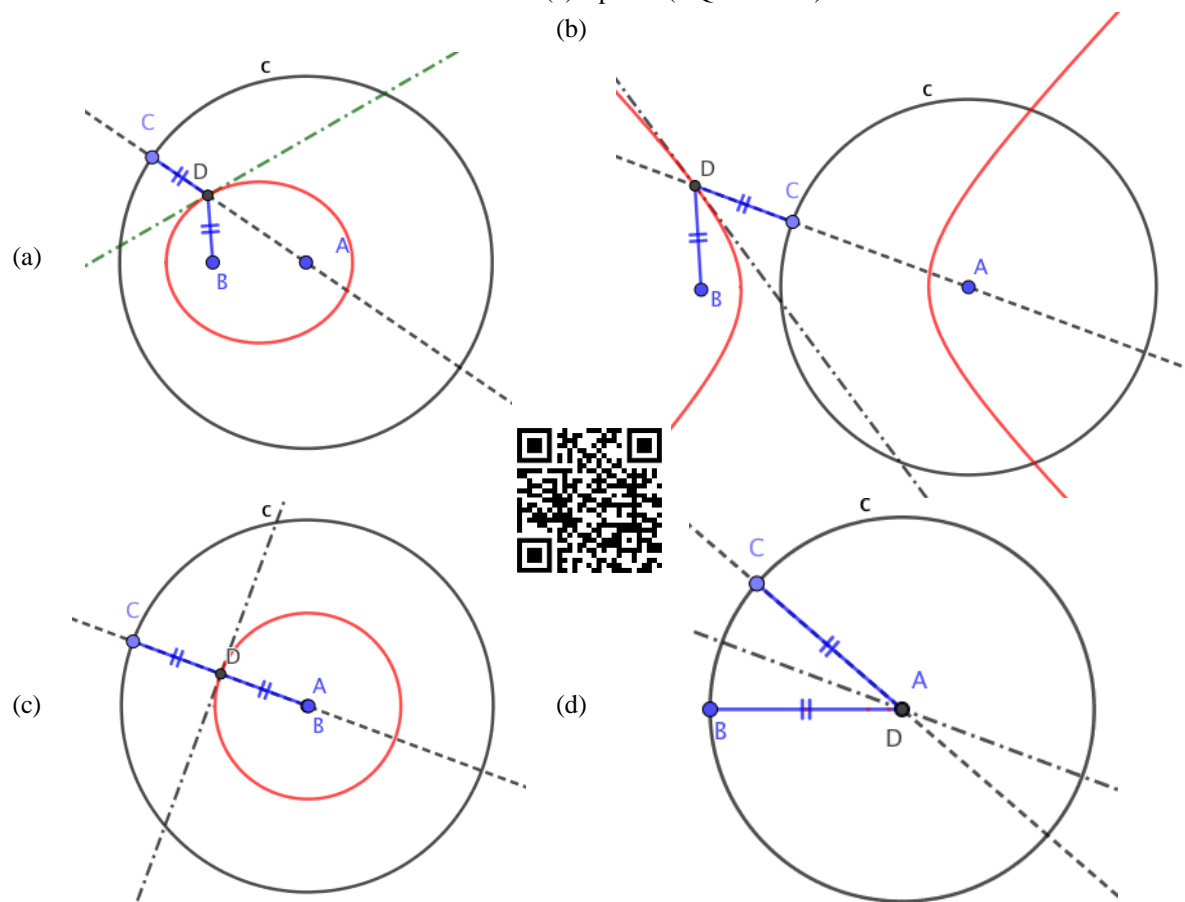
Como eu não consegui enxergar muito bem a elipse pelo desenho, o Bruno foi mostrar no Geogebra, fazendo a construção de apenas um ponto e movendo o ponto da circunferência (Figura 73a). Ele também utilizou a ferramenta *locus* para visualizar todo o lugar geométrico. Em seguida, perguntou: “A que corresponde a mediatriz na curva cônica?” “À tangente”, respondeu Melão. Era isso que Bruno queria nos mostrar no papel, pois quanto mais mediatrizes marcássemos, mais veríamos a elipse.

Para agitar, o Bruno perguntou: e se o ponto for para fora da circunferência? O Melão chutou parábola, então o Bruno arrastou o ponto para fora e a mágica aconteceu: era uma hipérbole (Figura 73b). Me empolguei e pedi para ele pôr o ponto coincidindo com o centro (Figura 73c) e sobre a circunferência (Figura 73d), resultando na circunferência e no ponto<sup>60</sup>.

<sup>59</sup> Após abrir o *link* do QR-Code, arraste o ponto  $C$  para observar o comportamento da mediatriz  $f$ .

<sup>60</sup> Para observar esses comportamentos, acesse o *link* do QR-Code da Figura 72 e mova o ponto  $B$  para as respectivas posições.

Figura 73 – Construção no Geogebra de lugares geométricos usando a ferramenta *locus*: elipse (a), hipérbole (b) circunferências (c) e ponto (e QR-Code<sup>61</sup>).



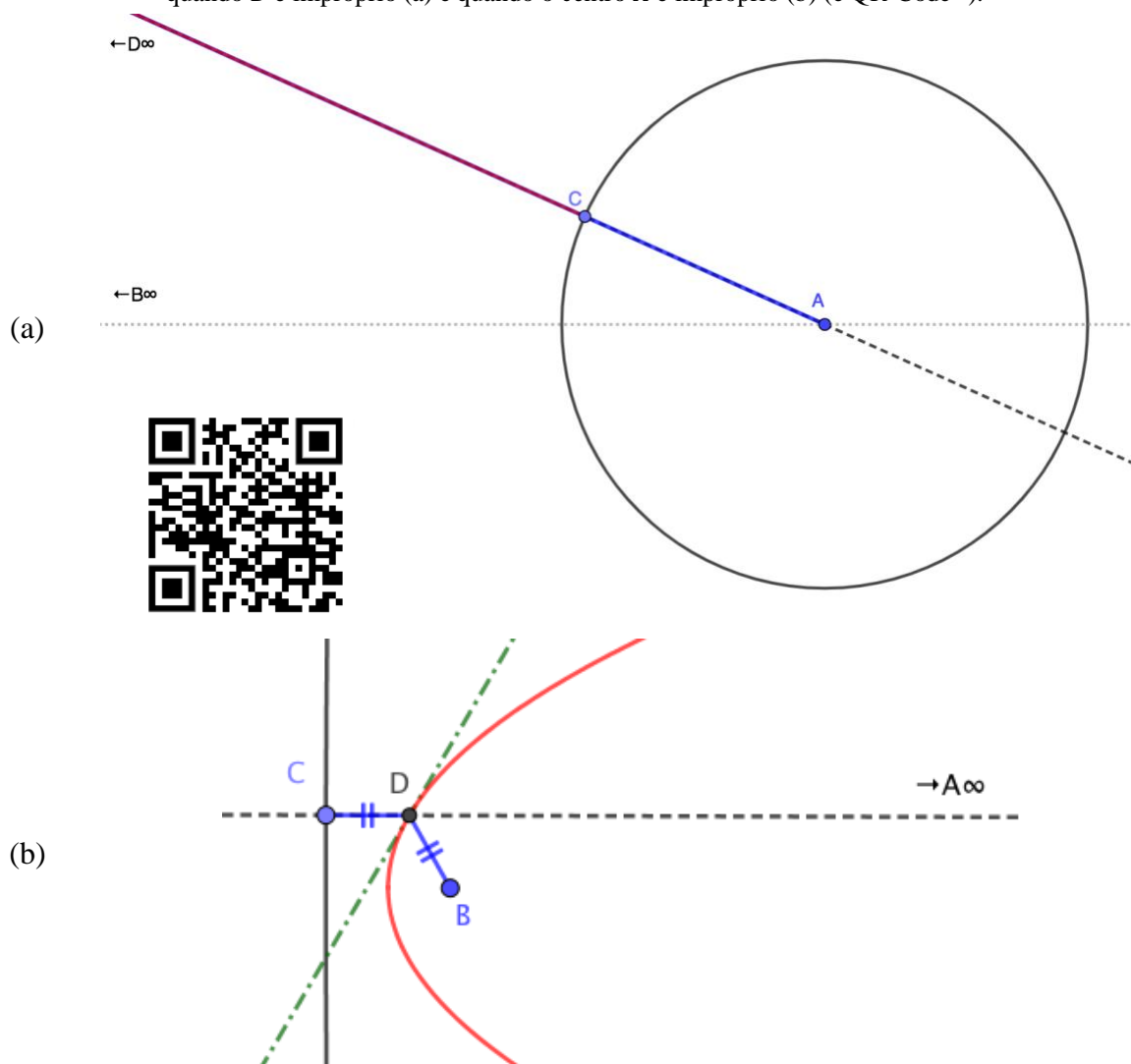
Fonte: Do autor.

Das cônicas só faltava a parábola. Então sugeri colocar o ponto ( $B$ ) impróprio, mas se afastasse muito, a cônica sumia, tendia a ficar algo como duas retas (Figura 74a). Depois o Melão propôs deixar o centro da circunferência ( $A$ ) impróprio; aí, sim, vimos a parábola. No caso, a circunferência se degenerou (como o Bruno diz) em uma reta que é a diretriz (Figura 74b). Inclusive, o Melão disse que nem sabia que a parábola tinha diretriz<sup>62</sup>.

<sup>61</sup> Após acessar o *link*, mova o ponto  $B$  para as quatro posições indicadas na figura (dentro da circunferência, fora da circunferência, coincidente ao centro e coincidente a um ponto da circunferência) e observe os lugares geométricos gerados.

<sup>62</sup> Esta afirmação foi feita no 15.º encontro, antes das discussões algébricas. Até então, o termo diretriz só havia sido usado para tratar da geração de uma superfície cônica.

Figura 74 – Lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes a um ponto e uma circunferência quando  $B$  é impróprio (a) e quando o centro  $A$  é impróprio (b) (e QR-Code<sup>63</sup>).



Fonte: Do autor.

Neste ponto, estávamos bem cansados e mais lentos do que o habitual (risos). Só conseguíamos focar na ação do momento, ou seja, sabíamos o que estávamos fazendo, mas não lembrávamos para que estávamos fazendo. Foi necessário o Bruno perguntar umas três vezes até que a gente sistematizasse em palavras, definindo cada curva como um lugar geométrico. O que estávamos fazendo? Tentando encontrar pontos equidistantes de um ponto e uma circunferência. Qual a figura que corresponde ao conjunto de pontos? Uma elipse se o ponto for interno à circunferência, onde o ponto e o centro da circunferência são seus focos. No caso, a elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes a uma circunferência e um ponto. Já a parábola vai ser o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes

<sup>63</sup> Após acessar o *link*, mova o controle deslizante do ponto  $B$  e observe o comportamento do lugar geométrico. Em seguida, retorne à posição inicial de  $B$ , mova o ponto  $C$  de modo que fique aparentemente alinhado com  $D$  e  $A$  e mova o controle deslizante do ponto  $A$  para observar o comportamento do lugar geométrico.



ao foco e à diretriz, que correspondem a um ponto e uma reta (ou projetivamente: uma circunferência de centro impróprio). Ou seja, tanto para a elipse como para a hipérbole, o elemento diretor é a circunferência e na parábola também, pois ela vai estar degenerada.

O Melão ficou com aquela cara de que “uau, caiu a ficha”, pois antes a gente entendia como se cada construção fosse uma coisa diferente, mas agora não, era tudo a mesma coisa. Em seguida, o Bruno perguntou: “Qual o raio da circunferência na construção da elipse?” O Melão, quase como se estivesse em uma competição, respondeu rápido: “Vai ser esse segmento<sup>64</sup> mais alguma coisa... Ah! É o eixo maior, por conta daquela propriedade!” Surreal!

Então fomos analisar isso na hipérbole, mas a gente se perdeu, então movemos o ponto *B* para a posição que gerava a elipse e vimos “quem era quem” (a gente já estava convivendo tanto com os elementos das cônicas que os tratávamos como pessoas) para depois mover o ponto para fora da circunferência e achar os correspondentes da hipérbole. Identificamos os raios focais nas duas situações e que a soma deles é o raio da circunferência quando o ponto estiver dentro e a subtração quando estiver fora. Toda essa análise só foi possível pela observação das imagens, e o fato de a gente mover os pontos ajudou, porque não víamos só em uma posição.

Bruno falou que era importante a gente associar isso tudo ao modelo da seção cônica e entender, por exemplo, onde esses elementos da construção estão, como também que todas as cônicas têm diretrizes retas etc.

\*\*\*

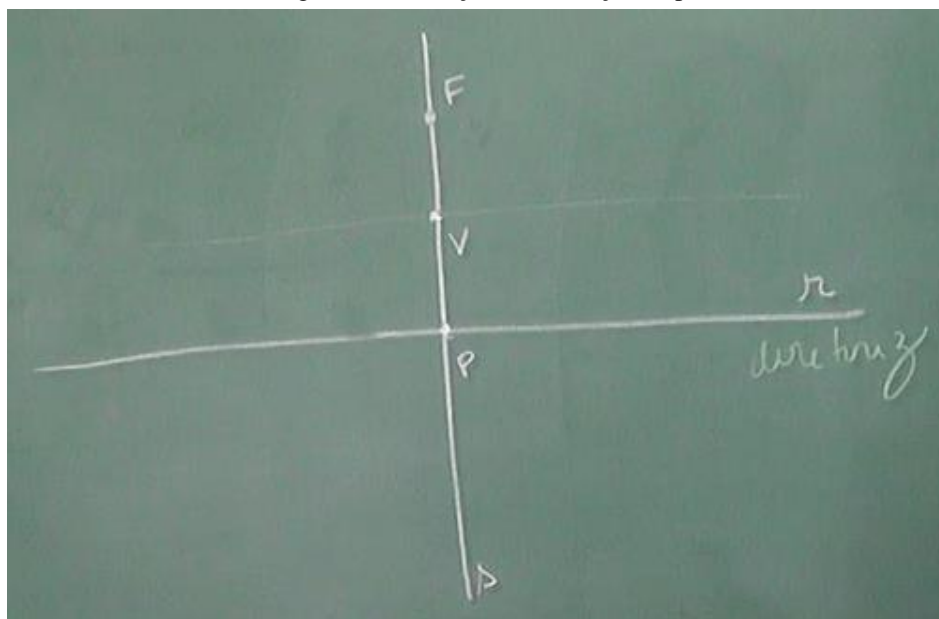
No início da reunião de hoje, partilhamos com o Bruno sobre a disciplina de Desenho Geométrico que estamos cursando. Eu gosto porque vejo os objetos sendo construídos, por exemplo, a parábola, acho que é a cônica mais simples e a construção dela é palpável até para um aluno do ensino fundamental, já a elipse considero mais complicado. Na disciplina, estamos pondo a mão na massa, mas não resta muito tempo para explorar algo como gostaríamos. Uma das questões da última prova foi construir uma das cônicas à nossa escolha. Eu escolhi a hipérbole, porque estava seguro para fazê-la, mas também sabia fazer a parábola, inclusive fiz no quadro. Dessas duas, a parábola é a única que sei explicar o porquê da construção; por isso, fui explicar para o Bêlo (ele acha que vai reprovar em Desenho) durante o Grupo de Estudos a que eu sabia, pois ele estava com dúvida.

---

<sup>64</sup> Segmento  $\overline{AD}$  (raio focal) da Figura 73.

Primeiro, eu fui ao quadro, fiz o desenho de uma reta  $r$ , um ponto  $F$  (para considerá-lo o meu foco, claro), o ponto médio entre  $F$  e o ponto de interseção da reta que passa e é perpendicular a  $r$ , que eu chamei de  $s$ , e o ponto médio de  $V$ , que misteriosamente era o vértice, brincadeira. Considerei-o como vértice, porque a distância do foco ao ponto médio é igual à do ponto médio até a reta  $r$ , que é a diretriz (Figura 75).

Figura 75 – Esboço de construção da parábola (e QR-Code).

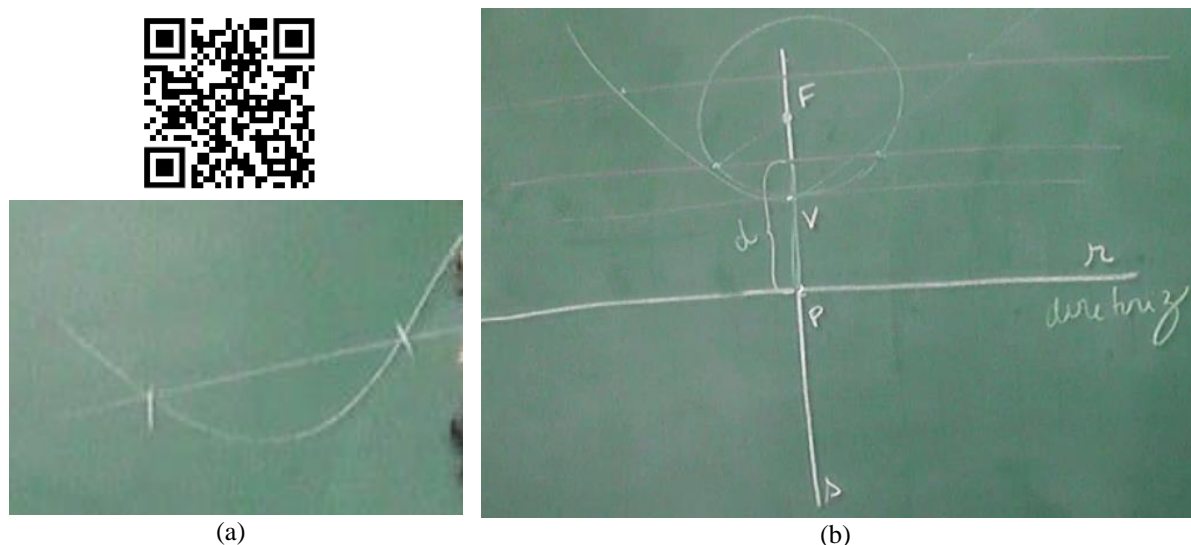


Fonte: Dos dados.

Se eu pensar na parábola, em seu desenho no papel, ela é simétrica em relação ao eixo (reta  $s$ ), ou seja, se eu traçar uma reta na paralela à diretriz, vou ter dois pontos (Figura 76a). Então, como eu ainda não tinha a parábola, tracei umas duas paralelas. O que é que eu sei de propriedade da parábola? Que a distância do foco até o ponto da parábola é a mesma distância do ponto da parábola até a diretriz. Daí vem a ideia da reta paralela, porque qualquer ponto dela que eu pegar mantém a distância para a diretriz. Então os dois pontos simétricos que pertencem à minha parábola, independentemente de onde eles estejam, têm essa distância para a diretriz. O que falta? Encontrar a mesma distância para o foco. O que foi que fiz? Peguei a distância da minha paralela até a reta diretriz (chamei de  $d$  a distância) e, com essa mesma medida, a partir do foco, tracei uma circunferência. Desse jeito, eu tenho a mesma distância e as interseções da circunferência com a paralela vão ser os pontos da parábola (Figura 76b).

Depois que eu terminei a explicação, o Bruno foi mostrar como se constrói no Geogebra usando a ferramenta *locus* para explicar a questão dos pontos escravos, pois os pontos escolhidos não podem ser ‘livres’, senão não funciona.

Figura 76 – Esboço da parábola, pontos e a paralela à diretriz (a) e esboço de construção da parábola (b).



Fonte: Dos dados.

\*\*\*

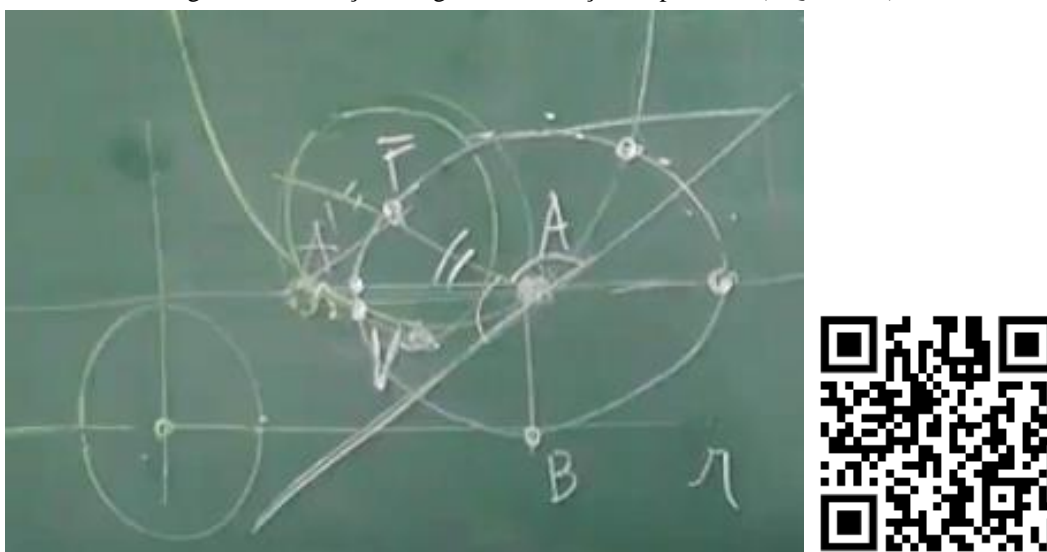
Hoje é o vigésimo segundo e último encontro do Grupo de Estudos, fiquei feliz por tudo o que a gente conseguiu abordar sobre as cônicas. Tenho consciência de que outras coisas poderiam ser exploradas, mas já me dou por satisfeito do que fizemos. Para fechar com chave de ouro, os meninos começaram comentando sobre a prova da disciplina de Desenho e citaram que uma das questões foi sobre cônicas. Nada melhor do que investigarmos essa parte de que tanto gosto no nosso último dia.

Primeiro, fizemos e discutimos a construção da parábola. O mecanismo adotado justificou-se por construir uma paralela a uma reta dada com a mesma distância que o raio de uma circunferência de centro em um ponto dado. Como resultado, temos pontos da parábola que são equidistantes do centro da circunferência (foco) e da reta (diretriz).

Como uma segunda sugestão de construção, fui induzindo os meninos a perceberem que um ponto da parábola sempre é equidistante ao foco e a um ponto da diretriz; desse modo, a mediatriz desses pontos passa pelo ponto da parábola (Figura 77). William lembrou que a mediatriz é uma tangente da curva; logo, o ponto da cônica é um ponto de tangência.

Ao final, comentei que essa construção tinha o mesmo princípio do que havíamos feito no décimo segundo encontro com as dobras de papel. Então pensamos (novamente) sobre a construção da elipse.

Figura 77 – Esboço da segunda construção da parábola (e QR-Code).



Fonte: Dos dados.

Guilherme descreveu os passos que aprendeu na disciplina de Desenho, mas não soube justificar. Primeiro, informou, como elementos iniciais, os pontos  $F1$  e  $F2$  e uma medida  $2a$  maior que  $\overline{F1F2}$ . Ele comentou que nem sabia o que era  $a$ , então não entendia por que tinha que ser  $2a$ . Também disse que não precisava decorar a relação, pois pela própria construção, a pessoa perceberia que não pode ser menor. O primeiro passo foi traçar uma circunferência de raio  $2a$  em  $F1$ . Depois, marcar um ponto  $P$  arbitrário na circunferência e traçar os segmentos para  $F1$  e  $F2$ <sup>65</sup>. Em seguida, traçar a mediatriz de  $\overline{PF2}$  e onde ela cruza  $\overline{PF1}$  é o ponto da elipse (Figura 78 à esquerda), agora é só pôr para assar por 40 minutos em fogo médio, tal como receita de bolo.

Figura 78 – Esboço da construção da elipse e da parábola (e QR-Code).



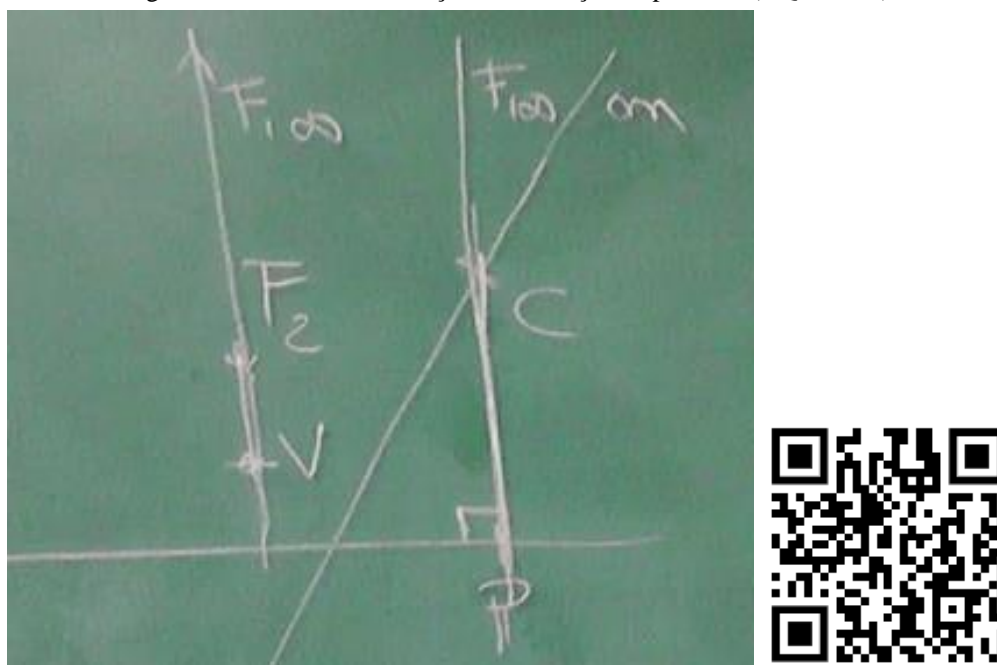
Fonte: Dos dados.

<sup>65</sup> A marcação do segmento  $\overline{PF2}$  é dispensável, pois, para fazer a mediatriz, são necessários apenas os vértices.

Foi curioso ver Guilherme explicando a construção que já havíamos discutido no décimo segundo encontro, como se não soubesse do que se tratava. Tudo bem que esse já era o vigésimo segundo encontro, então já fazia muito tempo. Ele disse que lembrava que tínhamos feito, inclusive de alguns equívocos que cometeu, mas não expressou recordar da justificativa.

O importante, naquele momento, era que ele entendesse, por isso comecei com minha série de perguntas: “O que estávamos fazendo? Em que essa construção se assemelha com a da parábola?” Fiz o esboço desse procedimento ao lado, colocando os elementos correspondentes (Figura 78 à direita). William começou a fazer as analogias, dizendo que, se o segmento  $\overline{CP}$  é o mesmo nas duas construções, então  $F1$  tem que estar na mesma reta, mas onde? Em um ponto infinitamente afastado. Segui com os comentários: os focos estão alinhados com o vértice (na construção da elipse), então, na parábola, o  $F1$  tem que estar alinhado com  $V$  (Figura 79). Sou interrompido por Guilherme, dizendo: “Uau, a reta de  $\overline{VF2}$  está paralela a  $\overline{PC}$ , por isso elas se encontram no além em  $F1$ .” E William complementou: “Os elementos fixos são os dois focos e a circunferência, que é a diretriz, é a mesma para as duas (parábola e elipse), então o fato de fazer  $\overline{CP}$  ortogonal à diretriz é correspondente a ligar  $P$  a  $F1$ .”

Figura 79 – Detalhes do esboço da construção da parábola (e QR-Code).



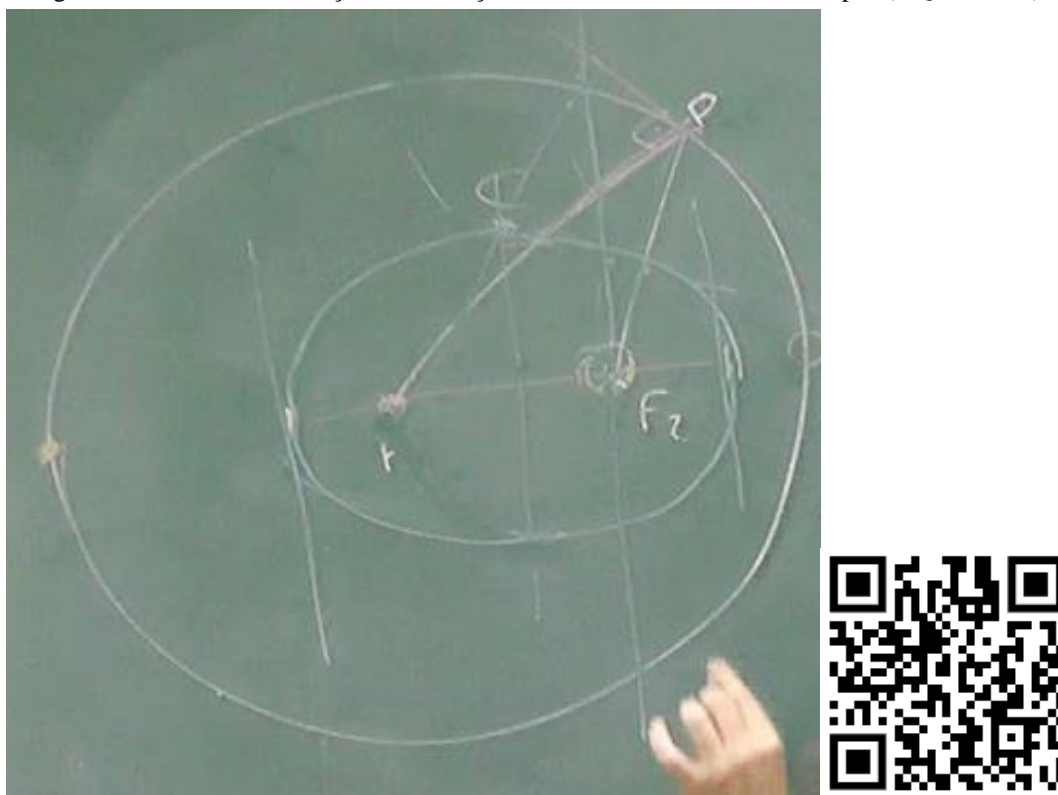
Fonte: Dos dados.

Prossegui pedindo para Guilherme explicar como determinar o vértice da parábola e fazer a analogia na elipse. Sem falar, ele ligou  $F1$  e  $F2$  até tocar na circunferência, marcou o

ponto e, de ‘olhômetro’, colocou o ponto médio; em seguida, desenhou o segundo vértice, repetindo o mesmo para o outro lado da circunferência.

Em seguida, perguntei sobre os vértices secundários já indicando que, na construção da parábola, eles não aparecem. Também dei a dica de que esses vértices estão sobre as tangentes paralelas ao eixo maior. William explicou que basta passar uma ortogonal ao eixo maior passando por  $F_2$  e onde ela tocar a circunferência faz a mediatriz entre este ponto e  $F_2$ , que, obrigatoriamente, vai ser paralela ao eixo (Figura 80). Guilherme não entendeu de primeira, mas quando William estava na metade da explicação, ele afirmou ter entendido e complementou a fala.

Figura 80 – Detalhe do esboço da construção dos vértices secundários da elipse (e QR-Code<sup>66</sup>).



Fonte: Dos dados.

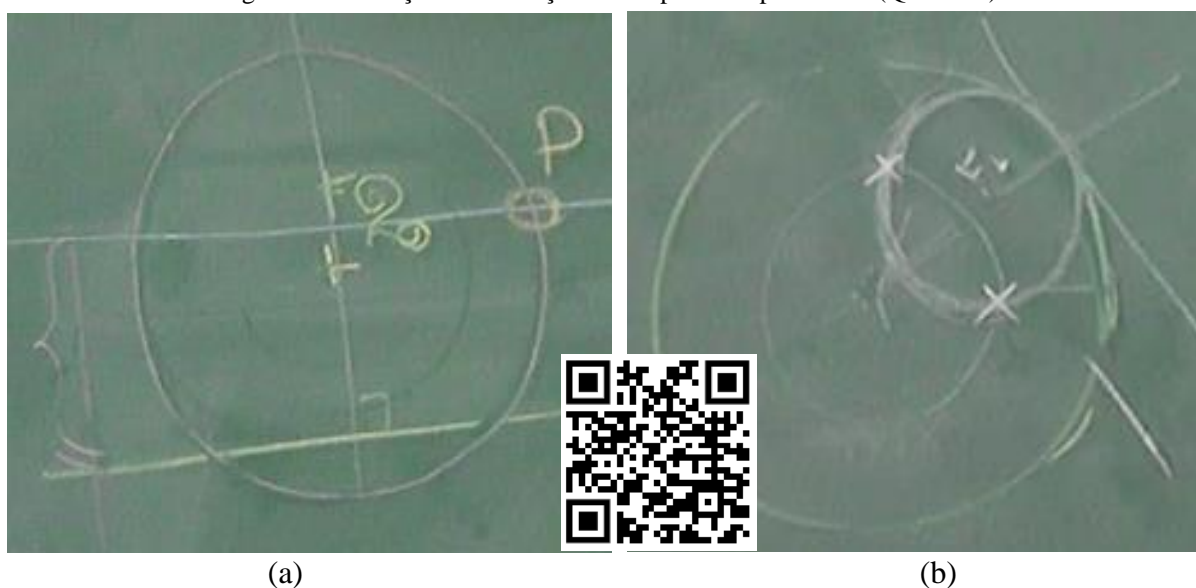
Antes de passarmos para a hipérbole, tive um *insight*, lembrando que discutimos dois métodos de construção da parábola, mas só fizemos analogia de um, então sugeri fazer a do outro, proposto por Guilherme. Ele disse que as leis de geração dos dois são diferentes, porém contestei dizendo que são as mesmas, pois ambos partem dos mesmos elementos iniciais: a circunferência e o ponto. Ele argumentou que a parábola tem a reta e o ponto. Neste momento, percebi que Guilherme não estava fazendo a analogia projetiva, até brinquei dizendo que ele

<sup>66</sup> Ao acessar o *link*, mova o ponto P de modo que a mediatriz  $m$  fique paralela ao eixo principal da elipse.

estava pensando ‘euclidianamente’. Então fiz um esboço da construção de um ponto da parábola (Figura 81a) e pedi para ele fazer a analogia para a elipse.

Como no método da parábola, foi feita uma paralela à diretriz. Guilherme sugeriu fazer uma “circunferência paralela” ao círculo diretor, para tal, bastaria traçar uma circunferência de mesmo centro e raio diferente. O William não conseguia aceitar por que ele não sabia como traçar uma reta paralela à circunferência. Intervi explicando que não era uma reta paralela, mas sim pensar que, no caso da construção da parábola, a paralela é parte do lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes (LGE) a uma reta, do mesmo modo que a circunferência é o LGE de um ponto. Desse modo, ao pensar nos elementos análogos, ele deveria pensar não em fazer a paralela, mas sim no LGE ao objeto análogo, que, no caso da circunferência, teria como parte desse lugar uma circunferência concêntrica. Guilherme complementou, dizendo que era uma questão de linguagem, pois o termo lugar geométrico caberia nas duas situações.

Figura 81 – Esboço da construção de um ponto da parábola e (QR-Code).



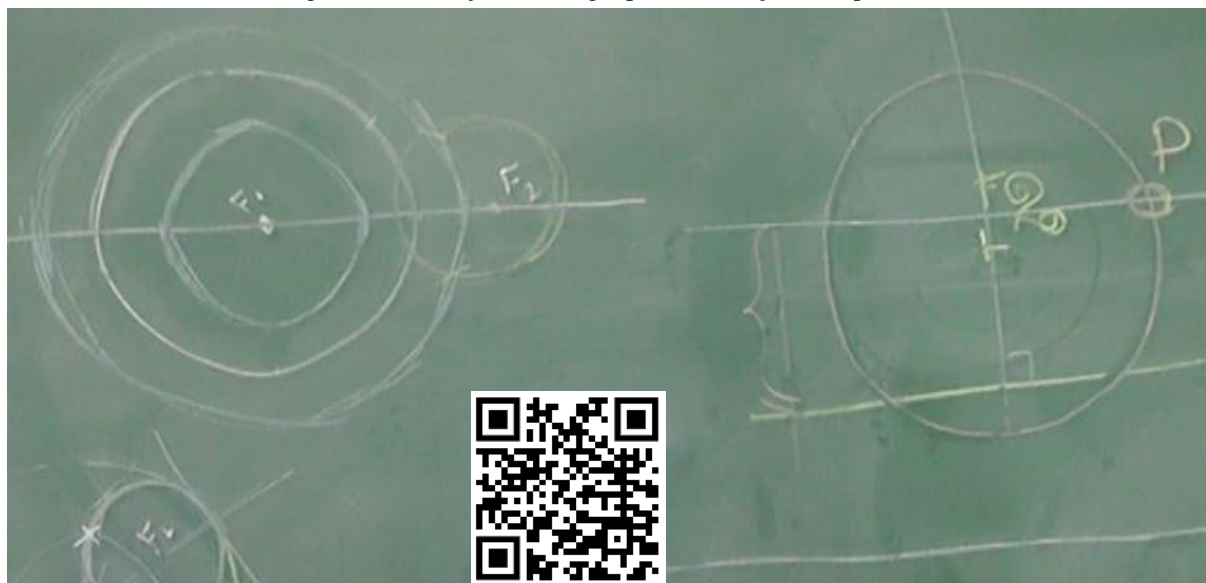
Fonte: Dos dados.

Depois de traçar o LGE da circunferência, como tinha uma perpendicular à diretriz (da parábola) passando por  $F2$ , deveria ter uma “perpendicular” ao círculo diretor (da elipse), ou seja, uma reta que passasse pelo centro, determinando as distâncias dos lugares geométricos. Do mesmo modo, como no primeiro método traçamos uma circunferência de centro  $F2$  com essa mesma distância, então deveríamos fazer o mesmo na elipse (Figura 81b).

Em seguida, foi a vez da hipérbole. Dessa vez, eu sabia que eles precisavam de uma informação a mais, pois até então eles só tinham esboçado parte dos LGE, então pedi para eles pensarem qual é o LGE de uma reta. Guilherme respondeu “outra reta”, cabendo minha

pergunta: “Só uma?” Nesse momento, olhando para o desenho, eles perceberam que eram duas, do mesmo modo que o LGE de uma circunferência seriam duas. William tomou a frente da explicação e traçou a paralela que faltava na construção da parábola e as duas na hipérbole (Figura 82). Com isso, questionei: “Por que não tínhamos feito esses elementos antes?” Guilherme disse que eles não geravam pontos, já na hipérbole iria gerar.

Figura 82 – Esboço da analogia para construção da hipérbole.



Fonte: Dos dados.

Como no quadro estava ficando confuso e eles não estavam conseguindo visualizar como seriam os pontos do outro ramo da hipérbole, fiz a construção no Geogebra; assim, foi possível observar os detalhes das interseções dos LGE.

Por fim, discutimos o segundo método para a hipérbole. William rapidamente fez a circunferência, o ponto fora dela, escolheu o ponto qualquer (da circunferência) e fez a mediatriz. Na hora de traçar o raio para achar a interseção com a mediatriz, ele ficou um pouco travado, porque coincidentemente escolheu um ponto em que o raio ficaria paralelo à mediatriz. Perguntei aos meninos que ponto iria gerar e Guilherme disse que era o vértice secundário e que a mediatriz era a assíntota (Figura 83).



Figura 83 – Esboço da construção da assíntota de uma hipérbole (e QR-Code<sup>67</sup>).



Fonte: Dos dados.

Depois dessa, fechamos com chave de ouro nosso último encontro do Grupo de Estudos e olhe que a discussão começou com um comentário da prova de Desenho. Acho que tenho que agradecer à professora por ter colocado uma questão de cônica na prova.

\*\*\*

---

<sup>67</sup> Após acessar o *link*, mova o ponto *P* até que a mediatriz fique paralela ao raio.

## SEÇÃO 3

### CONSTITUINDO UMA LEITURA A PARTIR DOS DADOS



*“O Espantalho decidiu que iria pensar, e pensou com tanta determinação que os alfinetes e as agulhas começaram a apontar para fora do seu cérebro. E, finalmente, ele disse:*

*– Por que não chamar os Macacos Alados, e pedir que eles carreguem você até o outro lado do deserto?*

*– Nunca tinha pensado nisso! – disse Dorothy, muito satisfeita. – É a ideia perfeita.”*

(Lyman Frank Baum)

## ORGANIZANDO AS IDEIAS

\*\*\*

No percorrer da estrada de tijolos amarelos, Dorothy esteve acompanhada dos seus amigos. Diferente dela, o pós-graduando, a cada novo passo, se encontra em uma jornada progressivamente solitária, deixando de escutar o caminhar dos colegas com quem compartilhava trabalhos de disciplinas, ideias, dúvidas, lazes... Caminhos que se distanciam, cada um para seus focos de pesquisa. Silenciam-se as vozes alheias e deparo-me apenas com o eco dos meus próprios passos e pensamentos.

Chego a um ponto da pesquisa em que é necessário direcionar o olhar, deixar de ampliar e passar a afunilar. Habitam, em um mesmo corpo, espantinho, homem de lata e leão covarde em busca do mágico de Oz. Sinto-me sem cérebro para pensar em como olhar para os dados, sinto-me sem coração, preso à racionalidade da rigidez acadêmica, sinto-me sem coragem para sair da minha zona de conforto.

Paro de caminhar para que os sons dos novos passos não se confundam com o eco dos já percorridos. Estático, permaneço de olhos fechados, emudecendo o mundo ao meu redor em busca de respostas que já se encontram dentro de mim, mas que ainda não consigo decodificá-las em uma linguagem inteligível. Neste movimento, espero que a tempestade dentro de mim se acalme, de modo a me permitir organizar as ideias.

Após a tempestade (da produção de dados), abro os olhos e contemplo as folhas ao chão (os dados da pesquisa), buscando por lentes que me auxiliem a analisar o caminho de acordo com a minha pergunta de pesquisa. Mas, enfim, qual é minha pergunta de pesquisa? Já a expressei de tantos modos que não me recorde em que ponto parei.

Volto o olhar para a estrada percorrida para compreender os passos dados que me levaram ao agora. Em um primeiro momento, tento escrever sobre a “tempestade” sem lentes, a fim de que esse contar uma história evidencie em palavras a pergunta que já existe em mim. Mas...

### **... como contá-la?**

Inquietava-me contar esta história (a pesquisa de doutorado) nos moldes acadêmicos a que estava acostumado, ordenada em introdução, com a problemática, objetivos e justificativa; revisão da literatura e fundamentação teórica; metodologia; dados; análise/discussão e considerações. Não que esta estrutura fosse ilegítima para mim, pelo

contrário, era até demais. Contudo, gostaria de trazer outros aspectos referentes aos bastidores da pesquisa que enriqueceram a sua constituição e que eu não conseguia introduzi-los do modo como estava habituado.

Esta necessidade se evidenciou ao conviver com os membros do grupo de pesquisa (GPIMEM) e outros colegas da pós-graduação, com os quais tenho oportunidade de discutir, receber e dar contribuições e sugestões sobre nossas teses e dissertações. Nessas trocas, percebi como é mutável a construção textual, expressando o *design emergente* da pesquisa (ARAÚJO; BORBA, 2013) e que a estrutura do texto adotada nem sempre reflete a ordem com as posturas epistemológicas que foram assumidas.

Exemplificando, há pesquisas em que a seção dos referenciais teóricos é ordenado previamente ao de apresentação e análise dos dados. Dessa maneira, o leitor tem a possibilidade de fazer uma leitura a partir dos referenciais apresentados. Porém, dependendo da pesquisa, e/ou como a organizamos, a(s) lente(s) para interpretar os dados pode(m) não ter sido definida(s) antes de produzi-los. Ou mesmo, pode haver conhecimento sobre ela(s), mas não em profundidade antes dessa produção.

Nesta direção, após uma tentativa (frustrada) de descrever os dados em forma de relatório, não me dei por satisfeito. Entendia que o problema não estava na forma em si de descrever, mas que eu não conseguia expressar, por meio dela, a riqueza do Grupo de Estudos. Por essa razão, dei coragem ao leão covarde e segui o coração que agora habita no homem de lata, optando por outro modo de escrita. Uma escrita que me permitisse diminuir as distâncias entre o que eu tenho que comunicar (rigor) e a subjetividade do *eu* pesquisador que nem sempre acerta, que nem sempre sabe, mas que está em constante movimento evolutivo do *ser sendo*.

Durante o *caminhar* da escrita, encontrei pesquisas em Educação Matemática cujos autores optaram por estilos literários distintos dos quais eu estava habituado, seja em parte ou em toda a obra. Em minhas leituras, encontrei essa distinção estética predominantemente em trabalhos da História Oral, Etnomatemática e Filosofia, a exemplo de: Brito (1995), Gomes e Gomes (2015), Oliveira (2015), Queiroz (2015) e Lopes (2016). Contudo, compreendo que esta aparente predominância não é exclusiva aos campos citados, mas esses trabalhos evidenciam que a opção por estilos literários distintos da escrita acadêmica tradicional permite a explicitação ao leitor de algo importante sobre o conteúdo da pesquisa por meio da forma. Por essa razão, considero que o uso de uma forma alternativa deve ser utilizado não por mera estética, como um adereço, mas para que a forma potencialize a expressão da investigação.

Inspirado em um dos diários dos sujeitos, comecei a elaborar narrativas, encarnado nas pessoas dos sujeitos, de modo que os leitores, assim como em textos literários, pudessem se

imaginar dialogando ou mesmo se reconhecer nas falas dos personagens. Para tal, selecionei citações (descrições e transcrições dos dados) que pudessem imprimir características dos sujeitos que me ajudaram a compor as personagens, características do ambiente e sua modificação durante a investigação e, o principal, as noções (matemáticas) que foram constituídas durante o processo de investigação.

Com o passar do tempo, percebi a necessidade de organizar as citações, pois já não dava conta de saber quais delas estavam sendo usadas na escrita dos episódios (como chamei as seções em que descrevo os dados). Como fonte de dados, contendo as gravações dos vinte e dois encontros (oito com duração de uma hora, e quatorze de duas horas), as conversas no grupo do WhatsApp e os diários dos sujeitos. Por esse motivo, comecei a catalogar as citações em um arquivo do Word por episódio, codificando e tabulando, fazendo referência ao episódio em que estavam inseridas.

No decorrer da escrita, me deparei com as minhas limitações, meus medos, meus entraves. Inicialmente, era fácil encarnar outros personagens, mas percebi que, muitas vezes, fugia do personagem principal dessa história, que era eu. Perceber-me capaz de ser sujeito também na escrita, de ver beleza nessa escrita, de compreender que meu tempo não é o do outro, de entender que é preciso tempo para maturar as ideias, que nem sempre temos esse tempo e que, no tempo que temos, é o máximo que podemos fazer, mesmo quando não atingimos o esperado por si... tudo isso me fez deixar fluir a tempestade silenciosa dentro de mim e, num processo indutivo, me permitir transbordar a escrita narrativa dos dados para toda a tese, que, por vezes, mescla-se na escrita acadêmica do pesquisador e, por outras, no humano que sente, os quais habitam o mesmo corpo. Por vezes, fugi de mim, dos meus enfrentamentos e das minhas dificuldades. Coragem, leão! Coragem para seguir e encontrar o caminho.

Para caminhar nessa estrada de tijolos amarelos, retomo minhas motivações e ideias de pesquisa a fim de ressignificá-las com base na experiência vivida. Dialogo comigo mesmo, não mais esperando que outros me digam o que fazer, mas encontrando o sentido da pesquisa que se faz em mim.

Parto do que me moveu a organizar o Grupo de Estudos, isto é, ...

### **... o interesse em compreender como estudantes de Matemática exploram as curvas cônicas**

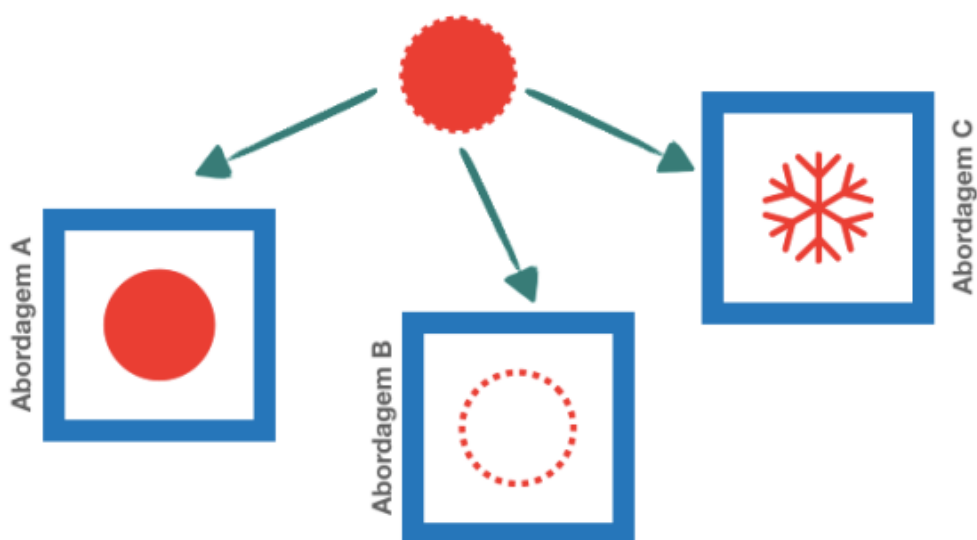
Porém, não é qualquer exploração, é uma exploração com características específicas. Quais são essas características?

É um ambiente investigativo distinto de um contexto tradicional de ensino, este, em que o professor propõe situações pelas quais espera-se que os estudantes produzam significado coerente com objetivos pré-definidos. Já nesta pesquisa, o ambiente investigativo foi configurado de modo a possibilitar aos participantes produzirem significado por meio de problematizações engendradas em seus próprios interesses, tendo o professor como um parceiro nesse processo de investigar, não mais como um condutor, mas sim um colaborador.

Apesar da intencionalidade na configuração do ambiente, este se modificou à medida que os participantes interagiam entre si e demarcavam seus papéis. Pude compreender que, do mesmo modo que os objetivos foram delineados ao logo da investigação, o ambiente também foi constituído durante o processo. Considero que a mudança de regras e de papéis foi possível mediante a liberdade de o grupo poder mudar os “contratos” conforme a necessidade e a experiência vivida, em vez de se prender a estruturas pré-estabelecidas.

E por que é importante olhar para a produção nesse tipo de ambiente? Em minha experiência, percebi que alunos (seja na educação básica ou superior) estudam um objeto de acordo com abordagens específicas da disciplina, o que lhes dá a ideia de que cada abordagem constitui um objetivo distinto (Figura 84).

Figura 84 – Diferentes abordagens de um mesmo objeto.



Fonte: Do autor.

Por exemplo, hipoteticamente, uma pá poderia ser estudada sob diferentes aspectos. Em uma disciplina de Desenho Técnico, poder-se-ia estudar as diferentes formas dos componentes da pá e os modos de representá-la graficamente. Em uma disciplina de Física, propriedades relacionadas ao movimento, como o uso da pá como alavanca, explorando

velocidade e força aplicada a esse objeto. Em outra disciplina referente à resistência de materiais, poder-se-ia estudar as qualidades dos materiais usados na confecção de uma pá, levando em consideração a adequação desses materiais às finalidades de uso.

Essas três disciplinas hipotéticas possuem, cada uma, objetos de estudos distintos entre si e do objeto operado, ou seja, nenhuma delas tem, como objeto de estudo, a pá em si, mas, por meio dela, são exploradas propriedades e técnicas de uma área de conhecimento ou abordagem. Como cada disciplina tem uma ementa a cumprir referente àquela abordagem, não cabe dentro da disciplina explorar e aprofundar outras qualidades de um objeto operante.

Uma possível solução seria criar uma disciplina chamada “Pá”! Assim, seriam estudados diferentes aspectos e abordagens do mesmo objeto. Em cursos como arquitetura e medicina, já se trabalha sob este paradigma, em que o currículo foi modificado em projetos (ou estudos de caso) ao invés de disciplinas específicas para cada área de conhecimento; assim, à medida que as demandas surgem, é explorada a abordagem com base no projeto.

Para os cursos de Matemática, esta proposta poderia estar atrelada ao currículo tradicional; assim, haveria um espaço para interligar as múltiplas visões de acordo com o foco do curso (licenciatura ou bacharelado), contribuindo para um processo de generalização. Apesar de se entender que a pá é um único objeto, o trabalho desassociado de suas diferentes abordagens pode conduzir a um sutil deslocamento da identidade de *ser objeto*, do todo para cada parte, ou seja, o aluno pode compreender cada abordagem como uma “pá” diferente.

É importante salientar que, ao me referir à abordagem, não me restrinjo apenas aos modos de expressão, mas também a propriedades específicas que podem ser observadas naquele contexto. Por exemplo, para descobrir quantas pás são possíveis de serem confeccionadas a partir de uma chapa de metal de tantos  $cm^2$ , eu poderia adotar uma abordagem algébrica ou geométrica (gráfica). A abordagem algébrica requereria uma série de tratamentos algébricos que apresentam propriedades inerentes à álgebra e aritmética (cálculo da área da pá, cálculo da proporção entre a área da pá e a área da chapa etc.). Analogamente, uma abordagem gráfica requereria técnicas que refletem propriedades inerentes a esse modo de expressão (desenho técnico da pá, planificação da pá, estudo ergonômico de adequação da planificação da pá sobre a chapa etc.). Dependendo do problema, uma abordagem, ou mesmo a integração de duas ou mais, pode se mostrar mais adequada (custo benefício) que outra. Neste sentido, conhecer diferentes abordagens inclui não apenas saber expressar um objeto de uma maneira específica, mas saber operar cada modo de expressão e, conseqüentemente, conhecer mais sobre o objeto, tendo em vista que a abordagem não é o objeto em si, mas o que dizem dele.

Esta...

### ... reflexão sobre o objeto matemático

... e como ele pode ser explorado fomentou em mim, durante a produção de dados, o interesse em compreender que objeto foi investigado no Grupo de Estudos. Minha pergunta não diz respeito à definição do termo curvas cônicas, mas ao modo como os significados sobre elas foram se constituindo para cada sujeito e produzidos coletivamente no interior do Grupo de Estudos. O objeto investigado foi o mesmo pelos matemáticos ao longo da história? Foi o mesmo abordado nas escolas e universidades?

A preocupação em entender a natureza desse objeto se fez necessária para minha pesquisa em virtude de o meu interesse ser justamente analisar como as curvas cônicas foram exploradas no Grupo de Estudos. Por este motivo, entender essa natureza me dará subsídios para definir os referenciais que pretendo utilizar na análise dos dados. Após este *insight*, lendo sobre epistemologia em Lins (1993), ratifiquei ser necessário refletir sobre as concepções epistemológicas do pesquisador para se definir os métodos de pesquisa.

Esta reflexão retomou um dos questionamentos da minha primeira reunião de orientação, em que Rúbia me perguntou o que eu entendia por produção de conhecimento. Não via como desassociar a ideia de objeto e de produção de conhecimento, visto que entendia um objeto como o resultado de uma produção de conhecimento. Confesso que minha percepção dessa noção foi mudando à medida que estudava o tema.

Havia em mim algumas compreensões empíricas sobre o que seria esse objeto, mas eu precisava confrontar esse entendimento com outras visões teóricas, a fim de embasar esses entendimentos. Inicialmente, considerava um objeto matemático como algo abstrato, que podíamos manipulá-lo a partir de expressões concretas e mentais, e quanto maior a variação de expressões e modos de manipular esse objeto, mais eu conhecerei sobre ele. Seria similar a um relacionamento humano: quanto mais eu convivo e interajo com o outro, mais o conheço. Porém, as expressões não são os objetos matemáticos, por exemplo, um cabo de pá tem a forma de um cilindro, mas ele não é um cilindro, nem mesmo um cilindro modelado em um programa computacional é um cilindro “perfeito”, pois o objeto matemático não está no mundo físico.

Essa minha primeira ideia se aproximava do paradigma de Platão (filósofo grego do séc. V a IV a.C.), em que há um mundo ideal, onde habitam as formas perfeitas, e o mundo sensível, no qual vivemos e temos acesso apenas a expressões imperfeitas desse objeto ideal, ou seja, o homem nunca teria o conhecimento real ou completo sobre algo. Isso significa que o objeto existiria independentemente do sujeito.



Para mim, fazia todo sentido pensar dessa maneira, pois, se eu pegasse um objeto com forma de cone e o cortasse, independentemente de querer ou não, de saber ou não, a seção seria uma curva cônica e todas as propriedades estariam lá. Entretanto, ao frequentar as aulas de Filosofia da Matemática e assistir a alguns seminários sobre as pesquisas de colegas, questionei se ainda fazia sentido o paradigma platônico, em que o objeto independe do sujeito. Confesso que a cada nova postura teórica eu abandonava a anterior, tomando a seguinte como minha. Chegou um momento em que, apesar de as várias posturas terem sentido dentro da própria teoria, eu precisava encontrar alguma que fizesse sentido para mim na minha investigação, de modo a me ajudar a analisar os dados.

Percebi que a visão que eu tinha da Matemática é a de que ela já era posta, pois é assim que ela nos é apresentada nas escolas, como um dogma que precisamos aprender e aprender do mesmo modo como ela nos é apresentada (nos livros ou pelo professor). Neste sentido, o paradigma platônico caberia perfeitamente, pois há um objeto que já existe e o mundo das ideias equivaleria ao mundo matemático ao qual só temos acesso pela razão e suas representações imperfeitas.

Ampliando os horizontes, a Matemática, enquanto ciência, não existia por si só, ela é produção humana (DAVIS; HERSH, 1985), ou seja, um objeto matemático é algo produzido e legitimado por uma comunidade, neste caso, uma comunidade de matemáticos. Poderíamos até inferir que ela sempre existiu, mas não; ela começa a se organizar apenas na primeira metade do século XIX e se consolida na segunda metade e no início do século XX. Após esta profissionalização do matemático é que se restringe a ele a autoridade de dizer o que é ou não Matemática, mas não a um matemático específico, e sim a uma instituição cultural, portanto, histórica e material (LINS, 2012a). Desse modo, no contexto acadêmico, em que os objetos matemáticos são produzidos, o paradigma platônico perde sentido, pois não existem por si só.

Esta Matemática do matemático “não se dá por alguma causa natural (definição descritiva), mas por uma determinação simbólica (definição constitutiva)” (LINS, 2012a, p. 95) e, conseqüentemente, abstrata. Não interessa ao matemático se o objeto ao qual ele se refere corresponde a um objeto físico do nosso cotidiano, ou mesmo qual sua essência, mas se ele ajuda a estabelecer relações gerando novas propriedades e/ou a responder problemas. Nesta direção, os objetos matemáticos não são conhecidos pelo que eles são, mas sim pelo que é dito sobre eles.

Ok, mas se os objetos matemáticos são produtos de uma comunidade de matemáticos, o que é produzido pelos professores e estudantes? Será que o que fazemos em sala de aula e o

que fizemos no Grupo de Estudos foi apenas reproduzir o que outros matemáticos fizeram no passado?

Bem, o professor de Matemática aprendeu (ou, pelo menos, espera-se que tenha aprendido) o que é dela em sua formação universitária. Por um lado, podemos considerá-la útil para o ensino, devido ao fato de a formação na Matemática do matemático fundamentar a ensinada nas escolas, o que implicaria ao professor, pelo menos, a habilidade em procedimentos e técnicas, por exemplo. Por outro lado, é possível considerar que essa formação focada majoritariamente em definições, teoremas, demonstrações e em disciplinas avançadas talvez não seja adequada para a formação de professores (LINARDI, 2006). Neste sentido, acredito que minha pesquisa possa contribuir também com a possibilidade de ambientes que permitam a futuros professores produzirem outros modos de significados que não os usualmente produzidos durante a formação inicial.

Diante deste cenário, compreendo o ensino formal (básico ou superior) como um meio pelo qual estudantes podem ter acesso à Matemática do matemático. Ou seja, quando se diz: *a Matemática está em toda parte! No comércio, ao passar um troco, nas formas dos utensílios, móveis e edificações, ela está...* Não! Não está, porque ela não é algo independente, sou eu quem associo características do objeto do matemático a alguma situação do meu cotidiano. Entretanto, quando uma criança expressa que algo tem a forma de círculo, não necessariamente ela está identificando o objeto matemático definido por Euclides<sup>68</sup>, apenas associa este algo físico a um nome (convenhamos que geralmente adultos referenciam a crianças objetos circulares com o nome de “bola”, sejam eles esferas ou círculos, fato que me dá nos nervos, mas isso é outra história). Isso significa que o círculo da criança não é o mesmo do matemático, ou seja, trata-se de objetos distintos que se referem a alguma coisa, “o ‘algo’ é comum, mas o que se diz dele não” (LINS, 2012a, p. 115).

O que seria então esse “algo”? No Grupo de Estudos, os participantes, ao discutirem sobre as cônicas, constituíram objetos distintos, mas todos nós nos referíamos à mesma coisa. Não poderia chamar a coisa de objeto, pois segundo minha argumentação anterior, estou considerando a constituição do objeto subjetiva, ou seja, ele pode ser algo para alguém, mas não para outro. Exemplificando, para ratificar o pensamento, ao ver um desenho de um rombicododecaedro, um aluno do curso de Matemática poderia produzir o mesmo significado

---

<sup>68</sup> “Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada de circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si. [...] E o ponto é chamado de centro.” (EUCLIDES, 2010, p. 97–98). Em uma linguagem moderna, poderíamos dizer que círculo é uma figura plana que contém uma linha de contorno (circunferência) cujos pontos equidistam de um mesmo ponto chamado centro.

que eu produziria ao ver o cálculo de uma integral, ou seja, nenhum! É como se o objeto só existisse para aquele que produz significado. Desse modo, precisava encontrar outro termo para não haver confusão.

Após algumas conversas, pensei na possibilidade de usar a palavra *ente*, a qual quer dizer coisa ou objeto, mas ele também passa a ideia de essência e não é este o significado que busco. Então poderia usar *produto matemático* para referir ao resultado de uma produção cultural de um matemático. Não o chamo de objeto, por entender que este é constituído no agora, desse modo, tenho acesso não aos objetos, mas sim às expressões do que foi dito sobre eles. Contudo, a cônica de Apolônio (séc. III-II a.C.) não é o mesmo produto de que trata Descartes (séc. XVII d.C.), pois são objetos diferentes. E o que seria então o algo que lhes é comum?

Por fim, encontrei em Lins (2012a) o termo que fez sentido para mim. Ele chamou de *corpo cultural* o conjunto de legitimidades constituídas ao longo de um processo. No caso da Matemática, o corpo cultural é tudo aquilo que a comunidade matemática constituiu e legitimou como tal. É por conta desse corpo, o qual não pode ser negado, que aceitamos, por exemplo, que dois mais dois é igual a quatro. Nesta perspectiva, entendo que o corpo cultural se apresenta para nós hoje como “uma síntese do processo histórico em transformação” (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 66).

Ok! Já apresentei três noções que estou assumindo na pesquisa: a de objeto, de produto matemático e de corpo cultural. Esta última poderia ser chamada de conhecimento matemático (no caso da Matemática), mas por que adotar outro termo para dizer a mesma coisa? Bem, porque a noção que tenho de conhecimento se distancia do que estou chamando de corpo cultural. Então, para que não haja confusão entre seus usos, destacarei quais posturas estou assumindo para conhecimento.

Primeiro, levo em consideração que o conhecimento é subjetivo, isso quer dizer que ele não existe fora do sujeito ou independente do sujeito. Então, o que chamamos de conhecimento científico, nesta pesquisa, assumo como corpo cultural para que não haja confusão entre os termos. Nesta lógica, aquilo que pensava sobre seccionar um objeto físico<sup>69</sup> com forma de cone toma outro sentido. As seções obtidas podem não significar nada para alguém que nunca ouviu falar de curvas cônicas (corpo cultural).

Além disso, um conhecimento está localizado em um espaço e tempo, ambos caracterizando um contexto sociocultural. Contudo, isso não significa que dois sujeitos em um

---

<sup>69</sup> Estou considerando como objeto físico qualquer corpo constituído de matéria.

mesmo tempo e espaço constituem o mesmo conhecimento sobre uma situação, pois além da questão contextual, existe a questão subjetiva, que é influenciada pela experiência vivida pelo sujeito e que é distinta da do outro.

Abrindo um parêntese. É interessante quando você se volta para investigar algo e tudo ao seu redor parece confluir para o mesmo objetivo. Aos poucos, me deparava com textos, sejam casualmente ou indicados, que me ajudavam a constituir o meu entendimento sobre conhecimento. Ao mesmo tempo, como se existisse um roteiro afinado com as minhas leituras, participei de seminários que tratavam do mesmo tema. Foi em um desses seminários que ouvi falar sobre uma teoria, até então conhecida por mim apenas pelo nome, mas não sabia de que se tratava. Nesse seminário, vi a teoria como uma possibilidade de lente para ler os dados da pesquisa de modo coerente com os sentidos que eu vinha constituindo nesse caminhar. A teoria trata sobre...

### **... o Modelo dos Campos Semânticos (MCS)**

... o qual foi desenvolvido pelo prof. Dr. Rômulo Lins (1993) como parte de uma caracterização epistemológica para a Álgebra e para o pensamento algébrico, porém o Modelo pode ser empregado na análises de modos de produção de significado em outras áreas da Matemática.

Como o próprio Rômulo afirmou, o MCS “não é uma teoria para ser estudada, é uma teorização para ser usada” (LINS, 2012b, p. 11) e eu senti isso na pele. Primeiro, fiz um movimento de entender as noções utilizadas no Modelo por elas mesmas. Considerei que as entendia isoladamente, porém, ao idealizar situações práticas a fim de analisar o Modelo em ação, percebi que ainda estava com dúvidas. Aos poucos, após a qualificação, depois de conversas, mais leituras para entender como pesquisadores operavam o Modelo, uma revisitação aos dados e a análise propriamente dita, foi que pude dar sentido prático à teoria.

Segundo o MCS, o conhecimento é uma crença-afirmação junto com uma justificação (LINS, 2012b). Ok, bonita a frase, mas vou destrinchar melhor. Não é à toa que o termo *crença-afirmação* está unido por hífen. Ele significa aquilo que é enunciado pelo sujeito, autor do conhecimento, porém ele só enuncia porque acredita (crença) que o que é dito é verdadeiro. Essa enunciação, como ato expressivo do conhecimento, não ocorre apenas pela fala, mas também por meio da escrita, de gestos, desenhos etc. Além disso, a constituição de conhecimento não se caracteriza pela descrição de algo, mas sim por uma afirmação (AYER, 1956). Não que não possa haver a descrição, mas ela não é condicionante.

Para entender essa primeira parte da noção de conhecimento na prática, vou imaginar uma situação. Por exemplo, quando faço um desenho no quadro de um quadrado para explicar determinada propriedade em uma aula, o desenho compõe minha enunciação. Neste ato, já estou assumindo (afirmando, logo crendo) que aquilo é um quadrado do qual quero explicitar alguma propriedade, ou seja, não foi necessário explicar que a ilustração “é” um quadrado.

Neste caso, ao desenhar, eu constituo o objeto e a ilustração caracteriza uma *estipulação local*, a qual não precisa ser contestada, é apenas aceita, localmente, como uma verdade absoluta (LINS, 2012b).

Mas o que me autoriza a dizer o que digo? É a legitimidade de o desenho ser reconhecido como quadrado. Para uma turma de 8.º ano do ensino fundamental, é legítimo mostrar um desenho (Figura 85) sem que se justifique. Entretanto, para o MCS, a crença-afirmação não é suficiente para ser conhecimento, ou seja, o fato de acreditar no que digo, por si só, não é o conhecimento. Para tal, chego à segunda parte dessa noção.

Figura 85 – Ilustração de um quadrado.



Fonte: Do autor.

Lins (2012b) chama de *justificação* o que dá legitimidade para dizer/acreditar no que se diz. A diferença com relação à estipulação local é que a justificação é expressa junto da crença-afirmação, ela não é uma justificativa, ou mesmo uma explicação (pode até ser, mas não é condicionante), e sim uma referência a uma experiência vivida que torna a enunciação legítima. Desse modo, só há produção de conhecimento quando a crença-afirmação é justificada (SILVA, 2003).

Usando o mesmo exemplo do quadrado, se perguntasse a uma criança de seis anos por que o desenho é um quadrado, ela poderia responder que ele se parece com a forma de um brinquedo que a mãe disse que era quadrado. Fazendo a mesma pergunta a um estudante do ensino médio, ele poderia responder que é por conta de ser um quadrilátero de lados iguais e ângulos internos com medidas de 90°. Ou seja, ambos identificam o desenho como quadrado, porém com justificações diferentes, conseqüentemente, não é o mesmo objeto.

No primeiro caso, a identificação foi por semelhança<sup>70</sup>, no segundo pelas propriedades de equilateralidade e ortogonalidade. Neste sentido, a justificação, como elemento constitutivo do conhecimento, é parte do processo de dar legitimidade como também de constituir objetos.

Do ponto de vista da psicologia cognitiva piagetiana, a criança do exemplo anterior poderia ser classificada em um estágio de desenvolvimento inferior ao aluno do ensino médio (pré-operatório e operatório formal, respectivamente<sup>71</sup>) por “não ter” estabelecido relações abstratas, por exemplo. Ou seja, esta análise é determinada pela falta. Do meu ponto de vista, que vai ao encontro do MCS, prefiro fazer a análise a partir dos significados produzidos pelo sujeito e não pela falta, pois isso me ajuda a entender não porque ele disse algo “errado”, mas de onde ele está falando.

O significado para o Modelo não é tudo o que se poderia dizer sobre o objeto, mas o que efetivamente se diz sobre ele (LINS, 1996). E sendo dito, é em relação a um contexto; isso quer dizer que o significado é sempre local e, conseqüentemente, ele pode ir mudando conforme as novas experiências. Mas, como assim, local? O local no Modelo se refere à atividade.

A noção de atividade, no MCS, tem sua fundamentação em Leontiev (2011), que considera como tal o processo psicologicamente caracterizado pelo motivo, ou seja, para aquilo que se volta o sujeito. Posso exemplificar pela seguinte situação: na disciplina de Desenho (estudo piloto 2), a professora propôs exercícios para serem feitos a cada aula, os quais valiam alguma pontuação. Suponhamos que a professora informasse, em uma determinada aula, que o exercício do dia não valeria “ponto”. Poderíamos fazer uma leitura da atividade em que os alunos estavam envolvidos ao observarmos quais alunos fariam o exercício. Aqueles que o fizessem poderíamos considerar como indício da atividade *querer aprender o conteúdo*. Já os que não fizessem poderíamos interpretar como a atividade *ganhar nota*. Por essa perspectiva, a atividade pode ser considerada como unidade de análise do processo de produção de significado, pois em atividades diferentes são produzidos significados distintos (SILVA, 2003).

Como níveis da atividade, Leontiev (2011) descreve a atividade em si, as ações e as operações. A primeira é caracterizada pelo motivo, a segunda são ações cujo objetivo difere do motivo e a terceira são as condições de se executar as ações. Tendo como atividade construir uma casa, um grupo de pessoas irá realizar ações para atender a essa necessidade. O arquiteto faz o projeto, o engenheiro faz o cálculo das estruturas, os pedreiros fazem a construção, todos realizam ações que, isoladamente, não teriam como resultado a casa (o motivo). Já as operações

---

<sup>70</sup> Semelhança aqui está sendo entendida em um sentido não matemático, qual seja, “ser parecido com”.

<sup>71</sup> Para conhecer a teoria cognitivista de Jean Piaget, consultar Piaget (2012).

podem ser diferenciadas para uma mesma ação; um arquiteto, por exemplo, pode optar por elaborar rascunhos em um papel em seu processo criativo de concepção do projeto para depois desenhar no computador. Outro arquiteto poderia optar por um programa computacional de modelagem tridimensional, ou seja, são modos distintos de operar em uma mesma ação.

Bem, entendendo que os significados são produzidos no interior de uma atividade e que eles podem se modificar ao longo do processo, o Campo Semântico é esse “processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade” (LINS, 2012, p.20). O núcleo é constituído por estipulações locais que podem se manter estáveis, serem adicionadas, retiradas ou mudarem de *status* quando uma estipulação passa a ser requerida de uma justificação. Do mesmo modo, um conhecimento pode, a partir de determinado momento, ser tratado como uma estipulação local, fazendo parte do núcleo. Esse processo é chamado de nucleação (SILVA, 2003).

E, na prática, o que é o Campo Semântico? Antes de pensar em um exemplo, considero importante tratar de mais uma noção do Modelo: a de *espaço comunicativo* (acho que já deu para perceber que os vários elementos do Modelo estão interligados).

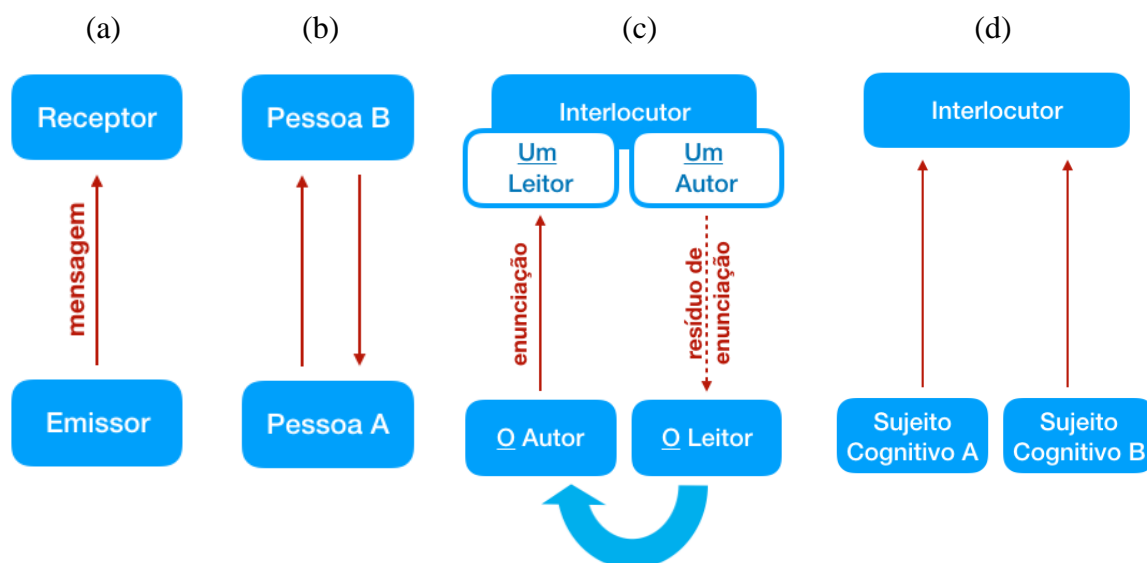
Anteriormente (quando estava pensando sobre tipos de comunicações nos estudos pilotos), trouxe um conceito clássico de comunicação, em que há um emissor que emite uma mensagem para um receptor por meio de uma linguagem (BERLO, 1979). Já no MCS, a comunicação ocorre entre sujeitos cognitivos e não entre sujeitos biológicos.

Os seres humanos, enquanto sujeitos biológicos, sobrevivem por meio de dois instintos: a alimentação (aspecto individual) e a reprodução (aspecto coletivo). Já o sujeito cognitivo tem como instinto de sobrevivência a pertença, ou seja, produzir significado é um modo de pertencer a uma cultura, logo de existir (LINS, 2012).

Neste sentido, eu, enquanto sujeito cognitivo, falo na direção de um *interlocutor* (sujeito cognitivo constituído por mim), ou seja, eu, o autor do conhecimento, falo para um leitor que acredito que entenda e considere legítimo aquilo que falo.

Já aquele que escuta, o leitor, não escuta a enunciação que o autor falou; o que chegam são os *resíduos de enunciação*, que é o que ele acredita ter ouvido de um autor (sujeito cognitivo constituído pelo leitor). Quando responde, o leitor assume a condição de autor e a comunicação continua (Figura 86c). Contudo, só há comunicação para o Modelo quando o autor e o leitor compartilham o mesmo interlocutor. O efeito psicológico dessa comunicação é a descrita entre emissor e receptor que falam em direções opostas (Figura 86b), porém o que ocorre, segundo o MCS, são dois sujeitos cognitivos que falam na mesma direção (Figura 86d).

Figura 86 – (a) Agentes na comunicação clássica; (b) comunicação clássica; (c) agentes na comunicação no MCS; (d) comunicação no MCS.



Fonte: Adaptado de LINS (2012, p. 14, 24).

Quando não há produção de significado, não há comunicação; isso quer dizer que o leitor não constituiu em *texto* os resíduos de enunciação. O texto é então aquilo para o qual o leitor produz significado.

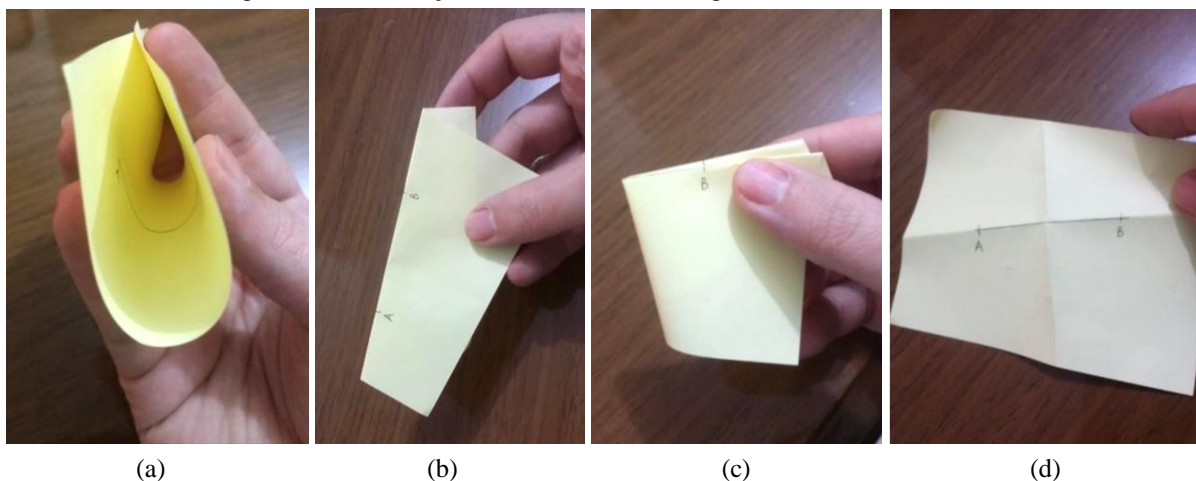
Ok, até aqui tudo bem (teoricamente), mas o que me permite dizer que uma pessoa está operando nesse ou naquele Campo Semântico? Neste caso, é o que Lins (2012) chama de *leitura plausível*, que é a minha produção de significado em relação à produção de significado do outro. Isso quer dizer que eu, enquanto pesquisador, me coloco na condição de um possível leitor do processo de produção de significado dos membros de um Grupo de Estudos sobre curvas cônicas, a fim de fazer uma leitura plausível desse processo. Desse modo, a caracterização de um Campo Semântico é idealizada pelo pesquisador a partir do seu repertório de legitimidades. Em outras palavras, ao dar nome a um Campo Semântico, eu nomeio um modo de produção de significado.

Agora vamos a um exemplo: em uma aula sobre construções geométricas, a professora do 8.º ano trabalhou com os alunos a noção de mediatriz. Para explicar, ela pediu que os alunos desenhassem um segmento  $(\overline{AB})$  qualquer em uma folha de papel e tentassem encontrar o ponto médio sem usar nenhum instrumento, apenas o papel. Inicialmente, alguns achavam impossível, mas após algumas tentativas, um dos alunos apresentou a solução de dobrar o papel de modo que os vértices *A* e *B* coincidissem (Figura 87a). O local onde a dobra do papel cruzou o segmento era o ponto médio. Um outro aluno incrementou a solução do colega, sugerindo que, antes de fazer coincidir os pontos, vincasse o papel com a dobra no segmento (Figura 87b) para



depois dobrar o papel novamente e fazer os pontos coincidirem (Figura 87c). A professora questionou a turma se todos concordavam que a dobra passava no ponto médio (Figura 87d), obtendo resposta positiva. Em seguida, questionou os alunos sobre as características dessa dobra. Um disse que formava  $90^\circ$  com o segmento e outro afirmou que os vértices tinham a mesma distância em relação à reta.

Figura 87 – Construção da mediatriz de um segmento usando dobradura.



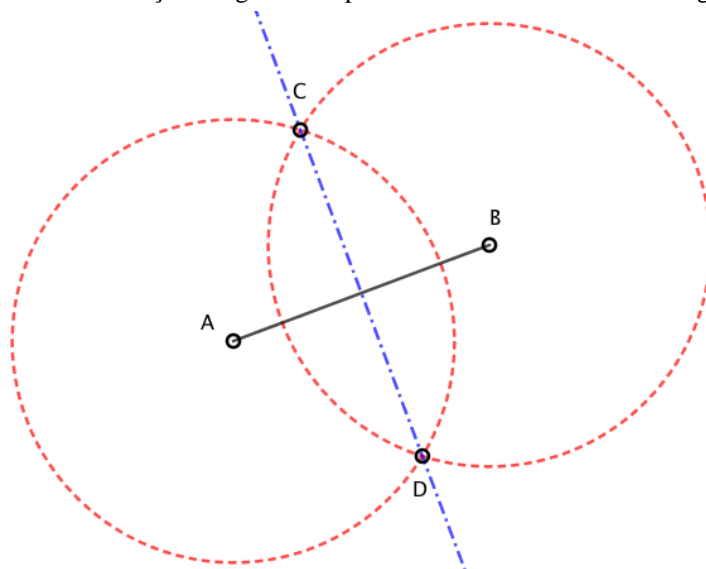
Fonte: Do autor.

Neste momento, a professora instituiu que essa reta ortogonal a um segmento passante em seu ponto médio chamava-se mediatriz. Após verificar se todos os alunos conseguiram achar a mediatriz usando a dobradura, a professora mostrou a construção com régua e compasso. Explicou que bastava traçar duas circunferências de mesmo raio, uma em cada vértice, com medida maior que a metade do segmento, e pelos pontos de interseção ( $C$  e  $D$ ) traça-se a mediatriz (Figura 88).

Todos os alunos executaram a construção sem apresentar erros ou demonstrar dúvidas. Feliz da vida, a professora seguiu adiante querendo explorar mais a noção de mediatriz e explicou sobre um dos pontos notáveis do triângulo, o circuncentro, ou seja, o centro de uma circunferência circunscrita ao triângulo. Orgulhosa dos seus alunos por não apresentarem dúvidas com relação à mediatriz, ela lança um desafio: “Como poderíamos construir o circuncentro de um triângulo?” Dessa vez, os alunos permaneceram em silêncio. Tentando estimular a reflexão, perguntou o que os alunos observavam do circuncentro em relação aos vértices do triângulo. Um deles respondeu que eles têm a mesma distância para o circuncentro. A professora, vibrando por dentro, esperou o complemento da resposta do aluno, que não veio. Sem acreditar que os alunos não estavam enxergando o que ela considerava óbvio, a professora

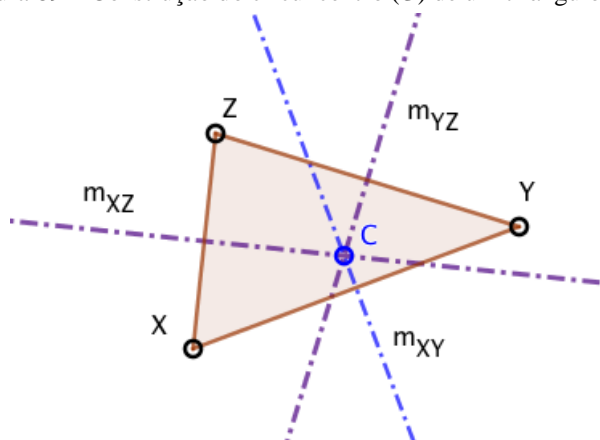
revela aos alunos que bastaria construir as mediatrizes de cada lado do triângulo e o local onde elas se interceptarem seria o circuncentro (Figura 89).

Figura 88 – Construção a régua e compasso de uma mediatriz de um segmento.



Fonte: Do autor.

Figura 89 – Construção do circuncentro (C) de um triângulo XYZ



Fonte: Do autor.

Um dos alunos disse que não entendeu e pergunta o porquê de usar as mediatrizes. Sem querer responder de imediato, a professora questiona-o sobre o que é a mediatriz. Ele responde usando a mesma definição que ela deu anteriormente e acrescenta que a mediatriz é o eixo de simetria dos dois vértices do segmento. Em seguida, a professora pergunta por que usamos as duas circunferências para construir a mediatriz (na intenção de eles perceberem que os pontos de interseção eram equidistantes). Ele responde: porque a senhora disse que era assim que se fazia.

Neste momento, a professora se deu conta de que esse aluno (e possivelmente outros) produziram significado para a mediatriz diferente do dela. Ela entendia a mediatriz como o

lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes a dois pontos, já o aluno entendia como um eixo de simetria. Apesar de ele entender que os vértices do segmento eram equidistantes à mediatriz, esse fato não garantia explicitamente (não era legítimo) que os demais pontos do eixo também eram equidistantes aos vértices. Desse modo, a construção da mediatriz era tratada como um procedimento sem significado com a noção em questão (o famoso passo a passo).

Do ponto de vista do Modelo<sup>72</sup>, poderia se fazer a leitura de que o aluno estava operando em um Campo Semântico diferente da professora. Isso pode ser observado a partir da análise de como o objeto mediatriz foi sendo constituído a partir das estipulações locais (ortogonal ao segmento, vértices com mesma distância e eixo de simetria), as quais constituem o núcleo desse Campo Semântico. Já a professora, ao tentar justificar a construção da mediatriz pela propriedade de equidistância, dá indícios do seu núcleo.

A partir da fala do aluno, a professora percebeu que as suas legitimidades de equidistância não eram óbvias para os alunos e que o fato de eles reproduzirem a construção de uma mediatriz não quer dizer que eles produziram significado na mesma direção que a dela. Supondo que a professora justificasse a construção e questionasse os alunos sobre o que entenderam é que eles poderiam constituir o objeto como um conjunto de pontos (lugar geométrico) equidistantes, produzindo significado para a construção do circuncentro na mesma direção que a professora, compartilhando, assim, interlocutores.

Bem, depois de discutir tantas coisas, quase que me esqueço de onde parti, da produção de conhecimento. Para o Modelo, a produção se dá no ato enunciativo do conhecimento. Mas por que falar de produção e não de constituição de conhecimento? A constituição ocorre no âmbito subjetivo, por isso se fala em constituição de objetos; já a produção remete a um fazer coletivo. Neste sentido, a produção envolve outros sujeitos cognitivos que não só o eu.

Entendido o Modelo, creio que posso...

### **... retomar a pergunta da pesquisa à luz do MCS**

O que quero analisar é o processo de produção de conhecimento? Não exatamente! Poderiam me perguntar: mas não era isso que você queria olhar? Na verdade, era o nome que eu dava para aquilo que eu queria olhar. Contudo, depois de refletir e estudar sobre várias noções que permeiam minha pesquisa e amadurecer as ideias, percebi que o meu interesse está

---

<sup>72</sup> Doravante, ao citar Modelo (com inicial maiúscula) me ferio ao Modelo dos Campos Semânticos.

no “corpo” que se mostra a partir dos significados produzidos. Desse modo, minha pergunta de pesquisa pode ser expressa da seguinte maneira:

*Como é engendrado um “corpo” por sujeitos ao produzirem significados para noções matemáticas em um Grupo de Estudos sobre curvas cônicas?*

O *como* reflete uma questão metodológica, ou seja, o foco não está apenas em descrever o corpo, mas em analisar as ações e operações em uma atividade que engendram um corpo. Este engendramento se dá por meio do processo de produção de significado dos sujeitos, corporizando-se em legitimidades para aquele grupo. O corpo não é explicitado pelos sujeitos, mas sou eu, pesquisador, que faço uma leitura para um possível corpo engendrado.

As *noções matemáticas* especificam as qualidades dos significados, os quais quero analisar no processo de produção. Assim como na Teoria do MCS, não utilizo o termo *conceito*, pois ele corresponde a um “processo que torne possível a descrição, a classificação e a previsão dos objetos cognoscíveis” (ABBAGNANO, 2007, p. 164). Neste sentido grego, o conceito busca por uma essência do objeto, conduzindo à ideia de um objeto pré-existente, distanciando-se do significado de objeto adotado nesta pesquisa de doutorado. Do ponto de vista da Matemática, o conceito de um produto matemático é fixo e definido, é ou não é. Já a ideia de noção, apesar de não haver consenso em seu significado, há “o significado genérico de operação, ato ou elemento cognitivo em geral” (ABBAGNANO, 2007, p. 713). Isso me permite entender a noção como algo passível de mudança que não necessariamente restringe-se a definições da comunidade matemática, mas aquilo que um sujeito pode dizer sobre alguma coisa, cabendo, inclusive, definições não matemáticas. Por exemplo, quando um professor em sala de aula se utiliza da noção de equação como uma balança de dois pratos. Nesta situação, há uma informação que não é legítima para a comunidade matemática, porém pode ser para alunos em um contexto da sala de aula se produzem significado para o produto cultural de equação ao validarem a associação à balança, ou se consideram legítima a fala do professor em decorrência de sua autoridade.

No caso do Grupo de Estudos desta pesquisa de doutorado, o corpo não é totalmente delimitado previamente, ele se engendra à medida que há interação entre os participantes. Nesta direção, olhar para a produção de significado, nessa configuração de ambiente, possibilita a produção de estratégias de ensino que propiciem, como principais motivos nos alunos, o conhecer, o criar e o aprender.

A pergunta diretriz será a bússola que usarei em meu caminhar na estrada. Tendo-a em “mãos”, me lanço para o próximo desafio:

## COMO MAPEAR A ESTRADA DE TIJOLOS CÔNICOS

... amparado no Modelo? Confesso que, antes de escolhê-lo como suporte teórico, fiz um movimento de olhar para os dados e ver o que me chamava atenção, na tentativa de definir possíveis categorias de análise. Neste movimento, configurou-se um...

### ... processo indutivo de análise prévio à teoria do MCS

... o qual me possibilitou ter uma visão geral dos dados e delimitar os recortes de análise.

Foram considerados, como ambientes de produção de dados, todos os espaços destinados a discutir e refletir sobre a investigação do Grupo de Estudos. Isso quer dizer que os ambientes não se restringiram apenas às reuniões presenciais semanais, mas também ao WhatsApp (no grupo ou em conversas entre pares) e aos diários on-line dos sujeitos. As fontes de dados, nesta pesquisa de doutorado, corresponderam aos registros produzidos das discussões e reflexões em cada ambiente.

Nas reuniões presenciais, os registros foram feitos por meio de vídeo-gravações<sup>73</sup>. Ao todo, foram 22 encontros presenciais, com duração de uma hora no primeiro semestre e de duas horas no segundo semestre<sup>74</sup>, totalizando em torno de 45 horas de gravações. Como lidar com esse volume de informações? Primeiro, analisei possíveis modos de tratar esse tipo de dado. Alguns métodos sugerem descrever (por escrito) as cenas de um vídeo, sinalizando gestos, expressões faciais, desenhos, entre outros. Contudo, esse tipo de dado é difícil de ser descrito (LOIZOS, 2008), uma vez que essa transformação de materiais audiovisuais em texto escrito “provoca perda da qualidade e pode ser considerada um mal uso do potencial do material”

---

<sup>73</sup> Os recursos utilizados para as vídeo-gravações foram uma câmera filmadora profissional e um tripé. Esses equipamentos são de propriedade do GPIMEM, os quais foram disponibilizados para a realização da pesquisa. A câmera foi posicionada de maneira fixa em um dos cantos da sala, de modo a capturar a imagem de todos os participantes, bem como dos dois quadros da sala, localizados em paredes distintas. Após as primeiras reuniões, verifiquei que os desenhos no quadro ficavam “distorcidos” por conta do posicionamento da câmera. Por considerar que as imagens em perspectiva poderiam gerar informações confusas aos leitores da tese em relação às suas descrições (por exemplo, uma circunferência em perspectiva poderia ser interpretada como uma elipse), optei por colocar a câmera de frente para o quadro, sendo rotacionada em direção ao outro quadro, quando este era utilizado. A câmera foi operada pelos participantes do Grupo de Estudos, reposicionando-a, como também, em alguns encontros, operando-a sem tripé por um dos participantes, possibilitando-lhe mover-se na sala para tentar captar o melhor ângulo da discussão.

<sup>74</sup> Os meninos pediram para aumentar a duração dos encontros.

(GARCEZ; DUARTE; EISENBERG, 2011, p. 256). Por esse motivo, tomei como dados, para esse tipo de fonte, as cenas selecionadas dos vídeos. Mas como organizá-las?

Garcez, Duarte e Eisenberg (2011) sugerem o uso do programa computacional *Atlas.ti*<sup>75</sup>, empregado para auxiliar no tratamento e na organização dos dados, contribuindo para a análise em pesquisas qualitativas. Além de vídeos, podem ser inseridos, no programa, documentos de análise de áudios, textos e imagens. Desse modo, eu considerei viável utilizar o programa não só no tratamento dos vídeos, mas também dos escritos do grupo do WhatsApp e dos diários dos sujeitos.

A partir dos documentos, o programa permite destacar unidades de análise (*quotes/quotation*), gerar códigos (*codes/coding*) para essas unidades, criar notas de análises (*memos*) e fazer esquemas gráficos (*network view*), a fim de auxiliar no estabelecimento de relações entre códigos.

O *Atlas.ti* foi idealizado para a análise de dados de grande quantidade, sendo empregado em pesquisas que se apoiaram na *Grounded Theory*. No campo da Educação Matemática, trabalhos como o de Klüber (2014) e Queiroz e Cavalcante (2011) destacam o uso do programa e suas potencialidades em pesquisas que tomam por pressupostos teóricos a fenomenologia e a teoria da atividade, respectivamente, sendo na última empregada a técnica de análise de conteúdo. Esses trabalhos evidenciam que o uso do programa não se restringe a um campo específico de conhecimento, mas que, assumindo uma determinada postura epistemológica e conhecendo a ferramenta, o pesquisador pode aproveitar as suas potencialidades para ajudar na análise.

Alguém poderia me perguntar se o programa faz a análise. A resposta é não. Ele apenas operacionaliza a organização das informações, porém todo o processo de análise depende do olhar do pesquisador. Ou seja, a ferramenta indispensável de análise é o pesquisador, e não o programa. O *Atlas.ti* otimiza o trabalho, mas quem estabelece as relações é o ser humano que o opera.

Em um primeiro momento, usei o programa para estabelecer um mapa do processo de produção do Grupo de Estudos (lembrando que, nesse período, ainda não pensava no MCS como possibilidade de referencial), focando nas noções matemáticas que foram discutidas pelos participantes. Nesta direção, fui selecionando as unidades de análise e as codifiquei conforme

---

<sup>75</sup> Disponível em [www.atlasti.com](http://www.atlasti.com).

o que me chamava atenção. Por exemplo, um trecho selecionado foi a resposta que William deu à minha pergunta sobre o que ele entendia sobre curvas cônicas. Ele respondeu:

... eu sei que curvas cônicas têm esse nome por representarem diferentes cortes num par de cones com o vértice em comum. (Fonte: Z01<sup>76</sup>).

O código que pus foi *Noção de Curvas Cônicas como seção cônica*. Em seguida, ele complementou:

Puxando para álgebra rapidinho: TODAS as curvas cônicas possíveis podem ser escritas da forma  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ . (Fonte: Z01).

Nesta citação, codifiquei *Noção de Curvas Cônicas como uma expressão algébrica*. Ambas as citações tratam da noção de curva cônica, mas são noções distintas.

Ao longo do processo, destaquei outras noções que seriam subconjunto de uma noção mais ampla, por exemplo, a noção de elipse, de circunferência como subconjuntos da noção de curvas cônicas. Contudo, esta organização perdeu sentido à medida que o número das unidades de análise aumentava, pois as relações que estabeleci entre conjunto e subconjunto correspondiam mais a uma organização didática do conteúdo do que como as noções se engendraram durante o processo. A exemplo disso, quando Sabrina perguntou a William o porquê de ter dois cones alinhados para gerar as cônicas, ele justificou que seria pela necessidade de gerar a hipérbole, pois a seção corta cada um dos cones, gerando os ramos da curva. Interpretei, naquele momento, que a noção de superfície cônica expressa por William não era a de uma superfície de revolução (noção a qual expressei logo em seguida), mas de uma superfície que gera uma dada curva, ou seja, os dois cones alinhados pressupunham a existência da hipérbole, o resultado da seção era “esperado”. Neste sentido, tentei mapear todas as noções matemáticas que foram expressas, organizando-as em um diagrama cronologicamente, a fim de entender o encadeamento das ideias.

Ao término de uma tentativa de mapeamento do primeiro<sup>77</sup> e do segundo encontro, me deparei com um volume considerável de informações selecionadas, tendo uma visão global e

---

<sup>76</sup> Os documentos de fonte de dados foram nomeados por letras maiúsculas. As iniciais dos nomes dos participantes foram utilizadas para os diários de cada sujeito (*W* para William, *G* para Guilherme e assim por diante), *E* para os encontros semanais, numerados de 01 a 22, correspondendo à ordem das reuniões. A conversa do grupo do WhatsApp foi nomeada por *Z*. Por se tratar de um único documento que continha conversas que ocorreram ao longo dos encontros, separei o documento por seções, a fim de localizar os diálogos cronologicamente em relação aos encontros. Desse modo, a notação Z01 corresponde à seção do documento do grupo do WhatsApp em que ocorreram as conversas previamente ao primeiro encontro.

<sup>77</sup> Por questões estéticas, optei por utilizar o programa MindNode (disponível em <https://mindnode.com/>) para desenhar este primeiro mapeamento. Para ter uma ideia dessa etapa, é possível visualizar o diagrama do mapeamento do primeiro encontro pelo [link](#):

confusa da investigação. Desse modo, considere que não seria plausível analisar todas as noções expressas nos 22 encontros. Por essa razão, decidi assistir e ler os materiais de toda a investigação sem selecionar nenhuma citação, apenas a fim de ter uma visão geral, para depois identificar possíveis focos de análise.

Neste movimento, organizei um quadro (Quadro 2), intitulado as reuniões pelos temas mais presentes, como também as conversas no grupo do WhatsApp e trechos dos diários.

Quadro 2 – Cronologia da Investigação.

Cód.	Data	Título
G1	15/03/16	“Manipulação algébrica das cônicas, mas sei muito pouco sobre suas equações.”
Z1	19/03/16	Curva Cônica como produto de seção cônica e equação
	30/03/16	Sabrina – “Não sei o que o Bonner explicou”
	31/03/16	Articulação entre WhatsApp e Google Drive
E01	31/03/16	Superfície cônica/ Seção Cônica (plano móvel, cone móvel - lanterna)
G2	31/03/16	Por que o nome cônicas?/Seções? Projeções? De onde saem as cônicas/demonstração com lanterna/curvas abertas e fechadas
Z2	01/04/16	Linhas e curvas
	02/04/16	
E2	07/04/16	Linhas/ Geometria Projetiva/ regiões da curva/ vértice
Z3	08/04/16	Vértices como pontos mais distantes da cônica
E3	14/04/16	Definição de curva cônica/ ângulo
R4	15/04/16	Diferença entre cônica e seção cônica
Z4	15/04/16	Sobre os diários no Drive
	22/04/16	Seção cônica x curva cônica
	26/04/16	Guilherme pedindo para lembrar a tarefa
		Ausência
		Tentando resgatar
G4	26/04/16	Definição de curva cônica
E4	05/05/16	Reorganização do Grupo de estudos
Z5	05/05/16	Motivação
W5	08/05/15	Introdução
E5	12/05/16	Guilherme – Interseção entre curva cônica e superfície cônica/ curva cônica diferente de seção cônica/ modelo físico ou digital/ quadrilátero/ polígono/ vértice/curva cônica aberta ou fechada?
Z6	12/05/16	Dúvidas para a semana
	18/05/16	Variáveis do modelo da seção cônica
	19/05/16	
E6	19/05/16	Variáveis do modelo da seção cônica/ superfície “quúbica” / diretriz, geratriz/ gº/ geração da superfície cônica/ primeira vez que usa modelo geogebra/ superfícies curvas
Z7	20/05/16	Modelo no Geogebra
		Guilherme – Superfície cônica de 2 círculos diretores
	30/05/16	Modelo no Geogebra/ orientações
E7	02/06/16	Revisão de seção cônicas/ transformação linear/ transformação projetiva (homologia)/ ponto impróprio/ uso do modelo do Geogebra/ variáveis do modelo do cone/ seção no cone oblíquo
E8	09/06/16	Geração de superfície cônica por 2 círculos/ segundo modelo Geogebra (cone oblíquo)/ revisão de seção em cone reto/ seção em cone oblíquo
Z9	18/06/16	Diferença entre superfície cônica, superfície de um cone e geração de superfícies
	19/06/16	
W9	19/06/16	Prólogo, Superfície Cônica e algumas lembranças (analíticas)



	20/06/16	A parte interessante
	21/06/16	
	22/06/16	Continuidade
	23/06/16	
B9	07/16	Tirando férias com a superfície cônica
Z9	19/07/16	O que fizeram nas férias? (o cone oblíquo)
	04/08/16	Horário do segundo semestre/ orientações para reunião: o que lembram (de novo, de novo...)?
E9	10/08/16	Superfícies cônicas (reta, oblíqua)/ não definir, mas caracterizar/ seção de superfícies cônicas/ quantos pontos impróprios tem cada cônica?/ o centro da cônica está sobre o eixo do cone?/ vértices
E10	17/08/16	Diferença? geração da superfície cônica reta e oblíqua (modelo 3 do Geogebra)/ como o modelo foi gerado (o cone, o plano...)/ focos/ soma dos raios vetores/ esferas tangentes/ triângulo projetivo/ incentro
B11	19/08/16	Seção no cone reto/ cone oblíquo
	20/08/16	Seção cone oblíquo
E11	24/08/16	Construção da bissetriz/ elementos das cônicas/ pontos das cônicas/ região das cônicas/ centro/ eixos/ vértices/ tangentes
B12	25/08/16	Superfícies cônicas/ elementos das cônicas/ Geometria Projetiva
Z12	25/08/16	Dúvidas sobre o centro da curva
R12	31/08/16	Posição do plano em função da superfície cônica
E12	31/08/16	Generalidade dos elementos das cônicas/ modelo da Geometria Projetiva/ infinitos/ soma dos raios vetores
E13	07/08/16	Explicação do modelo do Geogebra/ modelo projetivo
B14	01/09/16	Modelo da Geometria projetiva
	02/09/16	
Z14	04/09/16	Mudança de horário (de novo)
	05/09/16	
	06/09/16	
Z14	07/09/16	Mudança de horário (de novo)
	07/09/16	G – Projecção da cônica no impróprio/centro como ponto médio do eixo
E14	14/09/16	História das cônicas/ Circuncentro/ inscrito, circunscrito/ centro de simetria/ ponto médio maior e menor/ variáveis do plano de seção/ determinação de vértices
E15	28/09/16	Eixos de simetria (dobrando o papel)/ cônicas como lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes a um ponto e uma circunferência/ diretrizes e círculos diretores
E16	05/10/16	Área da parábola (integral)/ diretriz da parábola/excentricidade
Z17	06/10/16	Hiperboloide
E17	12/10/16	Dedução da equação parábola
B18	12/10/16	Dedução da equação parábola
Z18	22/10/16	Quem ficou responsável por qual cônica (demonstração da equação)?
E18	26/10/16	Dedução da equação da elipse e da hipérbole/ retângulo da cônica/ relação dos parâmetros
B19	26/10/16	Dedução da equação da elipse
E19	09/11/16	Derivada da função da parábola/ quais são os parâmetros da parábola/ dedução da equação da parábola/ translação da parábola/ função inversa
E20	16/11/16	Dedução da equação da parábola (quem é a, b e c)
B21	21/11/16	Raios focais internos das cônicas
	22/11/16	
E21	23/11/16	Explicação do modelo do Geogebra (raios internos das cônicas)/ avaliação do Grupo de Estudos
Z22	07/12/16	William – “Vou fazer uma sistematização”
E22	08/12/16	Construção Gráfica das curvas cônicas. Avaliação Final
Z23	03/01/17	Paraboloide

Fonte: Do autor.

Utilizei o quadro como um sumário da investigação, de modo a facilitar o encontro de informações sobre eventos que considerei importantes para a análise.

Para o exame de qualificação, apresentei à banca uma versão da tese contendo a descrição da constituição do ambiente de produção de dados, parte dos episódios da investigação no Grupo de Estudos e um ensaio de possíveis focos de análise, bem como uma discussão embrionária sobre Teoria do MCS como possibilidade de lente para olhar os dados. Após a qualificação, e seguindo as orientações sugeridas pela banca, aprofundei os estudos sobre o Modelo para então realizar...

### **...uma análise à luz da Teoria do MCS**

Silva (2003) aponta como concepções imprescindíveis do Modelo teórico dos CS:

- i) O interesse em olhar para processos, em oposição a olhar para estados ou produtos;
- ii) O interesse por uma leitura positiva do processo de produção de significados para a matemática, isto é, o interesse em entender o que as pessoas dizem e por que dizem, em oposição a olhá-las pelo erro, pela falta;
- iii) A busca de uma explicação plausível para o processo de produção de significados para a matemática. (SILVA, 2003, p. 22).

A partir dessas concepções, compreendo que fazer uma leitura desse processo implica não buscar “reconhecer” a Matemática no produzido, mas explicar plausivelmente como a matemática<sup>78</sup> foi produzida por um grupo em um dado momento. Fazendo analogia, historiadores atuais se preocupam em evitar o anacronismo ao escrever História, ou seja, mergulham nos aspectos do período histórico estudado, considerando fatores científicos, sociais e filosóficos da época (ROQUE, 2012), ao invés de tentar traduzir o passado para uma linguagem moderna, usando conceitos, pensamentos da atualidade que não se aplicam ao passado, como se o hoje fosse mais “desenvolvido” que o ontem. Analogamente, pondero que, ao olhar para o processo de produção de significado de noções matemáticas, devo evitar também o anacronismo, pois o fato de reconhecer conceitos matemáticos nas expressões de conhecimento dos sujeitos não quer dizer que os significados produzidos por eles são os mesmos legitimados pelos matemáticos. Desse modo, mergulhar no contexto em que o processo ocorre se faz necessário para buscar evidências que apontem para os significados produzidos pelos sujeitos. Mas como identificar e analisar essas evidências?

Observando a dinâmica do processo de produção de significado para a Matemática de estudantes de pós-graduação, Silva (2003) considera que não há uma dinâmica, mas dinâmicas peculiares para cada sujeito e o que caracteriza a dinâmica são as transformações dos elementos

---

<sup>78</sup> A matemática com *m* minúsculo corresponde, nesta pesquisa, a um corpo de conhecimentos não delimitado por uma comunidade de matemáticos, mas por um grupo que o produz e o legitima como matemáticos.

que constituem o processo, sendo estes elementos interligados; por isso, quando um muda, modifica os outros. Permito-me fazer a seguinte analogia para ilustrar esta noção: a dinâmica é como uma trança de cabelo, composta por mechas. Uma das mechas corresponde ao histórico dos objetos, ou seja, a constituição e as mudanças deles. Outra mecha corresponde ao processo de nucleação, então, não se trata apenas da constituição, mas sim do processo em que o núcleo muda ou permanece estável. Uma terceira mecha é a mudança dos interlocutores, quando um sujeito constitui novos interlocutores. Neste sentido, a trança (a dinâmica) só é composta se há o trançado dessas três mechas.

Traçando um paralelo com a dinâmica descrita por Silva (2003), a trança é composta por mais outras mechas. Uma delas é a questão da legitimidade no processo, o qual é interferido diretamente pelos modos de produção de significados. Uma outra é a comunicação autor-texto-leitor, ou seja, é considerado que haja constituição do enunciado em texto, pois sem ela não há produção de significado. Esse processo de comunicação é uma das características do método de análise de produção de significado no MCS; além desta, são consideradas também a leitura positiva por parte do pesquisador como postura adotada e a atividade como unidade de análise.

Quanto à atividade, o pesquisador tem acesso às operações expressas por meio das enunciações dos sujeitos. A partir dessas operações, é possível interpretar as ações e as atividades nas quais os sujeitos estão engajados.

Neste sentido, voltei à fonte de dados, procurando em cada documento evidências que respondessem à pergunta já estruturada: *Como é engendrado um “corpo” por sujeitos que em um Grupo de Estudos ao produzirem significados as Curvas Cônicas?*

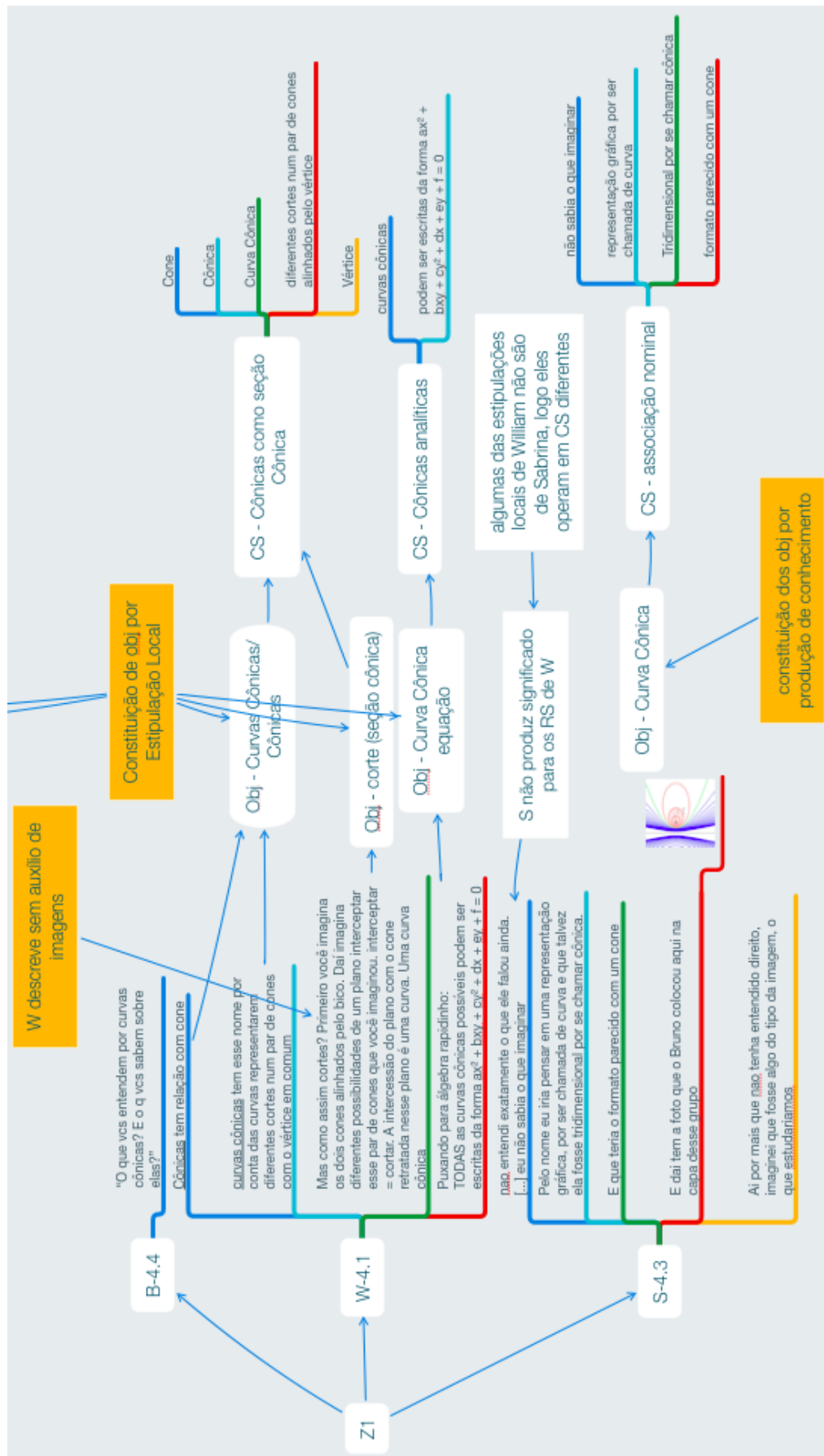
A pergunta de pesquisa me levou a diferentes organizações dos dados, as quais, se fosse explicar detalhadamente, teria que escrever uma nova tese só sobre elas. Mas espero que, ao escrever a versão final da tese, possa elucidar parte desse processo até chegar ao tratamento definitivo dos dados. Então vou registrar, neste diário do pesquisador, aquilo que considero importante para entender como cheguei à análise sobre a qual dissertarei.

Reverendo os dados, busquei por citações que me falassem do histórico dos objetos, do processo de nucleação e dos interlocutores e suas mudanças. Ao realizar o tratamento dos dados até o primeiro encontro (E01), fui elaborando um diagrama desse processo contendo uma leitura plausível para os objetos constituídos e núcleos de possíveis CS (Figura 90<sup>79</sup>).

---

<sup>79</sup> A Figura 90, a Figura 91 e a Figura 92 são apresentadas apenas para ilustrar a trajetória do processo de organização dos dados, sendo desconsiderada a necessidade de descrição de detalhamentos desses instrumentos de análise.

Figura 90 – Recorte do primeiro diagrama de análise à luz do MCS.



Fonte: Do autor.

À medida que fui realizando a leitura da dinâmica do processo, senti a necessidade de destacar a dinâmica para cada sujeito, visto que, nesta organização cronológica, não era possível observar a leitura isolada. Para tal, pensei em selecionar no *Atlas.ti* apenas as citações de determinado sujeito, porém considerei inviável, pois várias citações só faziam sentido se analisadas dentro do espaço comunicativo. Sendo assim, me deparei com o seguinte questionamento: como elaborar um diagrama que me ajudasse a olhar para as dinâmicas do processo de modo isolado e global ao mesmo tempo?

Tentando estruturar esse novo diagrama, senti a necessidade de ter acesso às citações e suas transcrições/descrições/ilustrações de modo eficiente, pois percebi que os relatórios gerados pelo *Atlas.ti* em formato de editor de texto não agilizavam o acesso às informações, apenas as organizava. Resolvi transferir essas informações, com outra configuração, para uma tabela no programa de edição de planilha eletrônica *Microsoft Excel*<sup>80</sup>; assim, foi possível filtrar informações por encontros, por sujeitos, por sínteses ou comentários, de modo a visualizar, em uma mesma tela, citações que caracterizassem categorias de análise (Figura 91).

---

<sup>80</sup> Disponível em <https://products.office.com/pt-br/excel>.

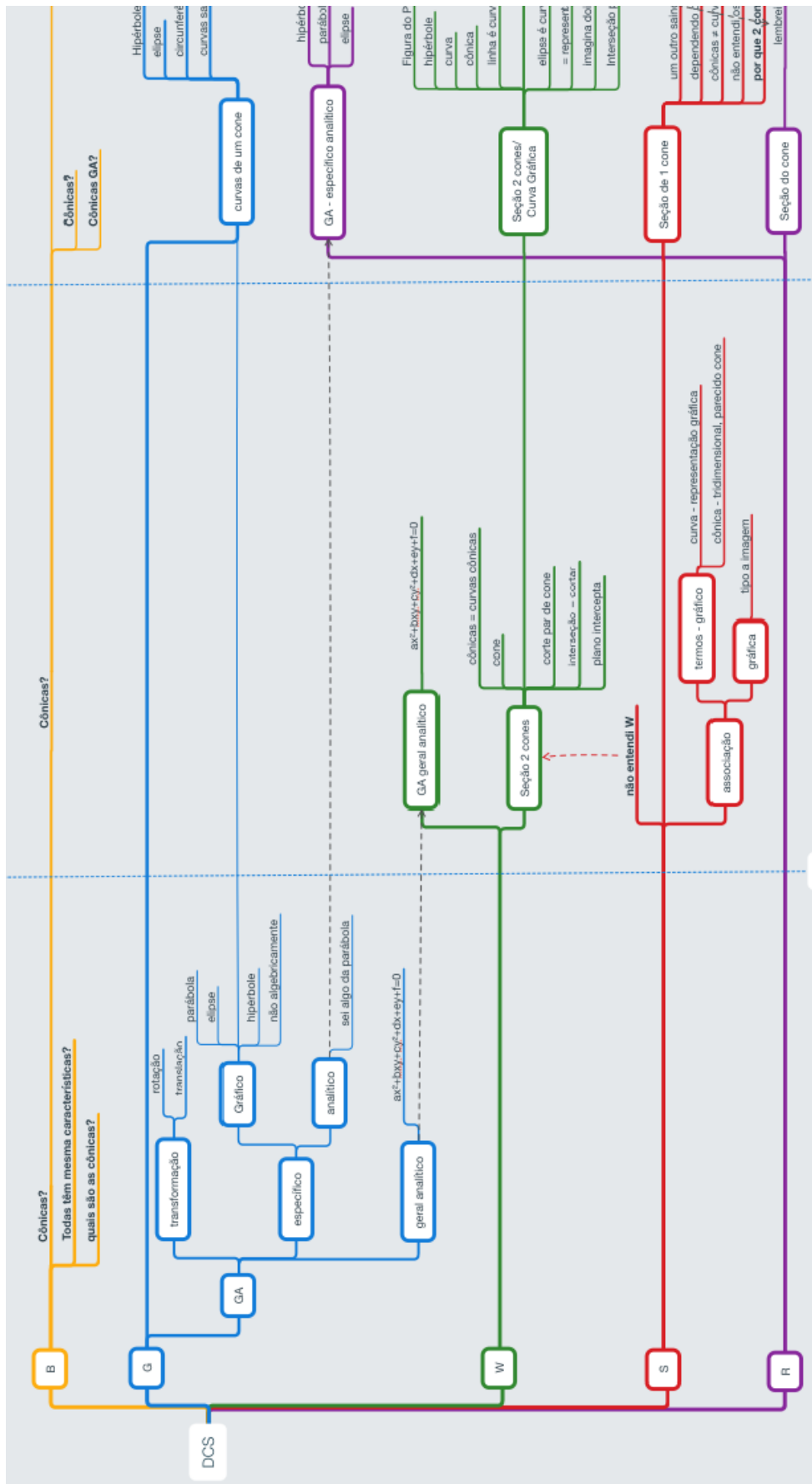
Figura 91 – Recorte da tabela de uma das organizações dos dados.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Local	Bloco		n°	Suj.	Citações	C.A.ti	sintese
2	G01	1		1	B	o que você sabe sobre curvas cônicas?	9.7	curvas cônicas?
3	G01	1		2	G	Trabalhei um pouco com a manipulação delas, seja rotação e translação	9.1	cônicas - translação, rotação d
4	G01	1		3	G	vi a parábola, elipse e hipérbole (não que eu saiba algebricamente, muito pelo contrário, se sei algo sobre parábolas é muito)	9.2	cônicas = parábola, elipse, hip
5	G01	1		4	G	lembro que as cônicas são escritas por $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$	9.3	cônicas = $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey$
6	G01	1		5	B	transformações isométricas (translação e rotação) nas curvas cônicas, porém a partir de um tratamento algébrico (geometria analítica)	9.4	leitura da enunciação 3
7	G01	1		6	B	uma expressão algébrica que representa uma cônica qualquer, não é isso?	9.5	leitura da enunciação 4
8	G01	2		7	B	Todas as curvas cônicas possuem características gerais que as definem? Ou cada uma possuem características específicas?	9.6	todas as cônicas possuem as n
9	G01	3		8	B	Você sabe quais são as curvas consideradas cônicas?	9.8	Quais são as curvas cônicas?
10	Z01	1		9	B	O que vcs entendem por curvas cônicas? E o q vcs sabem sobre elas?	4.4	curvas cônicas?
11	Z01	1		10	W	Cônicas tem relação com cone	4.1	cônicas - cone
12	Z01	1		11	W	curvas cônicas tem esse nome por conta das curvas representarem diferentes cortes num par de cones com o vértice em comum	4.1	cônicas = cortes par de cones
13	Z01	4		12	W	Mas como assim cortes? Primeiro você imagina os dois cones alinhados pelo bico. Daí imagina diferentes possibilidades de um plano interceptar esse par de cones que você imaginou. interceptar = cortar.	4.1	cortes = plano $\cap$ par cones; in
14	Z01	1		13	W	A interseção do plano com o cone retratada nesse plano é uma curva. Uma curva cônica	4.1	
15	Z01	1		14	W	Puxando para álgebra rapidinho: TODAS as curvas cônicas possíveis podem ser escritas da forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$	4.1	cônicas = $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey$
16	Z01	4		15	S	nao entendi exatamente o que ele falou ainda. [...] eu não sabia o que imaginar	4.3	não entendi 11 e 12

Fonte: Do autor.

Paralelamente a essa organização, fui construindo outros diagramas, de modo que fosse possível observar a dinâmica de cada sujeito juntamente com a dos demais. Após a construção de três diagramas, mais detalhados, cheguei a uma configuração que me era “agradável aos olhos” (Figura 92).

Figura 92 – Recorte do quarto diagrama de organização dos dados.



Não demorou muito para perceber que o modo como eu estava organizando os dados em relação ao volume de informações e à pergunta de pesquisa eram incompatíveis para um único doutorado, ou seja, a pergunta ainda estava ampla e precisava focar em algo exequível. Não seria possível dar conta de todo o corpo engendrado, por se tratar de um organismo complexo. Desse modo, caberia a mim analisar e decidir a quais membros desse corpo eu iria me dedicar.

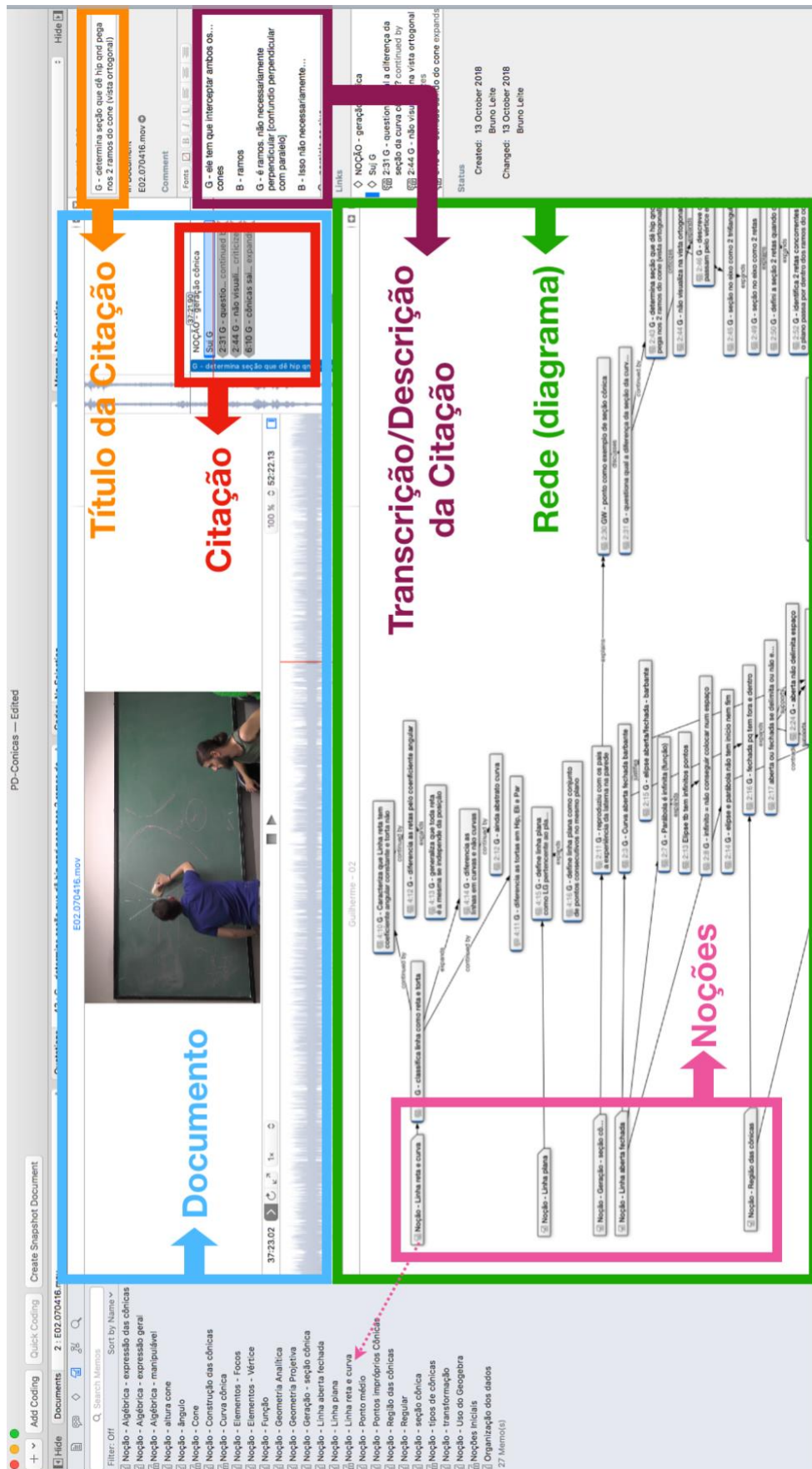
Tantas coisas aconteceram nesse Grupo de Estudos que gostaria de discutir nesta tese, mas como na qualificação me falaram, infelizmente não tem como caber tudo, escolhas precisam ser feitas. Após conversas, orientações e rumações, decidi me concentrar na dinâmica de um único sujeito, pois, entendendo que, para o MCS, o sujeito é um ser social e a sua produção de significado perpassa a comunicação, falar de uma dinâmica é falar sobre um sistema do corpo, analogamente, como se o sistema digestório correspondesse à dinâmica de um sujeito e o circulatório a de outro, porém o corpo só existe na interação entre esses sistemas. Focar na dinâmica de um é, então, falar de um sistema desta investigação.

Quanto aos membros do corpo, considero que cada um corresponde às noções matemáticas abordadas durante a investigação. Desse modo, reconfiguro minha pergunta de pesquisa com a seguinte sentença: *Como ocorre uma dinâmica de produção de significado acerca de determinadas noções matemáticas em um Grupo de Estudos sobre curvas cônicas?*

Voltando aos documentos no *Atlas.ti*, comecei a trabalhar com duas janelas (Figura 93): uma contendo um documento de fonte de dados, onde são selecionadas as citações (*quotations*) relevantes para a análise, e outra com uma rede (*network*), na qual são compostos diagramas que estabelecem relações entre elementos do *Atlas.ti*. Ao selecionar uma citação, é possível intitulá-la e inserir comentários. No meu caso, o título correspondeu à ação/operação do sujeito naquela enunciação, por exemplo: “*G [Guilherme] – ilustra e descreve, como resultado de uma seção cônica, uma circunferência quando o plano de seção está perpendicular ao eixo do cone*”. Na parte dos comentários, transcrevi falas, descrevi alguns detalhes que considere importantes e inseri inferências (entre colchetes) sobre aquela citação, de modo que essas informações pudessem servir de repertório para compor a redação da análise.



Figura 93 – Layout das janelas de trabalho no Atlas.ti.



Fonte: Do autor.

Organizei as citações na rede (após algumas experimentações) em ordem cronológica (de cima para baixo, da esquerda para direita) e codifiquei-as com relação às noções a que se referiam. Para fins ilustrativos do digrama, criei *memos* para cada noção e associei às devidas citações. Desse modo, pela rede foi possível visualizar as citações relacionadas à mesma noção e analisar as mudanças e voltas de uma para outra. Assim como nas citações, nas memos há espaço para inserir informações como em um bloco de notas. Nele, fiz uma síntese da dinâmica referente àquela noção com base nas citações associadas.

Com o passar da análise, percebi que fazer um único diagrama para os 22 encontros não me ajudava a visualizar o processo, então decidi separar por blocos, por exemplo, a rede 02 refere-se a todas as citações que ocorreram do final do primeiro encontro (reunião do Grupo de Estudos) até o final do segundo encontro. Isso inclui conversas no grupo do WhatsApp, escritos no diário e o encontro presencial.

Como os vídeos foram gravados em uma resolução alta, cada encontro ficou com tamanho médio de 7 a 8 GB (giga bytes), requerendo outro espaço de armazenamento por se tratar de vinte e dois vídeos. No meu caso, utilizei um HD externo<sup>81</sup>. Contudo, não me dei conta de que, ao carregar um documento, o *Atlas.ti* o armazena na memória interna do computador, ou seja, ao chegar à metade dos vídeos, o computador já estava perto da sua capacidade máxima. Devido à impossibilidade de deletar vídeos anteriores para adicionar novos (caso o fizesse, perderia todas as redes já criadas), decidi continuar a análise, usando um editor de texto on-line (Google Docs) e fui organizando os meus comentários e as citações por episódios. Em seguida, fui agrupando aqueles que tratavam das mesmas noções para produzir o texto da análise.

Fazendo um resumo da cronologia do Grupo de Estudos, destaco cinco blocos. No primeiro, as discussões giraram em torno de legitimar para o grupo o que eram as curvas cônicas, tendo como principal noção a de seção cônica, porém para chegar a uma caracterização satisfatória para o grupo e para que não houvesse divergência, foi necessário também discutir outras noções, como a de aberto e fechado, plano e não plano, reto e torto.

Em um segundo bloco, os participantes se dedicaram a discutir sobre a possibilidade de elaborar um modelo que mostrasse as seções cônicas. Para tal, foram elencadas variáveis que poderiam ser utilizadas do modelo, tanto da superfície cônica como do plano de seção em relação à superfície. Nesse processo, houve uma discussão das leis de geração da superfície cônica, reta e oblíqua, bem como do detalhamento das posições do plano de seção em relação

---

<sup>81</sup> O termo *HD* vem do inglês *hard disk*, que quer dizer disco rígido, o qual se refere à memória interna do computador. O HD externo é um hardware utilizado para armazenar dados fora do computador.

para se gerar cada curva e suas degenerações (ponto, reta e duas retas concorrentes). Apenas as seções na superfície cônica reta foram legitimadas; no cone oblíquo, as discussões não avançaram.

No terceiro bloco, os participantes buscaram elencar e caracterizar elementos gerais para todas as cônicas. Essa caracterização serviria também para a elaboração do modelo. Desse modo, foram citados e discutidos os seguintes elementos: focos, eixos, centros, vértices, pontos impróprios, regiões, diretrizes, tangentes e excentricidade.

O quarto bloco foi dedicado à discussão das expressões algébricas das cônicas. Nesse período, características dos elementos foram aprofundadas, foram estabelecidas relações entre os parâmetros das equações, como também a generalização da propriedade da soma dos raios focais para todas as cônicas.

Por fim, o último bloco foi destinado à construção geométrica das curvas cônicas. Nesse bloco, foi discutida mais de uma possibilidade de construção, envolvendo propriedades de lugares geométricos dos pontos do plano que são equidistantes de modo particular e generalizado, de modo que o elemento círculo diretor também foi caracterizado.

Ao longo desse processo, várias noções matemáticas foram abordadas, então, para definir em quais noções iria me concentrar. Parti da noção inicial explorada no Grupo de Estudos, impulsionada pela pergunta no WhatsApp, qual seja, a noção de curvas cônicas. Por esta análise, pude realizar um...

## **MAPEAMENTO DOS MOVIMENTOS DA NOÇÃO DE CURVAS CÔNICAS**

O sujeito escolhido para analisar a dinâmica foi Guilherme, por ele ter sido a primeira pessoa com quem comecei a organizar o Grupo de Estudos e com quem escolhi o tema a ser abordado.

Meu movimento, ao selecionar as citações, foi identificar quais noções iniciais ele enunciou, quando essas noções mudam ou são incorporadas e o que ocorreu para isso acontecer. Com isso, foram contemplados tanto o histórico dos objetos como o processo de nucleação e a mudança dos interlocutores. As noções iniciais são entendidas, nesta pesquisa, como legitimidades inerentes expressas, constituindo, assim, os objetos iniciais na linha da história dos objetos e, conseqüentemente, um repertório semântico *a priori*. Nesta direção, as legitimidades inerentes e como elas se modificam ou não ao longo do processo compõem também a análise da dinâmica. Contudo, não há como observar esses elementos de análise

independentemente; por esse motivo, eles serão tratados conjuntamente, sendo destacados de acordo com o que se quer evidenciar.

Olhando para a história dos objetos *curvas cônicas* constituídos por Guilherme ao longo do Grupo de Estudos, fiz uma leitura, separando essa história por Movimentos. Do mesmo jeito que os movimentos históricos são didaticamente demarcados por acontecimentos que refletem uma mudança de pensamento da civilização humana, demarco a história dos objetos por eventos que expressam a mudança ou caracterização de modos de produção de significado.

A nomeação desses Movimentos foi realizada após a última leitura/seleção das citações/elaboração de diagramas/transcrição, descrição e inferências sobre os dados. Nesta última leitura, fui colocando, em um documento, comentários de análises sobre esses materiais, separando-os por encontro.

Apesar de os Movimentos serem apresentados em uma ordem que possa aparentar certa cronologia, não há uma rigidez temporal na distinção entre Movimentos; isso significa que há comentários de análise que se referem a encontros distintos em uma mesma categoria, como também há um mesmo Movimento que se expressa em momentos diferentes, perpassando outros. De todo modo, esta separação visa organizar a apresentação da análise, bem como me ajudar no encaminhamento das considerações finais.

Como não houve uma delimitação institucional de que se deve discutir apenas isso ou aquilo, a própria dinâmica do Grupo de Estudos permitiu que os participantes explorassem determinados aspectos que pertencem a dois Movimentos para legitimar algo.

Com a visão geral de todo o processo, sistematizei possíveis Movimentos do processo de produção de significado de Guilherme para a noção de curvas cônicas e reorganizei os comentários de análise, separando-os por Movimento. Alguns desses foram criados quando um conjunto de citações não se encaixava em outros já existentes.

O primeiro Movimento, chamei de...

### *Curvas Independentes*

Antes do primeiro encontro do Grupo de Estudos, Guilherme respondeu ao questionamento sobre o que sabe sobre as curvas cônicas em seu diário.

Trabalhei um pouco com a manipulação delas, seja rotação e translação. Vi a parábola, elipse e hipérbole (não que eu saiba algebricamente, muito pelo contrário, se sei algo sobre parábolas é muito). Lembro que as cônicas são escritas por  $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ . (Fonte: G01).

Nesta primeira enunciação, Guilherme constitui a noção inicial de curvas cônicas como algo manipulável, como objetos identificados em uma categoria e por um objeto que expressa generalidade. A priori, considere que os significados atribuídos se referiam ao contexto da disciplina de Geometria Analítica, por conta de o programa do curso contemplar o estudo das expressões algébricas das três curvas citadas, bem como da equação geral das cônicas e de operações analíticas de translação e de rotação. Contudo, analisando os detalhes, mudei a leitura. Na terceira sentença, as cônicas foram constituídas como um objeto expresso de modo algébrico; entretanto, na primeira sentença, não há uma explicitação, por parte do sujeito, de que essas transformações foram operadas de modo algébrico. Da mesma maneira, apesar de, na segunda sentença, ser explicitado que a parábola, a elipse e a hipérbole foram “vistas”, a afirmação me sugere que há uma legitimidade inerente acerca desses objetos que vai além do modo algébrico, pois o que é legítimo para Guilherme é o fato de que há possibilidade de expressar algo de determinada maneira; neste sentido, houve um objeto constituído que não é o objeto expresso algebricamente.

Ao constituir as cônicas como a parábola, a elipse e a hipérbole, o texto se caracteriza como estipulação local, pois, naquele momento, não foi necessária a justificação. Contudo, apenas por esta enunciação não é possível inferir a quais modos de expressão Guilherme se refere.

Para validar minhas inferências, questionei Guilherme em uma conversa no WhatsApp (no período de análise dos dados, após o término do Grupo de Estudos) sobre quando ele estudou que a parábola, a elipse e a hipérbole são cônicas, que podem ser manipuladas por rotação e translação e expressas por uma equação geral. Ele respondeu:

Eu vi esses objetos todos na disciplina de Geometria Analítica. Não significa que eu fui capaz de realizar a rotação ou translação, mas as equações gerais e as características foram todas nessas disciplinas. Vi pouca coisa no ensino médio, nada analítico, somente geométrico. Principalmente a elipse. A hipérbole não foi retratada nessa época. (Fonte: conversa com Guilherme no WhatsApp).

Como inferido, Guilherme, nesta última enunciação, produz conhecimento para as então estipulações locais, justificando o estudo de algumas curvas na educação básica por uma abordagem geométrica. Para obter mais detalhes, questionei se ele viu alguma coisa sobre cônicas na educação básica.

Vi, sim – respondeu Guilherme – A ideia era basicamente definir bem erroneamente as "figuras". Na escola, a circunferência tinha característica de ter todos os pontos com a mesma distância do centro. Até aí tudo bem. Mas quando a gente falou da elipse, o que virava o centro? Precisaria daquela nossa longa discussão do Grupo de Estudos. Para não fazer a ponte, necessitaria de um debate mais longo, o professor

simplesmente definiu: São os pontos cuja soma das distâncias aos focos é uma constante. Quanto aos focos: são "componentes" da elipse. Em momento algum foram citados focos da circunferência, por exemplo. (Fonte: conversa com Guilherme no WhatsApp).

Nesta enunciação, há evidências de que o modo como a circunferência e a elipse foram estudadas por Guilherme concentraram-se na caracterização geométrica, mas sem fazer relação entre elas. E, apesar de ele identificá-las como curvas cônicas no momento da enunciação, não está explícito que essa associação tenha ocorrido na educação básica. Em seguida, perguntei se ele estudou a parábola na educação básica.

Aí você toca em um ponto muito interessante. A parábola também, mas em um ambiente totalmente diferente. A parábola era para trabalhar "bhaskara" e só. Somente para encontrar as raízes, coeficiente "que acompanha o  $x^2$ ". No ensino médio, eu pude relacionar as raízes da equação de segundo grau com as interseções da parábola com o eixo  $x$  ( $y=0$ ). Isso foi como o Guilherme [falando sobre ele mesmo em terceira pessoa]<sup>82</sup> percebeu o cálculo de bhaskara. Ou seja, indica, no plano cartesiano, os pontos de interseção da maneira (raiz,0). Também discutimos o que fazia ter mais de uma raiz, ou nenhuma, tudo pelo gráfico e o que isso significava algebricamente, por exemplo: tem 1 raiz só, ao realizar a conta, o delta dava 0, se não tinha raiz, o delta dava negativo. Até esse ponto, não ficava claro porque eu tinha uma raiz só, ou melhor, eu tinha claro que, ao fazer o cálculo quando o delta dava zero, já ia dar uma raiz só e, na minha cabeça, isso já mostrava um gráfico de interseção em um ponto somente com o eixo  $x$ . Daí eu já olhava para o coeficiente do  $a$  e já pensava: [a parábola] é pra cima ou pra baixo, isso já ficava claro. Pra mim, não era tão claro a interseção com o eixo  $y$ . Isso eu posso relatar com certeza porque realmente eu levei um tempinho pra entender onde que dava a interseção com o eixo  $y$ , sabe? Nesse quesito de avaliar a parábola, era mais nesse ponto mesmo e era essa relação algébrica, não tinha nenhuma conversa, por exemplo, se você tem uma raiz com número negativo, não tem raiz real. Então ficava nisso. A discussão não passava desse ponto. Tanto que pensar na relação da distância do foco aos pontos iguais à distância da diretriz aos pontos veio só na graduação. (Fonte: conversa com Guilherme no WhatsApp).

Pelo exposto, a noção de parábola tem sua origem enquanto gráfico de uma equação. Alguém poderia me corrigir e dizer gráfico de função, mas não, Guilherme não cita o conteúdo função de segundo grau (não que não tenha estudado). Em sua afirmação, o gráfico da parábola foi utilizado para analisar relações algébricas na fórmula de Bhaskara. Já na graduação, o objeto foi constituído pelas relações de equidistância entre foco e diretriz. Isso se mostra como justificação de Guilherme ao afirmar, em seu diário, que, dentre as cônicas, é sobre a parábola que sabe alguma coisa algebricamente. Continuei perguntando sobre a hipérbole.

Hipérbole? Esquecida. Não vi nada no ensino médio. Apesar de hoje ter uma ideia clara de que ela **não** é a junção de duas parábolas. (Fonte: conversa com Guilherme no WhatsApp).

---

<sup>82</sup> O uso dos colchetes, nas transcrições desta tese, pode indicar supressão de falas quando vierem com reticências ([...]), ou comentários do pesquisador no intuito de sintetizar diálogos, ou descrever gestos, ações e referências que não são expressos nas falas.

Já a hipérbole surge apenas na graduação, no contexto da Geometria Analítica, como afirmado anteriormente, porém a sua expressão gráfica foi significada como a junção de duas curvas (este significado também se mostra inicialmente no Grupo de Estudos, mas tratarei disso mais à frente). Por último, retomei a pergunta se a associação de que a elipse, a hipérbole e a parábola são curvas cônicas ocorreu só na graduação.

Sim! No Ensino Médio, eram figuras. Na verdade, o termo "cônicas" chegou somente na graduação. (Fonte: Conversa com Guilherme no WhatsApp).

Pelas respostas de Guilherme, pude confirmar minhas inferências de que significados iniciais atribuídos à elipse, à parábola e à hipérbole caracterizam um modo de expressão gráfico (figura, gráfico de uma equação e duas parábolas juntas, respectivamente), como também de que a circunferência, a elipse e a parábola constituem objetos distintos. É importante salientar que esta constatação não impede que outros significados não gráficos possam ter sido produzidos (provavelmente, na disciplina de Geometria Analítica), mas que a noção gráfica desses corpos precede outro modo de expressão e é relevante para o sujeito.

Outra evidência da significação de modo independente foi quando Bruno<sup>83</sup> comentou, no sétimo encontro, que, em alguns livros de Geometria Analítica, há um capítulo sobre circunferência e outro sobre as outras cônicas (elipse, parábola e hipérbole). Guilherme explanou que foi desse jeito que ele estudou, ou seja, para Guilherme, a circunferência foi abordada no livro didático como uma curva distinta das demais.

Uma outra consideração é sobre o fato de Guilherme citar que as cônicas podem ser escritas por  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ . O objeto constituído na ocasião é distinto da parábola, da elipse e da hipérbole, pois ele se refere a uma generalidade das curvas, diferentemente dos outros três, que expressam particularidades. Quanto à expressão, Guilherme afirma que não sabe como chegar à fórmula, que ela apenas foi fornecida pelo professor. Nesta situação, não importa se o professor demonstrou ou não, mas que a justificção para esse conhecimento é a autoridade de um professor que o autoriza afirmar que essa equação expressa uma cônica.

Dentre as cônicas, a única que foi significada de modo não independente foi a hipérbole, como sendo duas parábolas.

Um segundo Movimento que considerei plausivelmente foi o das...

---

<sup>83</sup> Na análise, as minhas atuações enquanto participante do Grupo de Estudos são expressas na terceira pessoa.

### *Cônicas que saem do cone*

Como lembrado anteriormente, Guilherme cita em seu diário as três curvas como tipos de curvas cônicas. Já no primeiro encontro, após William ter apresentado a noção de curvas cônicas como resultado de uma seção em dois cones, Guilherme cita:

Eu não me lembro onde... surgiu uma imagem do cone com todas as... a hipérbole saindo do cone, a elipse saindo do cone, a circunferência saindo do cone, que é uma variante da elipse, eu achei muito interessante. Porque assim, você vê o nome curvas cônicas, eu nunca tinha *linkado* o fato de cônicas com um cone. Ninguém disse pra gente que cônicas vinham do cone. Na hora que eu vi a imagem da elipse saindo do cone, da hipérbole saindo do cone, todo mundo saindo do cone, ah por isso se chama cônicas. (Fonte: E01).

Nesta ocasião, Guilherme constituiu as curvas cônicas como a hipérbole, a elipse e a circunferência (esta como um caso particular da elipse) que saem do cone. No Movimento anterior, os significados de cônicas são atribuídos pela autoridade de um livro/professor, que nomeia figuras anteriormente legitimadas como cônicas. Já neste Movimento, a produção de significado parte de uma atribuição dada pelo sujeito, ou seja, o conhecimento não é justificado por uma autoridade externa, mas por um ato analítico da situação. Em vários momentos do Grupo de Estudos, percebi a alternância desses tipos de legitimidades, as quais irei apresentar no decorrer dos Movimentos.

Ainda sobre a citação, o modo de expressão também é gráfico, visto o fato de ele se referir às imagens das curvas. Entretanto, o fato de o modo de expressão ser o mesmo, não quer dizer que o CS é o mesmo, mas que um repertório de CS pode compor uma determinada noção.

Para exemplificar, poderia chamar os CS operados na educação básica de *figuras geométricas*, tendo como núcleo as propriedades explicitadas da circunferência e da elipse e de suas figuras, como também o CS *gráfico de uma equação* para a noção de parábola, cujo núcleo se constitui pela figura do gráfico da equação com os eixos  $x$  e  $y$  e as relações algébricas explicitadas. Nos núcleos, é possível identificar relações geométricas, algébricas e expressões gráficas. Já na graduação, um dos CS operados refere-se à *Geometria Analítica*, tendo, como elementos do núcleo, a figura do gráfico da equação (mesmo da educação básica) e as relações geométricas entre foco e diretriz.

Na citação do Grupo de Estudos, mesmo William tendo afirmado que as cônicas são geradas por uma seção plana em um cone, Guilherme não explicita como as curvas “saem” do cone, mas que a imagem do cone e as cônicas permitiram a associação cognata das palavras cônicas e cone.

Neste contexto, adentro ao terceiro Movimento, qual seja...

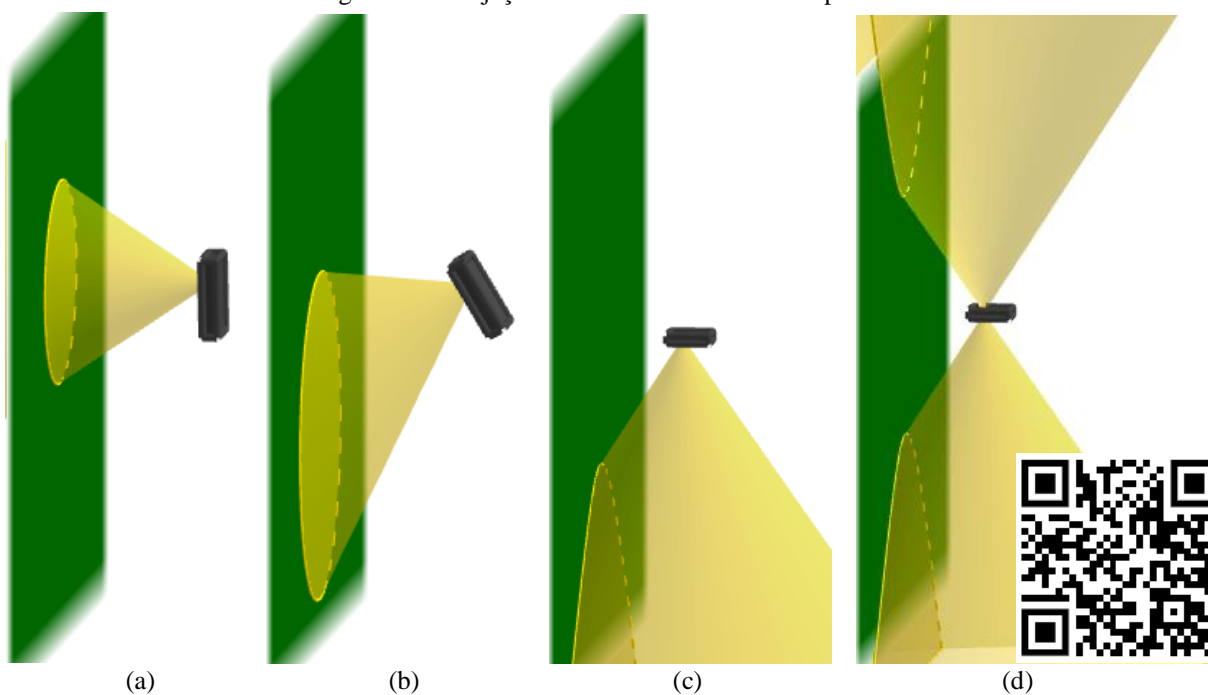


## Seções Cônicas

Voltando ao Grupo de Estudos, após essa discussão oral, William ilustra no quadro como obter as curvas cônicas por meio de seções planas em um cone, porém Guilherme não produz enunciações expressando que constituiu William como interlocutor ou não. Apenas quando William muda do modelo gráfico do desenho no quadro e passa para o modelo gráfico com a lanterna do celular é que Guilherme volta a enunciar. Estas enunciações referem-se à identificação das projeções de luz nas formas de circunferência, elipse, parábola e hipérbole e na definição da posição do celular para obter cada curva.

Tenta deixar a luz dentro do círculo [...] aí a gente vê que o celular tá paralelo com o quadro [Figura 94a]. [...] Agora deixa ele menos paralelo [Figura 94b]. Isso! [William contornou com giz a projeção de luz em forma de elipse e eu perguntei se entenderam. Guilherme e os demais confirmam]. Aí depois você pode deixar... perpendicular [...] vai dar uma parábola [Figura 94c]. [intervenho e adiciono mais um celular] Ah! A hipérbole [Figura 94d]. (Fonte: E01).

Figura 94 – Projeções da lanterna do celular na parede.



Fonte: Do autor.

Nas enunciações anteriores, as constituições dos objetos partem de discussões orais ou escritas, sem a interferência de elementos visuais, requerendo uma descrição das imagens mentais. Já nesta última situação, os objetos são constituídos mediante os significados dados a elementos visuais, ou seja, a projeção de luz é elemento constituinte do objeto, pois a nomeação é atribuída à imagem, assim como as propriedades descritas.

É importante destacar que a identificação das curvas em determinadas imagens reforça legitimidades anteriormente estabelecidas. Já a definição da posição do celular para gerar uma curva é legitimada mediante a experiência.

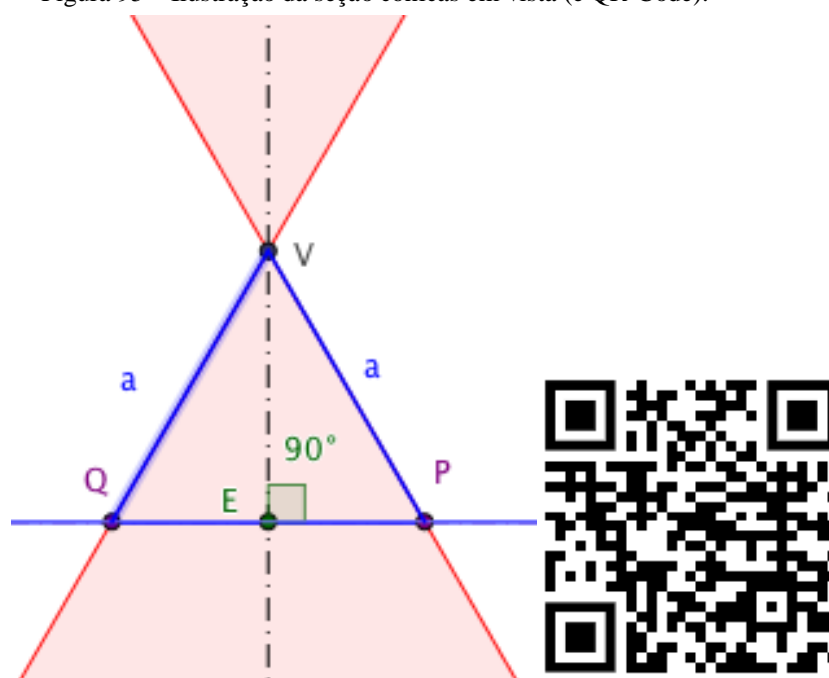
Nestes dois Movimentos, posso inferir que a constituição dos objetos se dá em um primeiro momento por meio da lembrança, em que as legitimidades já incorporadas são expressas sem referências externas. Em seguida, a constituição ocorre por meio da identificação de elementos visuais, bem como da associação de novas situações às legitimidades já assumidas. Contudo, neste momento, a produção de significado é direta; dada a imagem, é atribuído um significado caracterizado por uma estipulação local, ou por associação, quando o objeto constituído é associado a novos comportamentos incorporados a esse objeto.

Ao final da experiência da lanterna, fiz uma revisão, reposicionando o celular para que os outros participantes identificassem cada uma das curvas e assim foi feito. Em seguida, no intuito de definir os limites do plano de seção para gerar cada curva, mudei o modo de expressão gráfica para outro modo também gráfico, ou seja, deixamos de analisar a projeção de luz da lanterna e passei a utilizar um desenho no quadro. Ambos os modelos se referem à seção plana em uma superfície cônica (e naquele momento, para mim, tratava-se da mesma “coisa”); porém, durante a análise, percebi que os CS operados foram distintos.

No caso da lanterna, o plano de seção é fixo, constituído na forma da parede, e a superfície cônica é móvel, correspondendo aos feixes de luz da lanterna do celular (essa analogia foi sugerida anteriormente por William, sem o uso da lanterna, porém Guilherme não produz significado para a enunciação; só o faz em seguida, quando introduzi as lanternas). O núcleo do CS se caracteriza pelas curvas indicadas e pelas posições em relação ao celular e à parede. Como dito anteriormente, as curvas foram identificadas por ilustrações já legitimadas como circunferência, parábola e hipérbole, mas os significados atribuídos às posições que geram cônicas se modificaram. Por exemplo, quando o celular estava perpendicular, Guilherme identificou a parábola (Figura 94c); porém, ao adicionar o outro celular, o significado mudou para hipérbole (Figura 94d). Essa mudança não altera o núcleo, pois as legitimidades de parábola e de hipérbole para Guilherme ainda se preservam, ou seja, apenas quando vê as duas “parábolas juntas” é que identifica como hipérbole.

Pelo modelo do desenho no quadro (Figura 95), expliquei que, para simplificar, não iria desenhar em perspectiva, mas em projeção ortogonal. O “X” correspondeu à superfície cônica, sendo fixa, e a linha reta, ao plano de seção, o qual era reposicionado de acordo com a necessidade, indicando que o plano não era fixo.

Figura 95 – Ilustração da seção cônicas em vista (e QR-Code).



Fonte: Do autor.

Nesta situação, diferentemente do modelo anterior, as geratrizes são visíveis, interferindo no modo de produzir significado, pois ela (a geratriz) é citada nas enunciações como elemento determinante de uma posição do plano.

*Bruno:* Qual seria uma posição que o plano poderia estar em relação ao cone?

*Guilherme:* Pode estar paralelo a uma delas.

*Bruno:* Paralelo ao quê?

*Guilherme:* A uma das retas.

*Bruno:* E como é o nome desta reta?

*Guilherme:* Geratriz?

*Bruno:* Se o plano estiver paralelo a uma das geratrizes, que curva ele vai gerar?

*Guilherme:* Parábola. (Fonte: E01).

Dentre os significados produzidos por Guilherme acerca das posições do plano de seção, há informações implícitas que só foram explicitadas quando questionado. Ao afirmar que o plano “pode estar paralelo a uma delas”, Guilherme fala na direção de um interlocutor que sabe a que se refere, não havendo necessidade imediata de explicitar. O mesmo se dá em frases que podem soar não coerentes para uma linguagem matemática. Por exemplo, quando discutimos sobre a geração de uma superfície cônica reta, Guilherme aponta, como elementos fixos de geração, um ponto e uma circunferência e, ao ser questionado sobre a posição do ponto, ele responde: “o ponto perpendicular à circunferência”. Sobre o mesmo tema, em outro encontro, ele descreve:

*Guilherme:* A gente poderia tomar dois círculos e um ponto, porque se a gente pega duas circunferências, poderia dar um cilindro. Então, para formar a superfície cônica,

a gente poderia pegar duas circunferências e um ponto, que seria o ponto central dessa circunferência [faz um gesto movendo a mão verticalmente simulando o eixo do cone]. [...] As circunferências da superfície cônica são concêntricas [Bruno apaga uma das circunferências do desenho (Figura 96a) e refaz, de modo que elas sejam concêntricas (Figura 96b)]. Mas aquelas que você fez lá em cima também são concêntricas.

*Bruno*: O que significa concêntrico?

*Guilherme*: De mesmo centro. Ah tá! Seu eu considerar o centro um ponto, verdade. (Fonte: E06, grifo nosso).

Figura 96 – Circunferências concêntricas.



Fonte: Do autor.

Matematicamente, um ponto não é perpendicular a nada, porém Guilherme não se referia à perpendicularidade do ponto, mas sim a um ponto que está a uma distância perpendicular ao plano de uma circunferência. Do mesmo modo, ao citar as circunferências “concêntricas”, ele se referiu às circunferências cujos centros estão alinhados. Desse modo, quando algumas informações eram implícitas e outros participantes operavam em outros CS, a comunicação era interrompida. Aos poucos, esses eventos diminuiriam à medida que solicitei que os participantes explicitassem todas as informações, como se falassem para alguém de fora do Grupo de Estudos.

É importante destacar que, em se tratando de uma sala de aula, o professor deve se esforçar para fazer uma leitura plausível do que seu aluno está falando; caso contrário, corre-se o risco de simplesmente afirmar que o aluno errou, ou não sabe, deixando de aproveitar conhecimentos produzidos que poderiam ser considerados em um processo de avaliação do conteúdo. O fato de não haver uma linguagem adequada não significa que não haja coerência no pensamento do aluno. Por esse motivo, cabe ao professor ajudar esse aluno a expressar suas ideias por uma linguagem que seja legítima para a comunidade em que está inserido.

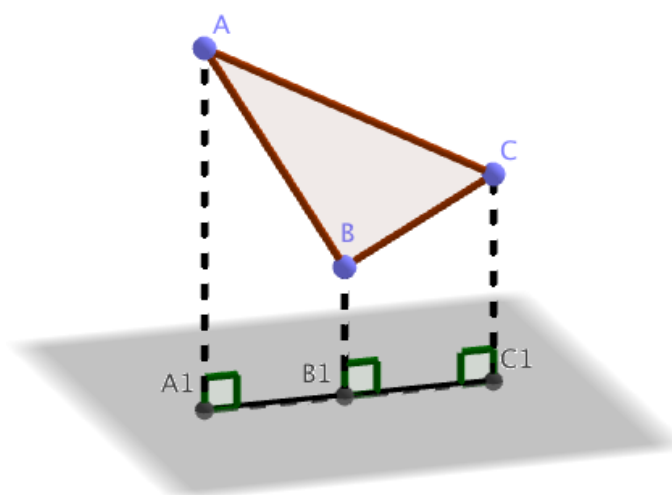
Voltando à análise dos modelos, tanto o modelo da lanterna como o modelo do desenho chegaram para Guilherme como resíduos de enunciação, permitindo a constituição em texto e produção de significados. No segundo modelo, a produção de significado não ocorre

por meio da identificação de formas, mas sim pela identificação de posições de elementos do núcleo do CS operado. Por exemplo, Guilherme, mesmo sem ver o desenho de uma parábola, produz significado para o segmento paralelo à reta, como a seção de um cone, que corresponde à parábola quando o plano (expresso por uma reta) for paralelo a uma geratriz. Porém, em nenhum momento do Grupo de Estudos, uma situação como esta foi apresentada para ele. O desenho no quadro já havia sido utilizado por William, porém em perspectiva e não em vistas ortogonais. Ao perceber este fato durante a análise dos dados, questionei Guilherme se houve alguma dificuldade para entender o desenho no quadro, ou se havia visto alguma expressão como aquela antes do Grupo de Estudos. Ele respondeu:

Eu lembro que não tive dificuldade de identificar aquela interseção como uma cônica, mesmo sendo representada como um segmento. Pra mim, aquele segmento passou a representar uma cônica a partir da discussão mesmo, pensando que tínhamos o "X" como uma representação da seção da superfície cônica, aquela era a representação de algo no espaço. Pensando numa "casquinha de sorvete", olhando de lado, teríamos mesmo um segmento, mas se olhássemos "superiormente" (vista do plano de seção), observaríamos a cônica. (Fonte: Conversa com Guilherme no WhatsApp).

Pela resposta, é possível considerar que Guilherme consegue mudar o CS, mas fazendo as associações entre os dois modelos. Uma possível justificativa é o fato de ele ser formado no curso técnico de mecânica, no qual se estuda a expressão de sólidos tridimensionais por desenhos planos (Desenho Técnico), os quais correspondem às vistas ortogonais e perspectivas. Neste sentido, operando no CS de *Desenho Técnico*, é legítimo produzir significado para um segmento como uma parábola, pois considerando-a como uma figura plana, ao ser projetada ortogonalmente (conhecida como vista básica), a projeção do plano se expressa como uma reta (Figura 97).

Figura 97 – Projeção de um plano em vista básica.



Fonte: Do autor.

Outro aspecto a ser destacado é que, ao operar com o modelo do quadro, Guilherme constituiu os objetos no contexto das expressões do CS de *Desenho Técnico*. Por exemplo, ao definir a seção que gera uma elipse, ele afirma que “ele [o plano] intercepta as duas retas”. Em tese, o plano de seção corta todas as geratrizes do cone, porém como na expressão do modelo do desenho no quadro as únicas geratrizes visíveis são as de contorno do cone, então, são elas com as quais Guilherme operou. O mesmo ocorre quando define a seção que gera a circunferência, “quando ela [a reta] intercepta na mesma distância do ponto as duas geratrizes”. Nesta citação, Guilherme refere-se ao plano com um pronome feminino, que indica o elemento expresso do desenho, no caso a linha reta. Além disso, há novamente o evento de informações implícitas, demandando que ele esclareça sua afirmação. Ele reformula: “a reta intercepta as duas geratrizes na mesma distância do ponto de interseção delas”. Também nesta citação ele operou apenas com as geratrizes visíveis.

Até o momento, as curvas cônicas são consideradas por Guilherme como “objetos” distintos que são “tirados” de uma superfície cônica por meio de seções planas. Neste sentido, também é discutido sobre outras possibilidades de seções, que não as quatro curvas citadas. Tanto William como Guilherme citam o ponto, uma reta ou duas retas como possibilidades, ampliando a noção de tipos de cônicas, pois estes últimos elementos são inclusos nesta noção.

No terceiro encontro, Guilherme expressa que não ficou clara a definição de cônicas, pois até então ele compreendia que a curva cônica é uma seção cônica, mas isso não exclui os outros tipos de seções cônicas, como o ponto e a reta. Esse questionamento foi decorrente de várias discussões sobre características da linha da curva cônica, que desencadeou a necessidade de especificar o que o Grupo de Estudos estava entendendo por curvas cônicas. Com isso, culminou o delineamento do quarto Movimento...

#### *Das linhas às Seções Cônicas Curvas*

No primeiro encontro, Bruno interrompeu a discussão sobre as seções e questionou se a parábola é aberta ou fechada.

*Bruno:* A parábola é aberta ou fechada?

*Guilherme:* Aberta.

*Bruno:* [faz um momento de silêncio] Vamos deixar ela aberta por enquanto.

*Guilherme:* Ah, então ela não é aberta. Bem tipo aquelas perguntas: isso daqui é verdade? Sim!!! [risos].

[...] *Bruno:* A elipse é uma curva aberta ou fechada?

*Guilherme:* Depende do que é uma curva aberta e fechada. Aí a gente pode dizer se é aberta ou fechada. Eu pensei da parábola ser aberta no sentido de ser ilimitada.

*Bruno:* Eu concordo com você que a elipse é fechada.

*Guilherme:* Ok... fechada...

*Bruno:* A gente considera qualquer linha fechada, poligonal, o que for, se ela não tem nem início nem fim. Você disse que essa daqui é aberta [apontando para o desenho da parábola no quadro].

*Guilherme:* Ah!

*Bruno:* Isso é uma linha aberta [faz um desenho no quadro de uma linha em forma de "S"], porque ela tem início e fim.

*Guilherme:* Então ela não é. (Fonte: E01).

Pelo extrato, é possível observar que, mesmo Bruno não ocupando o papel institucional de professor e os outros participantes de alunos, determinadas práticas se repetem neste ambiente, como se ele ocupasse o papel de validador e de autoridade no Grupo de Estudos, principalmente nos primeiros encontros. Aos poucos, essa característica de comportamento se ameniza, porém não desaparece.

Uma ação que potencializa esse comportamento é a impermeabilidade apontada por Silva (2003), em que um sujeito, ao acreditar na legitimidade da sua produção de significado, não se permite interferir pela produção de significado do outro. Diferente da pesquisa de Silva (2003), em que esse tipo de impermeabilidade<sup>84</sup> se apresentou como parte de uma das dinâmicas do processo, no Grupo de Estudos esta característica se manifestou em ações isoladas, não caracterizando a dinâmica. Ou seja, Bruno, por acreditar em suas legitimidades e querer apresentá-las para os outros participantes, em alguns momentos, não se ateu às enunciações dos outros participantes. Tanto foi que, ao afirmar “eu concordo com você que a elipse é fechada”, Bruno expressa o que ele acredita que Guilherme responderia, mesmo este não tendo respondido e, em seguida, apresentou a sua noção de curva aberta e fechada. Guilherme não se opôs ou questionou, apenas produziu outro significado com base na afirmação de Bruno. Isso não quer dizer que ele substituiu uma legitimidade por outra, pelo contrário, ele assumiu as duas noções como verdadeiras em contextos diferentes por conta de a sua afirmação não ter sido contestada, apenas negada naquele contexto, permitindo que ele a considerasse verdadeira em outra ocasião.

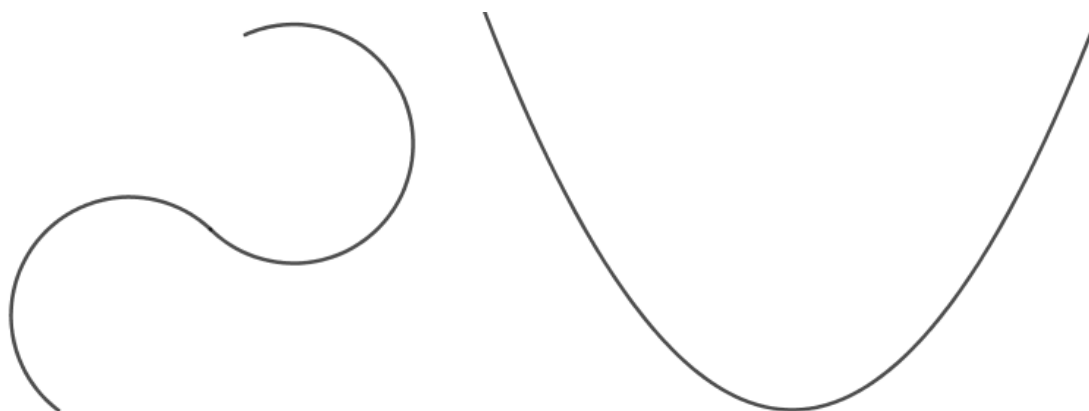
Essa leitura é evidenciada na citação, quando Guilherme produz significado para os resíduos de enunciação de Bruno.

Porque Euclides vê o que tá construído. Porque ali... qual a diferença da parábola para a figura de baixo [a linha em forma de S, Figura 98]? Nenhuma para Euclides, assim... tudo bem... no formato, mas no comprimento tem algum final? A parábola tem um final ali [apontando para o limite do desenho no quadro], mas a gente sabe que a parábola analítica não tem final. (Fonte: E01).

---

<sup>84</sup> Outro tipo de impermeabilidade descrita por Silva (2003) é quando a dinâmica se caracteriza por constituição dos resíduos de enunciação em texto.

Figura 98 – Desenho de uma linha em forma de S e de uma parábola.



Fonte: Do autor (adaptado dos dados).

Nesta enunciação, foram constituídos dois objetos: a parábola de Euclides e a parábola analítica, as quais são aberta e fechada, respectivamente. Trata-se de objetos distintos por conta de uma mesma característica (abertura ou não da linha) ser diferente; conseqüentemente, são CS diferentes operados em uma mesma noção de aberto e fechado, ou seja, ter extremidades. Contudo, há uma aparente contradição. Inicialmente, Guilherme constituiu a parábola como aberta por ser ilimitada. Após a intervenção de Bruno, ela é constituída como fechada, o que é justificado por não possuir início nem fim, contudo a parábola analítica é considerada como fechada por não ter início nem fim. Desse modo, a parábola, que antes foi considerada aberta por ser ilimitada, também é considerada fechada por ser infinita. O significado de infinito é expresso no segundo encontro, quando Guilherme retomou o assunto, apresentando a noção de aberto e fechado no barbante:

Eu pensei nesse lance de curva aberta e fechada e lembrei quando a gente estava lá no prezinho mesmo, aí pega o barbantinho, daí faz a curva fechada e faz a curva aberta. Parece que a gente, tendo esse conceito de curva aberta e fechada sem pensar no lance dos pontos, que a parábola é infinita, que é isso que eu falei, de ter um conceito prévio. A gente sabe que a parábola é infinita se você não delimitar o domínio dela... mas e aí? (Fonte: E02).

Para Guilherme, há contradição, por ele considerar a mesma noção (aberto como ter extremidades) para parábolas diferentes, porém a noção de aberto e fechado do barbante é incompatível com a de infinito, pois não há um cordão infinito. Isso evidencia que se trata de CS distintos; desse modo, ao operar a parábola no CS do barbante, ela é aberta e, quando operada no CS de *Função*, ela é fechada. Contudo, o que é legítimo para Guilherme é que a parábola é infinita, por isso a aparente contradição. Não há impermeabilidade, mas resistência em desconsiderar uma dada legitimidade ao operar em outro CS.

Ao ser questionado sobre o que significa a parábola ser infinita, Guilherme responde:



Que ela tem infinitos valores. Por exemplo, vamos considerar a função, a função  $x^2$ , eu tenho infinitos valores pra colocar no  $x$  e eu vou ter uma imagem infinita, porém o meu desenho não é infinito. (Fonte: E02).

Mais uma vez, fica evidente que Guilherme opera em CS distintos e, conseqüentemente, dois objetos diferentes: a parábola de infinitos pontos e a parábola do desenho, que é finita.

William retifica que, considerando a elipse a partir do contexto de funções<sup>85</sup>, ela também possui infinitos pontos, ou seja, o fato de apresentar infinitos pontos não poderia ser usado como argumento de ser aberto ou fechado. Pela enunciação de William, Guilherme produz outro significado:

*Guilherme:* Eu não estou dizendo que tem infinitos pontos, mas que... por exemplo, você consegue colocar a elipse dentro de um espaço?

*William:* Aí é que tá, sim.

*Guilherme:* E a parábola?

*William:* Não.

*Bruno:* Que espaço? Eu nunca sei quando vocês estão falando em uma linguagem matemática ou coloquial.

*Guilherme:* Uma linguagem coloquial. Pensa numa elipse e vou pintar ela de lápis de cor. Você consegue pintar ela inteira?

*Bruno:* Pintar a elipse ou a região interna...?

*Guilherme:* A região. Você consegue colocar ela dentro de um retângulo colorido, por exemplo? [Bruno afirma que sim] E a parábola não dá pra colocar dentro de um retângulo colorido [Bruno concorda]. (Fonte: E02).

Neste diálogo, Guilherme apresentou sua questão por meio de outro CS, qual seja, o de delimitação de região. Porém, ele continuou com o problema de a parábola não delimitar a região. Bruno, retomando as noções anteriores, perguntou se a elipse e a parábola têm início e fim. Guilherme respondeu não para as duas. Entretanto, ao pensar no contexto do barbante, ele diz que a elipse tem início e fim onde é feita a amarração do barbante. Ou seja, ele volta a operar no CS do *barbante*. A justificação para ser aberta foi expressa em seguida:

*Bruno:* Onde é o início dela?

*Guilherme:* Onde eu cortei o barbante.

*Bruno:* Mas a partir do momento que você corta o barbante ela é uma elipse?

*Guilherme:* Não, eu tornei ela uma elipse.

*Bruno:* Mas o que é uma elipse? Por exemplo, se sua professora chegar com o barbante fechado, ela vai dizer que é uma linha aberta ou fechada?

*Guilherme:* Aberta [faz um gesto com as mãos da linha aberta], aberta.

*Bruno:* Se ela chegar com a linha fechada, junta [faz um gesto também exemplificando a linha junta].

*Bruno:* Se ela chegar com a linha fechada?

---

<sup>85</sup> É importante salientar que William não considerou elipse como um gráfico de uma função. Em outra ocasião ele explicou que apenas parte da elipse e da circunferência pode ter tais propriedades, pois quando a curva apresenta mais de uma imagem para o mesmo domínio a linha não é gráfico de uma função e isso também se aplica à parábola e hipérbole. Desse modo, uma parábola cuja diretriz é paralela ao eixo  $y$  também não é uma função, apenas o arco da curva cujos pontos não possuem mesma abscissa de outro ponto.

*Guilherme*: Junta? [Vai ser] fechada [fica pensando] ... porque tem a parte de fora e parte de dentro.

*Bruno*: E o que significa essa parte de fora e a parte de dentro? (Fonte: E02).

Pela condução do diálogo, Guilherme muda o significado da elipse para linha fechada, porém a sua justificação não é mais por ser o barbante, pois como explicitado, a curva será aberta onde o barbante foi cortado. Para validar que seja fechada, ele produz o significado de ter parte de fora e dentro, alterando o núcleo do CS. Desse modo, para Guilherme, uma curva é infinita, neste CS, quando significa que não é possível colocá-la dentro de um retângulo ou delimitar uma região, justificando, assim, ter considerado inicialmente a parábola aberta por ser ilimitada.

Basicamente, Guilherme operou com a parábola e a elipse, cujo desenho ele identificou como sendo aberto e fechado respectivamente, porém o objeto parábola do CS de *Funções* foi constituído como infinito, ou mesmo ilimitado. A priori, ele produziu significado para ilimitado como “aberto”, pois esse “aberto” significou não delimitar espaço. Porém, com as interferências de Bruno, que apresentou outro significado para aberto e fechado – ter ou não extremidades –, a parábola do CS de *Função* mudou o significado para fechado, pois não tem início nem fim, porém o seu desenho continuou sendo considerado aberto. Ou seja, o núcleo foi alterado, pois o termo aberto assumiu outro significado. Anteriormente, seja no desenho ou analiticamente, a parábola era aberta, porém com a noção apresentada por Bruno a parábola pode ser aberta ou fechada. Tanto o desenho foi considerado como aberto (por ter extremidades), como pensar a curva como um barbante, que tem extremidades. Mas ao ser questionado se a parábola e a elipse têm início e fim (sem o uso de desenhos), Guilherme respondeu que ambas não têm, ou seja, ele estava operando no CS de *Funções*. Porém, ao refletir juntamente com Bruno sobre as consequências da noção de aberto e fechado como tendo início e fim, ele comentou sobre a continuidade da linha e sobre o fato de ela delimitar um espaço. Esse é um ponto chave, pois, ao analisar a elipse, foi evidente, para Guilherme, a região que ela demarca. Como a parábola não engloba uma região finita, ele disse que pode ser qualquer uma das duas regiões; já a elipse define apenas uma. Nesta situação, ele operou com objetos distintos, pois a análise da região foi feita pelo desenho, e não por um comportamento de uma função. Em virtude disso, gerou-se o conflito, pois a parábola do desenho foi significada como aberta e delimita duas regiões infinitas. Já a elipse é fechada e circunscreve uma região finita. Bruno afirmou que todas as curvas definem duas regiões e que a questão de ser aberta ou fechada é uma questão de continuidade. Este resíduo de enunciação foi aceito por Guilherme, que concordou e explicou para William que a parábola é fechada.

*Bruno:* A questão dela ser aberta é a continuidade. Então se eu caminhar pela curva [faz um desenho de uma circunferência no quadro e percorre com um giz continuamente] e eu nunca chego num ponto, então ela vai ser considerada fechada e ela tem uma região.

*William:* Continuidade?

*Guilherme:* Não no sentido de limite.

*William:* Eu sei, mas eu estava pensando na parábola.

*Guilherme:* Você nunca chega no final.

*William:* Então, no caso, se tiver começo e fim, você num chega em um, para e volta para o início?

*Guilherme:* Não.

*William:* Por exemplo, um segmento é aberto e a parábola é fechada.

*Guilherme:* Isso, isso! A parábola é fechada. Você não consegue fazer aquilo que o Bruno fez [percorrer a linha continuamente] no segmento. (Fonte: E02).

Contudo, para Guilherme, a parábola é aberta ou fechada dependendo do ponto de vista, como apontado em seu diário.

Discutimos também a percepção de curvas fechadas e abertas, em diferentes visões. Por exemplo: uma circunferência é sempre uma curva fechada, diferente da visão da parábola, que graficamente aparenta ser uma curva aberta, mas sabemos ser uma curva fechada (por conhecimentos prévios). (Fonte: G02).

Naquele momento, mesmo com a discussão e validação de que a parábola é fechada, no quinto encontro, Bruno retomou algumas questões, perguntando se as curvas cônicas são abertas ou fechadas, obtendo como resposta apenas o silêncio. Isso mostra que o fato de um sujeito ter constituído um interlocutor não quer dizer que essas legitimidades foram internalizadas. Contudo, em outros encontros, a noção de abertura de uma cônica mudou, como apresentarei nos próximos Movimentos.

Além da noção de cônica aberta/fechada, trago outras noções que foram trazidas no terceiro encontro até culminar na síntese do seu diário.

Guilherme iniciou o terceiro encontro comentando que não ficou claro o que é uma curva cônica, pois sentiu a necessidade de diferenciar a curva cônica das outras seções (ponto e reta). O problema era que, até então, a noção de curvas cônicas para Guilherme era a de que elas são seções cônicas, e isso não exclui o ponto e a reta. Desse modo, os participantes quiseram expressar uma frase que restringisse aqueles objetos. Não foi considerado se elas são abertas ou fechadas. Inicialmente, ele considerou que as curvas cônicas não são retas e produziu o significado para um objeto curvo. Segundo Guilherme, “a partir do que foi discutido, só se pode dizer que o que é curvo é aquilo que não é reto e reto é aquilo que não é curvo”. A constituição da noção de curvo se dá pela negação do que é reto. No contexto matemático, há outras classificações para uma linha não reta diferente de curva, porém, ao operar no CS de *Seção Cônica*, Guilherme concebeu, como possibilidades de linhas, as presentes nas seções cônicas. Isso fica evidente quando Bruno perguntou, no grupo do WhatsApp antes do terceiro

encontro, quais os tipos de linhas, e Guilherme respondeu que existem “a reta e a torta” . Ao serem solicitados exemplos, ele disse: “a elipse, parábola e hipérbole”.

Durante o terceiro encontro, Guilherme define quatro vezes as curvas cônicas, apresentando poucas diferenças entre elas. Na primeira vez, complementa a frase de Bruno:

*Bruno:* Curvas cônicas são seções cônicas...

*Guilherme:* Curvas. (Fonte: E03).

Na segunda vez, ele mesmo define: “Curvas Cônicas são seções cônicas curvas”. Depois especifica que as curvas cônicas são planas, por pertencerem ao plano de seção da superfície cônica e, pela terceira vez, define curvas cônicas como “seções cônicas planas curvas”. Explicitar que as seções cônicas são planas é um modo de considerar que uma superfície cônica poderia ser cortada por outras formas não planas, e não necessariamente uma redundância. Em seguida, Guilherme questionou se uma seção cônica é uma linha, chegando à seguinte linha de raciocínio: se o ponto não é uma linha, logo, nem toda seção cônica são linhas, mas toda curva cônica é uma linha. Com isso, Guilherme complementou sua última definição:

*Bruno:* Curvas cônicas são linhas curvas planas...

*Guilherme:* Formadas por seções cônicas. (Fonte: E03).

Por fim, após o encontro, Guilherme apresenta novamente uma definição para curvas cônicas. Dessa vez, ele não explicita o fato de a seção cônica ser plana, porém sintetiza alguns aspectos que foram considerados importantes desde o primeiro encontro.

Dando início ao pensamento e construção de alguma discussão, conversamos sobre a existência das “cônicas”, e por que desse nome, qual a relação (talvez que necessária) com um (ou mais de um) cones (ou estruturas cônicas). Seções? Projeções? Depois da discussão muito girar em torno de “onde saem as curvas”, tivemos uma demonstração prática com luz.

Essa demonstração prática parte da ideia de iluminar (com a lanterna do celular, no caso) a lousa e verificar aquilo que é projetado no quadro. A título informativo, chegamos à conclusão que, conforme mudamos o ângulo do celular em relação ao plano de projeção, mudamos a “cônica” que estamos projetando. Por exemplo, ao termos o celular paralelo ao plano, temos uma circunferência.

Discutimos também a percepção de curvas fechadas e abertas, em diferentes visões. Por exemplo: uma circunferência é sempre uma curva fechada, diferente da visão da parábola, que graficamente aparenta ser uma curva aberta, mas sabemos ser uma curva fechada (por conhecimentos prévios).

Finalmente conseguimos definir em palavras CONCRETAS, ou seja, sem mais “coisas implícitas”, o que viria a ser uma curva cônica. No caso, uma curva cônica é uma LINHA CURVA, formada a partir de uma SEÇÃO CÔNICA. (Fonte: G4).

Nesta citação, é evidente como a noção de curva cônica como seções cônicas está presente nas produções de significados, pois ela foi expressa na síntese do que foi trabalhado. Apesar de a característica de abertura não ser considerada na definição, ela foi citada como uma característica, constituindo também a noção de curva cônica. Neste sentido, houve dois objetos

constituídos: as cônicas, que podem ser algumas abertas ou todas fechadas, dependendo do CS operado (no caso do barbante, delimita região e função), e as cônicas operadas no CS de seções cônicas, apresentando, como características, ser linha curva e resultado de uma seção plana em um cone.

Após o sétimo encontro, Guilherme expressou que não havia mais dúvidas sobre as possibilidades de seções planas em uma superfície cônica reta. Por esse motivo, o tema não foi mais explorado, apenas rememorado quando necessário para investigar alguma propriedade.

Olhando para a dinâmica de produção de significado deste Movimento, percebo como a característica aberta/fechada foi explorada, mas não considerada em sua síntese; porém, apesar de não ter sido considerada, ela apresentou elementos importantes para a constituição do quarto Movimento, chamado de...

### *Cônica(s) Projetiva(s)*

Durante a discussão sobre curva aberta e fechada, no primeiro encontro, Bruno problematizou sobre a geração de uma curva fechada em uma seção cônica. Por meio do desenho do cone em vista e o plano de seção (Figura 99), Guilherme produziu o significado de que a curva é fechada “quando [o plano] cruza as duas geratrizes” e acrescentou que, dependendo do ponto de vista (analítico ou euclidiano), pode ser aberta ou fechada. A partir desse momento, Bruno introduziu um novo paradigma para os participantes, marcando o início deste Movimento.

*Bruno:* Para Euclides, eu posso continuar a linha da parábola até quando eu precisar.

*Sabrina:* Mas vou parar em algum momento.

*Bruno:* Isso, já outros caras, Poncelet e companhia, vão trabalhar com a Geometria Projetiva. São eles que dão suporte para entender que isso daqui [aponta para o desenho da seção cônica no quadro] é uma coisa só. O que eu queria que vocês chegassem à conclusão é que, se eu estou dizendo que a parábola e a elipse são curvas cônicas, isso quer dizer que existem características próprias que distinguem elas de outras curvas. Então elas vão ter elementos e características que são os mesmos. O que a gente vai investigar é quais elementos são esses, que coisas são essas que me permitem dizer que todas essas curvas são a mesma coisa. Por que a elipse é fechada? E essa aqui [aponta para o desenho da parábola no quadro] é aberta, mas ainda caracteriza ela como cônicas? Se a gente for olhar projetivamente falando, isso aqui [aponta para o desenho da Figura 99] vai se fechar, onde? Infinitamente. Aí a gente vai pensar no seguinte: Para Euclides, duas retas paralelas não possuem pontos em comum...

*Guilherme:* Ah! Aqui vai fechar [apontando para o desenho], meu Deus, que absurdo! [Bruno estala o dedo e aponta para Guilherme em sinal de concordância].

*Bruno:* Para a Geometria Projetiva, é o seguinte: quando você está dirigindo na estrada

[faz desenho de estrada, Figura 99] indo lá para o interior [...], os meios fios se encontram? *Guilherme/Rafael/Sabrina/William*: Não.

*Bruno*: Não, mas quando a gente olha, a gente tem a impressão que eles se encontram onde?

*Guilherme*: No infinito.

*Bruno*: No horizonte [responde ao mesmo tempo que Guilherme]. Lembrando, eles não se encontram no infinito, porque infinito não é um lugar, é uma ideia.

*Guilherme*: Ok.

*Bruno*: Então eles se encontram em um lugar infinitamente afastado.

*Guilherme*: Lá [apenas fala sem gestos].

*Bruno*: Porque infinito é questão de referência.

*Guilherme*: Uhum.

*Bruno*: Então, por esse princípio eu poderia pensar: se eu tenho esse triângulo [faz o desenho de um triângulo] e eu pegar esse vértice e ir afastando, afastando e afastando infinitamente, esses dois lados vão começar a fazer isso [apaga os lados e faz de novo com base na posição do vértice, Figura 100].

*Sabrina*: Ah! eles vão ficar paralelos.

*Bruno*: Até que eles tendem a ficar paralelos. Se eu entendo o conceito de paralelismo como retas que nunca se encontram, então na Geometria Projetiva não existem retas paralelas.

*William*: Existem retas que se encontram... em um ponto... infinitamente afastado.

*Bruno*: Aí foi nisso que eu trabalhei com os alunos de Desenho Geométrico. Existem construções básicas, por exemplo a da mediatriz e bissetriz, mas na verdade as duas são a mesma coisa se você olhar pelo enfoque projetivo. Se olhar pelo enfoque euclidiano, você sempre vai dizer que isso é isso, exceto em um caso particular. Projetivamente ele amplia esse conceito, você começa a generalizar tudo. Então, quais são os elementos que vocês conseguem ver nessas duas curvas? Quais são os elementos que uma elipse tem?

*Guilherme/Rafael*: Foco.

*Bruno*: Ela possui quantos focos?

*Guilherme/William*: Dois.

*Bruno*: E parábola?

*Guilherme*: Um só.

*Bruno*: Aí eu penso, se essas duas curvas são curvas cônicas e todas as curvas cônicas possuem os mesmos elementos, então se a elipse possui dois focos, a parábola tem dois focos.

*Sabrina*: Ué?

*Bruno*: E onde é que tem que estar o outro foco da parábola?

*Guilherme*: No mesmo canto.

*Bruno*: É uma hipótese.

*William*: Não, a elipse num é...

*Guilherme*: A circunferência tem os dois focos no mesmo ponto.

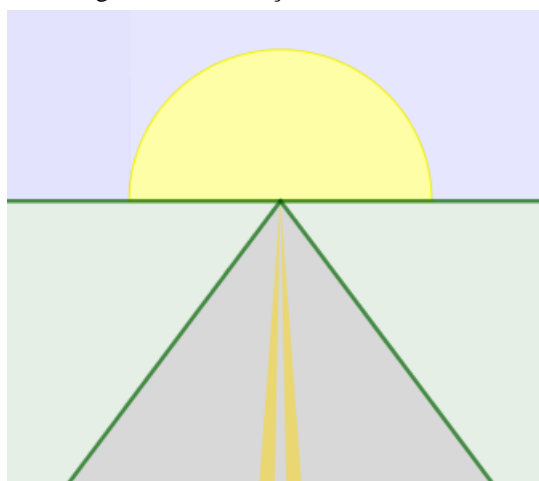
*William*: Mas eu não estou falando da circunferência.

*Guilherme*: Mas a circunferência tem.

*Bruno*: Espera, então a circunferência é uma curva cônica também?

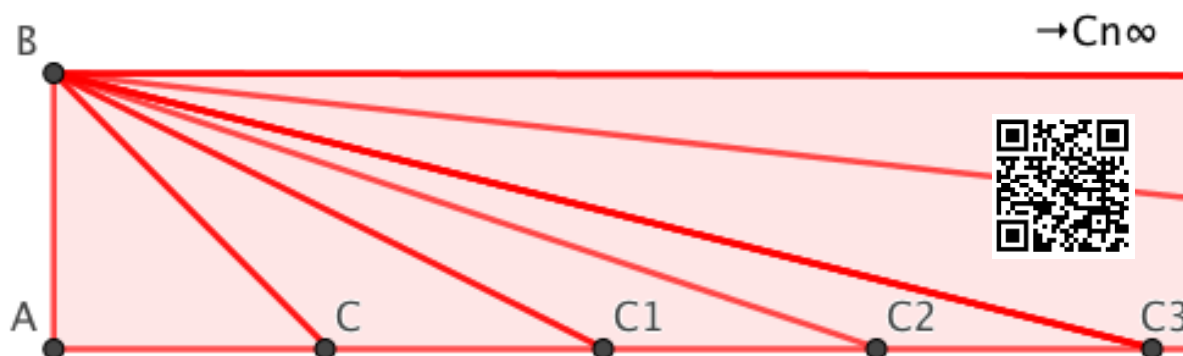
*Guilherme*: É. (Fonte: E01).

Figura 99 – Ilustração de uma estrada.



Fonte: Do autor.

Figura 100 – Triângulo com vértice C tendendo ao infinito (e QR-Code).



Fonte: Do autor.

O paradigma projetivo, diferente dos outros, foi introduzido por Bruno, ou seja, para os outros participantes, é uma abordagem ainda não conhecida.

Quando Guilherme apontou para o desenho e disse “aqui vai fechar”, ele se referia ao local onde a parábola fecha, ou seja, no ponto infinitamente afastado. Neste momento, ao operar com o modelo da vista da seção cônica, Guilherme não só produz o significado de que a parábola é fechada, mas onde ela fecha, no “ponto no infinito”.

A produção de significado de Guilherme não ocorreu apenas pelos resíduos de enunciação da fala de Bruno, mas também pelos resíduos de enunciação do desenho no quadro. Desse modo, a justificação referente ao fato de a parábola fechar foi a afirmação de que duas retas paralelas se encontram em um ponto infinitamente afastado apresentado por Bruno. O contexto que valida essa informação foi o desenho em vista do cone com plano de seção, pelo qual Guilherme identificou as duas retas paralelas como geratriz e plano de seção, fazendo a associação de que a geratriz cruza o plano em um ponto infinitamente afastado. Como ele afirmou anteriormente que a curva fecha quando o plano cruza as duas geratrizes, logo se o

plano paralelo à geratriz se cruza com a geratriz, então a curva também é fechada. Ou seja, o que é válido não é o fato da seção cônica, e sim de as paralelas se cruzarem em um ponto infinitamente afastado. Esta situação evidencia que uma mesma enunciação pode permitir produções de significados diferentes por um mesmo sujeito, ou seja, ele pode olhar para o mesmo desenho e “ver” uma seção cônica, como também duas retas paralelas e, ao associar os seus elementos, produzir um novo conhecimento.

É importante salientar que o fato de Guilherme ter produzido conhecimento sobre uma dada noção em um encontro não implica que essa legitimidade seja internalizada e operada em outro encontro automaticamente. A exemplo disso, mesmo tendo feito a leitura no primeiro encontro de que a parábola fecha e que duas retas se encontram em um ponto infinitamente afastado, no sétimo encontro, Guilherme não expressa inicialmente tal legitimidade. Durante o encontro, ele foi capaz de descrever todas as possibilidades de seções oralmente ou utilizando o desenho no quadro da vista do cone e do plano de seção (caracterizando o Movimento de seções cônicas) ao explicar para Rafael; porém, quando Bruno fez um desenho de duas seções cônicas (Figura 101a e b) e questionou...

*Bruno:* Vou pegar aqui o extremo, seria esse ponto [ponto A da Figura 101a] e o outro extremo que seria esse ponto [ponto B]. O que será que acontece com esse ponto aqui [ponto B] quando você pega esse plano e vai inclinando, inclinando e o outro ponto se mantém? *Rafael:* Vai descendo.

*Bruno:* E vai pra onde? Você concorda que esse ponto [ponto B] é a interseção da geratriz com o plano [passa o giz sobre as duas linhas que passam por B]. O que é que vai acontecer com esse ponto aqui [ponto B]? [após um momento de silêncio, faz o desenho da linha que expressa o plano que passa por B1 e B2, Figura 101c]

*Guilherme:* Vai lá pra cima.

*Bruno:* Beleza, vai lá pra cima, concordo [faz a linha que passa por B3]. Só que eu vou voltar...

*Guilherme:* Entendi, você tá querendo dizer que ele some?

*Bruno:* Ele some?

*Guilherme:* Da nossa visão.

*Bruno:* Então, nesta posição [Figura 101b], onde vai ser a interseção?

*Guilherme:* Não é uma parábola?

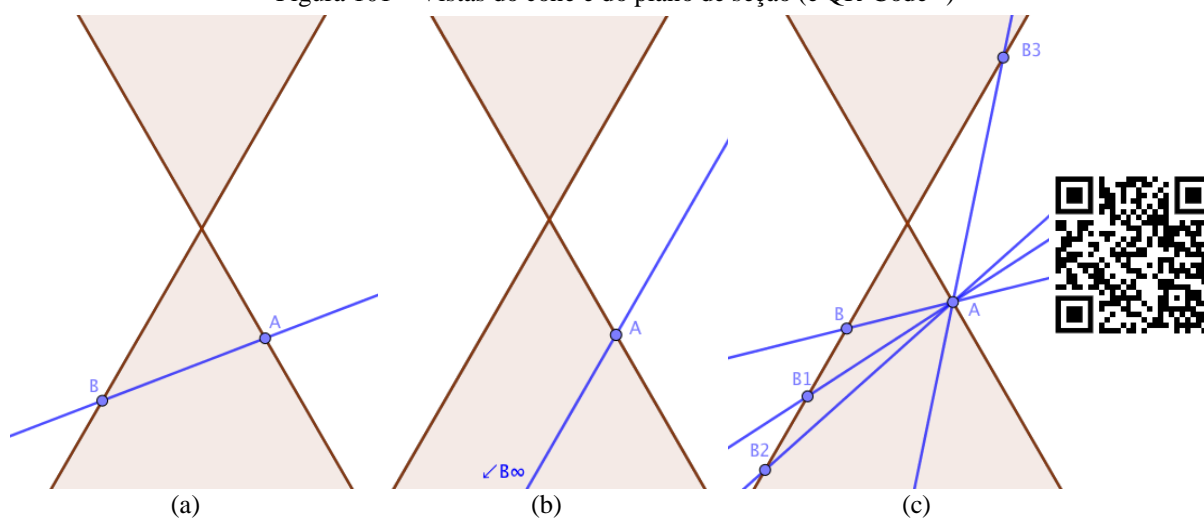
*Bruno:* Sim, a interseção do plano com a geratriz é uma parábola. Eu estou perguntando este ponto que é a interseção do plano com a geratriz, ele vai estar onde?

*Guilherme:* No infinito.

*Bruno:* Se o infinito for um lugar, ok, ele vai estar no infinito, mas como ele não é um lugar, ele vai estar em um ponto infinitamente afastado [risos].

*Guilherme:* Ah, beleza, entendi [risos]. (Fonte: E07).



Figura 101 – Vistas do cone e do plano de seção (e QR-Code<sup>86</sup>)

Fonte: Dos dados (E07) com notações do autor.

Pelo extrato, é possível observar que o mesmo modelo (desenho de seção cônica em vista) foi utilizado, e Guilherme produz significado como uma situação nova, ou seja, mesmo tendo interpretado, no primeiro encontro, que a parábola fecha quando a geratriz está paralela, ao ser apresentado o mesmo modelo, ele trata como uma nova informação. Isso mostra como a legitimidade produzida no primeiro encontro não foi internalizada.

Uma discussão importante que caracteriza o Movimento das Cônicas Projetivas foi sobre os pontos impróprios, porém essa noção não foi constituída fora do contexto das curvas cônicas:

*Bruno:* Todo espaço tem um espaço impróprio, então o espaço impróprio é o lugar geométrico de todos os pontos impróprios daquele espaço. Então, por exemplo, toda reta só possui um ponto impróprio. Por exemplo, eu tenho um segmento (Figura 102) e vou afastando um dos pontos até colocar ele no espaço impróprio, que vai ser num ponto específico. E onde está o ponto médio?

*Rafael:* Repete, eu não entendi.

*Bruno:* Eu tinha o segmento e tenho o ponto médio aqui [aponta para o desenho no quadro, Figura 102], aí eu peguei esse ponto [B] e afastei infinitamente. O que é que aconteceu com esse ponto médio, onde está esse ponto médio aqui?

*Guilherme:* Infinito sobre dois.

*Bruno:* Só que você concorda que infinito não é uma medida, então se infinito não é divisível por dois, onde está esse ponto médio?

*Guilherme:* Também lá.

*Bruno:* Exato. Então o que é que a gente tem que visualizar. É como se o ponto impróprio de uma reta é um buraco negro.

*Guilherme:* Que nem ele leva todo mundo lá.

*Bruno:* Isso, se existe alguma coisa aqui no meio e essa coisa depende desse outro ponto que está lá... [faz um som de algo sendo sugado] ele puxa lá e todo mundo fica lá em cima.

*Guilherme:* Entendi.

*Bruno:* Então se você disser, vê que paradoxo, uma reta possui apenas um ponto

<sup>86</sup> Após acessar o link, ative V1 V2. Considerando que V1 é A e V2 é B, observe o comportamento desses pontos na janela central e à esquerda ao mover o controle deslizante  $p^\circ$ .

impróprio, porém o ponto médio e o outro ponto desse segmento, cujo uma das extremidades é imprópria também, vai estar lá naquele ponto impróprio, por quê? Porque é o único ponto, por isso eles vão coincidir, porque se não, não faz sentido eu dizer que o ponto médio também está infinitamente afastado. Então no espaço tridimensional,  $R_3$ , duas retas que são paralelas vão se encontrar onde?

*Guilherme:* Em um ponto infinitamente afastado.

*Bruno:* Então a gente vai imaginar. Então você vai imaginar que no espaço tridimensional, no  $R_3$ , duas retas que são paralelas vão se encontrar onde? *Guilherme:* Em um ponto no infinito.

*Bruno:* Em um ponto infinitamente afastado. Dois planos paralelos vão se encontrar onde [faz o desenho de dois planos paralelos, Figura 103]?

*Rafael:* Em uma reta imprópria.

*Bruno:* Numa reta imprópria, certo?

*Guilherme:* Certo.

*Bruno:* E um plano também só possui...

*Rafael:* Uma reta imprópria.

*Bruno:* Uma reta imprópria.

*Rafael:* Com infinitos pontos.

*Bruno:* Exato. Aí vamos ver, isso daqui possui quantas dimensões [aponta para o desenho do segmento, Figura 102]?

*Guilherme:* Uma.

*Bruno:* Uma dimensão e ele possui quantos elementos impróprios? Ele possui apenas um ponto e o ponto é adimensional, ou seja, ele possui um elemento de zero dimensões [vai fazendo anotações no quadro, 1,  $P=0$ , FIGURA]. Certo? O plano, que é um elemento de duas dimensões, ele vai possuir como interseção [aponta para o desenho dos planos]...

*Guilherme:* Um elemento de uma dimensão.

*Bruno:* Um elemento de uma dimensão, que é uma reta. E o espaço que é o  $R_3$  [escreve no quadro  $R_3$ ], pela lógica, o que é que vai ser? O conjunto de pontos impróprios de dois planos foi uma reta, o conjunto de pontos impróprios de uma reta foi ponto [apontando para o segmento] e o conjunto de pontos impróprios de um plano [aponta para o  $R_3$ ] vai ser o quê?

*Rafael:* Do espaço [ $R_3$ ] é o plano.

*Guilherme:* Do espaço, você quis dizer [falando com Bruno], você deu a resposta.

*Rafael:* É, você deu a resposta pela pergunta.

*Guilherme:* Você disse: de um plano [risos].

*Bruno:* Foi... é... foi péssimo [risos]... então vai ser...

*Guilherme:* Um plano.

*Rafael:* E o do  $R_4$  vai ser um espaço.

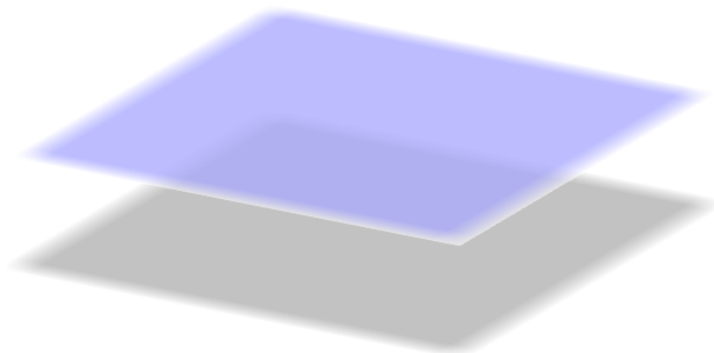
*Bruno:* Isso! (Fonte: E07).

Figura 102 – Ponto médio de um segmento (e QR-Code).



Fonte: Do autor.

Figura 103 – Planos paralelos.



Fonte: Do autor.

A partir dos significados produzidos para a noção de ponto impróprio, foi possível analisar o quantitativo desse elemento para cada curva cônica.

*Bruno:* Quantos pontos impróprios tem cada curva? [alguns segundos de silêncio]

Vamos pensar. A elipse possui ponto impróprio?

*Rafael:* Não... sei... [fica um momento de silêncio].

*Guilherme:* Acho que não.

*Bruno:* Por quê?

*Guilherme:* Depende... não, qual elipse você está falando? Qualquer uma?

*Bruno:* Qualquer uma.

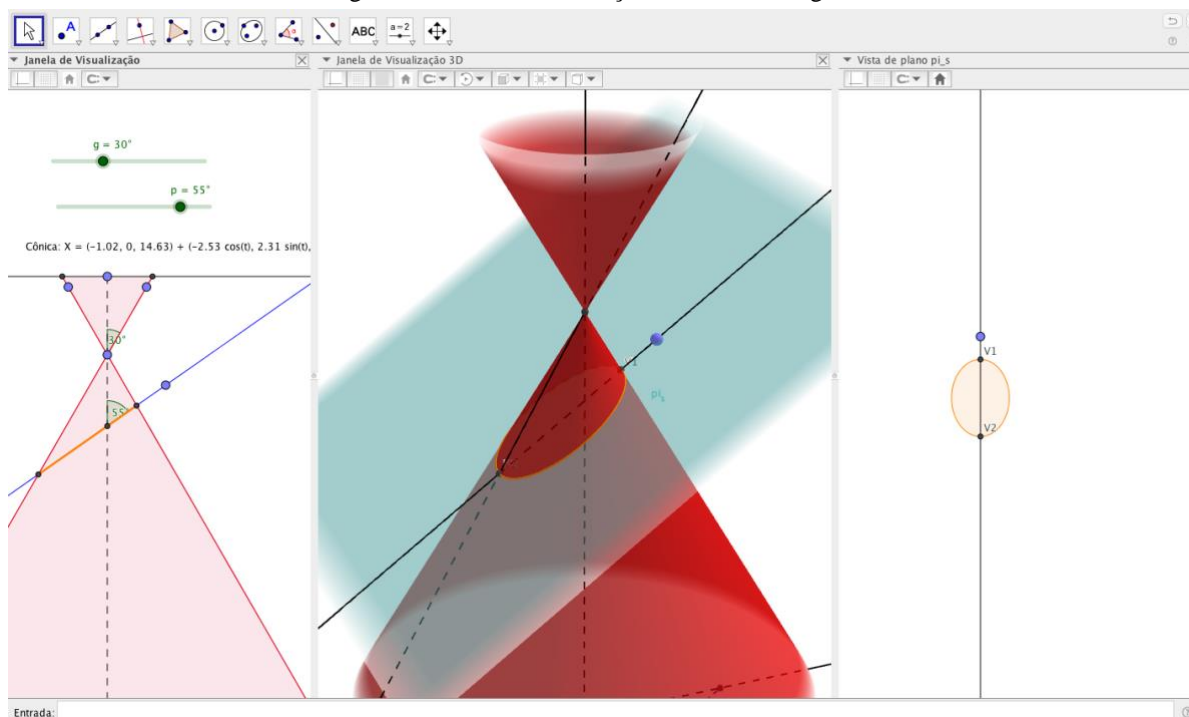
*Guilherme:* Eu acho que a elipse tem uma. Tem um ponto impróprio.

*Bruno:* Vou pegar o modelo do Geogebra. [Bruno explicou o que tem em cada janela de visualização, Figura 104]

*Bruno:* A elipse aqui tem algum ponto impróprio? Isso aqui é uma vista que eu estou mostrando a seção.

*Guilherme:* Nenhum, porque eu consigo ver todos os pontos dela. (Fonte: E07).

Figura 104 – Modelo da seção cônica no Geogebra.



Fonte: Do autor.

O fato de Guilherme ter operado com um CS projetivo para a noção de curvas cônicas não implica que esta seja uma verdade imutável. A exemplo disso, mesmo considerando a hipérbole uma única curva (e não mais duas parábolas), ele continuou se referindo ao desenho como dois desenhos. Isso implica que, para Guilherme, a expressão gráfica da hipérbole irá remeter ao CS de duas parábolas; contudo, a análise teórica sobre a hipérbole pode remeter a outros CS, como o de seção cônica, ou mesmo o projetivo.

*Bruno:* Quantos pontos impróprios tem cada curva cônica? Na circunferência, ela tem quantos [faz desenho da circunferência e seu centro]?

*William:* Zero.

*Bruno:* Na elipse?

*William:* Zero? [...] Tem... dois focos.

*Bruno:* Não, ignora os focos.

*William:* Tá, tem zero pontos impróprios.

*Guilherme:* E tem zero... porque ela dá a voltinha.

*Bruno:* A parábola, por esse raciocínio, você consegue deduzir que ela tem...

*Guilherme/Rafael:* Um.

*Bruno:* E a hipérbole. (Fonte: E09).

Uma evidência dessa leitura se mostra no décimo oitavo encontro quando Guilherme comenta uma afirmação de William.

*William:* Ah! Eu também descobri que isso é uma hipérbole [apontando para o desenho de um dos ramos da hipérbole] e que isso... [faz o desenho do outro ramo e aponta para os dois ramos] também é uma hipérbole.

*Guilherme:* Não é “também uma hipérbole”, é a hipérbole [ênfatisa o artigo], não são duas.

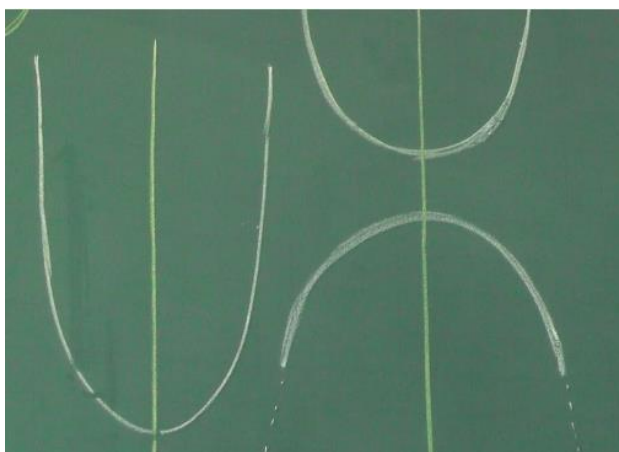
*William:* A hipérbole é as duas, mas a hipérbole pode ser só uma.

*Guilherme:* Se eu vejo só uma, eu falo que é uma parábola. (Fonte: E18)

No modelo do desenho plano, Guilherme produz significado para a parábola como uma curva e para a hipérbole como duas, assim como no modelo da lanterna (característica do primeiro Movimento), pois esse resíduo não lhe fornece informações suficientes para ele produzir significado.

Em seguida, Bruno mostra a diferença estética entre elas, apontando que a hipérbole, quanto mais se afasta do vértice, mais a curva tende a uma reta, e a parábola vai se “abrindo”, mas sempre curva. Ao analisar os vídeos, percebi que Guilherme, na maioria das vezes, expressa graficamente a parábola em forma de “U” e a hipérbole em forma de dois “Us”, ratificando a leitura da hipérbole como duas parábolas (Figura 105).

Figura 105 – Diferença entre o desenho da parábola.



Fonte: Dos dados (E18)

É a partir da operação dos elementos comuns às cônicas que Guilherme constitui o objeto cônicas projetivas como sendo um só objeto, variando a posição de determinados elementos. Alguns extratos evidenciam essa legitimação.

Se a gente pensar em um intervalo de tempo para o plano interceptando [o cone], aí vai gerar todas. E é a mesma, porque o plano não transladou, ele só está mudando a rotação. Eu queria encontrar similaridades entre elas. (Fonte: E11)

Neste extrato, Guilherme afirma que a seção gera todas e o elemento que muda é a rotação do plano. O desejo de encontrar similaridades é que conduz a análise dos objetos nas quatro curvas, permitindo, assim, a generalização. Esse processo ocorre em diferentes modelos. Ao tentar determinar a quantidade de pontos impróprios de cada cônica, Guilherme opera com o modelo da seção cônica, de modo a observar as relações entre o plano de seção com a geratriz da superfície cônica, levando em consideração a existência de um ponto impróprio. Porém, não foi apenas na seção cônica que o Movimento das cônicas projetivas se caracteriza, mas também no modelo do plano projetivo. O extrato a seguir evidencia esta operação.

*Guilherme:* Imagina eu a circunferência. Onde está o foco da circunferência? o foco e o centro estão no mesmo lugar [Bruno põe o giz na posição do centro]. Agora a gente tem uma Órbita [circunferência em linha vermelha da Figura 106 com os focos coincidentes]. Na hora que eu peguei esses focos que é o mesmo, e separei, o que era que minha circunferência vai virar uma elipse [linha azul da Figura 106]. Olha que elipse do caramba, aí vira uma elipse maior ainda. Na hora que esse ponto vai para o impróprio, vai lá, Bonner, ele está impróprio. Isso aqui virou uma parábola [linha amarela da Figura 106]. Porque você não vê aonde, porque na hora que você ver o próximo Foco, vai estar dando uma voltinha. Ele estava impróprio, aí vai chegar lá no outro impróprio, que é o Bruno, [Bruno enfatiza que é o mesmo ponto impróprio e Guilherme concorda]. Você já jogou um joguinho do videogame que você sai do lado e aparece do outro? Esse é o caso, ele está do outro lado, mas ele ainda é o impróprio.

*Bruno:* Só que lembra que a curvinha estava aqui [se referindo a lado esquerdo da curva azul da Figura 106].

*Guilherme:* Essa é a minha curva, minha bundinha ainda está aqui, ó.

*Bruno:* E a curvinha que estava do lado de cá. Aí quando vier para o lado de lá...

[agora se referindo à linha verde que está à esquerda do ponto  $F2''$  da Figura 106].

*Guilherme:* Só que ele ainda está impróprio, agora ele vai voltar a ser próprio, só que quando ele voltar a ser próprio, ele não vai voltar a ser uma elipse. O que é que virou?

*Sabrina:* Uma hipérbole.

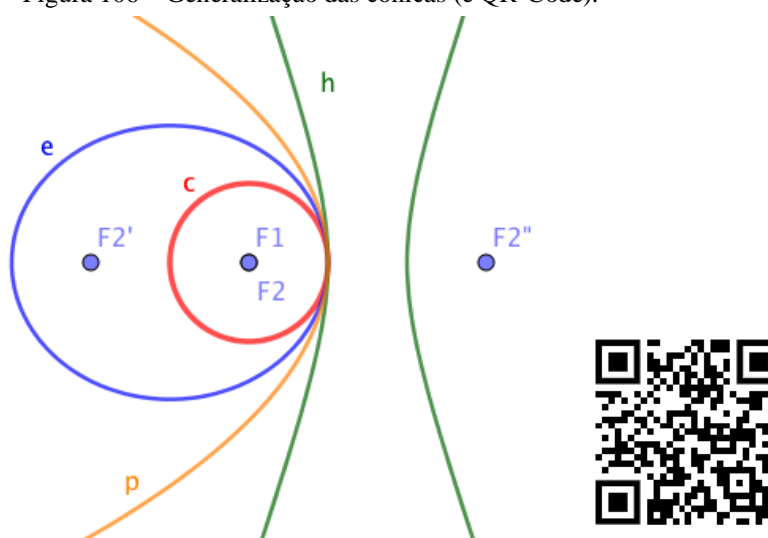
*Guilherme:* Porque minha bundinha, que estava desse lado, veio para esse outro lado aqui. Aí, a discussão que a gente chegou é: Lembra? estava assim [linha azul da Figura 106]. O centro estava no meio. Na hora que eu fiz assim [linha verde da Figura 106]... o centro está...?

*Sabrina:* So far away.

*Guilherme:* Entendeu? É isso que a gente estava falando, elas vão virando uma na outra.

*Sabrina:* É tudo uma coisa só. (Fonte: E12)

Figura 106 – Generalização das cônicas (e QR-Code).



Fonte: Do autor, adaptado dos dados (E12).

Pelo extrato, é possível observar que Guilherme constitui a cônica pela operação dos focos e da posição relativa da concavidade da curva e do centro com os focos. Desse modo, o CS operado não apresenta nenhum elemento referente às seções cônicas, indicando ser outro CS que o operado no primeiro encontro. Esta observação me permite inferir que, inicialmente, um dado novo necessita de outras legitimidades para validá-lo; posteriormente, quando este novo dado é considerado como uma estipulação local, o núcleo do CS se modifica, não sendo mais necessário.

Ao observar os CS operados em duas situações apresentadas deste Movimento, é possível observar que os elementos operados são distintos no primeiro exemplo em relação a este último. No primeiro, os elementos operados são o plano de seção, as geratrizes, a concorrência/paralelismo. Já nesse último exemplo, os elementos operados são os focos, o centro e a concavidade, o que implica que o objeto curva cônica foi distinto em cada situação. Também nesse segundo exemplo, a curva cônica é generalizada, diferente do primeiro em que apenas a parábola e a elipse são analisadas.

Neste Movimento, a característica principal é a operação do ponto impróprio, a generalidade da curva cônica se mostra tanto no exemplo citado (análise da posição relativa dos focos) como quando operado o CS de seção cônica. É importante destacar que, no Movimento de seções cônicas, não há generalidade dos elementos; há a identificação de cada curva em determinada posição do plano de seção. A generalidade enquanto seção cônica se expressa na operação de outro CS que apresenta elementos do núcleo do CS projetivo e do CS de seções cônicas, característica do Movimento de Curvas.

O processo de generalização se deu pela atividade de encontrar todos os elementos nas quatro curvas conhecidas. Ou seja, Bruno sugere que todas possuem os mesmos elementos, então o processo de investigação se debruçou em verificar como eles se comportam em todas as cônicas. Quanto mais elementos eram analisados, mais densa era a noção (o corpo) de curvas cônicas.

A legitimação do ponto infinitamente afastado (doravante, ponto impróprio) foi o que permitiu a Guilherme generalizar determinadas situações. A exemplo disso, quando ele fala sobre o cilindro ser um “cone sem vértice”, ou seja, “você afasta tanto o vértice que não consegue mais ver ele”, nesta situação, Guilherme produziu o significado para o ponto impróprio como o ponto que existe, mas não se vê.

No modelo no plano projetivo, vários elementos foram operados, como os centros, os vértices, as tangentes, os focos, as diretrizes. Para operar e produzir significado para os elementos impróprios, Guilherme (e os demais participantes) realizavam analogias com cônicas que possuíam esses elementos próprios, estabelecendo relações entre elementos próprios e impróprios.

Essa constatação pode ser evidenciada no estudo sobre o centro da curva, em que há uma discussão se o centro da hipérbole é o mesmo que o da elipse. Após todo o debate e considerado o contexto projetivo, foi considerado que a curva possui dois centros (um interno e um externo).

Após fazerem a analogia de vários elementos das cônicas, os participantes passaram a fazer um estudo analítico das cônicas, caracterizando o Movimento...

### *As cônicas analíticas*

Este Movimento foi marcado pela operação das cônicas como objetivos algébricos. No primeiro momento, Guilherme enuncia sobre esse tipo de objeto: é em seu diário, antes do primeiro encontro, quando afirma que as cônicas podem ser escritas  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx +$

$ey + f = 0$ . Esta citação, além de caracterizar o Movimento Cônicas Independentes, traz evidências de uma possibilidade de operação algébrica, como também de generalidade, ou seja, por meio dessa expressão, a noção de cônicas é contemplada para todos os tipos. Contudo, esta foi a única vez em que as cônicas foram expressas genericamente de modo algébrico. Do mesmo modo, não houve discussão sobre justificativas matemáticas, apresentando, como justificção, a legitimidade da disciplina de Geometria Analítica.

Posteriormente, depois de vários encontros, em que os participantes do Grupo de Estudos operaram diversas propriedades geométricas das cônicas, foi proposto por Bruno, no décimo quinto encontro, explorar suas equações. As discussões sobre o caráter analítico das cônicas duraram até o 20.º encontro, perpassando algumas outras propriedades geométricas.

A partir desse momento, houve novamente um estudo a partir de cada cônica isoladamente, porém diferentemente do Movimento Cônicas Independentes, em que os objetos constituídos tinham, em seu núcleo, estipulações locais de propriedades e elementos que não apresentavam associação entre si, no Movimento das Cônicas Analíticas, a operação dos objetos se dá na produção de significado em relação a um núcleo cujas estipulações locais se tratava de alguns elementos em comum, mas com propriedades específicas. A exemplo disso, a distância do ponto da curva ao foco foi utilizada em todas as cônicas nesse Movimento.

Houve, para cada curva, uma análise geométrica prévia, na qual não foram estabelecidas novas propriedades geométricas sobre as cônicas, mas sim a produção de significado de propriedades particulares em uma expressão algébrica. Também se destaca que o estudo analítico das cônicas contemplou uma abordagem plana.

Para Guilherme, o processo de produção de significado para cada tipo de cônica ocorreu de modo distinto. No caso da circunferência, esse processo ocorreu por meio da observação, pois quem conduziu a discussão foram Bruno e William, sendo assumido pelo primeiro o papel de validador das informações. A propriedade considerada na constituição do objeto circunferência foi a de equidistância dos pontos da curva ao centro e, diferentemente de como é abordado nos livros de Geometria Analítica, os participantes já posicionaram a circunferência com o centro fora da origem do plano cartesiano. Para as distâncias, Guilherme operou no CS de *Geometria Analítica*, pois ao expressar uma dada distância, ele aplicava a fórmula<sup>87</sup>, a qual foi assumida como uma estipulação local, diferente de Bruno, que fez subtração de segmentos.

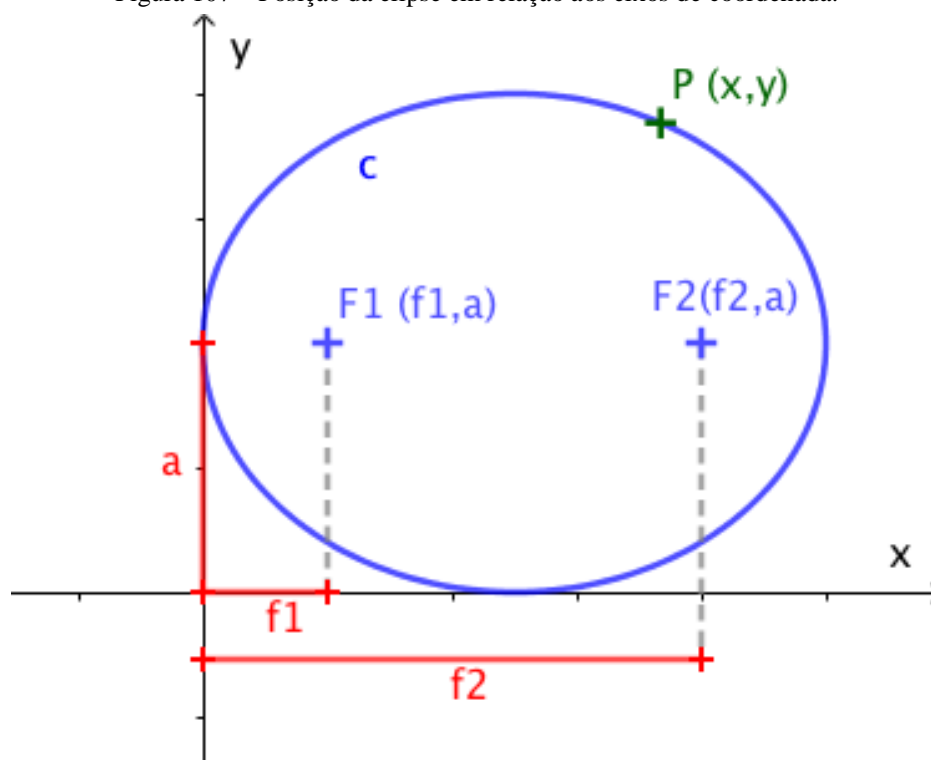
---

<sup>87</sup>  $d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ , onde  $A$  e  $B$  são os pontos que determinam as distâncias e  $x$  e  $y$ , as suas coordenadas.



Para a elipse, Guilherme assumiu o papel de condutor do processo, ou seja, nesse momento, foi ele quem “manipulou” os objetos. Assim como na circunferência, as propriedades consideradas por ele foram específicas da elipse, constituindo-a como “o lugar geométrico cuja medida da soma das distâncias de um ponto da curva aos focos é uma constante” (Fonte: E18). Na sua expressão gráfica, Guilherme pôs a elipse também com o centro fora da origem e a curva tangenciando os eixos (Figura 107).

Figura 107 – Posição da elipse em relação aos eixos de coordenada.



Fonte: Do autor (adaptado dos dados).

Na operacionalização da expressão algébrica, ele relatou:

Cheguei a uma expressão “linda” [tom de ironia] que não me dizia nada, não consegui colocar em função de  $x$  e  $y$ , ela tinha muitos valores que não seriam úteis e eu sabia que a elipse tem  $x$ ,  $y$ ,  $a$  e  $b$ . (Fonte: E18).

Esta citação evidencia a atividade na qual Guilherme estava envolvido, que era a de deduzir uma equação para a elipse em função de  $x$ ,  $y$ ,  $a$  e  $b$ , ou seja, já há uma legitimidade considerada para a expressão algébrica da elipse. Segundo o relato do sujeito, os parâmetros adotados não permitiram que ele chegasse a uma expressão que considerasse legítima. Apesar de não ter acesso à operacionalização, devido ao fato de o sujeito não ter guardado o papel com os cálculos (pois fez em casa), é possível verificar, pela citação, que Guilherme não estabeleceu uma coerência entre o significado produzido por ele e os que ele esperava serem produzidos

dentro de um contexto matemático para a expressão encontrada<sup>88</sup>. Ou seja, ele não legitima a sua produção de significado dentro daquela atividade. Essa estagnação fez com que ele procurasse alguma referência para saber quais elementos deveria utilizar para deduzir, ou seja, a sua dificuldade não estava na operacionalização algébrica em si, mas sim na escolha de elementos que permitissem chegar a uma equação considerada legítima. É importante destacar que, mesmo havendo uma incongruência aritmética no final do cálculo da equação da elipse, não se produziu estranheza entre os sujeitos, ou seja, ela não foi percebida. Contudo, essa incongruência é interpretada por mim, enquanto pesquisador, como um modo de operação mental, distinto da escrita, pois ela ocorre justamente na etapa do cálculo, suprimida na expressão escrita<sup>89</sup>.

Para a dedução da equação da hipérbole, foi sugerido fazer a analogia com a elipse, porém ao tratarem das propriedades geométricas da hipérbole, a discussão se encaminhou para aspectos apenas geométricos, finalizando a reunião sem a dedução dessa equação.

Com relação à parábola, houve duas dinâmicas. A primeira consistiu em produzir significado para uma expressão algébrica conhecida, qual seja,  $ax^2 + bx + c = y$ , pela qual foram analisados os comportamentos dos parâmetros em relação ao gráfico da equação utilizando o Geogebra. Para Guilherme, os significados produzidos para os parâmetros foram expressos pela variação de cada parâmetro isoladamente, os quais foram expressos como:  $a$  muda a concavidade da curva,  $b$  desloca a curva no eixo  $x$  (mas não horizontalmente, preservando o ponto onde a curva cruza o eixo  $y$ ) e  $c$  desloca a curva verticalmente. Os significados atribuídos aos parâmetros  $b$  e  $c$  referem-se ao deslocamento da curva em relação ao eixo cartesiano, já o parâmetro  $a$  verifica se está “mais ou menos aberta” e se a abertura é “para cima ou para baixo.

A segunda dinâmica correspondeu ao que foi feito para a circunferência e a elipse, ou seja, identificar uma propriedade geométrica da curva, expressá-la algebricamente e desenvolver a equação para uma expressão mais simples. A propriedade considerada foi a de equidistância entre o foco e a diretriz, tomando a posição da parábola ora com a diretriz coincidindo com o eixo  $x$ , ora com o vértice na origem. A mudança dessa posição justificou-se

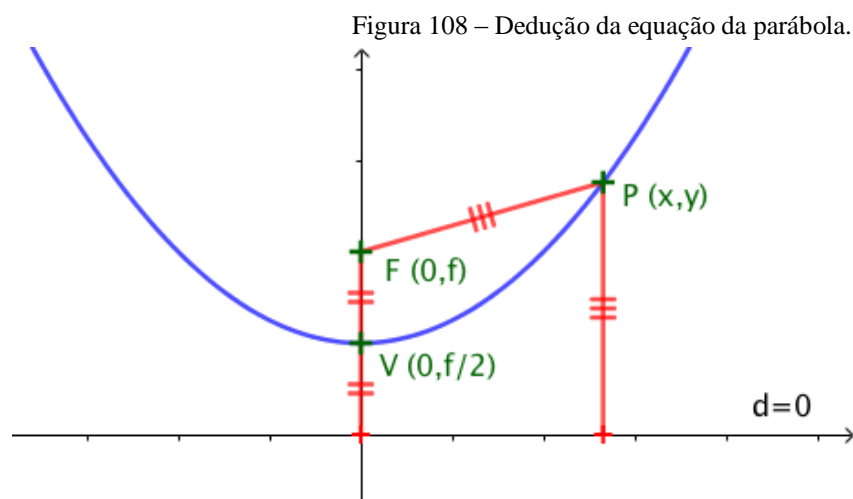
---

<sup>88</sup> A fim de fazer uma leitura de uma possível expressão encontrada por Guilherme, tomei a expressão exposta no quadro  $(d(P, F1) + d(P, F2) = k)$  e a desenvolvi com base nos parâmetros da Figura 107  $(\sqrt{(x - f1)^2 + (y - a)^2} + \sqrt{(x - f2)^2 + (y - a)^2} = k)$  encontrando uma extremamente longa, não sendo considerada por mim usual. Neste sentido, produzi significado para o termo “cheguei a uma expressão linda” como uma expressão longa não passível de ser simplificada.

<sup>89</sup> Cf. Figura 68, p. 148.

pela necessidade de simplificar a expressão algébrica; desse modo, foram observadas as equações em cada posição para optar pela mais simples.

Diferente da circunferência e da elipse, que foram pensadas inicialmente em uma posição aleatória, a parábola foi pensada em uma específica para depois ser generalizada. Foram encontradas expressões diferentes em encontros diferentes. No décimo nono, foi deduzida a equação  $y = x^2/4f$ , tomando a posição da parábola com o vértice na origem, onde  $f$  é a distância do vértice ao foco. No vigésimo, houve uma tentativa de encontrar a equação  $ax^2 + bx + c = y$  a partir das suas propriedades geométricas, a qual foi também considerada a mesma da segunda dinâmica. A posição escolhida foi com a diretriz coincidindo com o eixo  $x$  e, após o desenvolvimento (Figura 108), chegou-se à seguinte expressão:  $\frac{x^2}{2f} + \frac{f}{2} = y$ . Destaca-se que a posição escolhida tem relação com o gráfico de uma função quadrática, evidenciando o Campo Semântico de *Funções* operado.



Fonte: Do autor, adaptado dos dados.

$$FP = Pd$$

$$\sqrt{x^2 + (f - y)^2} = y$$

$$x^2 + f^2 - 2fy + y^2 = y^2$$

$$x^2 + f^2 = 2fy$$

$$\frac{x^2}{2f} + \frac{f}{2} = y$$

Em seguida, partiram dessa equação para achar uma parábola qualquer (com o vértice ou a diretriz fora da origem). Para tal, foi proposto deslocar a cônica nas coordenadas  $a$  e  $b$ ; desse modo, foram substituídos o  $x$  por  $x - a$  e o  $y$  por  $y - b$ . Desenvolvendo, Guilherme chegou à seguinte equação:  $\frac{x^2}{2f} - \frac{ax}{f} + \frac{a^2}{2f} + \frac{f}{2} + b = y$ . Fazendo uma analogia com a equação polinomial do segundo grau, foi identificado, como primeiro parâmetro:  $1/2f$ ; o segundo:  $-a/f$ ; e o terceiro:  $\frac{a^2}{2f} + \frac{f}{2} + b$ . Apesar da identificação, não houve uma análise se essas expressões se relacionavam com os significados produzidos para os parâmetros, por exemplo, de que modo a expressão  $\frac{a^2}{2f} + \frac{f}{2} + b$  interfere no deslocamento da parábola no eixo  $y$ .

Diante desse movimento, é possível observar três parábolas analíticas constituídas, a equação geral que se mostra como uma estipulação local, a deduzida a partir da expressão gráfica da parábola com vértice na origem e a deduzida pela diretriz no eixo  $x$ , na qual são identificados os correspondentes com a primeira.

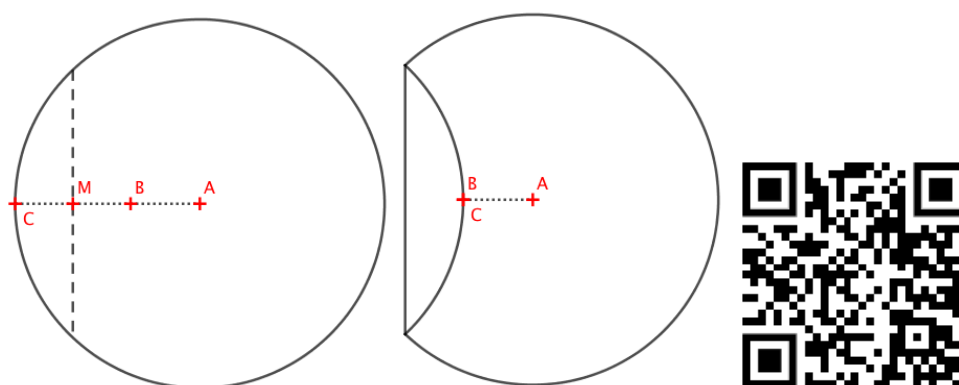
Essa discussão encerrou o Movimento das Cônicas Analíticas. No encontro seguinte, Bruno voltou a apresentar o modelo final produzido no Geogebra, no qual foram incorporados todos os elementos discutidos nos encontros anteriores. No último encontro, os participantes começaram uma discussão despretensiosa, continuando a caracterizar o último Movimento das...

### *Construções gráficas das cônicas*

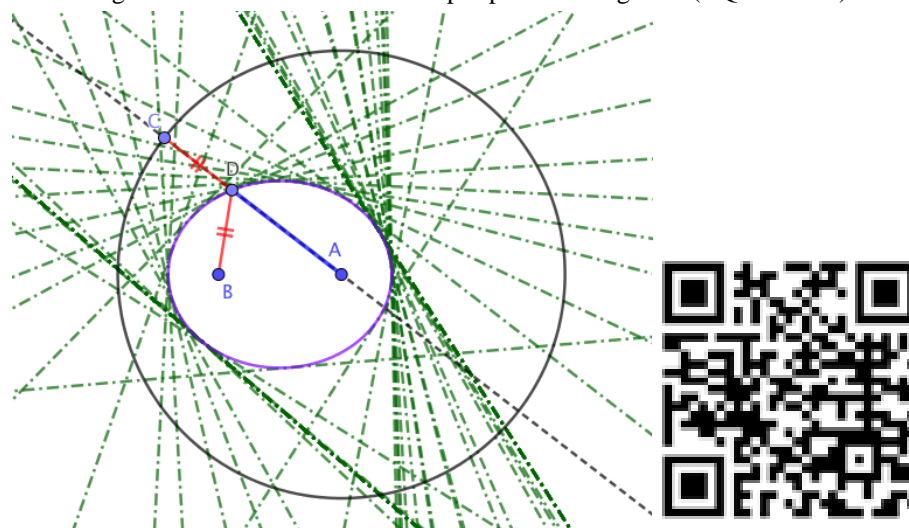
No décimo quinto encontro, a produção de significado parte de uma atividade indicada por Bruno. Foi proposto que os participantes encontrassem pontos equidistantes entre uma circunferência e um ponto  $P$  em uma folha de papel que continha o desenho das duas formas. Como primeira ação, Guilherme propôs encontrar “os pontos médios entre  $P$  e a circunferência”, seguida da operação de dobrar a circunferência, de modo que o ponto coincidisse com um ponto da circunferência (Figura 109). Fazendo uma leitura da ação e da operacionalização, é possível realizar uma leitura de que o sujeito pretendeu determinar o ponto médio entre o ponto  $P$  e um ponto da circunferência.

Em seguida, William propôs fazer uma dobra passando pelo centro e um ponto da circunferência, de modo a determinar um raio; assim, a interseção desse raio com a mediatriz determinaria um ponto equidistante desejado. Após encontrar o primeiro ponto, Guilherme já visualizou que o conjunto de pontos resultaria em uma elipse. Ou seja, Guilherme constituiu o objeto elipse por aquela construção. Enquanto um dos meninos continuou fazendo as dobras no papel, Guilherme fez um esboço no quadro da construção, porém a elipse não era evidente para os participantes; por isso, Bruno reproduziu as ações para determinar um ponto e, em seguida, para determinar os outros pontos, utilizou a ferramenta Locus do Geogebra, permitindo visualizar a elipse. Ao perguntar sobre o que era a mediatriz, Guilherme a constituiu como a tangente da elipse. Guilherme ficou surpreso quando Bruno explicou que, fazendo as mediatrizes, é possível visualizar a elipse (Figura 110). A surpresa de Guilherme pode ser lida pela constituição do objeto elipse pelas interseções do raio e com mediatrizes, e não pelo “contorno” gerado pelas tangentes.

Figura 109 – Simulação de dobra no papel (e QR-Code).



Fonte: Do autor.

Figura 110 – Delineamento da elipse por suas tangentes (e QR-Code<sup>90</sup>).

Fonte: Do autor.

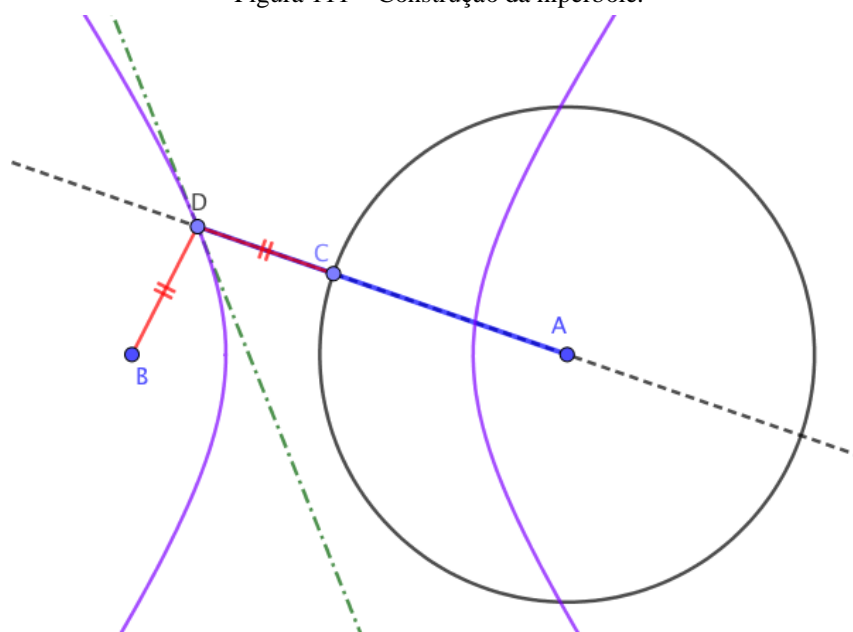
Os modos como Guilherme produziu significado diferem ao decorrer dos encontros, dentro os quais identifiquei três modos: a imaginação, a observação e a manipulação. No primeiro, Guilherme refletiu sobre algo e falou sobre suas ideias, mas não houve auxílio de desenho ou de qualquer outro material. Um exemplo desse modo foi quando Guilherme afirmou que as cônicas saem do cone, no primeiro encontro do Grupo de Estudos, ou seja, ele apenas imagina a situação sem auxílio de outros recursos. O segundo modo foi pela observação, quando ele produziu conhecimento por meio de análise visual de situações, mas não houve interação física com os modelos, ou seja, não houve manipulação. No caso da manipulação, ela ocorreu quando Guilherme se utilizou de desenhos (feitos por ele) ou de gestos para visualizar/descrever uma situação, ou seja, quando apenas as palavras não foram suficientes para produzir significado, sendo essas expressões partes constituintes do objeto. Geralmente, o

<sup>90</sup> Após acessar o *link*, mova o ponto C e observe o comportamento da tangente.

modo de observação ocorreu quando outros participantes manipulavam/construíam um modelo, enquanto Guilherme analisava, fazia inferências ou respondia perguntas. Neste sentido, a constituição da elipse como pontos gerados por interseção ocorreu por meio da manipulação, pois foi Guilherme o agente da operação, tanto dobrando o papel como fazendo o desenho no quadro. Já a constituição da elipse como “contorno” das mediatrizes aconteceu por meio da observação de Bruno, manipulando o modelo no Geogebra.

Neste processo de observação, no décimo quinto encontro, Guilherme concordou que, modificando a posição do ponto ( $A$ ), era possível gerar a circunferência, a elipse e a hipérbole, mas sentiu falta da parábola. Até aquele momento, a constituição dos objetos tinha sido por identificação das formas (assim como no modelo da lanterna) e dos seus elementos e por associação às posições relativas dos elementos operados, ou seja, a forma do lugar geométrico foi identificada como elipse quando o ponto estava interno à circunferência, como hipérbole quando externo e como circunferência quando o ponto coincidia com o centro do círculo diretor. Do mesmo modo, a mediatriz é associada à tangente da cônica, porém essa associação não foi direta nem permanente. Por exemplo, quando Bruno mudou o ponto para fora da circunferência, Guilherme não identificou a reta  $t$  (Figura 111) como mediatriz, pois a construção foi realizada com a região interna.

Figura 111 – Construção da hipérbole.



Fonte: Do autor.

*Guilherme:* O que é essa reta verde?

*William:* A mediatriz.

*Guilherme:* Move o ponto para a posição da elipse novamente [Bruno move o ponto  $A$  para o interior da circunferência]. Ok, *I got it.* (Fonte: E15).

Pela citação, evidencia-se como, inicialmente, os elementos que constituem o objeto hipérbole foram o ponto externo a um círculo e a curva, só depois é que a mediatriz foi incorporada ao objeto.

O que diferencia a constituição da parábola das outras curvas, neste modelo, foi o elemento impróprio operado, ou seja, para as três curvas (circunferência, elipse e hipérbole), os elementos operados foram os focos (ponto interno/externo à circunferência e seu centro), o círculo diretor e a mediatriz, sendo todos elementos próprios. Já na parábola, William lembra que um dos seus focos é impróprio, por isso sugeriu afastar o ponto (*A*) “infinitamente”. Porém, pela observação do modelo, ele inferiu que o lugar geométrico formado não era uma parábola. Em seguida, Guilherme sugeriu colocar o centro da circunferência impróprio. Feita a ação, Bruno pergunta:

*Bruno*: O que é isso [apontando para a linha da circunferência, Figura 112]?

*Rafael*: Uma reta.

*Bruno*: E que reta é essa na parábola?

*Guilherme*: E na parábola tem reta? É o eixo?

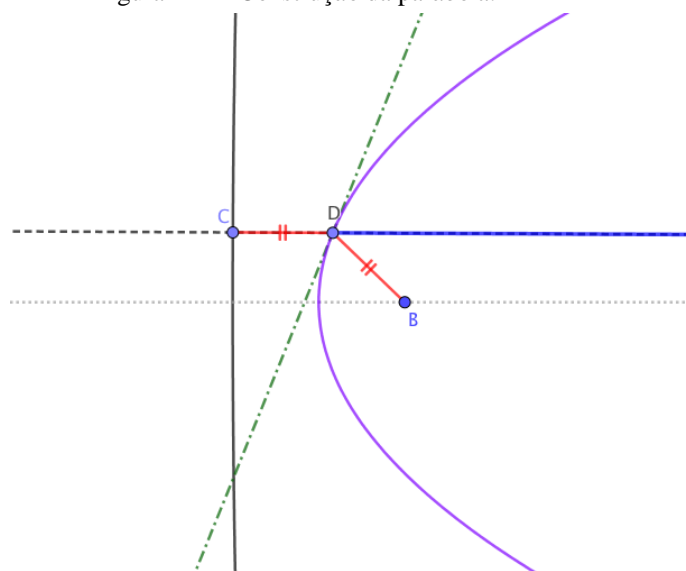
*William*: É a diretriz.

*Guilherme*: Diretriz na parábola?

*Bruno*: Isso! Você sabia que a parábola tem diretriz?

*Guilherme*: Não sabia<sup>91</sup>.

Figura 112 – Construção da parábola.



Fonte: Do autor.

Neste trecho, evidencia-se que Guilherme não constituía a diretriz como elemento da parábola, sendo esse fato legitimado pela afirmação de Bruno. Posteriormente, outros

<sup>91</sup> É importante destacar que, até o décimo quinto encontro, não havia se falado de diretriz das cônicas, apenas de diretriz da superfície cônica.

significados são produzidos para a diretriz no contexto das seções cônicas. Porém, antes dessa abordagem, Bruno caracterizou a elipse como um lugar geométrico cujo elemento diretor é uma circunferência e todos os pontos desse lugar são equidistantes dela e de um ponto interno ao círculo. Depois afirmou que, se a circunferência corresponde à reta da parábola, então ela tem a mesma lei de geração. Ao questionar os participantes qual é a lei, Guilherme e os outros se mantiveram em silêncio, evidenciando o não compartilhamento de interlocutores com Bruno, o que foi confirmado pela fala de Guilherme: “Eu não entendi a comparação disso com a parábola”. Seguiu-se o questionamento por parte de Bruno sobre o significado produzido para a elipse enquanto lugar geométrico, porém não se obteve resposta. Apenas ao questionar o que ele tinha pedido para fazer com a circunferência e o ponto no papel é que Guilherme começou a sistematizar.

*Guilherme:* A gente tem que definir a elipse a partir do que a gente fez. O que a gente fez? A gente fez as mediatrizes. Mediatrizes de quem? De um ponto interno à circunferência aos pontos da circunferência.

*Bruno:* E como foi que você achou esse ponto [D]?

*William:* Juntou com o centro... o raio.

*Bruno:* Isso, você ligou esse cara [C] com o centro. Então o que eu posso afirmar desse ponto aqui [D]?

*William:* Ele equidista... da reta...

*Bruno:* Que reta?

*William:* É que eu estava [pensando] na parábola. Ele equidista da circunferência e do centro.

*Guilherme:* Não, do centro? Do ponto, porque ele faz parte da mediatriz<sup>92</sup>.[...] Ele equidista do ponto da circunferência e do outro foco da elipse.

*William:* [observa a tela do computador e pensa alto] Por que ele equidista? Porque ele está...

*Guilherme:* Na mediatriz. E ele é a interseção da mediatriz com o raio.

*Bruno:* Então a elipse é o quê? [fica um momento em silêncio, depois eles riem].

*Guilherme:* Você quer que eu fale que é as interseções das mediatrizes do ponto com a circunferência com os raios...

*William:* O lugar geométrico de equidistância<sup>93</sup> da circunferência com o ponto?

*Bruno:* Isso, amém! Indo para a parábola?

*William:* É o lugar geométrico dos pontos que equidistam da diretriz e do foco.

*Bruno:* Do ponto e uma reta [Guilherme faz uma cara de surpresa e sorri].

*William:* Ah, entendi, porque para a elipse o elemento diretor é a circunferência, para a hipérbole também e para a parábola é a reta.

*Bruno:* O nome desse círculo é círculo diretor e geralmente é visto separadamente na parábola, mas na verdade o círculo diretor é o “equivalente” à reta diretriz da parábola. Certo? [Guilherme faz um sinal de positivo com o polegar]. (Fonte: E15).

Pelo extrato, é possível fazer a leitura de que, inicialmente, as atividades que Bruno e Guilherme estavam operando foram distintas, pois, para Guilherme, encontrar as interseções

<sup>92</sup> A expressão “faz parte da mediatriz” pode ser lida, dentro do contexto, como “faz parte da construção da mediatriz”.

<sup>93</sup> No extrato, a expressão “lugar geométrico de equidistância” se refere ao “lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes”.



entre a mediatriz e o raio caracterizou a atividade, visto que esse significado foi o mais recorrente em suas enunciações. Já para Bruno, o contexto se caracterizou como uma ação para atender a atividade de encontrar os pontos equidistantes entre um ponto e uma circunferência. Neste sentido, se as atividades são distintas, logo, o CS é distinto e, conseqüentemente, o objeto também. Apenas quando William constitui a parábola como um lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes à diretriz e ao foco (reta e ponto, complementado por Bruno) é que Guilherme expressa constituí-los como interlocutores.

Neste processo de observação, as expressões gráficas foram importantes para produzir determinados significados. A exemplo disso, quando Bruno perguntou qual o raio do círculo diretor, Guilherme inferiu:

*Guilherme:* É o segmento  $\overline{AD}$  [Figura 113a].

*Bruno:* Certo, e o que isso tem a ver com a elipse?

*William:* É duas vezes  $\overline{CA}$ .

*Guilherme:* Não é duas vezes  $\overline{CA}$ .

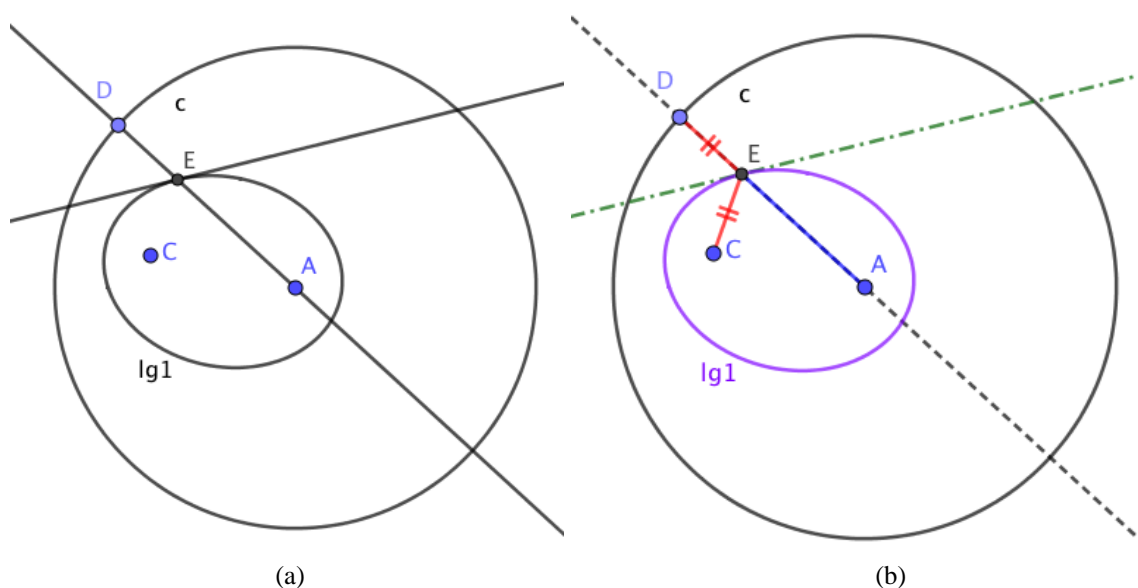
*Bruno:* Esse ponto ( $E$ ) é equidistante a quê?

*Guilherme/William:* A  $C$  e a  $D$ .

*Bruno:* Isso quer dizer que essa medida [delimita com os dedos o segmento  $\overline{CE}$ ] é igual a essa [delimita com os dedos o segmento  $\overline{DE}$ ]. E o raio é o quê? [Os participantes permanecem em silêncio, então Bruno faz umas modificações no modelo do Geogebra [Figura 113b].

*Guilherme:* O meu raio é esse  $\overline{CE}$  mais alguma coisa... ah! É o outro foco, o meu raio é a soma do coisinha... aquele lance da elipse... é o... ah! É o eixo maior [Bruno espalma a mão na de Guilherme]. (Fonte: E15).

Figura 113 – Diferenciação de cores e traçados na construção da elipse.



Fonte: Do autor.

Nesta situação, Guilherme produz significado para os resíduos de enunciação do modelo no Geogebra quando houve diferenciação de estilos e cores das linhas. Com isso,

quando Guilherme disse: “o meu raio é  $\overline{CE}$  mais alguma coisa”, é possível fazer a leitura de que os segmentos em vermelho com duas barras são interpretados como segmentos congruentes e esse “alguma coisa” é o segmento azul, o qual é, em seguida, interpretado como o outro raio focal. Além disso, ao considerar que o raio do círculo diretor é igual ao eixo maior, o conhecimento produzido se justifica na discussão do décimo primeiro encontro, quando William enuncia:

*William:* Elipse é o conjunto de pontos cujo...

*Guilherme:* A soma das distâncias dos focos é igual.

*William:* Isso.

*Bruno:* Perceba a frase que você falou: “cuja a distância dos focos é igual”.

*William:* É que dá pra entender que você está falando da distância *entre* os focos. [...] E é a distância do ponto até o foco.

*Guilherme:* Desse ponto [põe o giz sobre a linha do desenho da elipse] à soma dos focos [move o giz para os pontos que correspondem aos focos no desenho a partir do ponto da curva], né?

*Bruno:* O que você está pensando está certo, mas o que você está dizendo está estranho.

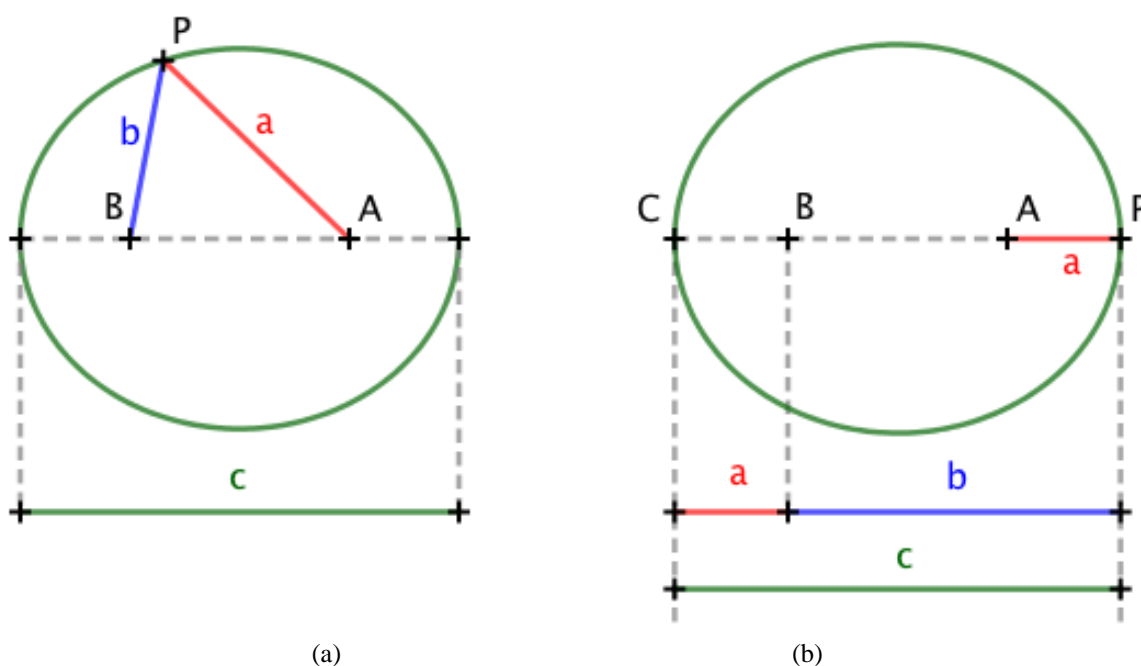
*Rafael:* Esse [faz um segmento ligando um ponto da curva ao foco] é igual a esse [faz outro segmento ligando o ponto da curva ao outro foco].

*William:* Não, a soma delas é constante. [Guilherme vai ao quadro, nomeia os segmentos de  $a$  e  $b$  e escreve a expressão  $a + b = \text{sempre}$ ]. Você soma a medida de  $a$  com a medida de  $b$  e varia o ponto ao longo da curva.

*Bruno:* Isso é verdade para todas as curvas? Vamos ver, quem é “sempre”? [Guilherme apaga o termo “sempre” e substitui por  $c$ ] Mas quem é  $c$ ?

*Guilherme:* É tudo [passa o giz em todo o segmento correspondente ao  $c$  da Figura 114a], não é? Pensa comigo: se meu ponto for aqui [ $P$  da Figura 114b], o que é que eu vou estar somando?  $B$  até aqui [ $P$ ] mais  $A$  até aqui [ $P$ ]. Como  $A$  até aqui [ $P$ ] é igual a  $B$  até aqui [ $C$ ], então vai ser tudo [faz o segmento correspondente a  $c$  da Figura 114]. (Fonte: E11).

Figura 114 – Relação da soma dos raios vetores de uma elipse.



Fonte: Do autor.

Nesta situação, a legitimidade da afirmação decorre da própria operação lógica e gráfica dos objetos da elipse. Já no caso do 15.º encontro, a justificação procede de uma associação a uma legitimidade assumida. Ou seja, a justificação em um acontecimento passado esteve associada aos seguintes elementos constituídos no presente (no momento em que o conhecimento foi produzido): raios focais, soma e elipse, os quais foram os elementos operados no 11.º encontro.

Prosseguindo, Guilherme expressa constituir Bruno como interlocutor ao complementar sua fala, seguindo para a generalidade dos elementos na hipérbole.

*Bruno:* A gente sabe que a soma dos raios focais é uma constante porque a gente tinha determinado que a elipse é a soma... veja outra característica que a gente está agregando [Enquanto Bruno fala, Guilherme diz: sensacional]. No caso, o círculo diretor ter por raio a medida do eixo maior, por isso que na parábola ele vai ser...

*Guilherme:* Infinito, porque é uma reta diretora! E na hipérbole?

*Bruno:* Vamos ver. William põe o ponto  $[B]$  para fora da circunferência. [...] Coloca tudo paralelo [William posiciona o ponto  $C$  de modo que o raio que passa por ele seja paralelo à mediatriz, Figura 115a]. Lembra que a interseção da mediatriz com o raio vai dar o ponto da curva [Guilherme acena com a cabeça em sinal afirmativo]. Então quando essas duas retas estiverem paralelas, o que é que acontece?

*Guilherme:* Vai ser impróprio.

*Bruno:* Vai ser impróprio, que é justamente o ponto  $[D]$ , e a tangente vai ser a assíntota [Guilherme acena novamente com a cabeça em sinal afirmativo]. Mas voltando, na elipse a gente viu a soma dos raios vetores e aqui na hipérbole [Guilherme move o ponto  $C$  para observar, mas não faz nenhuma inferência, Bruno move o ponto novamente para dentro da circunferência]. Esses são os raios vetores na elipse e eu sei que a soma deles é igual ao eixo maior. E quando esse ponto  $[B]$  estiver fora [Bruno move o ponto para fora da circunferência]? Essa distância  $[\overline{DA}]$  da Figura 115] é a distância do ponto  $[D]$  para o foco  $[A]$ .

*Guilherme:* É ao mesmo tempo ela é o “coiso”... porque o vermelho está no mesmo que o azul.

*Bruno:* E o que é que vai ser o raio dessa circunferência?

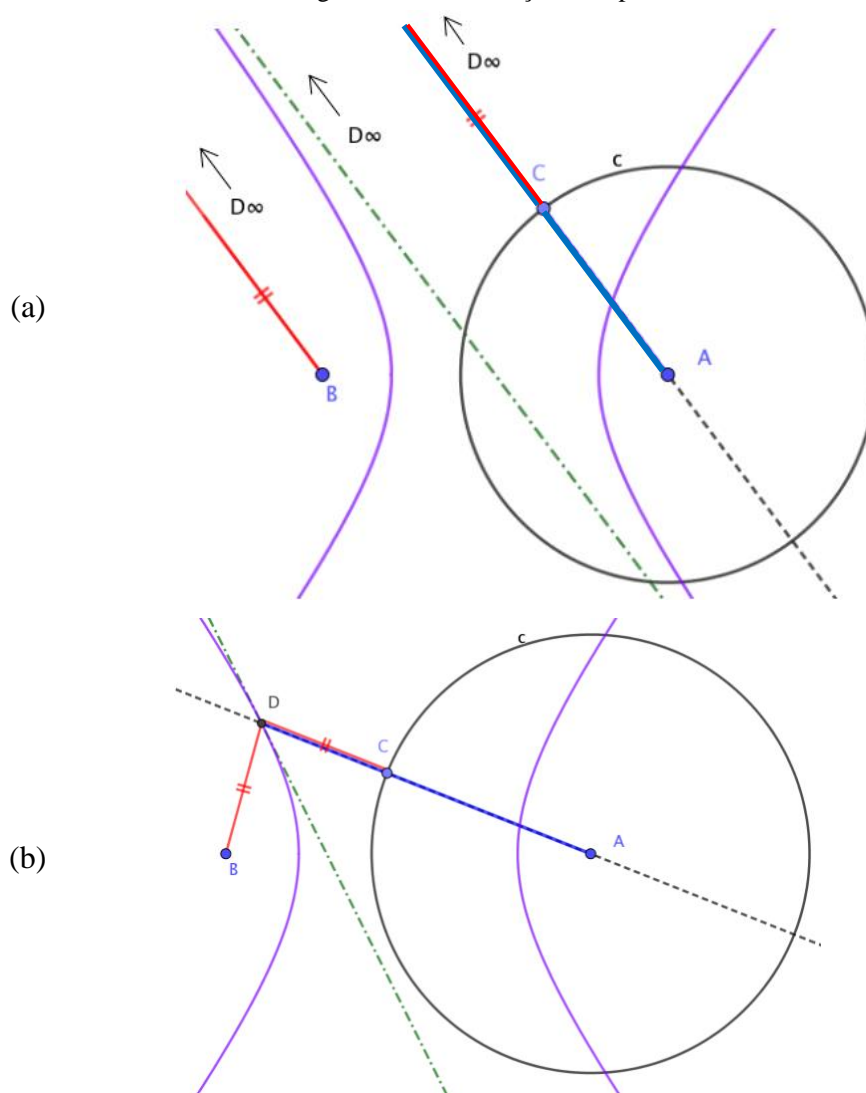
*Guilherme:* É a subtração [Bruno espalma a mão de Guilherme em concordância].

*Bruno:* E a gente chega a outra caracterização daquela fórmula da hipérbole que a gente tinha feito por projetiva<sup>94</sup> e agora a gente fez por euclidiana. (Fonte: E15).

---

<sup>94</sup> Bruno se refere à demonstração de que a soma dos raios vetores é igual ao eixo maior na elipse e corresponde à diferença (em módulo) das distâncias do ponto da curva aos focos na hipérbole discutida no encontro E12.

Figura 115 – Construção da hipérbole.



Fonte: Do autor.

A produção de significado para o raio da circunferência da hipérbole se deu pela analogia com a elipse, pois inicialmente, quando Guilherme movimentou o ponto  $C$ , não produziu nenhum significado, porém quando Bruno moveu o ponto para dentro da circunferência, destacou os elementos e retornou com o ponto para fora. Guilherme identifica o raio do círculo diretor como a subtração do segmento vermelho do azul. Nesta situação, a diferenciação das cores evidenciou a sobreposição dos segmentos.

Em seguida, Bruno conduz a discussão para analisar as diretrizes no modelo da seção cônica, não caracterizando mais o Movimento das Construções das cônicas. O Movimento retorna ao último encontro (vigésimo segundo), quando Guilherme e Rafael comentam sobre a prova da disciplina de Desenho Geométrico, em que houve uma questão solicitando a construção de uma cônica. Diferente do 15.º encontro, o processo construtivo foi induzido dentro do contexto de lugar geométrico, porém a atividade não era a de construir uma cônica,

mas sim a de encontrar pontos equidistantes entre uma circunferência e um ponto. Só após legitimarem a forma dos lugares geométricos é que se exploraram determinadas propriedades envolvidas na construção. No 22º encontro, a proposição foi justificar a construção das cônicas.

Inicialmente, Guilherme apresentou a construção da parábola, constituindo-a por uma lei de geração em que “a distância do foco até o ponto da parábola é a mesma distância do ponto da parábola até a diretriz” (Fonte: E22). É importante destacar que, no 15.º encontro, a construção das cônicas foi caracterizada pela determinação do lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes a um ponto e uma circunferência (que, na parábola, se degenera em uma reta), porém a característica apontada no 22.º encontro me permite fazer a leitura de que esta não é (neste momento) uma característica considerada para todas as cônicas, mas sim para a parábola, pois seria essa a sua lei de geração. Neste sentido, o objeto foi constituído independentemente das demais curvas (característica do 1.º Movimento).

Outro dado importante é que, ao explicar como se constrói a parábola, Guilherme se utiliza do desenho para ilustrar a sua justificação (assim como em todos os desenhos no quadro em outros Movimentos), não havendo a necessidade do rigor na construção (utilizando régua e compasso, por exemplo), mas sim da sua justificação. Isso evidencia como o próprio desenho feito a mão e giz já validava as propriedades.

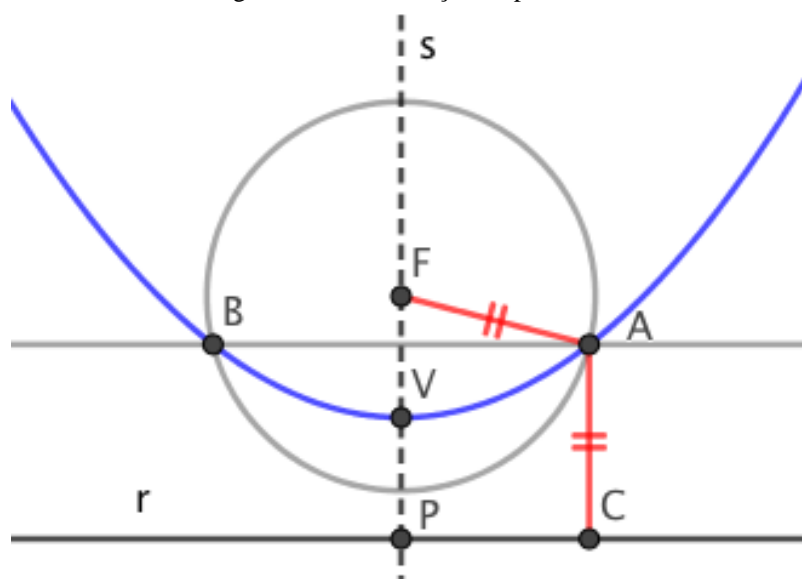
Na descrição detalhada, é possível fazer a leitura do objeto parábola constituído naquela atividade por Guilherme.

*Guilherme:* Eu tenho a reta  $r$ , e daí eu peguei um ponto  $F$  qualquer, claro para considerar ele o meu foco e aí eu pego o ponto médio entre o ponto  $F$  e o ponto de interseção da reta que passa por  $F$  perpendicular a  $r$ , vou chamar de  $P$ . Vou chamar a reta de  $s$  e o ponto médio eu vou chamar de  $V$ , que misteriosamente ele é vértice [tom irônico]. Por quê? A distância do foco até o ponto médio é igual à distância do ponto médio até a reta  $r$ , que eu vou chamar de diretriz. Aí se eu pensar no desenho da parábola como ela é no papel, ela é sempre simétrica em relação a um eixo. Então se eu traçar uma reta na horizontal, ela vai traçar dois pontos [Figura 116].

*Bruno:* E como tem que estar essa reta?

*Guilherme:* Paralela à diretriz. Então como eu ainda não tenho uma parábola, eu vou passar paralelas à minha diretriz... duas tá bom, porque eu vou encontrar cinco pontos [dois em cada paralela e o vértice]. O que eu tenho lei de geração da parábola: a distância do foco até o ponto da parábola é a mesma distância do ponto da parábola até a diretriz. Daí vem a ideia da reta paralela, porque qualquer ponto que eu pegar da minha reta paralela ela vai manter a distância da reta diretriz. Então os dois pontos que pertencem a minha parábola, independente de onde esteja na paralela, têm essa distância para a diretriz, então só falta encontrar a mesma distância do foco. O que é que eu faço? Eu pego a distância da minha reta até a diretriz [marca com o giz a distância  $d$ ], aí a partir do foco, eu abro uma circunferência. A interseção da circunferência vão ser os meus pontos da parábola (Fonte: E22)

Figura 116 – Construção da parábola.



Fonte: Do autor.

Em sua descrição, Guilherme constitui a parábola como uma figura plana, simétrica em relação ao eixo, que possui foco, diretriz, vértice<sup>95</sup> e pontos equidistantes ao foco e à diretriz. Além disso, são elementos da construção a paralela e a circunferência.

Após esse momento, Bruno conduz os participantes a deduzirem uma segunda maneira de construção. Nela, os participantes partem da análise da característica do ponto da parábola determinado pela interseção da circunferência e da paralela na construção anterior. O significado produzido para esse ponto foi o de que ele é equidistante ao foco e à diretriz, porém quando Bruno perguntou novamente a quais elementos ele é equidistante, destacando o ponto sobre a diretriz, William produz significado na mesma direção que Bruno ao afirmar: “encontrar as mediatrizes do foco e dos pontos da diretriz que são as tangentes da curva” (Fonte: E22). Contudo, eles percebem que apenas a tangente não seria suficiente. Na tentativa de encontrar alguma relação, William e Guilherme fazem várias inferências em relação ao desenho da primeira construção sem nenhum sucesso. Apenas quando Bruno pede para analisar o que está faltando de um desenho para o outro é que William (depois de mais outras inferências não validadas) percebe que o segmento  $AB$  é perpendicular a  $r$ , sendo  $A$  determinado pela interseção da mediatriz de  $F$  e  $B$  com o segmento  $AB$ . Nesta situação, a produção de significado decorre das associações entre dois desenhos: o da primeira construção (Figura 116) e o da segunda, que estava em processo de produção.

<sup>95</sup> O vértice é constituído como o ponto médio do segmento que liga o foco à diretriz perpendicularmente.

Esse processo de associação também ocorre para a elipse, pois Guilherme inicialmente conhecia os passos de construção, porém não sabia justificar matematicamente. Desse modo, a elipse também foi constituída por Guilherme como um objeto de um Campo Semântico que possui um núcleo formado por estipulações locais particulares da elipse e não das curvas cônicas, por isso é um objeto “independente” das outras curvas. Pelo extrato, é possível observar Guilherme descrevendo os seus elementos:

*Guilherme:* Eu tenho  $F1$  e  $F2$ , eu tenho  $2a$ , que eu nem sei quem é. Eu sempre me perguntei:  $2a$  tem que ser maior que a distância entre os focos, mas quem é  $a$ ? Ninguém. Então eu poderia chamar só de  $a$  ou...  $b$ . Então  $2a > F1F2$ , isso não precisa decorar porque, se você fizer menor na hora que você for traçar, você vai ver que não vai dar, então não é decoreba. Mas eu não sei que é  $2a$ , eu sei porque não vai dar, porque é visível que não vai dar, não vai virar uma elipse, vai virar uma hipérbole. Porque se você tem que  $2a > F1F2$ , você vai para o primeiro passo: traçar uma circunferência com raio  $2a$  em  $F1$ . Aí você pega um ponto arbitrário [da circunferência] e traça [para  $F1$  e  $F2$ ], aí você tem o raio da circunferência em  $F1$  [segmento  $\overline{AC}$  da Figura 117] e você traça a mediatriz aqui [entre  $C$  e  $B$ ] e o ponto que ela tocar [o raio] é o ponto da curva.

*Bruno:* Mas você não sabe por que nada disso é isso?

*Guilherme:* Em nome de Jesus, eu não sei.

*Bruno:* E se eu te disser que a gente já fez isso aqui [no Grupo de Estudos]?

*William:* A gente fez sim, com o Rafa dobrando as coisas lá.

*Guilherme:* É... foi... beleza... eu sei disso, eu lembro disso, que ficou errado depois, que eu comecei a pegar esse ponto [interseção da mediatriz com  $r2$ ], esse ponto aqui [interseção da mediatriz com a circunferência].

*Bruno:* Então o que é que ele está fazendo?

*Guilherme:* Ele quem?

*Bruno:* O que é que esse procedimento está fazendo?

*Guilherme:* [Fica um momento em silêncio] Uma elipse [todos riem].

*William:* Definindo as tangentes.

*Bruno:* E o que são as tangentes?

*William:* São as mediatrizes de  $P$  e  $F2$ .

*Guilherme:* Ah, essas são as tangentes [aponta para a mediatriz]? Que legal.

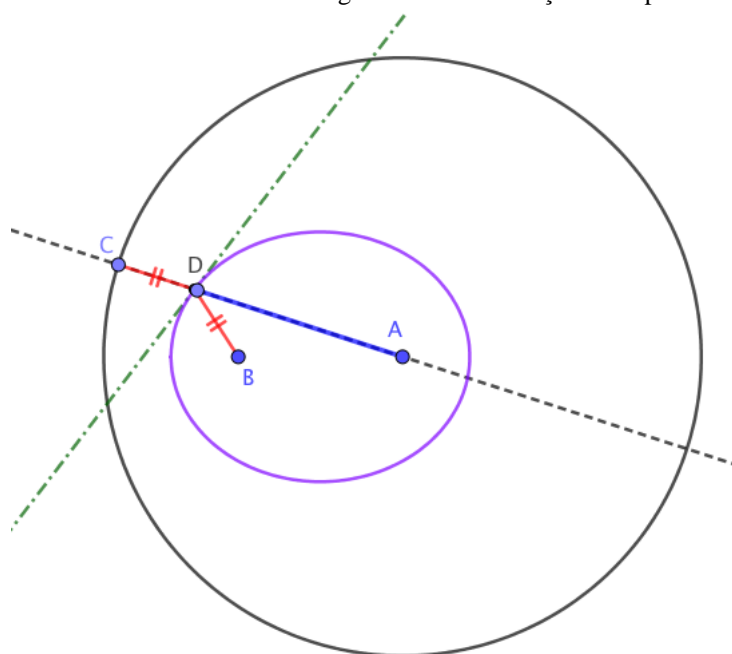
*Bruno:* Com o que é que isso se assemelha?

*Guilherme:* Com o que a gente acabou de fazer, faz lá a da parábola para a gente ver. (Fonte: 22).

Pelo extrato, a elipse foi constituída inicialmente por dois focos, uma circunferência de raio  $2a$  e pelas interseções de mediatrizes e raios. Apesar de operar com os mesmos elementos do modelo operado no 15.º encontro, Guilherme não associa os modelos. Este fato evidencia que ele constitui objetos distintos e não associados entre os modelos, pois as atividades em que Guilherme estava envolvido nas duas situações eram diferentes, ou seja, o mesmo que ocorreu com a parábola. Um fator que considero ter influenciado nesta não associação é o fato de Guilherme, no 15.º encontro, ter produzido conhecimento por meio de um processo de observação. Já no 22.º encontro, sua produção se deu por meio da manipulação, ou seja, foi ele quem fez os desenhos e realizou as articulações. Além disso, os passos de construção apresentaram por justificação a disciplina de Desenho Geométrico; desse modo, as

ações descritas distinguem-se, caracterizando atividades distintas. Na primeira (no 15.º encontro), a atividade era determinar pontos equidistantes entre o ponto e uma circunferência, tendo como ações determinar o ponto médio entre o ponto interno (um ponto  $d$ ) e a circunferência e determinar as mediatrizes, as quais já são constituídas como tangentes da elipse. No caso do 22.º encontro, a atividade é reproduzir os passos de uma construção, os quais, apesar de tratarem dos mesmos elementos, recebem outros significados: o ponto e o centro já são tomados como focos, a mediatriz não é considerada inicialmente uma tangente, a medida  $2a$  é um dado fornecido inicialmente. Já no outro modelo, o raio da circunferência é significado como a soma dos raios vetores.

Figura 117 – Construção da elipse.



Fonte: Do autor.

A associação só ocorre entre os modelos produzidos no mesmo encontro, ou seja, ao solicitar que Bruno fizesse o desenho da construção da parábola, Guilherme começa a fazer associação entre os modelos. Contudo, foi Bruno quem fez o desenho para ser associado, já colocando a notação de alguns pontos correspondentes, e Guilherme e William deduziram os pontos impróprios.

É importante destacar que Guilherme fez associação entre as duas construções (da parábola e da elipse) quando operaram no CS projetivo, pois alguns dos elementos presentes na construção da elipse são impróprios na construção da parábola.



*William:* Então essa reta ortogonal a  $P$  [ $\overrightarrow{PC}$  da Figura 118 à direita] na verdade é a reta  $\overrightarrow{PF1}$  [à esquerda]?

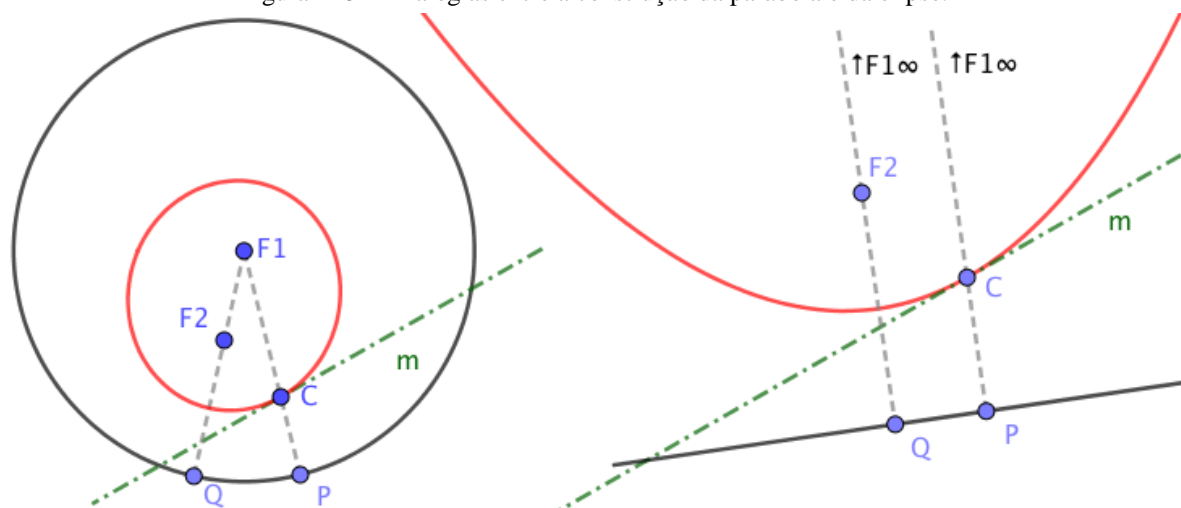
*Guilherme:* É! Cadê o segundo foco da parábola? No impróprio.

*Bruno:* Então tem que estar sobre essa reta  $[a]$ . E onde é que ele vai encontrar? Aqui [na elipse], você não sabe que os focos estão alinhados com o vértice? Então onde está o vértice aqui [na parábola]? Quando eu alinhar vértice com foco...

*Guilherme:* Uau, eles vão se encontrar no além, my Gosh.

*William:* O fato dele fazer essa reta  $[a]$  ortogonal é justamente ele ligar o  $P$  com  $F1$  [na elipse]. (Fonte: E22).

Figura 118 – Analogias entre a construção da parábola e da elipse.



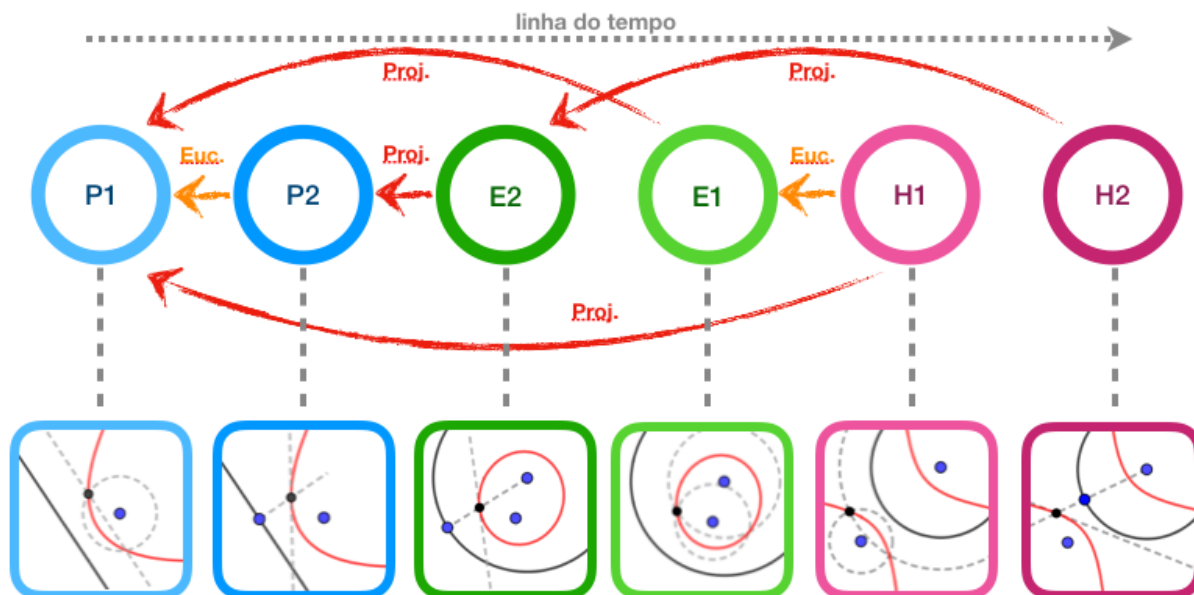
Fonte: Do autor.

Esta analogia entre os elementos dos modelos também ocorreu na construção da hipérbole. Para as três curvas (parábola, elipse e hipérbole), foram explorados dois métodos construtivos. No primeiro, os pontos das curvas foram determinados pelas interseções de lugares geométricos dos pontos do plano que são equidistantes (LGE), tomando por referência um ponto (correspondente a um dos focos) e o elemento diretor da curva, ou seja, a circunferência para a elipse e a hipérbole; e a reta (que projetivamente correspondeu à circunferência de centro impróprio) para a parábola, cujos LGE são, respectivamente, uma circunferência e um par de circunferências concêntricas e equidistantes, ou um par de paralelas equidistantes quando for a reta (que também correspondem projetivamente às circunferências de centros impróprios). O segundo método tem por referência a interseção de um dos raios focais e a mediatriz entre o outro foco e um ponto do elemento diretor.

No processo de analogia, apenas na parábola foram realizadas associações entre os métodos 1 e 2 (Figura 119). As demais associações ocorreram entre curvas diferentes para um mesmo método. Nem todas as analogias desse Movimento envolveram características projetivas, pois para tal, seria necessário que os elementos associados fossem impróprios para uma das curvas. Neste sentido, tanto as associações entre os métodos 1 e 2 da parábola como

entre o método 1 da elipse e da hipérbole não envolveram relações projetivas, apenas euclidianas.

Figura 119 – Esquema de analogias entre os métodos construtivos das cônicas<sup>96</sup>.



Fonte: Do autor.

Terminada a análise dos encontros, gostaria de fazer uma...

### *Síntese dos Movimentos...*

... destacando algumas das suas características e outras gerais.

A partir do histórico dos objetos, foi possível observar como a noção de curvas se desenvolveu do ponto de vista das produções de significado de Guilherme ao longo dos encontros do Grupo de Estudos. O quadro abaixo (Quadro 3) ilustra a distribuição dos Movimentos ao longo dos encontros. Por ele verificamos que não houve uma linearidade, porém houve a predominância dos Movimentos de Seções Cônicas e Cônicas Projetivas. Do mesmo modo, as Cônicas Independentes se expressaram em diferentes momentos, mostrando que o fato de Guilherme considerar as cônicas como “uma coisa só” não impediu que fossem operados objetos que não expressaram a generalidade das curvas.

<sup>96</sup> As notações *P*, *E* e *H* correspondem aos métodos aplicados à parábola, elipse e hipérbole, respectivamente. Os índices 1 e 2 correspondem ao primeiro ou segundo tipo de método construtivo aplicado às cônicas.

Quadro 3 – Expressão dos Movimentos ao longo do Grupo de Estudos.

Encontros <sup>97</sup>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Mov. 1																						
Mov. 2																						
Mov. 3																						
Mov. 4																						
Mov. 5																						
Mov. 6																						
Mov. 7																						

Fonte: Do Autor.

Outra característica importante foi a constituição dos objetos que ocorreu mediante os elementos operados em cada Movimento, por exemplo, ao realizar o estudo sobre a posição dos vértices e dos centros para todas as cônicas, foi possível observar uma característica generalizada. Os objetos constituídos estão diretamente ligados aos modelos e à estrutura semântica envolvida. Neste sentido, como afirma Lins (2012), ao se operar em CS diferentes, são constituídos objetos distintos. Desse modo, não houve um único objeto, mas a noção de curvas cônicas foi composta por todos os objetos das cônicas, que se expressaram nos diferentes Movimentos, constituindo um corpo: *Curva Cônica*.

Este corpo englobou basicamente os quatro tipos de curvas cônicas, as quais inicialmente apresentavam características particulares, mas depois são generalizadas como seções cônicas e posteriormente distinguidas entre seções e curvas cônicas pelo estudo da natureza das linhas. Apesar da generalidade, suas particularidades, que se mostraram como legitimações enraizadas, apareciam em meio às novas informações e produções de significado. Dentre essas legitimações, destaca-se que os tipos de cônicas mais tratados foram a elipse e a parábola, as quais serviram de base para analogias para as outras cônicas.

Para Guilherme, mesmo produzindo significados teóricos de que a hipérbole é uma única curva, a expressão gráfica está carregada da legitimidade enraizada da hipérbole como duas parábolas. Do mesmo modo, não é unânime que a parábola e a hipérbole sejam fechadas; elas são, mas dependendo do contexto.

Os significados distintos mais presentes para os tipos de curvas cônicas foram:

- Circunferência como conjunto de pontos equidistantes ao centro;
- Parábola como conjunto de pontos equidistantes do foco e da diretriz;

<sup>97</sup> Nesta tabela, as colunas dos encontros (nomeadas na primeira linha) referem-se também às conversas no WhatsApp e aos relatos nos diários prévios a cada reunião. A exemplo disso, a coluna 2 corresponde aos movimentos expressos em todos os ambientes de produção de dados a partir do final do primeiro encontro até o final do segundo encontro.

- Elipse como o conjunto dos pontos cuja soma das distâncias dos focos ao ponto da curva é constante;
- Hipérbole como duas parábolas.

É importante destacar que o significado apontado da hipérbole não foi o único produzido, mas sim o mais expresso. Outros também foram expressos, como o conjunto de pontos cujo módulo da diferença das distâncias do ponto da curva aos focos é constante. Dentre as cônicas, as mais operadas foram a elipse e a parábola para fazer as analogias.

Outro dado é o fato de que, na maioria das vezes em que as cônicas foram operadas no plano, as suas características particulares eram destacadas, e isso está diretamente ligado à sua expressão gráfica.

Os significados que generalizaram as curvas compreenderam:

- Cônicas como curvas planas fechadas resultantes de uma seção cônica;
- Lugares geométricos dos pontos do plano que são equidistantes a um ponto e uma circunferência.

A noção de ponto impróprio foi importante para o estudo das generalidades dos elementos e dos métodos construtivos das cônicas, pois foi por meio dessa noção que situações usualmente apresentadas como distintas puderam ser tratadas como análogas. A característica de generalidade se estabeleceu tanto no Movimento das Seções Cônicas como no das Cônicas Projetivas, por meio dos modelos operados (Vista da Seção Cônica, Geogebra 3D e Plano Projetivo). Nesses modelos, destaco os elementos generalizadores: ponto impróprio da curva como local onde a curva fecha; e posição relativa dos focos.

Os Movimentos perpassaram três abordagens: seção cônica, estudo analítico e construções. As duas últimas restringiram-se ao estudo em um espaço bidimensional das curvas, já o primeiro envolveu modelos de situações tridimensionais, assim como de espaço bidimensional para compreender aspectos tridimensionais. Neste último, houve o caso da Vista da Seção Cônica, em que os elementos operados foram tratados como objetos do plano.

Dentre os modos de produção, classifico-os como: imaginação, observação, manipulação. Dentre esses modos, foi observado que o Imaginativo envolveu mais rememorações. E, dentre os modos, o de manipulação foi o que melhor apresentou retorno de informações, ou seja, os significados que foram internalizados e citados em outros encontros referiam-se, em sua maioria, a situações em que Guilherme estava manipulando com as expressões. No caso do primeiro e do segundo Movimento, os modos de produção de significado restringiram-se à imaginação. Nos demais, não houve um padrão.

Sobre os modos de expressão/enunciação, destaco:

- Natural Escrito;
- Natural Oral;
- Gestual;
- Gráfico;
- Algébrico.

Com relação à expressão gráfica, a diferenciação de cores contribuiu para a produção de significado por Guilherme. Neste sentido, considero que deve ser um elemento a ser levado em consideração ao se elaborar um modelo.

Dentre os modelos operados ao longo dos Movimentos, destaco os seguintes:

- Lanterna;
- Vista da Seção Cônica;
- Seção Cônica (Geogebra);
- Plano Euclidiano;
- Plano Projetivo;
- Plano Cartesiano.

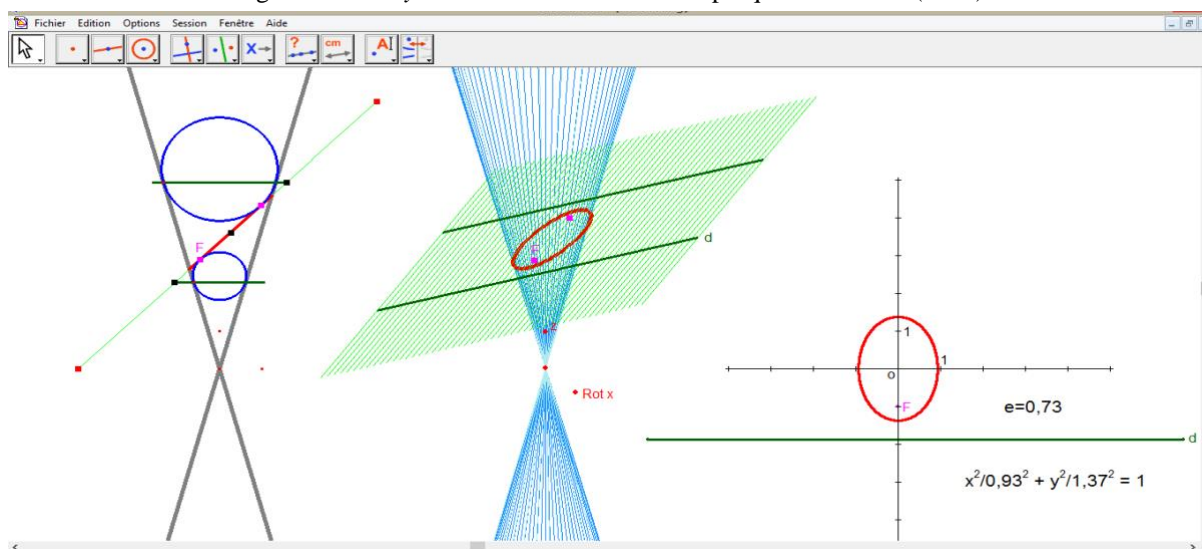
Os elementos considerados comuns para todas as cônicas foram:

- 2 focos;
- 4 vértices;
- 2 centros;
- 2 eixos de simetria;
- Linha fechada;
- 1 círculo diretor;
- Tangentes;
- Excentricidade;
- Raios vetores;
- Elementos impróprios;
- Regiões interna e externa.

Pesquisas como a de Sousa (2017) sinalizam para problemas com a articulação entre as diferentes abordagens das cônicas. Em seu trabalho, a pesquisadora utiliza um modelo que apresenta cinco modos de expressão presentes no ensino (Figura 120 – *Layout* do Modelo utilizado na pesquisa de Sousa (2017). e Quadro 4), no intuito de analisar como estudantes de Licenciatura em Expressão Gráfica fazem conversões entre as diferentes abordagens. Em suas

considerações, a pesquisadora aponta que ainda há dificuldade dos alunos em estabelecer relações e que isso precisa ser mais aprofundado.

Figura 120 – *Layout* do Modelo utilizado na pesquisa de Sousa (2017).



Fonte: Sousa (2017, p. 84).

Quadro 4 – Caracterização das expressões utilizadas no modelo de Sousa (2017).

REGISTROS FIGURAIS	DEFINIÇÃO CÔNICA	UNIDADES DE SENTIDO	TIPO DE REPRESENTAÇÃO	VARIÁVEIS
	Teorema de Dandelin- Queetelet	Linhas representativas das geratrizes de limite do cone; Linha representativa do plano secante em vista básica; Circunferência representativa do contorno da esfera; Pontos referentes as diretrizes em vista baixa e os focos.	2D/2D Projeção ortogonal	A posição do plano secante; A posição e o diâmetro das esferas; Ponto de tangência das esferas e o plano secante.
	Teorema de Apolônio	Retas representativas das geratrizes do cone; Retas referentes as diretrizes; Paralelogramo achurado representativo o plano secante; A curva; Pontos referentes aos focos.	3D/2D Perspectiva cavaleira	Posição do plano secante e tipo da curva.
	Cartesiana	Retas formando um par de eixos cartesianos graduados; a curva Uma reta representando uma das diretrizes	Gráfico-analítica	Tipo e formato da curva.
$x^2/0,93^2 + y^2/1,37^2 = 1$	Análítica	Letras representativas dos coeficientes da equação ao qual não se conhece e valores numéricos referentes ao posicionamento dos focos e da curva.	Algébrica	Termos e sinais da equação
$e=0,73$	Excentricidade	Letra representativa da relação de excentricidade e valor numérico correspondente a esta relação.	Algébrica	Valor numérico

Fonte: Sousa (2017, p. 84).

Pela pesquisa de doutorado em tela, é possível verificar que não apenas o trabalho de diferentes expressões é suficiente, mas é necessário olhar para o núcleo do CS operado, a fim de identificar quais elementos podem ser associados, pois dependendo do modelo que se opere, não é possível fazer analogias, por tratar de elementos distintos. Neste sentido, podemos observar que a noção de curvas cônicas, nos seus diversos Movimentos, foi produzida a partir da operação dos elementos dos objetos constituídos e como esses elementos se relacionam nos diferentes modelos.

\*\*\*

## EPÍLOGO

\*\*\*

Ler a tese de doutorado de Bruno produziu em mim um certo estranhamento inicial, tanto pelo estilo de escrita adotado como pelo modo como ele se expôs. Entretanto, ao longo da leitura, pude compreender a intenção do autor, bem como o campo em que sua pesquisa está inserida – Educação Matemática – no qual é valorizada a subjetividade do pesquisador.

Considero que este trabalho deve ser lido não só pelos educadores matemáticos, mas também pelos profissionais da Expressão Gráfica por apresentar contribuições para as duas áreas, seja pelo estudo gráfico das curvas cônicas, seja pelas relações matemáticas. A exemplo disso, os episódios (Seção 2) e a própria análise podem ser utilizados como textos didáticos auxiliares com licenciandos, a fim de apresentar, ou discutir, o conteúdo das curvas cônicas por uma abordagem investigativa, complementando as informações do livro e da explanação do professor.

Destaca-se, no trabalho, o estudo das cônicas sob o viés de busca por generalizações dos seus elementos, partindo do contexto das seções cônicas e tendo como suporte teórico a Geometria Projetiva, particularmente, o princípio da continuidade. As discussões realizadas podem, inclusive, servir de base/motivação para estudos de outros conteúdos matemáticos sob o paradigma projetivo com o objetivo de obter generalizações que não seriam possíveis do ponto de vista euclidiano.

\*\*\*

Em meu processo de leitura desta tese, Bruno (meu autor cognitivo) foi desconstruindo questionamentos que fui colocando, pois foi esclarecendo dúvidas e respondendo a essas questões.

A meu ver, a forma de um trabalho permite que algo importante sobre o conteúdo da tese seja explicitado ao leitor. A mim, se a forma não se relaciona com o conteúdo da tese, ela é só uma alegoria. No caso da pesquisa de doutorado de Bruno, ela traz esse potencial: o modo como trouxe a dinâmica dos pilotos, do Grupo de Estudos e como sua pesquisa foi se delineando promove no leitor sensações que ele mesmo como pesquisador teve, defendendo, assim, uma tese em que a produção de conhecimento matemático se dá em processo, não está “pronta para ser compreendida”, bastando apenas a informação do que já foi construído pelos matemáticos. Bruno quer mostrar não como chegam a alguma noção de cônica, mas tudo que se discute e aprende no processo de produção de uma noção de cônica. Também penso que a forma mostra



algo que tem a ver com a escolha do MCS – ao encarnar as pessoas com as quais ele se relacionou em sua pesquisa e que foram importantes nesse processo, para trazer o que elas pensavam e como influenciaram sua pesquisa, ele está dizendo que esses são os sujeitos cognitivos criados nessas relações. Além disso, o trabalho traz outras contribuições para além do seu foco de pesquisa sobre as potencialidades de ambientes e instrumentos para pesquisa qualitativa, de ambientes de estudos de Matemática, de ambientes de estudo vislumbrando a aprendizagem de Matemática, sobre consequências de modos de se encarar o conhecimento e a produção de conhecimentos para a produção científica, sobre potencialidades da escrita narrativa para a produção científica do pesquisador que pretende fazer notar subjetividades e processos de produção de conhecimentos, de atravessamentos, de estranhamentos, de distanciamentos, de aproximações... que se dão em processos de pesquisas.

Nesta direção, vejo uma proposta explícita de tese e outra implícita: analisar o processo de produção de significado para as cônicas em um grupo de estudos e como se dão os processos de produção de conhecimento matemático (ao observar, analisar sob certos fundamentos teóricos e escrever, a partir desses fundamentos, sobre produções de um grupo de estudos em Matemática), e de produção de conhecimento científico, ao se esforçar em uma forma de escrita que exprimisse como se dá essa produção.

\*\*\*

Aceitar o convite que me foi feito no início desta tese me possibilitou olhar para a pesquisa de Bruno por seus olhos. Durante minha leitura, me abri à experiência, saindo do mundo da álgebra, adentrando nesse novo horizonte da Geometria Gráfica e produzindo novos significados.

Dentre as contribuições que este trabalho apresenta, gostaria de destacar a escolha pelo Modelo Teórico dos Campos Semânticos para analisar a produção de conhecimento em Geometria, pois a pesquisa endossa a possibilidade de operar com o Modelo em outros campos da Matemática, além da álgebra, no qual ele foi pensado inicialmente. Além disso, a postura do pesquisador vai ao encontro do que propõe o Modelo, de olhar para os feitos não como erros e acertos, mas sim como significados produzidos que são legitimados por uma comunidade. Neste sentido, olhar para os Movimentos descritos por Bruno possibilita a um professor ter acesso a possíveis leituras de produção de significado que poderiam ser interpretadas como erros, quando, na verdade, expressam modos de operar com os objetos que fazem sentido para o sujeito.

\*\*\*

\*\*\*

Bruno nos convidou a uma leitura de uma tese que objetivou apresentar compreensões de um pesquisador sobre o processo de dar sentido a um conteúdo matemático em um Grupo de Estudos. A meu ver, compreendo que a riqueza do trabalho está acentuada no detalhamento do processo da investigação, o qual revela os sentidos que foram se fazendo para Bruno no decorrer desse processo, o qual contém informações úteis para alunos e professores que trabalham com a Geometria, especificamente as curvas cônicas. Neste sentido, ao destacar os diferentes Movimentos na dinâmica de produção de significado, Bruno mostra como os elementos das cônicas são operados de modos distintos, dependendo dos modelos e da abordagem.

Ainda destaco que além da sua pesquisa trazer contribuições para o ensino e aprendizado da Geometria, os dados trazidos na pesquisa são valiosos. Havia muitas opções para restringir o olhar: as discussões dos encontros presenciais (pela transcrição dos vídeos), os diálogos no WhatsApp ou os diários dos alunos, as potencialidades do grupo de estudos, a análise da dinâmica de produção de significado dos outros sujeitos, o papel do professor em um ambiente como o grupo de estudos.

Obviamente há inúmeras outras possibilidades (com os dados produzidos) que espero que Bruno tenha interesse em continuar olhando para dados desta pesquisa a fim de que ela não pare, não morra, mas produza novos questionamentos, permitindo que ele, enquanto pesquisador, continue no caminho de perceber se percebendo. Faz sentido?

\*\*\*

Acompanhar Bruno ao longo do doutorado me tirou da zona de conforto, pois nem sempre era fácil colocar os pés no chão de uma mente inquieta, curiosa e criativa, que se encantava com cada nova possibilidade. Contudo, esse processo não é por assim dizer prejudicial, faz parte de um doutoramento e proporcionou experiências agradáveis, como também frutos que essa parceria rendeu (e ainda irá render). Além das nossas partilhas pessoais antes das reuniões de orientação, aprendemos um com o outro: Bruno com sua visão gráfica, enxergando lugares geométricos e pontos impróprios em tudo o que via, e eu com a visão da Matemática formal e das demonstrações. Meu caminho linear cruzava-se com o caminho, por que não dizer, hiperbólico de Bruno e, aos poucos, encontramos nossas interseções e nosso modo de trabalhar.

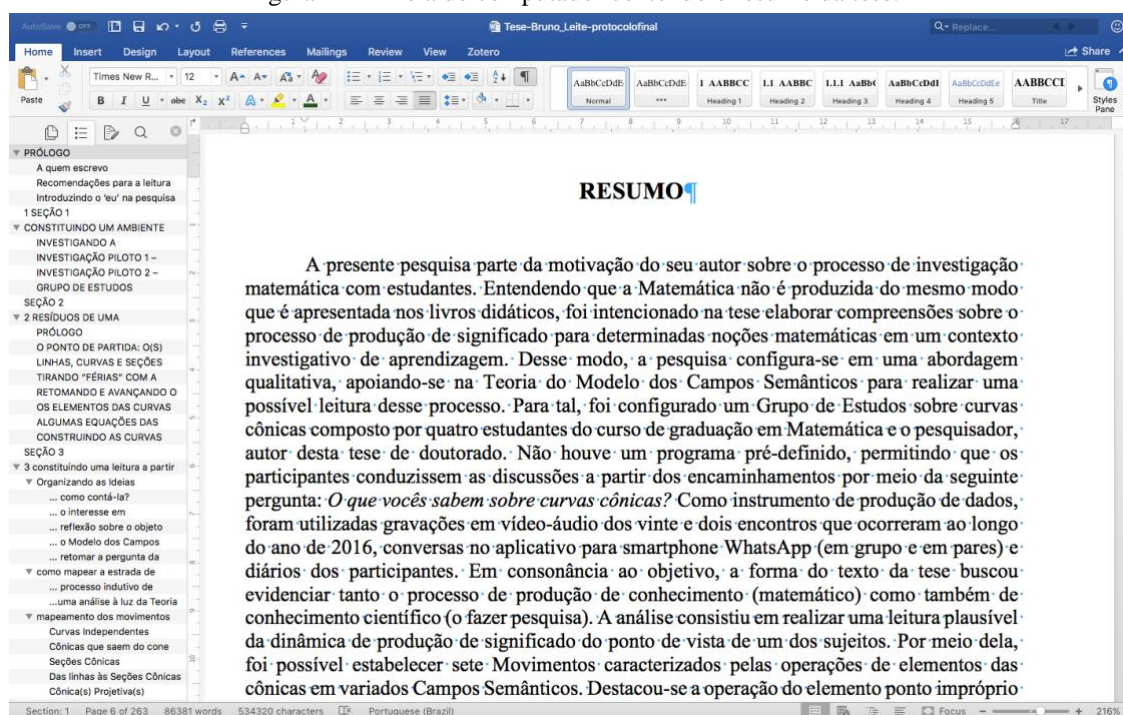
Orientar permite que nós, professores, possamos não só ver um doutor em formação, mas também um ser humano em desenvolvimento, em evolução. Vejo, no trabalho de Bruno,

traços desse processo, em que o doutor e o ser humano se misturam, mesmo sem nunca terem deixado de ser um só. Abracei suas escolhas, mesmo sem saber aonde elas levariam a pesquisa, e tivemos uma grata surpresa com o resultado. Algumas coisas poderiam ser diferentes, mas compreendo que o processo nunca se esgota e que bom que não se esgota, pois abre possibilidades para futuros desdobramentos.

Para mim, uma das contribuições da tese que merece destaque é a proposta do Grupo de Estudos, pois ela apresenta uma possibilidade de trabalho complementar ao da sala de aula, em um ambiente em que os alunos possam discutir as diferentes abordagens de um mesmo conteúdo. Considero, inclusive, que esta tese pode se desdobrar em pesquisas que analisem as potencialidades desse tipo de ambiente como recurso complementar de ensino e aprendizagem nos diferentes níveis de ensino.

\*\*\*

Figura 121 – Tela do computador contendo o resumo da tese.



Fonte: Do autor.

O vazio da tela em branco hoje é preenchido pelas pegadas do caminhar dos quatro anos de doutorado em que me perdi, me encontrei, aprendi... Quatro anos de um processo de doutoramento que chega ao fim, mas que também foi um período de autoconhecimento, de entender que “a verdadeira coragem está em enfrentar o perigo quando você está com medo”, período este que nunca termina. Hoje posso bater os calcanhares e, assim como Dorothy, voltar para casa, porém, antes, gostaria de olhar para a estrada percorrida e lembrar dos feitos, dos

laços, das bruxas enfrentadas, mas, acima de tudo, das contribuições desta pesquisa para a Educação Matemática.

A narrativa da tese envolveu vários personagens que, enquanto sujeitos cognitivos, compõem o meu processo de leitura plausível, os quais me ajudaram a sair das coxias e, de um modo criativo, expressar a minha subjetividade enquanto pesquisador. Geralmente, a última coisa que um pesquisador faz em um trabalho acadêmico é o resumo, ou seja, terminamos pelo começo, com a primeira parte a ser lida. Até pensei em fazer a transgressão e colocá-lo ao final, contudo considero deixá-lo onde está para não gerar tantos estranhamentos.

Confesso que não foi fácil organizar um texto que se aproximasse do processo de desenvolvimento da pesquisa, narrando acontecimentos que não necessariamente dialogam diretamente com os seus objetos, tendo que escolher o que permanece, o que sai, mas sem descaracterizar o processo. Por vezes, fiquei tentando reorganizar determinadas seções, pois ficariam mais “bonitas” se colocadas deste ou daquele modo, mas esta arrumação apagaria os rastros de um processo, que podem aparentar “não acadêmicos” em trechos que narram sentimentos, medos, memórias de uma vida, mas foram a partir deles que esta tese foi tomando forma. Sem a permissão dos dedos livres tremulando sobre o teclado, alheios à censura acadêmica, não seria possível chegar a este produto final. Por isso, não peço desculpas pelos escritos, mas peço licença para que eles permaneçam como estão, com o objetivo de que meu discurso seja coerente com a prática, de que o processo não decorra rígida e linearmente.

Do mesmo modo que as reuniões do Grupo de Estudos foram recheadas de partilhas cotidianas, brincadeiras e piadas, conteúdos não necessariamente ligados ao tema em questão, considero que o ambiente de sala de aula em seus diferentes níveis deve ser um ambiente de troca. Neste sentido, considero que experimentações, como as praticadas nesta pesquisa, podem inspirar ações e pesquisas que nos permitam pensar, refletir e elaborar metodologias e ambientes de aprendizagem não para massas, mas para todos em suas individualidades postas em um coletivo e isso inclui o professor.

Com o término da análise, posso enfim fazer a última versão da pergunta de pesquisa. Durante a análise destaquei que pretendia analisar como ocorre um dinâmica... Porém, hoje compreendo que a dinâmica faz parte mais da resposta do que da pergunta. Neste sentido, retomo a estrutura da frase anterior e traduzo minhas inquietações ao longo desses quatro anos com a seguinte sentença: *Como é engendrado um ‘corpo’ matemático por integrantes que, em um Grupo de Estudos, produzem significados para Curvas Cônicas*. Permaneço com o termo “por integrantes” por entender que mesmo analisando a produção de um sujeito não há como desassociar a produção dos demais participantes, pois o corpo que se engendra é corpo para

uma comunidade, ou seja, ao produzir uma possível leitura para o processo de produção de significado de Guilherme trago com ele os cosujeitos do seu espaço comunicativo.

Inicialmente, considerava que o trabalho com diferentes abordagens sobre um mesmo tema fosse facilitar a constituir um mesmo objeto, mais denso. Contudo, tanto a postura epistemológica assumida na pesquisa como a análise evidenciaram que não há um único objeto, mas vários que compõem um mesmo corpo.

Foram produzidos significados para as cônicas que expressaram características particulares para cada tipo, como também generalidades, porém essas características falam de objetos distintos que podem (ou não) ser relacionados, dependendo dos elementos operados. Do mesmo modo, os modelos utilizados determinam quais elementos são esses. No caso desta investigação, o trabalho com diferentes modelos permitiu que os participantes do Grupo de Estudos explorassem variadas propriedades que podem ser observadas nos sete Movimentos, sendo cada um deles importantes e indispensáveis para o processo.

É importante destacar que não considero prejudicial a operação das cônicas de modo independente, pois os conhecimentos produzidos em cada modelo são importantes para constituir o corpo curvas cônicas; entendo que esse corpo não é constituído apenas por generalidades, mas também por particularidades. Todavia, é necessário estar claro, para o professor e aluno, que cada objeto, enquanto constituído, apresenta uma limitação de associações de acordo com os elementos do núcleo do CS operado. Isso fica evidente quando penso no objeto cônicas do modelo da lanterna e do (outro) objeto cônicas no modelo bidimensional do lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes a uma circunferência e um ponto, pois o único elemento em comum entre eles é a linha da curva. Desse modo, a única associação possível é a identificação da forma. Neste sentido, considero que, quanto mais elementos há em um núcleo de um CS, mais possibilidades de associação na constituição de novos objetos poderão ocorrer. Por isso, é importante que o professor saiba como articular os objetos em diferentes modelos para que os conhecimentos produzidos sejam úteis em novas situações; caso contrário, as informações servirão apenas de contextualização, e não para uma utilidade operativa em uma situação-problema.

Gostaria de salientar que o trabalho com a Geometria Projetiva, especificamente com o princípio da continuidade, se mostrou uma possibilidade de trabalho com conteúdos de Geometria, com o objetivo de generalizar particularidades da Geometria Euclidiana. Neste sentido, este paradigma pode ser pensado para outros conteúdos e níveis de ensino. Desse modo, observar as potencialidades de uma abordagem projetiva pode apontar para estratégias de ensino que minimizem dificuldades de aprendizagem.

Do mesmo modo, o trabalho com grupos de estudo pode se configurar como uma estratégia complementar à estrutura de ensino que temos hoje, pois serviria de ambiente para dialogar com as diferentes abordagens sobre um mesmo tema.

Também considero importante aprofundar um estudo sobre a linguagem e seus modos de expressão, pois nesta pesquisa, apesar de não ser o foco, eles se mostraram como elementos importantes no processo de produção de significado. Assim, uma possível pesquisa seria investigar como um determinado modo de expressão, ou mesmo um determinado ambiente de investigação interfere na produção de significado.

Outra possibilidade que se abre é olhar para as diferenças entre os modos de produção, ou seja, quais características apresentam a imaginação, a observação e a manipulação.

Com relação aos procedimentos metodológicos, considero que o fato de a produção de dados ter durado aproximadamente um ano letivo, com encontros semanais, permitiu acompanhar um processo que nem sempre gera proximidade entre os participantes, de modo que, no processo de análise, tive liberdade para esclarecer questões que, na produção de dados, não tive elementos suficientes para analisar. Neste sentido, o uso do WhatsApp foi muito importante. Quando surgia a dúvida e devido à proximidade estabelecida, eu enviava a pergunta e já era respondida. Contudo, não considero que essa deva ser uma prática em pesquisas cujos sujeitos são desconhecidos, ou mesmo entre pessoas que não tenham proximidade.

As noções matemáticas operadas no Grupo de Estudos não necessariamente expressam aquilo que o sujeito aprendeu, pois a meu ver, o processo de aprendizagem envolve internalizar legitimidades. Neste sentido, uma possibilidade de futura pesquisa seria investigar como os modos de produção de significado contribuem para a internalização de legitimidades, ou seja, para a aprendizagem.

Para mim, é evidente que, enquanto professor, o que aprendi no Grupo de Estudos e também no processo de análise é quanto eu preciso falar menos e dar voz aos alunos, pois apesar de a investigação ter sido rica, em alguns momentos, pude observar nos vídeos oportunidades que poderia ter aproveitado para os sujeitos se expressarem, mas eu, envolvido no meu processo de produção de significado, não me atentei para elas. Ou seja, ter alternativas de outros ambientes para complementar as estratégias de ensino pode ser bom, mas o professor precisa estar atento às oportunidades para os alunos se expressarem; assim, tanto os estudantes podem operar com outros modos de produção de conhecimento mais significativos, como o professor terá mais elementos para avaliar o processo de aprendizagem.

A preocupação com a avaliação está muitas vezes focada nos significados, e não nas justificações. Eu posso ter a mesma enunciação com justificações diferentes, mas, em outra

situação, aquela justificação não me permite manter o significado. Por esse motivo, se faz necessário que o professor, em um processo avaliativo, busque fazer uma leitura das justificações dos significados produzidos pelos alunos.

Do mesmo modo que o conteúdo sistematizado nos livros não é posto como ele foi desenvolvido, mas sim organizado de um modo que se considere que o leitor possa entender, me questiono: se um conteúdo fosse apresentado do ponto de vista de quem investiga, como isso interferiria no processo de aprendizagem dos alunos?

Assim como Silva (2003) destaca que, para cada sujeito, há uma dinâmica diferente, o mesmo ocorreu no Grupo de Estudos; neste sentido, analisar a dinâmica de outros sujeitos pode me revelar outras facetas da investigação. Por exemplo, ao olhar para a dinâmica de William, ele inicia a operação com a noção projetiva em um contexto de geração de superfícies, já Guilherme o faz no contexto da seção cônica. Desse modo, posso encontrar outra configuração de Movimentos e, ao olhar para as duas dinâmicas (de Guilherme e a dele), é possível estabelecer outras relações no processo de produção de significado.

Ainda sobre o Grupo de Estudos, considero que o que está em jogo não é se os participantes aprenderam ou não todas as propriedades, mas se desenvolveram habilidades que lhes permitam refazer os caminhos e criar novos. Não há aqui um desejo de que tudo seja incorporado, ou mesmo considerado legítimo, mas que cada participante tenha percebido que o investigar abre a possibilidade de se chegar onde quiser, inclusive onde não se sabe. Transformar a sala de aula em um ambiente que se desamarre de currículos engessados e que professores e alunos busquem produzir os significados e estes sejam reconhecidos por alguma comunidade é o que fará dos alunos de hoje seres protagonistas, autônomos e criativos na produção do seu conhecimento.

Meus pensamentos são interrompidos pelo tocar do sinal, informando que o intervalo acabou e que meus alunos já devem estar vindo para sala. De volta ao meu exercício docente, vislumbro novas possibilidades e caminhos, caminhos que me levam de volta para casa, não a casa física, mas para a sala de aula, que considero minha segunda casa, pois lá posso extrair o meu melhor para ser para o outro. Olhando para a estrada percorrida e de volta ao trabalho que tanto me realiza, posso enfim dizer: não há lugar como nosso lar. Em lugar de encerrar este trabalho com um ponto final, termino com um simbólico ponto impróprio, na intenção de expressar que a pesquisa está em constante desenvolvimento, em um estado eternamente inacabado, que se abre para novas possibilidades.

## REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia*. Tradução Alfredo Bosi; Ivone Castilho Benedetti. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. p. 31–51.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) . *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

AYER, A. J. Filosofia do Conhecimento. *The problem of knowledge*. Tradução Jaimir Conte. London: Macmillian & Co LTD, 1956. p. 1–34. Disponível em: <<http://conte.prof.ufsc.br/txt-aayer.pdf>>.

BAZET, L. M. B. *Aprendizagens docentes em grupo de estudos sobre divisão: narrativas de práticas pedagógicas com crianças*. 2014. 106 f. Dissertação (Mestrado Profissional Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, Vitória, 2014.

BERLO, D. K. *O processo da comunicação: introdução à teoria e à prática*. São Paulo: Martins Fontes, 1979.

BISPO, C. T. *Significação da prática docente: uma investigação com professores de matemática inseridos em um grupo de estudos*. 2017. 173 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2017. Disponível em: <<http://repositorio.cbc.ufms.br:8080/jspui/bitstream/123456789/3163/1/Significa%C3%A7%C3%A3o%20da%20pr%C3%A1tica%20docente%20uma%20investiga%C3%A7%C3%A3o%20com%20professores%20de%20matem%C3%A1tica%20inseridos%20em%20um%20grupo%20de%20estudos.pdf>>.

BOESING, C. *A prática da pesquisa nas aulas de Matemática: vivências de professores do Ensino Fundamental que integram um grupo de estudos*. 2009. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação, Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <<http://tede2.pucrs.br/tede2/bitstream/tede/3368/1/417392.pdf>>.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer, 2005. v. 39.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. DE. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall Brasil, 2005.



BRITO, A. DE J. *Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico pedagógico*. 1995. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1995. Disponível em: <file:///Users/brunoleite/OneDrive/Doutorado/Referenciais%20Teo%CC%81ricos/BritoArleteJesus.pdf>.

COSTA, M. L. C. DA. *Colaboração e grupo de estudos: perspectivas para o desenvolvimento profissional de professores de matemática no uso de tecnologia*. 2011. 201 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

COSTA, M. D.; COSTA, A. V. *Geometria Gráfica Tridimensional: sistemas de representação*. 3. ed. Recife: Editora Universitária da UFPE, 1996. v. 1.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A Experiência Matemática*. Tradução João Bosco Pitombeira. 2ª ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

ETCHEVERRIA, T. C. *Educação continuada em grupos de estudos: possibilidades com foco no ensino da Geometria*. 2008. 102 f. Dissertação (Mestrado em Educação, Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <<http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/3006/1/000397536-Texto%2bCompleto-0.pdf>>.

EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução I. Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2010.

FERREIRA, A. C. *Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de matemática: uma experiência de trabalho colaborativo*. 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

FRANCOEUR, L. B. *Curso completo de Mathematicas Puras*. Na imprensa da Universidade, por ordem de Sua Magestade ed. Coimbra: [s.n.], 1839. v. 2.

GARCEZ, A.; DUARTE, R.; EISENBERG, Z. Produção e análise de vídeogravações em pesquisas qualitativas. *Educação e Pesquisa*, v. 37, p. 249–262, 2011.

GARNICA, A. V. M. Filosofia da Educação Matemática: algumas resignificações e uma proposta de pesquisa. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Unesp, 1999. p. 59–71.

GIMENES, J. *Contribuições de um grupo de estudos para a formação matemática de professores que lecionam séries iniciais*. 2006. 113 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2006. Disponível em: <[https://alsafi.ead.unesp.br/bitstream/handle/11449/90364/gimenes\\_j\\_me\\_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://alsafi.ead.unesp.br/bitstream/handle/11449/90364/gimenes_j_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y)>.

GOMES, L. J. M.; GOMES, M. L. M. O matemático amoroso. *Zetetiké*, v. 23, n.1, p. Campinas, 2015.

HEITMANN, F. P. *Atividades Investigativas em Grupos Online: possibilidades para a educação matemática a distância*. 2013. 173 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2013.

KLÜBER, T. E. Atlas.ti como instrumento de análise em pesquisa qualitativa de abordagem fenomenológica. *Educação Temática Digital*, v. 16, p. 5–23, 2014.

LAROSSA, J. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. *Revista Brasileira de Educação*, n. 19, p. 20–28, 2002.

LEONTIEV, A. N. Uma Contribuição à Teoria do Desenvolvimento da Psique Infantil. In: VYGOTSKY, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. *Lingagem, Desenvolvimento e Aprendizagem*. Tradução Maria da Pena Villalobos. 11. ed. São Paulo: Ícone, 2011. p. 59–83. Disponível em: <<http://www.unifal-mg.edu.br/humanizacao/wp-content/uploads/sites/14/2017/04/VIGOTSKI-Lev-Semenovitch-Linguagem-Desenvolvimento-e-Aprendizagem.pdf>>.

LÉVY, P. *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LIMA, L. F. DE. *Grupo de estudos de professores e a produção de atividades matemáticas sobre funções utilizando computadores*. 2009. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2009. Disponível em: <[https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91076/lima\\_lf\\_me\\_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91076/lima_lf_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y)>.

LINARDI, P. R. *Rastros da formação matemática na prática profissional do professor de matemática*. 2006. 291 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2006. Disponível em: <[https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102167/linardi\\_pr\\_dr\\_rcla.pdf?sequence=1](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102167/linardi_pr_dr_rcla.pdf?sequence=1)>.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. *Naturalistic Inquiry*. London: Sage Publications, 1985.

LINS, R. C. Epistemologia, História e Educação Matemática: Tornando mais sólidas as bases da pesquisa. *Revista de Educação Matemática*, v. Ano 1, nº 1, p. 75–91, 1993.

LINS, R. C. Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. DE C. (Org.). *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. 4º ed. São Paulo: Cortez, 2012a.

LINS, R. C. Notas sobre o uso da noção de conceito como unidade estruturante do pensamento. In: MOREIRA, M. A. (Org.). *Atas da III Escola Latino-americana sobre Pesquisa em Ensino de Física - III ELAPEF*. Canela: [s.n.], 1996. p. 137–141. Disponível em: <<http://ogegebra.com.br/permanente/romulo/1996b.pdf>>.

LINS, R. C. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. *et al. Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história*. São Paulo: Editora Midiograf, 2012b. p. 11–30.

LOIZOS, P. Vídeo, filme e fotografias como documentos de pesquisa. In: BAUER, M. W.; GASKELL, G. (Org.). *Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som*. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2008. p. 137–155.

LOPES, R. M. G. *Histórias de uma pesquisa(dora) em uma escola do campo com professores que lecionam Matemática*. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2016. Disponível em: <[http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/141480/lopes\\_rmg\\_me\\_rcla.pdf?sequence=3&isAllowed=y](http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/141480/lopes_rmg_me_rcla.pdf?sequence=3&isAllowed=y)>.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em Educação: abordagem qualitativas*. São Paulo: EPU, 1987.

MACIEL, M. V. M. *GEMaTh – A criação de um grupo de estudos segundo fundamentos da Educação Matemática Crítica: uma proposta de Educação Inclusiva*. 2008. 135 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/14729/000667118.pdf?sequence=1>>.

MAKIYAMA, E. *Função Polinomial*. *InfoEscola*. [S.l.: s.n.]. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/matematica/funcao-polinomial/>>. Acesso em: 18 fev. 2017. , [s.d]

MARCHI, V. D. *Um grupo de estudos de professores de matemática e a exploração de conteúdos de geometria euclidiana em webquest*. 2011. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera, São Paulo, 2011. Disponível em: <<https://s3.amazonaws.com/pgsskroton-dissertacoes/3f8f1acc423280bf36206585fe0c599c.pdf>>.

MIOLA, R. J. *Professores de matemática e a produção de objetos de aprendizagem colaborativa para o portal educacional da secretaria de educação do estado do Paraná*. 2008. 127 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008. Disponível em: <[http://www.ppge.ufpr.br/teses/teses/M08\\_miola.pdf](http://www.ppge.ufpr.br/teses/teses/M08_miola.pdf)>.

MURPHY, C.; LICK, D. *Whole faculty study groups: A powerful way to change schools and enhance learning*. Califórnia: Corwin, 1998.

NIETSCHE, F. *A Gaia Ciência*. Tradução Paulo César de Souza. Companhia das Letras ed. São Paulo: [s.n.], 2012.

OLIVEIRA, A. G. *Memórias das aritméticas de Emília: o ensino da aritmética entre 1920 e 1940*. 2015. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2015. Disponível em: <<http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/123717/000831944.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>.

ORFÃO, R. B. *Professores de matemática em um grupo de estudos: Uma investigação sobre o uso de tecnologia no ensino de funções trigonométricas*. 2012. 176 f. Dissertação (Mestrado em

Educação Matemática) – Universidade Anhanguera, São Paulo, 2012. Disponível em: <<https://s3.amazonaws.com/pgsskroton-dissertacoes/9d32e9516f4bc1265384ce19feefa163.pdf>>.

PAULA, E. F. DE. *Do discutir e resolver em matemática: reflexões sobre a constituição de um grupo de estudos entre educadores matemáticos*. 2009. 220 f. Dissertação (Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

PERANSONI, A. DE C. M. *Formação de grupos de estudos com professores dos anos iniciais do ensino fundamental na perspectiva da etnomatemática*. 2015. 135 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social (FUVASTES), Lajeado, 2015. Disponível em: <[https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/972/1/2015AdemirdeCassioMachadoPeranson\\_i.pdf](https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/972/1/2015AdemirdeCassioMachadoPeranson_i.pdf)>.

PIAGET, J. *Epistemologia Genética*. 4º ed. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2012.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 2º ed. Belo Horizonte - BH: Autêntica, 2009. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

QUEIROZ, S. M. *Movimentos que permeiam o devir professor de matemática de alguns licenciandos*. 2015. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2015. Disponível em: <<http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/136750/000858451.pdf?sequence=1>>.

QUEIROZ, T. L. DE A.; CAVALCANTE, P. S. As contribuições do software Atlas Ti para a análise de relatos de experiência escritos. 2011, Curitiba. *Anais...* Curitiba: PUCPR, 2011. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/profile/Jose\\_Ricardo\\_Mendonca/publication/235737097\\_As\\_contribuicoes\\_do\\_software\\_ATLAS\\_TI\\_para\\_analise\\_qualitativa\\_em\\_pesquisas\\_educacionais/links/0a85e537b5fa39817f000000.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Jose_Ricardo_Mendonca/publication/235737097_As_contribuicoes_do_software_ATLAS_TI_para_analise_qualitativa_em_pesquisas_educacionais/links/0a85e537b5fa39817f000000.pdf)>. Acesso em: 23 jul. 2016.

RODRIGUES, P. H. *Práticas de um grupo de estudos e pesquisa na elaboração de um recurso multimídia para a formação de professores que ensinam Matemática*. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000198890>>.

ROQUE, T. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, M. P. DOS. *Educação Continuada do Professor de Matemática: Uma investigação sobre Grupo de estudos no coletivo escolar*. 2011. 132 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera, São Paulo, 2011. Disponível em: <<https://s3.amazonaws.com/pgsskroton-dissertacoes/6f7763b0f7a2c5f1f873b056bd0df6e8.pdf>>.

SERRAZINA, L. *Teacher's professional development in a period of radical change in primary mathematics education in Portugal*. 1998. 406 f. Tese (PhD in Mathematics Education) – Universidade de Londres, Lisboa, 1998.

SESSA, S. DE M. *A constituição de um grupo de estudos que tem como foco o ensino de matemática no distrito de Celina – ES*. 2014. 121 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, Vitória, 2014. Disponível em: <[http://educimat.ifes.edu.br/images/stories/Publica%C3%A7%C3%B5es/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2014\\_Simone\\_de\\_Melo\\_Sessa.pdf](http://educimat.ifes.edu.br/images/stories/Publica%C3%A7%C3%B5es/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2014_Simone_de_Melo_Sessa.pdf)>.

SILVA, A. M. DA. *Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática*. 2003. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2003.

SILVA, G. H. G. DA. *Grupos de estudo como possibilidade de formação de professores de matemática no contexto da geometria dinâmica*. 2010. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2010.

SILVA, L. P. M. *O que é polinômio? Brasil Escola*. [S.l: s.n.]. Disponível em: <<http://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-polinomio.htm>>. Acesso em: 18 fev. 2017. , [s.d.]

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, v. 14, p. 66–91, 2000.

SKOVSMOSE, O. *Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica*. Tradução Orlando de Andrade Figueiredo; Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas: Papyrus, 2008. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

SOUTO, D. P. L. *Transformações expansivas em um curso de Educação Matemática a distância online*. 2013. 279 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2013.

VIEIRA, E. R. *Grupo de estudos de professores e a apropriação de tecnologia digital no ensino de geometria: Caminhos para o conhecimento profissional*. 2013. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera, São Paulo, 2013. Disponível em: <<https://s3.amazonaws.com/pgsskroton-teses/53321054a546280f9d46430aade98f0d.pdf>>.

ZAMPIERI, M. T. *A comunicação em uma disciplina de Introdução a Estatística: um olhar sob a formação inicial de professores de matemática a distância*. 2013. 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2013.

ZOTTO, L. C. *Da formação de um grupo à observação na escola: documentando em vídeo as ações intencionais de um grupo de estudos voltadas para o modo de pensar matemático*. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciência e Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

ZUIN, E. DE S. L. *Da Régua e do Compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil*. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

## APÊNDICE A




UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

## ATIVIDADE MATEMÁTICA - GPIMEM - 29/05/15

A atividade em tela propõe a construção de um documento colaborativamente acerca das discussões de um problema matemático, tentando observar o que emerge no diálogo quanto às possibilidades de relações geométricas.

A primeira parte da atividade será realizada a distância, em que os membros irão responder alguns questionamentos sobre um problema matemático dado. A participação poderá ser anônima ou não, em diferentes momentos, de acordo com as orientações abaixo:

- Os comentários podem ser realizados de duas maneiras:
  - Utilizando a ferramenta *'inserir comentário'* - Selecione o texto sobre o qual quer fazer o comentário e clique no ícone correspondente  na barra de ferramentas localizado na parte superior, ou clique com o botão direito do *mouse* e clique em *'comentário'*;
  - Ou Inserindo os comentários diretamente no corpo do texto.
- Os comentários inseridos no corpo do texto devem seguir a seguinte formatação:

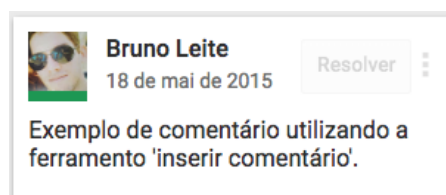
**Nome (em negrito)** - Comentário. Cada participante deve ter uma cor distinta (combinação de cor de fonte e cor de destaque) e, quando for um comentário anônimo, a cor será preta.

Ex.:

**Bruno** - O céu é azul, blablabla.

**Fulano** - Depende do ponto de vista, blablabla.

**Anônimo** - Os comentários anônimos não podem ser realizados pela ferramenta *'inserir comentário'*, visto serem identificados automaticamente pelo Drive nesta função.



**Anônimo** - Todo novo comentário deve ser identificado, seja pelo nome ou pela palavra anônimo.

**Beltrano** - blablabla

- Os membros podem inserir figuras, gráficos, *links*, podendo utilizar legenda e/ou referenciando por meio de nota de rodapé (clique em '*inserir*' na barra de ferramentas e, em seguida, '*nota de rodapé*', conforme exemplo:

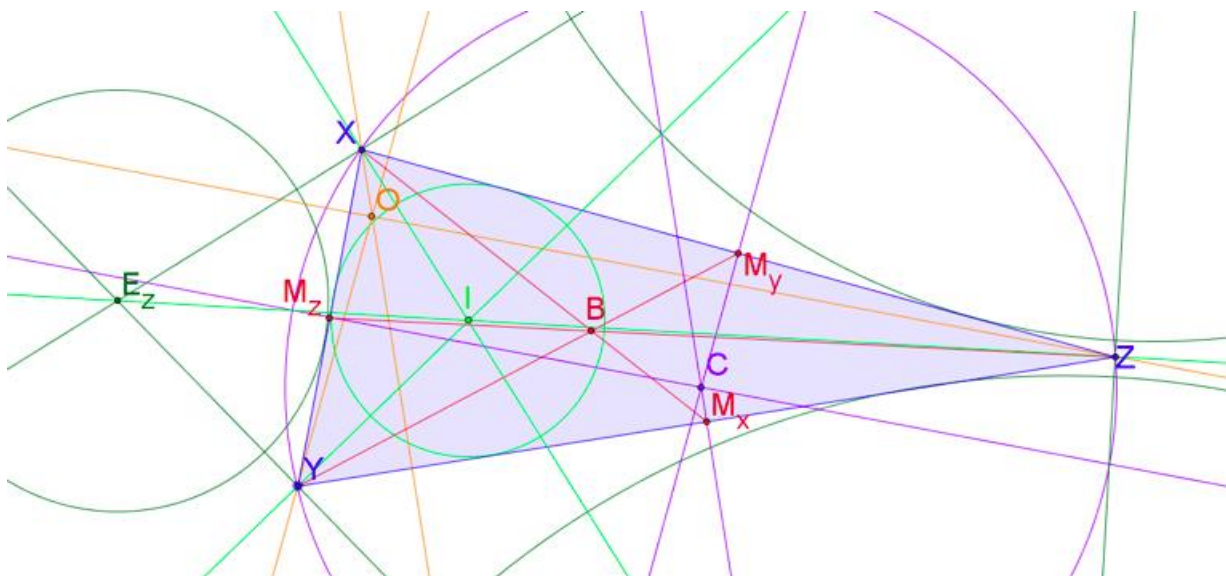


Figura 1 - Exemplo de imagem.

Exemplo de *link*:

<http://www.rc.unesp.br/gpimem/>

- Novos comentários com relação a alguma fala anterior devem ser inseridos por meio da ferramenta 'comentário' ou, se for de modo anônimo, logo em seguida à frase a ser argumentada.
- Não é necessário corrigir comentários ou imagens que possam vir a apresentar erros conceituais. A retificação deve ser realizada a partir de um novo comentário, ou imagem, podendo fazer referência ao elemento em questão.

A segunda parte da atividade será realizada na reunião do dia 29/05. Solicitamos que todos os membros estejam com computador/tablet/smartphone que tenha acesso à internet e possibilidade de acesso e edição do Documento do Google Drive.

### Primeira parte da Atividade

1. Como você resolveria o seguinte problema:

Construa um triângulo de vértices  $XYZ$  e lados  $x$  (oposto ao vértice  $X$ ),  $y$  (oposto ao vértice  $Y$ ) e  $z$  (oposto ao vértice  $Z$ ) conhecendo as medidas do lado  $x$ , do lado  $y$  e da altura relativa ao lado  $x$  ( $h_x$ ).