

Marina Valença Alencar

**REFORMULAÇÃO DAS RESTRIÇÕES
DE COMPLEMENTARIDADE EM
PROBLEMAS DE FLUXO DE POTÊNCIA
ÓTIMO**

Bauru-SP

2019

Marina Valença Alencar

**REFORMULAÇÃO DAS RESTRIÇÕES DE
COMPLEMENTARIDADE EM PROBLEMAS DE
FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista "Júlio De Mesquita Filho", UNESP, Câmpus de Bauru, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

Faculdade de Engenharia de Bauru

Orientador: Prof^ª. Dr^ª. Edilaine Martins Soler

Bauru-SP

2019

Alencar, Marina Valença.

Reformulação das restrições de complementaridade em problemas de fluxo de potência ótimo / Marina Valença Alencar, 2019

98p. : Il., tabs.

Orientadora: Edilaine Martins Soler

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2019

1. Restrições de complementaridade. 2. Fluxo de potência ótimo reativo. 3. Variáveis discretas. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE MARINA VALENÇA ALENCAR, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 05 dias do mês de junho do ano de 2019, às 09:00 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof^a. Dr^a. EDILAINE MARTINS SOLER - Orientador(a) do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, Prof. Dr. LEONARDO NEPOMUCENO do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. GUILHERME GUIMARÃES LAGE do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Federal de São Carlos, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de MARINA VALENÇA ALENCAR, intitulada **REFORMULAÇÃO DAS RESTRIÇÕES DE COMPLEMENTARIDADE EM PROBLEMAS DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO**. Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof^a. Dr^a. EDILAINE MARTINS SOLER

Prof. Dr. LEONARDO NEPOMUCENO

Prof. Dr. GUILHERME GUIMARÃES LAGE

*Edilaine M. Soler**Leonardo Nepomuceno*
Guilherme Lag

Dedico este trabalho ao meu pai Richard, minha mãe Lúcia e ao meu irmão Leonardo, que não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa da minha vida.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me guarda e protege sempre, e permitiu que eu pudesse vivenciar novas experiências.

Aos meus pais, Richard e Lúcia, e meu irmão Leonardo, pelo apoio, incentivo, amor incondicional e por me darem forças para enfrentar essa jornada. Sem eles nada teria sentido. Tudo que sou e realizo é por vocês.

Ao meu namorado, Paulo Henrique, pelo amor, carinho e paciência de enfrentar ao meu lado esse período de inteira dedicação ao mestrado.

À Prof^a. Dr^a. Edilaine Martins Soler, pela orientação, incentivo e dedicação a mim concedida. Agradeço imensamente pela amizade e, principalmente, pela confiança depositada em mim.

À minha família, em especial meus avós Vladimir e Idalina, que sempre serão o meu maior exemplo de fé e caráter.

Aos queridos tio Raul e Maria Cecília, por me acolherem como família, todo apoio e carinho que tiveram comigo ao longo desse período e por tornarem minha estadia em Bauru mais fácil.

Aos professores e funcionários do programa de pós-graduação em engenharia elétrica da UNESP Bauru e do departamento de matemática.

Aos colegas do laboratório de otimização e estudos econômicos em sistemas de potência, em especial ao Diego e Tiago, que contribuíram com o meu aprendizado e que de alguma forma auxiliaram nessa pesquisa.

Ao programa de pós-graduação em engenharia elétrica e a UNESP pela oportunidade de realização do curso de mestrado. À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de mestrado.

“Tente uma, duas, três vezes e se possível tente a quarta, a quinta e quantas vezes for necessário. Só não desista nas primeiras tentativas, a persistência é amiga da conquista. Se você quer chegar onde a maioria não chega, faça o que a maioria não faz.”

(Bill Gates)

Resumo

Neste trabalho duas abordagens de resolução são propostas para tratar restrições de complementaridade que modelam a atuação de dispositivos de controle de tensão no problema de fluxo de potência ótimo reativo, uma proposta de reformulação das restrições via programação inteira e a outra via desigualdades válidas. Este problema é modelado matematicamente como um problema de programação não linear inteira mista com variáveis discretas e restrições de complementaridade. As restrições de complementaridade na atuação dos dispositivos de controle de tensão (*tap* dos transformadores em fase e bancos de capacitores e reatores *shunt*) têm por objetivo viabilizar a implementação das soluções obtidas em sistemas elétricos de grande porte, para que eles operem apenas quando um dos limites de tensão da barra, por ele controlada, for atingido, restringindo o número de ajustes. Serão obtidas soluções para que o sistema elétrico opere de maneira ótima, com mínimas perdas, tensões nas barras dentro de limites rigorosamente fixados e com números mínimos de ajustes nos dispositivos controláveis. Testes numéricos com os sistemas elétricos IEEE 14, 30, 118 barras foram realizados para validar as abordagens propostas. Também foram realizados testes com outra reformulação das restrições de complementaridade proposta na literatura e com o problema de fluxo de potência ótimo reativo clássico para análise de resultados.

Palavras-chave: Restrições de complementaridade. Fluxo de potência ótimo reativo. Variáveis discretas.

Abstract

In this paper two approaches of resolution are proposed to treat complementarity constraints that model the performance of voltage control devices in the reactive optimal power flow problem, a proposal of reformulation of the restrictions through integer programming and the other via valid inequalities. This problem is mathematically modeled as a mixed integer nonlinear programming problem with discrete variables and complementarity constraints. The complementarity constraints in the performance of the voltage control devices (tap of the phase transformers and banks of capacitors and shunt reactors) has the objective of making feasible the implementation of the solutions obtained in large electrical systems, so that they operate only when one of the voltage limits of the bus controlled by it is reached, restricting the number of adjustments. Solutions will be obtained so that the electrical system operates optimally, with minimum losses, voltages in the buses within bounds strictly fixed and with minimum numbers of adjustments in controllable devices. Numerical tests with the electrical systems IEEE 14, 30, and 118 buses were carried out to validate the proposed approaches. We also performed tests with another reformulation of the complementarity constraints proposed in the literature and with the classical reactive optimal power flow problem for results analysis.

Keywords: Complementarity constraints. Reactive optimal power flow. Discrete variables

Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Representação do transformador em-fase.	25
Figura 2.2 – Circuito equivalente π do transformador em-fase.	29
Figura 4.1 – Árvore de ramificação do <i>branch-and-bound</i>	47
Figura 5.1 – Barra controlada versus magnitude de tensão.	51
Figura 5.2 – Barra controlada versus magnitude de tensão.	54

Lista de tabelas

Tabela 5.1 – Valores iniciais das variáveis de controle discretas do sistema elétrico IEEE 14 barras.	50
Tabela 5.2 – Magnitudes e ângulos de tensão nas barras nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 14 barras.	50
Tabela 5.3 – Dispositivos de controle de tensão nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 14 barras.	51
Tabela 5.4 – Valores iniciais das variáveis de controle discretas do sistema elétrico IEEE 30 barras.	52
Tabela 5.5 – Magnitudes e ângulos de tensão nas barras nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 30 barras.	53
Tabela 5.6 – Dispositivos de controle de tensão nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 30 barras.	54
Tabela 5.7 – Valores iniciais das variáveis de controle discretas do sistema elétrico IEEE 118 barras.	55
Tabela 5.8 – Magnitudes e ângulos de tensão nas barras nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 118 barras.	56
Tabela 5.9 – Dispositivos de controle de tensão nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 118 barras.	60
Tabela 5.10–Tempo computacional e valor da F.O. nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 14 barras.	61
Tabela 5.11–Tempo computacional e valor da F.O. nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 30 barras.	61
Tabela 5.12–Tempo computacional e valor da F.O. nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 118 barras.	61
Tabela 5.13–Dispositivos de controle de tensão nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 14 barras.	62
Tabela 5.14–Dispositivos de controle de tensão nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 30 barras.	62
Tabela 5.15–Dispositivos de controle de tensão nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 118 barras.	62
Tabela 5.16–Magnitudes de tensão nas barras controladas nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 14 barras.	63
Tabela 5.17–Magnitudes de tensão nas barras controladas nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 30 barras.	63
Tabela 5.18–Magnitudes de tensão nas barras controladas nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 118 barras.	64

Tabela 5.19–Ajuste das variáveis de controle nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 14 barras.	64
Tabela 5.20–Ajuste das variáveis de controle nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 30 barras.	65
Tabela 5.21–Ajuste das variáveis de controle nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 118 barras.	65
Tabela A.1–Dados de barra do sistema elétrico IEEE 14 barras.	77
Tabela A.2–Dados de linha do sistema elétrico IEEE 14 barras.	77
Tabela A.3–Dados de barra do sistema elétrico IEEE 30 barras.	78
Tabela A.4–Dados de linha do sistema elétrico IEEE 30 barras.	79
Tabela A.5–Dados de barra do sistema elétrico IEEE 118 barras.	80
Tabela A.6–Dados de linha do sistema elétrico IEEE 118 barras.	83
Tabela B.1–Magnitudes e ângulos de tensão nas soluções obtidas do sistema elétrico IEEE 14 barras.	89
Tabela B.2–Magnitudes e ângulos de tensão nas soluções obtidas do sistema elétrico IEEE 14 barras.	89
Tabela B.3–Magnitudes e ângulos de tensão nas soluções obtidas do sistema elétrico IEEE 30 barras.	90
Tabela B.4–Magnitudes e ângulos de tensão nas soluções obtidas do sistema elétrico IEEE 30 barras.	91
Tabela B.5–Magnitudes e ângulos de tensão nas soluções obtidas do sistema elétrico IEEE 118 barras.	92
Tabela B.6–Magnitudes e ângulos de tensão nas soluções obtidas do sistema elétrico IEEE 118 barras.	95

Lista de abreviaturas e siglas

SEP	Sistema Elétrico de Potência
FP	Fluxo de Potência
FPO	Fluxo de Potência Ótimo
FPOR	Fluxo de Potência Ótimo Reativo
KKT	Karush-Kuhn-Tucker <i>Conditions</i>
PNL	Programação Não Linear
PNLIM	Problema Não Linear Inteiro Misto
BONMIN	<i>Basic Open-source Nonlinear Mixed Integer programming</i>

Sumário

1	INTRODUÇÃO	21
2	MODELAGEM MATEMÁTICA	23
2.1	Nomenclatura	23
2.2	Formulação Clássica do Problema de FPOR	24
2.3	Problema de Otimização com Restrições de Complementaridade	26
2.3.1	Problemas de Complementaridade	26
2.4	Problema de FPOR com Restrições de Atuação de Controles .	28
2.4.1	Atuação dos Dispositivos de Controle de Tensão	28
2.4.1.1	Atuação dos transformadores em-fase	28
2.4.1.2	Atuação dos bancos de capacitores e reatores <i>shunt</i>	30
2.4.2	Modelo de FPOR com as Restrições de Comportamento dos Dispositivos de Controle	31
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	33
3.1	Histórico do Problema de FPO	33
3.2	Reformulações das Restrições de Complementaridade	36
3.2.1	Reformulação de Benson, Shanno e Vanderbei (2002)	36
3.2.2	Reformulação de Rosehart, Roman e Schellenberg (2005)	37
3.2.3	Reformulação pela Função Fischer-Burmeister	39
3.2.4	Reformulação de Lage (2013)	39
4	METODOLOGIA DE SOLUÇÃO PROPOSTA	41
4.1	Propostas de Solução	41
4.1.1	Proposta 1: Reformulação da Restrição de Complementaridade via Programação Inteira	41
4.1.1.1	Estimativa M	44
4.1.2	Proposta 2: Reformulação das Restrições de Complementaridade via Desigualdades Válidas	44
4.2	Método de Otimização	45
5	TESTES NUMÉRICOS	49
5.1	Sistema Elétrico IEEE 14 barras	49
5.2	Sistema Elétrico IEEE 30 barras	51
5.3	Sistema Elétrico IEEE 118 barras	54
5.4	Análise de Resultados	60

6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	67
7	TRABALHOS PUBLICADOS	69
	REFERÊNCIAS	71
	 APÊNDICES	 75
	APÊNDICE A – DADOS DOS SISTEMAS ELÉTRICOS . .	77
A.1	Sistema Elétrico IEEE 14 barras	77
A.2	Sistema Elétrico IEEE 30 barras	78
A.3	Sistema Elétrico IEEE 118 barras	80
	 APÊNDICE B – RESULTADOS OBTIDOS	 89
B.1	Sistema IEEE 14 barras	89
B.1.1	Reformulação de Lage (2013)	89
B.1.2	FPOR sem Restrições de Complementaridade	89
B.2	Sistema IEEE 30 barras	90
B.2.1	Reformulação de Lage (2013)	90
B.2.2	FPOR sem Restrições de Complementaridade	91
B.3	Sistema IEEE 118 barras	92
B.3.1	Reformulação de Lage (2013)	92
B.3.2	FPOR sem Restrições de Complementaridade	95

1 Introdução

Atualmente, a energia elétrica é um bem essencial à sociedade pois com o avanço da tecnologia cada vez mais dependemos dela. Assim, a operação do setor elétrico é de suma importância para que não ocorram eventuais problemas de geração, transmissão e distribuição.

Na década de 90 o setor elétrico brasileiro passou por mudanças institucionais no modelo de gestão, saindo de um sistema verticalizado para um sistema de concorrência, em que, cada atividade (geração, transmissão, distribuição e comercialização) passou a ser administrada separadamente. Com esse novo modelo de concorrência nesse setor, as empresas cada vez mais necessitam otimizar os sistemas de energia elétrica.

O Sistema Elétrico de Potência (SEP) é um sistema complexo, que contém uma série de dispositivos controláveis que influenciam diretamente em seu desempenho operacional sendo necessário o uso de ferramentas para operar o sistema da melhor maneira possível. Segundo Monticelli (1983) o cálculo de Fluxo de Potência (FP) consiste essencialmente na determinação do estado do sistema, da distribuição dos fluxos e de algumas outras grandezas.

No cálculo de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) a modelagem do sistema é estática, isto é, as variações no tempo são suficientemente lentas, de maneira que se possa ignorar os efeitos transitórios. Dessa maneira, o problema do FPO é um modo eficiente de determinar o estado ótimo de um sistema elétrico.

Um dos subproblemas do FPO é o chamado problema do Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR) em que as variáveis de controle referentes à potência ativa são fixadas e as variáveis de controle referentes à potência reativa são ajustadas de forma a otimizar um determinado desempenho do sistema. Este é modelado como um problema de otimização restrito, estático, não convexo, de grande porte, com variáveis contínuas e discretas.

Na modelagem clássica do problema de FPOR é possível ajustar todas as variáveis de controle para se determinar o estado ótimo do sistema, podendo inviabilizar, devido ao grande número de ajustes necessários, a aplicação da solução obtida em sistemas de grande porte. A modelagem proposta por Lage (2013) visa viabilizar sua aplicação para problemas de grande porte. No modelo proposto, a atuação dos dispositivos de controle de tensão é modelada por restrições de complementaridade, para que estes sejam ajustados somente quando um dos limites de tensão da barra por ele controlada for atingido. Dessa forma, restringe-se o número de ajustes.

O modelo matemático proposto por Lage (2013) para o problema do FPOR, e

utilizado nesse trabalho, trata de uma nova modelagem envolvendo restrições de atuação dos dispositivos de controle de tensão, por meio de restrições de complementariedade.

De acordo com Rosehart, Roman e Schellenberg (2005) uma grande variedade de problemas práticos que envolvem “mudanças no comportamento do sistema” podem ser modelados por restrições de complementariedade. Estas são consideradas de difícil resolução, pois a maioria dos métodos desenvolvidos para Programação Não Linear (PNL) não podem ser aplicados diretamente a estas restrições. Segundo Rodrigues (2005), o desenvolvimento de métodos de solução eficientes para tais problemas torna-se necessário.

O objetivo desse trabalho é propor duas abordagens de resolução para o problema de FPOR com variáveis de controle discretas e com restrições de atuação dos dispositivos de controle de tensão proposto por Lage (2013). A primeira proposta é um novo método de reformulação para as restrições de complementariedade via programação inteira, e a segunda é um método de reformulação proposto por Rosehart, Roman e Schellenberg (2005) que utiliza desigualdades válidas. Testes numéricos com os sistemas elétricos IEEE 14, 30 e 118 barras foram realizados e demonstram o potencial dos métodos de solução propostos.

A organização deste trabalho se dá em sete capítulos. No Capítulo 1, é feita uma breve introdução ao problema de FPO e as restrições de complementariedade. No Capítulo 2 é descrito o problema do FPOR com variáveis de controle discretas e com restrições de atuação dos dispositivos de controle de tensão. No Capítulo 3 apresenta-se a revisão bibliográfica dos principais trabalhos relacionados ao FPO e as principais abordagens de resolução considerando restrições de complementariedade encontradas na literatura. As abordagens de resolução propostas e o método de otimização utilizado são apresentados no Capítulo 4. O Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos por ambas propostas para os sistemas elétricos IEEE 14, 30 e 118 barras e analisa os resultados obtidos para outra reformulação proposta na literatura e para o FPOR clássico. No Capítulo 6 são apresentadas as considerações finais do trabalho. Para finalizar, são apresentados os trabalhos desenvolvidos e publicados durante o mestrado.

2 Modelagem Matemática

2.1 Nomenclatura

Conjuntos

- B Barras do sistema;
- B_L Barras de carga;
- B_{CR} Barras de controle reativo;
- B' Barras do sistema exceto a barra *slack*;
- B_{SH} Barras com banco de capacitores ou reatores e susceptâncias *shunt* associadas;
- L Linhas de transmissão;
- T Transformadores com *tap* variável;
- L_k Linhas de transmissão diretamente conectadas à barra k ;
- D_{km}^T Valores discretos assumidos pelo *tap* dos transformadores associado ao ramo km ;
- D_k^{SH} Valores discretos assumidos pela susceptância *shunt* da barra k ;
- M Transformadores com *tap* variável, nos quais os nós finais são barras controláveis;
- K Transformadores com *tap* variável, nos quais os nós iniciais são barras controláveis;

Variáveis

- V_k Magnitude de tensão da barra k ;
- θ_k Ângulo de tensão da barra k ;
- b_k^{sh} Susceptância *shunt* da barra k ;
- t_{km} *Tap* variável do transformador em-fase associado ao ramo km ;

Parâmetros

- g_{km} Condutância série do ramo km ;
- b_{km} Susceptância série do ramo km ;

b_{km}^{sh}	Susceptância <i>shunt</i> da linha km ;
P_k^G	Potência ativa gerada da barra k ;
P_k^C	Potência ativa de demanda da barra k ;
Q_k^G	Potência reativa gerada da barra k ;
Q_k^C	Potência reativa de demanda da barra k ;
Q_k^{min}, Q_k^{max}	Limites mínimos e máximos de geração de potência reativa da barra k ;
V_k^{min}, V_k^{max}	Limites mínimos e máximos da magnitude de tensão da barra k ;
$b_k^{sh^{min}}, b_k^{sh^{max}}$	Limites mínimos e máximos da susceptância <i>shunt</i> da barra k ;
$t_{km}^{min}, t_{km}^{max}$	Limites mínimos e máximos do <i>tap</i> do transformador associado ao ramo km ;

2.2 Formulação Clássica do Problema de FPOR

Problemas de FPO consistem em problemas de otimização para determinar um ponto de operação para o sistema elétrico visando otimizar um determinado desempenho desse sistema, mediante a restrições técnicas e de operação. Dessa maneira, o problema de FPO é um modo eficiente de determinar o estado ótimo de um sistema. Esses problemas são considerados de difícil resolução pois são modelados como um problema de otimização restrito, estático, não convexo, de grande porte e com variáveis contínuas e discretas.

A utilização de variáveis discretas na formulação desses problemas, visando uma formulação mais realista, impõem maiores dificuldades na resolução destes, por isso uma grande parte de trabalhos da literatura desconsideram sua natureza discreta e tratam-nas como variáveis contínuas (LAGE, 2013).

O FPOR descrito em (2.1) - (2.7) visa minimizar as perdas ativas nas linhas de transmissão sujeito a restrições de técnico-operacionais nas quais as variáveis de controle referentes à potência ativa são fixadas e as variáveis de controle referentes à potência reativa são ajustadas de forma a otimizar esse desempenho.

$$\min \sum_{k,m \in L \cup T} g_{km} \left(\frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 + V_m^2 - 2 \frac{1}{t_{km}} V_k V_m \cos \theta_{km} \right) \quad (2.1)$$

s.a:

$$P_k^G - P_k^C - \sum_{m \in L_k} P_{km}(V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in B' \quad (2.2)$$

$$Q_k^G - Q_k^C + b_k^{sh} V_k^2 - \sum_{m \in L_k} Q_{km}(V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in B_L \quad (2.3)$$

$$Q_k^{min} \leq Q_k^C - b_k^{sh} V_k^2 + \sum_{m \in L_k} Q_{km}(V, \theta, t) \leq Q_k^{max} \quad \forall k \in B_{CR} \quad (2.4)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad \forall k \in B \quad (2.5)$$

$$b_k^{sh} \in D_k^{SH} \quad \forall k \in B_{SH} \quad (2.6)$$

$$t_{km} \in D_{km}^T \quad \forall (k, m) \in T. \quad (2.7)$$

As restrições (2.2) e (2.3) representam, respectivamente, o balanço de potência ativa nas barras do sistemas, exceto na barra de referência, e o balanço de potência reativa nas barras de carga do sistema. Os fluxos de potência ativa e reativa em ambas as restrições dependem do tipo de elemento conectado ao ramo (k, m) . Se este for um transformador torna-se necessário equacionar o fluxo dependendo do lado do barramento (barra inicial ou final) controlado por esse transformador, como mostra a Figura 2.1.

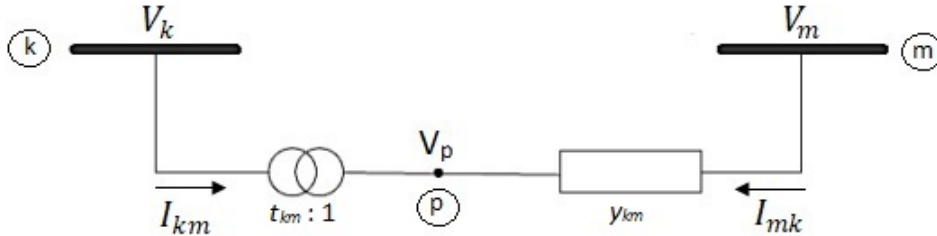


Figura 2.1 – Representação do transformador em-fase.

Dessa forma, se no cálculo do fluxo em (2.2) e (2.3) houver um transformador associado ao ramo (k, m) , P_{km} e Q_{km} são expressos, respectivamente, como:

- Se k é uma barra inicial:

$$P_{km}(V, \theta, t) = (t_{km} V_k^2) g_{km} - t_{km} V_k V_m [g_{km} \cos(\theta_{km}) + b_{km} \sin(\theta_{km})] \quad (2.8)$$

$$Q_{km}(V, \theta, t) = -(t_{km} V_k^2) b_{km} + t_{km} V_k V_m [b_{km} \cos(\theta_{km}) - g_{km} \sin(\theta_{km})]. \quad (2.9)$$

- Se k é uma barra final:

$$P_{km}(V, \theta, t) = V_k^2 g_{km} - t_{km} V_k V_m [g_{km} \cos(\theta_{km}) + b_{km} \sin(\theta_{km})] \quad (2.10)$$

$$Q_{km}(V, \theta, t) = -V_k^2 b_{km} + t_{km} V_k V_m [b_{km} \cos(\theta_{km}) - g_{km} \sin(\theta_{km})]. \quad (2.11)$$

E se no cálculo dos fluxos em (2.2) e (2.3) houver uma linha de transmissão associada ao ramo, P_{km} e Q_{km} são expressos, respectivamente, como:

$$P_{km}(V, \theta, t) = V_k^2 g_{km} - V_k V_m [g_{km} \cos(\theta_{km}) + b_{km} \sin(\theta_{km})] \quad (2.12)$$

$$Q_{km}(V, \theta, t) = -V_k^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) + V_k V_m [b_{km} \cos(\theta_{km}) - g_{km} \sin(\theta_{km})]. \quad (2.13)$$

A restrição (2.4) refere-se aos limites mínimos e máximos de potência reativa gerada e injetada no sistema na barra k , de modo que Q_{km} é calculado da mesma maneira apresentada nas equações (2.8) - (2.13). Em (2.5) impõem-se os limites de magnitude de tensão a todas as barras do sistema elétrico. A natureza discreta dos *taps* dos transformadores e das susceptâncias equivalentes dos banco de capacitores e reatores *shunt* é apresentada em (2.6) e (2.7), respectivamente.

2.3 Problema de Otimização com Restrições de Complementaridade

De acordo com Rodrigues (2005) o conceito de complementaridade foi introduzido na otimização por volta dos anos 30. Por estar diretamente relacionado ao conceito de "equilíbrio", muitos problemas relacionados à economia, engenharia e ecologia podem ser modelados por problemas de complementaridade.

2.3.1 Problemas de Complementaridade

A condição de complementaridade entre duas variáveis x e y é representada pelo produto dessas variáveis igual a zero, conforme (2.14).

$$xy = 0. \quad (2.14)$$

Essa condição também pode ser representada utilizando a notação de "complemento", ou seja:

$$x \perp y. \quad (2.15)$$

Essa condição pode ser satisfeita das seguintes maneiras:

1. $x = 0$ e $y \neq 0$;
2. $x \neq 0$ e $y = 0$;

3. $x = 0$ e $y = 0$.

De forma que as duas primeiras situações satisfazem a condição de complementaridade estrita, e a terceira, a condição de complementaridade de maneira não estrita. Esse conceito pode ser aplicado também para vetores de dimensão \mathbf{n} . Se $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ e $y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ são não negativos, tem-se:

$$x \perp y \Leftrightarrow x^T y = 0 \Leftrightarrow x_j y_j = 0, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.16)$$

Seja $F(x)$ uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, o problema de complementaridade objetiva determinar um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfaça (2.17).

$$0 \leq x \perp F(x) \geq 0. \quad (2.17)$$

Este problema pode ser reescrito como (2.18) - (2.20), de modo que se F for uma função afim, tem-se um problema de complementaridade linear, e, caso contrário, tem-se um problema de complementaridade não linear (LAGE, 2013).

$$F(x) \geq 0 \quad (2.18)$$

$$x \geq 0 \quad (2.19)$$

$$x^T F(x) = 0. \quad (2.20)$$

Também pode-se ter um problema de complementaridade com limites superiores e inferiores na variável x , chamado de problema com restrições de complementaridade mista, o qual visa determinar um vetor x , limitado inferiormente e superiormente que complemente a função $F(x)$, de tal forma que,

$$x^{min} \leq x \leq x^{max} \perp F(x). \quad (2.21)$$

A equação (2.21) representa a seguinte condição:

$$\text{se } x = x^{min} \Rightarrow F(x) \geq 0 \quad (2.22)$$

$$\text{se } x^{min} < x < x^{max} \Rightarrow F(x) = 0 \quad (2.23)$$

$$\text{se } x = x^{max} \Rightarrow F(x) \leq 0. \quad (2.24)$$

Restrições de complementaridade podem modelar muitas situações em problemas de otimização. Um problema de otimização com restrições de complementaridade é

representado por:

$$\min f(x) \quad (2.25)$$

s.a:

$$g_i(x) = 0 \quad (2.26)$$

$$h_i(x) \leq 0 \quad (2.27)$$

$$x_{1_i}^{\min} \leq x_{1_i} \leq x_{1_i}^{\max} \quad (2.28)$$

$$x_{2_i}^{\min} \leq x_{2_i} \leq x_{2_i}^{\max} \perp F_i(x_2), \quad (2.29)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$, $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $i = 1, \dots, n$.

No problema (2.25) - (2.29) deseja-se minimizar uma dada função $f(x)$, sujeito as restrições (2.26) de igualdade do problema, as de desigualdade (2.27), as restrições (2.28) com os limites mínimos e máximos das variáveis e as restrições (2.29), que consistem em um problema de complementaridade.

De acordo com Rosehart, Roman e Schellenberg (2005) a principal dificuldade em resolver esse tipo de problema ocorre quando ele é satisfeito de maneira não estrita, ou seja, quando $x = F(x) = 0$. A qualificação da restrição de independência linear não se mantém e os *solvers* existentes encontram dificuldades significativas. Dessa forma novas abordagens de resolução necessárias. Nesse trabalho propõe-se reformular estas restrições utilizando estratégias de programação inteira, a fim de se obter um problema de otimização viável de ser resolvido por meio de *solvers* para Programação Não Linear Inteira Mista (PNLIM).

A seguir, descreve-se o problema de FPOR com restrições de atuação, o qual é modelado como um problema de PNLIM com restrições de complementaridade, o qual é abordado neste trabalho de pesquisa.

2.4 Problema de FPOR com Restrições de Atuação de Controles

2.4.1 Atuação dos Dispositivos de Controle de Tensão

O controle de tensão é um aspecto importante a ser considerado na operação de um sistema de potência. Os dispositivos capazes de realizar esse controle e impedir que a tensão na barra que eles controlam ultrapassem valores permitidos são os bancos de capacitores e reatores *shunt*, os transformadores em-fase, geradores e condensadores síncronos.

2.4.1.1 Atuação dos transformadores em-fase

A representação geral de transformadores em-fase, apresentada na Figura 2.1, consiste em uma admitância série y_{km} e um transformador ideal com relação de transformação

série $t_{km} : 1$, levando em consideração que para um transformador em-fase, t_{km} é um número real (MONTICELLI, 1983).

O transformador em-fase pode ser representado por um circuito equivalente no modelo π , como mostra a Figura 2.2.

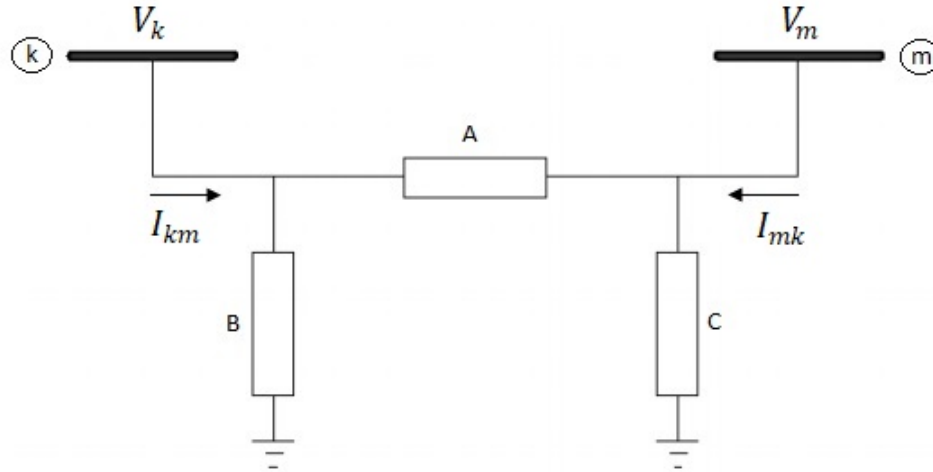


Figura 2.2 – Circuito equivalente π do transformador em-fase.

Dessa forma para determinar as admitâncias A, B e C no circuito equivalente, identificam-se as correntes I_{km} e I_{mk} no modelo da Figura 2.1, com as correspondentes na Figura 2.2, assim temos:

$$A = \frac{1}{t_{km}} y_{km} \quad (2.30)$$

$$B = \frac{1}{t_{km}} \left(\frac{1}{t_{km}} - 1 \right) y_{km} \quad (2.31)$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{t_{km}} \right) y_{km}. \quad (2.32)$$

Essas equações permitem analisar a relação de transformação $t_{km} : 1$ e as tensões V_k e V_m . Primeiramente, se $t_{km} = 1$, o circuito equivalente se resume a admitância série y_{km} pois as admitâncias B e C são nulas. Se $t_{km} > 1$, B terá sinal contrário a y_{km} sendo assim do tipo capacitivo e C terá o mesmo sinal de y_{km} sendo do tipo indutivo. Assim, tem-se a tendência de aumentar a magnitude de tensão na barra k e diminuir na barra m. Ao contrário, se $t_{km} < 1$, B terá mesmo sinal de y_{km} sendo do tipo indutivo e C terá o sinal contrário de y_{km} sendo do tipo capacitivo, a tendência de diminuir a magnitude de tensão na barra k e aumentar na barra m.

Se o dispositivo de controle de tensão controlar a barra k, os ajustes da variável t_{km} estão ligados à análise da admitância B no circuito equivalente. Quando V_k atinge seu limite máximo, t_{km} deve ser ajustado de forma a diminuir a magnitude de tensão na barra k, ou seja, diminuir t_{km} . Quando V_k atinge seu limite mínimo, t_{km} deve ser ajustado de

forma a aumentar a magnitude de tensão na barra k , ou seja, aumentar t_{km} . Da seguinte maneira:

$$\text{se } V_k = V_k^{min} \Rightarrow \Delta t_{km} > 0 \quad (2.33)$$

$$\text{se } V_k^{min} < V_k < V_k^{max} \Rightarrow \Delta t_{km} = 0 \quad (2.34)$$

$$\text{se } V_k = V_k^{max} \Rightarrow \Delta t_{km} < 0, \quad (2.35)$$

em que,

$$\Delta t_{km} = t_{km_f} - t_{km_0}, \quad (2.36)$$

onde t_{km_f} e t_{km_0} são, respectivamente, o valor final e inicial da variável. Dessa forma a variável t_{km} só deve ser ajustada quando a magnitude de tensão na barra k não se mantiver entre seus limites. Podendo ser modelado pelo seguinte problema de complementaridade:

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \perp \Delta t_{km}. \quad (2.37)$$

Comportamento análogo é observado quando a magnitude de tensão controlada á a da barra m . Neste caso, os ajustes da variável t_{km} estão ligados à análise da admitância C no circuito equivalente. Quando V_m atinge seu limite máximo, t_{km} deve ser ajustado de forma a diminuir a magnitude de tensão na barra m , ou seja, aumentar t_{km} . Quando V_m atinge seu limite mínimo, t_{km} deve ser ajustado de forma a aumentar a magnitude de tensão na barra m , ou seja, diminuir t_{km} . Da seguinte maneira:

$$\text{se } V_m = V_m^{min} \Rightarrow \Delta t_{km} < 0 \quad (2.38)$$

$$\text{se } V_m^{min} < V_m < V_m^{max} \Rightarrow \Delta t_{km} = 0 \quad (2.39)$$

$$\text{se } V_m = V_m^{max} \Rightarrow \Delta t_{km} > 0. \quad (2.40)$$

As restrições (2.38) - (2.40) são modeladas pelo seguinte problema de complementaridade (LAGE, 2013):

$$V_m^{min} \leq V_m \leq V_m^{max} \perp -\Delta t_{km}. \quad (2.41)$$

2.4.1.2 Atuação dos bancos de capacitores e reatores *shunt*

Outro dispositivo que pode ser conectado a um barramento para regular sua magnitude de tensão pela injeção/absorção adequada de potência reativa são os bancos de capacitores e reatores *shunt* (CONEJO; CANIZARES; GOMEZ-EXPOSITO, 2009). Eles são modelados como susceptâncias conectadas diretamente à barra de modo que se a susceptância b_k^{sh} for positiva, ele é do tipo capacitivo, e se a susceptância for negativa, é do tipo indutivo.

Quando a magnitude de tensão na barra k atinge seu limite máximo, b_k^{sh} deve ser ajustada para diminuir a injeção de potência reativa nessa barra, ou seja, o valor de b_k^{sh}

deve ser reduzido. Se a magnitude de tensão na barra k atinge seu limite mínimo, b_k^{sh} deve ser ajustada para aumentar a injeção de potência reativa nessa barra, ou seja, o valor de b_k^{sh} deve ser incrementado. Da seguinte forma:

$$\text{se } V_k = V_k^{min} \Rightarrow \Delta b_k^{sh} > 0 \quad (2.42)$$

$$\text{se } V_k^{min} < V_k < V_k^{max} \Rightarrow \Delta b_k^{sh} = 0 \quad (2.43)$$

$$\text{se } V_k = V_k^{max} \Rightarrow \Delta b_k^{sh} < 0, \quad (2.44)$$

em que,

$$\Delta b_k^{sh} = b_{k_f}^{sh} - b_{k_0}^{sh}, \quad (2.45)$$

onde $b_{k_f}^{sh}$ e $b_{k_0}^{sh}$ são, respectivamente, o valor final e inicial da variável. Dessa forma a variável b_k^{sh} só será ajustada quando a magnitude de tensão na barra k não se mantiver entre seus limites. Podendo ser modelado pelo seguinte problema de complementaridade (LAGE, 2013):

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \perp \Delta b_k^{sh}. \quad (2.46)$$

2.4.2 Modelo de FPOR com as Restrições de Comportamento dos Dispositivos de Controle

O problema de FPO pode ser modelado por equações não lineares, correspondentes às leis de Kirchoff aplicadas à análise de SEPs e um conjunto de restrições operacionais da rede elétrica e de seus componentes. O modelo proposto por Lage (2013) para o problema de FPOR com variáveis discretas e restrições de complementaridade que modelam o comportamento dos dispositivos de controle de tensão, de forma que esses dispositivos só operem quando um dos limites de tensão das barras por eles controladas forem atingidos, é apresentado a seguir.

$$\min \sum_{k,m \in LUT} g_{km} \left(\frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 + V_m^2 - 2 \frac{1}{t_{km}} V_k V_m \cos \theta_{km} \right) \quad (2.47)$$

s.a:

$$P_k^G - P_k^C - \sum_{m \in L_k} P_{km} (V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in B' \quad (2.48)$$

$$Q_k^G - Q_k^C + b_k^{sh} V_k^2 - \sum_{m \in L_k} Q_{km} (V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in B_L \quad (2.49)$$

$$Q_k^{min} \leq Q_k^C - b_k^{sh} V_k^2 + \sum_{m \in L_k} Q_{km} (V, \theta, t) \leq Q_k^{max} \quad \forall k \in B_{CR} \quad (2.50)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad \forall k \in B \quad (2.51)$$

$$b_k^{sh} \in D_k^{SH} \quad \forall k \in B_{SH} \quad (2.52)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \perp \Delta b_k^{sh} \quad \forall k \in B_{SH} \quad (2.53)$$

$$t_{km} \in D_{km}^T \quad \forall (k, m) \in T \quad (2.54)$$

$$V_m^{min} \leq V_m \leq V_m^{max} \perp -\Delta t_{km} \quad \forall (k, m) \in M \quad (2.55)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \perp \Delta t_{km} \quad \forall (k, m) \in K. \quad (2.56)$$

A função objetivo e as restrições (2.48) - (2.54) são apresentadas na seção 2.1.2.

As restrições de complementaridade (2.53), (2.55) e (2.56) expressam o comportamento dos dispositivos de controle de tensão de forma que eles operem apenas quando um dos limites de tensão na barra controlada por eles for atingido.

No próximo capítulo é apresentada a revisão bibliográfica dos trabalhos relacionados ao problema de FPO e as principais abordagens de resolução considerando restrições de complementaridade.

3 Revisão Bibliográfica

Neste capítulo é apresentado, primeiramente, um breve histórico sobre as abordagens de resolução para o problema de FPO da literatura. Em seguida são apresentados em detalhes as abordagens de resolução da literatura para tratar restrições de complementaridade.

3.1 Histórico do Problema de FPO

Na década de 60, Carpentier (1962) definiu o problema de FPO e desde então, muitos trabalhos foram publicados com diferentes formulações matemáticas e abordagens de resolução para o mesmo. Ele propôs uma nova modelagem para o problema de despacho econômico, adicionando restrições de balanço de potência nas barras. Assim, além de otimizar o despacho ótimo de potência ativa, também representava o fluxo de potência na rede, determinando o estado ótimo de operação do sistema. Ele propôs transformá-lo em um problema irrestrito pela utilização da função lagrangiana clássica.

Dommel e Tinney (1968) propuseram um método prático para resolver o problema do fluxo de carga ótimo com variáveis de controle pelo método de Newton, um algoritmo de ajuste dos controles pelo gradiente para obter ajustes ótimos, e de penalidade para considerar os limites das variáveis dependentes.

Sasson, Vitoria e Aboytes (1973), apesar da convergência rápida pelo método de Newton (pelo uso da matriz Jacobiana), propuseram o uso da matriz hessiana da função lagrangiana, para uma convergência ainda mais rápida.

Em Sun et al. (1984), os autores propuseram o uso do método de Newton com penalidade para a resolução do problema de FPO associado aos sistemas elétricos de grande porte.

A fim de superar algumas deficiências nas abordagens propostas anteriormente para o problema de FPO, Tinney et al. (1988) apontaram deficiências que limitam a sua utilidade prática e o alcance das aplicações, explicando e discutindo abordagens para corrigi-las. Santos, Deckmann e Soares (1988) apresentaram o método da função lagrangiana aumentada para resolver o problema de fluxo de potência ótimo ativo e reativo.

Na década de 90 foi proposto por Liu, Papalexopoulos e Tinney (1992) um algoritmo de discretização baseado em penalidades, o primeiro método de otimização para o problema de FPO considerando a natureza discreta das variáveis deste problema. Granville (1994) utilizou pela primeira vez o método de pontos interiores para o problema de despacho reativo ótimo. Esse método é baseado no algoritmo primal-dual. Torres e Quintana (1998),

utilizaram o método de pontos interiores de Granville (1994) para resolver problemas de FPO de grande porte com coordenadas retangulares de tensão.

Bakirtzis et al. (2002) propuseram um algoritmo genético aprimorado na resolução do problema de FPO, modelando como variáveis contínuas a potência ativa e a magnitude de tensão nas barras, e como as variáveis de controle discretas o *tap* dos transformadores e dispositivos *shunt*. Ainda nesse ano, Liu, Tso e Cheng (2002) apresentaram um novo algoritmo para despacho ótimo de reativos de sistemas de energia de grande porte com variáveis discretas e contínuas. Realizando a discretização das variáveis, incorporando uma função de penalidade no algoritmo de pontos interiores primal-dual não linear.

Lin, Ho et al. (2004) propuseram um algoritmo para lidar com a dificuldade computacional desse problema, baseado na teoria da otimização ordinal para obter uma solução suficientemente boa. Também nesse ano Ding, Wang e Song (2004) propuseram aplicar na resolução dos problemas de FPO um método de pontos interiores com planos de corte. Sousa, Baptista e Costa (2004) propuseram uma nova abordagem para o problema de FPO contínuo baseada na função de barreira modificada e no método de barreira logarítmica primal-dual.

Em 2005, Zhao, Guo e Cao (2005) apresentaram uma solução para o problema de FPO reativo através da heurística por otimização de enxame de partículas. Foi também em 2005 que Rosehart, Roman e Schellenberg (2005) propuseram modelar o controle de magnitude de tensão de barras de geração por meio de restrições de complementaridade no problema de máximo carregamento.

Yan et al. (2006) integraram um algoritmo genético com um método de pontos interiores não linear, propondo um novo método híbrido para o problema de FPO reativo com variáveis discretas.

AlRashidi e El-Hawary (2007) propuseram um algoritmo híbrido pela otimização por enxame de partículas juntamente com o algoritmo de Newton-Raphson para resolver o problema de FPO discreto. Os autores fazem uso do algoritmo por enxame de partículas para determinar os ajustes ótimos dos controles, enquanto o algoritmo de Newton-Raphson calcula o fluxo de carga.

Ainda nesse ano, Bautista, Anjos e Vannelli (2007) apresentaram um problema de programação binível do problema de despacho ativo e reativo e utilizaram o problema da complementaridade no problema de segundo nível, tratando-as pela função Fischer-Burmeister, por penalidade e pela transformação em desigualdades equivalentes. Destas, a última abordagem obteve melhor desempenho computacional.

Sousa, Baptista e Costa (2009) apresentaram uma nova abordagem de barreira modificada preditor-corretor para minimizar as perdas ativas em estudos de planejamento de sistemas de energia. Liu et al. (2009) apresentaram um método de planos de corte com

pontos interiores para resolução de FPO com variáveis discretas que, por sua vez, possui as vantagens tanto do método de pontos interiores quanto do método do plano de corte, tornando-se uma abordagem muito promissora para o FPO de grande porte.

Sousa, Baptista e Costa (2012) propuseram a chamada função lagrangiana barreira modificada para resolver o problema do FPO reativo, no qual as restrições de desigualdade são tratadas pelo método da função barreira modificada. Soler, Sousa e Costa (2012) propuseram um método para lidar com as variáveis discretas do problema de FPO, apresentando uma função de penalidade senoidal para essas variáveis. Devido à inclusão da função penalidade na função objetivo, é obtida uma sequência de problemas de programação não linear com apenas variáveis contínuas. Ainda em 2012, Phan (2012) propôs utilizar dualidade lagrangiana e *Branch-and-Bound* para resolver o problema do FPO em forma retangular que surge da análise do sistema de energia.

Em 2013 Moreira et al. (2013) propuseram um algoritmo baseado no método *Branch-and-Bound* para a resolução do problema de FPO com variáveis discretas. Neste ano Lage (2013) propôs uma nova abordagem de resolução e um novo modelo para o problema de FPOR com variáveis de controle discretas e restrições de complementaridade que modelam a atuação dos dispositivos de controle de tensão. As variáveis discretas foram tratadas pela função penalidade senoidal e as restrições de complementaridade transformadas em desigualdades equivalentes. Utilizou-se o algoritmo da função lagrangiana barreira modificada-penalidade-discreto para sua resolução.

Ghasemi et al. (2014) propuseram um algoritmo híbrido baseado em otimização evolutiva, com um algoritmo competitivo imperialista e a otimização invasiva de ervas daninhas, para resolver o problema de despacho de energia reativa.

Em 2015, Pinheiro et al. (2015) apresentaram um método de ponto interior-exterior de barreira logarítmica primal-dual previsor-corretor para resolver o problema do fluxo de potência ótimo reativo com variáveis contínuas. Nie et al. (2015) apresentaram uma nova abordagem para lidar com o problema FPO reativo com as variáveis discretas de controle, no qual funções de penalidade quadráticas são incorporadas no modelo proposto para lidar com as variáveis de controle de natureza discreta.

Neste trabalho propõe-se o tratamento das restrições de complementaridade no problema de FPOR com restrição de atuação dos dispositivos de controle de tensão, definido em Lage (2013), via reformulação destas restrições usando programação inteira mista. Assim, foram investigadas algumas abordagens já existentes que utilizaram reformulações equivalentes para as restrições de complementaridade a fim de tornar o problema tratável via métodos de otimização clássicos, as quais são apresentadas a seguir.

3.2 Reformulações das Restrições de Complementaridade

Nesta seção são apresentadas reformulações para as restrições de complementaridade encontradas na literatura, sejam elas na área da engenharia elétrica ou nas demais áreas.

3.2.1 Reformulação de Benson, Shanno e Vanderbei (2002)

Esses autores propuseram três maneiras de reformulação das restrições de complementaridade da forma $0 \leq g(x) \perp h(x) \geq 0$, com desigualdades simples utilizando variáveis de folga.

- Tais restrições podem ser escritas como pares complementares:

$$g(x) \geq 0 \quad (3.1)$$

$$h(x) \geq 0 \quad (3.2)$$

$$g_i(x)h_i(x) = 0, i = 1, \dots, m. \quad (3.3)$$

- Um conjunto de restrições relaxadas:

$$g(x) - w = 0 \quad (3.4)$$

$$h(x) \geq 0 \quad (3.5)$$

$$w \geq 0 \quad (3.6)$$

$$w_i(x)h_i(x) = 0, i = 1, \dots, m. \quad (3.7)$$

- Todas as restrições relaxadas:

$$g(x) - w = 0 \quad (3.8)$$

$$h(x) - s = 0 \quad (3.9)$$

$$w \geq 0 \quad (3.10)$$

$$s \geq 0 \quad (3.11)$$

$$w_i(x)s_i(x) = 0, i = 1, \dots, m. \quad (3.12)$$

Segundo os autores, as três reformulações apresentam bom desempenho. A escolha de qual delas utilizar deve ser baseada na preferência do usuário e da linguagem de modelagem, pois cada algoritmo tem um desempenho diferente.

Na presença de limites inferiores (l) e superiores (L) na restrição de complementaridade $l \leq g(x) \leq L \perp h(x)$, Benson, Shanno e Vanderbei (2002) utilizam um par de

desigualdades para reformular da seguinte forma:

$$l \leq g(x) \leq L \quad (3.13)$$

$$(g_i(x) - l_i)h_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \quad (3.14)$$

$$(g_i(x) - L_i)h_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m. \quad (3.15)$$

Os autores realizaram testes utilizando o método de pontos interiores com o *solver* LOQO na resolução de problemas de programação matemática com restrições de equilíbrio.

3.2.2 Reformulação de Rosehart, Roman e Schellenberg (2005)

Em 2005, Rosehart, Roman e Schellenberg (2005) propuseram modelar o controle de magnitude de tensão de barras de geração por meio de restrições de complementaridade no problema de máximo carregamento. Os autores utilizam desigualdades equivalentes para tratar essas restrições e obtêm um problema de programação não linear, o qual é resolvido pelo método de pontos interiores. Os autores reformularam a restrição de complementaridade ($x^{min} \leq x \leq x^{max} \perp F(x)$) conforme descrito a seguir. Inicialmente define-se $F(x)$ em função de duas variáveis a e b não negativas como em (3.16).

Os autores utilizam desigualdades válidas para tratar essas restrições, obtendo um problema de programação não linear o qual é resolvido pelo método de pontos interiores

$$F(x) = a - b. \quad (3.16)$$

Assim, a restrição $x^{min} \leq x \leq x^{max} \perp F(x)$ pode ser representada por:

$$0 \leq x - x^{min} \perp a \geq 0 \quad (3.17)$$

$$0 \leq x^{max} - x \perp b \geq 0. \quad (3.18)$$

As restrições (3.16), (3.17) e (3.18), satisfazem a restrição de complementaridade apresentada em (2.22), (2.23) e (2.24) pois tem-se:

1. se $x = x^{min}$, então $a \geq 0$ e $b = 0 \Rightarrow F(x) \geq 0$;
2. se $x = x^{max}$, então $a = 0$ e $b \geq 0 \Rightarrow F(x) \leq 0$;
3. se $x^{min} < x < x^{max}$, então $a = 0$ e $b = 0 \Rightarrow F(x) = 0$.

A maior dificuldade na resolução desse tipo de restrição ocorre quando a condição de complementaridade é satisfeita de forma não estrita, ou seja, $x = F(x) = 0$. Segundo os autores, uma maneira de resolver esse problema é obter uma formulação equivalente convertendo as igualdades que definem a condição de complementaridade em (3.17) e

(3.18) em restrições de desigualdade $((x - x^{min})a \leq 0$ e $(x^{max} - x)b \leq 0$), resultando na reformulação apresentada abaixo:

$$F(x) = a - b \quad (3.19)$$

$$(x - x^{min})a \leq 0 \quad (3.20)$$

$$(x^{max} - x)b \leq 0 \quad (3.21)$$

$$x - x^{min} \geq 0 \quad (3.22)$$

$$x^{max} - x \geq 0 \quad (3.23)$$

$$a \geq 0 \quad (3.24)$$

$$b \geq 0. \quad (3.25)$$

Então, primeiramente isola-se em (3.19), a e b :

$$a = F(x) + b \quad (3.26)$$

$$b = a - F(x). \quad (3.27)$$

Depois substituiu-se em (3.20) e (3.21), respectivamente, a e b encontrados.

$$x^{min} \leq x \leq x^{max} \quad (3.28)$$

$$F(x) = a - b \quad (3.29)$$

$$(x - x^{min})F(x) \leq -(x - x^{min})b \quad (3.30)$$

$$-(x^{max} - x)F(x) \leq -(x^{max} - x)a \quad (3.31)$$

$$a \geq 0 \quad (3.32)$$

$$b \geq 0. \quad (3.33)$$

Percebe-se que nas restrições (3.30) e (3.31), como $(x - x^{min})$ e $(x^{max} - x)$ são não negativos, e a e b são não negativos, determina-se que o maior valor possível para lado direito das inequações é zero. Portanto, é possível remover a dependência das variáveis a e b no problema, e tem-se a seguinte reformulação para o problema de complementaridade, $x^{min} \leq x \leq x^{max} \perp F(x)$:

$$x^{min} \leq x \leq x^{max} \quad (3.34)$$

$$(x - x^{min})F(x) \leq 0 \quad (3.35)$$

$$(x - x^{max})F(x) \leq 0. \quad (3.36)$$

Os autores adotaram o método de pontos interiores para resolver o problema através do *solver* LOQO na linguagem AMPL.

3.2.3 Reformulação pela Função Fischer-Burmeister

Outra abordagem proposta para reformular as restrições de complementaridade $0 \leq a \perp b \geq 0$ é através da função Fischer-Burmeister, de acordo com Petoussis, Zhang e Godfrey (2007), Jin e Ryan (2011) e Almeida e Senna (2011). A função é dada matematicamente por:

$$\psi(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (3.37)$$

As propriedades da função satisfazem e são equivalentes às da condições da complementaridade e vice-versa, como:

$$\psi(a, b) = 0 \leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, ab = 0. \quad (3.38)$$

Petoussis, Zhang e Godfrey (2007) aplicaram essa reformulação das restrições de complementaridade na análise de equilíbrio do mercado de energia e o método utilizado no problema resultante foi o de pontos interiores. Jin e Ryan (2011) investigaram o problema de programação binível na expansão da capacidade no mercado de energia através do *solver* DICOPT no GAMS. Almeida e Senna (2011) aplicaram essa reformulação das restrições de complementaridade no despacho de potência ótimo ativo e reativo, o método utilizado no problema resultante foi o de pontos interiores, o programa foi escrito no MATLAB 7.8.

3.2.4 Reformulação de Lage (2013)

Lage (2013) utiliza como método de resolução a função lagrangiana barreira modificada-penalidade para resolver o problema do FPO com restrições de complementaridade, e reformula o problema $x^{min} \leq x \leq x^{max} \perp F(x)$, da seguinte forma:

Para reescrever o problema (2.21), primeiramente o autor desmembrou as restrições canalizadas em duas desigualdades (3.39) e (3.40).

$$0 \leq x - x^{min} \quad (3.39)$$

$$0 \leq x^{max} - x. \quad (3.40)$$

Depois foram definidas duas variáveis não negativas a e $b \in \mathbb{R}^n$, e reescritas expressando as restrições de complementaridade em função de a e b .

$$F(x) = a - b. \quad (3.41)$$

$$0 \leq x - x^{min} \perp a \geq 0 \quad (3.42)$$

$$0 \leq x^{max} - x \perp b \geq 0. \quad (3.43)$$

Estas restrições satisfazem (3.16) - (3.18), e podem ser expressas por:

$$F(x) = a - b \quad (3.44)$$

$$(x - x^{\min})a = 0 \quad (3.45)$$

$$(x^{\max} - x)b = 0 \quad (3.46)$$

$$x - x^{\min} \geq 0 \quad (3.47)$$

$$x^{\max} - x \geq 0 \quad (3.48)$$

$$a \geq 0 \quad (3.49)$$

$$b \geq 0. \quad (3.50)$$

No próximo capítulo são apresentadas as propostas de reformulação da restrição de complementaridade, a primeira via programação inteira e a segunda via desigualdades válidas, e o método de otimização utilizado.

4 Metodologia de Solução Proposta

Este trabalho propõe duas técnicas de solução para o problema matemático resultante do modelo proposto por Lage (2013) descrito em (2.47) - (2.56). A primeira proposta trata-se de uma reformulação das restrições de complementaridade via programação inteira, e a segunda trata-se de uma reformulação destas restrições por desigualdades equivalentes proposta por Rosehart, Roman e Schellenberg (2005). O problema de FPOR com restrições de comportamento dos dispositivos de controle resultante das reformulações, por ser um problema não linear inteiro misto, é resolvido pelo método *branch-and-bound* por meio do *solver* BONMIN (*Basic Open-source Nonlinear Mixed Integer programming*).

4.1 Propostas de Solução

4.1.1 Proposta 1: Reformulação da Restrição de Complementaridade via Programação Inteira

No modelo de FPOR proposto por Lage (2013), tem-se restrições de complementaridade com limites inferiores e superiores. Devido à dificuldade de resolver problemas de otimização com esse tipo de restrição propõe-se neste trabalho uma nova reformulação para essas restrições utilizando desigualdades equivalentes e programação inteira mista.

Para reescrever o problema $x^{min} \leq x \leq x^{max} \perp F(x)$ propõe-se neste trabalho desmembrar as restrições canalizadas em duas desigualdades e define-se $F(x)$ em função de duas variáveis não negativas a e $b \in \mathbb{R}$, como em Rosehart, Roman e Schellenberg (2005).

$$F(x) = a - b. \quad (4.1)$$

O problema é então reescrito, expressando em função de a e b as restrições de complementaridade.

$$0 \leq x - x^{min} \perp a \geq 0 \quad (4.2)$$

$$0 \leq x^{max} - x \perp b \geq 0. \quad (4.3)$$

Estas restrições satisfazem às condições de complementaridade apresentadas em (2.22) - (2.24).

1. se $x = x^{min}$, $a \geq 0$ e $b = 0$ então $F(x) \geq 0$;
2. se $x^{min} < x < x^{max}$, $a = 0$ e $b = 0$ então $F(x) = 0$;

3. se $x = x^{max}$, $a = 0$ e $b \geq 0$ então $F(x) \leq 0$.

Representando (4.1) - (4.3) utilizando PNL, tem-se a reformulação (4.4)-(4.10) apresentada por Lage (2013) para a restrição de complementaridade.

$$F(x) = a - b \quad (4.4)$$

$$(x - x^{min})a = 0 \quad (4.5)$$

$$(x^{max} - x)b = 0 \quad (4.6)$$

$$x - x^{min} \geq 0 \quad (4.7)$$

$$x^{max} - x \geq 0 \quad (4.8)$$

$$a \geq 0 \quad (4.9)$$

$$b \geq 0. \quad (4.10)$$

Para tratar as variáveis discretas relativas aos dispositivos de controle no modelo de FPOR, propõe-se neste trabalho reescrever as restrições (4.4)-(4.10) utilizando-se de estratégias definidas na programação inteira mista, obtendo assim (4.11) à (4.20).

$$\min \quad f(x) + y_1 + y_2 \quad (4.11)$$

s.a :

$$F(x) = a - b \quad (4.12)$$

$$M(1 - y_1) \geq a \quad (4.13)$$

$$x - x^{min} \leq y_1 M \quad (4.14)$$

$$M(1 - y_2) \geq b \quad (4.15)$$

$$x^{max} - x \leq y_2 M \quad (4.16)$$

$$x - x^{min} \geq 0 \quad (4.17)$$

$$x^{max} - x \geq 0 \quad (4.18)$$

$$a, b \geq 0 \quad (4.19)$$

$$y_1, y_2 \in \{0, 1\}, \quad (4.20)$$

onde M é um número suficientemente grande.

De maneira que as restrições (4.13)-(4.14) são equivalentes a restrição (4.5), e as restrições (4.15)-(4.16) são equivalentes a restrição (4.6).

Assim as restrições (2.53), (2.55) e (2.56) do modelo proposto por Lage (2013) podem ser reformuladas conforme (4.11) - (4.20) resultando no modelo de PNLIM (4.21) - (4.46) que é equivalente ao modelo (2.47) - (2.56).

$$\min \sum_{k,m \in LUT} g_{km} \left(\frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 + V_m^2 - 2 \frac{1}{t_{km}} V_k V_m \cos \theta_{km} \right) + \sum_{k,m \in T} y_{t_{km}} + \sum_{k \in B_{SH}} y_{b_k} \quad (4.21)$$

s.a:

$$P_k^G - P_k^C - \sum_{m \in L_k} P_{km}(V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in B' \quad (4.22)$$

$$Q_k^G - Q_k^C + b_k^{sh} V_k^2 - \sum_{m \in L_k} Q_{km}(V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in B_L \quad (4.23)$$

$$Q_k^{min} \leq Q_k^C - b_k^{sh} V_k^2 + \sum_{m \in L_k} Q_{km}(V, \theta, t) \leq Q_k^{max} \quad \forall k \in B_{CR} \quad (4.24)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad \forall k \in B \quad (4.25)$$

$$b_k^{sh} \in D_k^{SH} \quad \forall k \in B_{SH} \quad (4.26)$$

$$t_{km} \in D_{km}^T \quad \forall (k, m) \in T \quad (4.27)$$

$$\Delta t_{km} = t_{a_{km}} - t_{b_{km}} \quad \forall (k, m) \in K \quad (4.28)$$

$$M(1 - y_{t_{km}}) \geq t_{a_{km}} \quad \forall (k, m) \in K \quad (4.29)$$

$$x - x^{min} \leq y_{t_{km}} M \quad \forall (k, m) \in K \quad (4.30)$$

$$M(1 - y_{t_{km}}) \geq t_{b_{km}} \quad \forall (k, m) \in K \quad (4.31)$$

$$x^{max} - x \leq y_{t_{km}} M \quad \forall (k, m) \in K \quad (4.32)$$

$$- \Delta t_{km} = t_{a_{km}} - t_{b_{km}} \quad \forall (k, m) \in M \quad (4.33)$$

$$M(1 - y_{t_{km}}) \geq t_{a_{km}} \quad \forall (k, m) \in M \quad (4.34)$$

$$x - x^{min} \leq y_{t_{km}} M \quad \forall (k, m) \in M \quad (4.35)$$

$$M(1 - y_{t_{km}}) \geq t_{b_{km}} \quad \forall (k, m) \in M \quad (4.36)$$

$$x^{max} - x \leq y_{t_{km}} M \quad \forall (k, m) \in M \quad (4.37)$$

$$\Delta b_k^{sh} = b_{a_k}^{sh} - b_{b_k}^{sh} \quad \forall k \in B_{SH} \quad (4.38)$$

$$M(1 - y_{b_k}) \geq b_{a_k}^{sh} \quad \forall k \in B_{SH} \quad (4.39)$$

$$x - x^{min} \leq y_{b_k} M \quad \forall k \in B_{SH} \quad (4.40)$$

$$M(1 - y_{b_k}) \geq b_{b_k}^{sh} \quad \forall T \in B_{SH} \quad (4.41)$$

$$x^{max} - x \leq y_{b_k} M \quad \forall k \in B_{SH} \quad (4.42)$$

$$b_{a_k}^{sh}, b_{b_k}^{sh} \geq 0 \quad \forall k \in B_{SH} \quad (4.43)$$

$$t_{a_{km}}, t_{b_{km}} \geq 0 \quad \forall (k, m) \in T \quad (4.44)$$

$$y_{t_{km}} \in \{0, 1\} \quad \forall (k, m) \in T \quad (4.45)$$

$$y_{b_k} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in B_{SH}, \quad (4.46)$$

onde M é um número suficientemente grande, $t_{a_{km}}$, $t_{b_{km}}$, $b_{a_k}^{sh}$ e $b_{b_k}^{sh}$ são as variáveis não negativas a e b adicionadas na reformulação da restrição de complementaridade referente ao conjunto de restrições do *tap* dos transformadores e do banco de capacitores e reatores *shunt*, $y_{t_{km}}$ e y_{b_k} são as variáveis binárias adicionadas na reformulação referente ao conjunto de restrições do *tap* dos transformadores e do banco de capacitores e reatores *shunt*.

4.1.1.1 Estimativa M

Uma boa estimativa dos valores utilizados para M esta diretamente relacionada com a eficiência do modelo proposto (4.21) - (4.46), de forma que quanto menor o valor de M melhor.

O menor valor estimado que M pode assumir é o maior valor entre o ajuste máximo dos dispositivos de controle e a diferença entre o limite inferior e superior da magnitude de tensão. Como essa estimativa depende do ajuste dos dispositivos de controle e eles pertencem a conjuntos discretos distintos, utiliza-se valores diferentes para M nas restrições referentes ao *tap* dos transformadores e susceptância *shunt*.

4.1.2 Proposta 2: Reformulação das Restrições de Complementaridade via Desigualdades Válidas

A segunda proposta consiste em utilizar a reformulação para as restrições de complementaridade via desigualdades válidas proposta por Rosehart, Roman e Schellenberg (2005) para a solução do FPOR com restrições no comportamento dos dispositivos de controle de tensão proposto em Lage (2013) e descrito em (2.47) - (2.56). O desenvolvimento dessa reformulação foi apresentado na seção 3.2.

Assim as restrições (2.53), (2.55) e (2.56) podem ser reformuladas conforme (3.34) - (3.36), e tem-se o problema de PNLIM (4.47) - (4.59) que é equivalente ao modelo (2.47) - (2.56).

$$\min \sum_{k,m \in L \cup T} g_{km} \left(\frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 + V_m^2 - 2 \frac{1}{t_{km}} V_k V_m \cos \theta_{km} \right) \quad (4.47)$$

s.a:

$$P_k^G - P_k^C - \sum_{m \in L_k} P_{km} (V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in B' \quad (4.48)$$

$$Q_k^G - Q_k^C + b_k^{sh} V_k^2 - \sum_{m \in L_k} Q_{km} (V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in B_L \quad (4.49)$$

$$Q_k^{min} \leq Q_k^C - b_k^{sh} V_k^2 + \sum_{m \in L_k} Q_{km} (V, \theta, t) \leq Q_k^{max} \quad \forall k \in B_{CR} \quad (4.50)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad \forall k \in B \quad (4.51)$$

$$b_k^{sh} \in D_k^{SH} \quad \forall k \in B_{SH} \quad (4.52)$$

$$t_{km} \in D_{km}^T \quad \forall (k, m) \in T \quad (4.53)$$

$$(V_k - V_k^{min}) \Delta t_{km} \leq 0 \quad \forall (k, m) \in K \quad (4.54)$$

$$(V_k - V_k^{max}) \Delta t_{km} \leq 0 \quad \forall (k, m) \in K \quad (4.55)$$

$$(V_m - V_m^{min}) (-\Delta t_{km}) \leq 0 \quad \forall (k, m) \in M \quad (4.56)$$

$$(V_m - V_m^{max}) (-\Delta t_{km}) \leq 0 \quad \forall (k, m) \in M \quad (4.57)$$

$$(V_k - V_k^{min}) \Delta b_k^{sh} \leq 0 \quad \forall k \in B_{SH} \quad (4.58)$$

$$(V_k - V_k^{max}) \Delta b_k^{sh} \leq 0 \quad \forall k \in B_{SH}. \quad (4.59)$$

em que Δt_{km} e Δb_k^{sh} representam a diferença entre o valor final e inicial da variável, ou seja, os ajustes nas variáveis relacionadas ao *tap* dos transformadores e banco de capacitores e reatores *shunt*, respectivamente.

Propõe-se neste trabalho resolver os PNLIM (4.21) - (4.46) e (4.47) - (4.59) resultantes das reformulações pelo método *branch-and-bound*.

4.2 Método de Otimização

O *solver* utilizado na resolução do PNLIM resultante da reformulação proposta foi o BONMIN, um código aberto para resolver problemas gerais de PNLIM. Ele possui seis algoritmos diferentes para resolver problemas de PNLIM, dentre eles o algoritmo B-BB que utiliza o método *branch-and-bound*, o qual é baseado na resolução de problemas contínuos em cada nó da árvore de busca e ramificação das variáveis (BONAMI; LEE, 2007).

O método *branch-and-bound* foi originalmente proposto para problemas de programação inteira mista, mas foi adaptado para problemas com funções não lineares. A ideia do método é relaxar o problema com variáveis inteiras e dividir o problema relaxado em vários subproblemas até encontrar soluções inteiras ou não factíveis.

A seguir descrevemos brevemente este método, para isso considere o PNLIM:

$$\min f(x) \quad (4.60)$$

s.a:

$$h(x, y) = 0 \quad (4.61)$$

$$g(x, y) \leq 0 \quad (4.62)$$

$$x^{\min} \leq x \leq x^{\max} \quad (4.63)$$

$$y_i \in D_{y_i}, i = 1, \dots, n_y, \quad (4.64)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

O método inicia-se resolvendo a relaxação contínua do problema acima:

$$\min f(x) \quad (4.65)$$

s.a:

$$h(x, y_i) = 0 \quad (4.66)$$

$$g(x, y_i) \leq 0 \quad (4.67)$$

$$x^{\min} \leq x \leq x^{\max} \quad (4.68)$$

$$y_i^{\min} \leq y \leq y_i^{\max}, i = 1, \dots, n_y, \quad (4.69)$$

em que $y^{\min} = \text{Min}\{D_{y_i}\}$ e $y^{\max} = \text{Max}\{D_{y_i}\}$, $i = 1, \dots, n_y$. Se na solução desse problema for obtido $y_i \in D_{y_i}$, então a solução encontrada é ótima para o problema inicial. Caso contrário, uma variável y_L cuja solução obtida não é discreta é escolhida para ramificação e a região factível do problema (4.65) - (4.69) é dividida em dois subproblemas. Um subproblema com a restrição adicional de que a variável y_L é menor ou igual ao valor discreto mais próximo inferiormente (s^{inf}) e outro subproblema com a restrição adicional de que a variável y_L é maior ou igual ao valor discreto mais próximo superiormente (s^{sup}), da seguinte maneira:

$$\min f(x) \quad (4.70)$$

s.a:

$$h(x, y_i) = 0 \quad (4.71)$$

$$g(x, y_i) \leq 0 \quad (4.72)$$

$$x^{\min} \leq x \leq x^{\max} \quad (4.73)$$

$$y_i^{\min} \leq y \leq y_i^{\max} \quad (4.74)$$

$$y_L \leq s^{\text{inf}}. \quad (4.75)$$

$$\min f(x) \quad (4.76)$$

s.a:

$$h(x, y_i) = 0 \quad (4.77)$$

$$g(x, y_i) \leq 0 \quad (4.78)$$

$$x^{\min} \leq x \leq x^{\max} \quad (4.79)$$

$$y_i^{\min} \leq y \leq y_i^{\max} \quad (4.80)$$

$$y_L \geq s^{\sup}. \quad (4.81)$$

De acordo com Soler (2011), cada subproblema é um nó da árvore *branch-and-bound*, e a solução de cada um fornece um limitante. Se sua solução é discreta, então esta sub-região não é mais explorada. Uma sub-região é descartada caso a melhor solução discreta encontrada até o momento for melhor que seu limitante, caso contrário esta é explorada recursivamente. Criando assim, uma árvore de subproblemas, e o método para quando não há mais sub-regiões para serem exploradas. A Figura 4.1 exemplifica a ramificação, em que N^0 é o nó inicial, P^0 é o problema inicial relaxado, N^j e P^j com $j = 1, \dots, 4$. são respectivamente os nós de ramificação da árvore do *branch-and-bound* e os subproblemas.

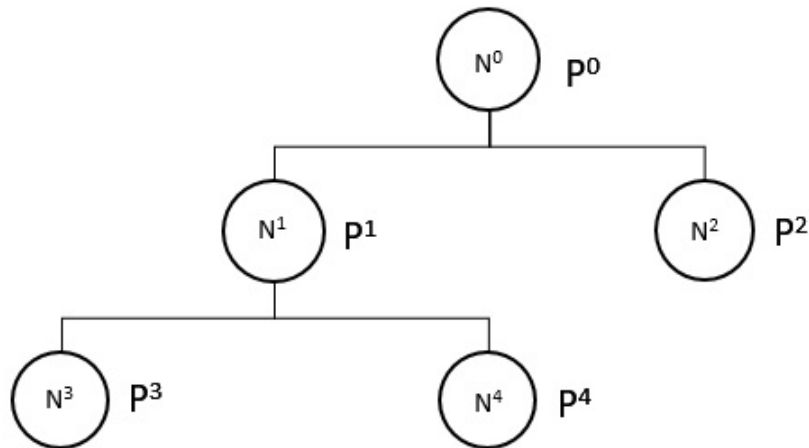


Figura 4.1 – Árvore de ramificação do *branch-and-bound*.

No próximo capítulo são apresentados testes numéricos para validação das abordagens propostas para resolução do problema.

5 Testes Numéricos

Para validação das duas abordagens propostas para resolução do problema de FPOR com restrições de atuação dos dispositivos de controle de tensão, foram realizados testes computacionais com os sistemas elétricos IEEE 14, 30, 118 barras, cujos dados se encontram no Apêndice A. Para realização dos testes foi utilizado o *software* GAMS versão 24.5.4 e o *solver* BONMIN versão 1.8. Todos os testes foram realizados em um computador LG que possui processador Intel Core i7-4790 de 3.60GHz e 16GB de RAM.

Para analisar os resultados obtidos com as abordagens propostas, uma comparação direta dos resultados obtidos nos testes numéricos com a reformulação das restrições de complementaridade proposta por Lage (2013) foi realizado, bem como com o problema de FPOR sem as restrições de complementaridade. Como considera-se a natureza discreta das variáveis *tap* dos transformadores e bancos de capacitores e reatores *shunt* em todos os casos, tem-se problemas de PNLIM, os quais foram resolvidos pelo *solver* BONMIN. Inicializa-se as variáveis em todos os casos com os mesmos valores.

5.1 Sistema Elétrico IEEE 14 barras

A seguir são apresentadas as características do sistema elétrico IEEE 14 barras:

- 1 barra de geração ou *slack*;
- 4 barras de controle de reativos;
- 9 barras de carga;
- 1 banco de capacitores *shunt* variável;
- 3 transformadores de *tap* variável;
- 17 linhas de transmissão.

Como a natureza dos dispositivos de controle de tensão é discreta, foi considerado que a susceptância equivalente dos bancos de capacitores e reatores *shunt* podem assumir somente os seguintes valores $b_9^{sh} \in \{0;0.05;0.15;0.19;0.20;0.24;0.34;0.39\}$, e os valores dos *tap* variáveis nas linhas fossem de 0.95 a 1.05 p.u., com o passo de 0.01 p.u. Os valores iniciais considerados para esses dispositivos são apresentados na Tabela 5.1. Os limites inferiores e superiores considerados para as magnitudes de tensão foram, 0.95 e 1.05 p.u., respectivamente.

Para a proposta 1, na reformulação (4.21) - (4.46) referente aos *tap* variáveis foi utilizado $M = 0.15$, e na reformulação referente aos bancos de capacitores e reatores *shunt* foi utilizado $M = 0.39$.

Tabela 5.1 – Valores iniciais das variáveis de controle discretas do sistema elétrico IEEE 14 barras.

Variável de Controle	Barra Controlada	Valor Inicial
b_9^{sh}	9	0.19
t_{4-7}	7	0.98
t_{4-9}	9	0.97
t_{5-6}	6	0.93

Os modelos para o problema de FPOR com restrição de atuação dos dispositivos de controle de tensão reformulados como proposto neste trabalho foram resolvidos pela proposta 1 com o tempo de 1.703 segundos e o valor obtido para a função objetivo foi de 13.780982MW e pela proposta 2 o tempo de 1.214 segundos e o valor obtido para a função objetivo foi de 13.780982MW. As magnitudes e os ângulos de tensão obtidos são apresentados na Tabela 5.2. Os valores discretos obtidos para os dispositivos de controle de tensão, *tap* dos transformadores nas linhas de transmissão e da susceptância *shunt* na barra 9, ambos em p.u. são apresentados na Tabela 5.3.

Tabela 5.2 – Magnitudes e ângulos de tensão nas barras nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 14 barras.

Barra	Proposta 1		Proposta 2	
	V (p.u.)	$\theta(\text{radianos})$	V (p.u.)	$\theta(\text{radianos})$
1	1.050	0.000	1.050	0.000
2	1.037	-0.089	1.037	-0.089
3	1.008	-0.227	1.008	-0.227
4	1.015	-0.184	1.015	-0.184
5	1.016	-0.158	1.016	-0.158
6	1.050	-0.261	1.050	-0.261
7	1.019	-0.241	1.019	-0.241
8	1.050	-0.241	1.050	-0.241
9	1.014	-0.270	1.014	-0.270
10	1.013	-0.273	1.013	-0.273
11	1.028	-0.269	1.028	-0.269
12	1.033	-0.276	1.033	-0.276
13	1.027	-0.277	1.027	-0.277
14	1.001	-0.292	1.001	-0.292

Tabela 5.3 – Dispositivos de controle de tensão nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 14 barras.

Variável de controle	Valor inicial	Proposta 1		Proposta 2	
		Solução obtida	Δ_{sh} ou Δ_t	Solução obtida	Δ_{sh} ou Δ_t
b_9^{sh}	0.19	0.19	$\Delta_{sh_9}=0$	0.19	$\Delta_{sh_9}=0$
t_{4-7}	0.98	0.98	$\Delta_{t_{4-7}} = 0$	0.98	$\Delta_{t_{4-7}} = 0$
t_{4-9}	0.97	0.97	$\Delta_{t_{4-9}} = 0$	0.97	$\Delta_{t_{4-9}} = 0$
t_{5-6}	0.93	1.05	$\Delta_{t_{5-6}} > 0$	1.05	$\Delta_{t_{5-6}} > 0$

Através da Figura 5.1 e da Tabela 5.3, pode-se observar a condição da restrição de complementaridade (2.38)-(2.40) sendo satisfeita para o comportamento do *tap* dos transformadores e (2.42)-(2.44) para o banco de capacitores e reatores *shunt* na barra, dessa forma validando os modelos de reformulação propostos. Na Figura 5.1 ambas as propostas obtiveram mesmos valores para magnitude de tensão em todas as barras controladas.

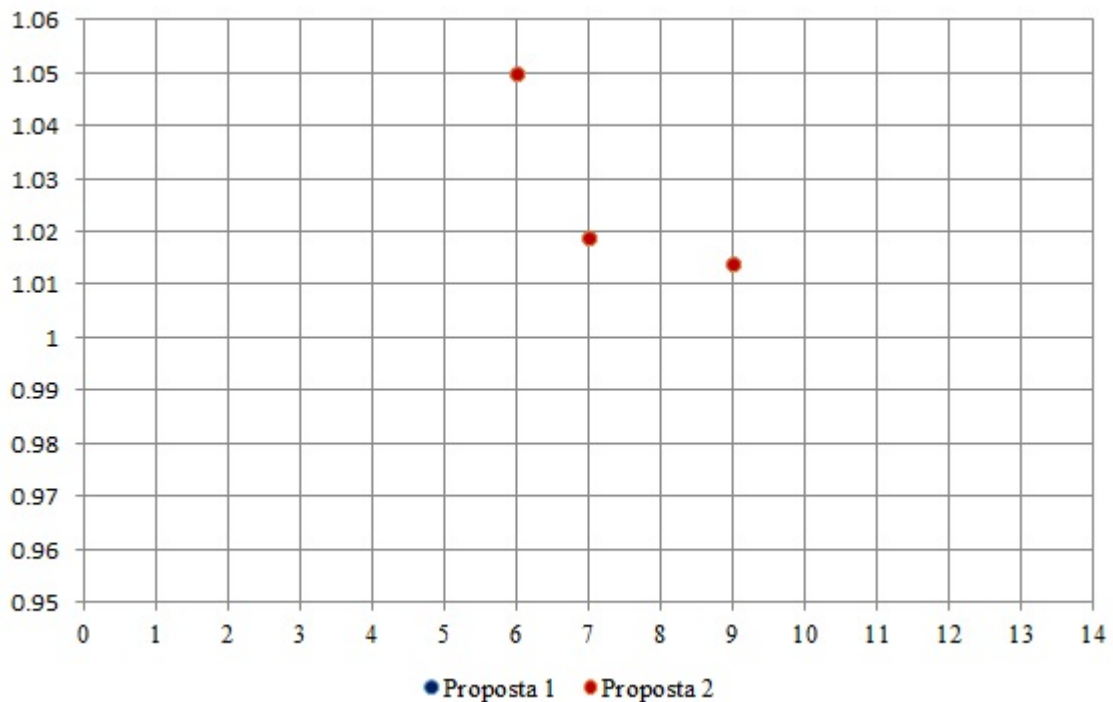


Figura 5.1 – Barra controlada versus magnitude de tensão.

5.2 Sistema Elétrico IEEE 30 barras

A seguir são apresentadas as características do sistema elétrico IEEE 30 barras:

- 1 barra de geração ou *slack*;

- 5 barras de controle de reativos;
- 24 barras de carga;
- 2 bancos de capacitores *shunt* variáveis;
- 4 transformadores de *tap* variável;
- 37 linhas de transmissão.

Como a natureza dos dispositivos de controle de tensão é discreta, foi considerado que a susceptância equivalente dos bancos de capacitores e reatores *shunt* podem assumir somente os seguintes valores:

$$b_{10}^{sh} \in \{0;0.05;0.15;0.19;0.20;0.24;0.34;0.39\}$$

$$b_{24}^{sh} \in \{0;0.04;0.05;0.09\}$$

Os valores dos *tap* variáveis nas linhas de 0.95 a 1.05 p.u., com o passo de 0.01 p.u. Os valores iniciais considerados para esses dispositivos são apresentados na Tabela 5.4. Os limites inferiores e superiores considerados para as magnitudes de tensão foram, 0.95 e 1.1 p.u., respectivamente.

Para a proposta 1, na reformulação (4.21) - (4.46) referente aos *tap* variáveis foi utilizado $M = 0.15$, e na reformulação referente aos bancos de capacitores e reatores *shunt* foi utilizado $M = 0.39$.

Tabela 5.4 – Valores iniciais das variáveis de controle discretas do sistema elétrico IEEE 30 barras.

Variável de Controle	Barra Controlada	Valor Inicial
b_{10}^{sh}	10	0.19
b_{24}^{sh}	24	0.04
t_{6-9}	9	0.98
t_{6-10}	10	0.97
t_{4-12}	12	0.95
t_{28-27}	27	0.97

Os modelos para o problema de FPOR com restrição de atuação dos dispositivos de controle de tensão reformulados como proposto neste trabalho foram resolvidos pela proposta 1 com o tempo de 3.266 segundos e o valor obtido para a função objetivo foi de 16.31061MW e pela proposta 2 o tempo de 1.641 segundos e o valor obtido para a função objetivo foi de 16.31061MW. As magnitudes e os ângulos de tensão encontrados nas barras são apresentados na Tabela 5.5. Os valores discretos encontrados para os dispositivos de controle de tensão, *tap* dos transformadores nas linhas de transmissão e das susceptâncias

shunt nas barras, ambos em p.u., são apresentados na Tabela 5.6.

Tabela 5.5 – Magnitudes e ângulos de tensão nas barras nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 30 barras.

Barra	Proposta 1		Proposta 2	
	V (p.u.)	$\theta(\text{radianos})$	V (p.u.)	$\theta(\text{radianos})$
1	1.100	0.000	1.100	0.000
2	1.073	-0.084	1.073	-0.084
3	1.064	-0.122	1.064	-0.122
4	1.056	-0.151	1.056	-0.151
5	1.042	-0.228	1.042	-0.228
6	1.050	-0.179	1.050	-0.179
7	1.039	-0.208	1.039	-0.208
8	1.050	-0.192	1.050	-0.192
9	1.040	-0.237	1.040	-0.237
10	1.025	-0.268	1.025	-0.268
11	1.081	-0.237	1.081	-0.237
12	1.021	-0.254	1.021	-0.254
13	1.053	-0.254	1.053	-0.254
14	1.007	-0.270	1.007	-0.270
15	1.005	-0.272	1.005	-0.272
16	1.015	-0.265	1.015	-0.265
17	1.017	-0.271	1.017	-0.271
18	0.999	-0.284	0.999	-0.284
19	0.999	-0.287	0.999	-0.287
20	1.005	-0.283	1.005	-0.283
21	1.011	-0.276	1.011	-0.276
22	1.011	-0.276	1.011	-0.276
23	0.997	-0.279	0.997	-0.279
24	0.996	-0.281	0.996	-0.281
25	0.992	-0.272	0.992	-0.272
26	0.973	-0.280	0.973	-0.280
27	0.998	-0.262	0.998	-0.262
28	1.047	-0.190	1.047	-0.190
29	0.977	-0.284	0.977	-0.284
30	0.966	-0.301	0.966	-0.301

Tabela 5.6 – Dispositivos de controle de tensão nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 30 barras.

Variável de controle	Valor inicial	Proposta 1		Proposta 2	
		Solução obtida	Δ_{sh} ou Δ_t	Solução obtida	Δ_{sh} ou Δ_t
b_{10}^{sh}	0.19	0.19	$\Delta_{sh9}=0$	0.19	$\Delta_{sh9}=0$
b_{24}^{sh}	0.04	0.04	$\Delta_{sh9}=0$	0.04	$\Delta_{sh9}=0$
t_{6-9}	0.98	0.98	$\Delta_{t_{4-7}} = 0$	0.98	$\Delta_{t_{4-7}} = 0$
t_{6-10}	0.97	0.97	$\Delta_{t_{4-9}} = 0$	0.97	$\Delta_{t_{4-9}} = 0$
t_{4-12}	0.95	0.95	$\Delta_{t_{5-6}} = 0$	0.95	$\Delta_{t_{5-6}} = 0$
t_{28-27}	0.97	0.97	$\Delta_{t_{5-6}} = 0$	0.97	$\Delta_{t_{5-6}} = 0$

Através da Figura 5.2 e da Tabela 5.6, pode-se observar a condição da restrição de complementaridade (2.38)-(2.40) sendo satisfeita para o comportamento do *tap* dos transformadores e (2.42)-(2.44) para o banco de capacitores e reatores *shunt* na barra, dessa forma validando os modelos de reformulação propostos. Na Figura 5.2 ambas as propostas obtiveram mesmos valores para magnitude de tensão em todas as barras controladas.

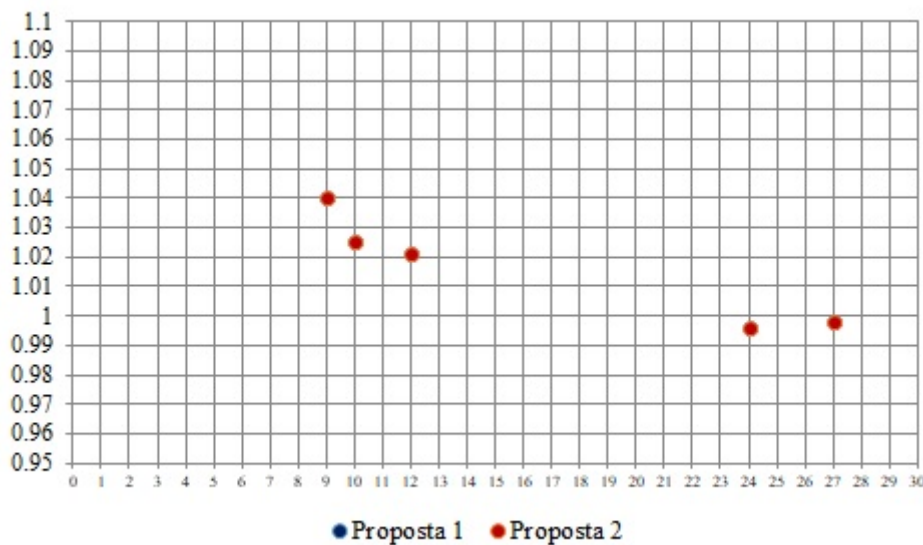


Figura 5.2 – Barra controlada versus magnitude de tensão.

5.3 Sistema Elétrico IEEE 118 barras

A seguir são apresentadas as características do sistema elétrico IEEE 118 barras:

- 1 barra de geração ou *slack*;
- 53 barras de controle de reativos;

- 64 barras de carga;
- 14 bancos de capacitores *shunt* variáveis;
- 9 transformadores de *tap* variável;
- 186 linhas de transmissão.

Foi considerado para os *tap* variáveis nas linhas os valores de 0.95 a 1.05 p.u., com o passo de 0.01 p.u. Os valores iniciais considerados para esses dispositivos são apresentados na Tabela 5.7. Os limites inferiores e superiores considerados para as magnitudes de tensão foram, 0.95 e 1.1 p.u., respectivamente. A susceptância equivalente dos bancos de capacitores e reatores *shunt* podem assumir somente os seguintes valores:

$$b_5^{sh} \in \{-0.40; -0.20; 0\}$$

$$b_{34}^{sh} \in \{0; 0.06; 0.07; 0.13; 0.14; 0.20\}$$

$$b_{37}^{sh} \in \{-0.25; -0.20; 0\}$$

$$b_{44}^{sh} \in \{0; 0.10\}$$

$$b_{45}^{sh} \in \{0; 0.10\}$$

$$b_{46}^{sh} \in \{0; 0.10\}$$

$$b_{48}^{sh} \in \{0; 0.15\}$$

$$b_{74}^{sh} \in \{0.08; 0.12; 0.20\}$$

$$b_{79}^{sh} \in \{0.10; 0.20\}$$

$$b_{82}^{sh} \in \{0.10; 0.20\}$$

$$b_{83}^{sh} \in \{0.10; 0.20\}$$

$$b_{105}^{sh} \in \{0.10; 0.20\}$$

$$b_{107}^{sh} \in \{0; 0.06; 0.07; 0.13; 0.14; 0.20\}$$

$$b_{110}^{sh} \in \{0; 0.06; 0.07; 0.13; 0.14; 0.20\}$$

Para a proposta 1, na reformulação (4.21) - (4.46) referente aos *tap* variáveis foi utilizado $M = 0.15$, e na reformulação referente aos bancos de capacitores e reatores *shunt* foi utilizado $M = 0.40$.

Tabela 5.7 – Valores iniciais das variáveis de controle discretas do sistema elétrico IEEE 118 barras.

Variável de Controle	Barra Controlada	Valor Inicial
b_5^{sh}	5	-0.20
b_{34}^{sh}	34	0.14

b_{37}^{sh}	37	-0.20
b_{44}^{sh}	44	0.10
b_{45}^{sh}	45	0.10
b_{46}^{sh}	46	0.10
b_{48}^{sh}	48	0.15
b_{74}^{sh}	74	0.12
b_{79}^{sh}	79	0.20
b_{82}^{sh}	82	0.20
b_{83}^{sh}	83	0.10
b_{105}^{sh}	105	0.20
b_{107}^{sh}	107	0.06
b_{110}^{sh}	110	0.06
t_{8-5}	5	0.98
t_{26-25}	25	0.96
t_{30-17}	17	0.96
t_{38-37}	37	0.95
t_{63-59}	59	0.96
t_{64-61}	61	0.98
t_{65-66}	66	0.95
t_{68-69}	69	0.95
t_{81-80}	80	0.95

Os modelos para o problema de FPOR com restrição de atuação dos dispositivos de controle de tensão reformulados como proposto neste trabalho foram resolvidos pela proposta 1 com o tempo de 270.7 segundos e o valor obtido para a função objetivo foi de 124.980MW e pela proposta 2 o tempo de 130.68 segundos e o valor obtido para a função objetivo foi de 107.109MW. As magnitudes e os ângulos de tensão encontrados nas barras são apresentados na Tabela 5.8. Os valores discretos encontrados para os dispositivos de controle de tensão, *tap* dos transformadores nas linhas de transmissão e das susceptâncias *shunt* nas barras, ambos em p.u., são apresentados na Tabela 5.9.

Tabela 5.8 – Magnitudes e ângulos de tensão nas barras nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 118 barras.

Barra	Proposta 1		Proposta 2	
	V (p.u.)	$\theta(\text{radianos})$	V (p.u.)	$\theta(\text{radianos})$
1	1.069	-0.222	1.027	-0.225
2	1.077	-0.213	1.035	-0.215
3	1.076	-0.208	1.035	-0.210
4	1.099	-0.154	1.061	-0.152

5	1.100	-0.147	1.059	-0.143
6	1.091	-0.187	1.053	-0.187
7	1.090	-0.193	1.050	-0.193
8	1.078	-0.073	1.079	-0.062
9	1.100	0.041	1.100	0.051
10	1.096	0.162	1.096	0.172
11	1.086	-0.191	1.045	-0.191
12	1.089	-0.198	1.048	-0.198
13	1.074	-0.212	1.031	-0.213
14	1.087	-0.210	1.044	-0.211
15	1.087	-0.218	1.037	-0.219
16	1.086	-0.204	1.042	-0.204
17	1.100	-0.180	1.051	-0.177
18	1.089	-0.214	1.039	-0.214
19	1.086	-0.222	1.035	-0.223
20	1.075	-0.213	1.034	-0.213
21	1.070	-0.192	1.036	-0.192
22	1.073	-0.158	1.048	-0.156
23	1.087	-0.089	1.076	-0.086
24	1.083	-0.099	1.077	-0.095
25	1.100	0.025	1.100	0.030
26	1.100	0.055	1.100	0.061
27	1.083	-0.169	1.060	-0.167
28	1.077	-0.192	1.050	-0.191
29	1.077	-0.204	1.046	-0.204
30	1.081	-0.105	1.100	-0.095
31	1.080	-0.202	1.047	-0.201
32	1.082	-0.177	1.056	-0.176
33	1.086	-0.225	1.026	-0.226
34	1.097	-0.214	1.028	-0.213
35	1.095	-0.221	1.025	-0.220
36	1.095	-0.221	1.025	-0.220
37	1.100	-0.207	1.031	-0.205
38	1.064	-0.130	1.100	-0.119
39	1.078	-0.256	1.015	-0.261
40	1.076	-0.271	1.017	-0.280
41	1.071	-0.277	1.014	-0.287
42	1.078	-0.254	1.033	-0.263

43	1.088	-0.217	1.031	-0.218
44	1.086	-0.184	1.050	-0.186
45	1.082	-0.158	1.054	-0.160
46	1.100	-0.120	1.073	-0.120
47	1.097	-0.088	1.084	-0.090
48	1.100	-0.091	1.087	-0.094
49	1.099	-0.073	1.089	-0.077
50	1.088	-0.104	1.078	-0.109
51	1.072	-0.143	1.061	-0.148
52	1.066	-0.157	1.055	-0.162
53	1.066	-0.170	1.054	-0.176
54	1.079	-0.157	1.068	-0.163
55	1.078	-0.161	1.066	-0.166
56	1.078	-0.158	1.066	-0.164
57	1.080	-0.141	1.069	-0.146
58	1.073	-0.154	1.061	-0.159
59	1.100	-0.091	1.083	-0.093
60	1.098	-0.032	1.096	-0.034
61	1.100	-0.019	1.100	-0.021
62	1.096	-0.027	1.092	-0.030
63	1.048	-0.039	1.100	-0.039
64	1.049	-0.010	1.087	-0.012
65	1.048	0.047	1.098	0.040
66	1.100	0.040	1.100	0.034
67	1.093	-0.004	1.091	-0.008
68	1.035	0.052	1.097	0.043
69	1.100	0.000	1.100	0.0
70	1.039	-0.101	1.076	-0.098
71	1.042	-0.104	1.076	-0.101
72	1.059	-0.112	1.074	-0.108
73	1.041	-0.107	1.075	-0.104
74	1.005	-0.117	1.058	-0.112
75	1.004	-0.095	1.061	-0.092
76	0.958	-0.108	1.046	-0.102
77	0.961	-0.0008	1.086	-0.013
78	0.954	-0.004	1.082	-0.015
79	0.950	0.006	1.084	-0.007
80	0.957	0.063	1.100	0.038

81	1.032	0.056	1.096	0.042
82	0.950	0.011	1.079	0.0
83	0.950	0.031	1.081	0.018
84	0.952	0.075	1.084	0.054
85	0.961	0.101	1.092	0.076
86	0.950	0.080	1.087	0.059
87	0.958	0.088	1.100	0.064
88	0.977	0.155	1.089	0.124
89	1.004	0.225	1.100	0.184
90	1.006	0.109	1.084	0.091
91	1.030	0.100	1.088	0.089
92	0.996	0.121	1.090	0.099
93	0.980	0.071	1.081	0.057
94	0.973	0.035	1.079	0.026
95	0.953	0.020	1.068	0.012
96	0.953	0.021	1.077	0.010
97	0.950	0.034	1.084	0.018
98	0.969	0.023	1.093	0.012
99	1.037	-0.001	1.095	0.004
100	1.012	0.022	1.100	0.019
101	0.991	0.049	1.084	0.040
102	0.993	0.095	1.087	0.078
103	0.979	-0.038	1.091	-0.035
104	0.952	-0.088	1.082	-0.079
105	0.950	-0.109	1.079	-0.095
106	0.950	-0.115	1.072	-0.098
107	0.950	-0.168	1.067	-0.137
108	0.950	-0.131	1.076	-0.110
109	0.950	-0.139	1.075	-0.116
110	0.955	-0.154	1.075	-0.127
111	0.964	-0.124	1.083	-0.104
112	0.950	-0.207	1.060	-0.166
113	1.096	-0.181	1.050	-0.178
114	1.078	-0.181	1.053	-0.180
115	1.078	-0.182	1.053	-0.180
116	1.028	0.060	1.098	0.050
117	1.074	-0.220	1.033	-0.222
118	0.976	-0.108	1.048	-0.103

Tabela 5.9 – Dispositivos de controle de tensão nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 118 barras.

Variável de controle	Valor inicial	Proposta 1		Proposta 2	
		Solução obtida	Δ_{sh} ou Δ_t	Solução obtida	Δ_{sh} ou Δ_t
b_5^{sh}	-0.20	-0.20	$\Delta_{sh_5} = 0$	-0.20	$\Delta_{sh_5} = 0$
b_{34}^{sh}	0.14	0.14	$\Delta_{sh_{34}} = 0$	0.14	$\Delta_{sh_{34}} = 0$
b_{37}^{sh}	-0.20	-0.20	$\Delta_{sh_{37}} = 0$	-0.20	$\Delta_{sh_{37}} = 0$
b_{44}^{sh}	0.10	0.10	$\Delta_{sh_{44}} = 0$	0.10	$\Delta_{sh_{44}} = 0$
b_{45}^{sh}	0.10	0.10	$\Delta_{sh_{45}} = 0$	0.10	$\Delta_{sh_{45}} = 0$
b_{46}^{sh}	0.10	0.00	$\Delta_{sh_{46}} < 0$	0.10	$\Delta_{sh_{46}} = 0$
b_{48}^{sh}	0.15	0.15	$\Delta_{sh_{48}} = 0$	0.15	$\Delta_{sh_{48}} = 0$
b_{74}^{sh}	0.12	0.12	$\Delta_{sh_{74}} = 0$	0.12	$\Delta_{sh_{74}} = 0$
b_{79}^{sh}	0.20	0.20	$\Delta_{sh_{79}} = 0$	0.20	$\Delta_{sh_{79}} = 0$
b_{82}^{sh}	0.20	0.20	$\Delta_{sh_{82}} = 0$	0.20	$\Delta_{sh_{82}} = 0$
b_{83}^{sh}	0.10	0.10	$\Delta_{sh_{83}} = 0$	0.10	$\Delta_{sh_{83}} = 0$
b_{105}^{sh}	0.20	0.20	$\Delta_{sh_{105}} = 0$	0.20	$\Delta_{sh_{105}} = 0$
b_{107}^{sh}	0.06	0.13	$\Delta_{sh_{107}} > 0$	0.06	$\Delta_{sh_{107}} = 0$
b_{110}^{sh}	0.06	0.06	$\Delta_{sh_{110}} = 0$	0.06	$\Delta_{sh_{110}} = 0$
t_{8-5}	0.98	1.03	$\Delta_{t_{8-5}} > 0$	0.98	$\Delta_{t_{8-5}} = 0$
t_{26-25}	0.96	0.96	$\Delta_{t_{26-25}} = 0$	0.97	$\Delta_{t_{26-25}} > 0$
t_{30-17}	0.96	1.03	$\Delta_{t_{30-17}} > 0$	0.96	$\Delta_{t_{30-17}} = 0$
t_{38-37}	0.95	1.05	$\Delta_{t_{38-37}} > 0$	0.95	$\Delta_{t_{38-37}} = 0$
t_{63-59}	0.96	1.05	$\Delta_{t_{63-59}} > 0$	0.96	$\Delta_{t_{63-59}} = 0$
t_{64-61}	0.98	1.05	$\Delta_{t_{64-61}} > 0$	1.04	$\Delta_{t_{64-61}} > 0$
t_{65-66}	0.95	1.05	$\Delta_{t_{65-66}} > 0$	1.01	$\Delta_{t_{65-66}} > 0$
t_{68-69}	0.95	1.05	$\Delta_{t_{68-69}} > 0$	1.03	$\Delta_{t_{68-69}} > 0$
t_{81-80}	0.95	0.95	$\Delta_{t_{81-80}} = 0$	1.02	$\Delta_{t_{81-80}} > 0$

5.4 Análise de Resultados

Para analisar os resultados obtidos com as abordagens propostas, foi realizado um teste numérico com as reformulação das restrições de complementaridade proposta por Lage (2013), bem como com o problema de FPOR clássico (sem restrições de complementaridade). Como considera-se a natureza discreta das variáveis *tap* dos transformadores e bancos de capacitores e reatores *shunt* em todos os casos tem-se problemas de PNLIM, os quais foram resolvidos pelo método *branch-and-bound* através do *software* GAMS e o *solver* BONMIN.

Primeiramente, nas Tabelas 5.10, 5.11 e 5.12 compara-se o esforço computacional

entre o modelo do problema de FPOR sem as restrições de atuação dos dispositivos de controle de tensão e com essas restrições sob diferentes reformulações. Nestas tabelas têm-se o valor da função objetivo obtido em cada caso e o tempo computacional de resolução para os sistemas elétricos IEEE 14, 30 e 118 barras.

Em relação a função objetivo, observa-se que o problema de FPOR sem as restrições de atuação dos dispositivos de controle obteve melhor desempenho na minimização das perdas ativas nas linhas de transmissão.

Percebe-se a eficiência do modelo do problema de FPOR com restrições de atuação dos dispositivos de controle de tensão, com ambas reformulações apresentadas e sistemas elétricos, pois limitam os ajustes desses dispositivos.

Dada a reformulação para a restrição de complementaridade apresentada por Rosehart, Roman e Schellenberg (2005), observa-se um menor número de restrições, e obteve-se assim a um menor tempo computacional do que na reformulação proposta neste trabalho e na proposta por Lage (2013).

Tabela 5.10 – Tempo computacional e valor da F.O. nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 14 barras.

	Tempo computacional (seg)	F.O. (MW)
Proposta 1	1.703	13.780982
Proposta 2	1.214	13.780982
Lage (2013)	2.134	13.780982
FPOR clássico	1.313	13.60438

Tabela 5.11 – Tempo computacional e valor da F.O. nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 30 barras.

	Tempo computacional (seg)	F.O. (MW)
Proposta 1	3.266	16.31061
Proposta 2	1.641	16.31061
Lage (2013)	2.407	16.31062
FPOR clássico	1.515	16.0670

Tabela 5.12 – Tempo computacional e valor da F.O. nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 118 barras.

	Tempo computacional (seg)	F.O. (MW)
Proposta 1	270.7	124.980
Proposta 2	130.68	107.109
Lage (2013)	150.93	125.10293

FPOR clássico	21.185	104.47319
---------------	--------	-----------

Nas Tabelas 5.13, 5.14 e 5.15 são apresentados os valores discretos obtidos para os dispositivos de controle de tensão, *tap* dos transformadores nas linhas de transmissão e da susceptância *shunt* nas barras com dispositivos de controle variáveis, ambos em p.u.

Tabela 5.13 – Dispositivos de controle de tensão nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 14 barras.

	Valor inicial	Proposta 1	Proposta 2	Lage (2013)	FPOR clássico
b_9^{sh}	0.19	0.19	0.19	0.19	0.39
t_{4-7}	0.98	0.98	0.98	0.98	1.04
t_{4-9}	0.97	0.97	0.97	0.97	0.95
t_{5-6}	0.93	1.05	1.05	1.05	1.02

Tabela 5.14 – Dispositivos de controle de tensão nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 30 barras.

	Valor inicial	Proposta 1	Proposta 2	Lage (2013)	FPOR clássico
b_{10}^{sh}	0.19	0.19	0.19	0.19	0.34
b_{24}^{sh}	0.04	0.04	0.04	0.04	0.09
t_{6-9}	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
t_{6-10}	0.97	0.97	0.97	0.97	1.01
t_{4-12}	0.95	0.95	0.95	0.95	1.04
t_{28-27}	0.97	0.97	0.97	0.97	1.05

Tabela 5.15 – Dispositivos de controle de tensão nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 118 barras.

	Valor inicial	Proposta 1	Proposta 2	Lage (2013)	FPOR clássico
b_5^{sh}	-0.20	-0.20	-0.20	-0.20	0
b_{34}^{sh}	0.14	0.14	0.14	0.14	0
b_{37}^{sh}	-0.20	-0.20	-0.20	-0.20	0
b_{44}^{sh}	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
b_{45}^{sh}	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
b_{46}^{sh}	0.10	0.00	0.10	0.10	0
b_{48}^{sh}	0.15	0.15	0.15	0.15	0
b_{74}^{sh}	0.12	0.12	0.12	0.12	0.20
b_{79}^{sh}	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
b_{82}^{sh}	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20

b_{83}^{sh}	0.10	0.10	0.10	0.10	0.20
b_{105}^{sh}	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
b_{107}^{sh}	0.06	0.13	0.06	0.13	0.13
b_{110}^{sh}	0.06	0.06	0.06	0.06	0.13
t_{8-5}	0.98	1.03	0.98	0.98	1.02
t_{26-25}	0.96	0.96	0.97	0.95	0.95
t_{30-17}	0.96	1.03	0.96	0.96	0.95
t_{38-37}	0.95	1.05	0.95	0.95	0.95
t_{63-59}	0.96	1.05	0.96	0.96	0.95
t_{64-61}	0.98	1.05	1.04	0.95	0.95
t_{65-66}	0.95	1.05	1.01	0.95	0.95
t_{68-69}	0.95	1.05	1.03	0.95	0.95
t_{81-80}	0.95	0.95	1.02	0.95	0.95

Nas Tabelas 5.16, 5.17 e 5.18 são apresentados os valores das magnitudes de tensão nas barras controladas pelos dispositivos de controle. As soluções obtidas para as magnitudes e ângulos de tensão nas demais barras do sistema elétrico são apresentadas no Apêndice B.

Tabela 5.16 – Magnitudes de tensão nas barras controladas nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 14 barras.

	Proposta 1	Proposta 2	Lage (2013)	FPOR clássico
V_6 (p.u.)	1.05	1.05	1.05	1.05
V_7 (p.u.)	1.019	1.019	1.019	1.048
V_9 (p.u.)	1.014	1.014	1.014	1.046

Tabela 5.17 – Magnitudes de tensão nas barras controladas nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 30 barras.

	Proposta 1	Proposta 2	Lage (2013)	FPOR clássico
V_9 (p.u.)	1.04	1.04	1.047	1.073
V_{10} (p.u.)	1.025	1.025	1.032	1.084
V_{12} (p.u.)	1.021	1.021	1.026	1.086
V_{24} (p.u.)	0.996	0.996	1.002	1.071
V_{27} (p.u.)	0.998	0.998	1.004	1.08

Tabela 5.18 – Magnitudes de tensão nas barras controladas nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 118 barras.

	Proposta 1	Proposta 2	Lage (2013)	FPOR clássico
V_5 (p.u.)	1.1	1.059	1.035	1.1
V_{17} (p.u.)	1.1	1.051	1.0	1.1
V_{25} (p.u.)	1.1	1.1	0.95	1.1
V_{34} (p.u.)	1.097	1.028	0.987	1.096
V_{37} (p.u.)	1.1	1.031	0.988	1.1
V_{44} (p.u.)	1.086	1.05	0.972	1.08
V_{45} (p.u.)	1.082	1.054	0.971	1.075
V_{46} (p.u.)	1.1	1.073	0.991	1.087
V_{48} (p.u.)	1.1	1.087	0.999	1.091
V_{59} (p.u.)	1.1	1.083	0.963	1.1
V_{61} (p.u.)	1.1	1.1	0.95	1.1
V_{66} (p.u.)	1.1	1.1	0.994	1.1
V_{69} (p.u.)	1.1	1.1	1.041	1.1
V_{74} (p.u.)	1.005	1.058	0.992	1.064
V_{79} (p.u.)	0.95	1.084	1.033	1.085
V_{80} (p.u.)	0.957	1.1	1.052	1.1
V_{82} (p.u.)	0.95	1.079	1.04	1.083
V_{83} (p.u.)	0.95	1.081	1.043	1.088
V_{105} (p.u.)	0.95	1.079	1.005	1.079
V_{107} (p.u.)	0.95	1.067	0.95	1.067
V_{110} (p.u.)	0.955	1.075	1.006	1.075

Nas Tabelas 5.19, 5.20 e 5.21 são apresentados os ajustes na variáveis de controle (o seu valor final menos o valor inicial), assim pode-se observar claramente a condição da restrição de complementaridade (2.38)-(2.40) sendo satisfeita para o comportamento do *tap* dos transformadores das linhas e (2.42)-(2.44) para o banco de capacitores e reatores *shunt* na barra, dessa forma validando ambos os modelos de reformulação. Observa-se que a reformulação proposta por Lage (2013) realizou um número menor de ajustes nas variáveis de controle.

Tabela 5.19 – Ajuste das variáveis de controle nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 14 barras.

	Proposta 1	Proposta 2	Lage (2013)	FPOR clássico
Δ_{sh_9}	0	0	0	0.20
$\Delta_{t_{4-7}}$	0	0	0	0.06
$\Delta_{t_{4-9}}$	0	0	0	-0.02

$\Delta_{t_{5-6}}$	0.12	0.12	0.12	0.09
--------------------	------	------	------	------

Tabela 5.20 – Ajuste das variáveis de controle nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 30 barras.

	Proposta 1	Proposta 2	Lage (2013)	FPOR clássico
$\Delta_{sh_{10}}$	0	0	0	0
$\Delta_{sh_{24}}$	0	0	0	0.04
$\Delta_{t_{6-9}}$	0	0	0	0.09
$\Delta_{t_{6-10}}$	0	0	0	0.08
$\Delta_{t_{4-12}}$	0	0	0	0.15
$\Delta_{t_{28-27}}$	0	0	0	0.05

Tabela 5.21 – Ajuste das variáveis de controle nas soluções obtidas para o sistema elétrico IEEE 118 barras.

	Proposta 1	Proposta 2	Lage (2013)	FPOR clássico
Δ_{sh_5}	0	0	0	0.2
$\Delta_{sh_{34}}$	0	0	0	-0.14
$\Delta_{sh_{37}}$	0	0	0	0.2
$\Delta_{sh_{44}}$	0	0	0	0
$\Delta_{sh_{45}}$	0	0	0	0
$\Delta_{sh_{46}}$	-0.1	0	0	-0.1
$\Delta_{sh_{48}}$	0	0	0	-0.15
$\Delta_{sh_{74}}$	0	0	0	0.08
$\Delta_{sh_{79}}$	0	0	0	0
$\Delta_{sh_{82}}$	0	0	0	0
$\Delta_{sh_{83}}$	0	0	0	0.1
$\Delta_{sh_{105}}$	0	0	0	0
$\Delta_{sh_{107}}$	0.07	0	0.07	0.07
$\Delta_{sh_{110}}$	0	0	0	0.07
$\Delta_{t_{8-5}}$	0.05	0	0	0.04
$\Delta_{t_{26-25}}$	0	0.01	-0.01	-0.01
$\Delta_{t_{30-17}}$	0.07	0	0	-0.01
$\Delta_{t_{38-37}}$	0.10	0	0	0
$\Delta_{t_{63-59}}$	0.09	0	0	-0.01
$\Delta_{t_{64-61}}$	0.07	0.06	-0.03	-0.03
$\Delta_{t_{65-66}}$	0.1	0.06	0	0
$\Delta_{t_{68-69}}$	0.1	0.08	0	0

$\Delta_{t_{81-80}}$	0	0.07	0	0
----------------------	---	------	---	---

Nas formulações clássicas dos problemas de FPOR, podem ser ajustadas todas as variáveis de controle para se determinar o estado ótimo do sistema, o que pode inviabilizar a aplicação das soluções otimizadas em tempo real em sistemas de grande porte. Os testes realizados nos sistemas elétricos mostram que as restrições de complementaridade, a fim de viabilizar a tomada de decisão do operador do sistema, restringem o número de ajustes dos dispositivos de controle de tensão, de modo que eles operem apenas quando um dos limites de tensão na barra controlada por ele for atingido.

Dessa forma, nota-se uma redução da ordem de, respectivamente, 35,71% e 64,28% no número de controles efetivamente utilizados pelo operador quando o modelo de FPOR da Proposta 1 e 2 são utilizados para o sistema elétrico IEEE 118 barras. Estas são reduções expressivas, e foram obtidas sem que houvesse um aumento considerável das perdas. Assim, estes resultados mostram a importância de se buscar reduzir o número de ações de controle.

6 Considerações Finais

Este trabalho propõe duas abordagens para reformulação de restrições de complementaridade mista para resolver o problema de fluxo de potência ótimo reativo com variáveis contínuas e discretas e restrições de atuação dos dispositivos de controle de tensão.

Propõe-se resolver os problemas reformulados pelo método *Branch-and-Bound* e observa-se um bom comportamento dessa abordagem em relação a outras reformulações encontradas na literatura.

Na reformulação proposta via desigualdades equivalente (ROSEHART; ROMAN; SCHELLENBERG, 2005) observou-se um bom desempenho tanto em relação ao tempo computacional e valor da função objetivo quanto na diminuição no número de ajustes das variáveis de controle.

Observa-se que alguns ajustes devem ser realizados na reformulação via programação inteira proposta, devido as variáveis binárias inseridas no problema que aumentam consideravelmente de acordo com o aumento do porte do sistema elétrico, por isso o tempo computacional é superior em relação as outras abordagens.

Em ambas as reformulações propostas, de acordo com os resultados obtidos para o problema do FPOR com restrições de atuação no sistema elétrico IEEE 14, 30 e 118 barras, o ajuste dos dispositivos de controle de tensão foi observado. Foi possível verificar que os modelos propostos são capazes de reduzir de forma consistente o número de ações de controle que devem ser implementados pelo operador do sistema, sem aumentar a função objetivo de perdas de modo significativo.

Futuramente, pretende-se aprimorar a reformulação via programação inteira a fim de diminuir o tempo de execução do algoritmo e o número de ajustes realizados. Pretense-se validar as reformulações das restrições de complementaridade com testes numéricos em sistemas elétricos maiores. Além disso pretende-se propor uma abordagem de resolução para o PNLIM resultante das reformulações.

7 Trabalhos publicados

ALENCAR, M. V.; SOLER, E. M. Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo com Variáveis Discretas e Restrições de Atuação de Dispositivos de Controle de Tensão. VII Seminário do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, 2017.

ALENCAR, M. V.; SOLER, E. M. Restrições de Complementaridade em Problemas de Otimização. XXIX Semana da Licenciatura em Matemática (SELMAT), 2017.

ALENCAR, M. V.; SOLER, E. M. Restrições de Complementaridade em Problemas de Fluxo de Potência Ótimo. Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC), 2018.

ALENCAR, M. V.; SOLER, E. M. Problemas de Fluxo de Potência Ótimo com Restrições de Complementaridade. III Encontro Regional de Pesquisa Operacional (ERPO), 2018.

ALENCAR, M. V.; SOLER, E. M. Reformulação das Restrições de Complementaridade em Problemas de Fluxo de Potência Ótimo Reativo. VIII Seminário do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, 2018.

ALENCAR, M. V.; SOLER, E. M. Método *Branch-and-Bound* Aplicado no Problema de Fluxo de Potência Ótimo com Restrições de Complementaridade. II Workshop de Otimização, 2018.

Referências

- ALMEIDA, K.; SENNA, F. Optimal active-reactive power dispatch under competition via bilevel programming. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 26, n. 4, p. 2345–2354, 2011. Citado na página 39.
- ALRASHIDI, M.; EL-HAWARY, M. Hybrid particle swarm optimization approach for solving the discrete opf problem considering the valve loading effects. *IEEE transactions on power systems*, IEEE, v. 22, n. 4, p. 2030–2038, 2007. Citado na página 34.
- BAKIRTZIS, A. G. et al. Optimal power flow by enhanced genetic algorithm. v. 17, n. 2, p. 229–236, 2002. ISSN 0885-8950. Citado na página 34.
- BAUTISTA, G.; ANJOS, M. F.; VANNELLI, A. Numerical study of affine supply function equilibrium in ac network-constrained markets. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 22, n. 3, p. 1174–1184, 2007. Citado na página 34.
- BENSON, H. Y.; SHANNO, D. F.; VANDERBEI, R. J. Interior-point methods for nonconvex nonlinear programming: Complementarity constraints. *Operations Research and Financial Engineering*, p. 1–20, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 36.
- BONAMI, P.; LEE, J. Bonmin user’s manual. *Numer Math*, v. 4, p. 1–32, 2007. Citado na página 45.
- CARPENTIER, J. Contribution a l’etude du dispatching économique. v. 3, n. 8, p. 431–447, 1962. Citado na página 33.
- CHRISTIE, R. *Power System Test Case Archive, Washington University*. [S.l.], 2013. Disponível em: <<http://labs.ece.uw.edu/pstca/>>. Acesso em: 01 Jun. 2018. Citado na página 77.
- CONEJO, A.; CANIZARES, C.; GOMEZ-EXPOSITO, A. *Electric energy systems: analysis and operation*. [S.l.]: CRC Press/Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2009. Citado na página 30.
- DING, X.; WANG, X.; SONG, Y. Interior point cutting plane method for optimal power flow. *IMA Journal of management mathematics*, Oxford University Press, v. 15, n. 4, p. 355–368, 2004. Citado na página 34.
- DOMMEL, H.; TINNEY, W. Optimal power flow solutions. PAS-87, n. 10, p. 1866–1876, 1968. ISSN 0018-9510. Citado na página 33.
- GHASEMI, M. et al. A new hybrid algorithm for optimal reactive power dispatch problem with discrete and continuous control variables. *Applied soft computing*, Elsevier, v. 22, p. 126–140, 2014. Citado na página 35.
- GRANVILLE, S. Optimal reactive dispatch through interior point methods. v. 9, n. 1, p. 136–146, 1994. ISSN 0885-8950. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.

- JIN, S.; RYAN, S. M. Capacity expansion in the integrated supply network for an electricity market. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 26, n. 4, p. 2275–2284, 2011. Citado na página 39.
- LAGE, G. G. *O fluxo de potência ótimo reativo com variáveis de controle discretas e restrições de atuação de dispositivos de controle de tensão*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013. Citado 23 vezes nas páginas 19, 20, 21, 22, 24, 27, 30, 31, 35, 39, 41, 42, 44, 49, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 89, 90 e 92.
- LIN, S.-Y.; HO, Y.-C. et al. An ordinal optimization theory-based algorithm for solving the optimal power flow problem with discrete control variables. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 19, n. 1, p. 276–286, 2004. Citado na página 34.
- LIU, L. et al. A robust approach to optimal power flow with discrete variables. v. 24, n. 3, p. 1182–1190, 2009. ISSN 0885-8950. Citado na página 34.
- LIU, M.; TSO, S. K.; CHENG, Y. An extended nonlinear primal-dual interior-point algorithm for reactive-power optimization of large-scale power systems with discrete control variables. v. 17, n. 4, p. 982–991, 2002. ISSN 0885-8950. Citado na página 34.
- LIU, W.-H.; PAPALEXOPOULOS, A. D.; TINNEY, W. F. Discrete shunt controls in a newton optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 7, n. 4, p. 1509–1518, 1992. Citado na página 33.
- MONTICELLI, A. J. *Fluxo de Carga em Redes de Energia*. Edgard Blucher, 1983. Disponível em: <<http://www.estantevirtual.com.br/katialivros/Alcir-Monticelli-e-Ariovaldo-Garcia-Introducao-a-Sistemas-de-Energia-Eletrica-142569096>>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 29.
- MOREIRA, J. et al. A parallel branch and bound approach to optimal power flow with discrete variables. *Przeegląd Elektrotechniczny*, v. 89, n. 3a, p. 47–52, 2013. Citado na página 35.
- NIE, Y. et al. Pcpdipm based optimal reactive power flow model with discrete variables. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier, v. 69, p. 116–122, 2015. Citado na página 35.
- PETOUSSIS, S.; ZHANG, X.; GODFREY, K. Electricity market equilibrium analysis based on nonlinear interior point algorithm with complementarity constraints. *IET Generation, Transmission & Distribution*, IET, v. 1, n. 4, p. 603–612, 2007. Citado na página 39.
- PHAN, D. T. Lagrangian duality and branch-and-bound algorithms for optimal power flow. *Operations Research*, INFORMS, v. 60, n. 2, p. 275–285, 2012. Citado na página 35.
- PINHEIRO, R. B. N. et al. Interior-exterior point method with global convergence strategy for solving the reactive optimal power flow problem. v. 66, p. 235–246, 2015. ISSN 0142-0615. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142061514006061>>. Citado na página 35.
- RAGHUNATHAN, A. U.; BIEGLER, L. T. An interior point method for mathematical programs with complementarity constraints (mpccs). *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 15, n. 3, p. 720–750, 2005. Nenhuma citação no texto.

- RODRIGUES, H. S. *Problema de otimização com restrições de complementaridade: uma aplicação ao mercado de energia eléctrica*. Tese (Doutorado), 2005. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 26.
- ROSEHART, W.; ROMAN, C.; SCHELLENBERG, A. Optimal power flow with complementarity constraints. v. 20, n. 2, p. 813–822, 2005. ISSN 0885-8950. Citado 9 vezes nas páginas 19, 22, 28, 34, 37, 41, 44, 61 e 67.
- SANTOS, A.; DECKMANN, S.; SOARES, S. A dual augmented lagrangian approach for optimal power flow. *IEEE transactions on power systems*, IEEE, v. 3, n. 3, p. 1020–1025, 1988. Citado na página 33.
- SASSON, A. M.; VILORIA, F.; ABOYTES, F. Optimal load flow solution using the hessian matrix. PAS-92, n. 1, p. 31–41, 1973. ISSN 0018-9510. Citado na página 33.
- SOLER, E. M. *Resolução do problema de fluxo de potência ótimo com variáveis de controle discretas*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011. Citado na página 47.
- SOLER, E. M.; SOUSA, V. A. de; COSTA, G. R. da. A modified primal–dual logarithmic-barrier method for solving the optimal power flow problem with discrete and continuous control variables. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 222, n. 3, p. 616–622, 2012. Citado na página 35.
- SOUSA, V. A. D.; BAPTISTA, E. C.; COSTA, G. R. D. Modified barrier method for optimal power flow problem. In: *IEEE. Power Engineering Society General Meeting, 2004. IEEE*. [S.l.], 2004. p. 831–836. Citado na página 34.
- SOUSA, V. A. de; BAPTISTA, E. C.; COSTA, G. R. M. da. Optimal reactive power flow via the modified barrier lagrangian function approach. v. 84, n. 1, p. 159–164, 2012. ISSN 0378-7796. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779611002677>>. Citado na página 35.
- SOUSA, V. D.; BAPTISTA, E. C.; COSTA, G. da. Loss minimization by the predictor–corrector modified barrier approach. *Electric Power Systems Research*, Elsevier, v. 79, n. 5, p. 803–808, 2009. Citado na página 34.
- SUN, D. et al. Optimal power flow by newton approach. PAS-103, n. 10, p. 2864–2880, 1984. ISSN 0018-9510. Citado na página 33.
- TINNEY, W. et al. Some deficiencies in optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 3, n. 2, p. 676–683, 1988. Citado na página 33.
- TORRES, G. L.; QUINTANA, V. H. An interior-point method for nonlinear optimal power flow using voltage rectangular coordinates. *IEEE transactions on Power Systems*, IEEE, v. 13, n. 4, p. 1211–1218, 1998. Citado na página 33.
- YAN, W. et al. A hybrid genetic algorithm-interior point method for optimal reactive power flow. v. 21, n. 3, p. 1163–1169, 2006. ISSN 0885-8950. Citado na página 34.
- ZHAO, B.; GUO, C.; CAO, Y. A multiagent-based particle swarm optimization approach for optimal reactive power dispatch. *IEEE transactions on power systems*, IEEE, v. 20, n. 2, p. 1070–1078, 2005. Citado na página 34.

Apêndices

APÊNDICE A – Dados dos Sistemas Elétricos

São apresentados os dados de barras e de linhas dos sistemas elétricos utilizados nos testes numéricos (CHRISTIE, 2013). Nas tabelas referentes aos dados de barra, os tipos de barras encontrados são: a barra do tipo 1 é a *slack*, as barras do tipo 2 são as barras de carga e as barras do tipo 3 são as barras de controle de reativo.

A condutância e susceptância série das linhas são calculados, respectivamente, da seguinte forma:

$$g_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}$$

$$b_{km} = \frac{-x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}$$

A.1 Sistema Elétrico IEEE 14 barras

Tabela A.1 – Dados de barra do sistema elétrico IEEE 14 barras.

Barra	Tipo	V	θ	P^g	Q^g	Q_{min}	Q_{max}	P^c	Q^c	b^{sh}
1	1	1.060	0.00	0.0	0.0	-99.99	99.99	0.000	0.000	0.00
2	3	1.045	-4.98	0.4	0.0	-0.40	0.50	0.217	0.127	0.00
3	3	1.010	-12.72	0.0	0.0	0.00	0.40	0.942	0.190	0.00
4	2	1.019	-10.33	0.0	0.0	0.00	0.00	0.478	-0.039	0.00
5	2	1.020	-8.78	0.0	0.0	0.00	0.00	0.076	0.016	0.00
6	3	1.070	-14.22	0.0	0.0	-0.06	0.24	0.112	0.075	0.00
7	2	1.062	-13.37	0.0	0.0	0.00	0.00	0.000	0.000	0.00
8	3	1.090	-13.36	0.0	0.0	-0.06	0.24	0.000	0.000	0.00
9	2	1.056	-14.94	0.0	0.0	0.00	0.00	0.295	0.166	0.19
10	2	1.051	-15.10	0.0	0.0	0.00	0.00	0.090	0.058	0.00
11	2	1.057	-14.79	0.0	0.0	0.00	0.00	0.035	0.018	0.00
12	2	1.055	-15.07	0.0	0.0	0.00	0.00	0.061	0.016	0.00
13	2	1.050	-15.16	0.0	0.0	0.00	0.00	0.135	0.058	0.00
14	2	1.036	-16.04	0.0	0.0	0.00	0.00	0.149	0.050	0.00

Tabela A.2 – Dados de linha do sistema elétrico IEEE 14 barras.

Barra (k)	Barra(m)	r_{km}	x_{km}	t	b^{sh}
-----------	----------	----------	----------	-----	----------

1	2	0.01938	0.05917	0	0.0528
1	5	0.05403	0.22304	0	0.0492
2	3	0.04699	0.19797	0	0.0438
2	4	0.05811	0.17632	0	0.0340
2	5	0.05695	0.17388	0	0.0346
3	4	0.06701	0.17103	0	0.0128
4	5	0.01335	0.04211	0	0.0000
4	7	0.00000	0.20912	0.9780	0.0000
4	9	0.00000	0.55618	0.9680	0.0000
5	6	0.00000	0.25202	0.9320	0.0000
6	11	0.09498	0.19890	0	0.0000
6	12	0.12291	0.25581	0	0.0000
6	13	0.06615	0.13027	0	0.0000
7	8	0.00000	0.17615	0	0.0000
7	9	0.00000	0.11001	0	0.0000
9	10	0.03181	0.08450	0	0.0000
9	14	0.12711	0.27038	0	0.0000
10	11	0.08205	0.19207	0	0.0000
12	13	0.22092	0.19988	0	0.0000
13	14	0.17093	0.34802	0	0.0000

A.2 Sistema Elétrico IEEE 30 barras

Tabela A.3 – Dados de barra do sistema elétrico IEEE 30 barras.

Barra	Tipo	V	θ	P^g	Q^g	Q_{min}	Q_{max}	P^c	Q^c	b^{sh}
1	1	1.060	0.00	2.60	-0.161	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	3	1.043	-5.48	0.40	0.50	-0.40	0.50	0.217	0.127	0.0
3	2	1.021	-7.96	0.0	0.00	0.0	0.0	0.024	0.012	0.0
4	2	1.012	-9.62	0.0	0.00	0.0	0.0	0.076	0.016	0.0
5	3	1.010	-14.37	0.0	0.37	-0.40	0.40	0.942	0.190	0.0
6	2	1.010	-11.34	0.0	0.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	2	1.002	-13.12	0.0	0.00	0.0	0.0	0.228	0.109	0.0
8	3	1.010	-12.10	0.0	0.373	-0.10	0.40	0.300	0.300	0.0
9	2	1.051	-14.38	0.0	0.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	2	1.045	-15.97	0.0	0.00	0.0	0.0	0.058	0.020	0.19
11	3	1.082	-14.39	0.0	0.162	-0.06	0.24	0.0	0.0	0.0
12	2	1.057	-15.24	0.0	0.00	0.0	0.0	0.112	0.075	0.0
13	3	1.071	-15.24	0.0	0.106	-0.06	0.24	0.0	0.0	0.0
14	2	1.042	-16.13	0.0	0.00	0.0	0.0	0.062	0.016	0.0

15	2	1.038	-16.22	0.0	0.00	0.0	0.0	0.082	0.025	0.0
16	2	1.045	-15.83	0.0	0.00	0.0	0.0	0.035	0.018	0.0
17	2	1.040	-16.14	0.0	0.00	0.0	0.0	0.090	0.058	0.0
18	2	1.028	-16.82	0.0	0.00	0.0	0.0	0.032	0.009	0.0
19	2	1.026	-17.00	0.0	0.00	0.0	0.0	0.095	0.034	0.0
20	2	1.030	-16.80	0.0	0.00	0.0	0.0	0.022	0.007	0.0
21	2	1.033	-16.42	0.0	0.00	0.0	0.0	0.175	0.112	0.0
22	2	1.033	-16.41	0.0	0.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
23	2	1.027	-16.61	0.0	0.00	0.0	0.0	0.032	0.016	0.0
24	2	1.021	-16.78	0.0	0.00	0.0	0.0	0.087	0.067	0.04
25	2	1.017	-16.35	0.0	0.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
26	2	1.000	-16.77	0.0	0.00	0.0	0.0	0.035	0.023	0.0
27	2	1.023	-15.82	0.0	0.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
28	2	1.007	-11.97	0.0	0.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
29	2	1.003	-17.06	0.0	0.00	0.0	0.0	0.024	0.009	0.0
30	2	0.992	-17.94	0.0	0.00	0.0	0.0	0.106	0.019	0.0

Tabela A.4 – Dados de linha do sistema eléctrico IEEE 30 barras.

Barra (k)	Barra(m)	r_{km}	x_{km}	t	b^{sh}
1	2	0.0192	0.0575	0	0.0528
1	3	0.0452	0.1652	0	0.0408
2	4	0.0570	0.1737	0	0.0368
3	4	0.0132	0.0379	0	0.0084
2	5	0.0472	0.1983	0	0.0418
2	6	0.0581	0.1763	0	0.0374
4	6	0.0119	0.0414	0	0.0090
5	7	0.0460	0.1160	0	0.0204
6	7	0.0267	0.0820	0	0.0170
6	8	0.0120	0.0420	0	0.0090
6	9	0.0000	0.2080	0.978	0
6	10	0.0000	0.5560	0.969	0
9	11	0.0000	0.2080	0	0
9	10	0.0000	0.1100	0	0
4	12	0.0000	0.2560	0.932	0
12	13	0.0000	0.1400	0	0
12	14	0.1231	0.2559	0	0
12	15	0.0662	0.1304	0	0
12	16	0.0945	0.1987	0	0

14	15	0.2210	0.1997	0	0
16	17	0.0524	0.1923	0	0
15	18	0.1073	0.2185	0	0
18	19	0.0639	0.1292	0	0
19	20	0.0340	0.0680	0	0
10	20	0.0936	0.2090	0	0
10	17	0.0324	0.0845	0	0
10	21	0.0348	0.0749	0	0
10	22	0.0727	0.1499	0	0
21	22	0.0116	0.0236	0	0
15	23	0.1000	0.2020	0	0
22	24	0.1150	0.1790	0	0
23	24	0.1320	0.2700	0	0
24	25	0.1885	0.3292	0	0
25	26	0.2544	0.3800	0	0
25	27	0.1093	0.2087	0	0
28	27	0.0000	0.3960	0.968	0
27	29	0.2198	0.4153	0	0
27	30	0.3202	0.6027	0	0
29	30	0.2399	0.4533	0	0
8	28	0.0636	0.2000	0	0.0428
6	28	0.0169	0.0599	0	0.0130

A.3 Sistema Elétrico IEEE 118 barras

Tabela A.5 – Dados de barra do sistema elétrico IEEE 118 barras.

Barra	Tipo	V	θ	P^c	Q^c	P^g	Q^g	Q_{max}	Q_{min}	b^{sh}
1	3	0.955	10.67	0.51	0.27	0.0	0.0	0.15	-0.05	0.0
2	2	0.971	11.22	0.20	0.09	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	2	0.968	11.56	0.39	0.10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	3	0.998	15.28	0.30	0.12	-0.09	0.0	3.0	-3.0	0.0
5	2	1.002	15.73	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.40
6	3	0.990	13.00	0.52	0.22	0.0	0.0	0.50	-0.13	0.0
7	2	0.989	12.56	0.19	0.02	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8	3	1.015	20.77	0.0	0.0	-0.28	0.0	3.0	-3.0	0.0
9	2	1.043	28.02	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	3	1.050	35.61	0.0	0.0	4.50	0.0	2.0	-1.47	0.0
11	2	0.985	12.72	0.70	0.23	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
12	3	0.990	12.20	0.47	0.10	0.85	0.0	1.20	-0.35	0.0

13	2	0.968	11.35	0.34	0.16	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
14	2	0.984	11.50	0.14	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
15	3	0.970	11.23	0.90	0.30	0.0	0.0	0.30	-0.10	0.0
16	2	0.984	11.91	0.25	0.10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
17	2	0.995	13.74	0.11	0.03	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
18	3	0.973	11.53	0.60	0.34	0.0	0.0	0.50	-0.16	0.0
19	3	0.963	11.05	0.45	0.25	0.0	0.0	0.24	-0.08	0.0
20	2	0.958	11.93	0.18	0.03	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
21	2	0.959	13.52	0.14	0.08	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
22	2	0.970	16.08	0.10	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
23	2	1.000	21.00	0.07	0.03	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
24	3	0.992	20.89	0.0	0.0	-0.13	0.0	3.00	-3.0	0.0
25	3	1.050	27.93	0.0	0.0	2.20	0.0	1.40	-0.47	0.0
26	3	1.015	29.71	0.0	0.0	3.14	0.0	10.0	-10.0	0.0
27	3	0.968	15.35	0.62	0.13	-0.09	0.0	3.00	-3.0	0.0
28	2	0.962	13.62	0.17	0.07	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
29	2	0.963	12.63	0.24	0.04	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
30	2	0.968	18.79	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
31	3	0.967	12.75	0.43	0.27	0.07	0.0	3.0	-3.0	0.0
32	3	0.964	14.80	0.59	0.23	0.0	0.0	0.42	-0.14	0.0
33	2	0.972	10.63	0.23	0.09	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
34	3	0.986	11.30	0.59	0.26	0.0	0.0	0.24	-0.08	0.14
35	2	0.981	10.87	0.33	0.09	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
36	3	0.980	10.87	0.31	0.17	0.0	0.0	0.24	-0.08	0.0
37	2	0.992	11.77	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.25
38	2	0.962	16.91	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
39	2	0.970	8.41	0.27	0.11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
40	3	0.970	7.35	0.20	0.23	-0.46	0.0	3.0	-3.0	0.0
41	2	0.967	6.92	0.37	0.10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
42	3	0.985	8.53	0.37	0.23	-0.59	0.0	3.0	-3.0	0.0
43	2	0.978	11.28	0.18	0.07	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
44	2	0.985	13.82	0.16	0.08	0.0	0.0	0.0	0.0	0.10
45	2	0.987	15.67	0.53	0.22	0.0	0.0	0.0	0.0	0.10
46	3	1.005	18.49	0.28	0.10	0.19	0.0	1.0	-1.0	0.10
47	2	1.017	20.73	0.34	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
48	2	1.021	19.93	0.20	0.11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.15
49	3	1.025	20.94	0.87	0.30	2.04	0.0	2.10	-0.85	0.0
50	2	1.001	18.90	0.17	0.04	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

51	2	0.967	16.28	0.17	0.08	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
52	2	0.957	15.32	0.18	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
53	2	0.946	14.35	0.23	0.11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
54	3	0.955	15.26	1.13	0.32	0.48	0.0	3.0	-3.0	0.0
55	3	0.952	14.97	0.63	0.22	0.0	0.0	0.23	-0.08	0.0
56	3	0.954	15.16	0.84	0.18	0.0	0.0	0.15	-0.08	0.0
57	2	0.971	16.36	0.12	0.03	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
58	2	0.959	15.51	0.12	0.03	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
59	3	0.985	19.37	2.77	1.13	1.55	0.0	1.80	-0.60	0.0
60	2	0.993	23.15	0.78	0.03	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
61	3	0.995	24.04	0.0	0.0	1.60	0.0	3.0	-1.0	0.0
62	3	0.998	23.43	0.77	0.14	0.0	0.0	0.20	-0.20	0.0
63	2	0.969	22.75	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
64	2	0.984	24.52	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
65	3	1.005	27.65	0.0	0.0	3.91	0.0	2.0	-0.67	0.0
66	3	1.050	27.48	0.39	0.18	3.92	0.0	2.0	-0.67	0.0
67	2	1.020	24.84	0.28	0.07	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
68	2	1.003	27.55	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
69	1	1.035	30.00	0.0	0.0	5.16	0.0	3.0	-3.0	0.0
70	3	0.984	22.58	0.66	0.20	0.0	0.0	0.32	-0.10	0.0
71	2	0.987	22.15	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
72	3	0.980	20.98	0.0	0.0	-0.12	0.0	1.0	-1.0	0.0
73	3	0.991	21.94	0.0	0.0	-0.06	0.0	1.0	-1.0	0.0
74	3	0.958	21.64	0.68	0.27	0.0	0.0	0.09	-0.06	0.12
75	2	0.967	22.91	0.47	0.11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
76	3	0.943	21.77	0.68	0.36	0.0	0.0	0.23	-0.08	0.0
77	3	1.006	26.72	0.61	0.28	0.0	0.0	0.70	-0.20	0.0
78	2	1.003	26.42	0.71	0.26	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
79	2	1.009	26.72	0.39	0.32	0.0	0.0	0.0	0.0	0.20
80	3	1.040	28.96	1.30	0.26	4.77	0.0	2.80	-1.65	0.0
81	2	0.997	28.10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
82	2	0.989	27.24	0.54	0.27	0.0	0.0	0.0	0.0	0.20
83	2	0.985	28.42	0.20	0.10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.10
84	2	0.980	30.95	0.11	0.07	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
85	3	0.985	32.51	0.24	0.15	0.0	0.0	0.23	-0.08	0.0
86	2	0.987	31.14	0.21	0.10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
87	3	1.015	31.40	0.0	0.0	0.04	0.0	10.0	-1.0	0.0
88	2	0.987	35.64	0.48	0.10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

89	3	1.005	39.69	0.0	0.0	6.07	0.0	3.0	-2.10	0.0
90	3	0.985	33.29	0.78	0.42	-0.85	0.0	3.0	-3.00	0.0
91	3	0.980	33.31	0.0	0.0	-0.10	0.0	1.0	-1.00	0.0
92	3	0.993	33.80	0.65	0.10	0.0	0.0	0.09	-0.03	0.0
93	2	0.987	30.79	0.12	0.07	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
94	2	0.991	28.64	0.30	0.16	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
95	2	0.981	27.67	0.42	0.31	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
96	2	0.993	27.51	0.38	0.15	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
97	2	1.011	27.88	0.15	0.09	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
98	2	1.024	27.40	0.34	0.08	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
99	3	1.010	27.04	0.0	0.0	-0.42	0.0	1.00	-1.0	0.0
100	3	1.017	28.03	0.37	0.18	2.52	0.0	1.55	-0.50	0.0
101	2	0.993	29.61	0.22	0.15	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
102	2	0.991	32.30	0.05	0.03	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
103	3	1.001	24.44	0.23	0.16	0.40	0.0	0.40	-0.15	0.0
104	3	0.971	21.69	0.38	0.25	0.0	0.0	0.23	-0.08	0.0
105	3	0.965	20.57	0.31	0.26	0.0	0.0	0.23	-0.08	0.20
106	2	0.962	20.32	0.43	0.16	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
107	3	0.952	17.53	0.28	0.12	-0.22	0.0	2.0	-2.0	0.06
108	2	0.967	19.38	0.02	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
109	2	0.967	18.93	0.08	0.03	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
110	3	0.973	18.09	0.39	0.30	0.0	0.0	0.23	-0.08	0.06
111	3	0.980	19.74	0.0	0.0	0.36	0.0	10.0	-1.0	0.0
112	3	0.975	14.99	0.25	0.13	-0.43	0.0	10.0	-1.0	0.0
113	3	0.993	13.74	0.0	0.0	-0.06	0.0	2.0	-1.0	0.0
114	2	0.960	14.46	0.08	0.03	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
115	2	0.960	14.46	0.22	0.07	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
116	3	1.005	27.12	0.0	0.0	1.84	0.0	10.0	-10.0	0.0
117	2	0.974	10.67	0.20	0.08	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
118	2	0.949	21.92	0.33	0.15	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabela A.6 – Dados de linha do sistema eléctrico IEEE 118 barras.

Barra (k)	Barra (m)	r_{km}	x_{km}	b^{sh}	t
1	2	0.03030	0.09990	0.02540	0
1	3	0.01290	0.04240	0.01082	0
4	5	0.00176	0.00798	0.00210	0
3	5	0.02410	0.10800	0.02840	0
5	6	0.01190	0.05400	0.01426	0

6	7	0.00459	0.02080	0.00550	0
8	9	0.00244	0.03050	1.16200	0
8	5	0.00000	0.02670	0.0	0.985
9	10	0.00258	0.03220	1.23000	0
4	11	0.02090	0.06880	0.01748	0
5	11	0.02030	0.06820	0.01738	0
11	12	0.00595	0.01960	0.00502	0
2	12	0.01870	0.06160	0.01572	0
3	12	0.04840	0.16000	0.04060	0
7	12	0.00862	0.03400	0.00874	0
11	13	0.02225	0.07310	0.01876	0
12	14	0.02150	0.07070	0.01816	0
13	15	0.07440	0.24440	0.06268	0
14	15	0.05950	0.19500	0.05020	0
12	16	0.02120	0.08340	0.02140	0
15	17	0.01320	0.04370	0.04440	0
16	17	0.04540	0.18010	0.04660	0
17	18	0.01230	0.05050	0.01298	0
18	19	0.01119	0.04930	0.01142	0
19	20	0.02520	0.11700	0.02980	0
15	19	0.01200	0.03940	0.01010	0
20	21	0.01830	0.08490	0.02160	0
21	22	0.02090	0.09700	0.02460	0
22	23	0.03420	0.15900	0.04040	0
23	24	0.01350	0.04920	0.04980	0
23	25	0.01560	0.08000	0.08640	0
26	25	0.00000	0.03820	0.0	0.960
25	27	0.03180	0.16300	0.17640	0
27	28	0.01913	0.08550	0.02160	0
28	29	0.02370	0.09430	0.02380	0
30	17	0.00000	0.03880	0.0	0.960
8	30	0.00431	0.05040	0.51400	0
26	30	0.00799	0.08600	0.90800	0
17	31	0.04740	0.15630	0.03990	0
29	31	0.01080	0.03310	0.00830	0
23	32	0.03170	0.11530	0.11730	0
31	32	0.02980	0.09850	0.02510	0
27	32	0.02290	0.07550	0.01926	0

15	33	0.03800	0.12440	0.03194	0
19	34	0.07520	0.24700	0.06320	0
35	36	0.00224	0.01020	0.00268	0
35	37	0.01100	0.04970	0.01318	0
33	37	0.04150	0.14200	0.03660	0
34	36	0.00871	0.02680	0.00568	0
34	37	0.00256	0.00940	0.00984	0
38	37	0.00000	0.03750	0.0	0.935
37	39	0.03210	0.10600	0.02700	0
37	40	0.05930	0.16800	0.04200	0
30	38	0.00464	0.05400	0.42200	0
39	40	0.01840	0.06050	0.01552	0
40	41	0.01450	0.04870	0.01222	0
40	42	0.05550	0.18300	0.04660	0
41	42	0.04100	0.13500	0.03440	0
43	44	0.06080	0.24540	0.06068	0
34	43	0.04130	0.16810	0.04226	0
44	45	0.02240	0.09010	0.02240	0
45	46	0.04000	0.13560	0.03320	0
46	47	0.03800	0.12700	0.03160	0
46	48	0.06010	0.18900	0.04720	0
47	49	0.01910	0.06250	0.01604	0
42	49	0.07150	0.32300	0.08600	0
42	49	0.07150	0.32300	0.08600	0
45	49	0.06840	0.18600	0.04440	0
48	49	0.01790	0.05050	0.01258	0
49	50	0.02670	0.07520	0.01874	0
49	51	0.04860	0.13700	0.03420	0
51	52	0.02030	0.05880	0.01396	0
52	53	0.04050	0.16350	0.04058	0
53	54	0.02630	0.12200	0.03100	0
49	54	0.07300	0.28900	0.07380	0
49	54	0.08690	0.29100	0.07300	0
54	55	0.01690	0.07070	0.02020	0
54	56	0.00275	0.00955	0.00732	0
55	56	0.00488	0.01510	0.00374	0
56	57	0.03430	0.09660	0.02420	0
50	57	0.04740	0.13400	0.03320	0

56	58	0.03430	0.09660	0.02420	0
51	58	0.02550	0.07190	0.01788	0
54	59	0.05030	0.22930	0.05980	0
56	59	0.08250	0.25100	0.05690	0
56	59	0.08030	0.23900	0.05360	0
55	59	0.04739	0.21580	0.05646	0
59	60	0.03170	0.14500	0.03760	0
59	61	0.03280	0.15000	0.03880	0
60	61	0.00264	0.01350	0.01456	0
60	62	0.01230	0.05610	0.01468	0
61	62	0.00824	0.03760	0.00980	0
63	59	0.00000	0.03860	0.0	0.960
63	64	0.00172	0.02000	0.21600	0
64	61	0.00000	0.02680	0.0	0.985
38	65	0.00901	0.09860	1.04600	0
64	65	0.00269	0.03020	0.38000	0
49	66	0.01800	0.09190	0.02480	0
49	66	0.01800	0.09190	0.02480	0
62	66	0.04820	0.21800	0.05780	0
62	67	0.02580	0.11700	0.03100	0
65	66	0.00000	0.03700	0.0	0.935
66	67	0.02240	0.10150	0.02682	0
65	68	0.00138	0.01600	0.63800	0
47	69	0.08440	0.27780	0.07092	0
49	69	0.09850	0.32400	0.08280	0
68	69	0.00000	0.03700	0.0	0.935
69	70	0.03000	0.12700	0.12200	0
24	70	0.00221	0.41150	0.10198	0
70	71	0.00882	0.03550	0.00878	0
24	72	0.04880	0.19600	0.04880	0
71	72	0.04460	0.18000	0.04444	0
71	73	0.00866	0.04540	0.01178	0
70	74	0.04010	0.13230	0.03368	0
70	75	0.04280	0.14100	0.03600	0
69	75	0.04050	0.12200	0.12400	0
74	75	0.01230	0.04060	0.01034	0
76	77	0.04440	0.14800	0.03680	0
69	77	0.03090	0.10100	0.10380	0

75	77	0.06010	0.19990	0.04978	0
77	78	0.00376	0.01240	0.01264	0
78	79	0.00546	0.02440	0.00648	0
77	80	0.01700	0.04850	0.04720	0
77	80	0.02940	0.10500	0.02280	0
79	80	0.01560	0.07040	0.01870	0
68	81	0.00175	0.02020	0.80800	0
81	80	0.00000	0.03700	0.0	0.935
77	82	0.02980	0.08530	0.08174	0
82	83	0.01120	0.03665	0.03796	0
83	84	0.06250	0.13200	0.02580	0
83	85	0.04300	0.14800	0.03480	0
84	85	0.03020	0.06410	0.01234	0
85	86	0.03500	0.12300	0.02760	0
86	87	0.02828	0.20740	0.04450	0
85	88	0.02000	0.10200	0.02760	0
85	89	0.02390	0.17300	0.04700	0
88	89	0.01390	0.07120	0.01934	0
89	90	0.05180	0.18800	0.05280	0
89	90	0.02380	0.09970	0.10600	0
90	91	0.02540	0.08360	0.02140	0
89	92	0.00990	0.05050	0.05480	0
89	92	0.03930	0.15810	0.04140	0
91	92	0.03870	0.12720	0.03268	0
92	93	0.02580	0.08480	0.02180	0
92	94	0.04810	0.15800	0.04060	0
93	94	0.02230	0.07320	0.01876	0
94	95	0.01320	0.04340	0.01110	0
80	96	0.03560	0.18200	0.04940	0
82	96	0.01620	0.05300	0.05440	0
94	96	0.02690	0.08690	0.02300	0
80	97	0.01830	0.09340	0.02540	0
80	98	0.02380	0.10800	0.02860	0
80	99	0.04540	0.20600	0.05460	0
92	100	0.06480	0.29500	0.04720	0
94	100	0.01780	0.05800	0.06040	0
95	96	0.01710	0.05470	0.01474	0
96	97	0.01730	0.08850	0.02400	0

98	100	0.03970	0.17900	0.04760	0
99	100	0.01800	0.08130	0.02160	0
100	101	0.02770	0.12620	0.03280	0
92	102	0.01230	0.05590	0.01464	0
101	102	0.02460	0.11200	0.02940	0
100	103	0.01600	0.05250	0.05360	0
100	104	0.04510	0.20400	0.05410	0
103	104	0.04660	0.15840	0.04070	0
103	105	0.05350	0.16250	0.04080	0
100	106	0.06050	0.22900	0.06200	0
104	105	0.00994	0.03780	0.00986	0
105	106	0.01400	0.05470	0.01434	0
105	107	0.05300	0.18300	0.04720	0
105	108	0.02610	0.07030	0.01844	0
106	107	0.05300	0.18300	0.04720	0
108	109	0.01050	0.02880	0.00760	0
103	110	0.03906	0.18130	0.04610	0
109	110	0.02780	0.07620	0.02020	0
110	111	0.02200	0.07550	0.02000	0
110	112	0.02470	0.06400	0.06200	0
17	113	0.00913	0.03010	0.00768	0
32	113	0.06150	0.20300	0.05180	0
32	114	0.01350	0.06120	0.01628	0
27	115	0.01640	0.07410	0.01972	0
114	115	0.00230	0.01040	0.00276	0
68	116	0.00034	0.00405	0.16400	0
12	117	0.03290	0.14000	0.03580	0
75	118	0.01450	0.04810	0.01198	0
76	118	0.01640	0.05440	0.01356	0

APÊNDICE B – Resultados Obtidos

São apresentados os resultados obtidos de magnitude e ângulo de tensão nas barras dos sistemas elétricos IEEE 14, 30 e 118 barras nos testes realizados com a reformulação de Lage (2013) e o FPOR sem restrições de complementaridade.

B.1 Sistema IEEE 14 barras

B.1.1 Reformulação de Lage (2013)

Tabela B.1 – Magnitudes e ângulos de tensão nas soluções obtidas do sistema elétrico IEEE 14 barras.

Barra	V (p.u.)	$\theta(rad)$
1	1.050	0.000
2	1.037	-0.089
3	1.008	-0.227
4	1.015	-0.184
5	1.016	-0.158
6	1.050	-0.261
7	1.019	-0.241
8	1.050	-0.241
9	1.014	-0.270
10	1.013	-0.273
11	1.028	-0.269
12	1.033	-0.276
13	1.027	-0.277
14	1.001	-0.292

B.1.2 FPOR sem Restrições de Complementaridade

Tabela B.2 – Magnitudes e ângulos de tensão nas soluções obtidas do sistema elétrico IEEE 14 barras.

Barra	V (p.u.)	$\theta(rad)$
1	1.050	0.000
2	1.036	-0.089
3	1.006	-0.227
4	1.015	-0.185

5	1.019	-0.158
6	1.050	-0.257
7	1.048	-0.241
8	1.047	-0.241
9	1.046	-0.271
10	1.039	-0.274
11	1.041	-0.268
12	1.036	-0.272
13	1.032	-0.274
14	1.022	-0.290

B.2 Sistema IEEE 30 barras

B.2.1 Reformulação de Lage (2013)

Tabela B.3 – Magnitudes e ângulos de tensão nas soluções obtidas do sistema elétrico IEEE 30 barras.

Barra	V (p.u.)	$\theta(rad)$
1	1.100	0.000
2	1.072	-0.083
3	1.067	-0.123
4	1.059	-0.152
5	1.051	-0.229
6	1.055	-0.180
7	1.046	-0.209
8	1.056	-0.193
9	1.047	-0.238
10	1.032	-0.268
11	1.093	-0.238
12	1.026	-0.254
13	1.058	-0.254
14	1.013	-0.270
15	1.010	-0.272
16	1.021	-0.265
17	1.023	-0.271
18	1.005	-0.283
19	1.006	-0.286
20	1.011	-0.283
21	1.018	-0.276

22	1.018	-0.275
23	1.003	-0.278
24	1.002	-0.281
25	0.998	-0.272
26	0.980	-0.280
27	1.004	-0.262
28	1.052	-0.191
29	0.983	-0.284
30	0.972	-0.300

B.2.2 FPOR sem Restrições de Complementaridade

Tabela B.4 – Magnitudes e ângulos de tensão nas soluções obtidas do sistema elétrico IEEE 30 barras.

Barra	V (p.u.)	$\theta(rad)$
1	1.100	0.000
2	1.074	-0.084
3	1.063	-0.122
4	1.054	-0.150
5	1.042	-0.227
6	1.051	-0.179
7	1.040	-0.208
8	1.048	-0.191
9	1.073	-0.231
10	1.084	-0.257
11	1.098	-0.231
12	1.086	-0.243
13	1.100	-0.243
14	1.073	-0.258
15	1.071	-0.260
16	1.078	-0.253
17	1.077	-0.259
18	1.064	-0.270
19	1.063	-0.273
20	1.067	-0.270
21	1.074	-0.265
22	1.075	-0.265
23	1.067	-0.268
24	1.071	-0.273

25	1.072	-0.264
26	1.055	-0.271
27	1.080	-0.254
28	1.047	-0.190
29	1.062	-0.274
30	1.051	-0.287

B.3 Sistema IEEE 118 barras

B.3.1 Reformulação de Lage (2013)

Tabela B.5 – Magnitudes e ângulos de tensão nas soluções obtidas do sistema elétrico IEEE 118 barras.

Barra	V (p.u.)	$\theta(rad)$
1	0.997	-0.261
2	1.004	-0.250
3	1.005	-0.245
4	1.033	-0.183
5	1.035	-0.175
6	1.022	-0.220
7	1.019	-0.228
8	1.074	-0.090
9	1.100	0.024
10	1.100	0.144
11	1.014	-0.225
12	1.016	-0.233
13	0.995	-0.249
14	1.008	-0.247
15	0.989	-0.257
16	1.003	-0.239
17	1.000	-0.211
18	0.992	-0.253
19	0.985	-0.262
20	0.964	-0.251
21	0.952	-0.226
22	0.950	-0.184
23	0.958	-0.098
24	0.966	-0.110
25	0.950	0.050

26	0.999	0.082
27	0.954	-0.201
28	0.951	-0.229
29	0.957	-0.244
30	1.050	-0.117
31	0.962	-0.241
32	0.959	-0.211
33	0.980	-0.264
34	0.987	-0.251
35	0.984	-0.259
36	0.984	-0.259
37	0.988	-0.241
38	1.045	-0.144
39	0.971	-0.306
40	0.973	-0.327
41	0.967	-0.336
42	0.977	-0.310
43	0.974	-0.257
44	0.972	-0.221
45	0.971	-0.191
46	0.991	-0.145
47	1.001	-0.109
48	0.999	-0.114
49	1.002	-0.095
50	0.985	-0.132
51	0.961	-0.180
52	0.953	-0.197
53	0.950	-0.214
54	0.964	-0.199
55	0.961	-0.203
56	0.962	-0.200
57	0.968	-0.178
58	0.959	-0.194
59	0.963	-0.111
60	0.950	-0.038
61	0.950	-0.021
62	0.955	-0.034
63	1.008	-0.043

64	1.012	-0.011
65	1.025	0.046
66	0.994	0.041
67	0.969	-0.009
68	1.013	0.052
69	1.041	0.0
70	1.008	-0.111
71	1.006	-0.115
72	0.985	-0.125
73	1.008	-0.118
74	0.992	-0.126
75	0.997	-0.104
76	0.985	-0.115
77	1.035	-0.016
78	1.031	-0.019
79	1.033	-0.010
80	1.052	0.040
81	1.050	0.045
82	1.040	-0.005
83	1.048	0.012
84	1.063	0.047
85	1.076	0.068
86	1.070	0.050
87	1.083	0.056
88	1.082	0.115
89	1.100	0.175
90	1.079	0.083
91	1.078	0.082
92	1.074	0.093
93	1.053	0.051
94	1.042	0.022
95	1.030	0.007
96	1.036	0.005
97	1.040	0.016
98	1.045	0.011
99	1.048	0.0
100	1.054	0.016
101	1.050	0.036

102	1.065	0.072
103	1.034	-0.041
104	1.014	-0.088
105	1.005	-0.105
106	0.993	-0.107
107	0.950	-0.144
108	1.003	-0.124
109	1.003	-0.131
110	1.006	-0.143
111	1.016	-0.117
112	0.991	-0.188
113	0.995	-0.213
114	0.951	-0.217
115	0.951	-0.217
116	0.991	0.061
117	1.000	-0.259
118	0.985	-0.116

B.3.2 FPOR sem Restrições de Complementaridade

Tabela B.6 – Magnitudes e ângulos de tensão nas soluções obtidas do sistema elétrico IEEE 118 barras.

Barra	V (p.u.)	$\theta(rad)$
1	1.069	-0.217
2	1.077	-0.207
3	1.076	-0.203
4	1.099	-0.148
5	1.100	-0.141
6	1.092	-0.181
7	1.090	-0.187
8	1.081	-0.067
9	1.100	0.047
10	1.093	0.168
11	1.086	-0.185
12	1.089	-0.192
13	1.074	-0.206
14	1.087	-0.204
15	1.087	-0.212
16	1.086	-0.198

17	1.100	-0.175
18	1.088	-0.208
19	1.085	-0.217
20	1.075	-0.207
21	1.072	-0.187
22	1.076	-0.152
23	1.091	-0.084
24	1.090	-0.094
25	1.100	0.031
26	1.100	0.061
27	1.084	-0.163
28	1.078	-0.186
29	1.078	-0.198
30	1.093	-0.099
31	1.080	-0.196
32	1.083	-0.171
33	1.086	-0.220
34	1.096	-0.210
35	1.094	-0.216
36	1.094	-0.216
37	1.100	-0.203
38	1.093	-0.125
39	1.078	-0.252
40	1.075	-0.268
41	1.070	-0.275
42	1.077	-0.253
43	1.084	-0.214
44	1.080	-0.183
45	1.075	-0.157
46	1.087	-0.118
47	1.094	-0.089
48	1.091	-0.090
49	1.099	-0.076
50	1.089	-0.106
51	1.072	-0.145
52	1.067	-0.159
53	1.066	-0.172
54	1.080	-0.159

55	1.079	-0.163
56	1.079	-0.160
57	1.081	-0.143
58	1.073	-0.156
59	1.100	-0.092
60	1.098	-0.035
61	1.100	-0.022
62	1.096	-0.030
63	1.090	-0.040
64	1.098	-0.013
65	1.100	0.039
66	1.100	0.035
67	1.093	-0.008
68	1.097	0.043
69	1.100	0.0
70	1.078	-0.097
71	1.079	-0.101
72	1.082	-0.107
73	1.078	-0.103
74	1.064	-0.113
75	1.065	-0.092
76	1.048	-0.102
77	1.087	-0.013
78	1.083	-0.016
79	1.085	-0.008
80	1.100	0.038
81	1.100	0.041
82	1.083	0.0
83	1.088	0.016
84	1.088	0.053
85	1.095	0.075
86	1.089	0.058
87	1.100	0.063
88	1.090	0.122
89	1.100	0.183
90	1.084	0.090
91	1.088	0.088
92	1.090	0.098

93	1.081	0.056
94	1.080	0.025
95	1.070	0.011
96	1.079	0.009
97	1.085	0.018
98	1.093	0.012
99	1.095	0.004
100	1.100	0.019
101	1.084	0.040
102	1.087	0.077
103	1.091	-0.035
104	1.082	-0.079
105	1.079	-0.096
106	1.072	-0.098
107	1.067	-0.138
108	1.076	-0.111
109	1.075	-0.117
110	1.075	-0.127
111	1.083	-0.104
112	1.060	-0.166
113	1.095	-0.175
114	1.079	-0.176
115	1.079	-0.176
116	1.097	0.049
117	1.075	-0.215
118	1.051	-0.104
