



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Lucas Queiroz Arakaki

Teoria dos Centros e Ciclicidade de pontos de Hopf para
Campos de Vetores Planares e Tridimensionais

São José do Rio Preto
2019

Lucas Queiroz Arakaki

Teoria dos Centros e Ciclicidade de pontos de Hopf para
Campos de Vetores Planares e Tridimensionais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa

Financiador: CNPq

São José do Rio Preto
2019

A659t

Arakaki, Lucas Queiroz

Teoria dos centros e ciclicidade de pontos de Hopf para campos de vetores planares e tridimensionais / Lucas Queiroz Arakaki. -- São José do Rio Preto, 2019

98 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Cláudio Gomes Pessoa

1. Teoria Qualitativa. 2. Problema do centro-foco. 3. Variedade central. 4. Ciclicidade. 5. Ponto de Hopf. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Lucas Queiroz Arakaki

Teoria dos Centros e Ciclicidade de pontos de Hopf para
Campos de Vetores Planares e Tridimensionais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiador: CNPq

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa
Orientador

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi
IBILCE-UNESP

Profa. Dra. Regilene Delazari dos Santos Oliveira
ICMC-USP

São José do Rio Preto
17 de julho de 2019

*Aos meus pais, Paulo e Rosa,
à minha irmã, Fernanda, e à Juliana,
minha companheira e melhor amiga.*

Agradecimentos

Agradeço a meus pais, Paulo e Rosa, e à minha irmã, Fernanda, pelo apoio, incentivo e pela estrutura que me levou até aqui.

À Juliana, minha companheira e melhor amiga, pelo amor, carinho, conforto nas dificuldades e pelo esforço que teve para aprender os conceitos de “centro” e “foco”.

Aos amigos que estiveram comigo durante a pós-graduação, proporcionando momentos únicos e ajudando a suavizar as pressões da vida acadêmica. Em especial, agradeço aos companheiros dinamicistas: Ana Livia, que além de ser muito elegante, me incentivou a trocar e-mails com James Munkres, ao Otávio, meu poliglota favorito, ao Jarne, meu irmão mais velho, ao Willian que não lembra de mim, ao Luiz Fernando, o melhor matemático cantor. Aos companheiros de jogos: Kumon, Carol (Lady Rayovak), Gustavo e André Carvalho. E aos amigos que tive prazer em compartilhar a sala do café: Helô, Junior, Cheienne, Samuel, Rodrigo Bononi e Camila. Agradeço imensamente à Jéssica Ventura, pela amizade e parceria nos momentos difíceis e por sempre estar pronta para nos animar. E ao André Amaral, que não encontro palavras para agradecer-lo por ter me ajudado a reencontrar o fôlego matemático que imaginei ter se extinguido em mim.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Claudio Pessoa, com quem tive o prazer e satisfação de produzir este trabalho e que sempre foi solícito e dedicado para me guiar na vida acadêmica.

Aos examinadores da banca, Claudio Buzzi e Regilene, pela disponibilidade.

À CNPq processo 134590/2017-1, pelo apoio financeiro.

“Ora vejam só!”

Lucas

RESUMO

Neste trabalho, estudamos o Problema do Centro-Foco para sistemas planares e sua extensão para sistemas tridimensionais apresentando alguns dos resultados mais recentes da literatura. Nosso enfoque envolve duas abordagens principais: o estudo da aplicação de Poincaré e o Segundo Método de Lyapunov. Destes métodos, surgem dois conjuntos de expressões algébricas denominadas coeficientes de Lyapunov e coeficientes focais. Mostramos a equivalência existente entre estes coeficientes e sua relação com outro importante problema da Teoria Qualitativa das E.D.O.: a bifurcação de ciclos limite a partir de um ponto de Hopf. Além disso, apresentamos o Método da Paralelização, utilizado para obter os coeficientes focais de modo eficiente, e ao final do texto, discutimos alguns exemplos que ilustram os resultados.

Palavras-chave: Teoria Qualitativa, Problema do centro-foco, Variedade central, Ciclicidade, Ponto de Hopf.

ABSTRACT

In this work, we study the Center-Focus Problem for planar systems and its extension to three-dimensional systems presenting some of the most recent results in the literature. We focus on two approaches: the study of the Poincaré map and Lyapunov's Second Method. These methods give rise to two sets of algebraic expressions, namely: Lyapunov coefficients and focal coefficients. We show that there is an equivalence between these coefficients and their relation to another important problem in the Qualitative Theory of ODEs: the bifurcation of limit cycles from a Hopf singularity. Moreover, we present the Parallelization Method, used to obtain the focal coefficients in an efficient way, and in the end of the text, we discuss some examples illustrating the results.

Keywords: Qualitative Theory, Center-focus problem, Center manifold, Cyclicity, Hopf singularity.

Lista de Figuras

2.1	Retratos de fase dos sistemas quadráticos sob as condições do Teorema de Kapteyn-Bautin.	33
3.1	Comportamento de uma órbita do sistema por um ponto de γ	42
3.2	Retrato de fase de um sistema de Lü numa vizinhança das singularidades Q_+ e Q_- , com a condição $b = 2a$, sobre a variedade central. . .	61
5.1	Retrato de fase do centro holomorfo de grau 6.	81
5.2	Retratos de fase dos centros holomorfos de grau 2, 3, 4, 5, 7 e 8.	82
5.3	Retratos de fase do sistema (5.2) sob parâmetros na variedade de Bautin.	84
5.4	Retratos de fase do sistema (5.3) para parâmetros $\lambda \in V_1$ sobre a variedade central.	87
5.5	Retratos de fase do sistema (5.3) para parâmetros $\lambda \in V_2$ e $\lambda \in V_3$ sobre a variedade central.	88
5.6	Retrato de fase do sistema de Moon-Rand para $s \in V^c$ sobre a variedade cenral $w = \frac{c_{11}v^2}{2}$	91
5.7	Retrato de fase do sistema de Lü para $s \in V^c$ sobre a variedade central.	93

Sumário

1	Introdução	10
2	O Problema do Centro-Foco em \mathbb{R}^2	13
2.1	A Aplicação de Poincaré e a Função Deslocamento	14
2.2	Integrais Primeiras e Funções de Lyapunov	18
2.3	O Teorema do Centro de Poincaré-Lyapunov	24
2.4	A Variedade de Bautin	29
2.5	Equivalência entre os Coeficientes de Lyapunov e Focais	34
3	O Problema do Centro-Foco sobre uma Variedade Central em \mathbb{R}^3	37
3.1	A Variedade Central	38
3.2	A Aplicação Deslocamento Reduzida	39
3.3	Formas Normais e Integrais Primeiras Formais	43
3.4	O Teorema do Centro em \mathbb{R}^3 e a Variedade de Bautin	50
3.5	Coeficientes de Lyapunov do sistema restrito à Variedade Central	62
4	Bifurcações de Ciclos Limite a partir de Pontos de Hopf	64
4.1	Ciclos Limite em Sistemas Planares	65
4.2	Ciclos Limite em Sistemas Tridimensionais	72
4.3	O Método da Paralelização	76
5	Exemplos	80
5.1	Sistemas Planares	80
5.1.1	Centro Holomorfo de grau 6	80
5.1.2	Sistema Quadrático com Ciclicidade Máxima	83
5.2	Sistemas Tridimensionais	86
5.2.1	Sistema com Hiperboloide Invariante	86
5.2.2	Sistema de Moon-Rand	90
5.2.3	Sistema de Lü	93
	Referências	95

1 Introdução

O estudo dos Sistemas Dinâmicos é de grande relevância, não só na matemática, mas também na física, engenharia e outras ciências aplicadas, uma vez que trata dos fenômenos naturais que evoluem com o tempo, os quais são modelados, na maioria das vezes, por equações diferenciais ordinárias. Dentro desta área, tem destaque a Teoria Qualitativa das E.D.O., a qual teve início no final do século XIX a partir do trabalho de Poincaré (*Sur les courbes définies par les équations différentielles* [23]). O objetivo da Teoria Qualitativa é descrever a estrutura geométrica e topológica das soluções de equações diferenciais sem, de fato, exibí-las explicitamente.

Em mais de um século de sua existência, a Teoria Qualitativa se desenvolveu bastante, produzindo diversos resultados e, com isso, também diversos problemas. Dos principais problemas, destacamos dois: o *Problema do Centro-Foco* e o *16º Problema de Hilbert*. O *Problema do Centro-Foco* consiste em determinar se o comportamento local das órbitas em torno de um ponto singular de um sistema planar caracteriza um centro ou um foco. Já o ilustre *16º Problema de Hilbert*, mais precisamente a segunda parte deste problema, trata de estipular, caso exista, uma cota superior para o número de ciclos limite de um sistema polinomial planar em função do grau deste sistema. Existe uma relação forte entre estes problemas que é estabelecida em termos dos *coeficientes focais* ou *coeficientes de Lyapunov*.

Originalmente, estes problemas foram enunciados e estudados para sistemas planares. Em relação ao *Problema do Centro-Foco*, é possível abordá-lo por meio de duas técnicas principais: o estudo da aplicação de primeiro retorno e o *Segundo Método de Lyapunov*. Esta segunda é fortemente embasada no *Teorema do Centro de Poincaré-Lyapunov*, demonstrado por Poincaré em seu trabalho supracitado [23] no capítulo em que se intitula *Théorie des Centres*¹. Ao desenvolvermos a teoria a partir do segundo método de Lyapunov, nos deparamos com os *coeficientes focais*. Destes coeficientes, também é possível obter conclusões sobre o potencial de criação de ciclos limite por pequenas perturbações de um sistema polinomial.

¹O título desta dissertação faz uma humilde homenagem a este capítulo e ao excelente matemático que o escreveu, Henri Poincaré.

Estes desenvolvimentos teóricos, apesar de obtidos para sistemas planares, podem ser estendidos para sistemas tridimensionais sob certas condições, e têm sido o foco de pesquisas atuais ([11, 6, 12]). Mais precisamente, para sistemas da forma

$$\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}),$$

onde $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação analítica em um aberto U de \mathbb{R}^3 tal que $F(0) = 0$ e os autovalores de DF_0 são dois imaginários puros e um real não-nulo, existe uma variedade bidimensional invariante pelo sistema, chamada variedade central. Sobre esta variedade, podemos estudar os problemas acima para o sistema restrito, o qual é bidimensional. Sob estas condições, o ponto singular na origem é chamado de *ponto de Hopf*.

O propósito deste trabalho é apresentar de maneira objetiva as técnicas usadas para abordar o *Problema do Centro-Foco*, organizar as demonstrações dos principais teoremas desta teoria e apontar a conexão deste problema com o 16º *Problema de Hilbert* para sistemas planares e também para os sistemas tridimensionais cuja origem é um ponto de Hopf.

Assim, no Capítulo 2, apresentamos o *Problema do Centro-Foco* para sistemas planares e exibimos duas técnicas comumente utilizadas na literatura para abordá-lo. A primeira técnica se desenvolve a partir da aplicação de primeiro retorno e sua expansão em série de potências, introduzindo o conceito de coeficientes de Lyapunov. A segunda consiste na construção de uma série que cumpra o papel de *integral primeira* ou *função de Lyapunov estrita* para o sistema, obtendo neste processo os coeficientes focais, sendo que no primeiro caso temos um centro e no segundo um foco. Ainda neste capítulo, demonstramos o *Teorema do Centro de Poincaré-Lyapunov* e a equivalência entre os coeficientes focais e os coeficientes de Lyapunov.

No Capítulo 3, estendemos a teoria desenvolvida no plano para sistemas tridimensionais cuja origem é um ponto de Hopf. Pelo *Teorema da Variedade Central*, estes sistemas têm uma variedade invariante de dimensão 2. Restrito a essa variedade, o sistema é bidimensional e o *Problema do Centro-Foco* pode ser formulado. Generalizamos os coeficientes de Lyapunov a partir da aplicação de primeiro retorno destes sistemas, bem como os coeficientes focais através do *Segundo Método de Lyapunov*, dando uma demonstração do *Teorema do Centro de Lyapunov* a partir de resultados da teoria de *formas normais*.

Finalmente, no Capítulo 4, estudamos como os coeficientes de Lyapunov interferem na criação de ciclos limite para sistemas polinomiais planares a partir de um foco múltiplo ou de um centro, demonstrando dois teoremas de criação de ciclos limite [20, 25, 9]. Como ambos são enunciados em termos dos coeficientes

de Lyapunov, que são computacionalmente difíceis de se obter, usamos a equivalência entre estes coeficientes e os coeficientes focais demonstrada no Capítulo 2 para exprimir estes teoremas também a partir dos coeficientes focais. Generalizamos estes teoremas para sistemas tridimensionais cuja origem é um ponto de Hopf. Além disso, exibimos o *Método da Paralelização* apresentado em [16], o qual é utilizado para calcular a parte linear dos coeficientes focais em um tempo computacional consideravelmente menor que o método tradicional. Finalizamos o texto no Capítulo 5, no qual exibimos diversos exemplos numéricos para ilustrar algumas aplicações da teoria desenvolvida.

2 O Problema do Centro-Foco em \mathbb{R}^2

Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}), \quad (2.1)$$

onde $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação analítica no aberto U contendo a origem com $F(0) = 0$ e tal que os autovalores de DF_0 são $\alpha \pm i\beta$, com $\beta \neq 0$. Se F é um sistema linear, a natureza da singularidade na origem é completamente determinada pelos autovalores de DF_0 , mais precisamente, a origem é um foco para $\alpha \neq 0$ e é um centro para $\alpha = 0$.

Quando o sistema é não-linear, determinar a natureza desta singularidade não é trivial. O Teorema de Hartman-Grobman nos permite classificar o ponto singular na origem quando $\alpha \neq 0$, isto é, para o caso de sistemas hiperbólicos. Entretanto, para $\alpha = 0$, isto é, quando a origem é um *ponto de Hopf*, é preciso uma investigação mais profunda para determinarmos o comportamento das trajetórias do campo vetorial associado a (2.1). Veremos na próxima seção que quando $\alpha = 0$, só há duas possibilidades: a origem é um centro ou um foco. O *Problema do Centro-Foco* consiste em distinguir entre estes dois casos.

Formalizamos agora as definições de centro e foco, que serão utilizadas ao longo de todo o texto:

Definição 2.1. *Seja $\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u})$ um sistema de equações diferenciais real e analítico definido numa vizinhança da origem com $F(0) = 0$.*

- (i) *A singularidade na origem é um centro quando existe uma vizinhança V , $0 \in V$, tal que a trajetória do sistema por qualquer ponto de $V \setminus \{0\}$ é uma curva fechada γ .*
- (ii) *A singularidade na origem é um foco estável quando existe uma vizinhança V , $0 \in V$, tal que a trajetória do sistema por qualquer ponto de V é uma espiral tendendo a 0. Diremos que a origem é um foco Instável quando o sistema $\dot{\mathbf{u}} = -F(\mathbf{u})$ tem um foco estável na origem.*

2.1 A Aplicação de Poincaré e a Função Deslocamento

Tendo como objetivo determinar a natureza da singularidade na origem do sistema (2.1), a aplicação de Poincaré e a função deslocamento são ferramentas poderosas, uma vez que estas funções descrevem completamente o comportamento das trajetórias do sistema em uma vizinhança suficientemente pequena da origem. Assim, tomando como base os trabalhos de A. Andronov (Seção 10.1 do Capítulo IV de [2]), desenvolvemos a teoria que envolve estas funções e apontamos sua importância para o *Problema do Centro-Foco*.

O sistema (2.1), após uma mudança de variáveis linear, pode ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha u - \beta v + P(u, v), \\ \dot{v} = \beta u + \alpha v + Q(u, v), \end{cases} \quad (2.2)$$

onde P e Q têm apenas termos de ordem maior ou igual a 2 em suas expansões em série de Taylor. Ao realizar uma reparametrização do tempo $\tau = \beta t$, podemos escrever o sistema na forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = \lambda_0 u - v + \tilde{P}(u, v), \\ \dot{v} = u + \lambda_0 v + \tilde{Q}(u, v). \end{cases} \quad (2.3)$$

Note que \tilde{P} e \tilde{Q} têm apenas termos de ordem maior ou igual a 2 em suas expansões em série de Taylor e $\lambda_0 = \frac{\alpha}{\beta}$. Reescrevendo (2.3) em coordenadas polares $u = \rho \cos \theta$ e $v = \rho \sin \theta$, obtemos:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \lambda_0 \rho + \tilde{P}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos \theta + \tilde{Q}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sin \theta, \\ \dot{\theta} = 1 - \rho^{-1} \left[\tilde{P}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sin \theta + \tilde{Q}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos \theta \right]. \end{cases} \quad (2.4)$$

Como

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} &= 1 - \rho^{-1} \left[\tilde{P}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sin \theta + \tilde{Q}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos \theta \right] = \\ &= 1 - \rho \left[\bar{P}(\rho, \cos \theta, \sin \theta) \sin \theta + \bar{Q}(\rho, \cos \theta, \sin \theta) \cos \theta \right], \end{aligned}$$

para valores suficientemente pequenos de ρ , o sinal de $\dot{\theta}$ é positivo. Logo, para as órbitas do sistema (2.3) de pontos suficientemente próximos da origem, a determinação de ângulo $\theta(t)$ é crescente. Em outras palavras, as órbitas de pontos próximos da origem, giram. Devido a este comportamento, por vezes nos referiremos ao ponto singular na origem do sistema (2.1) como *ponto singular monodrômico*.

As curvas integrais do sistema (2.4) são determinadas pela equação:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\lambda_0 \rho + \rho^2 F(\rho, \cos \theta, \sin \theta)}{1 - \rho G(\rho, \cos \theta, \sin \theta)} = R(\rho, \theta). \quad (2.5)$$

A função $R(\rho, \theta)$ é periódica de período 2π e, para ρ suficientemente pequeno, é analítica para todo θ . Como a origem é um ponto singular de (2.3), $R(0, \theta) \equiv 0$. Logo, $\rho = 0$ é solução da EDO (2.5) acima.

Pelo Teorema de Existência e Unicidade, para cada condição inicial ρ_0 suficientemente pequeno, existe única solução de (2.5) passando por (θ_0, ρ_0) . Denotemos essa solução por $r = f(\theta, \theta_0, \rho_0)$. A função f é analítica em suas três variáveis, e temos que $f(\theta, \theta_0, 0) \equiv 0$ uma vez que $\rho = 0$ é solução de (2.5).

Como em uma vizinhança suficientemente pequena da origem, as trajetórias de (2.3) interseccionam o eixo- u ($\theta \equiv 0$), podemos investigar as soluções do tipo $r(\theta, \rho_0) = f(\theta, 0, \rho_0)$. Expandindo $r(\theta, \rho_0)$ em série de Taylor em torno da origem $\rho_0 = 0$, obtemos:

$$r(\theta, \rho_0) = f(\theta, 0, \rho_0) = u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + \dots$$

Como $R(\rho, \theta)$ é analítica para todo θ , para ρ suficientemente pequeno, podemos substituir a expansão de $r(\theta, \rho_0)$ em (2.5) e expandir $R(\rho, \theta)$ em série de Taylor em torno de $\rho = 0$. Ou seja:

$$\begin{aligned} u_1'(\theta)\rho_0 + u_2'(\theta)\rho_0^2 + \dots &= R(r(\theta, \rho_0), \theta) = \\ &= R_1(\theta)(u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + \dots) + R_2(\theta)(u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + \dots)^2 + \dots \end{aligned}$$

Ao comparar potências de ρ_0 , obtemos as equações diferenciais:

$$\begin{aligned} u_1'(\theta) &= R_1(\theta)u_1(\theta), \\ u_2'(\theta) &= R_1(\theta)u_2(\theta) + R_2(\theta)u_1^2(\theta), \\ u_3'(\theta) &= R_1(\theta)u_3(\theta) + 2R_2(\theta)u_1(\theta)u_2(\theta) + R_3(\theta)u_1^3(\theta), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Temos que $\rho_0 = f(0, 0, \rho_0) = u_1(0)\rho_0 + u_2(0)\rho_0^2 + \dots$, então $u_1(0) = 1$ e $u_i(0) = 0, i \geq 2$. Com estas condições iniciais é possível determinar unicamente as funções $u_i(\theta), i \geq 1$. Em particular, obtemos $u_1(\theta)$ facilmente. De fato, temos de (2.5) que $R_1(\theta) = \frac{dR}{d\rho}(0) \equiv \lambda_0$. Daí, $u_1'(\theta) = R_1(\theta)u_1(\theta) = \lambda_0 u_1(\theta)$, e então $u_1(\theta) = e^{\lambda_0 \theta}$.

Substituindo $\theta = 2\pi$ na solução $r(\theta, \rho_0)$, obtemos o ponto onde a trajetória r retorna a interseccionar o eixo- u pela primeira vez, isto é, o primeiro retorno do ponto $(\rho_0, 0)$. Podemos então definir:

Definição 2.2. (Aplicação de Poincaré) Dado um sistema da forma (2.3), a função

$$\mathbb{P}(\rho_0) = r(2\pi, \rho_0) = f(2\pi, 0, \rho_0)$$

é chamada aplicação de Poincaré ou aplicação de primeiro retorno.

Definição 2.3. (Função Deslocamento) Dado um sistema da forma (2.3), a função

$$d(\rho_0) = \mathbb{P}(\rho_0) - \rho_0 = r(2\pi, \rho_0) - \rho_0 = f(2\pi, 0, \rho_0) - \rho_0$$

é chamada função deslocamento.

Definição 2.4. A expansão em série de Taylor da função deslocamento é dada por:

$$\begin{aligned} d(\rho_0) &= -\rho_0 + u_1(2\pi)\rho_0 + u_2(2\pi)\rho_0^2 + u_3(2\pi)\rho_0^3 + \dots = \\ &= (u_1(2\pi) - 1)\rho_0 + u_2(2\pi)\rho_0^2 + u_3(2\pi)\rho_0^3 + \dots = \\ &= v_1\rho_0 + v_2\rho_0^2 + v_3\rho_0^3 + \dots \end{aligned}$$

Os coeficientes $v_i, i \geq 1$ da expansão acima são chamados de valores focais do sistema (2.3).

Note que a continuidade e a analiticidade das funções de Poincaré e deslocamento seguem da continuidade e da analiticidade da solução $f(\theta, 0, \rho_0)$.

Observação 2.1. Algumas observações pertinentes sobre a função deslocamento e os valores focais:

- (i) A função deslocamento determina completamente o comportamento das órbitas em uma vizinhança suficientemente pequena da origem. De fato, se existe $r^* > 0$ tal que $d(\rho_0) \neq 0$ para $0 < \rho_0 < r^*$, então a origem é um foco, pois as trajetórias nunca retornam ao ponto inicial, espiralando em direção à origem se $d(\rho_0) < 0$ e afastando-se dela se $d(\rho_0) > 0$. Além disso, se existe $r^* > 0$ tal que $d(\rho_0) \equiv 0$, para $0 < \rho_0 < r^*$, então todas as órbitas por estes pontos são curvas fechadas, e temos um centro na origem.
- (ii) Os zeros isolados da função deslocamento correspondem a órbitas fechadas isoladas do sistema (2.3), ou seja, a *ciclos limite*. Como a função deslocamento é analítica, seus zeros, quando existem, são isolados. Logo, não é possível obter um sistema analítico (2.3) com uma sequência de ciclos limite se acumulando na origem.
- (iii) Basta um valor focal não-nulo para que a origem seja um foco. De fato, se v_k é o primeiro valor focal não nulo, a expansão da função deslocamento pela série de Taylor é dada por

$$d(\rho_0) = v_k \rho_0^k + O(\rho_0^{k+1}),$$

e, portanto, $d(\rho_0) \neq 0$ para todo valor positivo suficientemente pequeno de ρ_0 . Caso todos os valores focais sejam nulos, o ponto singular na origem é um centro, uma vez que a expansão em série de Taylor da função deslocamento

é nula e portanto, $d(\rho_0) \equiv 0$ para valores suficientemente pequenos de ρ_0 . Esta dicotomia da natureza da singularidade para os sistemas (2.1) justifica o nome do *Problema do Centro-Foco*.

Provamos a seguir algumas propriedades dos valores focais:

Proposição 2.1. *Dado o sistema (2.1), se a parte real α dos autovalores de DF_0 é nula, então o primeiro valor focal v_1 é nulo.*

Demonstração: Ao escrevermos o sistema (2.1) na forma (2.3), como $\lambda_0 = \frac{\alpha}{\beta}$, temos que $\lambda_0 = 0$. Daí, $v_1 = u_1(2\pi) - 1 = e^{2\lambda_0\pi} - 1 = 0$. \square

Proposição 2.2. *O primeiro valor focal não-nulo é coeficiente de uma potência ímpar de ρ_0 .*

Demonstração: Seja v_k o primeiro valor focal não-nulo. Pela expansão em série de Taylor, temos:

$$d(\rho_0) = v_k \rho_0^k + O(\rho_0^{k+1}).$$

Suponha que $v_k < 0$. Logo, existe r^* tal que para todo ρ_0 , com $0 < \rho_0 < r^*$, temos $d(\rho_0) < 0$. Assim, a origem é um foco estável e, portanto, em uma vizinhança V , $0 \in V$, as trajetórias se aproximam da origem. Então, para pontos do eixo- u com abscissa negativa $-\rho_0$ e dentro de V , temos que:

$$|r(2\pi, -\rho_0)| < |-\rho_0| \Rightarrow 0 > |r(2\pi, -\rho_0)| - |-\rho_0| > -r(2\pi, -\rho_0) - (-\rho_0) = -d(-\rho_0).$$

Daí $d(-\rho_0) > 0$. Logo, para ρ_0 suficientemente pequeno, temos $d(\rho_0)d(-\rho_0) < 0$. Se k fosse par, $d(\rho_0)$ e $d(-\rho_0)$ teriam o mesmo sinal. Portanto, k deve ser ímpar. A demonstração é análoga se supusermos $v_k > 0$. \square

Podemos então definir multiplicidade de um foco:

Definição 2.5. (Foco Múltiplo) *Dado o sistema (2.1), seja v_k o primeiro valor focal não-nulo. Pela Proposição 2.2, $k = 2m + 1$. Se $m > 0$, dizemos que a origem é um foco de multiplicidade m .*

Consideremos o caso em que o sistema de equações diferenciais depende de parâmetros. Isto é, lidamos com um sistema da forma:

$$\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}, \lambda), \tag{2.6}$$

no qual $F : U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação analítica onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto contendo a origem e $\Lambda = \mathbb{R}^n$. Além disso, $F(0, \lambda) = 0$ e $DF_{(0, \lambda)}$ tem autovalores cuja parte imaginária é não-nula para todo $\lambda \in \Lambda$. Neste caso, as formas (2.4) e (2.5) deste sistema também dependem dos parâmetros λ e conseqüentemente, a aplicação de Poincaré e a função deslocamento. Pelo Teorema da Dependência

Contínua das Soluções em relação às Condições Iniciais e Parâmetros, a continuidade destas funções é garantida.

Assim, segue que os valores focais $v_i, i \geq 1$ são funções contínuas dos parâmetros λ . Logo, resolver o *Problema do Centro-Foco* para uma família de sistemas (2.6) se resume a determinar condições sobre λ para que os valores focais $v_i = v_i(\lambda)$ sejam nulos para $i \geq 1$.

Pela Proposição 2.2, os valores focais de índice par são irrelevantes no estudo do *Problema do Centro-Foco*. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 2.6. (Coeficiente de Lyapunov) *Dado o sistema (2.1) e seus respectivos valores focais $v_i, i \geq 1$. Então, os coeficientes*

$$L_k = v_{2k+1},$$

são chamados coeficientes de Lyapunov para $k \geq 0$.

Teoricamente, a discussão e os resultados acima resolvem completamente o *Problema do Centro-Foco*. Entretanto, determinar os coeficientes de Lyapunov é um trabalho difícil e, na maioria dos casos, computacionalmente impraticável. Na seção seguinte, mostramos um método alternativo para resolver o *Problema do Centro-Foco*, que não só é equivalente como é mais simples do ponto de vista computacional.

2.2 Integrais Primeiras e Funções de Lyapunov

Um método alternativo para resolver o *Problema do Centro-Foco* é baseado no célebre *Teorema do Centro* atribuído a Poincaré e a Lyapunov. Para entendermos este teorema e como ele se encaixa em nossos objetivos, é preciso definir as funções que chamaremos de *integral primeira* e *função de Lyapunov*. Ambas as funções descrevem o comportamento das órbitas do sistema numa vizinhança do ponto de equilíbrio na origem, e portanto, são relevantes para o *Problema do Centro-Foco*.

Definição 2.7. (Integral Primeira) *Sejam U um aberto de \mathbb{R}^n e $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^r, r > 1$, ou analítica não-constante. Dizemos que H é uma integral primeira para um sistema de equações diferenciais quando H é constante sobre suas trajetórias. Neste caso, dizemos que o sistema é integrável.*

Observação 2.2. Dado um sistema de equações diferenciais e denotando o campo vetorial associado por \mathcal{F} , temos que H é uma integral primeira para o sistema se, e somente se, $\mathcal{F}H \equiv 0$, onde $\mathcal{F}H = \langle \mathcal{F}, \nabla H \rangle = \frac{dH}{dt}$.

A existência de uma integral primeira para um sistema dado é uma ferramenta poderosa para a descrição de seu retrato de fase. De fato, se um sistema planar é integrável, então as suas trajetórias estão contidas nas curvas de nível da integral primeira.

Em relação ao *Problema do Centro-Foco*, a existência de uma integral primeira implica que a singularidade na origem é um centro. De fato:

Proposição 2.3. *Dado um sistema planar de equações diferenciais com singularidade na origem. Se o sistema é integrável, então a singularidade não é um foco.*

Demonstração: Suponha que um sistema integrável tenha um foco na origem. Logo, em uma vizinhança V da origem, todas as órbitas $\gamma_x(t)$ por pontos $x \in V$ são tais que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_x(t) = 0$ ou $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_x(t) = 0$. Suponha, sem perda de generalidade que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_x(t) = 0$. Seja $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ a integral primeira do campo, e U uma vizinhança da origem. Por definição H não é constante em $U \cap V$. Por continuidade, para qualquer $x \in U \cap V$, temos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(\gamma_x(t)) = H(0).$$

Como, por definição, $H(\gamma_x)$ é constante, o limite acima implica que $H(\gamma_x) \equiv H(0)$ e então $H(x) = H(\gamma_x(0)) = H(0)$. Como x é arbitrário em $U \cap V$, $H \equiv H(0)$ em $U \cap V$, o que é uma contradição. Logo o sistema não admite foco na origem. \square

Concluimos que ao determinar condições para que o sistema (2.1) tenha uma integral primeira, também resolvemos o Problema do Centro-Foco. A Teoria de Integrabilidade de Darboux é bastante útil nesta tarefa. Um estudo mais profundo e detalhado desta teoria encontra-se no Capítulo 8 de [10].

Seguimos definindo função de Lyapunov:

Definição 2.8. (Função de Lyapunov) *Dado um sistema de equações diferenciais com singularidade na origem, seja $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, onde U é um aberto de \mathbb{R}^n , com $0 \in U$. Considere as condições:*

- (i) $V(0) = 0$ e $V(x) > 0$ para $x \neq 0$;
- (ii) $\mathcal{F}V \leq 0$ em U , onde \mathcal{F} é o campo associado ao sistema dado;
- (iii) $\mathcal{F}V < 0$ em $U \setminus \{0\}$.

Se V satisfaz as condições (i) e (ii), então chamamos V de função de Lyapunov para o sistema. Se V satisfaz as condições (i), (ii) e (iii), chamamos V de função de Lyapunov estrita.

O papel da função de Lyapunov para determinar o comportamento das trajetórias do sistema (2.1) é resumido no teorema seguinte, que é uma particularização do *Critério de Lyapunov* para sistemas com pontos de Hopf. O *Critério de Lyapunov* abrange mais cenários que os demonstrados abaixo, envolvendo o conceito de *Estabilidade de Lyapunov*. Para uma discussão completa sobre estes conceitos, recomendamos a leitura do capítulo VIII de [28].

Teorema 2.1. *Se $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Lyapunov estrita para o sistema (2.1), então a origem é um foco estável.*

Demonstração: Consideremos $B = B[0, \delta] \subset U$ a bola fechada de raio δ centrada na origem. Seja $m = \min\{V(x) : x \in \partial B\}$. Temos que $m > 0$. Como V é contínua e $V(0) = 0$, existe uma vizinhança U_1 da origem com $U_1 \subset B$ tal que $V(x) < m$, para todo $x \in U_1$. Como $\mathcal{F}V < 0$, V decresce ao longo das órbitas por pontos de $U_1 \setminus \{0\}$ e essas órbitas mantêm-se dentro de U_1 para $t \rightarrow +\infty$. De fato, se existisse um ponto de U_1 cuja órbita saísse de U_1 , então V avaliada nesta órbita atingiria um valor maior que m , o que contradiz o fato de V ser decrescente.

Dado x arbitrário em U_1 , seja $\{t_n\}$ uma sequência crescente de números reais tais que $\gamma_x(t_n) \rightarrow y \in B$, onde $\gamma_x(t)$ denota a órbita do sistema pelo ponto x . Tal y existe pela compacidade de B . Por continuidade, $V(\gamma_x(t_n)) \rightarrow V(y)$. Além disso, $V(\gamma_x(t)) > V(y)$, para $t \geq 0$, pois V é decrescente.

Suponhamos que $y \neq 0$. Então $V(\gamma_y(t)) < V(y)$ para $t > 0$. Por continuidade, e por V ser decrescente, existe uma vizinhança W de y tal que $V(\gamma_w(1)) < V(y)$, para $w \in W$.

Daí, para n suficientemente grande, $\gamma_x(t_n) \in W$ e portanto $V(\gamma_x(t_n + 1)) < V(y)$, o que é uma contradição.

Suponhamos que $\gamma_x(t) \not\rightarrow 0$. Então poderíamos construir uma sequência $\{t_n\}$ de números crescentes tal que $\|\gamma_x(t_n)\| \geq \epsilon$, para $\epsilon > 0$ dado. Pela compacidade de B , existe $y \in B$ tal que $\gamma_x(t_n) \rightarrow y$. Pelo argumento acima, $y = 0$.

Portanto, as trajetórias de (2.1) tendem à origem em tempo infinito. Isto é, a origem é um foco estável. \square

Observação 2.3. Se o sistema (2.1) admite uma função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável satisfazendo a condição (i) da Definição 2.8 e com $\mathcal{F}V \geq 0$ em U e $\mathcal{F}V > 0$ em $U \setminus \{0\}$, então V é uma função de Lyapunov estrita para o sistema $\dot{\mathbf{u}} = -F(\mathbf{u})$. De fato, basta notar que $(-F)V = -(\mathcal{F}V)$. Assim, o teorema acima garante que a existência de tal V implica que o sistema (2.1) tem um foco instável na origem.

A partir da discussão acima, podemos concluir que um método efetivo para resolvermos o *Problema do Centro-Foco* seria determinar uma função H que cumpra o papel de integral primeira ou de função de Lyapunov estrita para o sistema (2.1).

Tal método é conhecido na literatura como *Segundo Método de Lyapunov* ([24] p. 57, [17] p. 579, [4] p. 50), que descrevemos a seguir:

Consideremos o sistema (2.1) com $\alpha = 0$. Escrevendo-o na forma (2.3), obtemos:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + P(u, v), \\ \dot{v} = u + Q(u, v). \end{cases} \quad (2.7)$$

Podemos expandir P e Q em série de potências de u e v e, como observado acima, estas expansões não contém termos de grau menor que 2.

Fazendo a mudança de variáveis $x = u + iv$ e $y = \bar{x} = u - iv$, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = ix + \sum_{p+q \geq 2} a_{pq} x^p y^q, \\ \dot{y} = -iy + \sum_{p+q \geq 2} b_{pq} x^p y^q. \end{cases} \quad (2.8)$$

O sistema (2.7) é equivalente à primeira equação de (2.8). A segunda equação é obtida tomando $b_{qp} = \bar{a}_{pq}$. Dizemos que o sistema (2.8) é a forma *complexificada* do sistema (2.7).

Observemos que ao mudar as variáveis de u, v para x, y em uma função $H(u, v)$ não alteramos sua derivada no sentido do campo. De fato, se \mathcal{F} e \mathcal{Z} são os campos vetoriais associados aos sistemas (2.7) e (2.8) respectivamente, e $\Psi(x, y) = H\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2i}\right)$ e pelo fato de $y = \bar{x}$, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\Psi &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \dot{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{1}{i} \frac{\partial H}{\partial v} \right) (\dot{u} + i\dot{v}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{1}{i} \frac{\partial H}{\partial v} \right) (\dot{u} - i\dot{v}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} + i \frac{\partial H}{\partial u} \dot{v} + \frac{1}{i} \frac{\partial H}{\partial v} \dot{u} + \frac{\partial H}{\partial v} \dot{v} + \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} - i \frac{\partial H}{\partial u} \dot{v} - \frac{1}{i} \frac{\partial H}{\partial v} \dot{u} + \frac{\partial H}{\partial v} \dot{v} \right) = \\ &= \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial H}{\partial v} \dot{v} = \mathcal{F}H. \end{aligned}$$

Portanto, podemos trabalhar com o sistema complexificado para obter conclusões para o sistema (2.7) inicial. A vantagem que obtemos desta opção é que trabalhamos no corpo \mathbb{C} que é algebricamente fechado.

Consideremos uma série formal $\Psi(x, y) = xy + \sum_{p+q \geq 3} \nu_{pq} x^p y^q$. Encaremos Ψ como uma série a ser construída. A ideia é manipular os coeficientes ν_{pq} para que

$$\mathcal{Z}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \dot{y} \equiv 0.$$

Substituindo as expressões das derivadas parciais de $\Psi(x, y)$ e do sistema (2.8)

no lado direito da equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\Psi &= \left[y + \sum_{p+q \geq 3} p\nu_{pq}x^{p-1}y^q \right] \left[ix + \sum_{p+q \geq 2} a_{pq}x^p y^q \right] + \\ &+ \left[x + \sum_{p+q \geq 3} q\nu_{pq}x^p y^{q-1} \right] \left[-iy + \sum_{p+q \geq 2} b_{pq}x^p y^q \right] = \\ &= \sum_{p+q \geq 2} (a_{pq}x^p y^{q+1} + b_{pq}x^{p+1} y^q) + i \sum_{p+q \geq 3} (p-q)\nu_{pq}x^p y^q + \\ &+ \left[\sum_{p+q \geq 3} p\nu_{pq}x^{p-1}y^q \right] \left[\sum_{p+q \geq 2} a_{pq}x^p y^q \right] + \\ &+ \left[\sum_{p+q \geq 3} q\nu_{pq}x^p y^{q-1} \right] \left[\sum_{p+q \geq 2} b_{pq}x^p y^q \right]. \end{aligned}$$

Escrevendo $\mathcal{Z}\Psi = \sum_{k_1+k_2 \geq 2} g_{k_1, k_2} x^{k_1} y^{k_2}$, da expressão acima, segue que os coeficientes $g_{k_1 k_2}$ são dados por:

$$g_{k_1 k_2} = i(k_1 - k_2)\nu_{k_1 k_2} + \sum_{j+k=0}^{k_1+k_2-1} (j a_{k_1-j+1, k_2-k} + k b_{k_1-j, k_2-k+1}) \nu_{jk}, \quad (2.9)$$

onde adotamos $\nu_{11} = 1$ e $\nu_{pq} = 0$ para $p+q \leq 2$ (com $(p, q) \neq (1, 1)$) e $a_{pq} = b_{pq} = 0$ para $p+q \leq 1$ por conveniência de notação nos índices do somatório.

Procedemos por iterações: na n -ésima iteração, resolvemos $g_{k_1 k_2} = 0$ para obter os coeficientes $\nu_{k_1 k_2}$ de Ψ tais que $k_1 + k_2 = n$. Como o máximo dos índices do somatório acima é $k_1 + k_2 - 1$, é possível determinar unicamente $\nu_{k_1 k_2}$ na n -ésima iteração a partir dos coeficientes ν_{pq} determinados nas iterações anteriores. Isso é verdade exceto para $(k_1, k_2) = (K, K)$, com $K \in \mathbb{N}$. De fato, quando $(k_1, k_2) = (K, K)$, temos $(k_1 - k_2)i = 0$ e ν_{KK} não aparece em (2.9), uma vez que:

$$g_{KK} = \sum_{j+k=2}^{2K-1} (j a_{K-j+1, K-k} + k b_{K-j, K-k+1}) \nu_{jk}.$$

Assim, independente do valor de ν_{KK} , $K \in \mathbb{N}$, a igualdade $g_{KK} = 0$ nem sempre é satisfeita. Entretanto, mesmo atribuindo valores arbitrários a ν_{KK} , sempre conseguimos determinar os outros coeficientes de Ψ para que:

$$\mathcal{Z}\Psi = g_{22}(xy)^2 + g_{33}(xy)^3 + g_{44}(xy)^4 + \dots$$

Se retornamos às coordenadas u, v , obtemos a expressão:

$$\mathcal{F}H = g_{22}(u^2 + v^2)^2 + g_{33}(u^2 + v^2)^3 + g_{44}(u^2 + v^2)^4 + \dots,$$

na qual $H(u, v) = \Psi(u + iv, u - iv)$. Porém, para que $H(u, v)$ assim determinada nos permita tirar conclusões sobre o sistema (2.7), é preciso que H seja uma função real, ou seja, $\Psi(x, y)$ deve ser uma função real para $y = \bar{x}$. Isto acontece se, e somente se, além de $\Psi(x, y)$ ser convergente, os coeficientes ν_{pq} determinados pelas iterações descritas acima satisfizerem $\nu_{pq} = \bar{\nu}_{qp}$ para todos $p, q \in \mathbb{N}$. De fato, assumindo $\Psi(x, y)$ convergente, $\Psi(x, y) \in \mathbb{R}$ para $y = \bar{x}$ se, e somente se:

$$\Psi(x, y) = \bar{\Psi}(x, y) \Leftrightarrow xy + \sum_{p+q \geq 3} \nu_{pq} x^p y^q = yx + \sum_{p+q \geq 3} \bar{\nu}_{pq} y^p x^q \Leftrightarrow \nu_{pq} = \bar{\nu}_{qp}.$$

Lidaremos com a convergência de $\Psi(x, y)$ depois. Agora, mostraremos que a condição $\nu_{pq} = \bar{\nu}_{qp}$ é naturalmente cumprida se, ao atribuímos valores arbitrários a ν_{KK} , $K \in \mathbb{N}$, restringirmos as escolhas a \mathbb{R} .

Proposição 2.4. *Se $\nu_{KK} \in \mathbb{R}$, para todo $K \in \mathbb{N}$, então $\nu_{pq} = \bar{\nu}_{qp}$.*

Demonstração: Provamos por indução sobre $p + q$. Para $p + q \leq 2$, a igualdade é verificada, uma vez que $\nu_{11} = 1$ e $\nu_{00} = \nu_{10} = \nu_{01} = \nu_{20} = \nu_{02} = 0$. Suponha que a igualdade seja válida para $p + q \leq n - 1$. Se n for par, então $\nu_{n/2, n/2} \in \mathbb{R}$ e basta verificar a igualdade para ν_{pq} com $p \neq q$. Esta verificação é idêntica ao caso em que n é ímpar e segue abaixo:

$$\begin{aligned} g_{pq} = g_{qp} = 0 &\Rightarrow g_{pq} = \bar{g}_{qp} \Rightarrow \\ \Rightarrow i(p - q)\nu_{pq} + \sum_{j+k=0}^{n-1} (ja_{p-j+1, q-k} + kb_{p-j, q-k+1})\nu_{jk} &= \\ = \left(i(q - p)\nu_{qp} + \sum_{j+k=0}^{n-1} (ja_{q-j+1, p-k} + kb_{q-j, p-k+1})\nu_{jk} \right) &= \\ = i(p - q)\bar{\nu}_{qp} + \sum_{j+k=0}^{n-1} (j\bar{a}_{q-j+1, p-k} + k\bar{b}_{q-j, p-k+1})\bar{\nu}_{jk} &= \\ = i(p - q)\bar{\nu}_{qp} + \sum_{j+k=0}^{n-1} (jb_{p-k, q-j+1} + ka_{p-k+1, q-j})\nu_{kj} &\Rightarrow \\ \Rightarrow i(p - q)\nu_{pq} = i(p - q)\bar{\nu}_{qp} &\Rightarrow \nu_{pq} = \bar{\nu}_{qp}. \end{aligned}$$

Por indução, a igualdade vale. □

Podemos concluir que ao restringir as escolhas de ν_{KK} a \mathbb{R} , temos $g_{KK} \in \mathbb{R}$ para $K \in \mathbb{N}$. Se, para algum $K \in \mathbb{N}$, g_{KK} é o primeiro coeficiente não-nulo de \mathcal{FH} , então ao truncarmos a série formal $\Psi(x, y)$ até termos de ordem N , $N > 2K - 1$, obtemos um polinômio $\Psi(x, y)$ e sua convergência é garantida. Assim a função polinomial $H(u, v)$ será uma função de Lyapunov estrita para (2.7) ou para

o sistema $\dot{\mathbf{u}} = -F(\mathbf{u})$, o que nos permite concluir que a singularidade é um foco. De fato, $H(u, v) = \Psi(u + iv, u - iv) = u^2 + v^2 + \sum_{p+q \geq 3}^N h_{pq} u^p v^q$, e portanto, em uma vizinhança suficientemente pequena da origem, H satisfaz a condição (i) da Definição 2.8. Se $g_{KK} < 0$, então $\mathcal{F}H = g_{KK}(u^2 + v^2)^K + \dots < 0$, e as condições (ii) e (iii) também são satisfeitas. Logo H é uma função de Lyapunov estrita para (2.7) e a origem é um foco estável. Por outro lado, se $g_{KK} > 0$, da Observação 2.3, a origem é um foco instável. Agora, se $g_{KK} = 0$ para todo $K \in \mathbb{N}$, teremos condições necessárias para que a origem seja um centro do sistema (2.7). Entretanto, será que podemos garantir a convergência da série formal $\Psi(x, y)$ e conseqüentemente de $H(u, v)$? Em outras palavras, a nulidade de todos os coeficientes de $\mathcal{F}H$ é uma condição suficiente para a existência de um centro? A resposta desta pergunta está no *Teorema do Centro de Poincaré-Lyapunov* cuja prova está apresentada na próxima seção.

2.3 O Teorema do Centro de Poincaré-Lyapunov

O *Teorema do Centro de Poincaré-Lyapunov* é um teorema clássico na literatura e seu enunciado data do século XIX. A demonstração aqui apresentada é uma adaptação daquela encontrada no trabalho de Poincaré intitulado *Sur les courbes définies par les équations différentielles* de 1894 e consiste em provar a convergência da série formal $H(u, v)$ obtida na seção anterior. Poincaré obtém a série $H(u, v)$ de um modo diferente do discutido acima, sem utilizar a complexificação do sistema e resolvendo uma sequência de sistemas de equações algébricas cuja solubilidade varia dependendo da paridade do grau dos termos homogêneos de $H(u, v)$ a serem determinados. Este método e uma discussão completa sobre o *Problema do Centro-Foco* e o *Teorema do Centro* podem ser encontrados no capítulo XI a partir da página 95 de [23].

Estabelecemos agora uma notação útil para a demonstração e que foi introduzida no trabalho original de Poincaré [23]. Dadas duas séries formais f, g expressas em potências de ρ , denotamos $f(\rho) \ll g(\rho)$ quando os coeficientes de f são menores em valor absoluto que os coeficientes de g nas potências correspondentes de ρ . Tendo esta notação em mente, provamos o seguinte lema:

Lema 2.1. *Seja $F(\rho, \theta)$ uma série formal tal que seu coeficiente constante na expansão em potências de θ seja ρ^2 . Suponhamos que F satisfaça*

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = P(\rho) \frac{\partial F}{\partial \rho},$$

onde $P(\rho) = \sum a_n \rho^n$ com $a_n \geq 0$ para todo $n \geq 2$. Se existem μ e a positivos tais que $a_n < \mu a^n$, então F é convergente para $0 \leq \theta < 2\pi$ e ρ suficientemente pequeno.

Demonstração: Expandindo F em potências de θ , escrevemos:

$$F(\rho, \theta) = F_0(\rho) + F_1(\rho)\theta + \frac{F_2(\rho)\theta^2}{2!} + \dots + \frac{F_n(\rho)\theta^n}{n!} + \dots$$

Por hipótese, temos $\frac{\partial F}{\partial \theta} = P(\rho) \frac{\partial F}{\partial \rho}$, ou seja:

$$\begin{aligned} & F_1(\rho) + F_2(\rho)\theta + \frac{F_3(\rho)\theta^2}{2!} \dots + \frac{F_n(\rho)\theta^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = \\ & = P(\rho) \left(\frac{dF_0}{d\rho} + \frac{dF_1}{d\rho}\theta + \frac{dF_2}{d\rho} \frac{\theta^2}{2!} + \dots + \frac{dF_n}{d\rho} \frac{\theta^n}{n!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Então os coeficientes $F_n, n \in \mathbb{N}$, satisfazem as equações:

$$\begin{aligned} F_0 &= \rho^2, \\ F_1 &= P(\rho) \frac{dF_0}{d\rho}, \\ &\vdots \\ F_n &= P(\rho) \frac{dF_{n-1}}{d\rho}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.10}$$

Como $a_n < \mu a^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $P(\rho) \ll \frac{\mu}{1 - a\rho}$.

Afirmção: Existe $M_0 > 0$ tal que $F_n(\rho) \ll \frac{M_0(2a\mu)^n n!}{(1 - a\rho)^{2n+1}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, para F_0 , basta tomar $M_0 > \frac{1}{a^2}$. Temos:

$$\frac{M_0}{1 - a\rho} = M_0 + M_0 a\rho + M_0 a^2 \rho^2 + \dots$$

Como $F_0 = \rho^2$, a afirmação é válida. Agora, suponhamos válida para F_n . Então $F_n(\rho) \ll \frac{M_0(2a\mu)^n n!}{(1 - a\rho)^{2n+1}}$. Pela derivação termo a termo de ambas as séries, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dF_n}{d\rho} &\ll \frac{-M_0(2a\mu)^n n! (2n+1)(1 - a\rho)^{2n}(-a)}{(1 - a\rho)^{4n+2}} = \\ &= \frac{M_0(2a\mu)^n a n! (2n+1)}{(1 - a\rho)^{2n+2}} \ll \\ &\ll \frac{M_0(2a\mu)^n a n! (2n+2)}{(1 - a\rho)^{2n+2}} = \\ &= \frac{2M_0(2a\mu)^n a(n+1)!}{(1 - a\rho)^{2n+2}}. \end{aligned}$$

De (2.10), temos:

$$F_{n+1}(\rho) = P(\rho) \frac{dF_n}{d\rho}(\rho) \ll \frac{\mu}{1 - a\rho} \frac{2M_0(2a\mu)^n a(n+1)!}{(1 - a\rho)^{2n+2}} = \frac{M_0(2a\mu)^{n+1} (n+1)!}{(1 - a\rho)^{2(n+1)+1}}.$$

Portanto, a afirmação é verdadeira. Assim, segue que:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n \theta^n}{n!} \ll \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_0 (2a\mu\theta)^n}{(1-a\rho)^{2n+1}} = \frac{\frac{M_0}{1-a\rho}}{1 - \frac{2a\mu\theta}{(1-a\rho)^2}}.$$

Para valores de ρ e θ tais que

$$|\rho| < \frac{1}{2a}, \text{ e } |\theta| < \frac{1}{8a\mu},$$

a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_0 (2a\mu)^n n!}{(1-a\rho)^{2n+1}}$ converge e por conseguinte F também.

Podemos ver, de (2.10), que a expansão de F_n em potências de ρ começa com termos de ρ^{n+2} . Logo, é possível expandir F em potências de ρ e $\rho\theta$ e assim, F é analítica como função de ρ e $\rho\theta$ para $|\rho| < \frac{1}{2a}$ e $|\rho\theta| < \frac{1}{16a\mu}$. Assim, para $0 \leq \theta < 2\pi$, e $|\rho| < \frac{1}{32\pi a\mu}$, F é convergente. \square

Munidos deste resultado, enunciamos o *Teorema do Centro* e apresentamos aqui sua demonstração.

Teorema 2.2. (Teorema do Centro de Poincaré-Lyapunov) *O sistema (2.7) tem um centro na origem se, e somente se, admite uma integral primeira H analítica da forma $H(u, v) = u^2 + v^2 + \dots^1$.*

Demonstração: Se o sistema admite integral primeira da forma $H(u, v) = u^2 + v^2 + \dots$ então, pela Proposição 2.3, a origem não pode ser um foco. Então, da Observação 2.1, o ponto de equilíbrio é um centro.

Reciprocamente, se o sistema tem um centro na origem, então é possível obter pelo processo descrito na seção anterior uma série formal com coeficientes reais $H(u, v) = u^2 + v^2 + \sum_{p+q \geq 3} h_{pq} u^p v^q$ tal que $\mathcal{F}H = 0$. Mostramos que H de fato é uma série convergente e, portanto, uma integral primeira para o sistema (2.7). Fazendo a mudança de variáveis $u = \rho \cos \theta, v = \rho \sin \theta$ e considerando a série $\hat{H}(\rho, \theta) = H(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, temos que:

¹Os pontos na expressão de $H(u, v)$ representam os termos de ordem maior ou igual a 3 na expansão em série de potências de u e v , que podem ser arbitrários. Essa notação será usada de modo similar na próxima seção ao lidarmos com integrais primeiras em \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{H}}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} \dot{\theta} &= \left(\frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \dot{\rho} + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} = \\
 &= \left(\frac{\partial H}{\partial u} \cos \theta + \frac{\partial H}{\partial v} \operatorname{sen} \theta \right) \dot{\rho} + \left(-\frac{\partial H}{\partial u} \rho \operatorname{sen} \theta + \frac{\partial H}{\partial v} \rho \cos \theta \right) \dot{\theta} = \\
 &= \frac{\partial H}{\partial u} (\dot{\rho} \cos \theta - \rho \operatorname{sen} \theta) + \frac{\partial H}{\partial v} (\dot{\rho} \operatorname{sen} \theta + \rho \cos \theta) = \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial H}{\partial v} \dot{v} = 0
 \end{aligned}$$

Logo, \hat{H} satisfaz formalmente a equação:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} = -R(\rho, \theta) \frac{\partial \hat{H}}{\partial \rho}, \quad (2.11)$$

na qual $R(\rho, \theta) = \frac{d\rho}{d\theta}$. Escrevendo $\hat{H}(\rho, \theta) = \mathbf{h}_2 \rho^2 + \mathbf{h}_3 \rho^3 + \mathbf{h}_4 \rho^4 + \dots$, de (2.11), temos que os coeficientes $\mathbf{h}_n = \mathbf{h}_n(\theta)$, $n \in \mathbb{N}$ satisfazem as equações:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}_2 &= 1, \\
 \frac{d\mathbf{h}_3}{d\theta} &= -2R_2 \mathbf{h}_2, \\
 \frac{d\mathbf{h}_4}{d\theta} &= -(3R_2 \mathbf{h}_3 + 2R_3 \mathbf{h}_2), \\
 &\vdots \\
 \frac{d\mathbf{h}_n}{d\theta} &= -((n-1)R_2 \mathbf{h}_{n-1} + \dots + 2R_{n-1} \mathbf{h}_2), \\
 &\vdots
 \end{aligned} \quad (2.12)$$

nas quais $R_n = R_n(\theta)$ são os coeficientes dos termos de ρ^n na expansão de $R(\rho, \theta)$ em série de potências de ρ .

Como as funções P, Q da expressão do sistema (2.7) são somas de polinômios homogêneos nas variáveis u, v , então, ao escrever

$$R(\rho, \theta) = \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho^2 F(\rho, \cos \theta, \operatorname{sen} \theta)}{1 - \rho G(\rho, \cos \theta, \operatorname{sen} \theta)},$$

temos que os coeficientes de F e G em ρ são polinômios homogêneos em $\cos \theta, \operatorname{sen} \theta$. Logo, os coeficientes de F e G são limitados. Além disso, como estas funções são analíticas para ρ suficientemente pequeno, existe um $L > 0$ que limita todos seus coeficientes. Isto é:

$$-R(\rho, \theta) \ll \frac{(\rho^2 + \rho^3 + \dots)L}{1 - (\rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots)L} \ll \frac{\rho^2 L}{1 - \rho(L+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^2 L (\rho(L+1))^n. \quad (2.13)$$

Consideremos a série formal auxiliar $F(\rho, \theta) = \mathbf{f}_2 \rho^2 + \mathbf{f}_3 \rho^3 + \mathbf{f}_4 \rho^4 + \dots$ cujos

coeficientes $\mathbf{f}_n = \mathbf{f}_n(\theta)$, $n \in \mathbb{N}$ satisfazem as equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2 &= 1, \\ \frac{d\mathbf{f}_3}{d\theta} &= 2L\mathbf{f}_2, \\ \frac{d\mathbf{f}_4}{d\theta} &= 3L\mathbf{f}_3 + 2L(L+1)\mathbf{f}_2, \\ &\vdots \\ \frac{d\mathbf{f}_n}{d\theta} &= (n-1)L\mathbf{f}_{n-1} + \cdots + 2L(L+1)^{n-3}\mathbf{f}_2, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.14}$$

com condição inicial $\mathbf{f}_n(0) = \mathbf{h}_n(0)$. A série formal $F(\rho, \theta)$ satisfaz a equação $\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\rho^2 L}{1 - \rho(L+1)} \frac{\partial F}{\partial \rho}$, e para $\mu = L$ e $a = (L+2)$ satisfaz as hipóteses do Lema 2.1, e portanto é convergente para $0 \leq \theta < 2\pi$ e ρ suficientemente pequeno.

Afirmção: Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \theta < 2\pi$, temos $|\mathbf{h}_n| \leq \mathbf{f}_n$. De fato, para \mathbf{h}_2 , a afirmação é válida. Suponhamos válido para \mathbf{h}_j com $j \leq n$.

Então, de (2.13), (2.12) e (2.14), temos:

$$\left| \frac{d\mathbf{h}_{n+1}}{d\theta} \right| = |nR_2\mathbf{h}_n + \cdots + 2R_n\mathbf{h}_2| \leq nL\mathbf{f}_n + \cdots + 2L(L+1)^{n-2}\mathbf{f}_2 = \frac{d\mathbf{f}_{n+1}}{d\theta}$$

Como $\mathbf{h}_{n+1}(0) = \mathbf{f}_{n+1}(0)$, temos:

$$\begin{aligned} |\mathbf{h}_{n+1}(\theta)| &= \left| \mathbf{h}_{n+1}(0) + \int_0^\theta \frac{d\mathbf{h}_{n+1}}{d\omega} d\omega \right| \leq \\ &\leq |\mathbf{h}_{n+1}(0)| + \int_0^\theta \left| \frac{d\mathbf{h}_{n+1}}{d\omega} \right| d\omega \leq \\ &\leq \mathbf{f}_{n+1}(0) + \int_0^\theta \frac{d\mathbf{f}_{n+1}}{d\omega} d\omega = \mathbf{f}_{n+1}(\theta). \end{aligned}$$

Portanto, a afirmação é verdadeira.

Por esta afirmação, a série $\hat{H}(\rho, \theta)$ é absolutamente convergente para $0 \leq \theta < 2\pi$ e ρ suficientemente pequeno. Além disso, os coeficientes $\mathbf{h}_n(\theta)$ são polinômios em $\cos \theta$ e $\sin \theta$. De fato, $\mathbf{h}_n(\theta) = \sum_{p+q=n} h_{pq} \cos^p \theta \sin^q \theta$. Logo $\hat{H}(\rho, \theta)$ é absolutamente convergente para todo $\theta \in \mathbb{R}$ e valores pequenos de ρ . Então a série $H(u, v)$ é bem definida e convergente em uma vizinhança suficientemente pequena da origem, ou seja, $H(u, v)$ é uma integral primeira para (2.7). \square

Munidos deste importante teorema, podemos, em teoria, resolver completamente o *Problema do Centro-Foco* para sistemas da forma (2.7). Desenvolveremos esta ideia na próxima seção.

2.4 A Variedade de Bautin

Consideremos o sistema (2.7). Podemos escrever as funções analíticas P e Q como somas de polinômios homogêneos, isto é, o sistema tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + \sum_{p+q \geq 2} \alpha_{pq} u^p v^q, \\ \dot{v} = u + \sum_{p+q \geq 2} \beta_{pq} u^p v^q. \end{cases} \quad (2.15)$$

Como discutido na Seção 2.2, ao complexificarmos o sistema acima, obtemos a forma (2.8) e uma função $\Psi(x, y)$ tal que

$$\mathcal{Z}\Psi = g_{22}(xy)^2 + g_{33}(xy)^3 + g_{44}(xy)^4 + \cdots,$$

onde \mathcal{Z} é o campo vetorial associado ao sistema (2.8).

Definição 2.9. (Coeficiente Focal) *Os coeficientes g_{KK} apresentados na Seção 2.2 são chamados coeficientes focais.*

Os termos *coeficientes focais* e *coeficientes de Lyapunov*, por muitas vezes, são usados indistintamente na literatura. Existe, de fato, uma equivalência entre estes termos que justifica, até certo ponto, esta indistinção semântica. Para desenvolver a teoria, a terminologia tem importância mínima. Neste texto, seguiremos utilizando os termos como definidos acima e na Seção 2.1.

Notemos que cada coeficiente focal é um polinômio cujas variáveis são os coeficientes a_{pq} e b_{pq} do sistema (2.8). O coeficiente focal g_{11} sempre será nulo, uma vez que a expansão de $\mathcal{Z}\Psi$ não tem termos de grau 2, e o coeficiente focal g_{22} é unicamente determinado pelos coeficientes do sistema. Para $K > 2$, os coeficientes focais g_{KK} dependem das escolhas feitas para os coeficientes ν_{KK} de $\Psi(x, y)$. No método descrito na Seção 2.2, construímos uma integral primeira de (2.15) para um conjunto determinado de escolhas para ν_{KK} , as quais restringimos a \mathbb{R} . Mostramos agora que a existência desta integral primeira implica no anulamento de todos os coeficientes focais para quaisquer escolhas de ν_{KK} . Com este propósito, enunciaremos o seguinte teorema no qual, denotamos por (a, b) os coeficientes a_{pq} e b_{pq} do sistema (2.8). Antes disso, definimos:

Definição 2.10. Sejam p_1, p_2, \dots polinômios no anel $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, onde \mathbb{K} é um corpo. A variedade afim determinada pelo ideal $I = \langle p_1, p_2, \dots \rangle$ é o conjunto

$$V = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n : p(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall p \in I\}.$$

Teorema 2.3. Sejam $\Psi(x, y) = xy + \sum_{p+q \geq 3} \nu_{pq} x^p y^q$ uma série formal e g_{22}, g_{33}, \dots polinômios em (a, b) tais que $\mathcal{Z}\Psi = g_{22}(xy)^2 + g_{33}(xy)^3 + \dots$. Sejam $\tilde{\Psi}$ outra série formal da forma $\tilde{\Psi}(x, y) = xy + \sum_{p+q \geq 3} \tilde{\nu}_{pq} x^p y^q$ e $\tilde{g}_{22}, \tilde{g}_{33}, \dots$ polinômios em (a, b) tais que $\mathcal{Z}\tilde{\Psi} = \tilde{g}_{22}(xy)^2 + \tilde{g}_{33}(xy)^3 + \dots$. Consideremos V a variedade afim determinada pelo ideal $\langle g_{22}, g_{33}, \dots \rangle$ e \tilde{V} a variedade afim determinada pelo ideal $\langle \tilde{g}_{22}, \tilde{g}_{33}, \dots \rangle$. Então, $V = \tilde{V}$.

A demonstração deste teorema encontra-se a partir da página 113 de [24]. Escolhemos omiti-la aqui, para evitar repetitividade no texto, uma vez que no Capítulo 3, provamos uma versão deste teorema para sistemas tridimensionais e sua demonstração é análoga a esta.

Definição 2.11. (Variedade de Bautin) Dado o sistema (2.8), seja $\Psi(x, y)$ uma série formal tal que $\mathcal{Z}\Psi = g_{22}(xy)^2 + g_{33}(xy)^3 + \dots$. O ideal $\langle g_{22}, g_{33}, \dots \rangle$ é chamado de Ideal de Bautin e a variedade afim V^c determinada por este ideal é chamada variedade de Bautin.

Observação 2.4. A variedade de Bautin V^c é única e independe das escolhas de ν_{KK} . Portanto, não precisamos da restrição $\nu_{KK} \in \mathbb{R}$. Entretanto, na prática, é comum fixarmos $\nu_{KK} = 0$, o que simplifica os cálculos computacionais.

Os pontos da variedade de Bautin são precisamente os coeficientes de (2.15) para os quais a origem é um centro. Assim, dada uma família de sistemas analíticos planares, (polinomiais por exemplo), o *Problema do Centro-Foco* é resolvido completamente ao determinarmos V^c . Embora tenhamos infinitos polinômios g_{KK} , pelo Teorema da Base de Hilbert, o ideal de Bautin é finitamente gerado, e podemos encontrar a variedade de Bautin após calcular um número finito de coeficientes focais. Isto torna este método mais simples computacionalmente do que analisar os coeficientes da função deslocamento.

Entretanto, não sabemos *a priori* qual é a quantidade de coeficientes focais suficientes para determinar a variedade de Bautin. Assim, o processo prático para se resolver o *Problema do Centro-Foco* para um sistema específico é dividido em três etapas principais: A primeira é calcular um número finito de coeficientes focais. A segunda é determinar quais são as condições sob os parâmetros do sistema que anulam estes coeficientes focais que são automaticamente condições necessárias para que a origem seja um centro. Chamamos estas condições de *condições de*

centro. A terceira etapa consiste em conferir se as condições obtidas a partir do conjunto finito inicial de coeficientes focais são condições suficientes para que o sistema tenha um centro na origem. Esta etapa, em geral, envolve a aplicação da Teoria de Integrabilidade de Darboux (consultar [10], por exemplo), investigar simetrias ou reversibilidade no sistema (ver, por exemplo, [24]).

Ilustramos as técnicas discutidas acima na demonstração do teorema abaixo que resolve completamente o *Problema do Centro-Foco* para sistemas (2.2) quadráticos:

Teorema 2.4. (Teorema de Kapteyn-Bautin) *Dado um sistema (2.2) quadrático, é possível reescrevê-lo na seguinte forma:*

$$\begin{cases} \dot{u} = -v - bu^2 - cuv - dv^2, \\ \dot{v} = u + au^2 + Auv - av^2, \end{cases} \quad (2.16)$$

além disso, o sistema admite um centro na origem se, e somente se, satisfaz uma das seguintes condições:

(i) $2a + c = A - 2b = 0;$

(ii) $a = c = 0;$

(iii) $b + d = 0;$

(iv) $2a + c = A + 3b + 5d = a^2 + bd + 2d^2 = 0.$

Demonstração: O sistema (2.2) quadrático é da forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + a_1u^2 + a_2uv + a_3v^2, \\ \dot{v} = u + b_1u^2 + b_2uv + b_3v^2. \end{cases}$$

Consideremos uma rotação dos eixos coordenados:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix},$$

onde θ é fixo. Calculando as expressões de \dot{u}_1 e \dot{v}_1 , temos:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -v_1 + A_1(\theta)u_1^2 + A_2(\theta)u_1v_1 + A_3(\theta)v_1^2, \\ \dot{v}_1 = u_1 + B_1(\theta)u_1^2 + B_2(\theta)u_1v_1 + B_3(\theta)v_1^2, \end{cases}$$

Basta provar que existe θ adequado para que $B_1(\theta) + B_3(\theta) = 0$. Exprimindo explicitamente a expressão desta equação, temos:

$$(b_1 + b_3) \cos \theta - (a_1 + a_3) \sin \theta = 0, \iff (b_1 + b_3) \cos \theta = (a_1 + a_3) \sin \theta.$$

A equação acima sempre tem solução em θ . De fato, para $b_1 + b_3 = 0$, $\theta = 0$ é solução. Para $a_1 + a_3 = 0$, $\theta = \pi/2$ é solução, e caso contrário, a solução é $\theta = \arctg\left(\frac{b_1+b_3}{a_1+a_3}\right)$. Assim, é possível escrever o sistema considerado na forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v - bu^2 - cuv - dv^2, \\ \dot{v} = u + au^2 + Auv - av^2, \end{cases}$$

Calculando o primeiro coeficiente focal, obtemos:

$$g_{22} = 2(2a + c)(b + d),$$

e concluímos que $2a+c = 0$ ou $b+d = 0$ são condições necessárias para a existência de um centro. A condição $b + d = 0$ corresponde ao item (iii). Sob $2a + c = 0$, temos que o próximo coeficiente focal é

$$g_{33} = \frac{2}{3}a(A - 2b)(b + d)(A + 3b + 5d),$$

que nos dá as condições necessárias: $a = 0$, $A - 2b = 0$ e $A + 3b + 5d = 0$. As duas primeiras, correspondem aos itens (ii) e (i) respectivamente. Sob a condição $A + 3b + 5d = 0$, calculamos o próximo coeficiente focal:

$$g_{44} = -20a(b + d)^3 (a^2 + bd + 2d^2),$$

que nos determina a condição necessária $a^2 + bd + 2d^2 = 0$ correspondente ao item (iv). Basta provar que estas condições são suficientes.

Para as condições do item (i), o sistema (2.16) é da forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v - bu^2 + 2auv - dv^2, \\ \dot{v} = u + au^2 + 2buv - av^2, \end{cases}$$

que é Hamiltoniano e, portanto, tem um centro na origem.

Para condições do item (ii), temos:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v - bu^2 - dv^2, \\ \dot{v} = u + Auv, \end{cases}$$

que é invariante pela mudança de variáveis $(u, v, t) \mapsto (-u, v, -t)$, isto é, o sistema é reversível e, portanto, tem um centro na origem.

Para condições do item (iii), temos:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + du^2 - cuv - dv^2, \\ \dot{v} = u + au^2 + Auv - av^2. \end{cases}$$

Sob estas condições, é possível através de uma rotação, deixar o sistema na forma acima com o coeficiente $a = 0$. Assim, o sistema tem como fator integrante a função

$\left(\left(\frac{u^2(A-d)}{c} + uv + \frac{v^2d}{c} + \frac{u}{d} + 2\frac{v}{c} + \frac{1}{cd} \right) (v + A^{-1}) \right)^{-1}$, e pela Teoria de Integrabilidade de Darboux (consultar por exemplo [10]), tem um centro na origem.

Para as condições do item (iv) com $d \neq 0$, o sistema (2.16) tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v - \frac{(-a^2-2d^2)}{d}u^2 + 2auv - dv^2, \\ \dot{v} = u + au^2 - (3b + 5d)uv - av^2, \end{cases}$$

e admite $\left(\frac{-d^4v^2 + (2auv - 2v)d^3 + (-1 + (-u^2 - v^2)a^2)d^2 + 2a^2v(au - 1)d - a^4u^2}{2ad(a^2 + d^2)} \right)^{-5/2}$ como fator integrante. Logo tem um centro na origem. Para o caso $d = 0$, o sistema sob as condições do item (iv) também satisfaz as condições do item (ii) que já provamos ter um centro na origem. \square

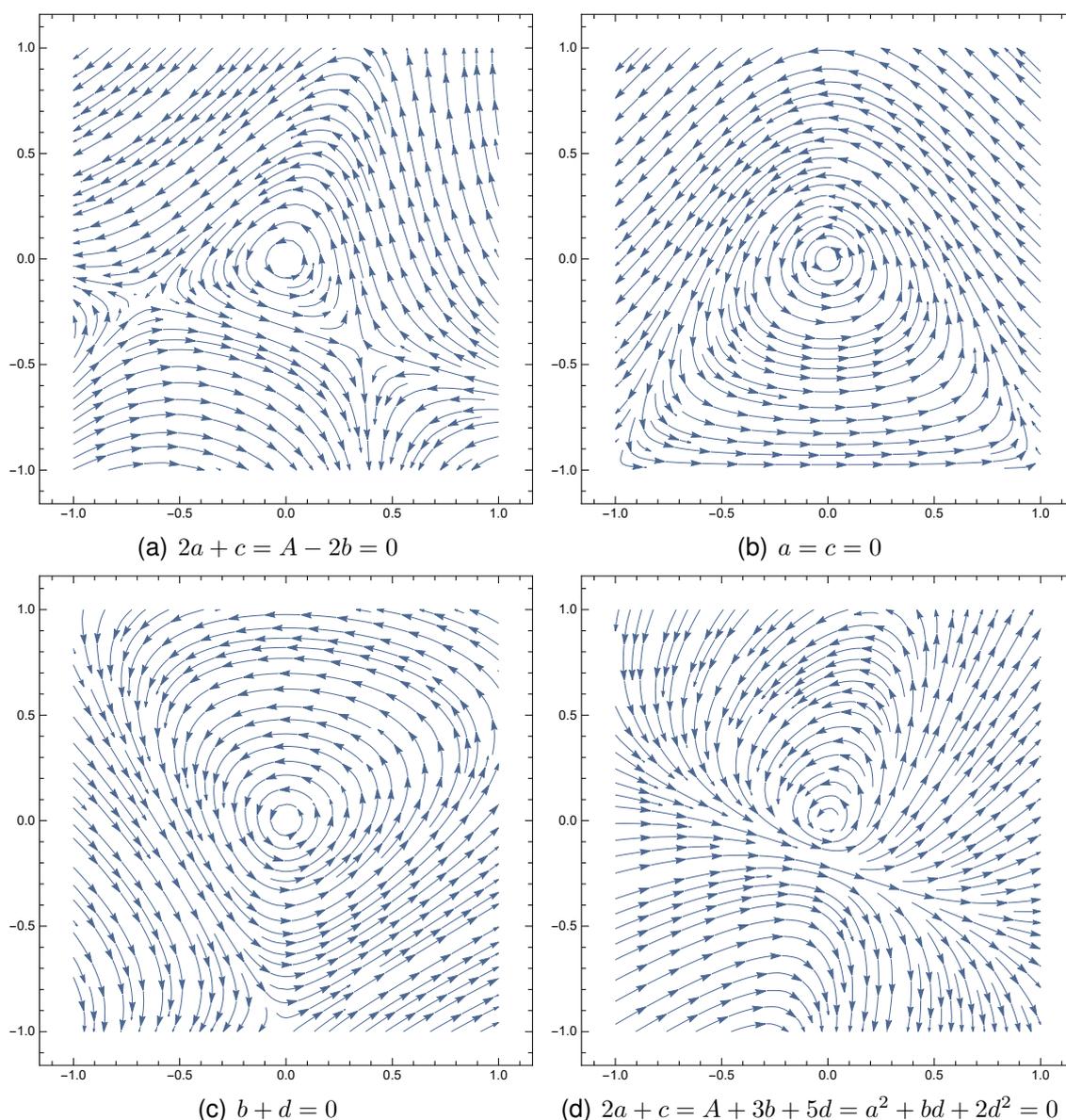


Figura 2.1: Retratos de fase dos sistemas quadráticos sob as condições do Teorema de Kapteyn-Bautin.

As condições necessárias e suficientes para a existência de um centro na origem são determinadas, em ambos os métodos, pelas equações:

$$g_{kk} = 0 \text{ e } L_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Isto sugere uma relação entre os coeficientes focais g_{kk} e os coeficientes de Lyapunov L_k . Provamos, na próxima seção, a equivalência que existe entre estes coeficientes e por consequência entre os métodos apresentados neste capítulo.

2.5 Equivalência entre os Coeficientes de Lyapunov e Focais

O objetivo desta seção é mostrar a equivalência entre os coeficientes focais e os de Lyapunov. Enquanto este fato não é muito relevante para o *Problema do Centro-Foco*, ele tem importância fundamental para determinar a ciclicidade de um sistema dado. A demonstração do seguinte teorema é baseada nas demonstrações apresentadas em [29] e [24].

Teorema 2.5. *Considere o sistema (2.1). Dado um inteiro positivo $k > 2$, vale a seguinte equivalência:*

$$L_1 = \pi g_{22} \text{ e } L_{k-1} = \pi g_{kk} \pmod{\langle g_{22}, g_{33}, \dots, g_{k-1, k-1} \rangle},$$

isto é, $L_{k-1} = \pi g_{kk}$ quando $g_{22} = g_{33} = \dots = g_{k-1, k-1} = 0$.

Demonstração: Seja Ψ a série formal obtida pelo método descrito na Seção 2.2, isto é:

$$\Psi(x, y) = xy + \sum_{p+q \geq 3} \nu_{pq} x^p y^q = \sum_{j \geq 2} \psi_j(x, y),$$

onde $\psi_j(x, y)$ são polinômios homogêneos de grau j de x e y (termos de grau j na expansão de Ψ). Truncamos a série até ordem $2N + 1$, com $N > k$ para obtermos a função $\hat{\Psi} = xy + \sum_{j=3}^{2N+1} \psi_j(x, y)$. Consideremos, para ρ_0 suficientemente pequeno, a solução $r(\theta, \rho_0)$ em coordenadas polares do sistema, isto é, a solução de (2.5), com condição inicial $r(0, \rho_0) = \rho_0$. Determinemos a variação total de $\hat{\Psi}$ para θ de 0 a 2π . Temos:

$$\begin{aligned}
 & \hat{\Psi}(r(2\pi, \rho_0)e^{i2\pi}, r(2\pi, \rho_0)e^{-i2\pi}) - \hat{\Psi}(r(0, \rho_0)e^{i0}, r(0, \rho_0)e^{-i0}) = \\
 & = \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(r(2\pi, \rho_0), r(2\pi, \rho_0)) - \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(r(0, \rho_0), r(0, \rho_0)) = \\
 & = \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(1, 1)r^j(2\pi, \rho_0) - \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(1, 1)\rho_0^j = \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(1, 1)(r^j(2\pi, \rho_0) - \rho_0^j) = \\
 & = \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(1, 1)(r(2\pi, \rho_0) - \rho_0) \sum_{l=0}^{j-1} r^{j-1-l}(2\pi, \rho_0)\rho_0^l = \\
 & = (r(2\pi, \rho_0) - \rho_0) \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(1, 1) \sum_{l=0}^{j-1} r^{j-1-l}(2\pi, \rho_0)\rho_0^l. \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

Como $r(2\pi, \rho_0) - \rho_0$ é a função deslocamento $d(\rho_0)$ e, como os autovalores de DF_0 são imaginários puros, temos que $u_1(\theta) = 1$ e $r(\theta, \rho_0) = \rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \dots$, substituindo na equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & (r(2\pi, \rho_0) - \rho_0) \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(1, 1) \sum_{l=0}^{j-1} r^{j-1-l}(2\pi, \rho_0)\rho_0^l = \\
 & = d(\rho_0) \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(1, 1)(j\rho_0^{j-1} + O(\rho_0^j)) = \\
 & = d(\rho_0)(\psi_2(1, 1)2\rho_0 + O(\rho_0^2)) = \\
 & = d(\rho_0)(2\rho_0 + O(\rho_0^2)) = \sum_{j=2}^{\infty} u_j(2\pi)\rho_0^j(2\rho_0 + O(\rho_0^2)) = \\
 & = \sum_{j=2}^{\infty} 2u_j(2\pi)\rho_0^{j+1}(1 + O(\rho_0)). \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 & \hat{\Psi}(r(2\pi, \rho_0)e^{i2\pi}, r(2\pi, \rho_0)e^{-i2\pi}) - \hat{\Psi}(r(0, \rho_0)e^{i0}, r(0, \rho_0)e^{-i0}) = \\
 & \int_0^{2\pi} \frac{d\hat{\Psi}}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\hat{\Psi}}{dt} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{j=2}^N g_{jj} r^{2j}(\theta, \rho_0) \frac{dt}{d\theta} d\theta = \\
 & = \int_0^{2\pi} \sum_{j=2}^N g_{jj} (\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \dots)^{2j} (1 + \tilde{u}_1(\theta)\rho_0 + \tilde{u}_2(\theta)\rho_0^2 + \dots) d\theta. \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

O termo $(1 + \tilde{u}_1(\theta)\rho_0 + \tilde{u}_2(\theta)\rho_0^2 + \dots)$ acima corresponde a $\frac{dt}{d\theta}$ o qual obtemos a partir da expansão de $\dot{\theta}$ na equação (2.4). Note que para cada índice j , existe um termo $g_{jj}\rho_0^{2j}$ dentro da integral o qual não depende de θ . Assim, ao integrarmos de 0 a 2π , obtemos $2\pi g_{jj}\rho_0^{2j}$. Para os outros termos da integral que dependem de θ ,

obtemos outras expressões envolvendo g_{jj} menos elementares, que expressamos por $g_{jj}(f_{j,1}\rho_0^{2j+1} + f_{j,2}\rho_0^{2j+2} + \dots)$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sum_{j=2}^N g_{jj}(\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \dots)^{2j} (1 + \tilde{u}_1(\theta)\rho_0 + \tilde{u}_2(\theta)\rho_0^2 + \dots) d\theta = \\ = \sum_{j=2}^N 2\pi g_{jj} \rho_0^{2j} + g_{jj}(f_{j,1}\rho_0^{2j+1} + f_{j,2}\rho_0^{2j+2} + \dots) + O(\rho_0^{2N+2}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

De (2.17),(2.18),(2.19) e (2.20), temos:

$$\sum_{j=2}^{\infty} 2u_j(2\pi)\rho_0^{j+1}(1 + O(\rho_0)) = \sum_{j=2}^N 2\pi g_{jj} \rho_0^{2j} + g_{jj}(f_{j,1}\rho_0^{2j+1} + f_{j,2}\rho_0^{2j+2} + \dots) + O(\rho_0^{2N+2}).$$

Da equação acima, ao compararmos potências iguais de ρ_0 , concluímos a equivalência. Com efeito, comparando os coeficientes de ρ_0^3 , temos $2u_2(2\pi) = 0$. Passando para os coeficientes de ρ_0^4 , temos $2u_3(2\pi) = 2\pi g_{22}$, e portanto $L_1 = \pi g_{22}$. Seguindo para os coeficientes de ρ_0^5 e ρ_0^6 , e assumindo $g_{22} = 0$, temos: $2u_4(2\pi) = 0$ e $2u_5(2\pi) = 2\pi g_{33}$, logo $L_2 = \pi g_{33}, \text{ mod}\langle g_{22} \rangle$. Seguindo este mesmo argumento, a equivalência é concluída. \square

Fazendo uso do teorema acima, podemos estender os resultados sobre ciclicidade que se aplicam aos coeficientes de Lyapunov para os coeficientes focais, o que traz grande vantagem prática computacional. Discorreremos mais sobre esta vantagem no capítulo 4. Concluimos aqui a discussão sobre o *Problema do Centro-Foco* para sistemas planares. No próximo capítulo, estenderemos os resultados e métodos aqui apresentados para o caso tridimensional.

3 O Problema do Centro-Foco sobre uma Variedade Central em \mathbb{R}^3

Neste capítulo estendemos o *Problema do Centro-Foco* para sistemas tridimensionais. Consideramos o sistema de equações diferenciais

$$\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}), \quad (3.1)$$

onde $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação analítica em um aberto U de \mathbb{R}^3 contendo a origem tal que $F(0) = 0$ e DF_0 tem um par de autovalores imaginários puros e um autovalor real não-nulo. Nestas condições, como no caso planar, chamaremos a origem de *ponto de Hopf*. Após uma mudança de variáveis linear e reparametrização do tempo, análogas às descritas na Seção 2.1, escrevemos o sistema acima na seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + P(u, v, w), \\ \dot{v} = u + Q(u, v, w), \\ \dot{w} = -\mu w + R(u, v, w). \end{cases} \quad (3.2)$$

As funções P , Q e R são analíticas e suas expansões em série de Taylor contém termos de ordem maior ou igual a 2.

Notemos que, como no caso planar, o Teorema de Hartman-Grobman não se aplica ao sistema (3.2), e portanto precisamos de outras ferramentas para determinar a natureza da singularidade. Estudar o comportamento das órbitas do sistema (3.2) em \mathbb{R}^3 tem uma complexidade maior que em \mathbb{R}^2 , uma vez que a dimensão adicional possibilita comportamentos mais diversificados das trajetórias. Para exemplificar, ainda não há um teorema análogo ao de Poincaré-Bendixson para o \mathbb{R}^3 . Entretanto, para o sistema (3.2), podemos contornar essa imprevisibilidade ao concentrar nossa investigação em uma variedade invariante de dimensão 2 que contém a origem. A existência desta variedade é garantida pelo Teorema da Variedade Central. Assim, ao restringirmos o sistema (3.2) a essa variedade, reduzimos o problema ao caso bidimensional.

3.1 A Variedade Central

Nesta seção, discutimos a existência de variedades invariantes pelo fluxo gerado por um sistema de equações diferenciais genérico e enunciamos o *Teorema da Variedade Central* que é um resultado clássico da Teoria Qualitativa e que nos permite prosseguir estudando o *Problema do Centro-Foco* para o sistema (3.2).

Seja $F \in C^r(U)$ onde U é um aberto de \mathbb{R}^n contendo a origem, e $r > 2$. Suponha que a origem seja um ponto de equilíbrio de F , e que DF_0 tenha l_c autovalores com parte real nula, l_u autovalores com parte real positiva e l_s autovalores com parte real negativa (contando com suas respectivas multiplicidades). Então, o sistema $\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u})$ pode ser escrito da forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = A_c u + f(u, v, w), \\ \dot{v} = A_u v + g(u, v, w), \\ \dot{w} = A_s w + h(u, v, w), \end{cases} \quad (3.3)$$

com $(u, v, w) \in \mathbb{R}^{l_c} \times \mathbb{R}^{l_u} \times \mathbb{R}^{l_s}$, onde A_c , A_u , e A_s são matrizes constantes com os respectivos l_c autovalores com parte real nula, l_u autovalores com parte real positiva e l_s autovalores com parte real negativa. Além disso, f , g e h são tais que $f(0, 0, 0) = g(0, 0, 0) = h(0, 0, 0) = Df_{(0,0,0)} = Dg_{(0,0,0)} = Dh_{(0,0,0)} = 0$.

Teorema 3.1. (Teorema da Variedade Central) *Dado o sistema (3.3), sejam E^c , E^u e E^s os autoespaços generalizados associados aos autovalores de A_c , A_u e A_s respectivamente. Então, existem W^c , W^u e W^s variedades invariantes pelo sistema tangentes respectivamente a E^c , E^u e E^s na origem. As variedades W^u e W^s são de classe C^{r-2} e W^c é de classe C^{r-1} .*

A demonstração deste teorema é encontrada no trabalho de Al Kelley [15] que enaltecemos por sua qualidade e por ter sido um dos primeiros contendo a prova completa deste resultado. Mais propriedades e resultados sobre as variedades invariantes podem ser encontrados em [8], [26] e [13].

Definição 3.1. *As variedades invariantes W^c , W^u e W^s determinadas pelo Teorema 3.1 são chamadas de variedade central, variedade instável e variedade estável respectivamente.*

Considerando o sistema (3.2), podemos escrevê-lo como

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = A_c \mathbf{u} + f(\mathbf{u}, w), \\ \dot{w} = A_u w + h(\mathbf{u}, w), \end{cases}$$

onde $A_c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_u = (-\mu)$ e $u = (u, v)^T$. Pelo Teorema da Variedade Central, dado $r \in \mathbb{N}$, existe uma variedade central W^c invariante de classe C^r que é tangente ao plano- uv na origem. Restringindo o sistema a essa variedade, podemos resolver o *Problema do Centro-Foco* e então classificarmos a singularidade. Entretanto, obter W^c não é uma tarefa fácil, o que motiva a busca de outros métodos para estudar o sistema restrito à variedade central sem necessariamente determiná-la.

3.2 A Aplicação Deslocamento Reduzida

Estudar o sistema (3.2) restrito a uma Variedade Central W^c apresenta principalmente duas dificuldades. A primeira está no fato de que a unicidade de W^c não é garantida pelo Teorema 3.1, entretanto, existe uma conjugação entre os fluxos do sistema restrito às eventuais variedades centrais [7]. A segunda dificuldade está na analiticidade de W^c . Com efeito, o máximo que podemos afirmar é que por (3.2) ser analítico, as variedades centrais que existem são de classe C^r , para qualquer $r \in \mathbb{N}$. Tendo isso em mente, podemos contornar estas dificuldades estendendo as definições de *aplicação de Poincaré* e *função deslocamento* para \mathbb{R}^3 . Uma abordagem para tais extensões foi apresentada no artigo de Buică, García e Maza [6] (veja também [12]).

Consideramos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} \dot{u} = \lambda_0 u - v + P(u, v, w), \\ \dot{v} = u + \lambda_0 v + Q(u, v, w), \\ \dot{w} = -\mu w + R(u, v, w). \end{cases} \quad (3.4)$$

Notemos que para $\lambda_0 = 0$ o sistema acima coincide com (3.2). Reescrevemos o sistema (3.4) nas coordenadas $u = \rho \cos \theta$, $v = \rho \sin \theta$ e $w = \rho \omega$ para obter

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \lambda_0 \rho + P(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho \omega) \cos \theta + Q(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho \omega) \sin \theta, \\ \dot{\theta} = 1 + \rho^{-1}[Q(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho \omega) \cos \theta - P(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho \omega) \sin \theta], \\ \dot{\omega} = -\mu \omega + \rho^{-1}[R(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho \omega) - \omega \dot{\rho}]. \end{cases} \quad (3.5)$$

A mudança de variáveis acima é um difeomorfismo analítico para todos os pontos fora do eixo- w (i.e. $\rho \neq 0$). Como as expansões de P , Q e R têm termos de ordem no mínimo 2, o sistema mantém-se bem definido e analítico em uma vizinhança de $\rho = 0, \omega = 0$. Além disso, temos:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 1 + \rho^{-1}[Q(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \omega) \cos \theta - P(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \omega) \sin \theta] = \\ &= 1 + \rho[\tilde{Q}(\rho, \cos \theta, \sin \theta, \omega) \cos \theta - \tilde{P}(\rho, \cos \theta, \sin \theta, \omega) \sin \theta], \end{aligned}$$

e para valores suficientemente pequenos de ρ e ω , o sinal de $\dot{\theta}$ é positivo. Assim, como no caso planar, as órbitas de (3.4) por pontos de uma vizinhança suficientemente pequena da origem giram em torno do eixo- w . Do sistema (3.5), obtemos o sistema abaixo cuja variável independente é θ :

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\lambda_0\rho + P \cos \theta + Q \sen \theta}{1 + \rho[\tilde{Q} \cos \theta - \tilde{P} \sen \theta]} = \lambda_0\rho + \mathcal{R}(\theta, \rho, \omega), \\ \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{-\mu\omega + \rho[\tilde{R} - \omega(\lambda_0 + \tilde{P} \cos \theta + \tilde{Q} \sen \theta)]}{1 + \rho[\tilde{Q} \cos \theta - \tilde{P} \sen \theta]} = -\mu\omega + \Omega(\theta, \rho, \omega). \end{cases} \quad (3.6)$$

As funções $\mathcal{R}(\theta, \rho, \omega)$ e $\Omega(\theta, \rho, \omega)$ são periódicas e analíticas para valores suficientemente pequenos de ρ e ω , isto é, no cilindro sólido $C = \{(\theta, \rho, \omega) : |\rho| \leq r^* \text{ e } |\omega| \leq h^*\}$ para r^* e h^* adequados. Procedemos de maneira similar ao caso bidimensional: Para cada (ρ_0, ω_0) com $\|(\rho_0, \omega_0)\|$ suficientemente pequeno, seja $\varphi(\theta, \rho_0, \omega_0) = (\rho(\theta, \rho_0, \omega_0), \omega(\theta, \rho_0, \omega_0))$ a solução do sistema (3.6) com condições iniciais $(\rho(0, \rho_0, \omega_0), \omega(0, \rho_0, \omega_0)) = (\rho_0, \omega_0)$. A função φ é analítica em suas três variáveis para $0 \leq \theta < 2\pi$ e (ρ_0, ω_0) tais que $(0, \rho_0, \omega_0) \in C$. Podemos então definir:

Definição 3.2. (Aplicação de Poincaré) Para o sistema (3.2), a aplicação

$$\mathbb{P}(\rho_0, \omega_0) = \varphi(2\pi, \rho_0, \omega_0)$$

é chamada aplicação de Poincaré ou aplicação de primeiro retorno.

Definição 3.3. (Aplicação Deslocamento) Para o sistema (3.2), a aplicação

$$d(\rho_0, \omega_0) = \mathbb{P}(\rho_0, \omega_0) - (\rho_0, \omega_0) = \varphi(2\pi, \rho_0, \omega_0) - (\rho_0, \omega_0)$$

é chamada aplicação deslocamento.

Observação 3.1. A aplicação de Poincaré no caso bidimensional indica o primeiro retorno de um ponto $(\rho_0, 0)$ ao eixo- u pelo fluxo do sistema. Aqui, esta aplicação determina o primeiro retorno de um ponto $(\rho_0, 0, \rho_0\omega_0)$ ao plano- uw . A aplicação deslocamento tem a mesma finalidade que a função deslocamento para sistemas planares. Os pontos para os quais a aplicação deslocamento é $(0, 0)$ correspondem a órbitas periódicas do sistema (3.2). Se for possível encontrar uma curva sobre o plano- uw tal que a aplicação deslocamento seja identicamente o vetor nulo, então temos um centro na origem do sistema sobre a variedade central.

A ideia é definir conceitos análogos aos valores focais para \mathbb{R}^3 . Como $(0, 0)$ é solução de (3.6), temos $\rho(\theta, 0, 0) \equiv 0$ e $\omega(\theta, 0, 0) \equiv 0$. Além disso, escrevendo a aplicação deslocamento $d(\rho_0, \omega_0)$ como $(d_1(\rho_0, \omega_0), d_2(\rho_0, \omega_0))$, segue que:

$$d_1(\rho_0, \omega_0) = \rho(2\pi, \rho_0, \omega_0) - \rho_0 \text{ e } d_2(\rho_0, \omega_0) = \omega(2\pi, \rho_0, \omega_0) - \omega_0.$$

Lema 3.1. *Seja $d(\rho_0, \omega_0)$ a aplicação deslocamento determinada pelo sistema (3.6). Então, existe uma única função analítica $\tilde{\omega}(\rho_0)$ definida numa vizinhança V de $\rho_0 = 0$ tal que $d_2(\rho_0, \tilde{\omega}(\rho_0)) \equiv 0$.*

Demonstração: Temos que $d_2(0, 0) = \omega(2\pi, 0, 0) - 0 = 0$. Da expressão de $\frac{d\omega}{d\theta}$ em (3.6), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\theta} = -\mu\omega + \Omega(\theta, \rho, \omega) &\iff \frac{d\omega}{d\theta} + \mu\omega = \Omega(\theta, \rho, \omega) \iff \\ &\iff \frac{d\omega}{d\theta} e^{\mu\theta} + \mu e^{\mu\theta} \omega = e^{\mu\theta} \Omega(\theta, \rho, \omega) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega(\theta, \rho_0, \omega_0) = \omega_0 e^{-\mu\theta} + e^{-\mu\theta} \int_0^\theta e^{\mu t} \Omega(t, \rho, \omega) dt. \end{aligned}$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} d_2(\rho_0, \omega_0) &= \omega(2\pi, \rho_0, \omega_0) - \omega_0 = \\ &= (e^{-2\pi\mu} - 1)\omega_0 + e^{-2\pi\mu} \int_0^{2\pi} e^{\mu t} \Omega(t, \rho, \omega) dt. \end{aligned}$$

Daí, $\frac{\partial d_2}{\partial \omega_0}(0, 0) = (e^{-2\pi\mu} - 1) \neq 0$ uma vez que $\mu \neq 0$. Como d_2 é analítica, pelo Teorema da Aplicação Implícita, existe uma função $\tilde{\omega}(\rho_0)$ numa vizinhança V de $\rho_0 = 0$ e tal que $d_2(\rho_0, \tilde{\omega}(\rho_0)) \equiv 0$. \square

Observação 3.2. Podemos construir a curva $\gamma(\rho_0) = (0, \rho_0, \tilde{\omega}(\rho_0))$ contida no plano- uw a partir da função $\tilde{\omega}$, com $\rho_0 \in V$. As órbitas do sistema (3.5) pelos pontos de γ indicam órbitas de (3.2) que retornam ao plano- uw sobre a reta $w = \tilde{\omega}(\rho_0)u$, como ilustrado na Figura 3.1 abaixo.

Assim, podemos trabalhar com a função $\mathbf{d}(\rho_0) = d_1(\rho_0, \tilde{\omega}(\rho_0))$ e investigar seus zeros. Esta função é uma excelente generalização da função deslocamento para sistemas tridimensionais. Notando que \mathbf{d} é analítica em uma vizinhança de $\rho_0 = 0$, definimos:

Definição 3.4. (Aplicação Deslocamento Reduzida) Chamamos a função

$$\mathbf{d}(\rho_0) = d_1(\rho_0, \tilde{\omega}(\rho_0))$$

de aplicação deslocamento reduzida. Expandindo-a em série de potências de ρ_0 , temos:

$$\mathbf{d}(\rho_0) = \sum_{j \geq 1} v_j \rho_0^j.$$

Os coeficientes $v_j, j \geq 1$, como no caso planar, são chamados de valores focais.

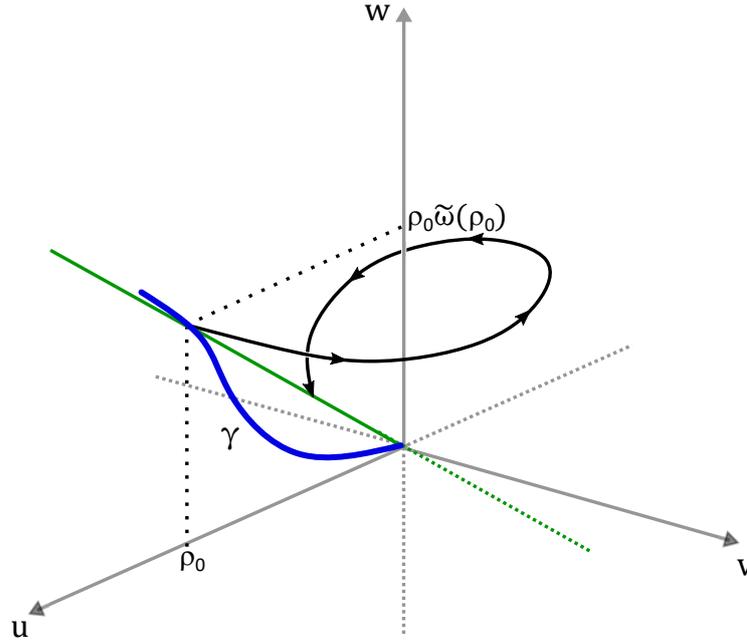


Figura 3.1: Comportamento de uma órbita do sistema por um ponto de γ .

Podemos notar que $v_1 = \frac{d\mathbf{d}}{d\rho_0}(0) = e^{2\pi\lambda_0} - 1$. De fato, da expressão de $\frac{d\rho}{d\theta}$ em (3.6), temos:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \lambda_0\rho + \mathcal{R}(\theta, \rho, \omega).$$

Como $\rho(\theta, \rho_0, \tilde{\omega}(\rho_0))$ é analítica para ρ_0 suficientemente pequeno, e $\rho(\theta, 0, 0) \equiv 0$, podemos expandí-la em série de potências:

$$\rho(\theta, \rho_0, \tilde{\omega}(\rho_0)) = u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + \dots.$$

Daí:

$$u_1'(\theta)\rho_0 + u_2'(\theta)\rho_0^2 + \dots = \lambda_0(u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + \dots) + \mathcal{R}(\theta, \rho, \omega).$$

Comparando os coeficientes de grau 1 de ρ_0 , temos:

$$u_1'(\theta) = \lambda_0 u_1(\theta).$$

Daí, resolvendo a equação diferencial acima com condição inicial $u_1(0) = 1$, segue que $u_1(\theta) = e^{\lambda_0\theta}$. Portanto $\mathbf{d}(\rho_0) = d_1(\rho_0, \tilde{\omega}(\rho_0)) = \rho(2\pi, \rho_0, \tilde{\omega}(\rho_0)) - \rho_0$ e $v_1 = \frac{d\mathbf{d}}{d\rho_0}(0) = u(2\pi) - 1 = e^{2\pi\lambda_0} - 1$. O que coincide com o valor focal análogo no caso planar. É possível obter os outros valores focais por equações semelhantes a esta.

Assim, concluímos que a origem do sistema é um centro sobre a variedade central se, e somente se, todos os valores focais são nulos. Além disso, os zeros da aplicação deslocamento reduzida em uma vizinhança da origem indicam órbitas periódicas do sistema (3.2), isto é, ciclos limite. Outra semelhança dos valores focais no caso tridimensional com os valores focais no plano é o seguinte resultado que é análogo à Proposição 2.2.

Proposição 3.1. *Dado o sistema (3.4), o primeiro valor focal não nulo é o coeficiente de uma potência ímpar de ρ_0 .*

A proposição acima é obtida como consequência do Teorema 2 de [6] e do Teorema 5 de [5], cujas demonstrações envolvem o conceito de multiplicadores de Jacobi inversos, e omitiremos aqui. Assim, definimos:

Definição 3.5. (Coeficiente de Lyapunov) *Dado o sistema (3.4) e seus respectivos valores focais $v_i, i \geq 1$. Então, os coeficientes*

$$L_k = v_{2k+1},$$

são chamados coeficientes de Lyapunov para $k \geq 0$.

A partir da aplicação deslocamento reduzida, podemos determinar condições para que os coeficientes de Lyapunov se anulem e, desta forma, resolver o *Problema do Centro-Foco* em \mathbb{R}^3 . Entretanto, as dificuldades deste método são as mesmas do caso planar. Buscando uma alternativa, podemos generalizar também o Segundo Método de Lyapunov para sistemas tridimensionais. Nas próximas seções desenvolvemos precisamente esta ideia.

3.3 Formas Normais e Integrais Primeiras Formais

Nesta seção apresentamos ferramentas necessárias para estender o Segundo Método de Lyapunov para sistemas tridimensionais. Para isso, precisamos discutir um pouco da teoria de *Formas Normais*. Aqui não pretendemos nos aprofundar no tópico, apenas desenvolver o suficiente para nossos objetivos. Para uma leitura mais profunda e completa sobre Formas Normais, bem como as demonstrações dos teoremas enunciados nessa seção, recomendamos as notas de aula de Yuri Bibikov [4], principalmente as seções de 1 a 3.

Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{\mathbf{x}} = J\mathbf{x} + F(\mathbf{x}),$$

no qual $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$, J é uma matriz diagonal e f é uma função analítica cuja expansão em série de Taylor tem termos de ordem maior ou igual a 2 em \mathbf{x} . Podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = \kappa_1 x + F_1(x, y, z) = \kappa_1 x + \sum_{q_1+q_2+q_3 \geq 2} F_{q_1 q_2 q_3}^{(1)} x^{q_1} y^{q_2} z^{q_3}, \\ \dot{y} = \kappa_2 y + F_2(x, y, z) = \kappa_2 y + \sum_{q_1+q_2+q_3 \geq 2} F_{q_1 q_2 q_3}^{(2)} x^{q_1} y^{q_2} z^{q_3}, \\ \dot{z} = \kappa_3 z + F_3(x, y, z) = \kappa_3 z + \sum_{q_1+q_2+q_3 \geq 2} F_{q_1 q_2 q_3}^{(3)} x^{q_1} y^{q_2} z^{q_3}, \end{cases} \quad (3.7)$$

onde κ_k , $k = 1, 2, 3$ são autovalores de J . Queremos uma mudança de variáveis que deixe o sistema (3.7) em uma forma mais simples, eliminando ao máximo os coeficientes $F_{q_1 q_2 q_3}^{(k)}$, com $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{N}^3$. Esta será a forma normal do sistema.

Definição 3.6. (Termos Ressonantes) Dado um sistema escrito na forma (3.7), os coeficientes $F_{q_1 q_2 q_3}^{(k)}$ tais que

$$q_1 \kappa_1 + q_2 \kappa_2 + q_3 \kappa_3 - \kappa_k = 0 \quad (3.8)$$

são chamados coeficientes ressonantes. O termo $F_{q_1 q_2 q_3}^{(k)} x^{q_1} y^{q_2} z^{q_3}$ correspondente a um coeficiente ressonante é um termo ressonante e as equações (3.8), para $k = 1, 2, 3$ e $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{N}^3$ são as equações de ressonância.

Definição 3.7. (Forma Normal) Dizemos que o sistema (3.7) está na forma normal quando todos os termos não-ressonantes são nulos.

Consideramos uma mudança formal de variáveis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + h_1(x_1, y_1, z_1) \\ y_1 + h_2(x_1, y_1, z_1) \\ z_1 + h_3(x_1, y_1, z_1) \end{pmatrix},$$

onde $h_k(x_1, y_1, z_1)$ são séries formais, ou simplesmente:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1). \quad (3.9)$$

Definição 3.8. Uma mudança de variáveis da forma (3.9) cujos termos ressonantes são nulos é chamada distinta.

O seguinte teorema nos garante que o sistema (3.7) pode ser transformado em um sistema na forma normal através de uma mudança de variáveis formal distinta.

Teorema 3.2. Todo sistema da forma (3.7), através de uma mudança de variáveis formal distinta (3.9), é equivalente a um sistema na forma normal. Além disso tal mudança de variáveis formal é unicamente determinada.

A demonstração deste teorema encontra-se em [4] nas páginas de 8 a 11. A partir deste resultado, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \kappa_1 x_1 + G_1(x_1, y_1, z_1), \\ \dot{y}_1 = \kappa_2 y_1 + G_2(x_1, y_1, z_1), \\ \dot{z}_1 = \kappa_3 z_1 + G_3(x_1, y_1, z_1), \end{cases} \quad (3.10)$$

na forma normal. Entretanto, o sistema (3.10) é meramente formal, e terá significado somente se \mathbf{h} em (3.9) for convergente. Para discutir esta convergência, precisamos definir *Forma Normal em Superfície Invariante*.

Definição 3.9. (Forma Normal em Superfície Invariante) Considerando um sistema escrito na forma (3.10), se $G_3(x_1, y_1, 0) = 0$, e nas expansões de $G_1(x_1, y_1, 0)$ e $G_2(x_1, y_1, 0)$ os termos não-ressonantes são nulos, diremos que (3.10) é uma Forma Normal em Superfície Invariante.

Para formas normais em superfície invariante, temos as seguintes condições para a convergência de h em (3.9):

Teorema 3.3. Considere um sistema na forma (3.7) e suponha que exista uma mudança de variáveis formal (3.9) que o transforme em uma forma normal em superfície invariante (3.10). Se são satisfeitas as seguintes condições:

(i) $q_1\kappa_1 + q_2\kappa_2 - \kappa_3 \neq 0$, para todo $(q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2$;

(ii) existe $\varepsilon > 0$ tal que $|q_1\kappa_1 + q_2\kappa_2 - \kappa_3| \geq \varepsilon$, para todo $(q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2$;

(iii) se $(q_1 - r_1)\kappa_1 + (q_2 - r_2)\kappa_2 = 0$, com $2 \leq r_1 + r_2 \leq q_1 + q_2$, então existe $d > 0$ tal que

$$\left| \sum_{k=1}^2 r_k G_{q_1-r_1+\delta_{1k}, q_2-r_2+\delta_{2k}, 0}^{(k)} \right| \leq d |r_1\kappa_1 + r_2\kappa_2| \left| \sum_{k=1}^2 G_{q_1-r_1+\delta_{1k}, q_2-r_2+\delta_{2k}, 0}^{(k)} \right|,$$

com $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$,

então h é convergente.

A demonstração deste teorema também se encontra em [4] da página 18 a 23.

Os resultados acima foram adaptados para nossos objetivos. Os enunciados originais abrangem casos mais gerais em dimensões maiores. Aplicamos estes resultados para o sistema (3.2) no intuito de resolver o *Problema do Centro-Foco* no caso tridimensional.

Consideremos o sistema (3.2). Inserindo as mudança de variáveis: $x = u + iv$, $y = \bar{x} = u - iv$ e $z = w$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = ix + \sum_{p+q+r \geq 2} a_{pqr} x^p y^q z^r, \\ \dot{y} = -iy + \sum_{p+q+r \geq 2} b_{pqr} x^p y^q z^r, \\ \dot{z} = -\mu z + \sum_{p+q+r \geq 2} c_{pqr} x^p y^q z^r. \end{cases} \quad (3.11)$$

O sistema (3.2) é equivalente à primeira equação do sistema acima, e a segunda equação é a conjugada complexa da primeira. Análogo ao caso bidimensional, dizemos que (3.11) é a forma *complexificada* do sistema (3.2). Observemos que os

coeficientes a_{pqr} , b_{pqr} e c_{pqr} são tais que $a_{pqr} = \bar{b}_{qpr}$ e $\dot{z} \in \mathbb{R}$ para $y = \bar{x}$ e $z \in \mathbb{R}$. Denotemos por \mathcal{Z} o campo vetorial associado a (3.11) em \mathbb{C}^3 .

Os autovalores da parte linearizada de (3.11) são $\kappa_1 = i$, $\kappa_2 = -i$ e $\kappa_3 = -\mu$. Assim, as equações de ressonância para este sistema são:

$$\begin{aligned} q_1 i - q_2 i - q_3 \mu - i = 0 &\iff i(q_1 - q_2 - 1) - q_3 \mu = 0, \\ q_1 i - q_2 i - q_3 \mu + i = 0 &\iff i(q_1 - q_2 + 1) - q_3 \mu = 0, \\ q_1 i - q_2 i - q_3 \mu + \mu = 0 &\iff i(q_1 - q_2) + (1 - \mu)q_3 = 0, \end{aligned}$$

e suas soluções:

$$\begin{aligned} q_1 = q_2 + 1 \quad \text{e} \quad q_3 = 0, \\ q_2 = q_1 + 1 \quad \text{e} \quad q_3 = 0, \\ q_1 = q_2 \quad \text{e} \quad q_3 = 1, \end{aligned}$$

Assim obtemos a forma normal do sistema (3.11):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ix_1 + \sum_{q \geq 1} G_q^{(1)} x_1^{q+1} y_1^q, \\ \dot{y}_1 = -iy_1 + \sum_{q \geq 1} G_q^{(2)} x_1^q y_1^{q+1}, \\ \dot{z}_1 = \mu z_1 + \sum_{q \geq 1} G_q^{(3)} x_1^q y_1^q z_1, \end{cases}$$

a qual podemos reescrever como

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ix_1 + x_1 X(x_1 y_1), \\ \dot{y}_1 = -iy_1 + y_1 Y(x_1 y_1), \\ \dot{z}_1 = -\mu z_1 + z_1 Z(x_1 y_1). \end{cases} \quad (3.12)$$

Observemos que o sistema (3.12), é uma forma normal em superfície invariante.

Definição 3.10. (Integral Primeira Formal) *Uma série formal $\Psi(x, y, z)$ é chamada integral primeira formal para o sistema (3.11) quando Ψ não é constante e a expansão em série de potências em torno da origem de $\mathcal{Z}\Psi$ tem todos os coeficientes nulos. Isto é, satisfaz formalmente a expressão $\mathcal{Z}\Psi \equiv 0$.*

O próximo teorema é o que sumariza a utilidade da forma normal (3.12).

Teorema 3.4. *Um sistema da forma (3.11) admite uma integral primeira formal $\Psi(x, y, z) = xy + \dots$ se, e somente se, as funções X e Y da forma normal (3.12) são tais que $X + Y \equiv 0$.*

Demonstração: Suponha que o sistema (3.11) tem uma integral primeira formal da forma $\Psi(x, y, z) = xy + \dots$. Seja \mathbf{H} a transformação que deixa o sistema na forma normal (3.12), isto é $\mathbf{x} = \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1)$. Então $F = \Psi \circ \mathbf{H}$ é uma integral primeira formal para o sistema normalizado. Daí, temos:

$$(ix_1 + x_1X(x_1y_1))\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, y_1, z_1) + (-iy_1 + y_1Y(x_1y_1))\frac{\partial F}{\partial y_1}(x_1, y_1, z_1) + (-\mu z_1 + z_1Z(x_1y_1))\frac{\partial F}{\partial z_1}(x_1, y_1, z_1) \equiv 0.$$

Ou, equivalentemente:

$$ix_1\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, y_1, z_1) - iy_1\frac{\partial F}{\partial y_1}(x_1, y_1, z_1) - \mu z_1\frac{\partial F}{\partial z_1}(x_1, y_1, z_1) = -x_1\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, y_1, z_1)X(x_1y_1) - y_1\frac{\partial F}{\partial y_1}(x_1, y_1, z_1)Y(x_1y_1) - z_1\frac{\partial F}{\partial z_1}(x_1, y_1, z_1)Z(x_1y_1). \quad (3.13)$$

Como $\mathbf{H}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1)$, o termo de ordem 2 de F é x_1y_1 e então F é da forma $F(x_1, y_1, z_1) = x_1y_1 + \dots$. Por outro lado, denotando $q = (q_1, q_2, q_3)$ e $|q| = q_1 + q_2 + q_3$, escrevemos:

$$F(x_1, y_1, z_1) = \sum_{|q| \geq 2} F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} = x_1y_1 + \dots$$

Susbtituindo em (3.13), obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{|q| \geq 2} (q_1 i - q_2 i - \mu q_3) F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} = & - \left[\sum_{|q| \geq 2} q_1 F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} \right] \left[\sum_{j=1}^{\infty} X_{j+1, j, 0}(x_1 y_1)^j \right] \\ & - \left[\sum_{|q| \geq 2} q_2 F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} \right] \left[\sum_{j=1}^{\infty} Y_{j, j+1, 0}(x_1 y_1)^j \right] \\ & - \left[\sum_{|q| \geq 2} q_3 F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} \right] \left[\sum_{j=1}^{\infty} Z_{j, j, 1}(x_1 y_1)^j \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Provemos que F é uma aplicação que depende apenas de x_1y_1 . Para isso, precisamos provar a seguinte afirmação:

Afirmação: Se q não é da forma $(K, K, 0)$ então $F_q = 0$. Como o termo de ordem 2 de $F(x_1, y_1, z_1)$ é x_1y_1 então a afirmação vale para $|q| \leq 2$. Daí, podemos escrever o lado direito de (3.14) na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & - \left[x_1 y_1 + \sum_{|q| \geq 3} q_1 F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} \right] \left[X_{2,1,0} x_1 y_1 + \sum_{j=2}^{\infty} X_{j+1,j,0} (x_1 y_1)^j \right] \\
 & - \left[x_1 y_1 + \sum_{|q| \geq 3} q_2 F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} \right] \left[Y_{1,2,0} x_1 y_1 + \sum_{j=2}^{\infty} Y_{j,j+1,0} (x_1 y_1)^j \right] \\
 & - \left[\sum_{|q| \geq 3} q_3 F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} \right] \left[\sum_{j=1}^{\infty} Z_{j,j,1} (x_1 y_1)^j \right] = -(X_{2,1,0} + Y_{1,2,0})(x_1 y_1)^2 + \dots
 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que não há termos de grau 3 na expressão acima. Logo

$$\sum_{|q|=3} (q_1 i - q_2 i - \mu q_3) F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} \equiv 0.$$

Como $|q|=3$, $q_1 i - q_2 i - \mu q_3 \neq 0$, e portanto $F_q = 0$. Além disso, temos:

$$\sum_{|q|=4} (q_1 i - q_2 i - \mu q_3) F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} = -(X_{2,1,0} + Y_{1,2,0})(x_1 y_1)^2,$$

concluímos que para $|q|=4$ tal que $q \neq (2, 2, 0)$ temos $F_q = 0$. Assim, a afirmação vale para $|q| \leq 4$.

Agora, suponha que a afirmação vale para $|q| \leq 2k$. Assim, podemos escrever o lado direito de (3.14) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & - \left[\sum_{j=1}^k j F_{j,j,0} (x_1 y_1)^j + \sum_{|q| \geq 2k+1} q_1 F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} \right] \left[\sum_{j=1}^{\infty} X_{j+1,j,0} (x_1 y_1)^j \right] \\
 & - \left[\sum_{j=1}^k j F_{j,j,0} (x_1 y_1)^j + \sum_{|q| \geq 2k+1} q_2 F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} \right] \left[\sum_{j=1}^{\infty} Y_{j,j+1,0} (x_1 y_1)^j \right] \\
 & - \left[\sum_{|q| \geq 2k+1} q_3 F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} \right] \left[\sum_{j=1}^{\infty} Z_{j,j,1} (x_1 y_1)^j \right] = \\
 & = - \sum_{j=1}^k C_j (x_1 y_1)^j - C_{k+1} (x_1 y_1)^{k+1} + \dots
 \end{aligned}$$

Logo, temos que não há termos de grau $2k+1$ na expressão acima. Daí

$$\sum_{|q|=2k+1} (q_1 i - q_2 i - \mu q_3) F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} \equiv 0.$$

Pelo mesmo argumento usado para o passo base, $F_q = 0$ quando $|q|=2k+1$. Também concluímos que, como o único termo de grau $2(k+1)$ é $(x_1 y_1)^{k+1}$, então

para $|q|= 2(k + 1)$ com $q \neq (k + 1, k + 1, 0)$ temos $F_q = 0$. Assim fica provada a afirmação.

Com isso, F pode ser escrita da forma $F(x_1, y_1, z_1) = \sum_k F^{(k,k,0)}(x_1 y_1)^k = f(x_1 y_1)$.

Daí:

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, y_1, z_1) = x_1 y_1 f'(x_1 y_1) = y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1}(x_1, y_1, z_1) \text{ e } \frac{\partial F}{\partial z_1} = 0.$$

Substituindo em (3.13), obtemos:

$$0 = x_1 y_1 f'(x_1 y_1) [X(x_1 y_1) + Y(x_1 y_1)].$$

Por F ser integral primeira formal, não pode ser constante, e $f'(x_1 y_1)$ não pode ser identicamente nula. Daí segue que $X + Y \equiv 0$.

Reciprocamente, suponha que $X + Y \equiv 0$. A aplicação $\hat{\Psi}(x_1, y_1, z_1) = x_1 y_1$ é uma integral primeira formal para (3.12). A mudança de variáveis \mathbf{H} que normaliza o sistema (3.11) admite inversa da forma $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$, e portanto (3.11) tem integral primeira formal da forma $\Psi(x, y, z) = \hat{\Psi} \circ \mathbf{H}^{-1} = xy + \dots$. \square

A integral primeira formal não nos dá informações sobre as órbitas do sistema uma vez que sua convergência nem é garantida. Entretanto, o resultado abaixo nos garante esta convergência. Ao provarmos este resultado, estamos próximos de generalizar o Segundo Método de Lyapunov para o caso tridimensional.

Teorema 3.5. *Se o sistema (3.11) admite integral primeira formal, então admite uma integral primeira analítica $\Psi(x, y, z) = xy + \dots$ em uma vizinhança da origem.*

Demonstração: Como o sistema (3.11) admite integral primeira formal, pelo Teorema 3.4, as funções X e Y da forma normal (3.12) são tais que $X + Y \equiv 0$. Daí, concluímos que $X_{j+1,j,0} = -Y_{j,j+1,0}$, para todo $j \geq 1$. Também pela demonstração deste teorema, a forma normal (3.12) admite integral primeira $\hat{\Psi}(x_1, y_1, z_1) = x_1 y_1$ que é um polinômio, e portanto, analítica.

Como os autovalores da parte linear de (3.11) são $\kappa_1 = i, \kappa_2 = -i$ e $\kappa_3 = -\mu$, e $\mu \in \mathbb{R}$, temos que, para todo $(q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2$:

$$q_1 \kappa_1 + q_2 \kappa_2 - \kappa_3 = (q_1 - q_2)i - \mu \neq 0 \quad \text{e}$$

$$|q_1 \kappa_1 + q_2 \kappa_2 - \kappa_3| = \sqrt{(q_1 - q_2)^2 + \mu^2} \geq |\mu|.$$

Além disso, para todo (r_1, r_2) , com $2 \leq r_1 + r_2 \leq q_1 + q_2$ tais que $(q_1 - r_1)\kappa_1 + (q_2 -$

$r_2)\kappa_2 = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=1}^2 r_k G_{q_1-r_1+\delta_{1k}, q_2-r_2+\delta_{2k}, 0}^{(k)} \right| &= |r_1 X_{q_1-r_1+1, q_2-r_2, 0} + r_2 Y_{q_1-r_1, q_2-r_2+1, 0}| = \\
 &= |(r_1 - r_2) X_{q_1-r_1+1, q_2-r_2, 0}| = \\
 &= |r_1 - r_2| |X_{\sigma+1, \sigma, 0}| = \\
 &= |r_1 \kappa_1 + r_2 \kappa_2| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 |X_{\sigma+1, \sigma, 0}| = \\
 &= \frac{1}{2} |r_1 \kappa_1 + r_2 \kappa_2| \sum_{k=1}^2 \left| G_{q_1-r_1+\delta_{1k}, q_2-r_2+\delta_{2k}, 0}^{(k)} \right|,
 \end{aligned}$$

onde $\sigma = q_1 - r_1 = q_2 - r_2$. Assim, para $d \geq \frac{1}{2}$ e $\varepsilon = |\mu|$, as três condições do Teorema 3.3, são satisfeitas. Como (3.12) é uma forma normal em superfície invariante, a mudança de variáveis $\mathbf{H}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1 + h(\mathbf{x}_1)$ que normaliza (3.11) é uma aplicação analítica. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, \mathbf{H} admite inversa local analítica, e assim $\Psi(x, y, z) = \hat{\Psi} \circ \mathbf{H}^{-1} = xy + \dots$ é uma integral primeira analítica em uma vizinhança da origem para o sistema (3.11). \square

Observação 3.3. Como o sistema (3.11) é a forma complexificada do sistema (3.2) e suas duas primeiras equações são conjugadas complexas, então as duas primeiras equações da forma normal (3.12) também são complexas conjugadas, através da mudança de variáveis (3.9). Uma consequência disso é que a integral primeira $\hat{\Psi}(x_1, y_1, z_1) = x_1 y_1$ é uma função real para $y_1 = \bar{x}_1$ e consequentemente $\Psi(x, y, z) = \hat{\Psi} \circ \mathbf{H}^{-1}$ também será para $y = \bar{x}$ e $z \in \mathbb{R}$. Logo, a existência de uma integral primeira formal para (3.11) implica na existência de uma integral primeira $H(u, v, w) = \Psi(u + iv, u - iv, w)$ real pro sistema (3.2) e consequentemente a existência de um centro sobre uma variedade central W^c .

A partir destes resultados, podemos resolver o *Problema do Centro-Foco* baseado na busca de uma série formal $\Psi(x, y, z)$ que seja uma integral primeira formal para o sistema (3.11). Na próxima seção, construímos esta série formal e generalizamos o *Teorema do Centro*.

3.4 O Teorema do Centro em \mathbb{R}^3 e a Variedade de Bautin

Procuramos uma integral primeira formal para o sistema (3.11) com o objetivo de determinar se o sistema restrito a uma variedade central tem um centro na origem.

Lembremos que o sistema (3.11), com campo \mathcal{Z} associado, tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = ix + \sum_{p+q+r \geq 2} a_{pqr} x^p y^q z^r, \\ \dot{y} = -iy + \sum_{p+q+r \geq 2} b_{pqr} x^p y^q z^r, \\ \dot{z} = -\mu z + \sum_{p+q+r \geq 2} c_{pqr} x^p y^q z^r. \end{cases}$$

Procedemos de maneira similar ao caso bidimensional. Consideremos a série formal:

$$\Psi(x, y, z) = xy + \sum_{p+q+r \geq 3} \nu_{pqr} x^p y^q z^r.$$

Denotamos por $g_{k_1 k_2 k_3}$ os coeficientes de $\mathcal{Z}\Psi$ dos termos $x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$ na sua expansão em série de potências, isto é,

$$\mathcal{Z}\Psi = \sum_{k_1+k_2+k_3 \geq 2} g_{k_1 k_2 k_3} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}.$$

Resolvendo as equações $g_{k_1 k_2 k_3} = 0$ nas variáveis ν_{pqr} obtemos os coeficientes de Ψ para que esta seja uma integral primeira formal para o sistema. Entretanto, nem sempre é possível resolver a equação $g_{k_1 k_2 k_3} = 0$, nas variáveis ν_{pqr} , para qualquer tripla (k_1, k_2, k_3) . De fato, $\mathcal{Z}\Psi$ é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\Psi &= \left[ix + \sum_{p+q+r \geq 2} a_{pqr} x^p y^q z^r \right] \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y, z) + \left[-iy + \sum_{p+q+r \geq 2} b_{pqr} x^p y^q z^r \right] \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y, z) + \\ &+ \left[-\mu z + \sum_{p+q+r \geq 2} c_{pqr} x^p y^q z^r \right] \frac{\partial \Psi}{\partial z}(x, y, z) = \\ &= \left[ix + \sum_{p+q+r \geq 2} a_{pqr} x^p y^q z^r \right] \left[y + \sum_{j+k+l \geq 3} j \nu_{jkl} x^{j-1} y^k z^l \right] + \\ &+ \left[-iy + \sum_{p+q+r \geq 2} b_{pqr} x^p y^q z^r \right] \left[x + \sum_{j+k+l \geq 3} k \nu_{jkl} x^j y^{k-1} z^l \right] + \\ &+ \left[-\mu z + \sum_{p+q+r \geq 2} c_{pqr} x^p y^q z^r \right] \left[\sum_{j+k+l \geq 3} l \nu_{jkl} x^j y^k z^{l-1} \right]. \end{aligned}$$

Pela expressão acima, concluímos que $\mathcal{Z}\Psi$ não tem termos de grau menor ou igual a 2 e o coeficiente $g_{k_1 k_2 k_3}$ é dado por

$$\begin{aligned}
 g_{k_1 k_2 k_3} = & (-\mu k_3 + (k_1 - k_2)i)\nu_{k_1 k_2 k_3} + a_{k_1, k_2-1, k_3} + b_{k_1-1, k_2, k_3} + \\
 & + \sum_{r=0}^{k_3} \left[\sum_{j+k=3+r-k_3}^{k_1+k_2+r-1} j a_{k_1-j+1, k_2-k, r} \nu_{j, k, k_3-r} \right] + \\
 & + \sum_{r=0}^{k_3} \left[\sum_{j+k=3+r-k_3}^{k_1+k_2+r-1} k b_{k_1-j, k_2-k+1, r} \nu_{j, k, k_3-r} \right] + \\
 & + \sum_{r=0}^{k_3} \left[\sum_{j+k=2+r-k_3}^{k_1+k_2+r-2} (k_3 - r + 1) c_{k_1-j, k_2-k, r} \nu_{j, k, k_3-r+1} \right], \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

onde adotamos $\nu_{110} = 1$ e $\nu_{pqr} = 0$ para $p + q + r \leq 2$ (com $(p, q, r) \neq (1, 1, 0)$).

Procedemos por iterações, resolvendo na n -ésima iteração a equação $g_{k_1 k_2 k_3} = 0$ para obter os coeficientes $\nu_{k_1 k_2 k_3}$ de Ψ tais que $k_1 + k_2 + k_3 = n$. Como o máximo dos índices dos somatórios acima é $k_1 + k_2 + k_3 - 1$, é possível determinar unicamente $\nu_{k_1 k_2 k_3}$ na n -ésima iteração a partir dos coeficientes ν_{pqr} obtidos nas iterações anteriores. Isso é verdade exceto para $(k_1, k_2, k_3) = (K, K, 0)$, com $K \in \mathbb{N}$. De fato, quando $(k_1, k_2, k_3) = (K, K, 0)$, temos $(-\mu k_3 + (k_1 - k_2)i) = 0$ e ν_{KK0} não aparece na expressão (3.15). Daí, temos:

$$g_{KK0} = \sum_{j+k=2}^{2K-1} (j a_{K-j+1, K-k, 0} + k b_{K-j, K-k+1, 0}) \nu_{j, k, 0} + \sum_{j+k=2}^{2K-2} c_{K-j, K-k, 0} \nu_{j, k, 1}.$$

Como nem sempre podemos resolver as equações $g_{KK0} = 0$, a existência de uma integral primeira formal Ψ fica à mercê dos coeficientes g_{KK0} . Assim, como no caso bidimensional, para um conjunto qualquer de escolhas para ν_{KK0} , conseguimos determinar uma série formal $\Psi(x, y, z)$ tal que

$$\mathcal{Z}\Psi = g_{220}(xy)^2 + g_{330}(xy)^3 + g_{440}(xy)^4 + \dots + g_{KK0}(xy)^K + \dots.$$

Aqui cabe a generalização da Proposição 2.4:

Proposição 3.2. Se $\nu_{KK0} \in \mathbb{R}$, para todo $K \in \mathbb{N}$, então $\nu_{pqr} = \bar{\nu}_{pqr}$.

Demonstração: Observemos que os coeficientes c_{pqr} são tais que $\dot{z} \in \mathbb{R}$ para $y = \bar{x}$ e $z \in \mathbb{R}$. Daí, temos, sob estas condições, $\dot{z} = \bar{\dot{z}}$ e assim:

$$\begin{aligned}
 -\mu z + \sum_{p+q+r \geq 2} c_{pqr} x^p y^q z^r &= -\mu z + \sum_{p+q+r \geq 2} \bar{c}_{pqr} \bar{x}^p \bar{y}^q z^r \Rightarrow \\
 \Rightarrow \sum_{p+q+r \geq 2} c_{pqr} x^p y^q z^r &= \sum_{p+q+r \geq 2} \bar{c}_{pqr} x^q y^p z^r \Rightarrow c_{qpr} = \bar{c}_{pqr}.
 \end{aligned}$$

Provamos a proposição por indução sobre $p + q + r$. Para $p + q + r \leq 2$, a afirmação é verdadeira, uma vez que $\nu_{110} = 1$ e $\nu_{pqr} = 0$ para $p + q + r \leq 2$ e $(p, q, r) \neq (1, 1, 0)$. Supondo a afirmação verdadeira para $p + q + r \leq n - 1$. Se n for par, então $\nu_{n/2, n/2, 0} \in \mathbb{R}$ e basta verificar a afirmação para ν_{pqr} com $(p, q, r) \neq (K, K, 0)$. Esta verificação é idêntica ao caso em que n é ímpar e segue abaixo:

$$\begin{aligned}
 & g_{pqr} = g_{qpr} = 0 \Rightarrow g_{pqr} = \bar{g}_{qpr} \Rightarrow \\
 \Rightarrow & \quad (-\mu r + (p - q)i)\nu_{pqr} + a_{p,q-1,r} + b_{p-1,q,r} + \\
 & \quad + \sum_{n=0}^r \left[\sum_{j+k=3+n-r}^{p+q+n-1} j a_{p-j+1,q-k,n} \nu_{j,k,r-n} \right] + \\
 & \quad + \sum_{n=0}^r \left[\sum_{j+k=3+n-r}^{p+q+n-1} k b_{p-j,q-k+1,n} \nu_{j,k,r-n} \right] + \\
 & \quad + \sum_{n=0}^r \left[\sum_{j+k=2+n-r}^{p+q+n-2} (r - n + 1) c_{p-j,q-k,n} \nu_{j,k,r-n+1} \right] = \\
 = & \quad \overline{(-\mu r + (q - p)i)\bar{\nu}_{qpr}} + \bar{a}_{q,p-1,r} + \bar{b}_{q-1,p,r} + \\
 & \quad + \sum_{n=0}^r \left[\sum_{j+k=3+n-r}^{q+p+n-1} j \bar{a}_{q-j+1,p-k,n} \bar{\nu}_{j,k,r-n} \right] + \\
 & \quad + \sum_{n=0}^r \left[\sum_{j+k=3+n-r}^{q+p+n-1} k \bar{b}_{q-j,p-k+1,n} \bar{\nu}_{j,k,r-n} \right] + \\
 & \quad + \sum_{n=0}^r \left[\sum_{j+k=2+n-r}^{q+p+n-2} (r - n + 1) \bar{c}_{q-j,p-k,n} \bar{\nu}_{j,k,r-n+1} \right] = \\
 = & \quad (-\mu r + (p - q)i)\bar{\nu}_{qpr} + b_{p-1,q,r} + a_{p,q-1,r} + \\
 & \quad + \sum_{n=0}^r \left[\sum_{j+k=3+n-r}^{q+p+n-1} j b_{p-k,q-j+1,n} \nu_{k,j,r-n} \right] + \\
 & \quad + \sum_{n=0}^r \left[\sum_{j+k=3+n-r}^{q+p+n-1} k a_{p-k+1,q-j,n} \nu_{k,j,r-n} \right] + \\
 & \quad + \sum_{n=0}^r \left[\sum_{j+k=2+n-r}^{q+p+n-2} (r - n + 1) c_{p-k,q-j,n} \nu_{k,j,r-n+1} \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow & \quad (-\mu r + (p - q)i)\nu_{pqr} = (-\mu r + (p - q)i)\bar{\nu}_{qpr} \Rightarrow \nu_{pqr} = \bar{\nu}_{qpr}.
 \end{aligned}$$

Por indução, a afirmação é verdadeira. \square

Restringindo as escolhas de ν_{KK0} a valores reais, obtemos que $\Psi(x, y, z)$ é uma série formal real para $y = \bar{x}$ e $z \in \mathbb{R}$, e os coeficientes g_{KK0} também serão reais. Denotando por \mathcal{F} o campo vetorial associado a (3.2), e considerando a série formal

$H(u, v, w) = \Psi(u + iv, u - iv, w)$, temos:

$$\mathcal{F}H = g_{220}(u^2 + v^2)^2 + g_{330}(u^2 + v^2)^3 + g_{440}(u^2 + v^2)^4 + \dots + g_{KK0}(u^2 + v^2)^K + \dots$$

Logo, se existir $k \in \mathbb{N}$ tal que g_{kk0} é o primeiro coeficiente de $\mathcal{Z}\Psi$ não-nulo, então a origem é um foco para o sistema (3.2) restrito a uma variedade central, pois ao truncarmos a série até ordem $N \geq 2k + 1$, $H(u, v, w)$ será uma função de Lyapunov estrita para (3.11) ou para $\dot{u} = -F(u)$ restritos a W^c (Observação 2.3 e Teorema 3.11). Como no caso bidimensional, chamamos os coeficientes g_{KK0} de *coeficientes focais*.

Com todos os resultados desenvolvidos até aqui, naturalmente generalizamos o *Teorema do Centro*.

Teorema 3.6. (Teorema do Centro de Lyapunov) *O sistema (3.2) restrito a uma variedade central W^c admite um centro na origem se, e somente se, admite uma integral primeira analítica da forma $H(u, v, w) = u^2 + v^2 + \dots$.*

Demonstração: Suponha que o sistema (3.2) admite integral primeira analítica da forma $H(u, v, w) = u^2 + v^2 + \dots$. Como W^c é tangente ao plano- uv , podemos escrevê-la localmente como $w = h(u, v)$, onde h é função de classe C^∞ . Consideremos a função $\tilde{H}(u, v) = H(u, v, h(u, v))$. Temos que \tilde{H} é uma integral primeira para o sistema (3.2) restrito a W^c . De fato, $\tilde{H}(u, v) = u^2 + v^2 + \mathcal{O}(u, v)$, onde \mathcal{O} contém os termos de ordem maior que 2 de \tilde{H} , e portanto \tilde{H} não é constante. Além disso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial v} \dot{v} &= \left(\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial H}{\partial w} \frac{\partial h}{\partial u} \right) \dot{u} + \left(\frac{\partial H}{\partial v} + \frac{\partial H}{\partial w} \frac{\partial h}{\partial v} \right) \dot{v} = \\ &= \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial H}{\partial v} \dot{v} + \frac{\partial H}{\partial w} \left(\frac{\partial h}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial h}{\partial v} \dot{v} \right) = \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial H}{\partial v} \dot{v} + \frac{\partial H}{\partial w} \dot{w} \equiv 0 \end{aligned}$$

Então, pela Proposição 2.3 o sistema restrito a uma variedade central não pode ter um foco, e pela Observação 2.1, tem um centro na origem.

Reciprocamente, se a origem é um centro para o sistema restrito, a série formal $\Psi(x, y, z)$ obtida pelo método descrito acima satisfaz a equação $\mathcal{Z}\Psi \equiv 0$. Logo, $\Psi(x, y, z)$ é uma integral primeira formal para o sistema (3.11). Pelo Teorema 3.5, o sistema (3.11) admite uma integral primeira analítica $\Psi(x, y, z) = xy + \dots$. Como o sistema (3.11) é a complexificação de um sistema real, da Observação 3.3, $\Psi(x, y, z)$ é real para $y = \bar{x}$ e $z \in \mathbb{R}$ e portanto $H(u, v, w) = \Psi(u + iv, u - iv, w)$ é uma integral primeira analítica para o sistema (3.2). \square

Com estes resultados em mãos, podemos procurar condições para que os coeficientes focais sejam nulos e resolver o *Problema do Centro-Foco* para o sistema (3.2). A partir do Teorema 3.5 e do Teorema do Centro de Lyapunov, concluímos

que a existência de uma integral primeira formal para o sistema (3.11) implica na existência de uma integral primeira analítica para (3.2). resumamos no resultado a seguir:

Teorema 3.7. *Dado um sistema da forma (3.2) com P, Q e R funções analíticas e considerando \mathcal{F} o campo de vetores correspondente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *O sistema restrito $\mathcal{F}|_{W^c}$, no qual W^c é uma variedade central, tem um centro na origem.*
- (ii) *O sistema (3.2) admite integral primeira analítica real da forma $H(u, v, w) = u^2 + v^2 + \dots$ em uma vizinhança da origem.*
- (iii) *O sistema (3.2) admite integral primeira formal da forma $H(u, v, w) = u^2 + v^2 + \dots$ em uma vizinhança da origem.*

Demonstração: As afirmações (i) e (ii) são equivalentes pelo Teorema do Centro de Lyapunov. A afirmação (i) implica na afirmação (iii) pelo Segundo Método de Lyapunov e (iii) implica em (ii) pelo Teorema 3.5. \square

Da equação (3.15), temos que os coeficientes focais são funções racionais cujas variáveis são os coeficientes a_{pqr}, b_{pqr} e c_{pqr} de (3.11) bem como o parâmetro μ . Mais precisamente, podemos escrever os coeficientes ν_{k_1, k_2, k_3} para $(k_1, k_2, k_3) \neq (K, K, 0)$ de Ψ como:

$$\nu_{k_1 k_2 k_3} = \frac{S}{(-\mu k_3 + (k_1 - k_2)i)},$$

onde S é um polinômio que depende dos coeficientes a_{pqr}, b_{pqr} e c_{pqr} e dos coeficientes de Ψ de ordem menor que $k_1 + k_2 + k_3$. Pelo processo iterativo descrito acima, podemos escrever g_{KK0} como:

$$g_{KK0} = \frac{\tilde{g}_K}{\eta_K(\mu)},$$

onde \tilde{g}_K é um polinômio nas variáveis μ, a_{pqr}, b_{pqr} e c_{pqr} e η_K é um produto de binômios da forma $(m_1\mu + m_2i)$, com $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Note que para $\mu \in \mathbb{R}, \eta_K(\mu) \neq 0$.

O coeficiente focal g_{110} é nulo, uma vez que a expansão de $\mathcal{Z}\Psi$ não tem termos de grau 2. O coeficiente focal g_{220} é unicamente determinado pelos coeficientes do sistema. Para $K > 2$, os coeficientes focais g_{KK0} dependem das escolhas feitas para os coeficientes ν_{KK0} de $\Psi(x, y, z)$. Ao construirmos uma integral primeira formal para (3.11) a partir de um conjunto determinado de escolhas para ν_{KK0} , anulamos os coeficientes focais correspondentes a essas escolhas. Mostramos agora que a existência desta integral primeira formal implica no anulamento de todos os

coeficientes focais para quaisquer escolhas de ν_{KK0} , generalizando o conceito de *variedade de Bautin* para sistemas em \mathbb{R}^3 . Denotando por (μ, a, b, c) o parâmetro $\mu \neq 0$ e os coeficientes a_{pqr} , b_{pqr} e c_{pqr} do sistema (3.11), enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 3.8. *Dada um conjunto fixo de escolhas de ν_{jj0} , $j \in \mathbb{N}$, sejam $\Psi(x, y, z)$ a série formal associada a estas escolhas e g_{220}, g_{330}, \dots , as funções racionais em (μ, a, b, c) tais que*

$$\mathcal{Z}\Psi = g_{220}(\mu, a, b, c)(xy)^2 + g_{330}(\mu, a, b, c)(xy)^3 + \dots.$$

Então o sistema (3.11) com $(\mu, a, b, c) = (\tilde{\mu}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$ admite integral primeira formal da forma $\tilde{\Psi}(x, y, z) = xy + \dots$ se, e somente se, $g_{kk0}(\tilde{\mu}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Se $g_{kk0}(\tilde{\mu}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) = 0$ para todo $k \geq 2$, então Ψ é integral primeira formal para o sistema (3.11) com $\mu = \tilde{\mu}$ e coeficientes $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$.

Reciprocamente, assumindo a hipótese de que o sistema com coeficientes $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$ e $\mu = \tilde{\mu}$ admita integral primeira formal $\tilde{\Psi}$, suponhamos que existe pelo menos um natural n tal que $g_{nn0}(\tilde{\mu}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) \neq 0$. Tome K o menor natural para o qual $g_{KK0}(\tilde{\mu}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$ seja não nulo. Seja \mathbf{H} a transformação (3.9) que normaliza o sistema, isto é: $\mathbf{x} = \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{h}(\mathbf{x}_1)$. Denotando $F = \Psi \circ \mathbf{H}$, temos que $\mathcal{Z}\Psi$, nas novas variáveis \mathbf{x}_1 , é dado por:

$$\begin{aligned} & (ix_1 + x_1X(x_1y_1)) \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, y_1, z_1) + (-iy_1 + y_1Y(x_1y_1)) \frac{\partial F}{\partial y_1}(x_1, y_1, z_1) \\ & \quad + (-\tilde{\mu}z_1 + z_1Z(x_1y_1)) \frac{\partial F}{\partial z_1}(x_1, y_1, z_1) = \\ & = g_{KK0}(\tilde{\mu}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})[x_1 + h_1(x_1, y_1, z_1)]^K [y_1 + h_2(x_1, y_1, z_1)]^K + \dots \\ & = g_{KK0}(\tilde{\mu}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})(x_1y_1)^K + \dots \end{aligned}$$

Se subtrairmos $x_1X \frac{\partial F}{\partial x_1} + y_1Y \frac{\partial F}{\partial y_1} + z_1Z \frac{\partial F}{\partial z_1}$ de ambos os lados da equação acima, obteremos a equação abaixo:

$$\begin{aligned} & \sum_{|q| \geq 2} (q_1i - q_2i - \tilde{\mu}q_3) F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} = \\ & - \left[\sum_{|q| \geq 2} q_1 F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} \right] \left[\sum_{j=1}^{\infty} X_{j+1,j,0}(x_1y_1)^j \right] - \left[\sum_{|q| \geq 2} q_2 F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} \right] \left[\sum_{j=1}^{\infty} Y_{j,j+1,0}(x_1y_1)^j \right] \\ & - \left[\sum_{|q| \geq 2} q_3 F_q x_1^{q_1} y_1^{q_2} z_1^{q_3} \right] \left[\sum_{j=1}^{\infty} Z_{j,j,1}(x_1y_1)^j \right] + g_{KK0}(\tilde{\mu}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})(x_1y_1)^K + \dots \end{aligned}$$

O argumento de indução usado na demonstração do Teorema 3.4 pode ser aplicado aqui novamente até ordem $2K$ o que significa que podemos escrever os termos de F de grau menor ou igual a $2K$ como função de x_1y_1 apenas. Isto é:

$$\begin{aligned} F(x_1, y_1, z_1) &= f_1[x_1y_1] + f_2[x_1y_1]^2 + \cdots + f_K[x_1y_1]^K + U(x_1, y_1, z_1) = \\ &= f(x_1y_1) + U(x_1, y_1, z_1), \end{aligned}$$

onde U representa os termos de grau $2K + 1$. Daí:

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} = x_1y_1 f'(x_1y_1) + \alpha(x_1, y_1, z_1), \quad y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} = x_1y_1 f'(x_1y_1) + \beta(x_1, y_1, z_1)$$

$$\text{e } \frac{\partial F}{\partial z_1} = \frac{\partial U}{\partial z_1},$$

onde α e β tem termos de ordem no mínimo $2K + 1$. Substituindo as identidades acima na expressão de $\mathcal{Z}\Psi$ nas variáveis \mathbf{x}_1 , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\Psi &= ix_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_1 X(x_1y_1) \frac{\partial F}{\partial x_1} - iy_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + y_1 Y(x_1y_1) \frac{\partial F}{\partial y_1} + (-\tilde{\mu}z_1 + z_1 Z(x_1y_1)) \frac{\partial F}{\partial z_1} = \\ &= x_1y_1 f'(x_1y_1)[X(x_1y_1) + Y(x_1y_1)] + i[\alpha(x_1, y_1, z_1) - \beta(x_1, y_1, z_1)] + \\ &\quad + X(x_1y_1)\alpha(x_1, y_1, z_1) + Y(x_1y_1)\beta(x_1, y_1, z_1) + (-\tilde{\mu}z_1 + z_1 Z(x_1y_1)) \frac{\partial F}{\partial z_1}, \end{aligned}$$

Daí, temos:

$$\begin{aligned} x_1y_1 f'(x_1y_1)[X(x_1y_1) + Y(x_1y_1)] &= \mathcal{Z}\Psi - i[\alpha(x_1, y_1, z_1) - \beta(x_1, y_1, z_1)] + \\ &\quad - X(x_1y_1)\alpha(x_1, y_1, z_1) - Y(x_1y_1)\beta(x_1, y_1, z_1) - (-\tilde{\mu}z_1 + z_1 Z(x_1y_1)) \frac{\partial F}{\partial z_1} = \\ &= g_{KK0}(\tilde{\mu}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})(x_1y_1)^K - i[\alpha(x_1, y_1, z_1) - \beta(x_1, y_1, z_1)] - X(x_1y_1)\alpha(x_1, y_1, z_1) + \\ &\quad - Y(x_1y_1)\beta(x_1, y_1, z_1) - (-\mu z_1 + z_1 Z(x_1y_1)) \frac{\partial F}{\partial z_1} + \cdots. \end{aligned}$$

Denotando por Ω os termos de grau maior ou igual a $2K + 1$, a última equação acima se exprime:

$$x_1y_1 f'(x_1y_1)[X(x_1y_1) + Y(x_1y_1)] = g_{KK0}(\tilde{\mu}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})(x_1y_1)^K + \Omega.$$

Como o sistema admite integral primeira formal da forma $\hat{\Psi}(x, y, z) = xy + \cdots$, pelo Teorema 3.4, as funções X e Y da forma normal (3.12) satisfazem $X + Y \equiv 0$. Assim, concluímos que $g_{KK0}(\tilde{\mu}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$ é nulo, o que contradiz nossa suposição. Logo, $g_{kk0}(\tilde{\mu}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) = 0$ para todo $k \geq 2$. \square

O resultado acima é obtido mesmo sem considerarmos as restrições $a_{pqr} = \bar{b}_{qpr}$ e c_{pqr} tal que $\dot{z} \in \mathbb{R}$ para $y = \bar{x}$ e $z \in \mathbb{R}$ que surgem naturalmente da complexificação do sistema real (3.2). Entretanto, se não consideramos estas restrições, podemos

obter sistemas (3.11) que não correspondem a sistemas da forma (3.2). Uma discussão sobre estes sistemas complexos não provenientes de uma complexificação de sistemas reais é proposta em [12]. Para nossos objetivos, definimos o conjunto de coeficientes admissíveis

$$E = E_{ab} \cap E_c, \text{ onde}$$

$$E_{ab} = \{(\mu, a, b, c) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \mu \in \mathbb{R}^*, a_{pqr} = \bar{b}_{qpr}, \forall (p, q, r) \in \mathbb{N}^3\}$$

$$\text{e } E_c = \{(\mu, a, b, c) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : y = \bar{x} \text{ e } z \in \mathbb{R} \Rightarrow \dot{z} \in \mathbb{R}\},$$

que contém todos os coeficientes para os quais o sistema (3.11) corresponde à complexificação de um sistema real da forma (3.2). Assim, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.9. *Dado um conjunto N de escolhas para ν_{jj0} , sejam Ψ e g_{kk0} a série formal e os coeficientes focais associados a essas escolhas. Para outro conjunto \tilde{N} de escolhas para ν_{jj0} , sejam $\tilde{\Psi}$ e \tilde{g}_{kk0} tais que*

$$\mathcal{Z}\tilde{\Psi} = \tilde{g}_{220}(xy)^2 + \tilde{g}_{330}(xy)^3 + \dots$$

Então, se V é a variedade determinada pelos polinômios $\langle g_2, g_3, \dots \rangle$ numeradores de g_{kk0} e \tilde{V} é a variedade determinada por $\langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_3, \dots \rangle$ numeradores de \tilde{g}_{kk0} , então $V \cap E = \tilde{V} \cap E$.

Demonstração: Seja $(\hat{\mu}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \in V \cap E$. Suponhamos que $(\hat{\mu}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \notin \tilde{V}$. Então existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{g}_K(\hat{\mu}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \neq 0$ e, como $(\hat{\mu}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \in E$, $\tilde{g}_{KK0}(\hat{\mu}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$ é bem definido e é não-nulo. Mas como $(\hat{\mu}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \in V$, o sistema (3.11) com coeficientes $(\hat{\mu}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$ admite Ψ como integral primeira formal. Temos, por hipótese, que

$$\mathcal{Z}\tilde{\Psi} = \tilde{g}_{220}(xy)^2 + \tilde{g}_{330}(xy)^3 + \dots$$

Então, pelo Teorema 3.8, $\tilde{g}_{KK0}(\hat{\mu}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, o que contradiz a suposição. Concluímos que $(\hat{\mu}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \in \tilde{V}$, e conseqüentemente $V \cap E \subset \tilde{V} \cap E$. Analogamente, $V \cap E \supset \tilde{V} \cap E$, e portanto $V \cap E = \tilde{V} \cap E$. \square

Concluímos deste teorema que a variedade afim determinada pelos numeradores dos coeficientes focais é invariante pelas escolhas de ν_{KK0} , $K \in \mathbb{N}$ feitas para construir $\Psi(x, y, z)$, desde que restritas ao conjunto dos coeficientes admissíveis E . Assim, estendemos:

Definição 3.11. *Consideremos o sistema (3.11). Dada uma série formal Ψ tal que $\mathcal{Z}\Psi = g_{220}(xy)^2 + g_{330}(xy)^3 + \dots$. O ideal gerado pelos numeradores dos coeficientes focais g_k é chamado de ideal de Bautin. A interseção da variedade afim V determinada pelo ideal de Bautin e o conjunto dos coeficientes admissíveis E , isto é $V^c = V \cap E$, é chamada de variedade de Bautin do sistema (3.11).*

A Variedade de Bautin é determinada a partir de qualquer série formal $\Psi(x, y, z)$ tal que

$$\mathcal{Z}\Psi = g_{220}(xy)^2 + g_{330}(xy)^3 + \dots$$

Em particular, ao restringirmos as escolhas de ν_{KK0} a valores reais para construirmos uma série formal $H(u, v, w)$ real (Proposição 3.2), os coeficientes focais serão polinômios cujas variáveis são os coeficientes do sistema real (3.2). Assim, resolver o *Problema do Centro-Foco* consiste em determinar os coeficientes reais de (3.2) que pertencem à variedade de Bautin. Em resumo:

Teorema 3.10. *Dado um sistema da forma (3.2), seu campo vetorial \mathcal{F} correspondente e W^c uma variedade central local para este sistema. Então, existe uma variedade de Bautin V^c tal que a origem é um centro para $\mathcal{F}|_{W^c}$ se, e somente se, os coeficientes do sistema estão em V^c .*

Este teorema é consequência imediata dos anteriores.

Uma vez determinada a variedade de Bautin, resolvemos completamente o *Problema do Centro-Foco*. O procedimento prático consiste em determinar os coeficientes focais para as escolhas $\nu_{jj0} = 0$. Pelo Teorema da Base de Hilbert, que também se aplica aos coeficientes focais no caso tridimensional, após um número finito de cálculos, podemos, em teoria, determinar o retrato de fase local do sistema sobre a variedade central. Na prática, devemos aplicar as mesmas três etapas que utilizamos para resolver o *Problema do Centro-Foco* para sistemas planares.

Concluimos este capítulo resolvendo o Problema do centro-foco sobre variedades centrais para o sistema de Lü ([18, 19, 1]).

Exemplo 3.1. Consideremos o sistema de Lü:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = cy - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \quad (3.16)$$

Este sistema tem três pontos de equilíbrio, sendo eles: a origem $O = (0, 0, 0)$, e os pontos $Q_+ = (\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, c)$ e $Q_- = (-\sqrt{bc}, -\sqrt{bc}, c)$, para $bc > 0$. A matriz jacobiana do sistema no ponto O admite apenas autovalores reais e portanto não estudaremos o comportamento das órbitas do sistema em uma vizinhança deste ponto. Entretanto, sob as condições $ab > 0$ e $c = \frac{(a+b)}{3}$, a matriz Jacobiana nos pontos Q_+ e Q_- admite dois autovalores imaginários puros e um autovalor real não-nulo, a saber: $\kappa_1 = i\sqrt{ab}$, $\kappa_2 = -i\sqrt{ab}$ e $\kappa_3 = -2c$. Estudaremos então o comportamento do campo sob essas condições em uma vizinhança de Q_+ . Como o sistema é simétrico em relação ao eixo- z , as conclusões obtidas para Q_+ serão

análogas às de Q_- . Transladando Q_+ para a origem, o sistema fica da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = -\frac{\sqrt{b}\sqrt{a+b}}{\sqrt{3}}z_1 - \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{3}\right)x_1 + \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{3}\right)y_1 - x_1z_1, \\ \dot{z}_1 = \frac{\sqrt{b}\sqrt{a+b}}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{\sqrt{b}\sqrt{a+b}}{\sqrt{3}}y_1 - bz_1 + x_1y_1, \end{cases}$$

nas novas variáveis (x_1, y_1, z_1) . Utilizando os autovetores generalizados da matriz jacobiana do novo sistema, fazemos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3\sqrt{3}a\sqrt{b}\sqrt{a+b}}{4a^2 + 5ab + b^2}u + \frac{(\sqrt{3}\sqrt{ab}\sqrt{a+b} - 2\sqrt{3}a^{3/2}\sqrt{a+b})}{4a^2 + 5ab + b^2}v - \frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{b}\sqrt{a+b}}w, \\ y_1 &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{b}\sqrt{a+b}}{4a+b}u - \frac{2\sqrt{3}\sqrt{a}\sqrt{a+b}}{4a+b}v + \frac{(2b-a)}{2\sqrt{3}\sqrt{b}\sqrt{a+b}}w, \\ z_1 &= u + w, \end{aligned}$$

que deixa o sistema na forma (3.2), isto é:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -v + \frac{9(20a^2 + 7ba - 4b^2)\sqrt{ab}}{(a+4b)(4a+b)^3}u^2 - \frac{3(64a^3 + 60ba^2 - 27b^2a + 4b^3)}{(a+4b)(4a+b)^3}uv + \\ &\quad - \frac{9/4(-b/2+a)\sqrt{a}(a^2 + 3/4ba - b^2)}{\sqrt{b}(a+b/4)^2(a+b)(a+4b)}uw + \frac{6(8a^3 + 18ba^2 - 15b^2a + 2b^3)\sqrt{a}}{(a+4b)(4a+b)^3\sqrt{b}}v^2 + \\ &\quad + \frac{1/2(32a^4 + 44ba^3 + 3b^2a^2 + 56b^3a - 16b^4)}{(a+b)(4a+b)^2(a+4b)b}vw + \frac{1/4\sqrt{a}(a^3 - \frac{21ba^2}{4} - 9b^2a + 4b^3)}{b^{3/2}(a+b/4)(a+b)(a+4b)}w^2, \\ \dot{v} &= u + \frac{144(a+b)^2a}{(a+4b)(4a+b)^3}u^2 - \frac{6\sqrt{a}(16a^3 + 24ba^2 + 27b^2a - 8b^3)}{(a+4b)(4a+b)^3\sqrt{b}}uv + \\ &\quad - \frac{3/2(16a^3 + 24ba^2 - 9b^2a - 44b^3)a}{(a+b)(4a+b)^2(a+4b)b}uw + \frac{54(2a-b)ba}{(a+4b)(4a+b)^3}v^2 + \\ &\quad - \frac{3/2(16a^3 + 12ba^2 + 3b^2a - 20b^3)\sqrt{a}}{(a+b)(4a+b)^2(a+4b)\sqrt{b}}vw - \frac{3/4(8a^2 + 19ba + 20b^2)a}{b(a+b)(4a+b)(a+4b)}w^2, \\ \dot{w} &= \frac{-2(a+b)}{3\sqrt{ab}}w - \frac{18\sqrt{b}\sqrt{a}(8a^2 - 5ba - 4b^2)}{(a+4b)(4a+b)^3}u^2 + \frac{6(16a^3 - 36ba^2 - 21b^2a + 4b^3)}{(a+4b)(4a+b)^3}uv + \\ &\quad + \frac{24(-b/2+a)\sqrt{a}(a-2b)}{(a+4b)(4a+b)^2\sqrt{b}}uw + \frac{72(a+b)\sqrt{a}(-b/2+a)\sqrt{b}}{(a+4b)(4a+b)^3}v^2 + \\ &\quad + \frac{3(16a^2 - 7ba + 4b^2)}{(4a+b)^2(a+4b)}vw + \frac{3/2(5a-4b)\sqrt{a}}{(a+4b)(4a+b)\sqrt{b}}w^2. \end{aligned}$$

Uma vez que o sistema está na forma (3.2), podemos complexificá-lo, e calcular coeficientes focais. Assim, obtemos o primeiro coeficiente focal:

$$g_{220} = \frac{243a^{3/2}\sqrt{b}(2a-b)(a-5b)}{4(4a+b)^2(a^4 + 16a^3b + 60a^2b^2 + 49ab^3 + 4b^4)}.$$

As condições para que g_{220} seja nulo são $b = 2a$ e $b = \frac{a}{5}$. Para a primeira condição, o sistema (3.16) admite um centro em Q_+ . De fato, substituindo a condição acima em (3.16), o sistema fica escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = ay - xz, \\ \dot{z} = -2az + xy. \end{cases}$$

Consideremos $\phi(x, y, z) = x^2 - 2az$ e denotando por \mathcal{F} o campo vetorial associado ao sistema acima, temos: $\mathcal{F}\phi = -2ax^2 + 4a^2z = -2a\phi(x, y, z)$. Logo, a superfície

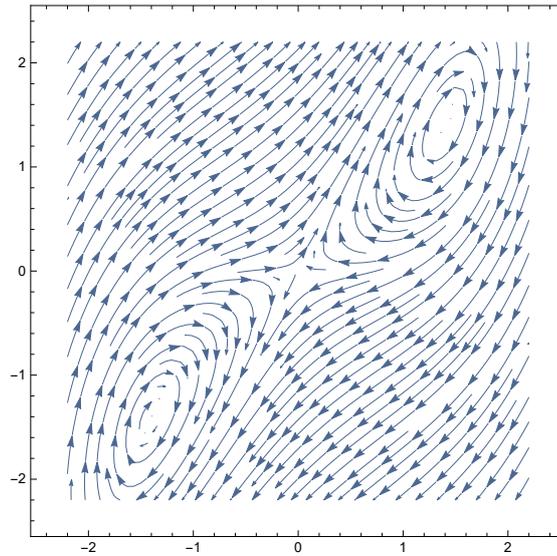


Figura 3.2: Retrato de fase de um sistema de Ljapunov numa vizinhança das singularidades Q_+ e Q_- , com a condição $b = 2a$, sobre a variedade central.

$\mathcal{S} = \phi^{-1}(0)$ dada por $z = \frac{x^2}{2a}$ é invariante pelo sistema. Além disso, os autovetores generalizados da parte linear deste sistema em Q_+ , sob a condição $b = 2a$ são:

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right)^T \text{ e } v_2 = (0, -1, 0)^T.$$

Como $\nabla\Phi(Q_+)$ é ortogonal a $E^c = [v_1, v_2]$, em uma vizinhança da origem, \mathcal{S} é uma variedade central para o sistema de Ljapunov sob a condição $b = 2a$.

Restringindo o sistema a \mathcal{S} , temos:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = ay - \frac{x^3}{2a}. \end{cases}$$

Como a divergência do sistema restrito a \mathcal{S} é nula, o campo associado é Hamiltoniano, e portanto, admite um centro em Q_+ e também, por simetria, em Q_- .

Já a condição $b = \frac{a}{5}$ nos dá um foco, uma vez que o segundo coeficiente focal obtido sob esta condição é $g_{330} = \frac{453125\sqrt{5}}{669536a^4}$. Assim, concluímos que a variedade de Bautin do sistema de Ljapunov é:

$$V^c = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 \neq 0 \text{ e } b = 2a\},$$

e, portanto, o sistema de Ljapunov tem um centro nos pontos de Hopf Q_+ e Q_- se, e somente se, $b = 2a$.

3.5 Coeficientes de Lyapunov do sistema restrito à Variedade Central

Nesta seção, mostramos que os coeficientes focais obtidos pelo Segundo Método de Lyapunov para sistemas tridimensionais são também coeficientes focais para o sistema restrito a uma variedade central. Como consequência, os coeficientes focais do sistema tridimensional são equivalentes aos coeficientes de Lyapunov do sistema restrito.

Teorema 3.11. *Sejam $g_{220}, g_{330}, \dots, g_{kk0}$ coeficientes focais do sistema (3.2). Então estes coeficientes são também coeficientes focais para o sistema (3.2) restrito a uma variedade central.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{F} = (\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})$ o campo vetorial associado ao sistema (3.2), e $H(u, v, w)$ a série formal tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}H &= \frac{\partial H}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial H}{\partial v}\dot{v} + \frac{\partial H}{\partial w}\dot{w} = \\ &= \frac{\partial H}{\partial u}(u, v, w)\tilde{P}(u, v, w) + \frac{\partial H}{\partial v}(u, v, w)\tilde{Q}(u, v, w) + \frac{\partial H}{\partial w}(u, v, w)\tilde{R}(u, v, w) = \\ &= g_{220}(u^2 + v^2)^2 + g_{330}(u^2 + v^2)^3 + \dots + g_{kk0}(u^2 + v^2)^k + \dots \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Variedade Central, existe uma variedade C^r , $r \in \mathbb{N}$ invariante pelo sistema dada por $w = f(u, v)$. Logo, $\frac{\partial f}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial f}{\partial v}\dot{v} = \tilde{R}(u, v, f(u, v))$. Consideremos $\tilde{H}(u, v) = H(u, v, f(u, v))$. Temos que, para o sistema restrito:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}|_{w=f(u,v)}\tilde{H} &= \left. \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial v}\dot{v} \right|_{w=f(u,v)} = \\ &= \frac{\partial H}{\partial u}(u, v, f(u, v))P(u, v, f(u, v)) + \frac{\partial H}{\partial w}(u, v, f(u, v))\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)P(u, v, f(u, v)) + \\ &+ \frac{\partial H}{\partial v}(u, v, f(u, v))Q(u, v, f(u, v)) + \frac{\partial H}{\partial w}(u, v, f(u, v))\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)Q(u, v, f(u, v)) = \\ &= \frac{\partial H}{\partial u}(u, v, f(u, v))P(u, v, f(u, v)) + \frac{\partial H}{\partial v}(u, v, f(u, v))Q(u, v, f(u, v)) + \\ &+ \frac{\partial H}{\partial w}(u, v, f(u, v))R(u, v, f(u, v)) = \\ &= g_{220}(u^2 + v^2)^2 + g_{330}(u^2 + v^2)^3 + \dots + g_{kk0}(u^2 + v^2)^k + \dots \end{aligned}$$

O que prova o resultado. □

Munidos deste teorema e do Teorema 2.5, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 3.1. *Dado um sistema da forma (3.2). Se $L_1, L_2, L_3, \dots, L_k$ são coeficientes de Lyapunov do sistema restrito a uma variedade central, então*

$$L_1 = \pi g_{220} \text{ e } L_{k-1} = \pi g_{kk0} \text{ mod } \langle g_{220}, g_{330}, \dots, g_{k-1, k-1, 0} \rangle.$$

Assim, podemos definir foco de multiplicidade k para sistemas tridimensionais de forma natural:

Definição 3.12. *Dado um sistema da forma (3.11), se existe $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, tal que $g_{k+1,k+1,0} \neq 0$ e $g_{jj0} = 0$, para $j < k$, então dizemos que a origem é um foco de multiplicidade k .*

Outro problema intimamente relacionado com o *Problema do Centro-Foco* é a questão da ciclicidade para pontos de Hopf. No próximo capítulo, estudaremos este problema e sua relação com os coeficientes focais e a variedade de Bautin.

4 Bifurcações de Ciclos Limite a partir de Pontos de Hopf

Proposto no ano de 1900, o *16º Problema de Hilbert* consiste na determinação do número máximo de ciclos limite $H(n)$ (também chamado de número de Hilbert) e suas posições relativas, de um sistema de equações diferenciais polinomial planar de grau n (ver [14, 27]). Este famoso problema, apesar da simplicidade do seu enunciado, ainda continua sem solução, mesmo para o caso $n = 2$. Entretanto, sua existência motivou o desenvolvimento de técnicas sofisticadas de investigação de ciclos limite, bem como versões mais fracas do problema. Dentre estas versões, destacamos a que trata de estimar o número $M(n)$ de ciclos limite de pequena amplitude que bifurcam de um centro ou foco elementares, isto é, sistemas cuja parte linear tem autovalores não reais (ver [30]).

Mostramos neste capítulo algumas técnicas para estudar os ciclos limite que bifurcam de um ponto de Hopf por pequenas perturbações. Mais precisamente, consideramos os sistemas da forma

$$\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}, \lambda), \quad (4.1)$$

no qual $F : U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação analítica para $\mathbf{u} \in U$ e $\lambda \in \Lambda$ onde $U \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, é um aberto contendo a origem e $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ é o espaço de parâmetros. Além disso, $F(0, \lambda) = 0$ e para $m = 2$, $DF_{(0,\lambda)}$ tem autovalores imaginários puros não-nulos para todo $\lambda \in \Lambda$ e para $m = 3$, $DF_{(0,\lambda)}$ tem um par de autovalores imaginários puros e um autovalor real não-nulo. Note que, para cada valor fixado de $\lambda = s$, temos um sistema planar ou tridimensional da forma $\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}, s) = F_s(\mathbf{u})$ cuja origem é um ponto de Hopf.

O número máximo de ciclos limite que bifurcam a partir de um ponto de Hopf por pequenas perturbações dos parâmetros é chamado de *ciclicidade* deste ponto. Nosso objetivo é obter cotas inferiores para a ciclicidade do ponto singular na origem de sistemas da forma (4.1). Primeiramente tratamos do caso planar, e depois estendemos os resultados obtidos para o caso tridimensional.

4.1 Ciclos Limite em Sistemas Planares

Considerando o sistema (4.1) planar, podemos aplicar as mudanças de variáveis e procedimentos descritos na Seção 2.1 e obtemos a função deslocamento que, neste caso, depende analiticamente de $\lambda \in \Lambda$. Isto é:

$$d(\rho_0, \lambda) = v_1(\lambda)\rho_0 + v_2(\lambda)\rho_0^2 + v_3(\lambda)\rho_0^3 + \dots$$

Como os coeficientes de Lyapunov são funções de λ , se houver uma certa liberdade nos valores assumidos por estes coeficientes ao variarmos λ , podemos provocar mudanças de sinal na função deslocamento, criando zeros para esta função, os quais correspondem a ciclos limite para o sistema. Nesta seção, desenvolvemos esta ideia, com base nos resultados e definições de Andronov (capítulo I e IX de [2]), e culminamos em demonstrações para dois teoremas de bifurcação de ciclos limite introduzidos no texto de Christopher em 2007 (Teorema 1.3 de [9]) e no artigo de Han em 1999 (Teorema 2 de [20]). Mais precisamente, o Teorema 4.2 é uma adaptação do resultado de Han e o Teorema 4.3 corresponde ao primeiro item do Teorema 1.3 de Christopher.

Formalizamos agora o conceito de proximidade entre funções e sistemas, justificando a expressão “pequenas perturbações” frequentemente usada na literatura.

Definição 4.1. (δ -Proximidade) Dadas funções $f, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^p com $p > r$ ou analíticas em $V \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que f está δ -próxima de g com rank r em U , $U \subset V$, se para todo ponto de U ,

$$|f - g| < \delta, \text{ e } |D^l f - D^l g| < \delta,$$

para $l = 1, \dots, r$.

Dados sistemas $A : \dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}, \lambda)$ e $B : \dot{\mathbf{u}} = G(\mathbf{u}, \lambda)$, onde F e G são de classe C^p , com $p > r$ ou analíticas em $V \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que A está δ -próximo de B com rank r em U , $U \subset V$, quando cada componente de F é δ -próxima da respectiva componente de G em U .

Teorema 4.1. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de classe C^l , $l > r$, ou analítica em um aberto $U \subset \mathbb{R}$ contendo a origem e tal que:

$$f(0) = 0, \frac{df}{dx}(0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(0) = \dots = \frac{d^{r-1} f}{dx^{r-1}}(0) = 0 \text{ e } \frac{d^r f}{dx^r}(0) \neq 0.$$

Então existem $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tal que toda função g δ_0 -próxima de f com rank r tem no máximo r zeros para $|x| < \varepsilon_0$.

Demonstração: Seja $m = \left| \frac{d^r f}{dx^r}(0) \right|$. Como $m > 0$, por continuidade, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\left| \frac{d^r f}{dx^r}(x) \right| > \frac{m}{2}$, para $|x| < \varepsilon_0$. Seja $\delta_0 = \frac{m}{4}$. Assim, temos que para toda

função g δ_0 -próxima de f com rank r , e todo $|x| < \varepsilon_0$:

$$\left| \frac{d^r f}{dx^r}(x) \right| = \left| \frac{d^r f}{dx^r}(x) - \frac{d^r g}{dx^r}(x) + \frac{d^r g}{dx^r}(x) \right| \leq \left| \frac{d^r f}{dx^r}(x) - \frac{d^r g}{dx^r}(x) \right| + \left| \frac{d^r g}{dx^r}(x) \right|$$

Daí

$$\Rightarrow \left| \frac{d^r g}{dx^r}(x) \right| \geq \left| \frac{d^r f}{dx^r}(x) \right| - \left| \frac{d^r f}{dx^r}(x) - \frac{d^r g}{dx^r}(x) \right| > \frac{m}{2} - \delta_0 = \frac{m}{4}.$$

Suponhamos que exista uma função g que seja δ_0 -próxima com rank r de f e tenha pelo menos $r + 1$ raízes em $|x| < \varepsilon_0$. Pelo Teorema de Rolle, para $j \leq r$, $\frac{d^j g}{dx^j}$ tem pelo menos $r - j + 1$ raízes neste intervalo. Logo $\frac{d^r g}{dx^r}$ se anula em algum ponto \tilde{x} com $|\tilde{x}| < \varepsilon_0$, o que contradiz a desigualdade acima. \square

Com este teorema, podemos dar uma cota superior para o número de ciclos limite que podem surgir de pequenas perturbações nos parâmetros para um foco múltiplo. De fato, a função deslocamento associada ao sistema (4.1) planar é dada, pela expansão em série de potências de ρ_0 por:

$$d(\rho_0, \lambda) = v_1(\lambda)\rho_0 + v_2(\lambda)\rho_0^2 + v_3(\lambda)\rho_0^3 + \dots$$

Para $\lambda = s$ fixo, temos que $\frac{d^k d}{d\rho_0^k}(0, s) = k! v_k(s)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Suponhamos que o sistema correspondente $\mathbf{u} = F_s(\mathbf{u})$ tem um foco de multiplicidade K na origem. Isto é, o primeiro valor focal não nulo é $v_{2K+1}(s) = L_K(s)$. Pelo Teorema 4.1, e pelo Teorema da Dependência Contínua das E.D.O. com relação às Condições Iniciais e Parâmetros, para valores de λ suficientemente próximos de s , as funções deslocamento associadas $d_\lambda(\rho_0) = d(\rho_0, \lambda)$ são δ -próximas de $d_s(\rho_0)$ com rank $2K + 1$ para algum $\delta > 0$, e portanto têm no máximo $2K + 1$ zeros. Um destes zeros é $\rho_0 = 0$ para quaisquer valores de λ . Além disso, como cada ciclo limite de (4.1) intersecciona o eixo- u em dois pontos de abscissas com sinais opostos, temos que K é o número máximo de ciclos limite de (4.1) numa vizinhança da origem.

Estabelecemos agora algumas notações. O sistema (4.1) planar, pode ser escrito após mudanças de variáveis lineares adequadas como:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + P(u, v, \lambda) = -v + P(u, v, \lambda_1, \dots, \lambda_n), \\ \dot{v} = u + Q(u, v, \lambda) = u + Q(u, v, \lambda_1, \dots, \lambda_n), \end{cases} \quad (4.2)$$

onde P e Q são analíticas em $U \times \Lambda$. Adicionamos uma perturbação linear a este sistema dependendo de um parâmetro real λ_0 , isto é, consideramos o sistema analítico em $U \times (\mathbb{R} \times \Lambda)$ abaixo:

$$\begin{cases} \dot{u} = \lambda_0 u - v + P(u, v, \lambda_1, \dots, \lambda_n), \\ \dot{v} = u + \lambda_0 v + Q(u, v, \lambda_1, \dots, \lambda_n), \end{cases} \quad (4.3)$$

Notemos que o coeficiente de Lyapunov L_0 depende apenas de λ_0 , uma vez que $L_0 = e^{2\pi\lambda_0} - 1$. Além disso $L_0 > -1$ para qualquer valor de λ_0 , e $\frac{dL_0}{d\lambda_0}(0) = 2\pi$.

A partir desta discussão, podemos demonstrar o seguinte resultado para a ciclicidade de sistemas (4.2) cuja origem é um foco múltiplo.

Teorema 4.2. (Bifurcação de ciclos limite a partir de um Foco Múltiplo) *Dado um sistema da forma (4.2), seja $s \in \Lambda$ tal que a origem seja um foco de multiplicidade $k > 1$ do sistema para $\lambda = s$. Se os coeficientes de Lyapunov L_1, \dots, L_{k-1} são tais que*

$$\text{rank} \left[\frac{\partial(L_1, \dots, L_{k-1})}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s} = k - 1,$$

então existem variações dos parâmetros do sistema (4.3) que geram k ciclos limite numa vizinhança da origem.

Demonstração: Por hipótese, temos:

$$\text{rank} \left[\frac{\partial(L_1, \dots, L_{k-1})}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s} = k - 1.$$

Logo existem $k - 1$ colunas L.I. da matriz $\left[\frac{\partial(L_1, \dots, L_{k-1})}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s}$. Podemos então renomear as variáveis em Λ de modo que

$$\text{rank} \left[\frac{\partial(L_1, \dots, L_{k-1})}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})} \right]_{\lambda=s} = k - 1.$$

O sistema (4.2) com $\lambda = s$ corresponde ao sistema (4.3) com $(\lambda_0, \lambda) = (0, s)$. Como $\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_0}(0, s) = 2\pi$ e $\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_i}(0, s) = 0$ com $i > 0$, temos:

$$\text{rank} \left[\frac{\partial(L_0, L_1, \dots, L_{k-1})}{\partial(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})} \right]_{(\lambda_0, \lambda)=(0, s)} = k.$$

Escrevemos $s = (s_1, \dots, s_{k-1}, s_k, \dots, s_n)$. Fixamos as outras variáveis $\lambda_i = s_i$ para $i = k, \dots, n$ em $\mathbb{R} \times \Lambda$. Para simplificar as construções que seguem, escrevemos $\tilde{s} = (0, s_1, \dots, s_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ e $\hat{s} = (s_k, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n-k+1}$. Consideremos a aplicação $\mathcal{L} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ dada por $\mathcal{L}(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}) = (L_0, \dots, L_{k-1})$ na qual, para $i = 0, \dots, k$, $L_i = L_i(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}, \hat{s})$. Como $\det(D\mathcal{L}_{\tilde{s}}) \neq 0$, pelo Teorema da Aplicação Inversa, \mathcal{L} é um difeomorfismo local de uma vizinhança V de \tilde{s} .

Consideremos a função deslocamento $d(\rho_0, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \hat{s})$. Como o sistema (4.3) correspondente a $(0, s)$ tem um foco de multiplicidade k na origem, temos que, para ρ_0 suficientemente pequeno,

$$d(\rho_0, \tilde{s}, \hat{s}) = d(\rho_0, 0, s) = L_k(0, s)\rho_0^{2k+1} + O(\rho_0^{2k+2}),$$

com $L_k(0, s) = \tilde{L}_k \neq 0$. Como $\mathcal{L}(\tilde{s}) = 0$, existe $\mu_0 > 0$ tal que $B(0, \mu) \subset \mathcal{L}(V)$ para todo $\mu < \mu_0$. Pelo Teorema da Dependência Contínua das E.D.O. com relação às

Condições Iniciais e Parâmetros, existe $\mu > 0$ tal que a função deslocamento d é analítica para $(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}) \in \mathcal{L}^{-1}(B(0, \mu))$ e $|\rho_0| < r^*$, com $r^* > 0$ pequeno o suficiente. Pelo Teorema 4.1, existe $\varepsilon_0 > 0$ e uma vizinhança W de \tilde{s} tal que para todo $(\tilde{\lambda}_0, \dots, \tilde{\lambda}_{k-1}) \in W$, $d(\rho_0, \tilde{\lambda}_0, \dots, \tilde{\lambda}_{k-1}, \hat{s})$ tem no máximo $2k + 1$ raízes para $|\rho_0| < \varepsilon_0$. Seja $\tilde{V} = W \cap \mathcal{L}^{-1}(B(0, \mu))$ e $r = \min\{r^*, \varepsilon_0\}$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\tilde{L}_k > 0$. Logo como

$$d_{\tilde{s}}(\rho_0) = d(\rho_0, \tilde{s}, \hat{s}) = \tilde{L}_k \rho_0^{2k+1} + O(\rho_0^{2k+2}),$$

para valores suficientemente pequenos de ρ_0 , $d_{\tilde{s}}(\rho_0) > 0$. Seja r_0 um desses valores, tal que $r_0 < r$. Daí, $d_{\tilde{s}}(r_0) > 0$.

Como $d(r_0, \tilde{s}, \hat{s}) > 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $d(r_0, \mathbf{l}, \hat{s}) > 0$ para todo $\mathbf{l} \in B(\tilde{s}, \varepsilon_0) \cap \tilde{V}$. Pela continuidade de \mathcal{L}^{-1} , podemos tomar $\mathbf{L}_1 = (0, \dots, \tilde{L}_{k-1})$ com $\tilde{L}_{k-1} < 0$ e $\|\mathbf{L}_1\| = |\tilde{L}_{k-1}| < \tilde{L}_k$ pequeno o suficiente para que $\mathbf{l}_1 = \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{L}_1) \in B(\tilde{s}, \varepsilon_0) \cap \tilde{V}$. Obtemos assim \mathbf{l}_1 , cuja função deslocamento $d_{\mathbf{l}_1}$ associada ao sistema $\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}, (\mathbf{l}_1, \hat{s}))$ é dada, pela fórmula de Taylor para valores suficientemente pequenos de ρ_0 , por:

$$d_{\mathbf{l}_1}(\rho_0) = d(\rho_0, \mathbf{l}_1, \hat{s}) = \tilde{L}_{k-1} \rho_0^{2k-1} + O(\rho_0^{2k}).$$

Para valores positivos pequenos o suficiente de ρ_0 , $d_{\mathbf{l}_1}(\rho_0) < 0$. Seja r_1 um desses valores, tal que $r_1 < r_0$. Assim, $d_{\mathbf{l}_1}(r_0) > 0$ e $d_{\mathbf{l}_1}(r_1) < 0$.

Agora, como $d(r_1, \mathbf{l}_1, \hat{s}) < 0$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $d(r_1, \mathbf{l}, \hat{s}) < 0$ para todo $\mathbf{l} \in B(\mathbf{l}_1, \varepsilon_1) \cap B(\tilde{s}, \varepsilon_0) \cap \tilde{V}$. Analogamente ao argumento anterior, podemos tomar $\mathbf{L}_2 = (0, \dots, \tilde{L}_{k-2}, \tilde{L}_{k-1})$ com $\tilde{L}_{k-2} > 0$ e $\|\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1\| = |\tilde{L}_{k-2}| < |\tilde{L}_{k-1}|$ pequeno o suficiente para que $\mathbf{l}_2 = \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{L}_2) \in B(\mathbf{l}_1, \varepsilon_1) \cap B(\tilde{s}, \varepsilon_0) \cap \tilde{V}$. Assim, obtemos \mathbf{l}_2 , cuja função deslocamento $d_{\mathbf{l}_2}$ associada ao sistema $\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}, (\mathbf{l}_2, \hat{s}))$ é dada por:

$$d_{\mathbf{l}_2}(\rho_0) = d(\rho_0, \mathbf{l}_2, \hat{s}) = \tilde{L}_{k-2} \rho_0^{2k-3} + O(\rho_0^{2k-2}),$$

e para valores positivos pequenos o suficiente de ρ_0 , $d_{\mathbf{l}_2}(\rho_0) > 0$. Seja r_2 um desses valores, tal que $r_2 < r_1$. Assim, $d_{\mathbf{l}_2}(r_0) > 0$, $d_{\mathbf{l}_2}(r_1) < 0$ e $d_{\mathbf{l}_2}(r_2) > 0$.

Continuamos com este procedimento e obtemos os parâmetros $\mathbf{l}_i \in \tilde{V}$, $i = 1, \dots, k$ de modo que $\mathcal{L}(\mathbf{l}_k) = \mathbf{L}_k = (\tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_{k-1})$ com $\tilde{L}_i \tilde{L}_{i-1} < 0$ e $|\tilde{L}_{i-1}| < |\tilde{L}_i|$. Também obtemos os valores positivos r_i , com $r_i < r_{i+1}$ de modo que:

$$d_{\mathbf{l}_k}(r_0) > 0, d_{\mathbf{l}_k}(r_1) < 0, d_{\mathbf{l}_k}(r_2) > 0, \dots$$

Assim, pela continuidade da função deslocamento, entre os valores r_{i-1} e r_i há pelo menos um zero de $d_{\mathbf{l}_k}$ e conseqüentemente, pelo menos um ciclo limite. Logo, o sistema (4.3) correspondente ao parâmetro (\mathbf{l}_k, \hat{s}) tem no mínimo k ciclos limite

em uma vizinhança da origem. Mas como $1_k \in \tilde{V}$, sua cota superior de ciclos limite é k . Portanto, este sistema tem exatamente k ciclos limite. \square

Observação 4.1. Para focos de multiplicidade 1, a matriz das hipóteses do teorema acima não é definida. Entretanto, temos:

$$\text{rank} \left[\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_0} \right]_{(\lambda_0, \lambda) = (0, s)} = 1,$$

e podemos aplicar o argumento do restante da demonstração acima normalmente. Assim, para focos de multiplicidade 1, existem variações dos parâmetros do sistema (4.3) que geram 1 ciclo limite, e o Teorema 4.2 vale mesmo para $k = 1$. O que é esperado, uma vez que nesta situação temos as hipóteses do Teorema da Bifurcação de Hopf (ver página 352 de [22]).

O teorema acima nos dá uma condição sobre os coeficientes de Lyapunov para determinarmos a ciclicidade de um foco múltiplo, mais precisamente sobre suas partes lineares em relação aos parâmetros λ . A independência das partes lineares dos coeficientes de Lyapunov, isto é o posto da matriz $\left[\frac{\partial(L_1, \dots, L_{k-1})}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s}$, indica que existem bifurcações do sistema (4.3) que geram ciclos limite. Podemos explorar a mesma ideia para estudar a bifurcação de ciclos limite a partir de um centro. Isto se traduz no seguinte teorema:

Teorema 4.3. (Bifurcação de ciclos limite a partir de um Centro) *Dado o sistema (4.2). Seja s um ponto da variedade de Bautin V^c . Se os coeficientes de Lyapunov L_1, \dots, L_k são tais que*

$$\text{rank} \left[\frac{\partial(L_1, \dots, L_k)}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s} = k,$$

então existem variações dos parâmetros do sistema (4.3) que produzem k ciclos limite numa vizinhança da origem.

Demonstração: Pelo mesmo argumento da demonstração do Teorema 4.2, podemos renomear as variáveis em Λ de modo que

$$\text{rank} \left[\frac{\partial(L_0, L_1, \dots, L_k)}{\partial(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)} \right]_{(\lambda_0, \lambda) = (0, s)} = k + 1.$$

Como no Teorema 4.2, utilizamos as notações $s = (s_1, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots, s_n)$, $\tilde{s} = (0, s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ e $\hat{s} = (s_{k+1}, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$. Fixando as outras variáveis $\lambda_i = s_i$ para $i = k + 1, \dots, n$, consideramos a aplicação $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ dada por $\mathcal{L}(\lambda_0, \dots, \lambda_k) = (L_0, \dots, L_k)$ onde $L_i = L_i(\lambda_0, \dots, \lambda_k, \hat{s})$ com $i = 0, \dots, k$. Temos que $\det D\mathcal{L}_{\tilde{s}} \neq 0$ e pelo Teorema da Aplicação Inversa, \mathcal{L} é um difeomorfismo local de uma vizinhança V de \tilde{s} .

Como s é um ponto de V^c , $\mathcal{L}(\hat{s}) = 0$ e portanto, existe $\mu_0 > 0$ tal que $B(0, \mu) \subset \mathcal{L}(V)$ para todo $\mu < \mu_0$. O Teorema da Dependência Contínua das E.D.O. com relação às Condições Iniciais e Parâmetros garante a existência de $\mu > 0$ tal que a função deslocamento d é analítica para $(\lambda_0, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{L}^{-1}(B(0, \mu))$ e ρ_0 suficientemente pequeno.

Tomemos $\mathbf{L}_0 = (0, \dots, \tilde{L}_k)$ com $0 < \tilde{L}_k < \mu$. Como $\mathbf{L}_0 \in B(0, \mu)$, existe $\mathbf{l}_0 = \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{L}_0)$. A função deslocamento corresponde a \mathbf{l}_0 é dada por

$$d_{\mathbf{l}_0}(\rho_0) = d(\rho_0, \mathbf{l}_0, \hat{s}) = \tilde{L}_k \rho_0^{2k+1} + O(\rho_0^{2k+2}).$$

Escrevemos $\mathbf{l}_0 = (l_0, l_1, \dots, l_k)$. Como $L_0 = e^{2\pi l_0} - 1$ e $L_0(\mathbf{l}_0, \hat{s}) = 0$, segue que $l_0 = 0$. Assim, o sistema (4.3) correspondente ao parâmetro (\mathbf{l}_0, \hat{s}) é equivalente ao sistema (4.2) com $\lambda = (l_1, \dots, l_k, \hat{s})$, o qual tem um foco de multiplicidade k na origem. Pelo Teorema 4.2, há valores dos parâmetros deste sistema que tem k ciclos limite em uma vizinhança da origem. \square

Observação 4.2. O método apresentado aqui é eficiente para bifurcar ciclos limite a partir de centros e focos. Para focos múltiplos, este método determina precisamente a ciclicidade do ponto singular, enquanto que para centros obtemos apenas uma cota inferior, uma vez que o Teorema 4.1 não se aplica. Por este motivo, por vezes na literatura, a ciclicidade estimada pelo Teorema 4.3, mais precisamente, o número de ciclos limite que bifurcam de um ponto de Hopf indicado pelo posto da matriz $\left[\frac{\partial(L_1, \dots, L_k)}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s}$ é chamado de *ciclicidade linear* (ver, por exemplo [16]). Para um sistema polinomial de grau n , denotando a ciclicidade linear por $M_l(n)$, temos que $M_l(n) \leq M(n) \leq H(n)$.

As hipóteses dos teoremas 4.2 e 4.3 são enunciadas em termos dos coeficientes de Lyapunov cuja obtenção, por vezes, é uma tarefa computacionalmente impraticável. Entretanto, podemos substituir os coeficientes de Lyapunov pelos coeficientes focais nestes teoremas, o que é mais conveniente do ponto de vista computacional. A proposição a seguir nos permite realizar tal substituição.

Proposição 4.1. *Dado um sistema da forma (4.2), $k \in \mathbb{N}$ e $s \in \Lambda$ tal que os coeficientes de Lyapunov satisfaçam $L_1(s) = L_2(s) = \dots = L_{k-1}(s) = 0$. Então*

$$\text{rank} \left[\frac{\partial(g_{22}, \dots, g_{kk})}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s} = \text{rank} \left[\frac{\partial(L_1, \dots, L_{k-1})}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s}.$$

Demonstração: Pelo Teorema 2.5, temos que $L_1(s) = \pi g_{22}(s)$ e para $j > 2$,

$$L_{j-1}(s) = \pi g_{jj}(s) + \sum_{i=2}^{j-1} p_i^j(s) g_{ii}(s),$$

onde p_i^j são polinômios em λ . Conseqüentemente, $g_{22}(s) = \dots = g_{kk}(s) = 0$. Derivando as equações acima e avaliando em $\lambda = s$, temos:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_l}(s) = \pi \frac{\partial g_{22}}{\partial \lambda_l}(s), \quad \mathbf{e}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{j-1}}{\partial \lambda_l}(s) &= \pi \frac{\partial g_{jj}}{\partial \lambda_l}(s) + \sum_{i=2}^{j-1} \left[p_i^j(s) \frac{\partial g_{ii}}{\partial \lambda_l}(s) + \frac{\partial p_i^j}{\partial \lambda_l}(s) g_{ii}(s) \right] = \\ &= \pi \frac{\partial g_{jj}}{\partial \lambda_l}(s) + \sum_{i=2}^{j-1} \left[p_i^j(s) \frac{\partial g_{ii}}{\partial \lambda_l}(s) \right], \end{aligned}$$

para $l = 1, \dots, n$. Daí, podemos escrever

$$\left[\frac{\partial(L_1, \dots, L_{k-1})}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s} = \underbrace{\begin{bmatrix} \pi & 0 & \dots & 0 \\ p_2^3(s) & \pi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_2^k(s) & p_3^k(s) & \dots & \pi \end{bmatrix}}_M \left[\frac{\partial(g_{22}, \dots, g_{kk})}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s}.$$

Como a matriz M é triangular superior, seu posto é máximo e, conseqüentemente,

$$\text{rank} \left[\frac{\partial(g_{22}, \dots, g_{kk})}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s} = \text{rank} \left[\frac{\partial(L_1, \dots, L_{k-1})}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s}.$$

□

Munidos destas proposições, podemos enunciar os teoremas 4.2 e 4.3 em termos dos coeficientes focais:

Corolário 4.1. *Dado um sistema da forma (4.2), seja $s \in \Lambda$ tal que os coeficientes focais $g_{22}, \dots, g_{k+1,k+1}$, são tais que $g_{22}(s) = \dots = g_{kk}(s) = 0$ e $g_{k+1,k+1}(s) \neq 0$. Se*

$$\text{rank} \left[\frac{\partial(g_{22}, \dots, g_{kk})}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s} = k - 1,$$

então existem variações dos parâmetros do sistema (4.3) que geram k ciclos limite numa vizinhança da origem.

Corolário 4.2. *Dado o sistema (4.2). Seja s um ponto da variedade de Bautin V^c . Se os coeficientes focais $g_{22}, \dots, g_{k+1,k+1}$ são tais que*

$$\text{rank} \left[\frac{\partial(g_{22}, \dots, g_{k+1,k+1})}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s} = k,$$

então existem variações dos parâmetros do sistema (4.3) que produzem k ciclos limite numa vizinhança da origem.

Estes resultados para obtenção de ciclos limite em sistemas planares têm sido usados recentemente para obter cotas inferiores para o número de Hilbert, como exemplificado no artigo de Torregrosa [16]. A partir da teoria desenvolvida no Capítulo 3, podemos estender naturalmente os teoremas acima para sistemas tridimensionais. A próxima seção trata precisamente desta extensão.

4.2 Ciclos Limite em Sistemas Tridimensionais

Trabalhamos agora com o sistema (4.1) tridimensional. Podemos escrevê-lo após as mudanças de variáveis lineares adequadas como:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + P(u, v, w, \lambda) = -v + P(u, v, w, \lambda_1, \dots, \lambda_n), \\ \dot{v} = u + Q(u, v, w, \lambda) = u + Q(u, v, w, \lambda_1, \dots, \lambda_n), \\ \dot{w} = -\mu w + R(u, v, w, \lambda) = -\mu w + R(u, v, w, \lambda_1, \dots, \lambda_n), \end{cases} \quad (4.4)$$

onde P , Q e R são analíticas em $U \times \Lambda$. Podemos estender o espaço dos parâmetros Λ para englobar os valores de μ , uma vez que perturbações neste parâmetro podem potencialmente gerar ciclos limite. Assim, para sistemas da forma (4.4), consideraremos o espaço de parâmetros $\Lambda \subset \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^n$. Análogo ao desenvolvido na seção anterior, podemos adicionar uma perturbação linear a este sistema, obtendo:

$$\begin{cases} \dot{u} = \lambda_0 u - v + P(u, v, w, \lambda_1, \dots, \lambda_n), \\ \dot{v} = u + \lambda_0 v + Q(u, v, w, \lambda_1, \dots, \lambda_n), \\ \dot{w} = -\mu w + R(u, v, w, \lambda_1, \dots, \lambda_n). \end{cases} \quad (4.5)$$

Se for possível provar uma equivalência entre os coeficientes focais e coeficientes de Lyapunov também para sistemas tridimensionais, os teoremas 4.3 e 4.2 serão facilmente estendidos para \mathbb{R}^3 . Felizmente, tal equivalência existe, e provamos a seguir:

Teorema 4.4. *Considere o sistema (4.4). Dado um inteiro positivo $k > 2$, vale a seguinte equivalência:*

$$L_1 = \pi g_{220} \text{ e } L_{k-1} = \pi g_{kk0} \pmod{\langle g_{220}, g_{330}, \dots, g_{k-1, k-1, 0} \rangle},$$

isto é, $L_{k-1} = \pi g_{kk0}$ quando $g_{220} = g_{330} = \dots = g_{k-1, k-1, 0} = 0$.

Demonstração: Seja Ψ a série formal obtida pelo Segundo Método de Lyapunov, isto é:

$$\Psi(x, y, z) = xy + \sum_{p+q+r \geq 3} \nu_{pqr} x^p y^q z^r = \sum_{j \geq 2} \psi_j(x, y, z),$$

onde $\psi_j(x, y, z)$ são polinômios homogêneos de grau j em x, y e z . Consideremos a função $\hat{\Psi} = xy + \sum_{j=3}^{2N+1} \psi_j(x, y, z)$ obtida truncando a série Ψ até ordem $2N + 1$,

com $N > k$. Consideramos a solução φ do sistema (3.6) associado a (4.4) nas coordenadas $u = \rho \cos \theta$, $v = \rho \sin \theta$ e $w = \rho \omega$ apresentadas na Seção 3.2 com condições iniciais $(\rho_0, \tilde{\omega})$, isto é, $\varphi(\theta, \rho_0, \tilde{\omega}) = (\rho(\theta, \rho_0, \tilde{\omega}), \omega(\theta, \rho_0, \tilde{\omega}))$, onde $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\rho_0)$ é a função determinada pelo Lema 3.1. Determinemos a variação total de $\hat{\Psi}$ para θ variando de 0 a 2π . Para simplificar a escrita, denotemos $\rho(\theta) = \rho(\theta, \rho_0, \tilde{\omega})$ e $\omega(\theta) = \omega(\theta, \rho_0, \tilde{\omega})$. Temos:

$$\begin{aligned} & \hat{\Psi}(\rho(2\pi)e^{i2\pi}, \rho(2\pi)e^{-i2\pi}, \rho(2\pi)\omega(2\pi)) - \hat{\Psi}(\rho(0)e^{i0}, \rho(0)e^{-i0}, \rho(0)\omega(0)) = \\ & = \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(\rho(2\pi), \rho(2\pi), \rho(2\pi)\omega(2\pi)) - \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(\rho(0), \rho(0), \rho(0)\omega(0)) = \\ & = \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(1, 1, \omega(2\pi))\rho^j(2\pi) - \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(1, 1, \tilde{\omega})\rho_0^j \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1, $\omega(2\pi) = \omega(2\pi, \rho_0, \tilde{\omega}) = \tilde{\omega}$. Assim, a igualdade acima pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(1, 1, \tilde{\omega})(\rho^j(2\pi) - \rho_0^j) &= \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(1, 1, \tilde{\omega})(\rho(2\pi) - \rho_0) \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-1-l}(2\pi)\rho_0^l = \\ &= (\rho(2\pi) - \rho_0) \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(1, 1, \tilde{\omega}) \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-1-l}(2\pi)\rho_0^l. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Observemos que $\rho(2\pi) - \rho_0$ é a aplicação deslocamento reduzida $\mathbf{d}(\rho_0)$. Além disso, como o sistema (4.4) corresponde ao sistema (4.5) com $\lambda_0 = 0$, temos que o valor focal v_1 é nulo e $\rho(\theta) = \rho_0 + u_2(\theta)\rho_0 + \dots$. Assim, temos que $\rho(2\pi) = \rho(2\pi, \rho_0, \tilde{\omega}) = \mathbf{d}(\rho_0) + \rho_0 = \rho_0 + v_3\rho_0^3 + \dots$. Substituindo acima, obtemos:

$$\begin{aligned} & (\rho(2\pi) - \rho_0) \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(1, 1, \tilde{\omega}) \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-1-l}(2\pi)\rho_0^l = \\ & = \mathbf{d}(\rho_0) \sum_{j=2}^{2N+1} \psi_j(1, 1, \tilde{\omega})(j\rho_0^{j-1} + O(\rho_0^j)) = \\ & = \mathbf{d}(\rho_0)(\psi_2(1, 1, \tilde{\omega})2\rho_0 + O(\rho_0^2)) = \\ & = \mathbf{d}(\rho_0)(2\rho_0 + O(\rho_0^2)) = \sum_{j=3}^{\infty} v_j\rho_0^j(2\rho_0 + O(\rho_0^2)) = \\ & = \sum_{j=3}^{\infty} 2v_j\rho_0^{j+1}(1 + O(\rho_0)). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Por outro lado, podemos escrever:

$$\begin{aligned} & \hat{\Psi}(\rho(2\pi)e^{i2\pi}, \rho(2\pi)e^{-i2\pi}, \rho(2\pi)\omega(2\pi)) - \hat{\Psi}(\rho(0)e^{i0}, \rho(0)e^{-i0}, \rho(0)\omega(0)) = \\ & \int_0^{2\pi} \frac{d\hat{\Psi}}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\hat{\Psi}}{dt} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{j=2}^N g_{jj0} \rho^{2j}(\theta) \frac{dt}{d\theta} d\theta = \\ & = \int_0^{2\pi} \sum_{j=2}^N g_{jj0} (\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \dots)^{2j} (1 + \tilde{u}_1(\theta)\rho_0 + \tilde{u}_2(\theta)\rho_0^2 + \dots) d\theta. \quad (4.8) \end{aligned}$$

O termo $(1 + \tilde{u}_1(\theta)\rho_0 + \tilde{u}_2(\theta)\rho_0^2 + \dots)$ acima corresponde a $\frac{dt}{d\theta}$ o qual obtemos a partir da expansão de $\dot{\theta}$ na equação (3.5). Note que para cada índice j , existe um termo $g_{jj0}\rho_0^{2j}$ dentro da integral o qual não depende de θ . Assim, ao integrarmos de 0 a 2π , obtemos $2\pi g_{jj0}\rho_0^{2j}$. Para os outros termos da integral que dependem de θ , obtemos outras expressões envolvendo g_{jj0} menos elementares, que expressamos por $g_{jj0}(f_{j,1}\rho_0^{2j+1} + f_{j,2}\rho_0^{2j+2} + \dots)$. Daí,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \sum_{j=2}^N g_{jj0} (\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \dots)^{2j} (1 + \tilde{u}_1(\theta)\rho_0 + \tilde{u}_2(\theta)\rho_0^2 + \dots) d\theta = \\ & = \sum_{j=2}^N 2\pi g_{jj0} \rho_0^{2j} + g_{jj0}(f_{j,1}\rho_0^{2j+1} + f_{j,2}\rho_0^{2j+2} + \dots) + O(\rho_0^{2N+2}). \quad (4.9) \end{aligned}$$

De (4.6),(4.7),(4.8) e (4.9), temos:

$$\sum_{j=3}^{\infty} 2v_j \rho_0^{j+1} (1 + O(\rho_0)) = \sum_{j=2}^N 2\pi g_{jj0} \rho_0^{2j} + g_{jj0}(f_{j,1}\rho_0^{2j+1} + f_{j,2}\rho_0^{2j+2} + \dots) + O(\rho_0^{2N+2}).$$

Da equação acima, ao compararmos potências iguais de ρ_0 , concluímos a equivalência, como no Teorema (2.5). \square

A partir deste teorema, temos como consequência o seguinte resultado que é uma extensão da Proposição 4.1 para o caso tridimensional e cuja demonstração é idêntica.

Corolário 4.3. *Dado um sistema da forma (4.4), $k \in \mathbb{N}$ e $s \in \Lambda$ tal que os coeficientes de Lyapunov satisfaçam $L_1(s) = L_2(s) = \dots = L_{k-1}(s) = 0$. Então*

$$\text{rank} \left[\frac{\partial(g_{220}, \dots, g_{kk0})}{\partial(\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s} = \text{rank} \left[\frac{\partial(L_1, \dots, L_{k-1})}{\partial(\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s}.$$

Uma vez que o papel dos coeficientes de Lyapunov para sistemas tridimensionais é o mesmo que seus análogos para sistemas planos, também podemos enunciar os seguintes teoremas para ciclicidade em \mathbb{R}^3 :

Teorema 4.5. (Bifurcação de ciclos limite a partir de um Foco Múltiplo) Dado um sistema da forma (4.4), seja $s \in \Lambda$ tal que a origem é um foco de multiplicidade $k \geq 1$ do sistema para $\lambda = s$. Se uma das seguintes condições equivalentes são satisfeitas:

$$(i) \quad \text{rank} \left[\frac{\partial(L_1, \dots, L_{k-1})}{\partial(\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s} = k - 1;$$

$$(ii) \quad \text{rank} \left[\frac{\partial(g_{220}, \dots, g_{kk0})}{\partial(\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s} = k - 1,$$

então existem variações dos parâmetros do sistema do sistema (4.5) que geram k ciclos limite numa vizinhança da origem.

Teorema 4.6. (Bifurcação de ciclos limite a partir de um Centro) Dado o sistema (4.4). Seja s um ponto da variedade de Bautin V^c . Se uma das seguintes condições equivalentes são satisfeitas:

$$(i) \quad \text{rank} \left[\frac{\partial(L_1, \dots, L_k)}{\partial(\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s} = k;$$

$$(ii) \quad \text{rank} \left[\frac{\partial(g_{220}, \dots, g_{k+1,k+1,0})}{\partial(\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_n)} \right]_{\lambda=s} = k,$$

então existem perturbações do sistema (4.3) que produzem k ciclos limite numa vizinhança da origem.

Ressaltamos que as demonstrações dos teoremas acima são idênticas às dos teoremas 4.2 e 4.3. Além disso, como no caso planar, para focos múltiplos, a ciclicidade é precisamente determinada pelo Teorema 4.5 e para centros, o Teorema 4.6 nos dá uma estimativa (ver sistema de Moon-Rand na Seção 5.2). Notemos que as condições exigidas nestes teoremas recaem sobre as derivadas dos coeficientes focais (ou de Lyapunov) em relação aos parâmetros λ . Como estes coeficientes são analíticos em λ , podemos expandí-los em série de Taylor em torno de $\lambda = s$, isto é:

$$L_k(\lambda) = L_k(s) + \alpha_{k,1}[\lambda_1 - s_1] + \dots + \alpha_{k,n}[\lambda_n - s_n] + O([\lambda - s]^2),$$

$$g_{kk0}(\lambda) = g_{kk0}(s) + \beta_{k,1}[\lambda_1 - s_1] + \dots + \beta_{k,n}[\lambda_n - s_n] + O([\lambda - s]^2),$$

onde $\frac{\partial L_k}{\partial \lambda_i}(s) = \alpha_{k,i}$ e $\frac{\partial g_{kk0}}{\partial \lambda_i}(s) = \beta_{k,i}$. Assim, as condições descritas nos teoremas 4.2, 4.3, 4.5 e 4.6 são de fato condições sobre as partes lineares dos coeficientes focais (ou de Lyapunov) em sua expansão de Taylor em torno de $\lambda = s$. Tendo isso em mente, na próxima seção, descrevemos um método para obter tais partes lineares de modo computacionalmente mais rápido.

4.3 O Método da Paralelização

Em teoria, os resultados obtidos até aqui nos permitem estudar a ciclicidade para sistemas analíticos por meio dos coeficientes focais. Entretanto, é natural que quanto maior for a quantidade de parâmetros de perturbação, isto é, quanto maior for a dimensão de Λ , maior será o tempo computacional e a memória consumida para se calcular os coeficientes focais, suas partes lineares em relação a λ e o posto da matriz que as contém. Mesmo utilizando máquinas com grande desempenho, ao trabalharmos com sistemas polinomiais de grau maior que dois, o processo de obtenção de grandes quantidades de coeficientes focais pode levar meses ou até ser impraticável. Visando reduzir o tempo computacional e otimizar a memória das máquinas, Liang e Torregrosa desenvolveram o *Método da Paralelização* apresentado em [16]. Em linhas gerais, o método da paralelização consiste em obter as partes lineares dos coeficientes focais de um sistema dado a partir de subsistemas mais simples, semelhante ao *princípio da superposição* utilizado para resolver equações diferenciais ordinárias homogêneas.

Teorema 4.7. (Método da Paralelização) *Considere o sistema $\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u})$ onde $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, é uma aplicação analítica no aberto $U \ni 0$ tal que a origem é um ponto de Hopf deste sistema. Sejam $Q_j : \mathbb{R}^m \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicações analíticas cujas expansões em séries de potências em \mathbf{u} tenham termos de grau no mínimo 2 e tais que $Q_j(0, \lambda) \equiv 0$ e $Q_j(\mathbf{u}, 0) \equiv 0$ com $j = 1, \dots, r$. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, se $g_{kk0}^{Q_j}$ é coeficiente focal de*

$$\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}) + Q_j(\mathbf{u}, \lambda), \quad j = 1, \dots, r,$$

então a parte linear na expansão em série de potências em torno de $\lambda = 0$ de $a_1 g_{kk0}^{Q_1} + \dots + a_r g_{kk0}^{Q_r}$ é a parte linear na expansão em série de potências em torno de $\lambda = 0$ do coeficiente focal g_{kk0} do sistema

$$\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}) + a_1 Q_1(\mathbf{u}, \lambda) + \dots + a_r Q_r(\mathbf{u}, \lambda),$$

onde a_1, \dots, a_r são constantes reais fixas.

Demonstração: Por conveniência, denotemos $\sigma_k^j = g_{kk0}^{Q_j}$. Para cada sistema da forma $\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}) + Q_j(\mathbf{u}, \lambda)$, a origem é um ponto de Hopf. Denotamos por \mathcal{F}^{Q_j} o campo vetorial associado e por H^{Q_j} a série formal real da qual obtemos os coeficientes focais pelo segundo método de Lyapunov (seções 2.2 e 3.4). Assim, para cada $j = 1, \dots, r$:

$$\mathcal{F}^{Q_j} H^{Q_j} = \sum_{k \geq 2} \sigma_k^j (u^2 + v^2)^k \quad (4.10)$$

Como cada Q_j é analítica em $\lambda = 0$, podemos expandir a expressão de \mathcal{F}^{Q_j} em série de potências em torno de $\lambda = 0$. Além disso, também é possível fazer tal expansão para H^{Q_j} . Escrevemos:

$$\mathcal{F}^{Q_j} = \mathcal{F}_0^{Q_j} + \mathcal{F}_1^{Q_j} + \mathcal{F}_2^{Q_j} + \dots \quad \text{e} \quad H^{Q_j} = H_0^{Q_j} + H_1^{Q_j} + H_2^{Q_j} + \dots$$

onde $\mathcal{F}_l^{Q_j}$ e $H_l^{Q_j}$ denotam o l -ésimo termo da expansão descrita acima. Como $\mathcal{F}_0^{Q_j}$ e $H_0^{Q_j}$ não dependem de λ , escrevemos $\mathcal{F}_0^{Q_j} = \mathcal{F}_0$ e $H_0^{Q_j} = H_0$ para todo $j = 1, \dots, r$. Denotemos por $\sigma_{k,1}^j$ a parte linear de σ_k^j na expansão em série de potências em torno de $\lambda = 0$. Daí, de (4.10),

$$\mathcal{F}_0 H_1^{Q_j} + \mathcal{F}_1^{Q_j} H_0 = \sum_{k \geq 2} \sigma_{k,1}^j (u^2 + v^2)^k. \quad (4.11)$$

Consideremos agora o campo vetorial $\tilde{\mathcal{F}}$ associado ao sistema

$$\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}) + a_1 Q_1(\mathbf{u}, \lambda) + \dots + a_r Q_r(\mathbf{u}, \lambda).$$

Notemos que a parte linear na expansão em série de potências de $\tilde{\mathcal{F}}$ em torno de $\lambda = 0$ é $a_1 \mathcal{F}_1^{Q_1} + \dots + a_r \mathcal{F}_1^{Q_r}$. Para obter os coeficientes focais desse sistema, construímos uma série formal \tilde{H} de modo que $\tilde{\mathcal{F}}\tilde{H} = \sum_{k \geq 2} \tilde{\sigma}_k (u^2 + v^2)^k$, onde $\tilde{\sigma}_k$ são os coeficientes focais para $k \in \mathbb{N}$. Isto é equivalente a obtermos polinômios homogêneos \tilde{H}_n de grau $n = 0, 1, 2, \dots$ em λ tais que

$$\sum_{j=0}^n \tilde{\mathcal{F}}_j \tilde{H}_{n-j} = \sum_{k \geq 2} \tilde{\sigma}_{k,n} (u^2 + v^2)^k,$$

onde $\tilde{\sigma}_{k,n}$ é o termo de grau n da expansão de $\tilde{\sigma}_k$ em série de potências em torno de $\lambda = 0$. Consideremos a função $\tilde{H}_1 = a_1 H_1^{Q_1} + \dots + a_r H_1^{Q_r}$. Esta função satisfaz a equação acima para $n = 1$. De fato, por (4.11), temos:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_0 (a_1 H_1^{Q_1} + \dots + a_r H_1^{Q_r}) + (a_1 \mathcal{F}_1^{Q_1} + \dots + a_r \mathcal{F}_1^{Q_r}) H_0 = \\ & = a_1 (\mathcal{F}_0 H_1^{Q_1} + \mathcal{F}_1^{Q_1} H_0) + \dots + a_r (\mathcal{F}_0 H_1^{Q_r} + \mathcal{H}_1^{Q_r} H_0) = \\ & = a_1 \left(\sum_{k \geq 2} \sigma_{k,1}^1 (u^2 + v^2)^k \right) + \dots + a_r \left(\sum_{k \geq 2} \sigma_{k,1}^r (u^2 + v^2)^k \right) = \\ & = \sum_{k \geq 2} (a_1 \sigma_{k,1}^1 + \dots + a_r \sigma_{k,1}^r) (u^2 + v^2)^k. \end{aligned}$$

Assim, temos que $\tilde{\sigma}_{k,1} = a_1 \sigma_{k,1}^{Q_1} + \dots + a_r \sigma_{k,1}^{Q_r}$, o que prova o resultado. \square

Ilustramos uma aplicação do método da paralelização no exemplo a seguir:

Exemplo 4.1. Consideremos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + u^2 - v^2, \\ \dot{v} = u + 2uv, \\ \dot{w} = w. \end{cases}$$

Este sistema tem como variedade central o plano- uv , e restrito a esta variedade, a singularidade na origem é um centro. Consideremos a seguinte perturbação deste sistema nos parâmetros $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + u^2 - v^2 + \lambda_1 (u^3 - 3uw^2) + \lambda_2 (u^3 + uw^2) + \lambda_3 (u^3 + uw^2), \\ \dot{v} = u + 2uv + \lambda_1 (u^2 + v^2) + \lambda_2 (u^2 - v^2) + \lambda_3 (u^2v), \\ \dot{w} = w + \lambda_1 (w^3 - 3u^2w) + \lambda_2 (-u^2w - w^3) + \lambda_3 (u^2w + w^3). \end{cases}$$

Notemos que, neste exemplo, as funções Q_j das hipóteses do Teorema 4.7 são:

$$Q_1(u, v, w, \lambda) = \lambda_1 \begin{pmatrix} u^3 - 3uw^2 \\ u^2 + v^2 \\ w^3 - 3u^2w \end{pmatrix}$$

$$Q_2(u, v, w, \lambda) = \lambda_2 \begin{pmatrix} u^3 + uw^2 \\ u^2 - v^2 \\ -u^2w - w^3 \end{pmatrix}$$

$$Q_3(u, v, w, \lambda) = \lambda_3 \begin{pmatrix} u^3 + uw^2 \\ u^2v \\ u^2w + w^3 \end{pmatrix}$$

Calculando a parte linear dos três primeiros coeficientes focais dos sistemas apenas com a perturbação referente a Q_j , temos:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1}^1 &= -\frac{5\lambda_1}{4}, & \sigma_{1,1}^2 &= \frac{3\lambda_2}{4}, & \sigma_{1,1}^3 &= \lambda_3, \\ \sigma_{2,1}^1 &= \frac{15\lambda_1}{2}, & \sigma_{2,1}^2 &= -\frac{9\lambda_2}{2}, & \sigma_{2,1}^3 &= -6\lambda_3, \\ \sigma_{3,1}^1 &= -\frac{135\lambda_1}{2}, & \sigma_{3,1}^2 &= \frac{81\lambda_2}{2}, & \sigma_{3,1}^3 &= 54\lambda_3. \end{aligned}$$

Considerando o sistema com todas as perturbações, os três primeiros valores focais são:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{5\lambda_1}{4} + \frac{3\lambda_2}{4} + \lambda_3, \\ \sigma_2 &= \frac{15\lambda_1}{2} - \frac{9\lambda_2}{2} - 6\lambda_3 + \frac{47\lambda_1^3}{4} - \frac{101}{6}\lambda_2\lambda_1^2 - 8\lambda_3\lambda_1^2 + \frac{22}{3}\lambda_2^2\lambda_1 + \\ &\quad + \frac{49}{6}\lambda_2\lambda_3\lambda_1 - \frac{17\lambda_2^3}{12} - \frac{11}{6}\lambda_2^2\lambda_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_3 = & -\frac{135\lambda_1}{2} + \frac{81\lambda_2}{2} + 54\lambda_3 - \frac{3985\lambda_1^5}{32} + \frac{95113}{288}\lambda_2\lambda_1^4 + \frac{161}{2}\lambda_3\lambda_1^4 + \\
& -\frac{174937}{576}\lambda_2^2\lambda_1^3 - \frac{13565}{72}\lambda_2\lambda_3\lambda_1^3 - \frac{183159\lambda_1^3}{1024} + \frac{77173}{576}\lambda_2^3\lambda_1^2 + \\
& + \frac{2353307\lambda_2\lambda_1^2}{9216} + \frac{1169}{9}\lambda_2^2\lambda_3\lambda_1^2 + \frac{13651}{128}\lambda_3\lambda_1^2 - \frac{19139}{576}\lambda_2^4\lambda_1 + \\
& -\frac{328831\lambda_2^2\lambda_1}{3072} + \frac{1109}{64}\lambda_3^2\lambda_1 - \frac{356}{9}\lambda_2^3\lambda_3\lambda_1 - \frac{68497}{576}\lambda_2\lambda_3\lambda_1 + \\
& + \frac{2107\lambda_2^5}{576} + \frac{16177\lambda_2^3}{1024} - \frac{3\lambda_3^3}{4} + \frac{373}{64}\lambda_2\lambda_3^2 + \frac{85}{18}\lambda_2^4\lambda_3 + \frac{9713}{384}\lambda_2^2\lambda_3.
\end{aligned}$$

Podemos notar que, de fato, a parte linear em torno de $\lambda = 0$ destes coeficientes focais é a soma das partes lineares dos coeficientes calculados separadamente.

5 Exemplos

Neste capítulo, apresentamos alguns sistemas da forma (4.1) e aplicamos os resultados estudados nos capítulos anteriores para discutir sua ciclicidade.

5.1 Sistemas Planares

5.1.1 Centro Holomorfo de grau 6

No trabalho de Liang e Torregrosa [16], é apresentada uma cota inferior para o número de Hilbert $H(n)$, com $4 \leq n \leq 13$. Estas cotas são obtidas estudando famílias de centros holomorfos, isto é, sistemas cuja primeira equação da complexificação é da forma $\dot{x} = ix + f(x)$, onde f é uma função holomorfa. Em particular, o artigo trabalha com $f(x) = x^2 + \dots + x^n$. Neste caso, os sistemas admitem $(f(x)\bar{f}(x))^{-1}$ como fator integrante e portanto têm um centro na origem. Por este motivo, chamamos estes sistemas de *centro holomorfo de grau n* .

Dentre os sistemas estudados em [16], consideramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + u^2 - v^2 + u^3 - 3uv^2 + u^4 + v^4 - 6u^2v^2 + \\ \quad + u^5 - 10u^3v^2 + 5uv^4 + u^6 - 15u^4v^2 + 15u^2v^4 - v^6, \\ \dot{v} = u + 2uv + 3u^2v - v^3 + 4u^3v - 4uv^3 + 5u^4v + \\ \quad - 10u^2v^3 + v^5 + 6u^5v - 20u^3v^3 + 6uv^5, \end{cases} \quad (5.1)$$

cuja primeira equação de sua complexificação é

$$\dot{x} = ix + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6,$$

Seja $\dot{u} = F(u, \lambda)$ a perturbação do sistema (5.1) correspondente à equação:

$$\dot{x} = ix + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \sum_{k+l=2}^6 (a_{kl} + ib_{kl})x^k y^l,$$

onde $\lambda = (a_{20}, b_{20}, \dots, a_{06}, b_{06})$. Para $\lambda = 0$, este sistema coincide com o sistema (5.1) e tem um centro na origem. Estimamos a ciclicidade deste centro através do Teorema 4.3.

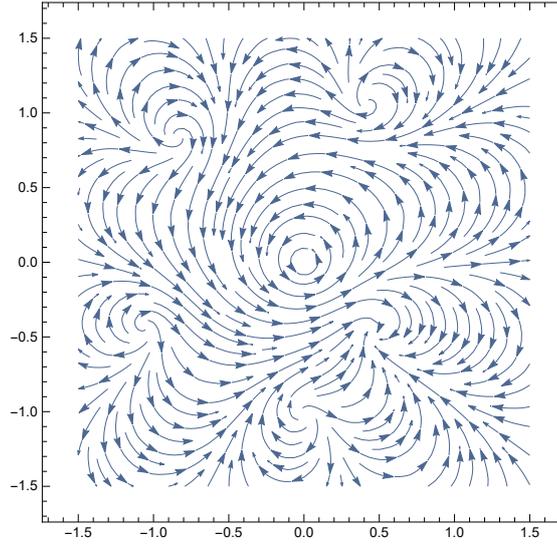


Figura 5.1: Retrato de fase do centro holomorfo de grau 6.

Utilizando o método da paralelização, calculamos as partes lineares dos 40 primeiros coeficientes focais. Aqui exibimos apenas alguns destes coeficientes, já que a extensão de suas expressões extrapola os limites das páginas.

$$\begin{aligned}
 g_{2,2} &= 2a_{2,1} - 2b_{1,1}, \\
 g_{3,3} &= -\frac{4}{3}a_{0,2} - 2a_{1,1} - 12a_{2,1} + 2a_{3,2} - \frac{8}{3}b_{0,2} + 12b_{1,1} - 2b_{1,2} - 2b_{3,1}, \\
 g_{4,4} &= \frac{26a_{0,2}}{3} + \frac{1}{4}a_{0,3} + 20a_{1,1} - 4a_{1,2} + a_{1,3} + 104a_{2,1} - 2a_{2,2} + a_{3,1} - 18a_{3,2} + \\
 &\quad - 2a_{4,1} + \frac{173b_{0,2}}{6} - 3b_{0,3} - 103b_{1,1} + 20b_{1,2} - 2b_{1,3} + b_{2,1} - b_{2,3} + 20b_{3,1} + \\
 &\quad + 2b_{3,3} - b_{4,1} - 4b_{4,2}, \\
 g_{5,5} &= -\frac{292a_{0,2}}{3} - \frac{25}{2}a_{0,3} + \frac{8}{3}a_{0,4} + \frac{92a_{2,2}}{3} - \frac{776a_{1,1}}{3} + \frac{188a_{1,2}}{3} - 22a_{1,3} - \frac{4}{3}b_{1,4} + \\
 &\quad + \frac{8}{3}a_{1,4} - \frac{12478a_{2,1}}{9} + 28b_{1,3} - \frac{764b_{1,2}}{3} + \frac{12340b_{1,1}}{9} + 2b_{3,2} - \frac{4}{3}b_{2,4} - \frac{8}{3}b_{0,4} + \\
 &\quad + \frac{8}{3}b_{2,2} + \frac{38b_{4,1}}{3} + 46b_{0,3} - 375b_{0,2} - 30b_{3,3} - \frac{8}{3}a_{5,1} + 4a_{4,2} + \frac{100a_{4,1}}{3} + \\
 &\quad - \frac{46b_{2,1}}{3} + 14b_{2,3} + 226a_{3,2} - \frac{46a_{3,1}}{3} - \frac{772b_{3,1}}{3} + \frac{4}{3}a_{2,4} - 4a_{2,3} + \frac{4}{3}b_{5,1} + 60b_{4,2},
 \end{aligned}$$

O posto de $\left[\frac{\partial(g_{2,2}, \dots, g_{41,41})}{\partial(a_{20}, b_{20}, \dots, a_{06}, b_{06})} \right]$ é 40, e pelo Teorema 4.3, há perturbações de (5.1) que geram 40 ciclos limite. Este exemplo introduzido por Liang e Torregrosa em [16] nos dá a mais alta cota inferior do número de Hilbert para sistemas de grau 6 até agora. A escolha dos centros holomorfos foi feita pelo seu grande potencial de gerar ciclos limite, como apontado em [16].

Nas figuras 5.1 e 5.2, exibimos os retratos de fase para alguns centros holomorfos produzidas através do software Mathematica.

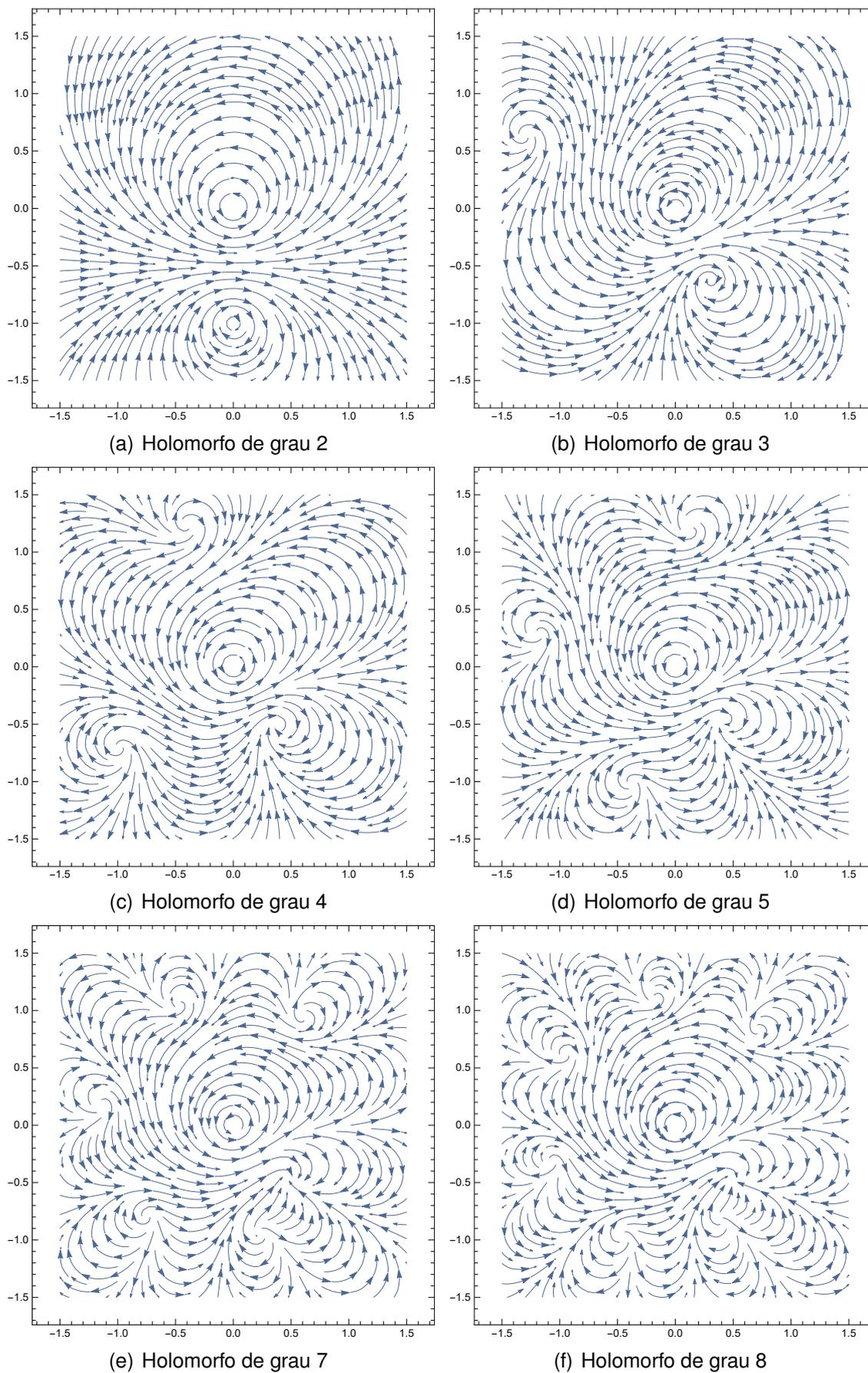


Figura 5.2: Retratos de fase dos centros holomorfos de grau 2, 3, 4, 5, 7 e 8.

5.1.2 Sistema Quadrático com Ciclicidade Máxima

Em sua publicação de 1952 [3], Bautin provou que o número máximo de ciclos limite que podem bifurcar de um sistema quadrático cuja origem é um centro ou um foco é 3. Aqui mostramos um exemplo de sistema que atinge esta cota máxima.

O sistema que consideramos é o seguinte:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + 18u^2 + 8uv - 8v^2 - 2\lambda_1 uv + \lambda_2(u^2 + v^2) + \lambda_3(u^2 - v^2), \\ \dot{v} = u + 4u^2 + 14uv - 4v^2 + \lambda_1(u^2 - v^2) - 2\lambda_3 uv, \end{cases} \quad (5.2)$$

Considerando $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, calculamos o primeiro coeficiente focal deste sistema:

$$g_{22} = -16\lambda_1(5 + \lambda_2),$$

que nos dá as condições de centro $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = -5$. Para $\lambda_2 = -5$, o sistema (5.2) tem a forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v - (-\lambda_3 - 13)u^2 - (2\lambda_1 - 8)uv - (\lambda_3 + 13)v^2, \\ \dot{v} = u + (\lambda_1 + 4)u^2 - (2\lambda_3 - 14)uv - (\lambda_1 + 4)v^2, \end{cases}$$

e satisfaz a condição (iii) do Teorema de Kapteyn-Bautin (Teorema 2.4), e portanto tem centro na origem. Sob a condição $\lambda_1 = 0$, o próximo coeficiente focal é:

$$g_{33} = \frac{256}{3}\lambda_2(\lambda_2 + 5)(\lambda_2 + 25),$$

que nos dá as condições necessárias para centro: $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_2 = -25$. Para $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -25$, o sistema (5.2) tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v - (7 - \lambda_3)u^2 + 8uv - (\lambda_3 + 33)v^2, \\ \dot{v} = u + 4u^2 + (14 - 2\lambda_3)uv - 4v^2, \end{cases}$$

e satisfaz a condição (i) do Teorema de Kapteyn-Bautin, e daí, tem um centro na origem.

Para a condição $\lambda_2 = 0$, calculamos o coeficiente focal:

$$g_{44} = 80000\lambda_3(\lambda_3 + 6),$$

do qual obtemos as condições de centro: $\lambda = (0, 0, 0)$ ou $\lambda = (0, 0, -6)$. Sob $\lambda = (0, 0, 0)$, o sistema (5.2) tem a forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + 18u^2 + 8uv - 8v^2, \\ \dot{v} = u + 4u^2 + 14uv - 4v^2, \end{cases}$$

que satisfaz a condição (iv) do Teorema de Kapteyn-Bautin. Sob $\lambda = (0, 0, -6)$, temos:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + 12u^2 + 8uv - 2v^2, \\ \dot{v} = u + 4u^2 + 26uv - 4v^2, \end{cases}$$

que também satisfaz a condição (iv) do Teorema de Kapteyn-Bautin. Assim, concluímos que a variedade de Bautin do sistema (5.2) é:

$$V^c = \{(0, 0, 0), (0, 0, -6)\} \cup \{(0, -25, \lambda_3) : \lambda_3 \in \mathbb{R}\} \cup \{(\lambda_1, -5, \lambda_3) : \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Na Figura 5.3, exibimos alguns retratos de fases do sistema (5.2) correspondente a parâmetros λ em diferentes componentes conexas de V^c .

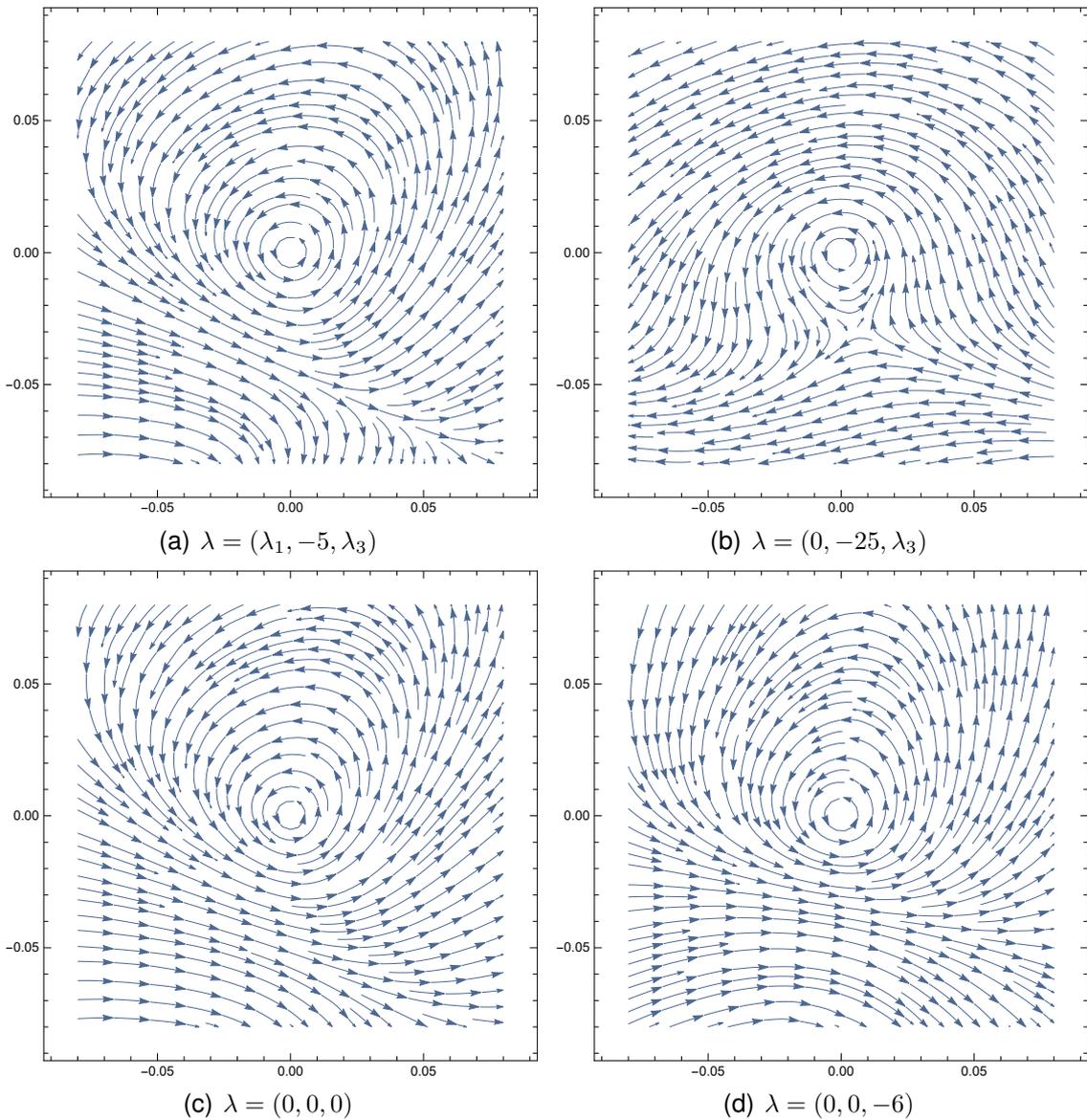


Figura 5.3: Retratos de fase do sistema (5.2) sob parâmetros na variedade de Bautin.

Assim, o ponto singular na origem tem quatro possíveis naturezas:

- (i) Centro para $\lambda \in V^c$;
- (ii) Foco de multiplicidade 3, para $\lambda \notin V^c$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;

(iii) Foco de multiplicidade 2, para $\lambda \notin V^c$, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$;

(iv) Foco de multiplicidade 1, para $\lambda \notin V^c$ e $\lambda_1 \neq 0$.

Para focos de multiplicidade 1, a ciclicidade linear é 1. Para focos de multiplicidade 2, a matriz $\left[\frac{\partial g_{220}}{\partial \lambda} \right]$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} -16(\lambda_2 + 5) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como o posto dessa matriz é 1, pelo Teorema 4.2, a ciclicidade linear da origem para o sistema correspondente é 2. Para focos de multiplicidade 3, a matriz

$$\left[\frac{\partial(g_{22}, g_{33})}{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} \right]$$

$$\begin{pmatrix} -80 & 0 & 0 \\ \frac{28000(\lambda_3+18)}{3} & \frac{32000}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

cujos postos são 2, e portanto, a ciclicidade linear da origem é 3.

Agora estudamos a ciclicidade dos centros, isto é, para parâmetros $s \in V^c$. Para isto, calculamos a matriz $M(s) = \left[\frac{\partial(g_{22}, g_{33}, g_{44})}{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} \right]_{\lambda=s}$. Temos:

$$M(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -80 & 0 & 0 \\ 168000 & \frac{32000}{3} & 0 \\ -\frac{5590259200}{9} & -\frac{138272000}{3} & 480000 \end{pmatrix},$$

$$M(0, 0, -6) = \begin{pmatrix} -80 & 0 & 0 \\ 112000 & \frac{32000}{3} & 0 \\ -\frac{3306668800}{9} & -38624000 & -480000 \end{pmatrix}.$$

Como estas matrizes têm posto 3, pelo Teorema 4.3, a ciclicidade linear da origem dos sistemas correspondentes aos parâmetros $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, -6)$ é 3, que é a máxima estipulada por Bautin. Para parâmetros em outras componentes de V^c temos outros resultados. Para $s = (0, -25, \lambda_3)$, temos $M(0, -25, \lambda_3)$:

$$\begin{pmatrix} 320 & 0 & 0 \\ 64000(\lambda_3 - 7) & \frac{128000}{3} & 0 \\ \frac{51200}{3}(\lambda_3(\lambda_3(13\lambda_3 + 287) - 11481) + 52885) & \frac{102400}{9}(\lambda_3(13\lambda_3 + 378) - 8835) & 0 \end{pmatrix},$$

cujos postos são 2, e portanto a ciclicidade linear dos centros correspondentes a parâmetros $(0, -25, \lambda_3)$ é 2. As duas primeiras linhas de $M(\lambda_1, -5, \lambda_3)$ são dadas por:

$$\begin{pmatrix} 0 & -16\lambda_1 & 0 \\ 0 & \frac{320}{3}(\lambda_1(\lambda_1(3\lambda_1 - 4) + 8\lambda_3 + 84) - 80) & 0 \end{pmatrix}.$$

Como o posto da matriz acima é 1, a ciclicidade linear da origem para o sistema correspondente a parâmetros nesta componente de V^c é 1.

Este exemplo nos mostra que há componentes de V^c que têm mais potencial para gerar ciclos limite que outras. Para o sistema (5.2) com os parâmetros $\lambda = (0, 0, 0)$ e $\lambda = (0, 0, -6)$, a ciclicidade máxima é obtida.

5.2 Sistemas Tridimensionais

5.2.1 Sistema com Hiperboloide Invariante

Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + \lambda_1 u^2 + \lambda_2 uv + \lambda_4 uw + \lambda_3 vw, \\ \dot{v} = u + \lambda_2 u^2 + \lambda_1 uv + \lambda_3 uw + \lambda_4 vw, \\ \dot{w} = -\mu w + \mu(u^2 - v^2) - 4uv + 2\lambda_1 uw + 2\lambda_4 w^2. \end{cases} \quad (5.3)$$

Este sistema tem um ponto de Hopf na origem e admite como variedade central o hiperboloide $w = u^2 - v^2$, para todo $\lambda = (\mu, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \Lambda$. De fato, tomando $\phi(u, v, w) = u^2 - v^2 - w$, temos:

$$\mathcal{F}\phi = (u^2 - v^2 - w)(2\lambda_1 u + 2\lambda_4 w - \mu) = (2\lambda_1 u + 2\lambda_4 w - \mu)\phi(u, v, w),$$

onde \mathcal{F} é o campo associado ao sistema (5.3). Além disso, $\nabla\phi(u, v, w) = (2u, -2v, -1)$ e portanto o hiperboloide $\phi^{-1}(0)$ é tangente ao plano- uv em $(0, 0, 0)$.

Inicialmente, determinamos a variedade de Bautin deste sistema pelo Segundo Método de Lyapunov. Os primeiros coeficientes focais são:

$$g_{220} = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{2}, \mathbf{e}$$

$$g_{330} = \frac{3\lambda_2 (2\lambda_1 \lambda_3 \mu^2 + (16\lambda_1^3 + 3\lambda_2^2 \lambda_1) (\mu^2 + 4)) - 2(3\lambda_1^2 - 7\lambda_2^2) \lambda_4 (\mu^2 + 4)}{12(\mu^2 + 4)},$$

dos quais obtemos as seguintes condições de centro:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ ou } \lambda_1 = \lambda_4 = 0 \text{ ou } \lambda_2 = \lambda_4 = 0.$$

Daí, temos:

(i) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, o sistema restrito ao hiperboloide é:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + \lambda_3 v(u^2 - v^2) + \lambda_4 u(u^2 - v^2), \\ \dot{v} = u + \lambda_3 u(u^2 - v^2) + \lambda_4 v(u^2 - v^2), \end{cases}$$

o qual é invariante pela mudança de variáveis $(u, v, t) \mapsto (v, u, -t)$, isto é, apresenta simetria em relação à reta $u = v$ e, portanto, tem um centro na origem;

(ii) Para $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$, o sistema restrito ao hiperboloide é:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + \lambda_2 uv + \lambda_3 v(u^2 - v^2), \\ \dot{v} = u + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u(u^2 - v^2), \end{cases}$$

o qual é invariante pela mudança de variáveis $(u, v, t) \mapsto (u, -v, -t)$, ou seja, é simétrico em relação ao eixo- u e, portanto, tem um centro na origem;

(iii) Para $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$, o sistema restrito ao hiperboloide é:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + \lambda_1 u^2 + \lambda_3 v(u^2 - v^2), \\ \dot{v} = u + \lambda_1 uv + \lambda_3 u(u^2 - v^2), \end{cases}$$

o qual é invariante pela mudança de variáveis $(u, v, t) \mapsto (-u, v, -t)$, isto é, o sistema é simétrico em relação ao eixo- v e portanto tem um centro na origem;

Assim, temos determinada a variedade de Bautin V^c em três componentes: $V^c = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, onde

$$V_1 = \{\lambda \in \Lambda : \lambda_1 = \lambda_2 = 0\}, V_2 = \{\lambda \in \Lambda : \lambda_1 = \lambda_4 = 0\} \text{ e } V_3 = \{\lambda \in \Lambda : \lambda_2 = \lambda_4 = 0\}.$$

A figuras 5.4 e 5.5 representam os retratos de fase do sistema (5.3) sobre as componentes da variedade de Bautin, e é possível notar as simetrias descritas na discussão acima.

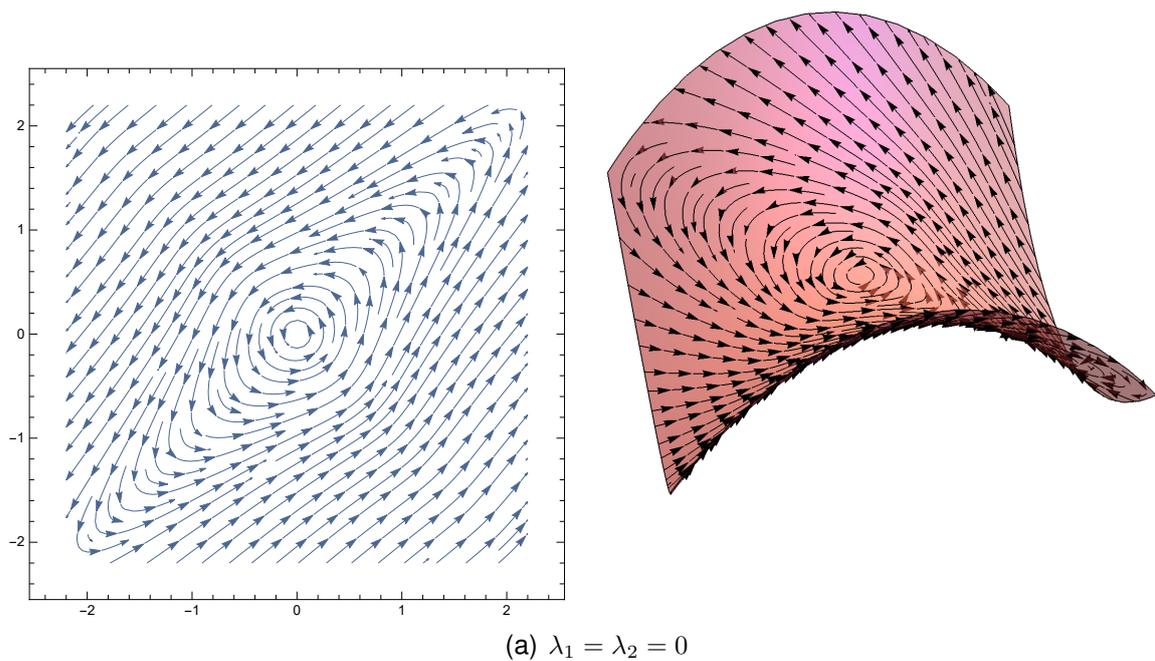


Figura 5.4: Retratos de fase do sistema (5.3) para parâmetros $\lambda \in V_1$ sobre a variedade central.

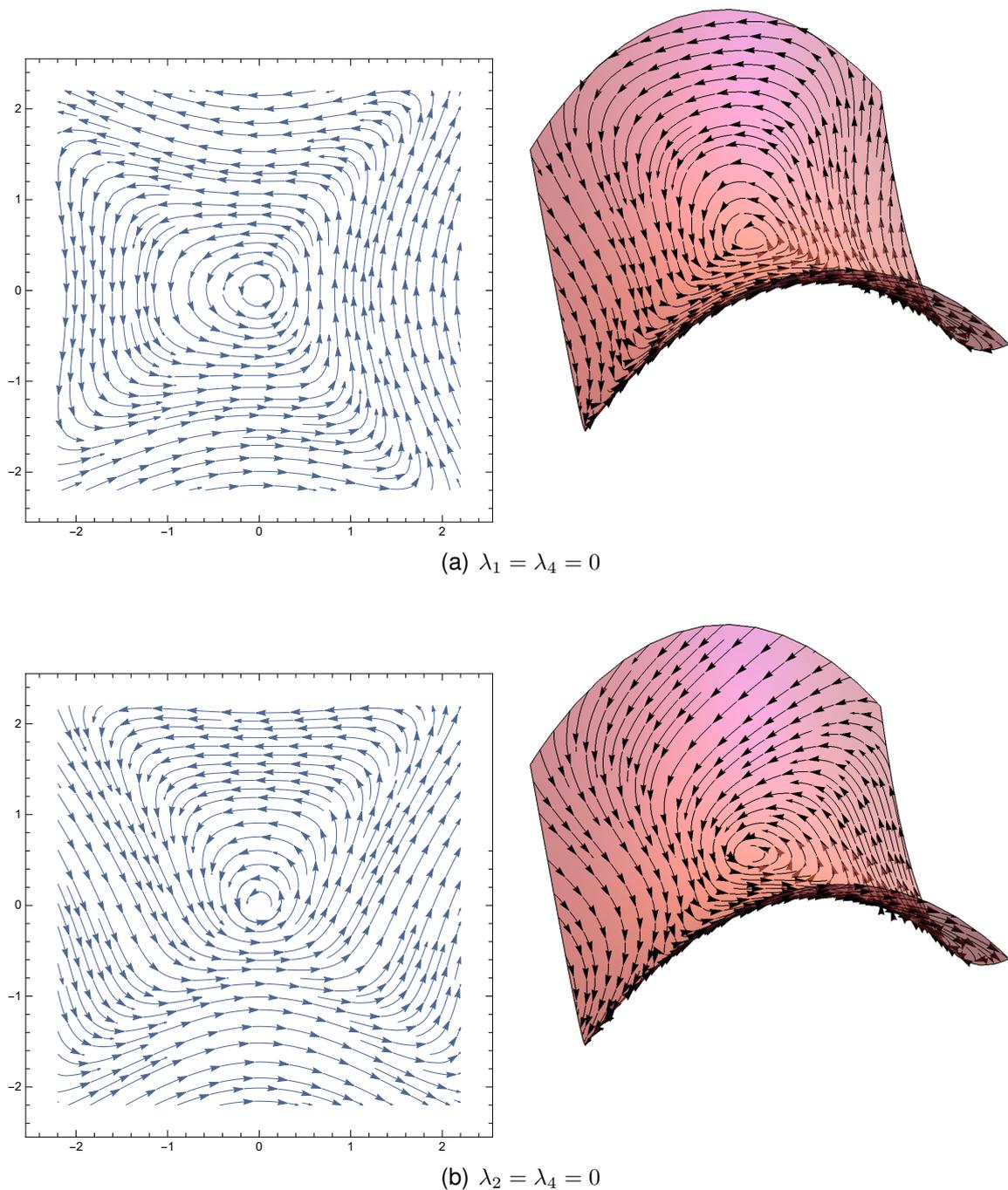


Figura 5.5: Retratos de fase do sistema (5.3) para parâmetros $\lambda \in V_2$ e $\lambda \in V_3$ sobre a variedade central.

Tendo determinada a variedade de Bautin, concluímos que o sistema em consideração admite 3 comportamentos possíveis para a singularidade na origem:

- (i) Centro para $\lambda \in V^c$;
- (ii) Foco de multiplicidade 2, para $\lambda \notin V^c$ e $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$;
- (iii) Foco de multiplicidade 1, para $\lambda \notin V^c$ e $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$.

A ciclicidade para os focos é relativamente simples de ser obtida. Para parâmetros λ descritos no item (iii) acima, a ciclicidade linear é 1. Para parâmetros λ como descritos no item (ii) acima, temos a matriz $\left[\frac{\partial g_{220}}{\partial \lambda} \right]$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\lambda_2}{2} & -\frac{\lambda_1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, como $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ neste caso, pelo Teorema 4.5, a ciclicidade linear da origem é 2. Nos resta estudar a ciclicidade da origem para parâmetros em V^c . Para isso, calculamos mais um coeficiente focal, que omitimos por conveniência. Procedemos calculando o posto das matrizes

$$M(s) = \left[\frac{\partial(g_{220}, g_{330}, g_{440})}{\partial(\mu, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)} \right]_{\lambda=s}$$

para s em diferentes componentes de V^c . Temos os seguintes casos:

(i) $s \in V_1 \cap V_2 \cap V_3$

A interseção entre todas componentes da variedade de Bautin consiste dos pontos do tipo $s = (\mu, 0, 0, \lambda_3, 0)$, $\mu \neq 0$. Daí,

$$M(\mu, 0, 0, \lambda_3, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cujo posto é 0. Podemos concluir pelo Teorema 4.6 que a ciclicidade linear da origem é 0 para $\lambda = s$.

(ii) $s \in V_1 \setminus V_2 \cup V_3$

Neste caso, temos $s = (\mu, 0, 0, \lambda_3, \lambda_4)$, $\mu \neq 0 \neq \lambda_4$. Daí,

$$M(\mu, 0, 0, \lambda_3, \lambda_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e a conclusão sobre a ciclicidade linear é idêntica ao item anterior.

(iii) $s \in V_2 \setminus V_1 \cup V_3$

Neste caso, temos $s = (\mu, 0, \lambda_2, \lambda_3, 0)$, $\mu \neq 0 \neq \lambda_2$. Assim, as duas primeiras linhas de $M(\mu, 0, \lambda_2, \lambda_3, 0)$ são dadas pela matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\lambda_2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_3 \lambda_2 \mu^2}{2\mu^2 + 8} + \frac{3\lambda_2^3}{4} & 0 & 0 & \frac{7\lambda_2^2}{6} \end{pmatrix},$$

cujo posto é 2 assim como o posto de $M(\mu, 0, \lambda_2, \lambda_3, 0)$. Daí, pelo Teorema 4.6, a ciclicidade linear do centro é 2.

(iv) $s \in V_3 \setminus V_1 \cup V_2$

Neste caso, temos $s = (\mu, \lambda_1, 0, \lambda_3, 0)$, $\mu \neq 0 \neq \lambda_1$. As duas primeiras linhas de $M(\mu, \lambda_1, 0, \lambda_3, 0)$ são dadas pela matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\lambda_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3 \lambda_1 \mu^2}{2\mu^2 + 8} + 4\lambda_1^3 & 0 & -\frac{\lambda_1^2}{2} \end{pmatrix},$$

e a ciclicidade linear da origem é 2, como no item anterior.

Os casos acima sumarizam o estudo da ciclicidade para o sistema (5.3).

5.2.2 Sistema de Moon-Rand

Um dos sistemas célebres e bastante estudados na literatura é o Sistema de Moon-Rand, apresentado em [21]. Neste trabalho de 1985, Moon e Rand apresentaram uma modelagem para o controle da rigidez de certas estruturas flexíveis, através do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -u - uv, \\ \dot{w} = -\mu w + c_{20}u^2 + c_{11}uv + c_{02}v^2, \end{cases}$$

Renomeando as variáveis u e v , deixamos o sistema na forma (4.4):

$$\begin{cases} \dot{u} = -v - vw, \\ \dot{v} = u, \\ \dot{w} = -\mu w + c_{20}v^2 + c_{11}uv + c_{02}u^2, \end{cases} \quad (5.4)$$

Determinamos a variedade de Bautin do sistema de Moon-Rand a fim de estudarmos a ciclicidade da origem. Para este sistema, temos $\lambda = (\mu, c_{20}, c_{11}, c_{02})$. Calculamos o primeiro coeficiente focal:

$$g_{220} = -\frac{2c_{02} + c_{11}\mu - 2c_{20}}{4(\mu^2 + 4)},$$

que nos dá a condição de centro $c_{02} = \frac{2c_{20} - \mu c_{11}}{2}$. Sob esta condição, o segundo coeficiente focal é:

$$g_{330} = -\frac{(c_{11}\mu - 4c_{20})(c_{11}\mu - 2c_{20})}{16\mu(\mu^2 + 4)}.$$

E temos mais duas condições de centro: $c_{20} = \frac{c_{11}\mu}{2}$ e $c_{20} = \frac{c_{11}\mu}{4}$. Assim, consideramos dois casos:

(i) Sob $c_{20} = \frac{c_{11}\mu}{2}$, o sistema admite $w = \frac{c_{11}v^2}{2}$ como variedade central. De fato, para $\phi(u, v, w) = w - \frac{c_{11}v^2}{2}$, temos

$$\mathcal{F}\phi = -c_{11}uv - \mu w + \frac{c_{11}\mu}{2}v^2 + c_{11}uv = -\mu \left(w - \frac{c_{11}v^2}{2} \right) = -\mu\phi(u, v, w).$$

Além disso, $\nabla\phi(u, v, w) = (0, -c_{11}v, 1)$ e, portanto, esta variedade é tangente ao plano- uv em $(0, 0, 0)$. Restringindo o sistema a esta variedade central, temos:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v - \frac{c_{11}v^3}{2}, \\ \dot{v} = u, \end{cases}$$

que é um sistema Hamiltoniano com um centro na origem.

(ii) Sob $c_{20} = \frac{c_{11}\mu}{4}$, o próximo coeficiente focal é:

$$g_{440} = -\frac{c_{11}^3\mu(\mu^2 + 10)}{512(\mu^2 + 4)(\mu^2 + 16)},$$

que se anula apenas para $c_{11} = 0$. Entretanto, para $c_{11} = 0$, temos $\lambda = (\mu, 0, 0, 0)$ que satisfaz as condições descritas no item (i) e, portanto, a origem é um centro sobre a variedade central.

Concluimos que a variedade de Bautin deste sistema é

$$V^c = \{\lambda \in \Lambda : c_{02} = 2c_{20} - \mu c_{11} = 0\}.$$

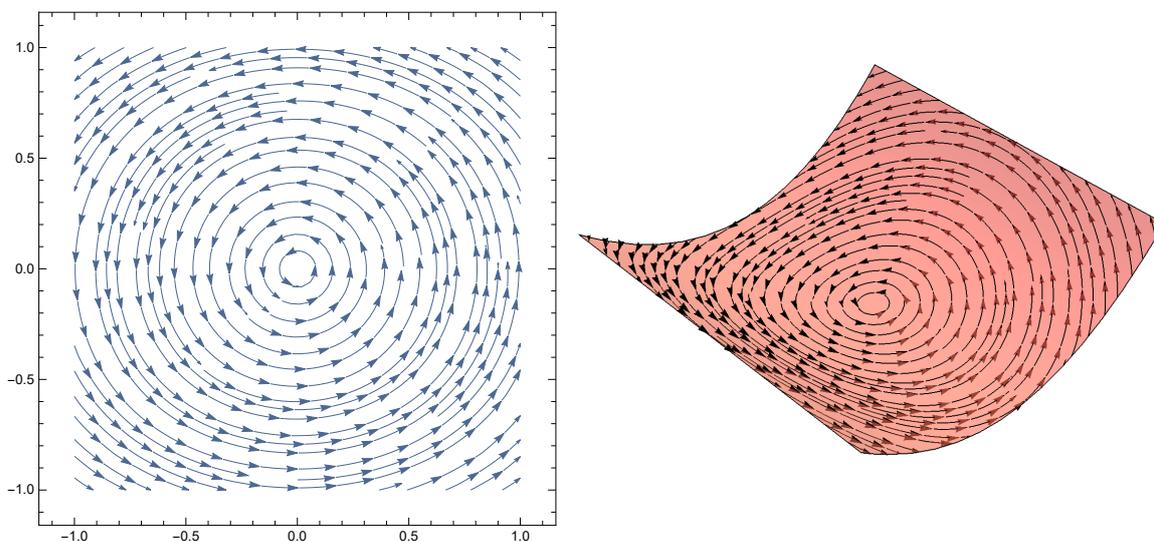


Figura 5.6: Retrato de fase do sistema de Moon-Rand para $s \in V^c$ sobre a variedade cenral $w = \frac{c_{11}v^2}{2}$.

Os comportamentos possíveis do sistema de Moon-Rand são:

- (i) Centro para $\lambda \in V^c$;
- (ii) Foco de multiplicidade 3 para $\lambda \notin V^c$, $2c_{02} = 2c_{20} - \mu c_{11}$ e $4c_{20} = c_{11}\mu$;
- (iii) Foco de multiplicidade 2 para $\lambda \notin V^c$, $2c_{02} = 2c_{20} - \mu c_{11}$ e $4c_{20} \neq c_{11}\mu$;

(iv) Foco de multiplicidade 1 para $\lambda \notin V^c$ e $2c_{02} \neq 2c_{20} - \mu c_{11}$.

Vamos determinar a ciclicidade para os itens correspondentes a focos. Para focos de multiplicidade 1, a ciclicidade é 1, para focos de multiplicidade 2, temos $\left[\frac{\partial g_{220}}{\partial \lambda} \right]$, sob as condições descritas no item (iii), dada por:

$$\left(-\frac{c_{11}}{4(\mu^2+4)} \quad \frac{1}{2\mu^2+8} \quad -\frac{\mu}{4(\mu^2+4)} \quad -\frac{1}{2(\mu^2+4)} \right),$$

que tem posto 1, e pelo Teorema 4.5, a ciclicidade linear da origem é 2. Para focos de multiplicidade 3, temos que $\left[\frac{\partial(g_{220}, g_{330})}{\partial(\mu, c_{20}, c_{11}, c_{02})} \right]$ é, sob as condições do item (ii):

$$\left(-\frac{c_{11}}{4(\mu^2+4)} \quad \frac{1}{2\mu^2+8} \quad -\frac{\mu}{4(\mu^2+4)} \quad -\frac{1}{2(\mu^2+4)} \right. \\ \left. 0 \quad \frac{c_{11}}{16\mu^2+64} \quad 0 \quad \frac{c_{11}}{16\mu^2+64} \right).$$

Como o posto da matriz acima é 2, a ciclicidade linear da origem para o sistema correspondente é 3.

Passamos a estimar a ciclicidade dos centros para o sistema (5.4). Calculamos o posto das matrizes

$$M(s) = \left[\frac{\partial(g_{220}, g_{330}, g_{440}, g_{550})}{\partial(\mu, c_{20}, c_{11}, c_{02})} \right]_{\lambda=s},$$

para $s \in V^c$. Para $c_{11} \neq 0$, a expressão de $M(s)$ é muito grande para esta página contê-la. Entretanto, seu posto é 2, e suas duas primeiras linhas são dadas por:

$$\left(\begin{array}{cccc} -\frac{c_{11}}{4(\mu^2+4)} & \frac{1}{2\mu^2+8} & -\frac{\mu}{4(\mu^2+4)} & -\frac{1}{2(\mu^2+4)} \\ \frac{c_{11}^2(\mu^2+12)}{32(\mu^2+4)^2} & -\frac{c_{11}(\mu^2+12)}{16(\mu^2+4)^2} & \frac{c_{11}\mu(\mu^2+12)}{32(\mu^2+4)^2} & -\frac{c_{11}(\mu^2-4)}{16(\mu^2+4)^2} \end{array} \right).$$

Pelo Teorema 4.6, a ciclicidade linear do centro nestas condições é 2. Para $c_{11} = 0$, o posto de $M(s)$ é 1, e a ciclicidade linear da origem é 1. Entretanto, existe uma perturbação do sistema (5.4) que gera 3 ciclos a partir do centro correspondente a $s = (\mu, 0, 0, 0)$. De fato, se considerarmos a curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Lambda$ dada por $\gamma(\varepsilon) = (\mu, \varepsilon + \varepsilon^3, \frac{4\varepsilon}{\mu}, \varepsilon(\varepsilon^2 + \varepsilon^4 - 1))$. Esta curva passa por $(\mu, 0, 0, 0)$, e sobre seus pontos, os três coeficientes focais são:

$$g_{220} = -\frac{\varepsilon^5}{(8 + 2\mu^2)}, \\ g_{330} = \frac{\varepsilon^4}{2\mu(4 + \mu^2)} + O(\varepsilon^5), \\ g_{440} = -\frac{\varepsilon^3(10 + \mu^2)}{8\mu^2(4 + \mu^2)(16 + \mu^2)} + O(\varepsilon^4).$$

Portanto, para parâmetros suficientemente pequenos de ε , conseguimos

$$|g_{220}(\mu, \varepsilon)| < |g_{330}(\mu, \varepsilon)| < |g_{440}(\mu, \varepsilon)| < 1$$

e o sistema correspondente tem 3 ciclos limite ao adicionarmos a perturbação linear. Em particular, para $\varepsilon = 10^{-1}$ e $\mu = 1$.

5.2.3 Sistema de Lü

Consideremos sistema de Lü, o qual já foi discutido anteriormente no Capítulo 3:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = cy - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases}$$

O sistema de Lü tem dois pontos de Hopf para $ab > 0$ e $c = \frac{(a+b)}{3}$, sendo eles $Q_+ = (\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, c)$ e $Q_- = (-\sqrt{bc}, -\sqrt{bc}, c)$. Considerando $\lambda = (a, b)$, como concluído no Exemplo 3.1, a variedade de Bautin deste sistema, é

$$V^c = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 \neq 0 \text{ e } b = 2a\}.$$

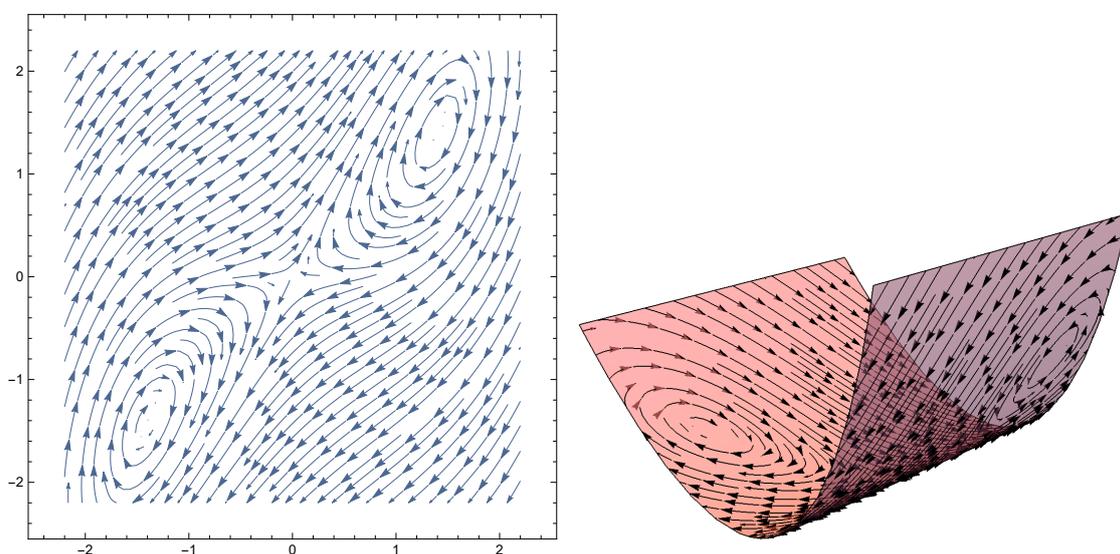


Figura 5.7: Retrato de fase do sistema de Lü para $s \in V^c$ sobre a variedade central.

Os comportamentos locais do ponto de Hopf Q_+ (análogos para Q_-) são:

- (i) Centro para $\lambda \in V^c$;
- (ii) Foco de multiplicidade 2 para $\lambda \notin V^c$ e $b = a/5$;
- (iii) Foco de multiplicidade 1 para $\lambda \notin V^c$ e $b \neq a/5$.

O estudo da ciclicidade para os focos é similar aos exemplos anteriores. Para focos de multiplicidade 1, a ciclicidade linear é 1, e para focos de multiplicidade 2, temos que $\left[\frac{\partial g_{220}}{\partial \lambda} \right]$, sob as condições do item (ii), é:

$$\begin{pmatrix} \frac{625\sqrt{5}}{3528a^3} & -\frac{3125\sqrt{5}}{3528a^3} \end{pmatrix}$$

que tem posto 1 e pelo Teorema 4.5, concluímos que a ciclicidade linear do foco para o sistema correspondente é 2. Estudando a ciclicidade para pontos $s \in V^c$, computamos a matriz $M(s) = \left[\frac{\partial(g_{220}, g_{330})}{\partial(a, b)} \right]_{\lambda=s}$, isto é:

$$M(a, 2a) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12\sqrt{2}a^3} & \frac{1}{24\sqrt{2}a^3} \\ \frac{301}{38016\sqrt{2}a^5} & -\frac{301}{76032\sqrt{2}a^5} \end{pmatrix},$$

cujo posto é 1. Assim, pelo Teorema 4.6, a ciclicidade linear da origem do sistema de Lü para parâmetros em V^c é 1.

Referências

- [1] ALGABA, A.; FERNANDÉZ-SANCHÉZ, M. M. F.; RODRÍGUEZ-LUIS, A. J. Centers on center manifolds in the lorenz, chen and lü systems. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, v. 19, p. 772–775, 2014.
- [2] ANDRONOV, A. A. et al. *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1971.
- [3] BAUTIN, N. N. On the number of limit cycles appearing with variation of the coefficients from an equilibrium state of the type of a focus or a center. *Mat. Sb.*, v. 30, p. 181–196, 1952.
- [4] BIBIKOV, Y. N. *Local Theory of Nonlinear Analytic Ordinary Differential Equations*. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1979. (Lecture Notes in Mathematics 702).
- [5] BUICĂ, A.; GARCÍA, I. A.; MAZA, S. Existence of inverse Jacobi multipliers around hopf points: Emphasis on the center problem. *Journal of Differential Equations*, v. 252, p. 6324–6336, 2012.
- [6] BUICĂ, A.; GARCÍA, I. A.; MAZA, S. Multiple Hopf bifurcation in \mathbb{R}^3 and inverse Jacobi multipliers. *Journal of Differential Equations*, v. 256, p. 310–325, 2014.
- [7] BURCHARD, A.; DENG, B.; LU, K. Smooth conjugacy of centre manifolds. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, v. 120, p. 61–77, 1992.
- [8] CARR, J. *Applications of centre manifold theory*. 1. ed. [S.l.]: Springer, 1981. (Applied Mathematical Sciences).
- [9] CHRISTOPHER, C.; LI, C. *Limit Cycles of Differential Equations*. Basel Berlin: Birkäuser Verlag, 2007. (Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona).
- [10] DUMORTIER, F.; LLIBRE, J.; ARTÉS, J. C. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. New York: Editora Springer Verlag, 2006.
- [11] EDNERAL, V. F. et al. The center problem on a center manifold in \mathbb{R}^3 . *Nonlinear Analysis*, v. 75, p. 2614–2622, 2012.

-
- [12] GARCÍA, I. A.; MAZA, S.; SHAFER, D. S. Cyclicity of polynomial nondegenerate centers on center manifolds. *Journal of Differential Equations*, v. 265, p. 5767–5808, 2018.
- [13] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1983. (Applied Mathematical Sciences 42).
- [14] HILBERT, D. Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 8, p. 437–480, 1902.
- [15] KELLEY, A. The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds. *Journal of Differential Equations*, v. 3, p. 546–570, 1967.
- [16] LIANG, H.; TORREGROSA, J. Parallelization of the Lyapunov constants and cyclicity for centers of planar polynomial vector fields. *Journal of Differential Equations*, v. 259, p. 6494–6509, 2015.
- [17] LYAPUNOV, A. M. *General Problem of the Stability Of Motion*. 1. ed. [S.l.]: CRC Press, 1992.
- [18] LÜ, J.; CHEN, G. A new chaotic attractor coined. *Int J Bifurcation Chaos*, v. 12, p. 659–661, 2002.
- [19] MAHDI, A.; PESSOA, C.; SHAFER, D. Centers on center manifolds in the Lü system. *Physics Letters A*, v. 375, p. 3509–3511, 2011.
- [20] MAOAN, H. Liapunov constants and Hopf cyclicity of lienard systems. *Annals of Differential Equations*, v. 15, p. 113–126, 1999.
- [21] MOON, F. C.; RAND, R. H. Parametric stiffness control of flexible structures. *Jet Propulsion Laboratory Publication 85-29*, v. 2, p. 329–342, 1985.
- [22] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. 3. ed. New York: Editora Springer Verlag, 2001.
- [23] POINCARÉ, H. *Œuvres*. Paris: Gauthier-Villairs, 1928. Tome 1.
- [24] ROMANOVSKI, V.; SHAFFER, D. S. *The Center and Cyclicity Problems: A Computational Algebra Approach*. Boston: Birkhäuser, 2009.
- [25] SANG, B.; FERČEC, B.; WANG, Q. Limit cycles bifurcating from a center in a three dimensional system. *Electronic Journal of Differential Equations*, p. Paper no. 109, 2016.

-
- [26] SIJBRAND, J. Properties of center manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 289, p. 431–469, 1985.
- [27] SMALE, S. Mathematical problems for the next century. *Mathematical Intelligencer*, v. 20, p. 7–15, 1998.
- [28] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: Hamburg Ltda., 1979.
- [29] YIRONG, L.; WENTAO, H. A cubic system with twelve small amplitude limit cycles. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, v. 129, p. 83–98, 2005.
- [30] ŻOŁĄDEK, H. Eleven small limit cycles in a cubic vector field. *Nonlinearity*, v. 8, p. 843–860, 1995.

Índice Remissivo

δ -Proximidade, 65

Aplicação

de Poincaré, 15, 40

deslocamento, 40

deslocamento reduzida, 41

Centro, 13

Ciclicidade, 64

linear, 70

Ciclo limite, 16

Coeficiente

de Lyapunov, 18, 43

focal, 29

ressonante, 44

Condições de centro, 30

Foco, 13

múltiplo, 17, 63

Forma

complexificada de um sistema, 21, 45

normal, 44

normal em superfície invariante, 45

Função

de Lyapunov, 19

de Lyapunov estrita, 19

deslocamento, 16

Integral primeira, 18

formal, 46

Método da Paralelização, 76

Número de Hilbert, 64

Ponto de Hopf, 13, 37

Ponto singular monodrômico, 14

Problema

16° de Hilbert, 64

do Centro-Foco, 13

Segundo Método de Lyapunov, 21

Sistema

de Lü, 59, 93

de Moon-Rand, 90

Teorema

da variedade central, 38

de Bifurcação de ciclos limite a partir
de um Centro, 69, 75

de Bifurcação de ciclos limite a partir
de um Foco Múltiplo, 67, 75

de Kapteyn-Bautin, 31

do Centro de Lyapunov, 54

do Centro de Poincaré-Lyapunov, 24
demonstração, 26

Termo Ressonante, 44

Valor focal, 41

Valores focais, 16

Variedade

afim, 29

central, 38

de Bautin, 30, 58