

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

LUCAS ZANOVELLO TAHARA

UM ESTUDO DA INFLUÊNCIA DO COMPORTAMENTO NÃO LINEAR
NA ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

ILHA SOLTEIRA

2019

LUCAS ZANOVELLO TAHARA

**UM ESTUDO DA INFLUÊNCIA DO COMPORTAMENTO NÃO LINEAR
NA ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL**

Dissertação de Mestrado apresentada à
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
- UNESP, como parte dos requisitos
necessários para obtenção do título de
Mestre em Engenharia Mecânica.
Área de conhecimento: Mecânica dos
Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Samuel da Silva

ILHA SOLTEIRA

2019

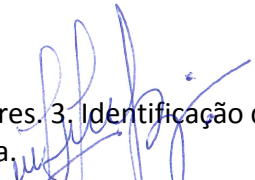
FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

T128e Tahara, Lucas Zanovello.
Um estudo da influência do comportamento não linear na análise modal experimental / Lucas Zanovello Tahara. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2019
109 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2019

Orientador: Samuel da Silva
Inclui bibliografia

1. Análise modal experimental . 2. Vibrações não lineares. 3. Identificação de sistemas. 4. Modos normais não lineares. 5. Rigidez cúbica.


João Josué Barbosa,
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação
Diretor Técnico
CRB 8-5642

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Um Estudo da Influência do Comportamento Não Linear na Análise Modal Experimental

AUTOR: LUCAS ZANOVELLO TAHARA

ORIENTADOR: SAMUEL DA SILVA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA MECÂNICA, área: Mecânica dos Sólidos pela Comissão Examinadora:



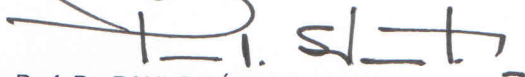
Prof. Dr. SAMUEL DA SILVA

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP



Prof. Dr. JOAO ANTONIO PEREIRA

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP



Prof. Dr. PAULO SÉRGIO VAROTO

Departamento de Engenharia Mecânica / Escola de Engenharia de São Carlos - USP

Ilha Solteira, 30 de julho de 2019

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela vida e pelas oportunidades que me trouxeram até aqui.

À minha família que sempre me apoiou, mesmo nas maiores dificuldades, em especial aos meus pais Elvis e Soyane que jamais deixaram faltar condições para uma boa educação e pelo exemplo de honestidade e integridade que me passaram.

À minha namorada Beatriz, que me ensinou a grandeza que existe na humildade e na cumplicidade, me dando apoio em todos os momentos. Aos meus grandes amigos Ruhan, Peterson e Sofia, que estiveram e ainda estão presentes em muitas etapas da minha vida. Agradeço ao pessoal da "salinha" que me fizeram crescer tanto na parte intelectual quanto pessoal, bem como os integrantes do GMSINT. Em especial ao Rafael Teloli, que diversas vezes me ajudou quando precisei, e que me fez desenvolver senso crítico para resolver problemas.

Ao professor e orientador Samuel da Silva, que me fez crescer muito nos últimos tempos, me incentivando a mudar a postura em diversos aspectos, e com isso melhorar cada vez mais. Muito obrigado por me confiar este trabalho e pelas críticas que sempre me fazem evoluir um pouco mais a cada dia.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos que proporcionou dedicação integral ao curso - Código de Financiamento 001.

Agradeço, por fim, a todos que participaram de forma direta ou indireta, na elaboração deste trabalho.

Seja a mudança que você quer ver no mundo.

Resumo

Os métodos de análise modal tradicionalmente são limitados aos sistemas vibrando em regime linear de movimento. Assim, quando as estruturas sofrem altas amplitudes de excitação ou são muito flexíveis, gerando possíveis vibrações não-lineares, estes métodos acabam perdendo a sua validade e as propriedades características. Com base nesta motivação, este trabalho apresenta um estudo detalhado para mostrar quais as limitações de se aproximar por parâmetros modais sistemas vibrando em regime de movimento não linear. Para ilustrar a formulação, assume-se uma viga engastada e livre emulando um oscilador de Duffing com não linearidade concentrada, suave e polinomial (rigidez cúbica). Observa-se que para regimes de excitação baixa, pode-se extrair parâmetros modais do modelo e ajustá-los para níveis de excitação mais altos quando se induz vibração não-linear pelo aumento do nível da amplitude de excitação. Para situações de vibração não-linear opta-se por aproximar os sinais e saídas pelo método de superfície de resposta e identificar a dependência amplitude-frequência para extração de modos normais não-lineares. Os resultados apresentados com a formulação descrita neste trabalho permitem adaptar adequadamente as ferramentas convencionais de análise modal linear para validade e aplicação direta em casos de vibração em regime não linear, quando estes ainda são considerados de fraca influência.

Palavras-chave: Análise modal experimental. Vibrações não lineares. Identificação de sistemas. Modos normais não lineares. Rigidez cúbica.

Abstract

Modal analysis methods have traditionally been limited to systems vibrating in linear motion regime. Thus, when the structures undergo high excitation amplitudes or are very flexible, generating possible nonlinear vibrations, these methods end up losing their validity and characteristic properties. Based on this motivation, this work presents a detailed study to show the limitations of approaching by modal parameters systems vibrating in nonlinear regime. To illustrate the formulation, a cantilever beam is assumed to emulate a Duffing oscillator with concentrated, smooth, polynomial nonlinearity (cubic stiffness). It is observed that for low excitation regimes, one can extract modal parameters from the model and adjust them to higher excitation levels when inducing nonlinear vibration by increasing the excitation amplitude level. For nonlinear vibration situations, we choose to approximate the signals and outputs by the response surface method and identify the amplitude-frequency dependence for extraction of nonlinear normal modes. The results presented with the formulation described in this work allow to adapt adequately the conventional tools of linear modal analysis for validity and direct application in cases of vibration in nonlinear regime, when they are still considered of low influence.

Keywords: Experimental modal analysis. Nonlinear vibrations. Systems identification. Nonlinear normal modes. Cubic stiffness.

Lista de Símbolos

\mathbf{M}	-	Matriz de massa do sistema [kg]
\mathbf{K}	-	Matriz de rigidez do sistema [N/m]
$\ddot{\mathbf{x}}$	-	Vetor de acelerações físicas do sistema [m/s ²]
\mathbf{x}	-	Vetor de deslocamentos físicos do sistema [m]
\mathbf{f}	-	Vetor de forças externas [N]
t	-	Tempo [s]
m_r	-	Massa modal
k_r	-	Rigidez modal
\mathbf{I}	-	Matriz identidade
\mathbf{q}	-	Vetor de deslocamentos em coordenadas modais
$\ddot{\mathbf{q}}$	-	Vetor de acelerações em coordenadas modais
\mathcal{H}_{jk}	-	Função de resposta em frequência da j-ésima saída pela k-ésima entrada
X_j	-	j-ésimo sinal de saída
F_k	-	k-ésimo sinal de entrada
\mathbf{H}	-	Matriz de receptância [m/N]
\mathbf{V}	-	Matriz de mobilidade [m.s ⁻¹ /N]
\mathbf{A}	-	Matriz de acelerância [m.s ⁻² /N]
\mathcal{H}_1	-	Estimador espectral
S_{fx}	-	Densidade espectral cruzada [W/Hz]
S_{ff}	-	Densidade espectral de entrada [W/Hz]
S_{xx}	-	Densidade espectral de saída [W/Hz]
${}_r A_{jk}$	-	Resíduo modal do r-ésimo modo
${}_r B_{jk}$	-	Termo de contribuição dos modos exceto r-ésimo modo

\mathcal{F}_{nl}	-	Termo de força não-linear [N]
m_k	-	Elemento de massa do sistema na k-ésima posição [kg]
k_k	-	Elemento de rigidez do sistema na k-ésima posição [N/m]
c_k	-	Elemento de amortecimento do sistema na k-ésima posição [N.s/m]
$f(x, \dot{x})$	-	Força de restauração [N]
\dot{x}	-	Velocidade em coordenadas físicas [m/s]
u	-	Termo de excitação do sistema [N]
\mathbf{F}_{nl}	-	Matriz de forças não-lineares [N]
\mathbf{M}_m	-	Matriz de massa modal
\mathbf{K}_m	-	Matriz de rigidez modal
k_{nl}	-	Elemento de rigidez não-linear [N/m ³]
\mathbf{D}	-	Matriz de amortecimento [N.s/m]
$\dot{\mathbf{x}}$	-	Vetor de velocidades físicas do sistema [m/s]
\mathbf{D}_m	-	Matriz de amortecimento modal

Letras Gregas

Ω	-	Frequência de excitação [rad/s]
Ψ	-	Matriz dos modos de vibrar
ψ_s	-	Vetor de modos na s-ésima posição
ψ_r	-	Vetor de modos na r-ésima posição
ϕ_r	-	Vetor de modos normalizados pela massa na r-ésima posição
Φ	-	Matriz dos modos de vibrar normalizados pela massa
$[\omega_r^2]$	-	Matriz diagonal de frequências naturais ao quadrado [rad ² /s ²]
$[\omega_r]$	-	Matriz diagonal de frequências naturais [rad/s]
$\phi_{jr}\phi_{kr}$	-	Resíduo modal
γ^2	-	Valor de coerência
ξ_r	-	Razão de amortecimento viscoso do r-ésimo modo
ω_r	-	Frequência natural do r-ésimo modo [rad/s]
α	-	Coefficiente do termo cúbico da não linearidade [N/m ³]
β	-	Coefficiente do termo quadrático da não linearidade [N/m ²]

Lista de Acrônimos

FRF	- Frequency Response Function (Função de Resposta em Frequência)
RFS	- Restoring Force Surface (Superfície de Força de Restauração)
NARMAX	- Nonlinear autoregressive moving average with exogenous inputs modelling (Modelos Autoregressivos Não Lineares com Média Móvel e Entradas Exógenas)
NIFO	- Nonlinear Identification through Feedback of the Outputs
CRP	- Conditioned Reverse Path method (Método da Trajetória Reversa Condicionada)
NOFRF	- Nonlinear Output Frequency Response Function
HOFRF	- High Order Frequency Response Function (Função de Resposta em Frequência de Alta ordem)
NNM	- Nonlinear Normal Mode (Modo Normal Não-Linear)
DOF	- Degree of Freedom (Grau de Liberdade)
SISO	- Single Input Single Output
SIMO	- Single Input Multi Output
SDOF	- Single Degree of Freedom
MDOF	- Multi Degree of Freedom
MAC	- Modal Assurance Criterion
FRAC	- Frequency Response Assurance Criterion
PSD	- Power Spectral Density (Densidade Espectral de Potência)
HBM	- Harmonic Balance Method (Método do Balanço Harmônico)
LNLM	- Linear Normal Mode (Modo Normal Linear)
FEP	- Frequency Energy Plot

Lista de Figuras

1	Resposta do sistema.	27
2	Modos de vibrar da estrutura sob condição simplesmente apoiada.	28
3	Análise modal em suas duas vertentes.	34
4	Fenômeno de salto - em azul (-) baixo, em vermelho (- Δ -) médio e em preto (-o-) alto nível de força de excitação.	45
5	Espaço de configuração com os deslocamentos do elemento 1 (x_1) e 2 (x_2), em um sistema de 2 DOF.	46
6	Espaço de fase com a velocidade (\dot{x}_1) deslocamento do elemento 1 (x_1), em um sistema de 2 DOF.	47
7	Dependência entre frequência e energia aplicada (força de excitação - injetada no sistema). Em vermelho (-) por balanço harmônico e em azul \blacktriangle por integração numérica.	47
8	Espaço de configuração: NNMs similares e não similares.	53
9	Metodologia adotada.	63
10	Modelo físico adotado.	64
11	Comparação entre as FRFs estimadas e analíticas. Em azul (-) tem-se as FRFs analíticas e em vermelho (- Δ -) as estimadas - \mathcal{H}_{11}	66
12	Comparação entre as FRFs estimadas e analíticas. Em azul (-) tem-se as FRFs analíticas e em vermelho (- Δ -) as estimadas - \mathcal{H}_{21}	66
13	Gráficos de Nyquist com as FRFs estimadas e analíticas. Em azul (-) tem-se a aproximações analíticas e em vermelho (- Δ -) as estimadas.	67
14	Números de MAC para o caso simulado.	67

15	Comparação entre as FRFs estimadas, analíticas e regeneradas, para amplitude de excitação de 0.1 N. Em azul (-) tem-se as FRFs analíticas, em vermelho (Δ) as estimadas não paramétricas e em preto (\square) as regeneradas - \mathcal{H}_{11}	68
16	Comparação entre as FRFs estimadas, analíticas e regeneradas, para amplitude de excitação de 0.1 N. Em azul (-) tem-se as FRFs analíticas, em vermelho (Δ) as estimadas não paramétricas e em preto (\square) as regeneradas - \mathcal{H}_{21}	68
17	Validação do modelo modal reduzido considerando regime linear de movimento. Em azul (-) sinais obtidos pelo modelo físico simulado e em vermelho (---) pelo modelo modal.	69
18	Detecção da não linearidade pela degradação das FRFs (sinais obtidos pelo elemento de massa 2). Em azul (-) tem-se respostas para baixo nível de amplitude de excitação e em vermelho (---) para alta amplitude.	70
19	Amplitude de resposta em frequência para diferentes níveis de excitação, considerando o deslocamento x_2 . Em azul (-o-) para 0.1 N, em vermelho (- Δ -) para 0.5 N, em roxo (- \square -) para 0.8 N, em preto (-+-) para 1 N, em verde (- - -) para 1.5 N e em azul escuro (-) para 2 N.	70
20	Variação da frequência natural em função da amplitude de excitação.	71
21	RFS obtida para o caso simulado.	72
22	Validação do modelo modal de baixa dimensão considerando regime não-linear de movimento. Em azul (-) sinais obtidos pelo modelo físico simulado e em vermelho (---) pelo modelo modal.	72
23	Aparato experimental.	74
24	FRFs obtidas via estimador \mathcal{H}_1	76
25	Modos visualizados pela parte imaginária da FRF. Em azul (-) a parte imaginária e em vermelho (- \bullet -) uma visualização dos modos.	77
26	Valores de coerência obtidos.	77
27	Número de MAC para a matriz de modos.	78
28	FRFs reconstruídas - em azul (-) para FRF reconstruída e em vermelho (---) para FRF estimada - \mathcal{H}_{11}	79

29	FRFs reconstruídas - em azul (-) para FRF reconstruída e em vermelho (---) para FRF estimada - \mathcal{H}_{21}	79
30	FRFs reconstruídas - em azul (-) para FRF reconstruída e em vermelho (---) para FRF estimada - \mathcal{H}_{31}	80
31	Deslocamento do acelerômetro 3 em vermelho (---) experimental e em azul (-) obtido pelo modelo.	80
32	Fenômeno de salto para o primeiro modo. Em azul (o) tem-se regime linear (amplitude de excitação de 0.01 V) e em vermelho (Δ) regime não-linear de movimento (amplitude de excitação de 0.15 V).	81
33	FRFs para regime linear (-) e regime não-linear de movimento (---). Sinais obtidos para o acelerômetro 3, na extremidade livre da viga.	82
34	Diagrama tempo-frequência da resposta do sistema para sinais do acelerômetro 3 para duas amplitudes de excitação distintas.	83
35	Fenômeno de salto. Em azul (-o-) para 0.01 V, em vermelho (- Δ -) para 0.05 V, em roxo (- \square -) para 0.1 V, em preto (-+-) para 0.11 V, em verde (- - -) para 0.12 V, em azul escuro (- \diamond -) para 0.13 V, em alaranjado (- ∇ -) para 0.14 V, em cinza (-) para 0.15 V, em rosa (- \triangleright -) para 0.2 V e em verde musgo (- \star -) para 0.25 V.	84
36	Variação da primeira frequência natural do sistema com o aumento da amplitude de tensão elétrica.	85
37	Parte imaginária das FRFs para regime linear (-) e regime não-linear de movimento (---) para o primeiro modo de vibrar.	86
38	Espaço de configuração. No eixo das ordenadas tem-se deslocamento do acelerômetro 3 e nas abscissas deslocamentos do acelerômetro 2.	87
39	Espaço de fase. No eixo das ordenadas tem-se deslocamento do acelerômetro 3 e nas abscissas velocidades do acelerômetro 3.	87
40	Força de restauração não-linear obtida pelos sinais do acelerômetro 3.	89
41	Deslocamento do acelerômetro 3 em vermelho (---) experimental e em azul (-) obtido pelo modelo.	89
42	Modos normais lineares (em cores) e não-lineares (em preto) - projeção tridimensional do espaço de fase e projeções bidimensionais.	91

43	Primeiro NNM obtido na região da primeira frequência natural. A ordem crescente de amplitude de aceleração corresponde à ordem crescente de amplitude de excitação.	94
44	Dependência ente frequência e energia, considerando a primeira frequência natural e o primeiro modo de vibrar da estrutura.	95

Lista de Tabelas

1	Propriedades dos modos normais lineares e modos não-lineares.	55
2	Comparação entre os métodos de extração de NNMs na forma experimental.	59

Sumário

1	Introdução	19
1.1	Contribuições	23
1.2	Objetivos	24
1.3	Organização do trabalho	24
2	Revisão da Análise Modal e suas Limitações	26
2.1	Análise modal	26
2.2	Análise modal experimental	32
2.3	Conclusões	42
3	Identificação de Sistemas Não Lineares	44
3.1	Não linearidades: causas e efeitos	44
3.2	Identificação de parâmetros locais para descrição de sistemas não-lineares	47
3.3	Modos normais não-lineares	53
3.3.1	<i>LNMs e NNMs: semelhanças e diferenças</i>	54
3.3.2	<i>Cálculo de NNMs - métodos analíticos e numéricos</i>	56
3.3.3	<i>Extração de NNMs experimentalmente</i>	58
3.3.4	<i>Aplicações de NNMs no contexto industrial</i>	59
3.4	Conclusões	61
4	Exemplos de Aplicação	62
4.1	Exemplo numérico	64
4.2	Aplicação experimental em uma viga com rigidez cúbica	73

4.2.1	<i>Descrição da bancada de ensaios</i>	73
4.2.2	<i>Modelo equivalente por um oscilador de Duffing</i>	75
4.2.3	<i>Identificação do parâmetro não-linear usando a superfície de resposta</i>	81
4.2.4	<i>Identificação de NNMs experimentalmente e pelo modelo reduzido</i>	92
4.3	Avaliação e conclusões	96
5	Considerações Finais	97
5.1	Conclusões	97
5.2	Sugestões de trabalhos futuros	98
	Referências	99

1 Introdução

Desde os anos 70, o desenvolvimento e aplicações da teoria de análise modal se intensificaram, bem como estudos sobre dinâmica estrutural (EWINS, 1984; SCHWARZ; RICHARDSON, 1999). A análise modal é o estudo das características dinâmicas da estrutura, que são as frequências naturais, as razões de amortecimento e os modos de vibrar (derivados dos resíduos modais). Em outras palavras, é uma forma de caracterizar uma estrutura em função de parâmetros que não sejam diretamente massa e rigidez.

Existem basicamente duas maneiras de se realizar a análise modal. Na forma analítica, em que inicialmente deve-se formular um modelo matemático com fundamentação física (modelo físico), obtém-se a função de transferência analítica, com os valores de massa, rigidez e amortecimento, e então pode-se extrair os parâmetros modais (modelo modal). Na forma experimental, coleta-se os dados de entrada¹ e saída da estrutura em análise (modelo de resposta), e aplica-se alguma técnica para estimar a função de transferência e, com isso, pode-se extrair, com diferentes técnicas, destes resultados, os parâmetros modais (modelo modal). O modelo modal normalmente tem ordem reduzida se comparado ao modelo físico, o que facilita o processamento condensado sobre o regime dinâmico de uma estrutura (EWINS; WEEKES; CARRI, 2015). Assim, estas ferramentas se tornaram imprescindíveis pela indústria hoje em diferentes segmentos.

Hermans e Auweraer (1999) mostraram aplicações da análise modal em alguns casos industriais. No primeiro caso, foi analisado um problema de ruído em um carro de passageiros. Havia uma intensificação de som no interior do veículo quando a frequência atingia valores entre 60 e 90 Hz. Após análises em operação e medidas de FRF em laboratório, concluiu-se que o sistema de suspensão traseiro do carro contribuía para este efeito. No segundo caso, foram obtidos os parâmetros modais de uma asa de avião através de medidas de entrada (palhetas aerodinâmicas na ponta da asa) e medidas de resposta de aceleração, com o intuito de avaliar o efeito de *flutter* da aeronave comercial. Nesse caso, como em outros na indústria, foi importante adotar métodos capazes o suficiente para lidar com os dados, uma vez que os testes são de curta duração, por razões econômicas e de segurança.

Quando se projeta ou analisa alguma estrutura, deve-se ter parâmetros e medidas

¹Não obrigatório com método baseados apenas nas respostas.

de referência, o que exige de certa forma a construção de um modelo que emule o comportamento vibratório. Esses modelos têm por base, normalmente, as funções de resposta em frequência¹ para entradas e saídas que são medidas. Em resumo, a função de resposta em frequência é uma razão entre o sinal de entrada e o sinal de saída no domínio da frequência, e são elementos fundamentais na análise modal, pois dela pode ser obtido o modelo modal estimado (EWINS, 1984; FU; HE, 2001). A grande dificuldade é determinar os pontos de medida que satisfaçam as premissas adotadas no modelo que se deseja trabalhar, garantindo uma aquisição satisfatória dos dados e, além disso, extraíndo destas medidas as características dinâmicas que de fato emulem o comportamento da estrutura.

A grande limitação prática que existe na análise modal convencional é o não atendimento ao princípio da superposição ou soma modal, o qual estabelece que a resposta (tanto livre quanto forçada harmônica) é dada pela superposição das contribuições individuais dos vários modos de vibrar considerados. Em uma considerável parcela das situações, as estruturas podem estar sujeitas a vibrações em forte regime não-linear de movimento, sendo assim interessante o desenvolvimento de uma modelagem adequada nestes casos (VIRGIN, 2000; WORDEN; TOMLINSON, 2001; KERSCHEN *et al.*, 2006; NOËL; KERSCHEN, 2017). Nas situações em que o regime de operação caracteriza situação não linear, as propriedades características dos sistemas lineares, como a homogeneidade, invariância, reciprocidade, ortogonalidade, dentre outras, já não são mais válidas (EWINS, 1984; SILVA; MAIA, 2012; PREUMONT, 2013). A impossibilidade de levar estas propriedades em consideração na análise torna o processo mais complexo. Mesmo com os estudos e aplicações desenvolvidos nos últimos anos, pelo fato de regimes não-lineares de vibração possuírem particularidades, não há método ou técnica padrão que consiga de uma forma geral analisar e identificar os sistemas mecânicos em regime não-linear de movimento a partir dos modos normais (WORDEN; TOMLINSON, 2001).

Para o caso de uma análise de sistema em regime não linear, o que se considera é realizar uma análise convencional, para baixas amplitudes de excitação, aproximando este regime para linear. Assim, pode-se extrair parâmetros e construir um modelo de referência, beneficiando-se das propriedades anteriormente mencionadas, válidas para sistemas em regimes lineares. Posteriormente, o que se faz é, por meio de algum método, como superfície de resposta² por exemplo, identificar e extrair os parâmetros concentrados e discretos que caracterizem a(s) não linearidade(s). Assim, tem-se um modelo completo

¹Do inglês, *Frequency Response Function* - FRFs

²Do inglês, *Restoring Force Surface* - RFS

do sistema. Além deste, que é um método simples, existem diversas outras formas de lidar com não linearidades, mas ainda assim existem lacunas que devem ser preenchidas nos próximos anos para que haja o total entendimento dos fenômenos em dinâmica não-linear e seu uso em aplicações industriais. (NOËL; KERSCHEN, 2017).

Obviamente que uma limitação desta abordagem é que a estrutura acaba sendo considerada globalmente linear, onde modelos de elementos finitos podem ser válidos, porém localmente existem pontos na estrutura de junção ou conexão, ou certos regimes que induzem vibrações com padrões não-lineares e onde podemos descrever por meio de uma força de restauração local, normalmente polinomial e suave, um possível regime não-linear em termos de rigidez conforme sugerido recentemente no artigo de Ewins, Weekes e Carri (2015). Esta filosofia e classe de métodos é que será abordada nesta dissertação de mestrado.

Para a identificação destes parâmetros discretos para representar as não linearidades, inúmeros algoritmos são disponíveis. No domínio do tempo, destacam-se o método da superfície de resposta (MASRI; CAUGHEY, 1979), modelos autoregressivos não-lineares com média móvel e entradas exógenas¹ (CHEN *et al.*, 2007; PENG *et al.*, 2011; WORDEN; BARTHORPE, 2012; WORDEN; BARTHORPE; HENSMAN, 2012) e decomposição pela transformada de Hilbert (FELDMAN, 2006; FELDMAN, 2007). Além destes, existem outros como métodos de identificação através das saídas² (WORDEN *et al.*, 2009). Métodos de subespaço não-lineares também são aplicados na identificação de parâmetros não-lineares (MARCHESIELLO; GARIBALDI, 2008; OVERSCHEE; MOOR, 2012). No domínio da frequência, destacam-se métodos que utilizam espectros de Fourier, FRFs e funções de transmissibilidade, ou densidades espectrais de potência. Kerschen *et al.* (2006) citam dois métodos relevantes, que são o NIFO anteriormente citado (ADAMS; ALLEMANG, 2000) o método da trajetória reversa condicionada³ (RICHARDS; SINGH, 1998). Além destes, pode-se citar o método do balanço harmônico em Narayanan, Narayanan e Padmanabhan (2007) e Narayanan, Narayanan e Padmanabhan (2008). Outro método utilizado com base em séries de potência é a série de Volterra (WORDEN; MANSON; TOMLINSON, 1997; SCHETZEN, 2006). Os núcleos multidimensionais são a generalização não-linear da resposta ao impulso clássica de sistemas lineares, e as transformadas de Fourier destes núcleos são chamadas FRFs de alta ordem (HOFRFs). Em Silva, Cogan e Foltête (2010) as séries de Volterra são utilizadas com filtros de Kautz para moderar o número de parâmetros a serem estimados. Lang e Billings (2005) e Peng,

¹Do inglês, *Nonlinear autoregressive moving average with exogenous inputs modelling* - NARMAX

²Do inglês, *Nonlinear identification through feedback of the outputs* - NIFO

³Do inglês, *Conditioned Reverse Path* - CRP

Lang e Billings (2007b) desenvolveram, com base em Volterra, o conceito de FRFs não-lineares de saída¹, cuja aplicação pode ser vista em Peng, Lang e Billings (2007a) e Peng, Lang e Billings (2008). Além destes métodos mencionados, existem diversos outros que podem ser encontrados em Noël e Kerschen (2017).

Shiki (2016), Scussel (2017), Hansen (2015), Villani, Silva e Cunha Jr. (2019) mostraram uma aproximação para o comportamento de sistemas lineares através de séries de Volterra. Shiki (2016) mostrou a utilização desta métrica na identificação de sistemas não-lineares na parte de quantificação de parâmetros e em processos de detecção de danos (SHIKI; SILVA; TODD, 2017; HANSEN; SHIKI; SILVA, 2014; SHIKI; JUNIOR; SILVA, 2013). Hansen (2015) utilizou séries de Volterra na identificação do comportamento não-linear de uma viga protendida, uma viga magnetoelástica e um painel solar, aplicando uma métrica de detecção de variação estrutural baseada em índices derivados das contribuições lineares e não-lineares dos núcleos de Volterra (HANSEN *et al.*, 2015; NOËL; KERSCHEN, 2013). Villani, Silva e Cunha Jr. (2019) mostraram uma aplicação de séries de Volterra para detecção de danos em sistemas com não linearidades inerentes, considerando uma viga não-linear e o dano como uma trinca. O dano, neste caso, faz com que a viga apresente comportamento não linear, o que dificulta o processo de identificação (estrutura danificada ou saudável em regime não linear). Através da separação de efeitos lineares e não-lineares, quantificados pelos núcleos, foi possível detectar danos, mesmo no regime não-linear de vibração. Por fim, Scussel (2017) apresentou uma abordagem envolvendo funções de resposta em frequência de alta ordem² e séries de Volterra com expansão na base ortonormal de Kautz para caracterizar, identificar e analisar sistemas não-lineares com sinais de entrada e saída e somente saída. Além disso, foi proposta uma análise modal experimental com o intuito de caracterizar e lidar com efeitos não-lineares, ponto que será discutido nesta dissertação de mestrado com maior profundidade.

Entre estes métodos, um bem efetivo e simples é o método de superfície de resposta da força de restauração. Este método leva em consideração que a força de restauração nada mais é do que a diferença entre a excitação (sinais de entrada) e as respostas (sinais de saída). Graficamente, portanto, faz-se um ajuste de curva para se obter os parâmetros que descrevam o comportamento da não linearidade, e assim insere-se estes valores no modelo obtido assumindo a condição de regime linear (MASRI; CAUGHEY, 1979). Embora seja um processo simples, os resultados são razoáveis. A grande desvantagem é que este método pode ser usado somente quando a não linearidade se apresenta na forma concentrada e

¹Do inglês, *Nonlinear output frequency response functions* - NOFRFs

²Do inglês, *High Order Frequency Response Functions* - HOFRFs

discreta a alguns graus de liberdade. No caso de não linearidade global, o método não é indicado, pois o ajuste em uma hipersuperfície torna-se complexo e impraticável. O método pode ser usado para casos descontínuos, no entanto deve-se ter algumas hipóteses para que a aproximação seja conveniente (WORDEN, 1990). Porém, o fato do método ser fácil e acessível com poucas informações e por dar uma noção não-paramétrica do termo de restauração para garantir o balanço das equações de movimento, o tem tornado uma formulação de forte apelo prático para uso industrial.

Outra ferramenta de destaque nestas situações utiliza os modos normais não-lineares¹ no entendimento e tratamento dos fenômenos que ocorrem em dinâmica não linear. Conceituados como uma extensão dos modos normais lineares, os NNMs possibilitam uma identificação dos sistemas não-lineares sem levar em conta as aproximações que geralmente são feitas para que seja possível a análise modal convencional. Tem-se, assim, o efeito de interações modais e espaços modais que diferem dos preditos pela análise modal convencional. Além disso, os NNMs reconhecem a dependência entre frequência e energia e incluem este efeito no seu cálculo. O fato da frequência ser função da amplitude de excitação/energia para sistemas não-lineares é uma importante característica que influencia diretamente na análise (KERSCHEN *et al.*, 2009). Os NNMs serão melhor conceituados e explicados na seção 3.3.

1.1 Contribuições

Este trabalho busca contribuir com os tópicos:

- Mostrar experimentalmente como se dá a quebra das propriedades dos modos normais lineares de vibração quando uma estrutura opera em regime não linear. Em especial, a quebra da invariância e dependência frequência-amplitude de excitação é ressaltada e detalhada nos resultados experimentais alcançados com sugestões de indicadores usando dados comumente medidos em um teste convencional de análise modal experimental.
- Identificar um parâmetro não-linear concentrado e discreto para emular o comportamento dinâmico com um modelo físico-matemático reduzido quando a estrutura vibra em regime não-linear que possa ser descrito de maneira suave.
- Mostrar que modos normais não-lineares podem ser estimados e verificar sua relação com a mudança do nível de amplitude das forças aplicadas nas estruturas.

¹Do inglês, *Nonlinear Normal Modes* - NNMs

- Ao final, é apresentada uma forma de usá-los na representação de parâmetros concentrados ou mesmo como métricas para acompanhar o regime dinâmico da estrutura, seja para detecção de dano ou mesmo avaliação de regime de vibração que uma estrutura se encontra.

1.2 Objetivos

A meta deste trabalho é realizar um estudo experimental visando verificar que os parâmetros modais lineares não são válidos quando as estruturas vibram em regime não-linear de movimento. A partir desta constatação, já amplamente conhecida da literatura, propõem-se uma metodologia simples de calibração e verificação de um modelo modal de baixa dimensão (reduzido) que seja válido para descrever o comportamento da estrutura, mesmo apresentando um regime não-linear de movimento de natureza fraca.

1.3 Organização do trabalho

O trabalho está organizado nos capítulos:

- **Capítulo 1 - Introdução:** Breve introdução sobre análise modal, sistemas não-lineares e técnicas para modelagem destes, bem como a introdução ao conceito de modos normais não-lineares.
- **Capítulo 2 - Revisão da Análise Modal e suas Limitações:** Conceitos da análise modal em suas formas analítica e experimental, conceitos e propriedades básicas, identificação de parâmetros modais e motivos pelos quais seu uso é limitado.
- **Capítulo 3 - Identificação de Sistemas Não Lineares:** Causas e efeitos da presença de não linearidades em sistemas mecânicos e formas de lidar com as mesmas, breve explicação sobre RFS e uma seção dedicada aos NNMs.
- **Capítulo 4 - Exemplos de Aplicação:** Apresenta-se um exemplo numérico com aplicação de análise modal convencional e RFS para extração e caracterização da não linearidade, seguido de um caso experimental, onde se faz o mesmo procedimento do caso numérico, mas explora-se além da validação do modelo modal reduzido, a relação entre frequência e energia com os NNMs extraídos. O caso experimental foi uma viga engastada-livre de alumínio com um ímã na sua ponta livre. Diversos níveis de amplitude de excitação são amplificados com natureza diversa para conseguir

regimes não-lineares de movimento. A bancada vibra seguindo aproximadamente o mesmo comportamento de um oscilador de Duffing, com comportamento de rigidez cúbica. Assim, pode-se aproximar bem seu comportamento por um modelo reduzido e verificar ou não a aproximação usando seus modos de vibrar.

- **Capítulo 5 - Considerações Finais:** Algumas conclusões acerca do estudo desenvolvido, dificuldades encontradas e sugestões de trabalhos futuros.

2 Revisão da Análise Modal e suas Limitações

Este capítulo trata dos conceitos principais da análise modal e suas limitações. A seção 2.1 define o conceito de análise modal e apresenta uma breve revisão sobre o assunto. A seguir, a seção 2.2 introduz esta vertente da análise modal e como é possível se obter um modelo modal a partir de um modelo de resposta. Por fim, na seção 2.3, resume-se como foram aplicados os conceitos descritos na forma experimental.

2.1 Análise modal

As frequências naturais, razões de amortecimento e modos de vibrar (padrões) são propriedades inerentes às estruturas. Em suma, há características que dependem da massa e rigidez da estrutura, as quais determinam a existência dos modos de vibrar e frequências naturais (EWINS, 1984; SCHWARZ; RICHARDSON, 1999). Com isto, hoje em dia em qualquer projeto estrutural moderno, faz-se necessário identificar essas frequências e saber como estas afetam a resposta da estrutura quando uma força de excitação é aplicada. Essas características podem ser extraídas dos sinais de entrada e saída por meio de técnicas no domínio do tempo ou frequência, cada qual com suas vantagens, desvantagens e limitações, além dos tipos de sistemas que podem ser considerados, por exemplo, uma entrada e uma saída (SISO ¹), uma entrada e várias saídas (SIMO ²) e outras configurações (EWINS, 1984).

Segundo Ewins (1984), Iglesias (2000) e Lundkvist (2010) conceitua-se análise modal um estudo das propriedades dinâmicas estruturais, obtidas pela função de resposta em frequência (FRF), mediante excitações por vibrações. Schwarz e Richardson (1999) elencam os parâmetros modais como sendo: modos de vibração, frequências naturais e fatores de amortecimento. Para se aplicar a análise modal corretamente, é necessário conhecer os conceitos de vibração, processamento de sinais e uma análise de dados detalhada. Teoricamente, uma estrutura possui tantos modos de vibrar quantos forem seus graus de liberdade, assim, uma vez que os sistemas são contínuos, o número de modos

¹Do inglês, *Single-Input-Single-Output*

²Do inglês, *Single-Input-Multi-Output*

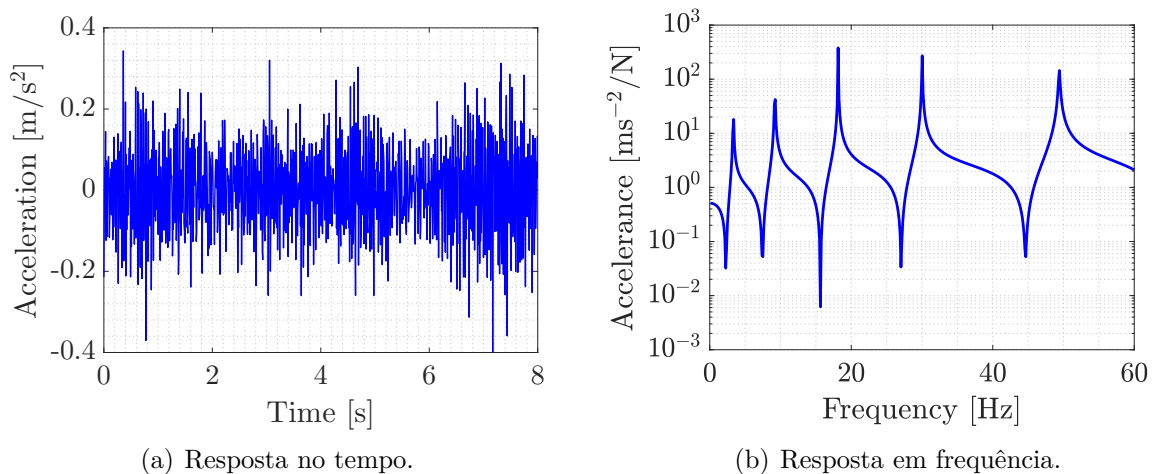
(ou autofunções) seria infinito. Porém, na prática, existe uma limitação de frequência, a qual não permite identificar todos os modos. O que se faz é aproximar a resposta do sistema para um número de modos que a represente de forma satisfatória, ou seja, um truncamento.

Para entender a essência da análise modal, toma-se como exemplo, uma viga sob condição simplesmente apoiada e aplica-se uma excitação do tipo aleatória em um determinado ponto. Com um acelerômetro, mede-se a resposta neste mesmo ponto e, por meio das densidades espectrais, pode-se calcular a função de resposta em frequência com os sinais de entrada e saída, como mostra a Fig. 1.

No gráfico da resposta em frequência, nota-se a presença dos picos que caracterizam frequências de ressonância, isto é, os pontos onde a frequência de excitação assume o mesmo valor da frequência natural do sistema. Ainda mais, para cada um desses picos, a estrutura se deforma de uma maneira diferente, seguindo um padrão. Denomina-se cada um desses padrões como um modo de vibrar da estrutura, que também são características inerentes ao sistema. Esse fenômeno pode ser visualizado na Fig. 2.

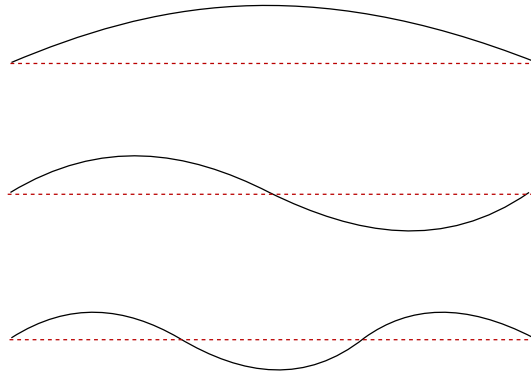
Além das frequências de ressonância, é possível notar, na Fig. 1, vales entre picos consecutivos. Estes vales são atribuídos à presença de anti-ressonâncias, fenômenos que ocorrem quando as constantes modais entre dois modos consecutivos possuem o mesmo sinal, e que acarretam uma mudança de fase associada. As anti-ressonâncias ocorrem em sistemas com mais de um grau de liberdade e são características importantes na área de controle de vibrações.

Figura 1 – Resposta do sistema.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 2 – Modos de vibrar da estrutura sob condição simplesmente apoiada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para estruturas e elementos contínuos, geralmente o que se faz é uma discretização em massas concentradas com n graus de liberdade, para que se possa construir um modelo e aproximar o comportamento do objeto de estudo real. Por exemplo, para um sistema conservativo, representa-se matricialmente as n equações diferenciais de segunda ordem (de movimento) na forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (1)$$

em que $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa a matriz de massa, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa a matriz de amortecimento, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de rigidez, \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$ e $\ddot{\mathbf{x}}$ deslocamentos, velocidades e acelerações no domínio físico (vetores), e \mathbf{f} as forças externas (vetor). Os parâmetros modais são obtidos para o sistema em vibração livre, ou seja, livre da ação de forças externas, e considerando a situação não amortecida. Dessa forma, tem-se:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2)$$

Admitindo uma solução do tipo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}e^{st}$ (homogênea), sendo $s = j\Omega$, chega-se:

$$(-\mathbf{M}\Omega^2 + \mathbf{K})\mathbf{\Psi}e^{j\Omega t} = \mathbf{0} \quad (3)$$

E, conseqüentemente, como o termo $e^{j\Omega t}$ nunca assume o valor zero:

$$(-\mathbf{M}\Omega^2 + \mathbf{K})\Psi = \mathbf{0} \quad (4)$$

Resolvendo este problema de autovalor/autovetor, encontra-se as frequências naturais não amortecidas e modos de vibrar do sistema, sendo os autovalores as frequências modais complexas. Considerando este sistema conservativo, a parte real dos autovalores deve ser nula. Cada autovetor associado ao respectivo autovalor representa um modo de vibrar associado a uma frequência natural. As frequências naturais normalmente são expressas pela letra ω_r onde r é o índice atribuído (1 para primeira, 2 para segunda, até o número considerado) e dispostas em uma matriz diagonal na ordem dos índices, e os modos representados por uma matriz Ψ em que cada coluna contém os valores dos deslocamentos relativos que formam o modo. Dessa forma, o modo não possui um valor fixo, pois é uma relação de valores (EWINS, 1984; PREUMONT, 2013).

Uma propriedade muito importante dos modos é a ortogonalidade dos vetores modais. Essa propriedade implica, basicamente, que:

$$\psi_s^T \mathbf{M} \psi_r = 0 \quad (5)$$

$$\psi_s^T \mathbf{K} \psi_r = 0 \quad (6)$$

em que ψ_s^T e ψ_r representam dois modos distintos. Essa propriedade mostra que os modos são ortogonais entre si, ou seja, formam a base de um espaço n -dimensional. Se, ao se obter os modos de vibrar de uma estrutura, estes não obedecerem a esta condição, tem-se a quebra da ortogonalidade, e não mais se pode considerá-la na modelagem. Quando se tem, contudo, os mesmos modos aplicados a esta eq. (6), define-se:

$$\psi_r^T \mathbf{M} \psi_r = m_r \quad (7)$$

$$\psi_r^T \mathbf{K} \psi_r = k_r \quad (8)$$

em que m_r e k_r representam a massa e rigidez modais, respectivamente. Para todos os modos, tem-se as matrizes de massa e rigidez modais, as quais são diagonais. Aqui entra a questão da normalização pela massa, que é o tipo de normalização mais utilizada em análise modal. O que se faz, nesse caso, é definir modos normalizados na forma:

$$\phi_r^T \mathbf{M} \phi_r = 1 \quad (9)$$

$$\phi_r = \alpha_r \psi_r \quad (10)$$

Dessa maneira:

$$\phi_r^T \mathbf{M} \phi_r = \alpha_r \psi_r^T \mathbf{M} \alpha_r \psi_r \quad (11)$$

$$\phi_r^T \mathbf{M} \phi_r = 1 = \alpha_r^2 \psi_r^T \mathbf{M} \psi_r \quad (12)$$

$$\alpha_r = \frac{1}{\sqrt{\psi_r^T \mathbf{M} \psi_r}} = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \quad (13)$$

Assim, e conseqüentemente para a matriz de rigidez, definindo a matriz de modos normalizados pela massa por Φ , segue que:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (14)$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = [\omega_r^2] \quad (15)$$

A grande vantagem de se trabalhar no domínio modal é o desacoplamento das equações de movimento. O que ocorre, na realidade, quando se trabalha com coordenadas físicas, é um acoplamento das equações que descrevem o sistema, e dessa forma a solução se torna complexa e onerosa. Esse acoplamento se dá pelo fato das matrizes de massa e/ou

rigidez possuı́rem elementos fora da diagonal principal que nˆao sˆao nulos. Ao se trabalhar com coordenadas modais, entretanto, tem-se matrizes que sˆao diagonais, e assim   possı́vel desacoplar o sistema e obter solu˜oes de forma mais simples. Essa mudana, que em outras palavras permite descrever um sistema com múltiplos graus de liberdade em vários sistemas de um grau de liberdade,   conhecida como teorema da superposi˜ao, propriedade que, juntamente com a ortogonalidade, formam duas características importantes dos sistemas lineares (EWINS, 1984; PREUMONT, 2013; MAIA; SILVA, 1997; SILVA; MAIA, 2012). A transforma˜ao de coordenadas físicas para coordenadas modais, ou coordenadas principais,   dada por:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{q}(t) \quad (16)$$

em que $\mathbf{q}(t)$ representa o vetor de coordenadas modais. Substituindo entˆao a eq. (16) na eq. (1), considerando agora o caso com entrada forada, tem-se:

$$\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{\Phi}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f} \quad (17)$$

Pré-multiplicando a eq. (17) por $\mathbf{\Phi}^T$, segue:

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{D}\mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}\mathbf{q}(t) = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{f} \quad (18)$$

O termo $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}$ denomina-se matriz de massa modal, $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{D}\mathbf{\Phi}$ matriz de amortecimento modal, $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}$ matriz de rigidez modal e $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{f}$ excita˜ao modal. Para que a diagonaliza˜ao da matriz de amortecimento seja possı́vel, considerando a rela˜ao de ortogonalidade no modelo modal do sistema nˆao amortecido,   necessário que a matriz \mathbf{D} seja uma combina˜ao das matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} . Dessa maneira, levando-se em conta um amortecimento na forma proporcional:

$$\mathbf{D} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K} \quad (19)$$

Portanto, com a relação (18), pode-se escrever:

$$\Phi^T \mathbf{D} \Phi = a_0 \mathbf{M}_m + a_1 \mathbf{K}_m \quad (20)$$

em que $\mathbf{M}_m = \Phi^T \mathbf{M} \Phi$ e $\mathbf{K}_m = \Phi^T \mathbf{K} \Phi$. Considerando a eq. (14) e eq. (15), tem-se por fim:

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\mathbf{Z}[\omega_r] \dot{\mathbf{q}} + [\omega_r^2] \mathbf{q} = \mathbf{M}_m^{-1} \Phi^T \mathbf{f} \quad (21)$$

em que (GAWRONSKI, 1998):

$$\mathbf{Z} = 0,5 \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{D}_m [\omega_r^2]^{-1} \quad (22)$$

$$\mathbf{D}_m = \Phi^T \mathbf{D} \Phi \quad (23)$$

A formulação aqui representada descreve o caminho que se inicia com um modelo físico, ou seja, tem-se as matrizes de massa e rigidez, para um modelo modal, constituído pelas frequências naturais e modos de vibrar. Entretanto, em situações práticas, o que se tem são respostas obtidas por medições (entradas e/ou saídas), e com isso descreve-se um modelo modal que represente a estrutura estudada. Esta é uma outra forma que também resulta na obtenção dos parâmetros modais, porém não mais proveniente de um modelo físico, e sim de um modelo de resposta. Esse é um outro aspecto da análise modal e será tratado na seção a seguir.

2.2 Análise modal experimental

A situação descrita na seção anterior trata de um caminho em que são conhecidos os valores de massa, rigidez e amortecimento do sistema. A análise modal, nesse caso, é uma vertente denominada **análise modal analítica**, a qual, na realidade, segue uma sequência iniciada em um modelo físico/matemático, em seguida um modelo modal obtido pelos parâmetros modais, e por fim um modelo de resposta.

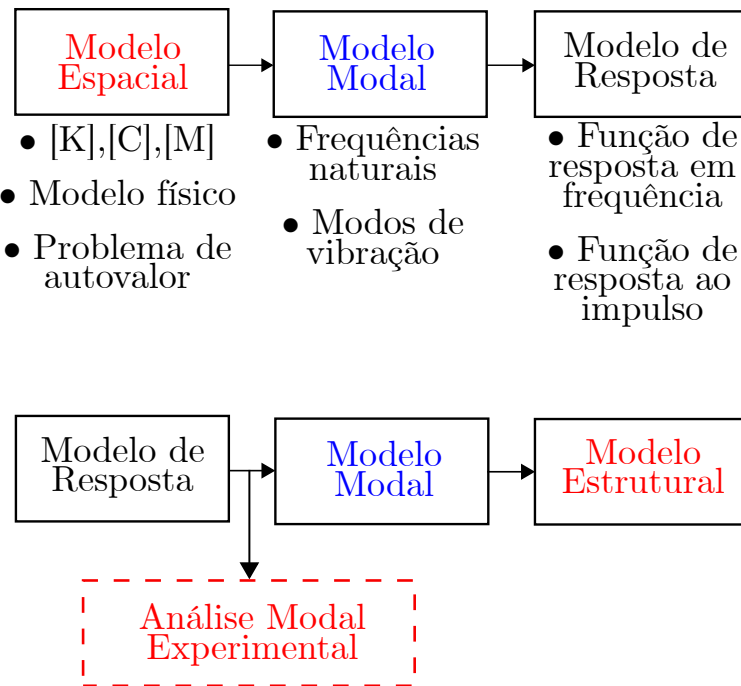
No caso da **análise modal experimental**, tem-se inicialmente os dados de resposta obtidos por algum sistema de aquisição de dados, os quais são processados para se obter um modelo de resposta, composto pelas funções de resposta em frequência ou funções de resposta ao impulso. Dessa forma, busca-se encontrar um modelo modal a partir destes dados de entrada/saída (MAIA; SILVA, 1997). A Figura 3 ilustra os dois caminhos que podem ser feitos dentro da análise modal.

Destacam-se duas vertentes, dentro desta modalidade. A primeira considera as condições operacionais nas medidas (análise modal operacional), enquanto a segunda envolve medição em ambiente controlado, e assim permite extrair informações mais detalhadas acerca da estrutura estudada, e é denominado teste modal¹. Por meio desse teste, é possível extrair os parâmetros modais do sistema e, dessa forma, construir um modelo modal através de técnicas de extração que dependem dos dados obtidos. Antes de prosseguir com as outras etapas, é necessário delimitar objetivos e verificar quais resultados se pretende obter e como interpretá-los (EWINS, 1984).

Para se obter um modelo modal que represente a estrutura de forma confiável, é necessário ter medidas com acurácia, para que se possa, conseqüentemente, utilizar as funções de resposta em frequência corretas. Assim, o desafio inicial é garantir medidas corretas. Deve-se avaliar o material e disposição do objeto de estudo, as condições de contorno, para então efetuar a instrumentação da melhor forma possível. Quando da aquisição de dados, os efeitos de *aliasing* e ruído devem ser evitados, bem como delimitar uma frequência de amostragem correta. Já no processamento do sinal, deve-se levar em conta efeitos de *leakage*, janelamento, sobreposição, número de amostras, regime transiente, entre outros, que se possa garantir o cálculo correto das FRFs.

¹Do inglês, *Modal Testing*

Figura 3 – Análise modal em suas duas vertentes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A excitação controlada de uma estrutura em laboratório pode ser feita com impacto usando um martelo instrumentado ou com um excitador que pode ser hidráulico ou eletromagnético. O uso de excitador *shaker* é mais difundido por permitir simular situações mais diversas e próximas das condições e regimes de vibração que uma estrutura pode apresentar no ambiente real de operação. O teste de impacto é feito normalmente com um martelo instrumentado e possibilita a medida de resposta em um ponto e vários pontos de entrada, que no caso são os impactos em vários pontos da estrutura. Isso corresponde a uma linha da matriz de FRFs. Já o teste feito com o *shaker* pode ser estendido para diversos tipos de entradas, sendo as principais a entrada com sinal aleatório e sinal de varredura em frequência (*chirp*), com suas variações, e neste caso a entrada se dá em um ponto e mede-se a resposta em vários pontos ao longo da estrutura. O sinal aleatório puro é o tipo de sinal mais popularmente utilizado nos testes com *shaker*, e geralmente é combinado com janelamento *Hanning*, para evitar efeitos de *leakage*. Outros como *burst random* e pseudo aleatório também são utilizados nos testes com *shaker* (SCHWARZ; RICHARDSON, 1999).

Considerando então medidas confiáveis, o próximo passo dentro da análise modal experimental é obter as características dinâmicas do sistema por meio do processamento dos dados. Basicamente, busca-se ajustar uma curva que melhor represente os sinais de resposta obtidos, de forma paramétrica. Pode-se explorar esse ajuste de forma local

para um grau de liberdade (SDOF¹), vários graus de liberdade (MDOF²) ou também na perspectiva global. Existem diversos métodos capazes de estimar esses parâmetros, mas neste estudo será explorado o conhecido como *circle-fit* em uma vertente conhecida como *inversa*, mas que trabalha com as mesmas hipóteses, que não explora o formato circular do gráfico de Nyquist, mas com retas derivadas deste gráfico, e trabalha com propriedades geométricas na estimativa, considerando os sinais no domínio da frequência. Este método é interessante porque o ajuste de retas é mais simples e rápido do que ajustes baseados em círculos ou formas mais complexas. Além disso, a característica da reta facilita a detecção de discrepâncias como dados deficientes, modelos com amortecimento inapropriados ou comportamento não linear. Opta-se por este método por considerar um sistema que tenha modos de vibrar fracamente acoplados ou seja, modos cujas frequências naturais sejam suficientemente espaçadas no domínio da frequência. Além disso, salienta-se que o método de ajustagem do círculo é um método *single-mode*, ou seja realiza a identificação de um modo por vez. No presente caso, como apenas dois (caso numérico) e três (caso experimental) modos são considerados, tal limitação não incorre em desvantagem quanto à eficiência computacional no uso do método. Em outras palavras, o método é indicado, mas não para sistemas que tenham modos com frequências naturais muito próximas, senão os círculos de Nyquist se interferem mutuamente (EWINS, 1984).

Quando se realiza um experimento em análise modal experimental, o que se tem são sinais de entrada e saída. A escolha dos pontos de medida está intimamente ligada à faixa de frequência e modos que se deseja analisar, pois a mudança no ponto de excitação, por exemplo, em um teste de impacto, pode alterar o resultado final e comprometer a análise esperada. Considerando então que, experimentalmente, tem-se apenas dados de entrada/saída, a função de resposta em frequência, que é a relação entre saída pela entrada, pode ser escrita na forma (EWINS, 1984):

$$\mathcal{H}_{jk}(\Omega) = \frac{X_j(\Omega)}{F_k(\Omega)} \quad (24)$$

em que X_j representa o sinal de saída, F_k o sinal de entrada e \mathcal{H}_{jk} é a função de resposta em frequência para a entrada j e saída k . Pode-se escrever também a eq. (24) em função dos parâmetros modais. Partindo da eq. (1), e considerando uma solução do tipo

¹Do inglês, *Single Degree of Freedom*

²Do inglês, *Multi Degree of Freedom*

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}e^{i\Omega t} \text{ e } \mathbf{x}(t) = \mathbf{X}e^{i\Omega t}:$$

$$(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M})\mathbf{X}e^{i\Omega t} = \mathbf{F}e^{i\Omega t} \quad (25)$$

$$(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M})^{-1} = \frac{\mathbf{X}e^{i\Omega t}}{\mathbf{F}e^{i\Omega t}} = \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{F}} \quad (26)$$

Dessa forma, incluindo a eq. (24) na eq. (26):

$$(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}) = [\mathbf{H}(\Omega)]^{-1} \quad (27)$$

Pré-multiplicando por Φ^T e pós-multiplicando por Φ em ambos os lados, tem-se:

$$\Phi^T(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M})\Phi = \Phi^T[\mathbf{H}(\Omega)]^{-1}\Phi \quad (28)$$

$$[\omega_r^2 - \Omega^2] = \Phi^T[\mathbf{H}(\Omega)]^{-1}\Phi \quad (29)$$

$$\mathbf{H}(\Omega) = \Phi[\omega_r^2 - \Omega^2]^{-1}\Phi^T \quad (30)$$

em que $\mathbf{H}(\Omega)$ representa a matriz de FRFs e $[\omega_r^2 - \Omega^2]$ é uma matriz diagonal que tem por elementos principais a diferença entre a r -ésima frequência natural e a frequência de excitação dada pela entrada forçada ao sistema. Com isso, relacionando o resultado final obtido na eq. (30) com a FRF em função de entrada/saída, segue que:

$$\mathcal{H}_{jk}(\Omega) = \frac{X_j(\Omega)}{F_k(\Omega)} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{\omega_r^2 - \Omega^2} \quad (31)$$

onde N representa o número de modos que estão considerados no modelo. Dessa forma, claramente é possível perceber que há uma relação entre os dados de resposta e os parâmetros modais. O termo $\phi_{jr}\phi_{kr}$ é também conhecido como resíduo modal, e pode ser

representado por ${}_rA_{jk}$. A ideia é justamente, por meio destes sinais, obter os parâmetros e construir um modelo modal (EWINS, 1984; MAIA; SILVA, 1997).

Aqui, para este caso, na eq. (31), tem-se o valor da receptância ilustrado, que usa sinais de deslocamento. Outras maneiras de se representar uma FRF é a partir de sinais de velocidade ou aceleração. Para estes casos, a FRF é denominada mobilidade ou acelerância, respectivamente. A obtenção destas FRFs a partir da receptância é dada por:

$$\mathbf{V}(\Omega) = i\Omega\mathbf{H}(\Omega) \quad (32)$$

$$\mathbf{A}(\Omega) = -\Omega^2\mathbf{H}(\Omega) \quad (33)$$

onde $\mathbf{V}(\Omega)$ é a matriz de mobilidades e $\mathbf{A}(\Omega)$ é a matriz de acelerâncias. O termo $\mathbf{H}(\Omega)$ representa, assim, a matriz de receptâncias.

Considerando o tipo de entrada sendo um sinal do tipo aleatório puro, a estimativa da FRF deve ser feita tomando-se as densidades espectrais. Por não se tratar de um sinal periódico, não é possível simplesmente aplicar a transformada de Fourier nos sinais de entrada e saída e relacioná-los. Assim, tem-se em princípio dois estimadores para a FRF considerando uma entrada aleatória. O primeiro, denominado $\mathcal{H}_1(\Omega)$ relaciona a densidade espectral cruzada de entrada/saída e a densidade espectral de entrada, da seguinte forma (EWINS, 1984; OPPENHEIM; SCHAFER, 2013):

$$\mathcal{H}_1(\Omega) = \frac{S_{fx}(\Omega)}{S_{ff}(\Omega)} \quad (34)$$

sendo:

$$S_{xx}(\Omega) = |\mathcal{H}(\Omega)|^2 S_{ff}(\Omega) \quad (35)$$

$$S_{fx}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega) S_{ff}(\Omega) \quad (36)$$

$$S_{xx}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega)S_{xf}(\Omega) \quad (37)$$

onde S_{ff} e S_{xx} são os auto-espectros dos sinais de entrada e saída, respectivamente, e S_{fx} é o espectro cruzado entre os dois sinais (MARAL, 2004; RICKER, 2003; DAVENPORT, 1987). O outro estimador, denominado $\mathcal{H}_2(\Omega)$, é dado por:

$$\mathcal{H}_2(\Omega) = \frac{S_{xx}(\Omega)}{S_{xf}(\Omega)} \quad (38)$$

Teoricamente, os valores de $\mathcal{H}_1(\Omega)$ e $\mathcal{H}_2(\Omega)$ deveriam ser iguais. Entretanto, devido a alguns fatores, em determinadas frequências ou faixas de frequências, podem ocorrer divergências. Para quantificar esses eventos, tem-se a relação:

$$\gamma^2 = \frac{\mathcal{H}_1(\Omega)}{\mathcal{H}_2(\Omega)} \quad (39)$$

que é conhecida como coerência. Para valores iguais ou próximos da unidade, tem-se uma estimativa satisfatória da FRF. Já para valores distantes da unidade, o que pode ocorrer é a passagem por uma frequência natural ou a presença de ruídos nos sinais. A função coerência não apenas pode ser usada para indicativo de ruído nas FRFs mas também para a presença de efeitos não-lineares. Quando se assume que o ruído afeta mais o sinal de resposta, o estimador $\mathcal{H}_1(\Omega)$ é recomendado, pois ele é dado na forma:

$$\mathcal{H}_1(\Omega) = \frac{S_{fx}(\Omega)}{S_{ff}(\Omega) + S_{nn}(\Omega)} \quad (40)$$

em que $S_{nn}(\Omega)$ representa o auto-espectro do ruído na entrada, ou seja, elimina-se efeitos de ruído provenientes dos sinais de resposta. Quando o ruído afeta mais os sinais de entrada, recomenda-se o estimador $\mathcal{H}_2(\Omega)$, e quando tem-se efeitos de ruído tanto na entrada quanto na saída, recomenda-se o estimador $\mathcal{H}_v(\Omega)$, dado por:

$$\mathcal{H}_v(\Omega) = \sqrt{\mathcal{H}_1(\Omega)\mathcal{H}_2(\Omega)^T} \quad (41)$$

Dessa forma, tem-se uma amenização dos efeitos externos nas medidas.

Como já mencionado anteriormente, existem métodos diversos para obtenção dos parâmetros modais, mas aqui o enfoque maior será dado em uma análise para SDOF que considera que, no diagrama de Argand-Gauss, o inverso da receptância possui o comportamento que pode ser aproximado por uma reta. São considerados gráficos da parte real do inverso da receptância em função do quadrado da frequência e parte imaginária do inverso da receptância em função do quadrado da frequência. Inicialmente, seleciona-se a banda de frequência que se deseja trabalhar, aproximando para um sistema SDOF. Na sequência, faz-se uma aproximação por mínimos quadrados para a reta obtida pelo inverso da receptância. Matematicamente, o que se faz é definir a receptância para uma frequência próxima da natural considerada e adiciona-se um termo que representa a contribuição dos outros modos (EWINS, 1984):

$$\mathcal{H}_{jk}(\Omega)_{\Omega \approx \omega_r} \cong \frac{{}_r A_{jk}}{\omega_r^2 - \Omega^2} + {}_r B_{jk} \quad (42)$$

Considerando um sistema com amortecimento (modelo viscoso):

$$\mathcal{H}_{jk}(\Omega)_{\Omega \approx \omega_r} \cong \frac{{}_r A_{jk}}{\omega_r^2 - \Omega^2 + i2\xi_r \omega_r^2} + {}_r B_{jk} \quad (43)$$

em que o termo ${}_r B_{jk}$ representa a contribuição dos outros modos e ξ_r a razão de amortecimento (modelo viscoso). Define-se então um novo termo para a receptância, dado por:

$$\delta_{jk}(\Omega) = \mathcal{H}_{jk}(\Omega) - \mathcal{H}_{jk}(\Omega_f) \quad (44)$$

que é a diferença entre a receptância em uma frequência Ω variável e a receptância em uma frequência Ω_f fixa. Aqui, define-se o parâmetro da FRF inversa, que é a base do método. Com isto:

$$\Delta(\Omega) = \frac{\Omega^2 - \Omega_f^2}{\delta_{jk}(\Omega)} \quad (45)$$

Esse parâmetro pode ser dividido em parte real e parte imaginária. Define-se então:

$$\Re(\Delta) = A\Omega^2 + B \quad (46)$$

$$\Im(\Delta) = C\Omega^2 + D \quad (47)$$

Os termos A e C são escritos em função de ω_r , Ω_f e ξ_r , e o resíduo modal é escrito em função de A e C , na forma:

$$A = u(\Omega_f^2 - \omega_r^2) - v(\omega_r^2 4\xi_r^2) \quad (48)$$

$$C = -v(\Omega_f^2 - \omega_r^2) - u(\omega_r^2 4\xi_r^2) \quad (49)$$

$${}_r A_{jk} = u + iv \quad (50)$$

Dessa forma, o que se faz é determinar o melhor ajuste de reta para uma frequência Ω_{fx} fixa e calcular os valores de $A(\Omega_{fx})$ e $C(\Omega_{fx})$. Assim, determina-se:

$$A = \alpha_R \Omega_f^2 + \beta_R \quad (51)$$

$$C = \alpha_I \Omega_f^2 + \beta_I \quad (52)$$

em que:

$$\alpha_R = u \quad (53)$$

$$\beta_R = -v(\omega_r^2 2\xi_r) - u(\omega_r^2) \quad (54)$$

$$\alpha_I = -v \quad (55)$$

$$\beta_I = v(\omega_r^2) - u(\omega_r^2 2\xi_r) \quad (56)$$

e tomando:

$$\lambda = \frac{\alpha_I}{\alpha_R} \quad (57)$$

$$\mu = \frac{\beta_I}{\beta_R} \quad (58)$$

chega-se:

$$\xi_r = \frac{\mu - \lambda}{1 + \lambda\mu} \quad \omega_r^2 = \frac{\beta_R}{(\lambda 2\xi_r - 1)\alpha_R} \quad (59)$$

$$u = \frac{\omega_r^2(\lambda 2\xi_r - 1)}{(1 + \lambda^2)\beta_R} \quad v = -u\lambda \quad (60)$$

Tem-se, assim, os valores de ω_r , ξ_r e resíduo modal pela eq. 50. Para um sistema com vários graus de liberdade, o que se faz é aplicar o método separadamente, e depois somar as contribuições de cada modo, sintetizando a FRF. Existem outros métodos mais sofisticados, que inclusive estimam os parâmetros modais para os múltiplos graus de liberdade simultaneamente (EWINS, 1984).

Para verificar a validade dos modos estimados, utiliza-se algum critério de garantia. Neste trabalho, será assumido o critério de confiabilidade modal¹. Este critério leva em consideração o grau de linearidade entre os vetores dos modos. Esta certificação serve

¹Do inglês, *Modal Assurance Criterion* - MAC

para avaliar os modos obtidos por outros métodos ou diferentes pontos de referência. O número MAC, como é chamado, é um escalar que relaciona o grau de linearidade entre dois modos (ou vetores, matematicamente), da seguinte forma:

$$MAC_{a,b} = \frac{|\phi_b^T \cdot \phi_a|^2}{(\phi_b^T \cdot \phi_b)(\phi_a^T \cdot \phi_a)} \quad (61)$$

O valor do número MAC varia entre zero e a unidade. Para valores próximos de zero, tem-se modos não correlacionados, e para a unidade, tem-se correlação. Normalmente, para vetores de modos estimados corretamente, a matriz dos números de MAC é próxima de uma matriz identidade. É importante lembrar que este critério não indica a questão da ortogonalidade ou validade dos modos.

Para avaliar a correlação das FRFs (analíticas, estimadas e reconstruídas a partir dos parâmetros modais), existem algumas métricas difundidas na literatura. Neste estudo, empregou-se o FRAC¹, que é definido na forma (EWINS, 1984):

$$FRAC_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^L |({}_X\mathcal{H}_{jk}(\Omega_i))({}_A\mathcal{H}_{jk}^*(\Omega_i))|^2}{\sum_{i=1}^L |{}_X\mathcal{H}_{jk}(\Omega_i)|^2 \sum_{i=1}^L |{}_A\mathcal{H}_{jk}(\Omega_i)|^2} \quad (62)$$

em que L representa a amostra de frequência até onde se considera o cálculo do $FRAC$, ${}_X\mathcal{H}_{jk}(\Omega_i)$ indica a FRF de referência e ${}_A\mathcal{H}_{jk}(\Omega_i)$ a FRF estimada ou reconstruída de forma paramétrica (regenerada). Dessa forma, o valor de $FRAC$ é um escalar e, como se trata de uma correlação, quanto mais próximo seu valor da unidade, melhor o ajuste do modelo modal aos valores obtidos experimentalmente.

2.3 Conclusões

Toda a formulação apresentada até o momento é clássica e é válida para sistemas vibrando em regime linear de movimento. Quando se tem um sistema que apresenta comportamento não-linear em seu regime de operação, a propriedade de ortogonalidade já não mais é válida, e dessa forma é impossível desacoplar as equações de movimento. De certa forma, aplica-se a análise modal linear para determinadas condições de operação. Quando esse tipo de consideração viola as garantias de uma representação correta, é necessário abordar a situação por outro ponto de vista, isto é, incluindo os efeitos não-

¹Do inglês, *Frequency Response Assurance Criterion*

lineares no modelo, que são abordados no próximo capítulo.

3 Identificação de Sistemas Não Lineares

Este capítulo contém uma breve introdução aos sistemas com a presença de não linearidades e suas implicações dentro da análise modal. Inicialmente, na seção 3.1, uma breve explicação é feita sobre as limitações de se assumir modelos lineares e a inclusão de parâmetros não-lineares em análises de estruturas, bem como as causas e efeitos destes fenômenos. Na sequência, seção 3.2, identificação das não linearidades e como incluir estes efeitos no modelo teórico para representar o comportamento em regime não-linear de movimento. Por fim, algumas considerações finais são apresentadas.

3.1 Não linearidades: causas e efeitos

Toda a análise considerada anteriormente no capítulo 2 é válida para sistemas que vibram em regime linear de movimento. No entanto, existe uma quantidade considerável de situações em que, devido a configurações geométricas, material com relações constitutivas complexas, amplitude de movimento, atrito, entre outros, as estruturas possuem, em sua operação, características de regime não-linear de movimento.

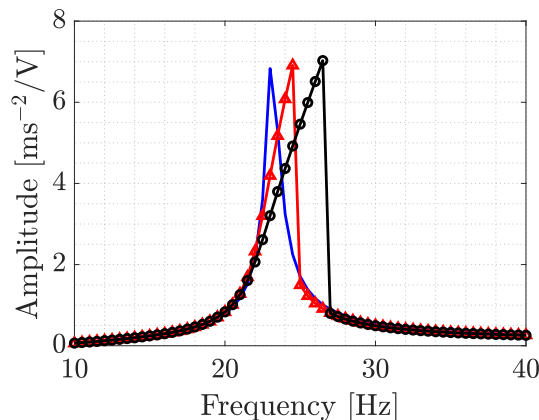
Atualmente, com os avanços tecnológicos nas mais diversas áreas, a necessidade por produtos mais eficientes e com menor custo tem crescido. Nesse sentido, materiais mais leves e flexíveis têm surgido para atender aos requisitos de projeto, de baixo consumo de energia, por exemplo. Além disso, novas configurações geométricas e condições de contorno também aparecem para suprir as exigências. Conseqüentemente, com estas e outras imposições, assumir o mesmo comportamento em operação, quando de configurações anteriores, se torna um erro. Os princípios da análise para esses sistemas devem abordar não só a teoria de sistemas lineares, mas dos não-lineares. Fenômenos como salto, subharmônicas, superharmônicas, caos, entre outros, são características de regime não-linear de movimento (NOËL; KERSCHEN, 2017; VIRGIN, 2000).

As últimas décadas mostram o surgimento de diversos métodos para solução das questões não-lineares, porém para situações particulares. O grande desafio é unificar os métodos e propor uma ideia de solução geral. Algumas das barreiras que impedem esta conquista estão ligadas às fontes de não linearidades e seus efeitos, que são diversos. Por exemplo, existem não linearidades que são localizadas, influenciando apenas parte da

estrutura, bem como a influência em apenas alguns modos, o que torna a resposta do sistema linear em algumas faixas de frequência e não-linear em outras. Além disso, o comportamento da força não-linear ainda não é um parâmetro conhecido completamente, e sua descrição se torna uma dificuldade (NOËL; KERSCHEN, 2017).

Com a presença dos efeitos não-lineares, as propriedades de ortogonalidade e superposição perdem sentido dentro da análise modal convencional, bem como a invariância dos parâmetros modais. O conceito de modos normais lineares não é mais válido. Uma das consequências deste novo regime de movimento é a distorção da resposta em frequência em varredura senoidal, como mostra a Fig. 4. Tem-se aqui um exemplo do fenômeno de salto decorrente do efeito da amplitude de excitação (aqui com referência à tensão elétrica aplicada no excitador eletrodinâmico), isto é, variação da frequência natural decorrente do efeito não-linear (KERSCHEN *et al.*, 2006). Essa figura foi obtida a partir de dados experimentais de uma viga engastada livre com a presença de efeito não-linear em sua extremidade livre causada por um ímã (SHIKI; SILVA; TODD, 2017; SHIKI, 2016). Nota-se assim o aumento do valor da frequência natural com o incremento do nível de excitação aplicado, caracterizando o efeito de *hardening* ou endurecimento de rigidez. Caso houvesse diminuição do valor da frequência natural com o aumento do nível de excitação, o fenômeno observado seria o de *softening* (KOVACIC; BRENNAN, 2011). No caso, o sinal utilizado para obtenção da figura foi obtido por um acelerômetro posicionado na extremidade livre da viga, com a mobilidade obtida a partir da aceleração. Não foi feita uma conversão de tensão (V) para força (N), por isso os valores estão em função da unidade de tensão elétrica.

Figura 4 – Fenômeno de salto - em azul (-) baixo, em vermelho (- Δ -) médio e em preto (-o-) alto nível de força de excitação.

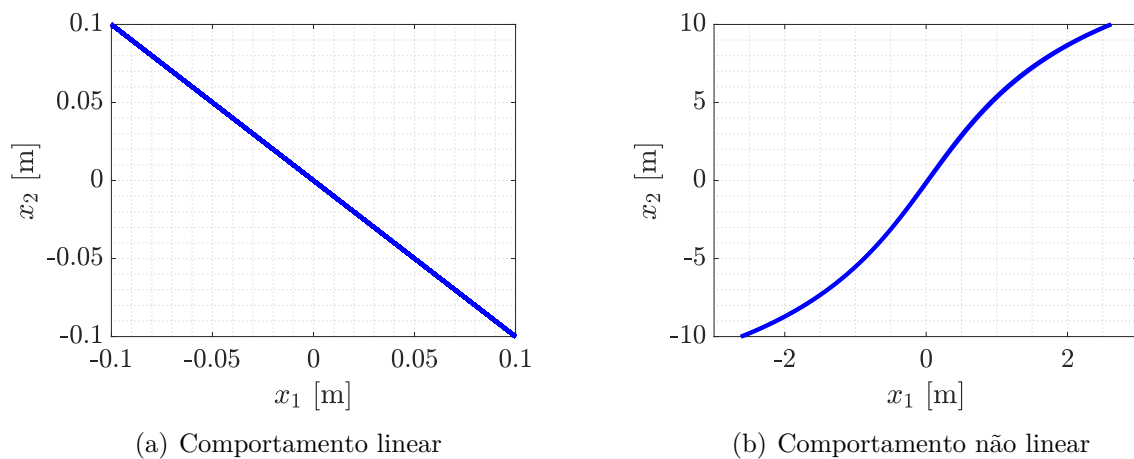


Fonte: Shiki, Silva e Todd (2017).

Além das características anteriormente descritas, as quais permitem identificar a presença de não linearidades no sistema, outros indícios podem sugerir este tipo de comportamento. Quando se tem regime linear de movimento, no espaço de configuração, nota-se uma relação linear, enquanto que no regime não linear, é perceptível uma relação não mais linear. No espaço de fase, quando em regime linear, visivelmente nota-se um formato elíptico, enquanto em regime não linear, o que ocorre é uma degradação deste formato, isto é, uma elipse deformada. A Fig. 5 e Fig. 6 mostram esses efeitos (aqui para um sistema de dois graus de liberdade) (KERSCHEN *et al.*, 2009).

A presença de não linearidades também afeta a relação entre frequência e energia fornecida ao sistema. Quando se tem um sistema em regime linear de movimento, as frequências naturais se mantêm constantes, independentemente do nível de energia que é aplicado. Já para o regime não linear, o que se observa é, a partir de um determinado nível de energia, as frequências naturais sofrem alterações (KERSCHEN *et al.*, 2009). A Figura 7 mostra este efeito. No caso, tem-se curvas obtidas pelo método do balanço harmônico, que será explicado em detalhes nos próximos capítulos e curvas obtidas por integração numérica, pois se trata de um sistema de dois graus de liberdade simulado, com a inclusão de uma não linearidade de natureza cúbica.

Figura 5 – Espaço de configuração com os deslocamentos do elemento 1 (x_1) e 2 (x_2), em um sistema de 2 DOF.



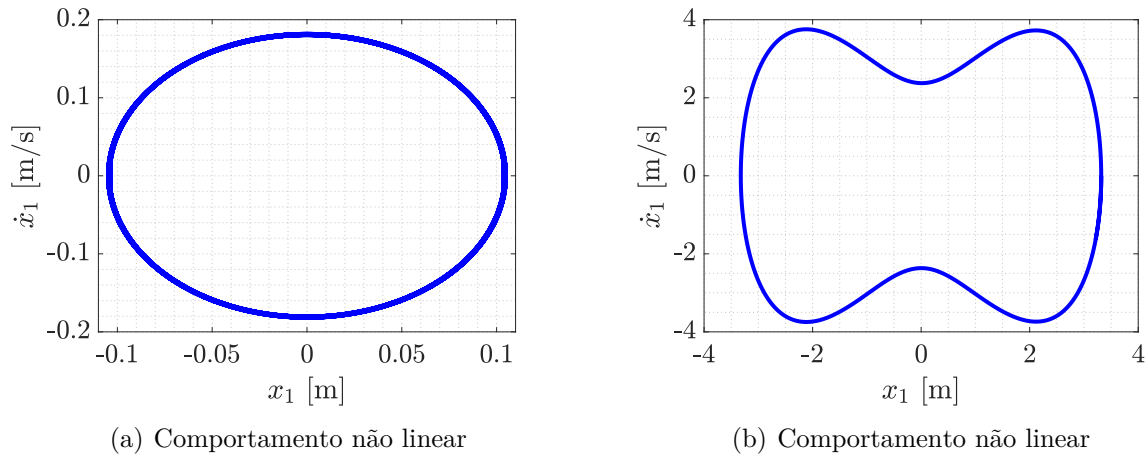
Fonte: Tahara *et al.* (2018).

Além destes efeitos, tem-se a presença de harmônicas quando se analisa o gráfico da densidade espectral de potência¹ em função da frequência, bem como a quebra da homogeneidade e outras propriedades. A grande questão é que os fenômenos causados pela

¹Do inglês, *Power Spectral Density* - PSD

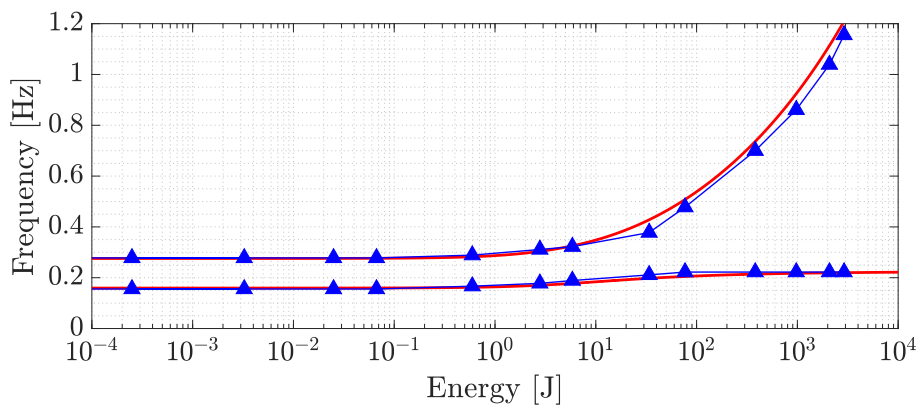
presença destes elementos não-lineares, dentro da dinâmica estrutural, afetam diretamente na análise e modelagem, dificultando em demasia estes processos.

Figura 6 – Espaço de fase com a velocidade (\dot{x}_1) deslocamento do elemento 1 (x_1), em um sistema de 2 DOF.



Fonte: Tahara *et al.* (2018).

Figura 7 – Dependência entre frequência e energia aplicada (força de excitação - injetada no sistema). Em vermelho (-) por balanço harmônico e em azul ▲ por integração numérica.



Fonte: Tahara *et al.* (2018).

3.2 Identificação de parâmetros locais para descrição de sistemas não-lineares

O problema da identificação de sistemas não-lineares começa pela determinação de um modelo teórico que represente a estrutura estudada. A grande dificuldade é que lida-

se com dados experimentais e nem sempre os modelos propostos são adequados. Quando o sistema estudado é tratado dentro da teoria de sistemas lineares, é possível descrever uma relação entre dados de entrada e saída, sendo esta relação constante, invariante ao tipo de entrada ou do nível de amplitude de excitação. O problema é que, para sistemas dependentes da amplitude, o que se nota é uma relação não mais constante, e dessa forma a complexidade na representação de um modelo se torna maior. O que se faz dentro do contexto de análise modal não linear é identificar um modelo dentro do regime linear de movimento e, após submetê-lo a condições de regime não linear, identificar quais elementos, dentro do sistema, fazem-no se comportar dessa maneira (NOËL; KERSCHEN, 2017).

Dada assim a complexidade de se modelar um sistema não linear, inicialmente tem-se a fase de detecção, em que determina-se se há ou não a presença de efeitos que indiquem possível regime não linear. Na sequência, busca-se a localização, tipo e funcional destes elementos, isto é, sua caracterização. Este passo talvez seja o mais importante, pois modelar um sistema a partir de uma estrutura física com os locais e formas expressos corretamente, é uma tarefa complexa. A grande simplificação feita aqui é se assumir que a não linearidade é local e discreta podendo ser representada por uma quantidade finita de parâmetros (EWINS; WEEKES; CARRI, 2015). Dessa forma, é possível utilizar a teoria da análise modal e aplicar algum método de identificação para quantificar estes efeitos não-lineares. Por fim, tem-se a estimativa dos parâmetros de participação, ou seja, o quanto a não linearidade influencia no sistema. Com estes passos concluídos, tem-se a identificação realizada. Este processo é parte da verificação e validação do modelo.

Existem diversos métodos para identificação e caracterização das não linearidades, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. No domínio da frequência, destacam-se as séries de Volterra e séries de Wiener (SCHETZEN, 2006; VILLANI; SILVA; CUNHA Jr., 2019; SHIKI, 2016; SHIKI; SILVA; TODD, 2017; SCUSSEL; SILVA, 2016; HANSEN; SHIKI; SILVA, 2014), que são basicamente representações polinomiais dos sistemas não-lineares. Essas séries permitem relacionar sinais de entrada e saída de sistemas não-lineares por meio das FRFs de alta ordem, e mais do que isso, separar as contribuições linear e não linear. Por esse motivo, estes métodos são úteis em análise modal e dinâmica estrutural para sistemas que vibram em regime fracamente não-linear (NOËL; KERSCHEN, 2017).

Método do balanço harmônico - HBM¹

¹Do inglês, *Harmonic Balanc Method* - HBM

O método do balanço harmônico também utiliza dados em frequência para modelar não linearidades. Trata-se de uma aproximação de sinais periódicos por uma soma de harmônicos (série de Fourier finita), e possui duas vertentes: aproximação da força não-linear (termos equivalentes) e agrupamento de harmônicos na equação de movimento (amplitudes) (RAZZAK, 2016; LUO; HUANG, 2011; PENG *et al.*, 2008). A aproximação é feita da forma:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\varphi} (A_n \cos(n\Omega t) + B_n \sin(n\Omega t)) \equiv A_0 + \sum_{n=1}^{\varphi} X_n \sin(n\Omega t + \phi_n) \quad (63)$$

em que $x(t)$ é a resposta do sistema (deslocamento em metros), A_n , B_n e X_n são amplitudes harmônicas, Ω é a frequência em rad/s, t o tempo em segundos, ϕ_n o n -ésimo termo de fase, n a razão da harmônica em relação à frequência fundamental e φ o número de termos considerados na aproximação. Quando se adota a aproximação da força não linear, por exemplo, na forma:

$$\mathcal{F}_{nl}(x, \dot{x}) = c\dot{x} + k_1x + k_3x^3 \quad (64)$$

sendo $\mathcal{F}_{nl}(x, \dot{x})$ o termo de força não linear, dependente de deslocamento e velocidade, x e \dot{x} , respectivamente, c o amortecimento e k_1 e k_3 termos de rigidez e considerando:

$$\mathcal{F}_{nl}(x, \dot{x}) = K_{eq}X(\sin(\Omega t)) + C_{eq}X(\cos(\Omega t)) = a_1\cos(\Omega t) + b_1\sin(\Omega t) \quad (65)$$

em que K_{eq} representa a rigidez equivalente, C_{eq} o amortecimento equivalente, X a amplitude e a_1 e b_1 os termos da expansão da série, é possível escrever a FRF em função dos parâmetros físicos e obter múltiplas soluções, que é a característica visual do fenômeno de salto. Pode-se também aproximar a resposta $x(t)$ por harmônicas, e o que se faz geralmente é aproximar pela primeira harmônica ou até duas harmônicas. Para uma aproximação com mais harmônicas, o custo computacional aumenta e a estimativa dos parâmetros da não linearidade torna-se complexa. Dessa forma, este método possui vantagens como a possibilidade de estimar e melhorar a aproximação das não linearidades e também permitir a obtenção do gráfico do salto (*backbone*). A desvantagem é que trabalha-se com parâmetros físicos, isto é, análise teórica, e com base no conhecimento de um modelo prévio da não linearidade e sua forma paramétrica, embora já existam

algumas aplicações dentro da metodologia experimental (TANG *et al.*, 2015).

Método da superfície de resposta

No domínio do tempo, destaca-se o método da superfície de resposta. Este método teve início com Masri e Caughey (1979) e foi desenvolvido primeiramente para sistemas SDOF, tendo extensão para MDOF posteriormente. Este método baseia-se na segunda lei de Newton, da qual:

$$m\ddot{x} + \mathcal{F}_{nl}(x, \dot{x}) = u(t) \quad (66)$$

em que m representa a massa do sistema, $\mathcal{F}_{nl}(x, \dot{x})$ a força de restauração que atua para levar o sistema ao equilíbrio, x , \dot{x} e \ddot{x} o deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente, e $u(t)$ a força de excitação. Rearranjando os termos:

$$\mathcal{F}_{nl}(x, \dot{x}) = u(t) - m\ddot{x} \quad (67)$$

ou seja, conhecendo-se m e medindo-se a força de excitação e a aceleração, é possível se obter a força de restauração em função do deslocamento e velocidade.

Este método possibilita, portanto, uma forma simples para se obter a caracterização da não linearidade. Em sistemas com amortecimento mais complexo, por exemplo, com histerese, é necessário uma outra abordagem de RFS que leva em consideração alguns processos mais complexos, e que não serão abordados neste trabalho (FRAGONARA; CERAVOLO; ERLICHER, 2013). Aplicando o método no domínio modal, é possível experimentalmente obter a força de restauração em função dos parâmetros modais. Considerando o modelo não linear, extensão da eq. (1), tem-se:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{f}(t) \quad (68)$$

em que $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ representa o termo da não linearidade. No presente trabalho, a não linearidade está associada à rigidez do sistema, e por isso o termo de dissipação, associado à velocidade, não contribui de forma efetiva no efeito não linear. Assim, representaremos tal termo por $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}, t)$. Considerando agora hipóteses que permitam a aplicação das transformações para o domínio modal, leva-se em consideração que a não linearidade

deve ter natureza concentrada e local e ter característica suave, permitindo aproximação na forma polinomial. Isto significa que é possível aproximar por séries de Fourier ou por séries de potência sem um processo prévio de suavização como feito em Teloli e Silva (2019). Além disso, o nível da amplitude deve ser tal que o sistema possa ser representado de formas invariantes, pelas FRFs.

O que se faz, em resumo, é garantir que a força não-linear se apresente de forma fraca, e portanto possua baixa participação na resposta, para que as equações no domínio modal sejam válidas. Com isso, no domínio modal, as seguintes transformações são feitas (GAWRONSKI, 1998):

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q} \quad (69)$$

$$\mathbf{M}_m = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad (70)$$

$$\mathbf{K}_m = \Phi^T \mathbf{K} \Phi \quad (71)$$

sendo \mathbf{q} o vetor de coordenadas modais, \mathbf{M}_m é a matriz de massa modal e \mathbf{K}_m a matriz de rigidez modal. Assim, a eq. (68) pode ser reescrita na forma modal:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q} + \Phi^T \mathbf{F}_{nl} = \Phi^T \mathbf{f} \quad (72)$$

ou ainda:

$$\mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_m \mathbf{q} + \Phi^T \mathbf{F}_{nl} = \Phi^T \mathbf{f} \quad (73)$$

Considerando os modos normalizados pela massa, pode escrever a eq. (73) na forma:

$$\ddot{\mathbf{q}} + [\omega_r^2] \mathbf{q} + \mathbf{M}_m^{-1} \Phi^T \mathbf{F}_{nl} = \mathbf{M}_m^{-1} \Phi^T \mathbf{f} \quad (74)$$

em que $[\omega_r^2]$ é a matriz de frequências naturais. A força não-linear pode assim ser encontrada por:

$$\mathbf{M}_m^{-1} \Phi^T \mathbf{F}_{nl} = \mathbf{M}_m^{-1} \Phi^T \mathbf{f} - (\ddot{\mathbf{q}} + [\omega_r^2] \mathbf{q}) \quad (75)$$

Incluindo elementos de amortecimento, a estrutura estudada pode ser modelada da forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(t) \quad (76)$$

O modelo de amortecimento adotado é o viscoso (proporcional à velocidade, enquanto modelo matemático) e proporcional às matrizes de massa e amortecimento (enquanto distribuição espacial). No domínio modal, considerando a transformação de coordenadas, tem-se a eq. (74) e, incluindo o termo de amortecimento \mathbf{D} :

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\mathbf{Z}[\omega_r] \dot{\mathbf{q}} + [\omega_r^2] \mathbf{q} + \mathbf{M}_m^{-1} \Phi^T \mathbf{F}_{nl} = \mathbf{M}_m^{-1} \Phi^T \mathbf{f} \quad (77)$$

em que (GAWRONSKI, 1998):

$$\mathbf{Z} = 0,5 \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{D}_m [\omega_r^2] \mathbf{q} \quad (78)$$

$$\mathbf{D}_m = \Phi^T \mathbf{D} \Phi \quad (79)$$

Onde \mathbf{D} representa a matriz com termos de amortecimento. Dessa forma, é possível a partir dos sinais coletados experimentalmente, obter a força de restauração no domínio modal. Esta força pode ser aproximada por um polinômio.

Além dos métodos no domínio da frequência e no tempo, que foram mencionados, existem também algumas formas de caracterizar não linearidades no domínio modal, que são os chamados métodos modais. Entre estes, destaca-se os modos normais não-lineares que teve surgimento com Rosenberg (1960) e Rosenberg (1962). Este método busca, a

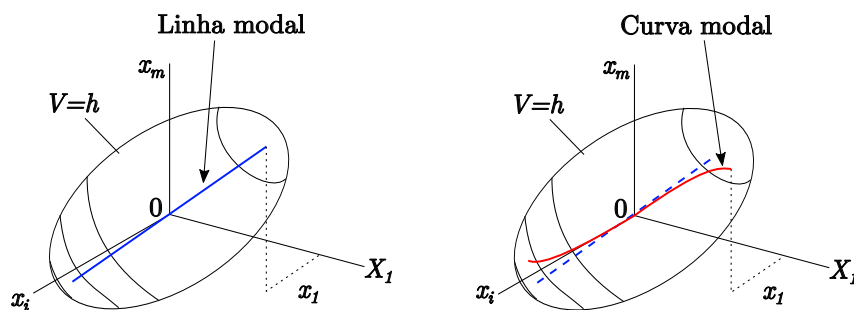
partir de dados experimentais, desenvolver um modelo não-linear no espaço modal. Trata-se de uma ferramenta que permite estender o conceito de análise modal para o ambiente dos sistemas não-lineares. A próxima seção abordará maiores detalhes.

3.3 Modos normais não-lineares

Segundo Kerschen *et al.* (2009), em sistemas mecânicos, é de primordial interesse obter a resposta livre não amortecida, pois esta é uma combinação de funções de base que representam soluções do modelo conservativo. A essas soluções particulares denomina-se "modos normais"¹. Basicamente, decorrem do produto entre um modo de vibrar (vetor) e uma senoide com frequência particular sendo esta a frequência natural. Os modos normais não-lineares são análogos aos modos normais lineares² em sistemas lineares conservativos, mas devido à natureza dos efeitos não-lineares, algumas propriedades dos modos não lineares são distintas dos modos lineares.

Os NNMs são assim chamados porque eles são normais à superfície de máximo potencial de energia (elipsoide delimitadora), como mostra a Fig. 8 (VAKAKIS, 1997).

Figura 8 – Espaço de configuração: NNMs similares e não similares.



Fonte: Adaptado de Vakakis (1997).

Rosenberg (1960) definiu NNMs como sendo uma "vibração em uníssono" ou "vibração sincronizada", na qual todos os nós vibram na mesma frequência com uma razão de deslocamento fixa. Essa definição, entretanto, não pode ser considerada para sistemas não conservativos e, ainda mais, se vários NNMs interagem com ressonâncias internas, a sincronia é quebrada. Shaw e Pierre (1994), por sua vez, definiram NNMs como uma variedade invariante³ bidimensional no espaço de fase. A invariância ocorre pois qualquer órbita que se inicie na variedade, permanece nela para qualquer instante de tempo. Essa

¹Do inglês, *Normal Modes*

²Do inglês, *Linear Normal Modes* - LNM

³Do inglês, *invariant manifold*

propriedade é compartilhada com os LNMs.

De forma geométrica, a variedade LNM é um hiperplano, enquanto o NNM possui uma curvatura no espaço de fase em decorrência da dependência frequência-energia e formato-energia. Em baixos níveis de energia, LNMs e NNMs se sobrepõem, ou seja, na origem as não linearidades podem ser desprezadas (KERSCHEN *et al.*, 2009).

3.3.1 LNMs e NNMs: semelhanças e diferenças

Como dito anteriormente, LNMs e NNMs são, em sua essência, semelhantes. Algumas distinções, contudo, devem ser levadas em consideração para que possa haver entendimento acerca dessa separação. Assim, elenca-se as seguintes propriedades (KERSCHEN *et al.*, 2009):

- **Ortogonalidade:** Ao contrário dos NNMs, os LNMs são ortogonais. Dessa forma, existe uma relação algébrica de independência entre os modos normais lineares, da qual todas as possíveis combinações lineares da base são capazes de varrer todo o espaço de fase. Nos NNMs, isso não ocorre.

- **Princípio da superposição:** O conceito de superposição está ligado ao fato de a resposta do sistema poder ser escrita como uma soma de parcelas individuais, sendo cada uma delas dominada por um único modo normal conservativo. Entende-se, por isto, um conceito de soma de modos, que não é válido quando se tem modos não lineares.

- **Linearidade:** Em sistemas lineares, a superposição é uma propriedade interessante. Esse princípio enuncia que a solução de um sistema, cuja entrada é a soma de diferentes entradas, é a soma das soluções individuais do mesmo sistema de acordo com cada entrada. Essa propriedade não é válida quando se trata de NNMs

- **Dependência frequência-energia:** Os modos de vibrar e frequências dos NNMs dependem da energia de oscilação, ao contrário dos LNMs, que são independentes. A Figura 7 ilustra essa diferença. Essa dependência pode ser ainda notada na Fig. 4, que mostra o comportamento e formação de um *backbone* conforme as não linearidades se apresentam no sistema. Os *backbones* de LNMs são horizontais no gráfico de frequência e energia, e nota-se que não há presença do salto. Os NNMs, contudo, apresentam o salto, que na realidade é uma deformação na curva de ressonância do sistema.

- **Invariância:** Segundo a definição de Shaw e Pierre (1991), as trajetórias que se iniciam na variedade invariante tendem a permanecer nela. Isso permite reconstruir de forma experimental os *backbones* da FEP, sendo portanto uma importante ferramenta na

análise modal. LNMs e NNMs compartilham essa propriedade.

- **Estabilidade:** A divisão entre soluções ou trajetórias estáveis e instáveis em sistemas é uma característica da dinâmica não linear. LNMs são sempre estáveis, enquanto NNMs podem ser estáveis ou instáveis. Na resposta forçada não-linear existem intervalos de frequência nas proximidades das ressonâncias com três possíveis soluções, sendo duas estáveis e uma instável. Na resposta livre há também uma distinção entre órbitas estáveis e instáveis, que devem ser levadas em conta no cálculo dos NNMs. Existe uma grande importância da análise de estabilidade pois os modos instáveis são movimentos que nunca devem ocorrer em sistemas reais.

- **Sincronismo:** LNMs sempre oscilam em uníssono, mas ressonâncias internas podem quebrar o sincronismo da oscilação de todos os graus de liberdade. Assim, alguns desses graus de liberdade são forçados a oscilar com frequências diferentes da frequência fundamental.

- **Número de modos:** O número de modos é igual ao número de coordenadas em sistemas lineares. Em NNMs, entretanto, ressonâncias internas fazem com que o número de modos do sistema ultrapasse o número de graus de liberdade.

A Tabela 1 elenca as principais diferenças entre os modos normais lineares e modos não-lineares.

Tabela 1 – Propriedades dos modos normais lineares e modos não-lineares.

Propriedade	Linear	Não Linear
Deformação na ressonância	Sim	Sim
Princípio da superposição	Sim	Não
Invariância dos parâmetros modais	Sim	Não
Reciprocidade	Sim	Não
Homogeneidade	Sim	Não
Ortogonalidade	Sim	Não
Deslocamento no tempo	Fora de fase	Em fase
Espaço de configuração	Linear decrescente	Cúbico crescente
Espaço de fase	Elipse	Elipse deformada
Harmônicas	Não	Sim
Dependência frequência energia	Não	Sim

Fonte: Tahara *et al.* (2018).

3.3.2 Cálculo de NNMs - métodos analíticos e numéricos

O cálculo dos NNMs, atualmente, é feito na forma discreta ou contínua, e recai basicamente em duas categorias principais, que são métodos analíticos e métodos numéricos. Rosenberg (1966) e Rand (1971) iniciaram esta discussão com aproximações **analíticas**. Rosenberg (1966) com osciladores conservativos e Rand (1971) com expressões para curvas modais em sistemas de 2 DOF¹. Manevitch e Mikhlin (1972) trataram do cálculo de NNMs por meio de expansões em séries de potências.

No início dos anos 90, os trabalhos de Vakakis (VAKAKIS, 1990; VAKAKIS, 1992) e Shaw e Pierre (SHAW; PIERRE, 1991; SHAW; PIERRE, 1993; SHAW; PIERRE, 1994) trouxeram novas perspectivas na elaboração de técnicas para cálculo e extração de NNMs, tanto em sistemas discretos quanto contínuos. Dentro destes últimos (contínuos), pode-se abordar diretamente as equações diferenciais parciais (KING; VAKAKIS, 1994; SHAW; PIERRE, 1994) ou então discretizar as equações diferenciais parciais (de movimento) em um conjunto de equações diferenciais ordinárias (SHAW; PIERRE, 1992).

A primeira aproximação na forma analítica tem por base a energia do sistema investigado. Rosenberg (1966) e Manevitch e Mikhlin (1972) contribuíram com estudos neste sentido. Aqui, considerando um sistema com 2 DOF, o objetivo é relacionar a curva modal com os deslocamentos, para eliminar derivadas temporais das equações de movimento (KERSCHEN *et al.*, 2009). Aplica-se uma expansão em séries de potência para descrever a curva modal (em função dos deslocamentos) e dessa forma é possível descrever qualquer ponto do sistema em termos de um único deslocamento de referência; assim, o NNM passa a ser uma função modal dependente da coordenada espacial e da referência.

A aproximação da variedade invariante (*invariant manifold*) (SHAW; PIERRE, 1991; SHAW; PIERRE, 1992; SHAW; PIERRE, 1993; SHAW; PIERRE, 1994) é similar ao procedimento feito com base na energia, porém a diferença consiste no uso de duas variáveis de estado (velocidade e deslocamento) como coordenadas principais, ao invés de uma. Como na aproximação anterior, utiliza-se expansão em séries de potência para resolver o sistema considerado. Quando se tem ressonâncias internas, uma variedade invariante multi-modos é considerada (BOIVIN; PIERRE; SHAW, 1995) para levar em consideração a influência dos modos.

Um outro método utilizado e que possui grande importância na literatura é o método das múltiplas escalas (NAYFEH; NAYFEH, 1994; GENDELMAN, 2004; LACARBO-

¹Do inglês, *Degree of Freedom* - DOF

NARA; REGA; NAYFEH, 2003; LACARBONARA; REGA, 2003). Nesta aproximação, busca-se incluir um parâmetro adimensional que, por sua vez, relaciona as respostas do sistema em expansões em termos de variáveis temporais independentes (ao invés de somente uma).

Existem outros métodos de natureza analítica para cálculo dos NNMs, e que podem ser melhor vistos em Kerschen *et al.* (2014). O método do balanço harmônico, anteriormente descrito na seção 3.2 é uma técnica contemplada neste conjunto e que assume que o movimento do NNM é periódico no tempo. No entanto, por necessitar de métodos numéricos para resolução das equações, este método é considerado semi-analítico.

No contexto de métodos **numéricos** para cálculo de NNMs, existem diversas técnicas, porém grande parte baseada em aproximações assintóticas. Um dos primeiros resultados foi obtido por Slater (1996) e consistia basicamente na integração das equações de movimento em torno de um período usando algum método de integração numérica. Este processo consistia inicialmente na obtenção de uma solução periódica isolada, seguida de curvas modais em baixa energia (modos normais e frequências naturais) e aumentava-se a energia gradualmente para a visualização do NNM.

De forma parecida, existem algoritmos estimadores que trabalham em conjunto com sucessões contínuas para resolver os problemas de contorno não-lineares de forma numérica, e assim determinar uma família de NNMs (KERSCHEN *et al.*, 2007; LEE *et al.*, 2005; WANG; BAJAJ, 2007; WANG; BAJAJ; KAMIYA, 2005).

Um método mais sofisticado é o chamado método numérico assintótico, mostrado em Cochelin, Damil e M. (1994) e Cochelin (2014). É uma técnica semi-analítica que usa expansão em séries de potência das incógnitas de forma paramétrica, utilizando algum controle, em conjunto com o método do balanço harmônico (PÉRIGNON, 2004) ou métodos de diferenças finitas. Alguns *softwares* como AUTO e MATCONT são usados para cálculo de soluções periódicas e ciclos limite de sistemas dinâmicos não-lineares, através de técnicas como as descritas anteriormente (numéricas). Para complementar esta série de métodos descritos, tem-se ainda o método do pseudo comprimento de arco¹ descrito em (PEETERS *et al.*, 2009). Este método leva em consideração a continuação ou prolongamento das soluções periódicas. Iniciando em baixa energia (LNM correspondente), o cálculo é feito de forma sucessiva ao longo do prolongamento do NNM, delimitando um espaço de continuação.

¹Do inglês, *Pseudo-Arclength*

3.3.3 Extração de NNMs experimentalmente

No campo experimental, o trabalho de Peeters, Kerschen e Golinval (2011) é um exemplo de como se pode extrair de forma experimental os NNMs. Basicamente, na primeira etapa, tem-se uma adequação de força, que também é conhecida como método da ressonância em fase. Este processo tem por objetivo o isolamento de um NNM para que a dependência entre frequência e energia do modo não-linear seja identificada durante a resposta livre. Dessa maneira, tem-se então duas fases, sendo a primeira a adequação da força ao NNM e a segunda a resposta livre do NNM.

Inicialmente, então, tem-se a realização da análise modal convencional, considerando regime linear de vibração e entrada do tipo aleatória. Tem-se então os parâmetros modais e FRFs estimados. Na sequência, é feita então a adequação da força para isolar o NNM, considerando inicialmente o primeiro modo de vibrar da estrutura, que é uma viga engastada com uma viga fina em uma das extremidades (elemento que é responsável pelo regime não-linear de movimento). Esse procedimento é feito com uma varredura senoidal em frequência em regime permanente. Para verificar o isolamento do NNM, utiliza-se um índice Δ que relaciona as componentes da série de Fourier que aproxima a resposta.

Na etapa da identificação do modo não linear pela resposta livre, a estrutura é excitada com a frequência encontrada na etapa anterior (isolamento do NNM) e após um determinado tempo, desliga-se o atuador (força externa) e coleta-se a resposta da estrutura. Neste caso, considera-se um amortecimento baixo o suficiente para que se possa considerar o sistema não amortecido.

Através então das séries temporais medidas, obtém-se as curvas modais de forma direta, relacionadas aos diferentes níveis de energia. Pode-se ter também os modos associados se levar em consideração o máximo valor de amplitude da aceleração em cada instante de tempo (considerando vários sensores dispostos ao longo da viga). O que se espera (e o que se vê) é a frequência diretamente afetada pela não linearidade associada à energia.

Em contrapartida ao método da ressonância em fase, tem-se o método de separação em fase (NOËL *et al.*, 2016; NOËL *et al.*, 2014), que considera vários modos excitados simultaneamente usando uma entrada tipo varredura senoidal e são identificados na sequência utilizando técnicas apropriadas para identificação de sistemas lineares. Entre os dois métodos, existem algumas divergências. A Tabela 2 mostra algumas destas diferenças. Por exemplo, para o método de separação em fase, é necessário um modelo experimental, enquanto que o método da ressonância em fase dispensa tal etapa. Além

disso, no primeiro a caracterização da não linearidade é desnecessária, o que em alguns casos pode ser considerado como vantagem.

Tabela 2 – Comparação entre os métodos de extração de NNMs na forma experimental.

Nonlinear phase separation method	Nonlinear phase resonance method
Rápido (múltiplos NNMs simultaneamente)	Demorado (um NNM por vez)
Necessidade de um modelo experimental	Livre de modelo
Excitação aleatória clássica pode ser utilizada	Força harmônica deve ser sintonizada
Componentes não-lineares devem ser instrumentados em ambos os lados	<i>Shaker</i> deve ser desligado
Caracterização da não linearidade é necessária	Necessidade limitada de informações acerca das não linearidades

Fonte: Adaptado de Noël *et al.* (2016).

3.3.4 Aplicações de NNMs no contexto industrial

Renson, Kerschen e Cochelin (2016), em seu trabalho, citam diversas aplicações de NNMs. Após a implementação de diversos métodos para cálculo de NNMs, houveram aplicações na indústria e em parte no meio acadêmico que utilizaram destas ferramentas. Por exemplo, na parte de análise de vigas não-lineares, pode-se citar Kerschen *et al.* (2009) e Kuether *et al.* (2015) e em absorvedores de vibração tem-se Lee *et al.* (2005), Tsakirtzis *et al.* (2006), Kerschen *et al.* (2007). Além destas, houveram aplicações em estruturas com simetria cíclica (GEORGIADES *et al.*, 2009) e cadeias granulares (JAYAPRAKASH *et al.*, 2010).

Na tentativa de reduzir custos computacionais no cálculo, Peeters *et al.* (2009) encontraram propriedades de simetria em NNMs, contribuindo com este objetivo e tornando os métodos mais interessantes para serem aplicados em larga escala, em sistemas complexos.

Kerschen *et al.* (2013) mostraram a validade do cálculo de NNMs e frequências de oscilação para estruturas complexas, sendo o objeto de estudo de seu trabalho a fuselagem da aeronave Morane-Saulnier Paris 760. Um modelo reduzido compreendendo 548 graus de liberdade, por elementos finitos, foi construído para emular o comportamento da estrutura, que apresenta não linearidades relacionadas às juntas entre os tanques de

combustível externos e as pontas das asas. Com isso, foram obtidos a relação entre energia e frequência e também os NNMs envolvendo diversos movimentos da aeronave (torção na asa, flexão na asa e empenagem).

Outra aplicação de NNMs no contexto industrial foi feita por Renson, Noël e Kerschen (2014). Eles analisaram o veículo espacial SmallSat desenvolvido pela EADS-ASTrium. Esta estrutura possui um dispositivo de isolamento de vibração que possui múltiplos batentes mecânicos axiais e laterais, o qual contribui para um efeito não-linear forte. O trabalho compreendeu a detecção da não linearidade e a caracterização dos parâmetros, combinando diversas técnicas de análise, como superfície de resposta e balanço harmônico (MASRI; CAUGHEY, 1979; KERSCHEN *et al.*, 2009; RAZZAK, 2016; LUO; HUANG, 2011; PENG *et al.*, 2008) e trazendo novas perspectivas em dinâmica estrutural.

Ainda utilizando o método do balanço harmônico, considerando não linearidades da forma não suave, Karkar (2012) e Karkar, Vergez e Cochelin (2012) analisaram regimes periódicos de um clarinete por meio de um modelo composto por um oscilador de impacto para a palheta, equação de Bernoulli para o escoamento na boquilha, e modos lineares amortecidos para o ressonador.

Cochelin (2014), Moussi *et al.* (2015) calcularam NNMs de uma viga engastada-apoiada linear elástica, conectada a um contator elástico bilateral não linear. Além do balanço harmônico, foi utilizado o método ANM¹ para a obtenção das soluções periódicas. O método HBM foi aplicado por Moussi *et al.* (2015) também em um modelo simplificado de um gerador de vapor em indústrias de energia nuclear. Um tubo em U transporta água em alta pressão em contato direto com material radioativo. O tubo é mantido na posição vertical por chapas de suporte que, por sua vez, introduzem folgas (efeito não linear). O método ANM recentemente foi utilizado nas áreas de dinâmica estrutural (AZRAR *et al.*, 1993) e de fluidos (CADOU *et al.*, 2001; CADOU; POTIER-FERRY; COCHELIN, 2006), combinado com HBM no *software* MANLAB (MANLAB, 2012).

O método da colocação ortogonal² é outro método já bem estabelecido e implementado em *softwares* como AUTO (DOEDEL *et al.*, 2000) e MATCONT (DHOOGHE; GOVAERTS; KUZNETSOV, 2003). Nos trabalhos de Sérandour *et al.* (2008) e Ducceschi *et al.* (2013), são calculados NNMs de um sistema com 2 DOF e de chapas geometricamente não-lineares, por meio do *software* AUTO. Em Karkar, Cochelin e Vergez (2014), o método HBM e colocação ortogonal são comparados usando um oscilador de impacto SDOF, comprovando que para sistemas suaves e não suaves, há melhor convergência do método

¹Do inglês, *Asymptotic Numerical Method*

²Do inglês, *Orthogonal Collocation*

HBM.

3.4 Conclusões

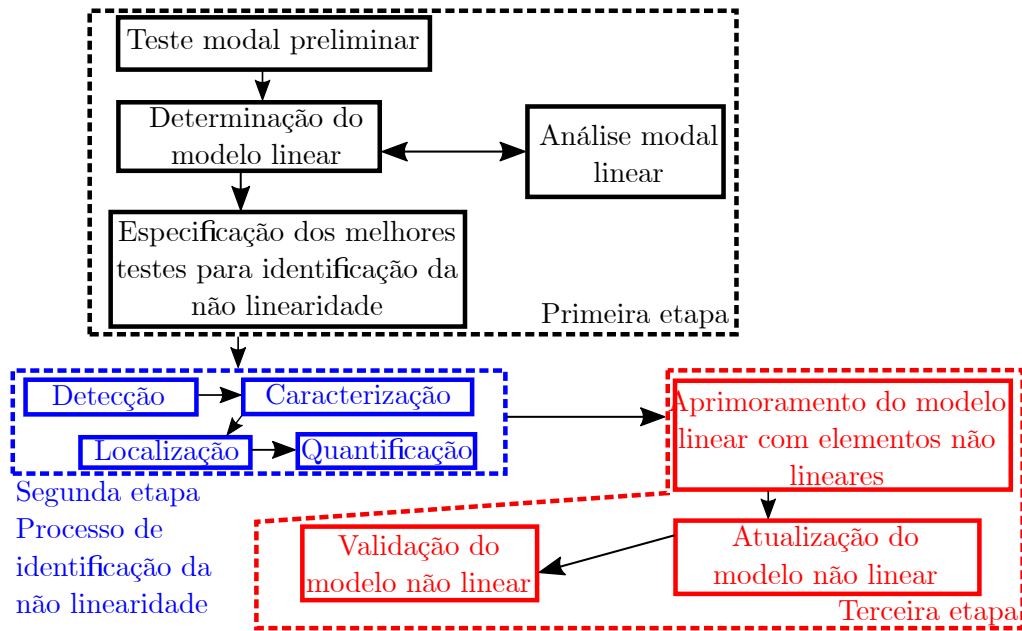
A presença de não linearidades em sistemas mecânicos afeta diretamente a dinâmica estrutural, e isso implica no processo de identificação das mesmas, através de métodos simples ou complexos, dependendo do problema a ser analisado. Primeiro, é preciso identificar a presença de um mecanismo não-linear (fase de detecção) e sua natureza para escolher a forma mais adequada de se descreve-lo. Necessita-se, assim, de métricas que consigam lidar com as particularidades de cada caso, o que não constitui uma maneira prática e rápida de solucionar estes problemas. O método do balanço harmônico e da superfície de resposta são exemplos de métricas simples, enquanto que séries de Volterra, por exemplo, constituem uma aproximação mais refinada. O fato das não linearidades afetarem as propriedades dos modos torna o estudo dos NNMs interessante, como mostrado na seção final deste capítulo, já que existem métodos que permitem o cálculo de NNMs de forma significativa.

4 Exemplos de Aplicação

A meta deste capítulo é mostrar como os efeitos não-lineares locais presentes em estruturas mecânicas podem afetar a validade de um procedimento de análise modal clássica e como é possível contornar isto de maneira simples se modelos discretos destes efeitos são incluídos na formulação, caso a não linearidade apresente certas particularidades discutidas aqui. A metodologia adotada é mostrada na Fig. 9. Inicia-se com um teste modal preliminar, determinando assim um modelo linear através da análise modal clássica. Na sequência, especifica-se os testes que serão feitos para identificar a não linearidade, etapa seguinte e que é dividida em 4 partes, sendo elas a detecção, a caracterização, localização e finalmente, a quantificação (EWINS; WEEKES; CARRI, 2015; KERSCHEN *et al.*, 2006; NOËL; KERSCHEN, 2017). Por fim, estes elementos não-lineares são incluídos no modelo linear anteriormente definido, e assim finaliza-se com a fase de verificação e validação do modelo não linear.

O capítulo inicia na seção 4.1, onde discute-se um exemplo numérico envolvendo um sistema com dois graus de liberdade, com uma não linearidade concentrada do tipo cúbica. É feita a análise modal convencional considerando amplitude de excitação baixa, o que permite garantir um regime de vibração linear e conseqüentemente a validade da aplicação da análise modal. Na sequência identifica-se a não linearidade concentrada equivalente quando o sistema vibra com fortes amplitudes de excitação através do método da superfície de resposta, inicialmente com a detecção pela distorção das FRFs, presença de salto e espectrogramas, seguida da caracterização da mesma pelo método da superfície de resposta (MASRI; CAUGHEY, 1979). É feita então a localização e por fim a quantificação dos termos pela força de restauração obtida (ajuste polinomial). Valida-se o modelo obtido com uma varredura em frequência por meio de uma entrada *chirp* senoidal.

Figura 9 – Metodologia adotada.



Fonte: Elaborado pelo autor com base em Ewins, Weekes e Carri (2015).

Para demonstrar experimentalmente estes passos utiliza-se uma viga engastada-livre de alumínio com um imã na ponta livre com excitação em diferentes níveis. A viga tem comportamento não-linear que é aproximado adequadamente por um oscilador de Duffing (KOVACIC; BRENNAN, 2011). O procedimento adotado aqui foi o mesmo do caso numérico descrito no parágrafo anterior, ou seja, primeiro se aplica baixos níveis de amplitude de excitação para garantir a validade dos princípios de análise modal e se estimar os parâmetros modais lineares dominantes. Com estes parâmetros ajustou-se um modelo modal reduzido que pode incluir um efeito não-linear concentrado de rigidez cúbica para descrever o comportamento da viga para níveis de amplitude de excitação maior, onde apenas o modelo linear é insuficiente para representação. Com este modelo ajustado, apesar de simplificado é possível se descrever muitos dos regimes que a viga apresenta, como por exemplo, visualizar a dependência frequência-energia de excitação e realizar a extração dos modos normais não-lineares. O resultado é um modelo modal reduzido validado que pode ser útil para fins de simulação numérica emulando o comportamento da viga para situações mais amplas de funcionamento que incluam a presença de não linearidades fracas.

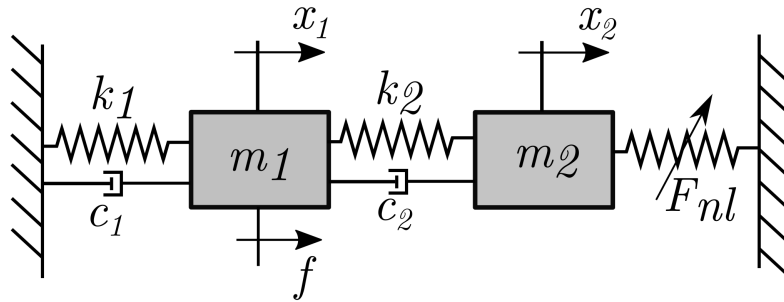
4.1 Exemplo numérico

Inicialmente, para ilustrar a aplicação dos métodos de análise modal, considerou-se um sistema com dois graus de liberdade, teórico, composto por dois elementos de inércia, dois elementos de rigidez, dois elementos de amortecimento, e um elemento de rigidez não linear. A Figura 10 mostra o exemplo usado para mostrar a metodologia de análise que consiste de um oscilador de Duffing com dois graus de liberdade descrito pelo sistema de equações 80 e 81:

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1)x_1 + k_2(x_1 - x_2) + c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = f \quad (80)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_{nl}x_2^3 = 0 \quad (81)$$

Figura 10 – Modelo físico adotado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

sendo seus parâmetros $m_1 = m_2 = 0.5$ kg, valores de elementos de rigidez iguais a $k_1 = k_2 = 10^5$ N/m e valores de elementos de amortecimento viscoso iguais a $c_1 = c_2 = 10$ N.s/m. O termo não-linear foi considerado como $\mathcal{F}_{nl} = k_{nl}x_2^3$, sendo $k_{nl} = 10^{10}$ N/m³ e x_2 o deslocamento referente ao elemento de massa m_2 . Os termos \ddot{x}_1 e \ddot{x}_2 representam as acelerações dos elementos m_1 e m_2 , respectivamente, \dot{x}_1 e \dot{x}_2 as velocidades, e x_1 e x_2 os deslocamentos nas variáveis físicas. Este sistema pode ser representado, matricialmente, por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$\mathbf{F}_{nl} = \begin{Bmatrix} 0 \\ k_{nl}x_2^3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix}$$

sendo \mathbf{M} a matriz de massa do sistema, \mathbf{K} a matriz de rigidez, \mathbf{D} a matriz de amortecimento (viscoso), $\mathbf{F}_n l$ o vetor de forças não-lineares e \mathbf{f} o vetor de forças externas.

Os testes foram realizados com uma frequência de amostragem de 1024 Hz e 16384 amostras. Inicialmente, as respostas foram obtidas para uma entrada do tipo aleatória no elemento de massa 1 apenas, com relação sinal-ruído¹ de 20 dB em amplitude (ou seja, 10% sobre a amplitude do sinal), por meio de integração numérica utilizando Runge-Kutta de 4ª ordem. O nível de amplitude de excitação foi de 0.1 N, aqui assumido como nível de regime linear de vibração. Esta integração numérica busca emular as respostas experimentais que poderiam ser obtidas durante a medição de uma estrutura real.

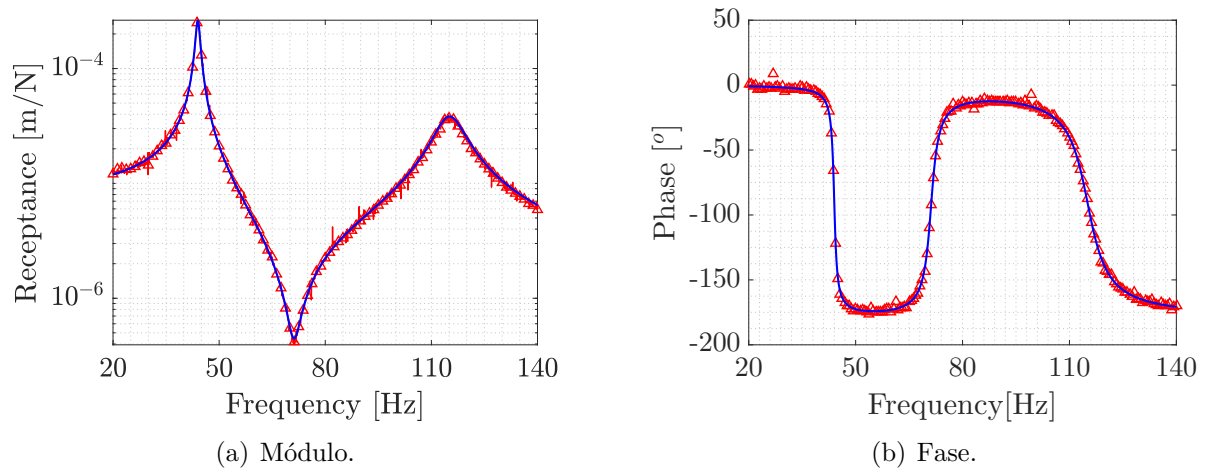
Com os valores de saída (acelerações), foram então estimadas as funções de transferência por meio do estimador \mathcal{H}_1 , com janela do tipo *Hanning* nos sinais de saída, sobreposição de 60% e 8192 amostras. Foi utilizado o estimador \mathcal{H}_1 por facilidade de trabalho encontrada pelo autor. Como foi discutido na seção 2.2, o estimador \mathcal{H}_1 tende a priorizar a definição da FRF nos vales (anti-ressonâncias) enquanto que o \mathcal{H}_1 prioriza a definição nos picos (ressonâncias). Dessa forma, para fins de obtenção do modelo modal seria preferível usar o estimador \mathcal{H}_1 em detrimento ao \mathcal{H}_1 (sugestão de estudo para trabalhos futuros). Com as FRFs estimadas, pôde-se comparar com as FRFs analíticas, obtidas pela eq. (30), conforme ilustra a Fig. 11. Neste caso, para se obter as receptâncias, foi feita a operação em frequência mostrada na eq. (32) e eq. (33). A Figura 13 mostra os gráficos de Nyquist considerando as FRFs ilustradas na Fig. 11 e Fig. 12.

Com as FRFs estimadas corretamente, aplicou-se então o método descrito na seção 2.2 para extrair os parâmetros modais. Dessa forma, por meio do gráfico de Nyquist, obteve-se valores de frequências naturais iguais a 44 Hz e 115 Hz. Com os valores de frequência natural, foram também calculados as razões de amortecimento e os modos de vibrar a partir dos gráficos da parte imaginária em função da frequência das FRFs estimadas (simulando uma situação experimental). Os valores obtidos foram $\xi_1 = 1.053\%$ e $\xi_2 = 3.373\%$, com modos normais lineares:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.617 & 1 \\ 1 & -0.688 \end{bmatrix}$$

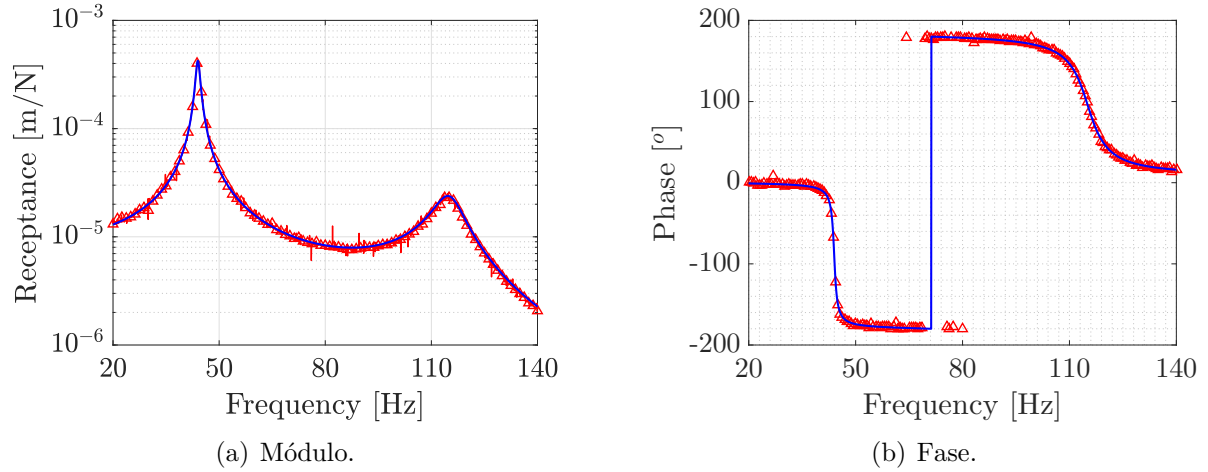
¹Do inglês, *signal-to-noise* - SNR

Figura 11 – Comparação entre as FRFs estimadas e analíticas. Em azul (-) tem-se as FRFs analíticas e em vermelho (- Δ -) as estimadas - \mathcal{H}_{11} .



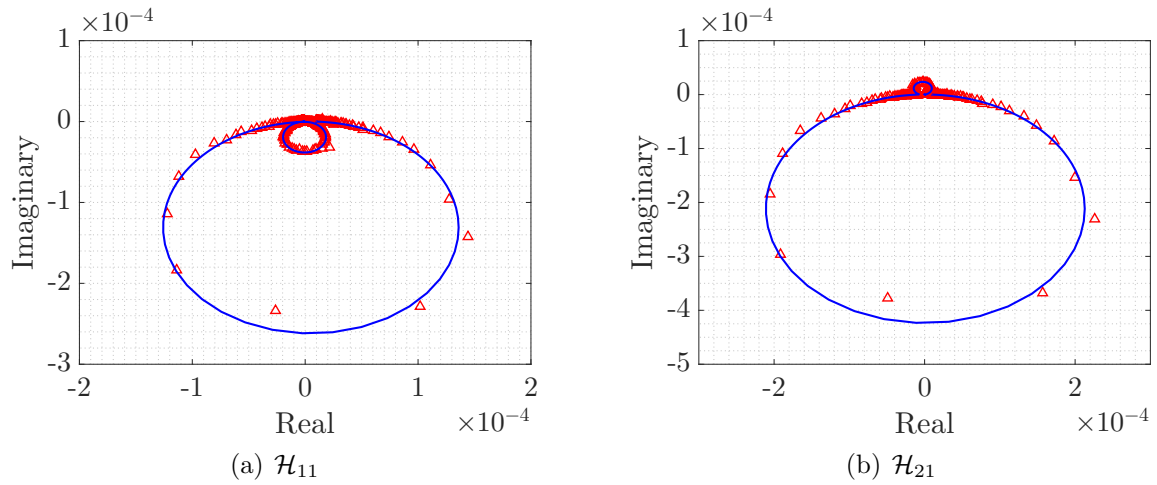
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 12 – Comparação entre as FRFs estimadas e analíticas. Em azul (-) tem-se as FRFs analíticas e em vermelho (- Δ -) as estimadas - \mathcal{H}_{21} .



Fonte: Elaborado pelo autor.

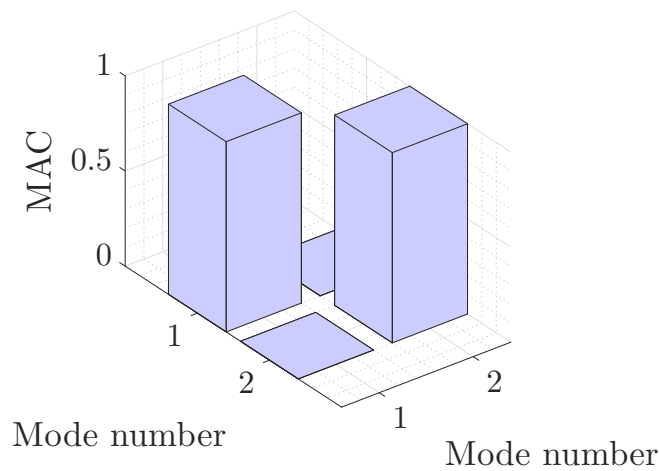
Figura 13 – Gráficos de Nyquist com as FRFs estimadas e analíticas. Em azul (-) tem-se as aproximações analíticas e em vermelho (- Δ -) as estimadas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Após o cálculo dos parâmetros modais, foram calculados os números de MAC para verificar o grau de confiabilidade dos resultados, mostrado na Fig. 14.

Figura 14 – Números de MAC para o caso simulado.

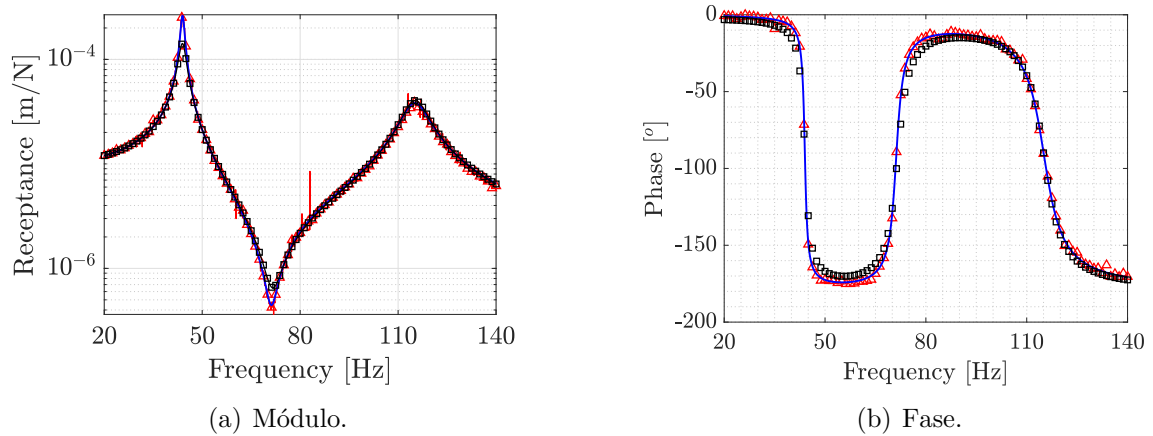


Fonte: Elaborado pelo autor.

Com os valores obtidos, mostrando visivelmente uma estimativa satisfatória para correlação entre os modos, prosseguiu-se com a metodologia mostrada em 9. A meta, após a obtenção das características dinâmicas, foi reconstruir as FRFs parametricamente, e verificar se as mesmas coincidem com as FRFs analíticas e estimadas (de maneira não paramétrica). Com isso, obteve-se, da eq. (31), as receptâncias obtidas parametricamente. Os resultados mostrados na Fig. 15 e Fig. 16 ilustram as FRFs regeneradas (ou

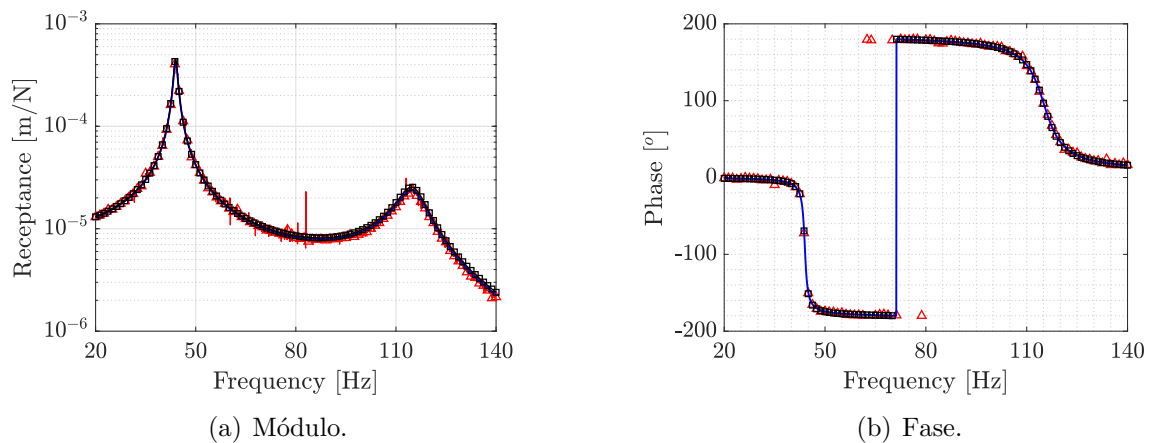
reconstruídas a partir dos parâmetros modais) sobrepostas às FRFs obtidas anteriormente (analíticas e não paramétricas).

Figura 15 – Comparação entre as FRFs estimadas, analíticas e regeneradas, para amplitude de excitação de 0.1 N. Em azul (-) tem-se as FRFs analíticas, em vermelho (Δ) as estimadas não paramétricas e em preto (\square) as regeneradas - \mathcal{H}_{11} .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 16 – Comparação entre as FRFs estimadas, analíticas e regeneradas, para amplitude de excitação de 0.1 N. Em azul (-) tem-se as FRFs analíticas, em vermelho (Δ) as estimadas não paramétricas e em preto (\square) as regeneradas - \mathcal{H}_{21} .

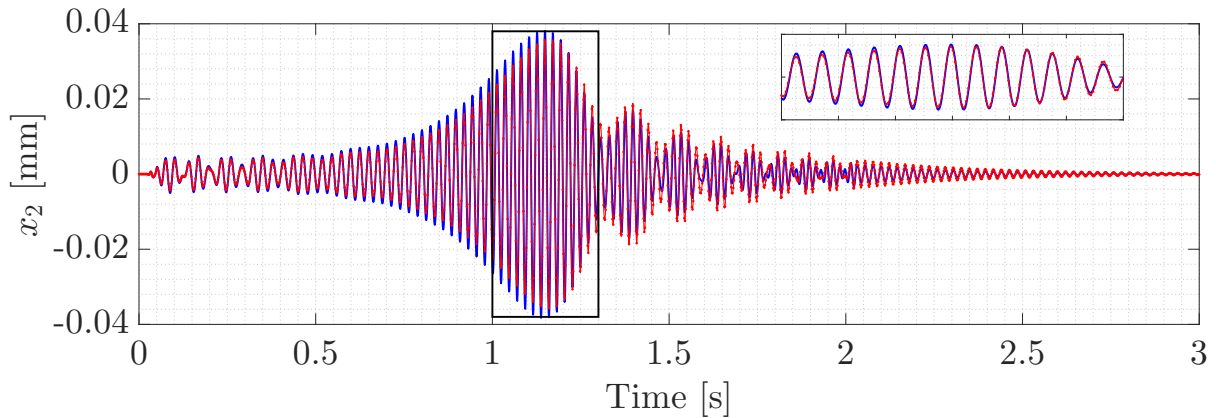


Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a validação dos parâmetros modais obtidos, pela sobreposição das FRFs, foi feita também a validação no tempo. Para isso, fez-se um teste com uma entrada do tipo varredura senoidal entre 1 e 60 Hz, com duração de 4 segundos e nível de amplitude de 0.1 N. A Figura 17 mostra a sobreposição dos deslocamentos obtidos tanto pelo modelo físico

simulado quanto pelo modelo modal, aqui para o elemento de massa 2. Fez-se também uma análise do grau de correlação entre resposta simulada pelo modelo físico e resposta pelo modelo modal. O valor encontrado, pela eq. (62), foi de 0.9966, indicando um ajuste satisfatório das FRFs.

Figura 17 – Validação do modelo modal reduzido considerando regime linear de movimento. Em azul (-) sinais obtidos pelo modelo físico simulado e em vermelho (---) pelo modelo modal.



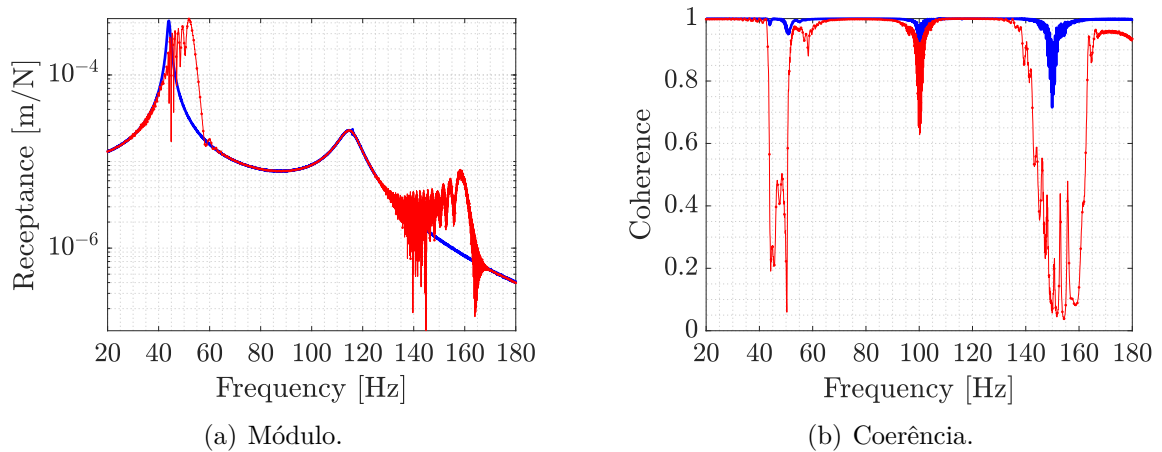
Fonte: Elaborado pelo autor.

A etapa seguinte consistiu na identificação da não linearidade. Inicialmente, na fase de detecção, foram feitos testes com o intuito de verificar a degradação das FRFs, bem como indícios demonstrados pela função de coerência. Dessa forma, com uma entrada do tipo varredura senoidal no elemento de massa 1, entre 20 e 180 Hz, para dois níveis de amplitude de excitação diferentes (0.1 e 4 N) com a duração de 32 segundos, foram calculadas as FRFs e funções de coerência. A Figura 18 mostra que há degradação das FRFs, decorrente do efeito não-linear ligado ao aumento da amplitude. Além disso, nota-se que a função de coerência também sofre alterações, evidenciando este fenômeno.

Ainda na etapa de detecção, foi feito um teste com entrada do tipo varredura senoidal (*stepped sine test*), mas para vários níveis de amplitude de excitação, entre 42 e 47 Hz, com passos de 0.5 Hz e duração de 8 segundos para cada frequência. Esse valor de passo em frequência fixo foi adotado porque a placa de aquisição não permitia passos variáveis, isto é, maior resolução em frequência próximo da ressonância. E para garantir a integridade da estrutura, levando-se em consideração a quantidade de energia fornecida ao sistema, considerou-se este valor após testes experimentais prévios. As amplitudes variaram de 0.1 a 2 N e os resultados obtidos são mostrados na Fig. 19. Essa figura ilustra as respostas do elemento de massa 2 (deslocamentos) no domínio da frequência, e é evidente a presença do fenômeno de salto, característico em sistemas não-lineares. Além disso, a Fig. 20,

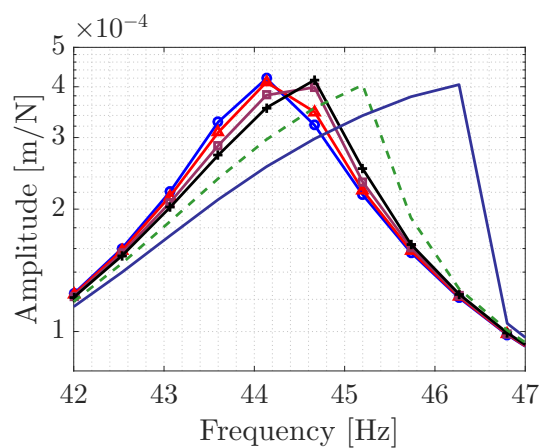
obtida com base na Fig. 19 ilustra a variação desta frequência com o aumento do nível da amplitude de excitação. Nota-se uma mudança de aproximadamente 2 Hz com a alteração da amplitude de 0.1 para 2 N.

Figura 18 – Detecção da não linearidade pela degradação das FRFs (sinais obtidos pelo elemento de massa 2). Em azul (-) tem-se respostas para baixo nível de amplitude de excitação e em vermelho (---) para alta amplitude.



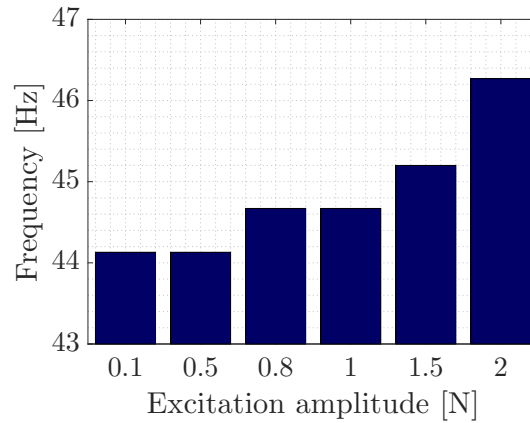
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 19 – Amplitude de resposta em frequência para diferentes níveis de excitação, considerando o deslocamento x_2 . Em azul (-o-) para 0.1 N, em vermelho (-Δ-) para 0.5 N, em roxo (-□-) para 0.8 N, em preto (-+-) para 1 N, em verde (- - -) para 1.5 N e em azul escuro (-) para 2 N.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 20 – Variação da frequência natural em função da amplitude de excitação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a etapa de caracterização, utilizou-se o método de superfície de resposta, usando a eq. (67). Considerando as equações de movimento do sistema na forma matricial, com as matrizes dadas na eq. (82), tem-se a expressão para a força não linear:

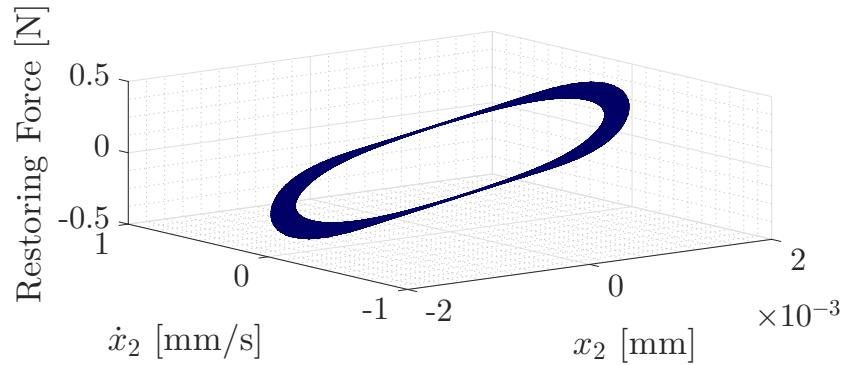
$$\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (83)$$

Para identificar e caracterizar, portanto, a não linearidade, introduziu-se um sinal de entrada na forma de varredura senoidal em frequência entre 42 e 47 Hz com alto nível de amplitude (5 N), em um intervalo em frequência de 0.5 Hz e 4 segundos para cada bloco. Dessa forma, aplicando-se o método RFS considerando a eq. (83), obteve-se a superfície da força de restauração, que é mostrada na Fig. 21. Esta curva é mostrada para os sinais obtidos do elemento de massa de massa 2, pois no elemento de massa 1 não houveram indícios da presença de não linearidade, conforme o modelo sugere (localização).

Assim, fazendo-se um ajuste de curva para extrair os parâmetros do polinômio, através de mínimos quadrados, obteve-se valores de α igual a 3.6488^{10} N/m³ e β igual a 229.52 N/m² (SCUSSEL, 2017; TANG *et al.*, 2015; KOVACIC; BRENNAN, 2011), com a força não-linear descrita por:

$$\mathcal{F}_{nl} = \alpha x_2^3 + \beta x_2^2 \quad (84)$$

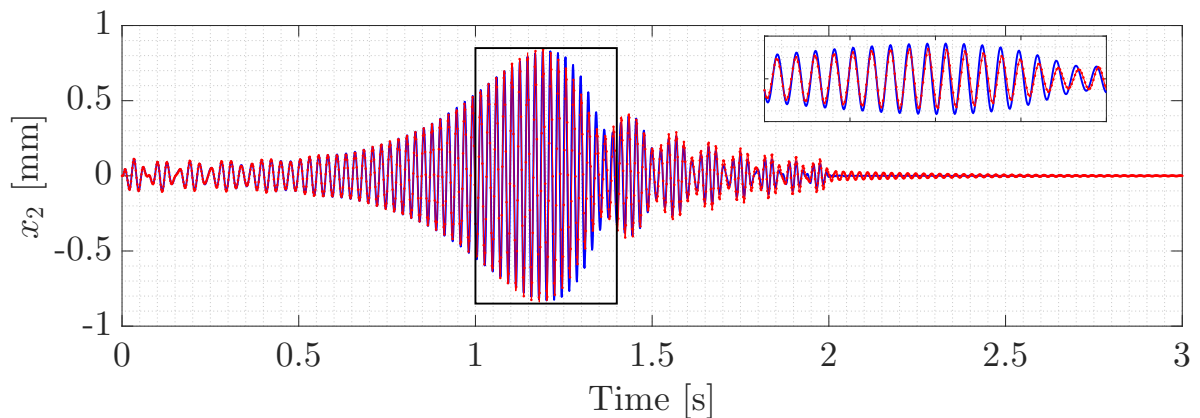
Figura 21 – RFS obtida para o caso simulado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Desta maneira, o termo não-linear foi adicionado ao modelo modal de baixa dimensão, e então foi feito o mesmo procedimento de validação para este caso, isto é, uma entrada do tipo varredura senoidal de 1 a 60 Hz, varrendo a região do primeiro modo, mas agora para uma amplitude de excitação de 2 N, com duração de 4 segundos. A Figura 22 mostra os resultados obtidos para este caso, aqui considerando também dados do elemento de inércia 2. Foi feito também, para este caso, o estudo da correlação das respostas obtidas pelo modelo físico simulado e modelo modal. Pela eq. (62), o valor encontrado foi de 0.9898. Isso indica que a metodologia adotada, considerando a não linearidade discreta e concentrada, para este modelo simulado, foi conveniente.

Figura 22 – Validação do modelo modal de baixa dimensão considerando regime não-linear de movimento. Em azul (-) sinais obtidos pelo modelo físico simulado e em vermelho (-.-) pelo modelo modal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O próximo passo foi aplicar esta metodologia (Fig. 9) para identificar um sistema através de dados experimentais coletados, que é mostrado na seção 4.2. Busca-se uma

análise de como o aumento de amplitude na excitação afeta as propriedades válidas para o regime linear, como homogeneidade, bem como a variação dos parâmetros modais em função desta mudança no nível de excitação (identificação da não linearidade). O que se mostra por este exemplo numérico é que para um simples caso, é possível se obter um modelo modal com não linearidades incluídas capaz de emular o comportamento do sistema. No caso experimental, o que se procura fazer é um processo similar, mas considerando efeitos não-lineares mais complexos. Ewins, Weekes e Carri (2015) mostram um caminho que se pode fazer neste sentido, e que é basicamente o que foi feito neste trabalho, mas estendendo os resultados para uma análise e extração de NNMs, como feito no trabalho de Peeters, Kerschen e Golinval (2011).

4.2 Aplicação experimental em uma viga com rigidez cúbica

Esta seção trata do experimento realizado, desde as etapas de preparação até a discussão de resultados. Primeiramente, tem-se a descrição da bancada de ensaios utilizada, os equipamentos e disposição dos mesmos, bem como o procedimento adotado. Na sequência, é mostrado o modelo proposto representando um oscilador de Duffing e a calibração deste modelo, seguido dos resultados experimentais obtidos com as devidas discussões e conclusões, e em seguida a inclusão do elemento não-linear e a identificação por RFS. Além disso, é feita a análise da influência dos efeitos não-lineares na análise modal, incluindo a dependência entre frequência e energia.

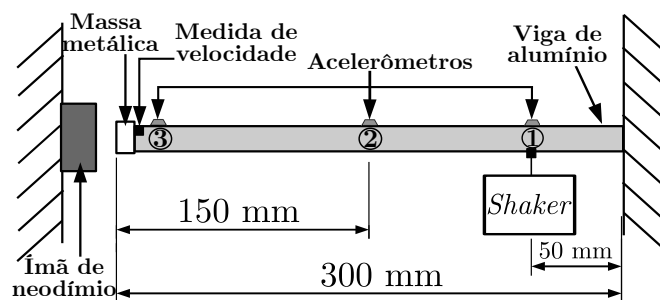
4.2.1 Descrição da bancada de ensaios

A bancada experimental utilizada consiste em uma viga de alumínio presa em uma extremidade com um dispositivo de fixação buscando simular a condição de engaste ideal (deslocamento e giro nulos no engaste) e com dimensões $300 \times 19 \times 3.2$ [mm³] conforme ilustra a Fig. 23. Uma massa de ferro foi conectada na extremidade livre da viga com o intuito de causar interação magnética entre a viga de alumínio e o ímã de neodímio preso na ponta do suporte livre. O ímã foi colocado para ocasionar o efeito geométrico e funcionar como mecanismo de não linearidade (SHIKI; SILVA; TODD, 2017). O aparato experimental pode ser visualizado na Fig. 23. É importante ressaltar que os dados utilizados para este estudo foram os mesmos do trabalho de Shiki, Silva e Todd (2017), e portanto algumas figuras são semelhantes por conta disto, mas toda a análise foi feita pelo autor, com base nestes dados.

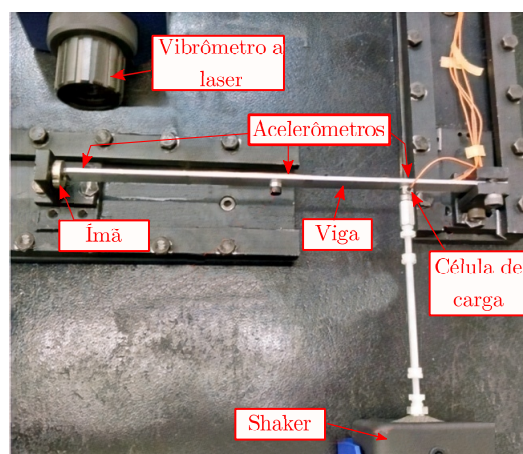
O excitador foi posicionado a 50 [mm] da extremidade engastada da viga e o monitoramento da resposta foi feito por meio de acelerômetros e vibrômetro a *laser*. O vibrômetro a *laser* foi usado para verificar a acurácia dos dados obtidos pelos acelerômetros, quando comparados os sinais de resposta. Estas medidas de velocidade não foram utilizadas na elaboração dos resultados. Os equipamentos, sensores e atuadores usados para os testes experimentais foram:

- Excitador *Modal Shop*[®] 2400E;
- Célula de carga *Dytran*[®] 1022V;
- Sistema de aquisição de dados m+p *VibPilot*[®];
- Vibrômetro a laser *Polytec*[®] OFV-525/-5000-S.
- Acelerômetros *Dytran*[®] model 3225F1.

Figura 23 – Aparato experimental.



(a) Esquema do aparato.



(b) Bancada utilizada para os ensaios.

Fonte: Adaptado de Shiki, Silva e Todd (2017).

4.2.2 Modelo equivalente por um oscilador de Duffing

Para a análise modal em regime linear de movimento, considerou-se uma aproximação da viga pelos três primeiros modos de vibrar, dadas as condições estruturais e instrumentação que limitaram a aquisição de sinais em frequências maiores do que a representativa do terceiro modo. Este modelo não representa o comportamento da viga em sua forma integral, mas é um truncamento que procura representá-lo. Em outras palavras, aproximou-se o comportamento da viga por um modelo com 3 modos equivalentes lineares.

Quando a estrutura vibra com baixa amplitude de excitação, o termo de não linearidade concentrada pode ser desprezado. Em outras palavras, para $\mathbf{F}_{nl}(x, t) \approx 0$, tem-se a situação linear descrita na eq. (1), e estendida para o domínio modal na eq. (77). Assim, na primeira etapa descrita na Fig. 9, a estrutura foi excitada com um sinal do tipo aleatório, com uma banda de frequência entre 10 e 400 Hz e amplitude de tensão elétrica de 0.01 V aplicada no excitador através de um amplificador de potência para gerar a força excitação. Não foi feita uma relação entre tensão elétrica/força através da sensibilidade da célula de carga. Essa relação pode ser encontrada no estudo de Tang *et al.* (2016). Foram obtidos 50 blocos de 8192 amostras cada, sendo 4096 amostras sob excitação do tipo aleatória e 4096 sob resposta livre (*burst random*), com frequência de amostragem de 1024 Hz.

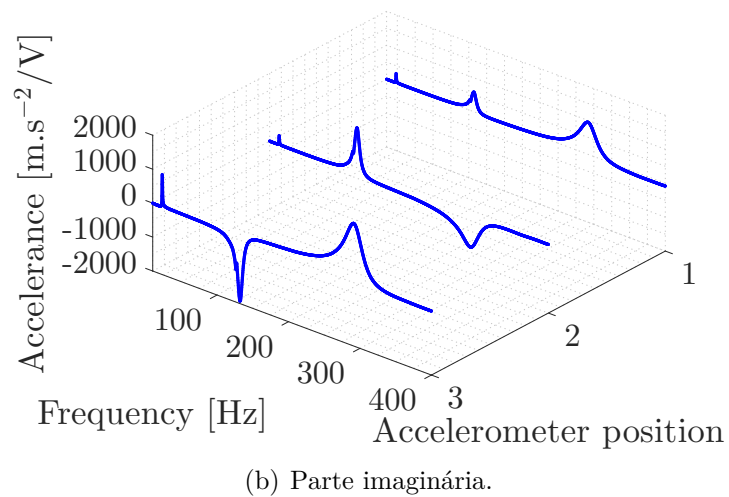
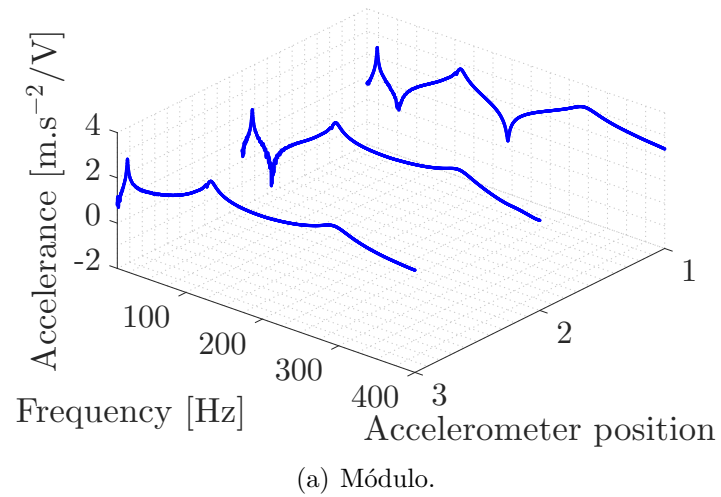
A partir dos sinais coletados pelos acelerômetros e pelo sinal de entrada, foram estimadas as funções de resposta em frequência por meio do estimador \mathcal{H}_1 com uma janela do tipo *Hanning*, sobreposição de 60% e 409600 amostras, e os resultados podem ser verificados na Fig. 24. Nestes gráficos, são mostradas as FRFs para os sinais dos três acelerômetros, considerando as três primeiras frequências naturais da estrutura (3 modos). Os acelerômetros estão numerados na sequência do engaste para a extremidade livre, ou seja, o primeiro acelerômetro (acelerômetro 1) está localizado próximo ao engaste (na posição de 50 mm na viga), o segundo no meio da viga (na posição de 150 mm na viga) e o acelerômetro 3 na extremidade livre (na posição de 300 mm na viga), conforme Fig. 23(a). Além do gráfico do módulo, foram obtidos também gráficos da parte imaginária das FRFs, que servem para mostrar de uma forma simples e visual o comportamento de cada modo de vibração.

A Figura 25 mostra a visualização dos modos normais lineares estimados experimentalmente a partir do gráfico da parte imaginária da FRF. No caso, foram considerados os 3 primeiros modos para visualização.

Além das FRFs obtidas, avaliou-se a coerência, dada pela eq. (39). O resultado é mos-

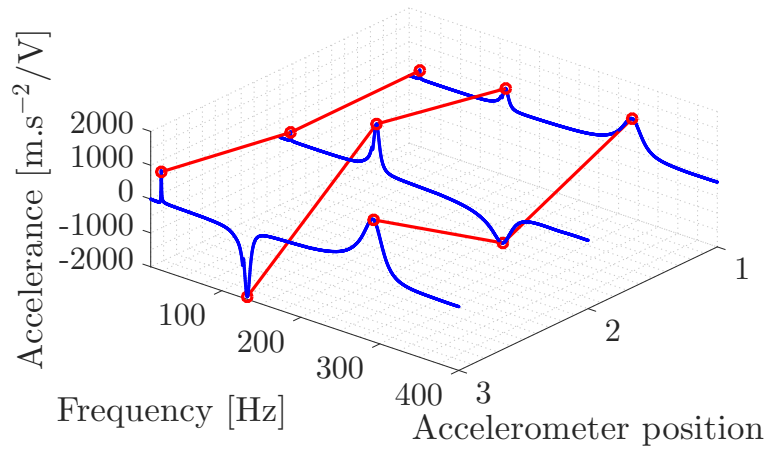
trado na Fig. 26. Nota-se que, a menos dos picos que correspondem às antirressonâncias, obteve-se acuracidade satisfatória na aquisição dos dados.

Figura 24 – FRFs obtidas via estimador \mathcal{H}_1 .



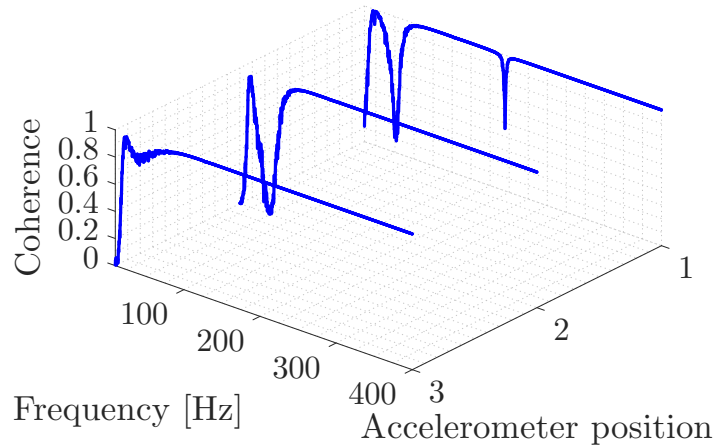
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 25 – Modos visualizados pela parte imaginária da FRF. Em azul (-) a parte imaginária e em vermelho (-•-) uma visualização dos modos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 26 – Valores de coerência obtidos.



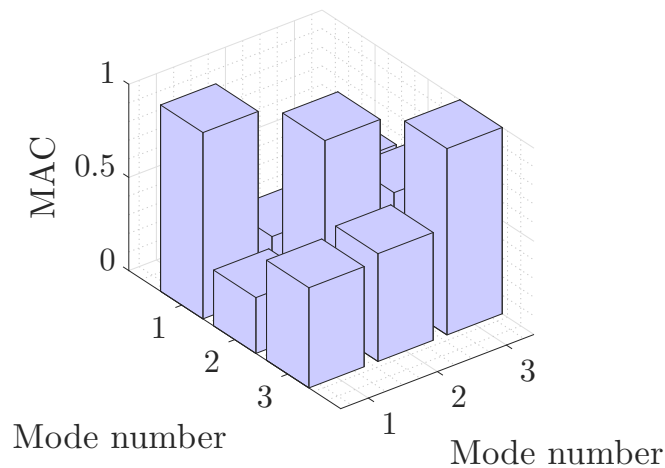
Fonte: Elaborado pelo autor.

O passo seguinte foi estimar os parâmetros modais. Esse procedimento foi feito a partir de um ajuste de curvas provenientes das FRFs, com o qual foi possível se obter as frequências naturais, razões de amortecimento e resíduos modais para primeiro e segundo modo de vibrar. O método utilizado foi o mesmo da parte feita por simulação numérica, isto é, mostrado na seção 2.2. A primeira frequência natural resultou $\omega_1 = 23.0$ Hz e razão de amortecimento $\xi_1 = 0.018$; para o segundo modo, foi obtida frequência natural $\omega_2 = 132.5$ Hz e razão de amortecimento $\xi_2 = 0.037$, e finalmente para o terceiro modo $\omega_3 = 292.5$ Hz e $\xi_3 = 0.05$. Os modos foram obtidos a partir dos resíduos modais, os quais resultaram:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 3.4207 & 6.4531 & 9.7458 \\ 3.0392 & 15.1671 & -9.8028 \\ 11.9483 & -22.3739 & 18.2692 \end{bmatrix}$$

Para verificar a correlação entre os modos, foi utilizado o número de MAC, o qual pode ser visualizado na Fig. 27. Os valores obtidos foram ruins, e tal resultado justifica-se pelo fato de que a viga, mesmo para baixo nível de amplitude, já é não-linear pelo efeito do imã. Além disso, pode-se considerar como fator de erro para este resultado a quantidade de pontos de aquisição, isto é, a resolução espacial que foi utilizada (somente 3 pontos de medida). Se houvessem mais tomadas de medida ao longo da viga, a correlação seria maior.

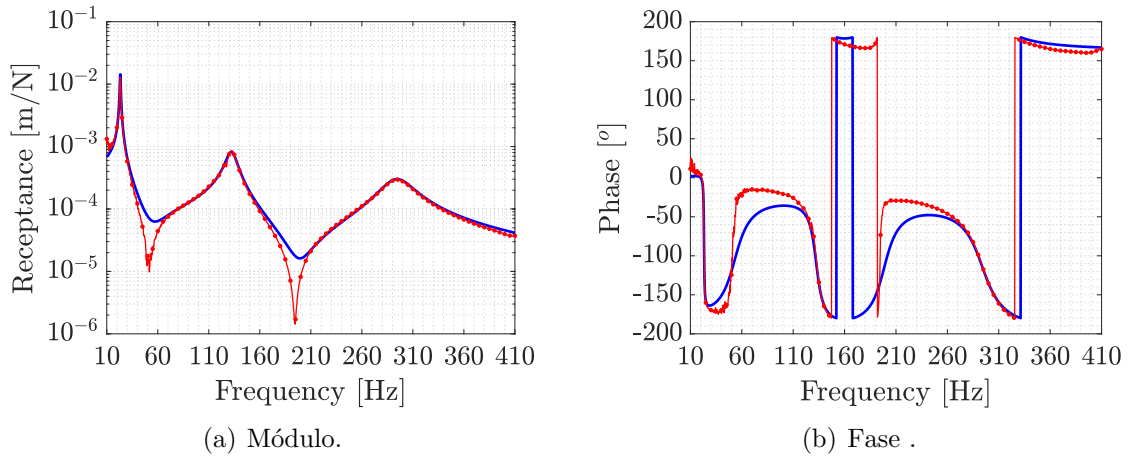
Figura 27 – Número de MAC para a matriz de modos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

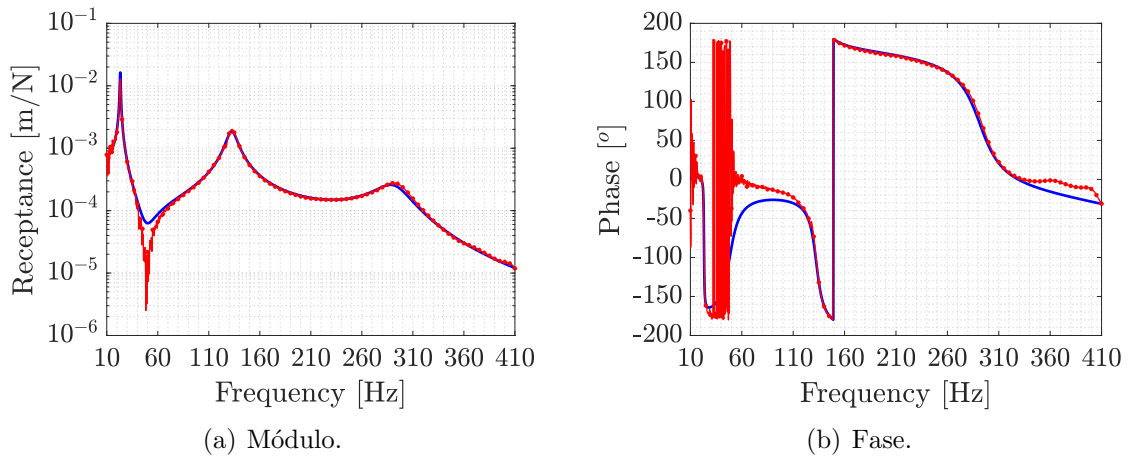
Para validar a análise modal experimental, foram então reconstruídas as FRFs a partir dos parâmetros modais, isto é, de forma paramétrica. Essa reconstrução foi obtida por meio da eq. (43), utilizando 4096 amostras (EWINS, 1984). As Figuras 28, 29 e 30 mostram os resultados obtidos. A Figura 28 mostra a FRF reconstruída e estimada \mathcal{H}_{11} considerando sinais do acelerômetro 1, Fig. 29 mostra a FRF reconstruída e estimada \mathcal{H}_{21} considerando sinais do acelerômetro 2 e Fig. 30 mostra a FRF reconstruída e estimada \mathcal{H}_{31} considerando sinais do acelerômetro 3, sendo \mathcal{H}_{jk} a nomenclatura mostrada na eq. 31.

Figura 28 – FRFs reconstruídas - em azul (-) para FRF reconstruída e em vermelho (---) para FRF estimada - \mathcal{H}_{11} .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 29 – FRFs reconstruídas - em azul (-) para FRF reconstruída e em vermelho (---) para FRF estimada - \mathcal{H}_{21} .

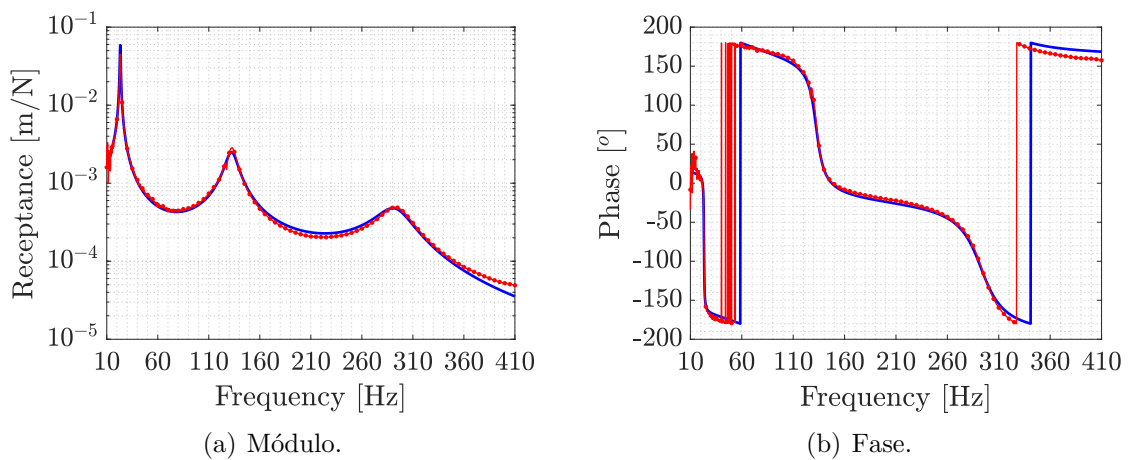


Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, conclui-se que os parâmetros modais encontrados representam de forma satisfatória o sistema, adotando-se um modelo que considera os três primeiros modos em sua composição. Para validar o modelo, realizou-se uma simulação com uma entrada do tipo varredura senoidal para um baixo nível de excitação (0.01 V) varrendo a faixa de 10 até 500 Hz. Comparou-se então as respostas obtidas por simulação numérica utilizando integração por Runge-Kutta de 4^a ordem e as respostas experimentais. O resultado obtido pode ser visto na Fig. 31. Também, neste caso, estudou-se o grau de correlação entre as FRFs obtidas através dos dados experimentais e dados simulados pelo modelo modal

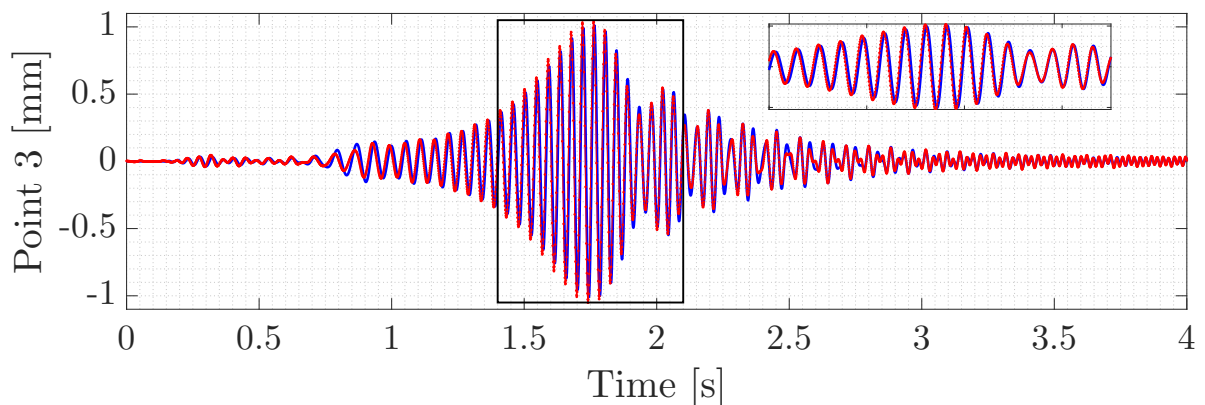
reduzido. O valor encontrado, pela eq. (62) foi de 0.8674, o que não indica um ajuste tão satisfatório como no caso numérico, estudado anteriormente, devido a diversos fatores como o truncamento do modelo modal levando-se em conta somente os três primeiros modos, o número de pontos de medida (resolução espacial) e a presença da não linearidade que é modelada neste caso como sendo discreta e concentrada, o que não necessariamente é o que ocorre na realidade.

Figura 30 – FRFs reconstruídas - em azul (-) para FRF reconstruída e em vermelho (---) para FRF estimada - \mathcal{H}_{31} .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 31 – Deslocamento do acelerômetro 3 em vermelho (---) experimental e em azul (-) obtido pelo modelo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

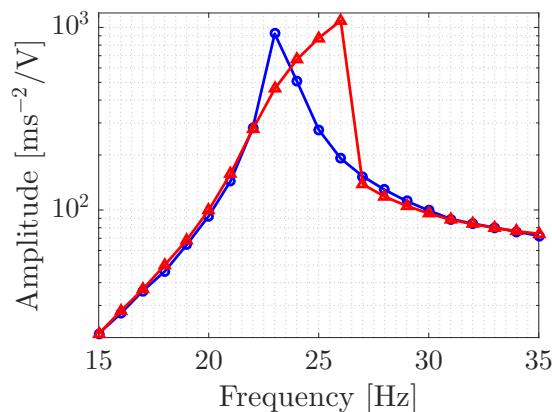
Tem-se, portanto, o modelo para o regime linear verificado. Na sequência, foi feita a identificação da não linearidade, seguindo os passos da segunda etapa descrita na Fig. 9. Estimou-se os termos para a não linearidade concentrada e discreta no modelo para

quando a estrutura começar a vibrar em regime não-linear de movimento, para inserir no modelo linear e emular o comportamento do mesmo em regime não linear, comparando com a resposta do sistema.

4.2.3 Identificação do parâmetro não-linear usando a superfície de resposta

Inicialmente, para verificar a ocorrência de não linearidade na estrutura, fez-se uma varredura senoidal em regime permanente para baixos e altos níveis de amplitude de tensão elétrica aplicada para acionar no excitador, sendo eles 0.01 V e 0.15 V varrendo uma faixa de frequência de 10 a 400 Hz. Dessa maneira, pôde-se observar a ocorrência do fenômeno de salto, ou seja, variação da frequência de ressonância da estrutura em consequência do aumento do nível de amplitude. A Figura 32 mostra o gráfico obtido pelo teste, para o primeiro modo de vibrar (em torno de 23 Hz). Pelo fato de ocorrer essa variação da frequência de ressonância, constata-se que o sistema se comporta de modo não-linear em altas amplitudes de excitação, pois não houve mudança de parâmetros físicos (massa ou rigidez), mas somente efeitos causados pelo aumento do nível de excitação e a vibração em regime não linear. Deve-se ressaltar que a frequência de ressonância para o primeiro modo de vibrar não é exatamente o pico mostrado no gráfico, pois o passo utilizado foi de 0.5 Hz, então o valor exato encontra-se em torno de 23 Hz, que é o valor do pico (para comportamento linear).

Figura 32 – Fenômeno de salto para o primeiro modo. Em azul (\circ) tem-se regime linear (amplitude de excitação de 0.01 V) e em vermelho (\triangle) regime não-linear de movimento (amplitude de excitação de 0.15 V).



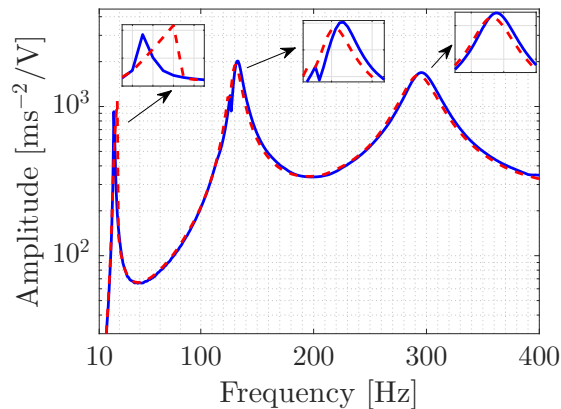
Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 33 mostra as FRFs obtidas pelo sinal de entrada *stepped sine test* varrendo

a faixa de frequência de 10 a 400 Hz, que compreende os três primeiros modos de vibrar da estrutura considerada. Nota-se desta figura que o primeiro modo é o mais afetado pelo aumento na amplitude do sinal de excitação, e que o terceiro modo praticamente não sofre este efeito. Dessa forma, toda a análise é feita para este primeiro modo, considerado o mais significativo.

A Figura 34 ilustra a presença da não linearidade através de uma análise via espectrograma, que nesse caso foi elaborado pela frequência em função do tempo, com os mesmos sinais usados para elaborar a Fig. 33. Nota-se que para o regime não-linear de movimento, existem harmônicas de segunda e terceira ordem (representadas pelas linhas pontilhadas). Outras harmônicas são visíveis, porém com menos contribuição (SHIKI; SILVA; TODD, 2017; BRAUN; FELDMAN, 1997).

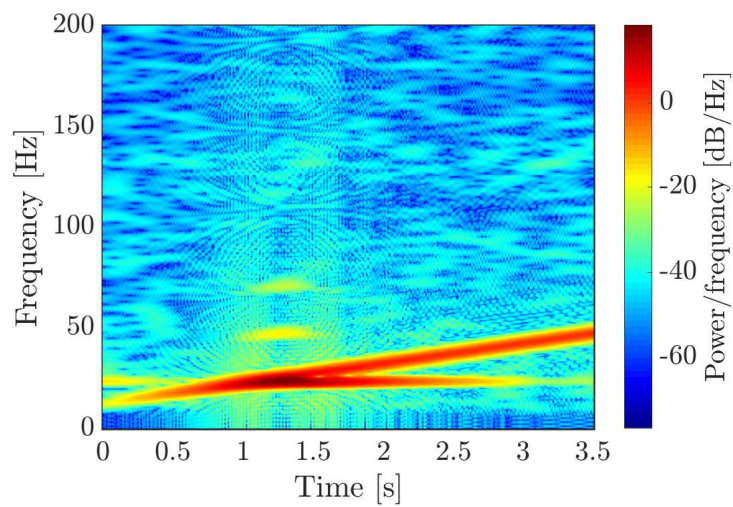
Figura 33 – FRFs para regime linear (-) e regime não-linear de movimento (---). Sinais obtidos para o acelerômetro 3, na extremidade livre da viga.



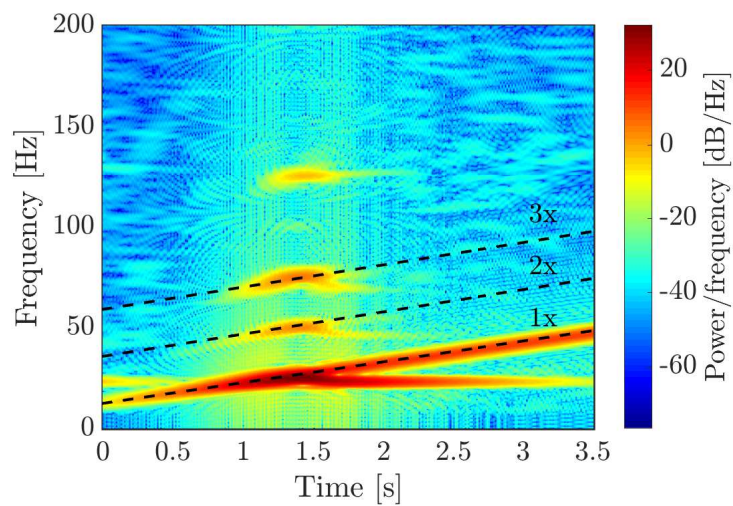
Fonte: Adaptado de Shiki, Silva e Todd (2017).

Com base no primeiro modo de vibrar da estrutura, fez-se outro teste para avaliar os efeitos da não linearidade, e que consistiu na variação da amplitude de tensão elétrica aplicada ao excitador de 0.01 V à 0.25 V em uma varredura senoidal em regime permanente *stepped sine test* de 10 à 50 Hz, com um passo em frequência de 0.5 Hz. Foi feita uma análise da evolução da frequência natural do sistema, obtida pelas FRFs estimadas pelo estimador \mathcal{H}_1 , janela retangular e 2048 amostras, representando frequência em função da amplitude de excitação. As Figuras 35 e 36 mostram este resultado. Nota-se nitidamente a presença do salto. O que se verifica é o aumento progressivo do valor da frequência, caracterizando efeito de endurecimento da rigidez, conhecido como *hardening* segundo Kovacic e Brennan (2011).

Figura 34 – Diagrama tempo-frequência da resposta do sistema para sinais do acelerômetro 3 para duas amplitudes de excitação distintas.



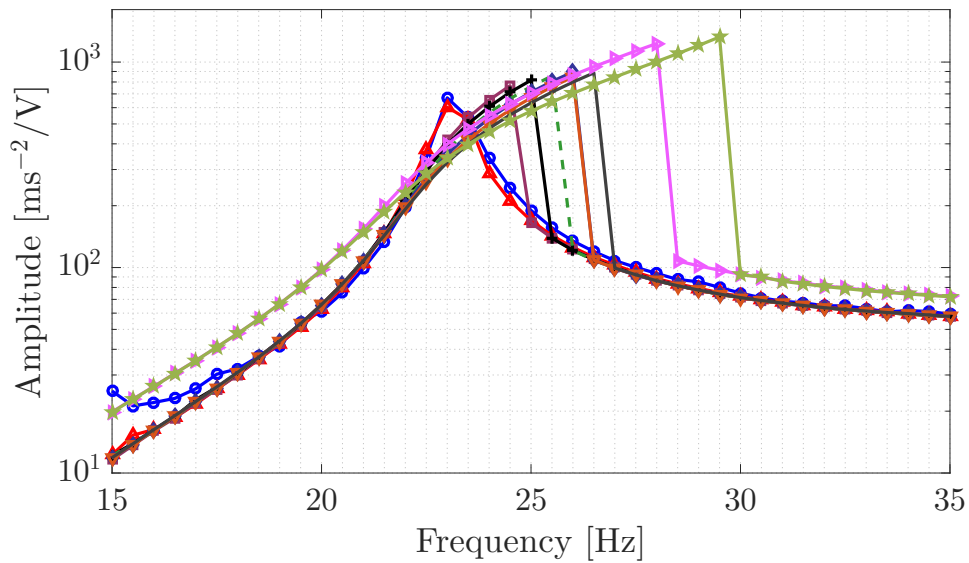
(a) Regime linear - 0.01 V.



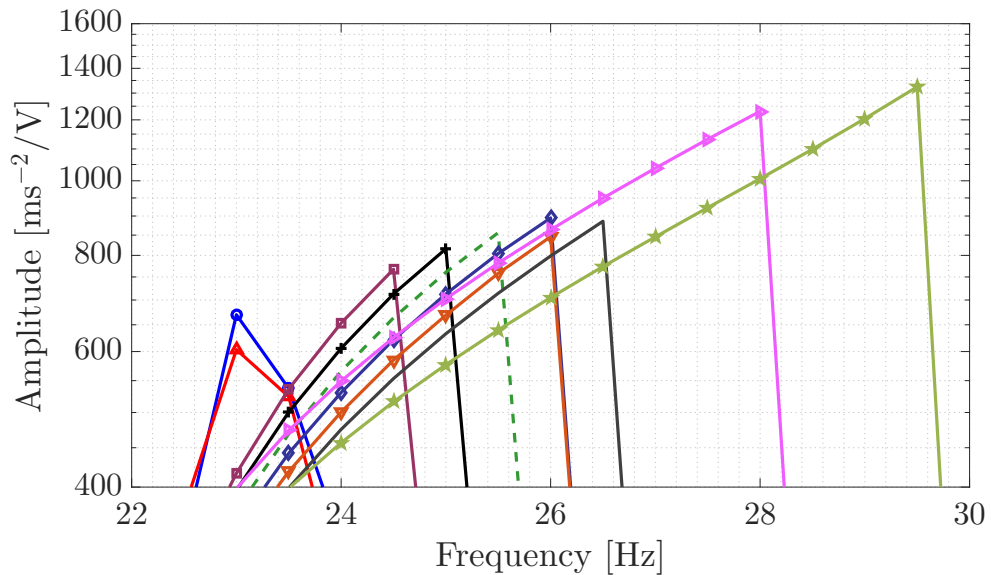
(b) Regime não-linear - 0.15 V.

Fonte: Adaptado de Shiki, Silva e Todd (2017).

Figura 35 – Fenômeno de salto. Em azul (-o-) para 0.01 V, em vermelho (-△-) para 0.05 V, em roxo (-□-) para 0.1 V, em preto (-+-) para 0.11 V, em verde (- - -) para 0.12 V, em azul escuro (-◇-) para 0.13 V, em alaranjado (-▽-) para 0.14 V, em cinza (-) para 0.15 V, em rosa (-▷-) para 0.2 V e em verde musgo (-★-) para 0.25 V.



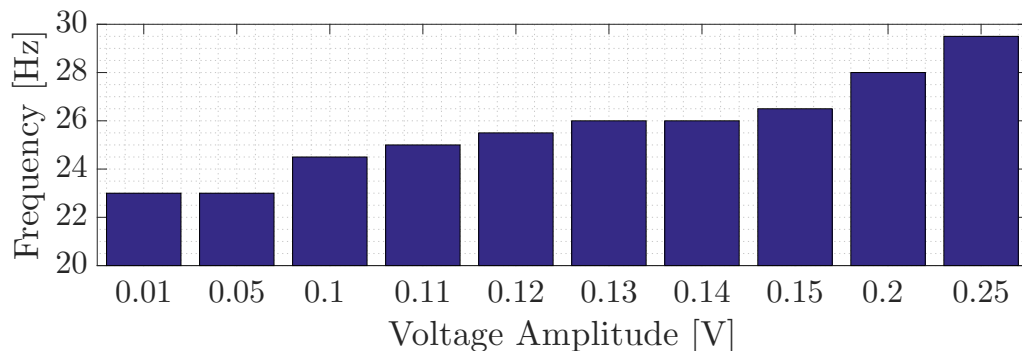
(a) Variação do pico de frequência entre 15 e 35 Hz.



(b) Zoom.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 36 – Variação da primeira frequência natural do sistema com o aumento da amplitude de tensão elétrica.

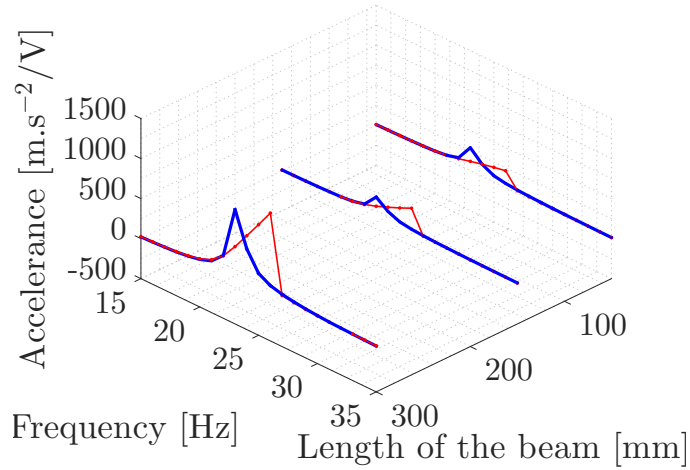


Fonte: Elaborado pelo autor.

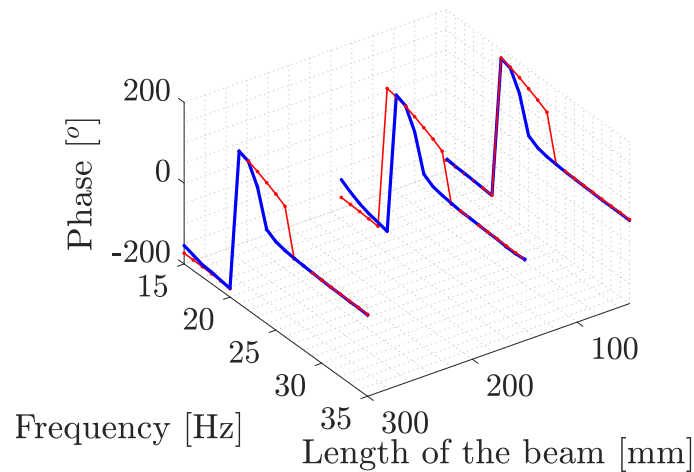
Além do efeito da variação da frequência, outro fenômeno interessante é verificar a alteração da parte imaginária das FRFs, que no caso linear é uma representação primitiva dos modos. A Figura 37 mostra as FRFs para os casos de regime linear e não-linear de movimento. Nota-se claramente a quebra da invariância dos parâmetros modais, e portanto a análise modal convencional se torna impraticável. Foram usados sinais com entrada 0.01 V e 0.15 V, utilizados no resultado da Fig. 36 e FRFs obtidas pelo mesmo estimador e parâmetros de estimativa.

Para ilustrar o efeito não linear, foi feita a comparação entre as linhas modais no espaço de configuração e espaço de fase, no regime linear e não-linear de movimento. Os sinais considerados foram os mesmos usados no resultado da Fig. 37. Para tanto, no espaço de configuração, analisou-se os deslocamentos do acelerômetro 3 em função dos deslocamentos do acelerômetro 2, ambos obtidos por integração em frequência. Esse procedimento foi feito adotando-se as equações 32 e 33 e a transformada de Fourier do sinal temporal. Dessa forma, é possível, a partir dos sinais de aceleração, a obtenção dos sinais de velocidade e deslocamento. Portanto, quando diz-se integração ou derivação em frequência, aqui subentende-se este processo. A Figura 38 ilustra o resultado obtido, onde nota-se, além do aumento da amplitude dos deslocamentos, a alteração do padrão da curva, indício de presença de não linearidade. Na Figura 39, tem-se o deslocamento do acelerômetro 3 em função de sua velocidade, obtidos por integração no domínio da frequência. Percebe-se, para o regime não linear, uma forma elipsoidal deformada, que também caracteriza comportamento não linear.

Figura 37 – Parte imaginária das FRFs para regime linear (-) e regime não-linear de movimento (---) para o primeiro modo de vibrar.



(a) Parte imaginária.



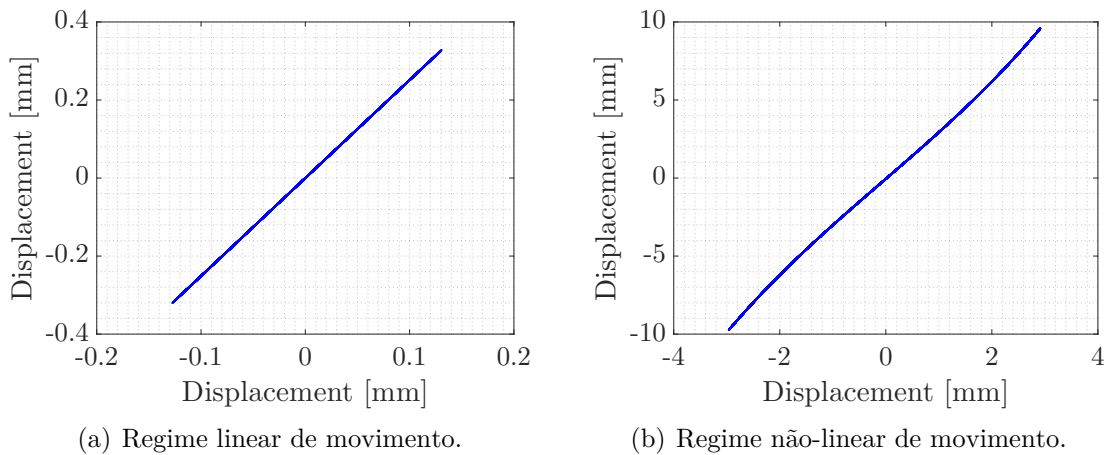
(b) Fase.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para caracterizar a não linearidade, por meio da varredura em frequência, foram obtidos sinais do sistema vibrando em regime não-linear de movimento, com amplitude 0.15 V e próximo à região do primeiro modo. Com estes dados, fez-se uma transformação de coordenadas físicas em coordenadas modais, obtendo-se assim um vetor de coordenadas modais \mathbf{q} , pela eq. (16). Com estes dados, derivou-se em frequência duas vezes para se obter a aceleração no domínio modal. Dessa forma, foram obtidas curvas de força não-linear para as três coordenadas modais, considerando-se apenas a curva de força não-linear para a posição na extremidade da viga. Retornou-se então para o domínio físico, tendo-se assim a força de restauração em função do deslocamento obtido pelo sinal do acelerômetro na posição 3, onde se encontra a não linearidade concentrada. Basicamente,

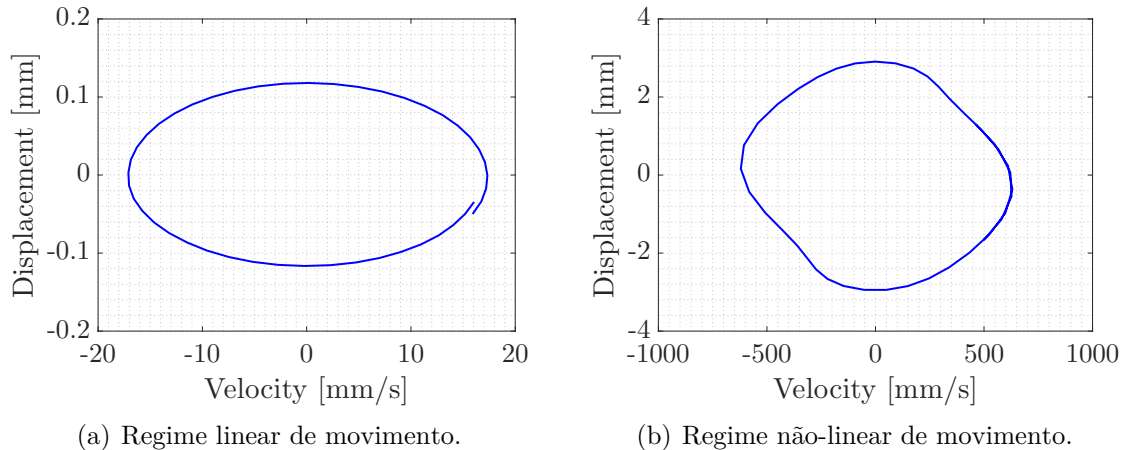
chegou-se à conclusão de que o acelerômetro na extremidade livre é mais representativo na localização da não linearidade pelo fato de que os efeitos lineares se manifestam com maior intensidade na região do primeiro modo (efeito de *hardening*), o qual possui a característica de interferir no deslocamento da extremidade livre com maior influência. O resultado é mostrado na Fig. 40, por meio da aplicação da eq. (75). Então, fez-se um ajuste de curva para extração dos parâmetros da não linearidade, aqui considerada como sendo da forma cúbica, tendo em vista a caracterização dada pela superfície de resposta, similarmente ao que foi feito no caso numérico (MASRI; CAUGHEY, 1979).

Figura 38 – Espaço de configuração. No eixo das ordenadas tem-se deslocamento do acelerômetro 3 e nas abscissas deslocamentos do acelerômetro 2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 39 – Espaço de fase. No eixo das ordenadas tem-se deslocamento do acelerômetro 3 e nas abscissas velocidades do acelerômetro 3.



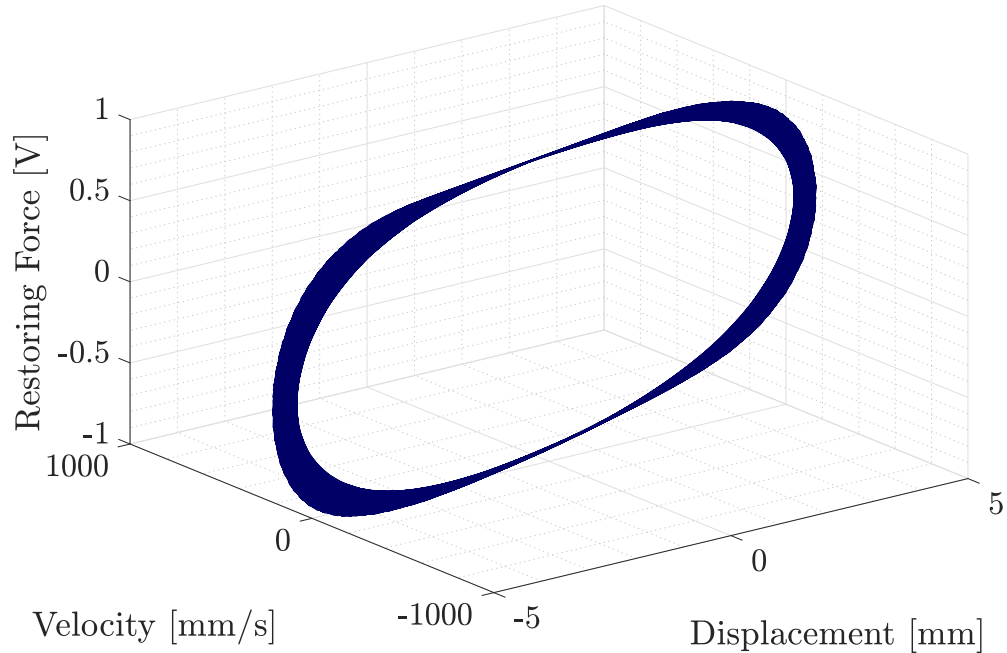
Fonte: Elaborado pelo autor.

O termo \mathcal{F}_{nl} representa a força não-linear dependente do deslocamento x_3 , ponto de medida mais próximo da não linearidade, e portanto representativo dentro das considerações feitas neste modelo. Por meio então do ajuste polinomial, pelo método dos mínimos quadrados, e da eq. 84, adaptada na forma:

$$\mathcal{F}_{nl} = \alpha x_3^3 + \beta x_3^2 \quad (85)$$

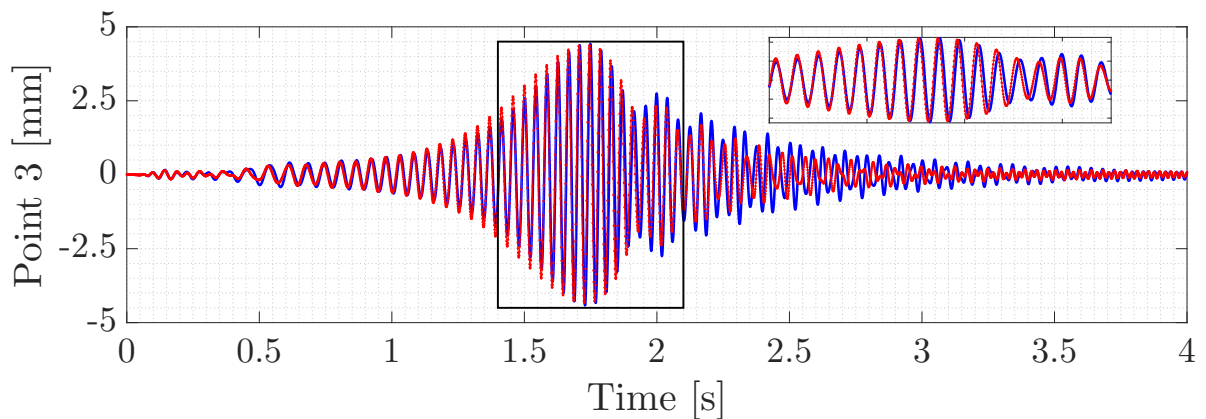
sendo x_3 aqui a representação do deslocamento no ponto 3 da viga, isto é, o deslocamento na extremidade livre. Foram obtidos $\alpha \approx 3.9762^6 \text{ N/m}^3$ e $\beta \approx -3273.2 \text{ N/m}^2$. Dessa forma, incluiu-se esses termos no modelo modal, fazendo as devidas transformações para coordenadas modais (visto que a relação 16 deve ser obedecida), e então o mesmo foi simulado, considerando agora regime não-linear de movimento. Adotou-se uma entrada do tipo varredura senoidal com amplitude 0.15 V e frequência variando de 10 a 50 Hz, para que as respostas pudessem ser comparadas com os dados experimentais obtidos. O modelo foi integrado numericamente por Runge-Kutta de quarta ordem e os resultados são mostrados na Fig. 41. Deve-se notar que foi necessário fazer a transformação de coordenadas modais para coordenadas físicas, segundo a eq. (16), haja visto que o vetor de coordenadas físicas é uma combinação da matriz de modos e o vetor de coordenadas modais. Para este caso, também, foi feito um estudo do grau de correlação entre as FRFs obtidas pelos dados experimentais e dados por simulação do modelo modal reduzido. Para valores de frequência entre 10 e 50 Hz, segundo a Fig. 41, o valor de $FRAC$, pela eq. (62), foi de 0.6516. Isso mostra que a metodologia adotada, neste caso, não foi eficiente, haja visto a simplicidade do modelo construído. Para valores de frequência entre 20 e 30 Hz, região da ressonância, o valor de $FRAC$ foi de 0.8276. O ideal aqui seria incluir os efeitos que foram desprezados no modelo e adotar um *set-up* experimental mais robusto no sentido de eliminar as possíveis fontes de erros.

Figura 40 – Força de restauração não-linear obtida pelos sinais do acelerômetro 3.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 41 – Deslocamento do acelerômetro 3 em vermelho (---) experimental e em azul (-) obtido pelo modelo.

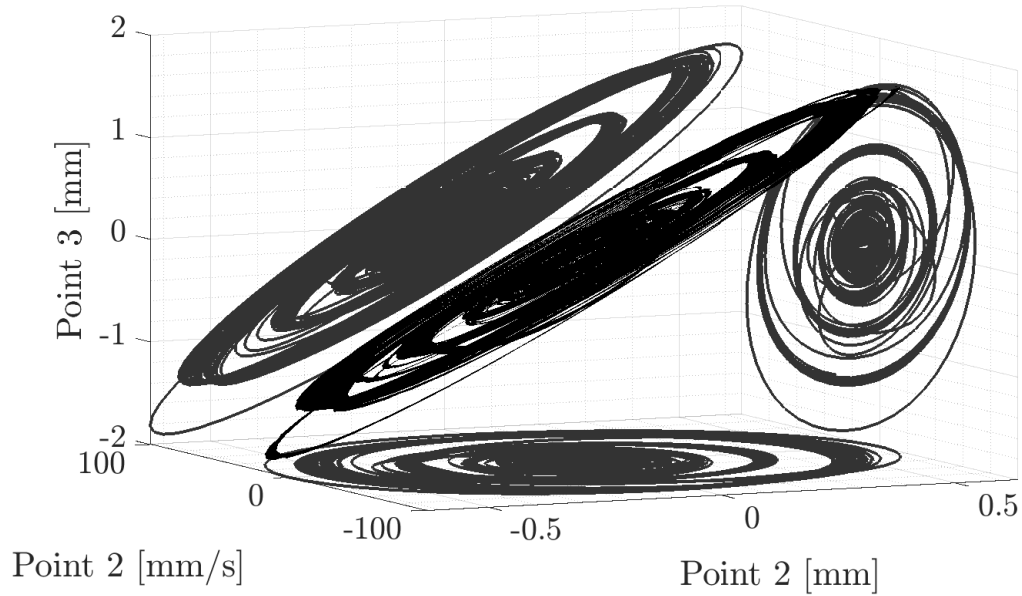


Fonte: Elaborado pelo autor.

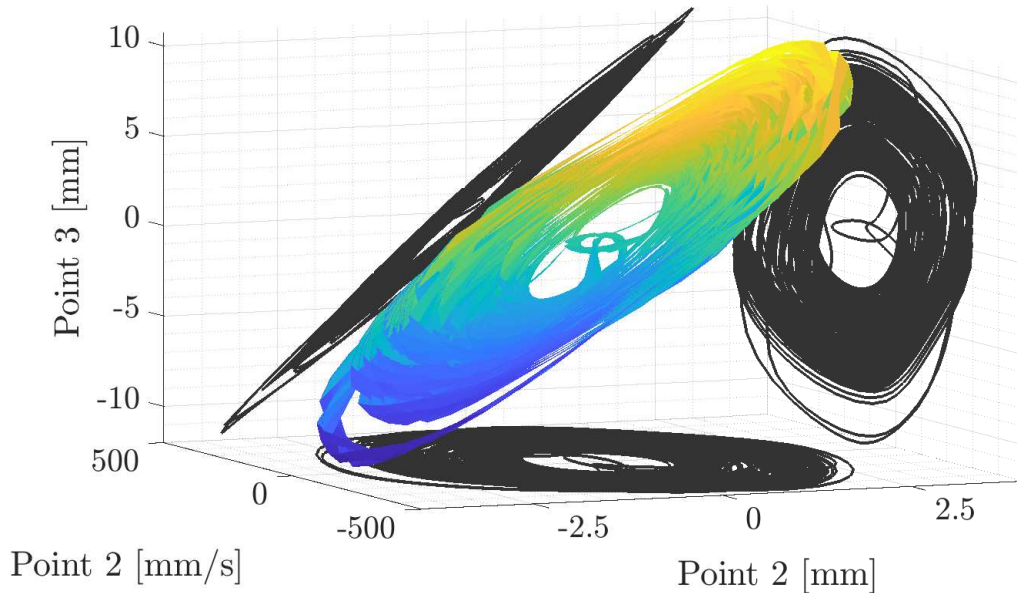
Com o modelo para o sistema identificado e após a validação, o que se verifica é uma maneira simples de identificação, mas que consegue emular o comportamento da viga em regime não linear. É possível ainda, a partir dos dados experimentais, extrair os NNMs e verificar a relação entre frequência e energia. Como forma de ilustrar o movimento dos LNMs e NNMs para este caso experimental, tem-se a Fig. 42. Nesta figura, representa-se

uma projeção tridimensional do espaço de fase para o deslocamento do acelerômetro 2 no eixo vertical em função da velocidade e deslocamento do acelerômetro 3 nos demais eixos (coordenadas físicas), sinais obtidos a partir dos acelerômetros, por integração numérica, processo anteriormente mencionado. Os sinais foram obtidos por meio de um teste em varredura senoidal em regime permanente em torno do primeiro modo de vibrar da estrutura, considerando amplitudes de excitação baixa (0.05 V) e alta (0.25 V). Esta grande variação entre amplitudes foi adotada para explorar visualmente os efeitos não-lineares. Para a Fig. 42, os sinais foram truncados nos instantes próximos ao salto, onde a não linearidade se apresenta de forma mais pronunciada no deslocamento e velocidade. Nota-se o formato mostrado em Kerschen *et al.* (2009), com os LNMs representando planos no espaço de fase e NNMs superfícies bidimensionais. Além disso, com as projeções bidimensionais mostradas, pode-se notar as alterações no formato, conforme foi comentado na seção 3.1.

Figura 42 – Modos normais lineares (em cores) e não-lineares (em preto) - projeção tridimensional do espaço de fase e projeções bidimensionais.



(a) LNMs.



(b) NNMs.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa maneira, identificando-se estes NNMs, é possível aplicar a teoria de análise modal não-linear e incluí-los na modelagem, tornando assim o modelo mais próximo da realidade ao levar em consideração os efeitos não-lineares. Assim sendo, pode-se lidar com sistemas que vibram em regime fortemente não linear, com segurança na análise. Na

seção a seguir, é feito um processo similar ao que Peeters, Kerschen e Golinval (2011) fizeram, que consiste na extração de NNMs a partir de dados experimentais, e sua relação com a dependência frequência-energia de um sistema no regime não-linear de movimento.

4.2.4 Identificação de NNMs experimentalmente e pelo modelo reduzido

Com o modelo identificado, incluindo agora os efeitos da não linearidade, foi feita a extração do primeiro NNM localizado na região da primeira frequência natural, tanto pelos dados experimentais quanto pelos dados obtidos pelo modelo modal.

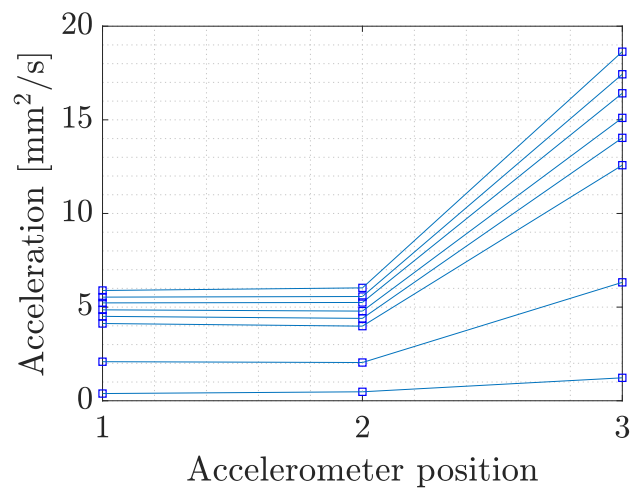
Para isto, baseado no conhecimento das propriedades destes modos, foram feitos ensaios com varredura em frequência em regime permanente, para várias amplitudes (0.01 V, 0.05 V, 0.10 V, 0.11 V, 0.12 V, 0.13 V, 0.14 V e 0.15 V), verificando-se assim o aumento da frequência natural, como pode ser mostrado na Fig. 32. Ao contrário do que Peeters, Kerschen e Golinval (2011) fizeram, pelo fato de não ter sido possível a variação mínima em frequência na região do salto, o que se fez foi selecionar os dados na região do salto, para cada amplitude, com variação em frequência fixa, de 0.5 Hz. Assim, apesar de não garantir um NNM completamente isolado, foi possível se obter uma aproximação de tal comportamento com os dados disponíveis. O sinal de entrada em cada um dos casos (para cada uma das amplitudes) foi utilizado no modelo modal obtido anteriormente para emular o comportamento da viga, e assim os resultados obtidos, via integração numérica por Runge-Kutta de quarta ordem, foram coletados. A Figura 43 mostra a representação desta variação de comportamento pelo aumento de amplitude fornecida ao excitador. Os pontos mostrados no gráfico são valores de máxima aceleração em cada um dos acelerômetros. Nota-se que para amplitudes altas, há contribuição do harmônico de terceira ordem, decorrente do efeito não-linear presente. Os resultados obtidos por meio do modelo modal são mostrados também e apresentam uma diferença sutil em relação aos NNMs representados via dados experimentais. Esta diferença se deve às limitações deste tipo de modelo, e pelo fato deste ser de ordem reduzida.

A relação entre frequência e energia, que para o caso não-linear não é mais uma constante, foi também obtida via dados experimentais e pelos resultados obtidos pelo modelo modal equivalente ajustado. O que se fez foi aplicar um sinal senoidal em uma frequência próxima da primeira natural da estrutura, variando-se a amplitude de excitação, nos mesmos níveis usados nos testes em varredura senoidal. Verificou-se assim a variação desta frequência natural com a amplitude, e a energia foi calculada considerando o teorema de Parseval (OPPENHEIM; SCHAFER, 2013), por meio dos

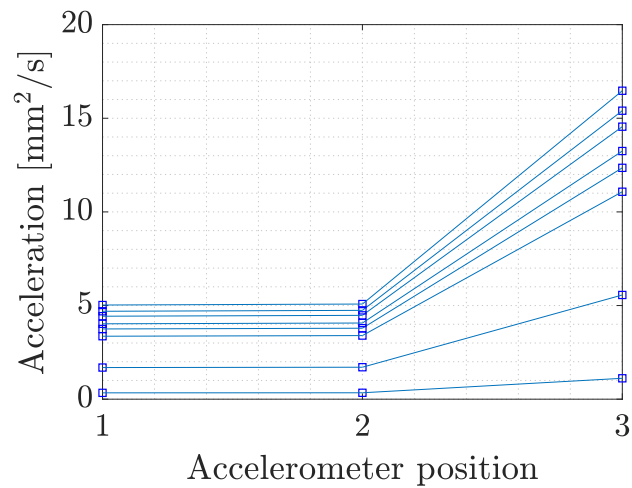
sinais de aceleração. A Figura 44 mostra os resultados obtidos, incluindo-se também a representação do primeiro NNM extraído para cada ponto do gráfico, similar ao que (PEETERS; KERSCHEN; GOLINVAL, 2011) fazem, mas com um modelo de elementos finitos para validar a metodologia. Foi feito também um ajuste de curva do tipo polinômio linear para interpolar os pontos e levantar uma curva de tendência. Vale ressaltar que os sinais utilizados para elaboração deste gráfico foram obtidos pelo acelerômetro na posição 3, isto é, mais próximo da não linearidade concentrada.

Nota-se que existe uma sutil diferença entre comportamentos, mas a proximidade de resultados é grande. Isso mostra a capacidade de se construir um modelo simples, mas que represente esta dinâmica de forma satisfatória. Para o terceiro ponto do gráfico, de baixo para cima, nota-se uma variação considerável na frequência, fato que pode ser notado também na Fig. 36. Portanto, nesta região, tem-se a atuação da não linearidade de forma a alterar a relação entre frequência e energia do sistema, e isso deve ser considerado nas análises dinâmicas.

Figura 43 – Primeiro NNM obtido na região da primeira frequência natural. A ordem crescente de amplitude de aceleração corresponde à ordem crescente de amplitude de excitação.



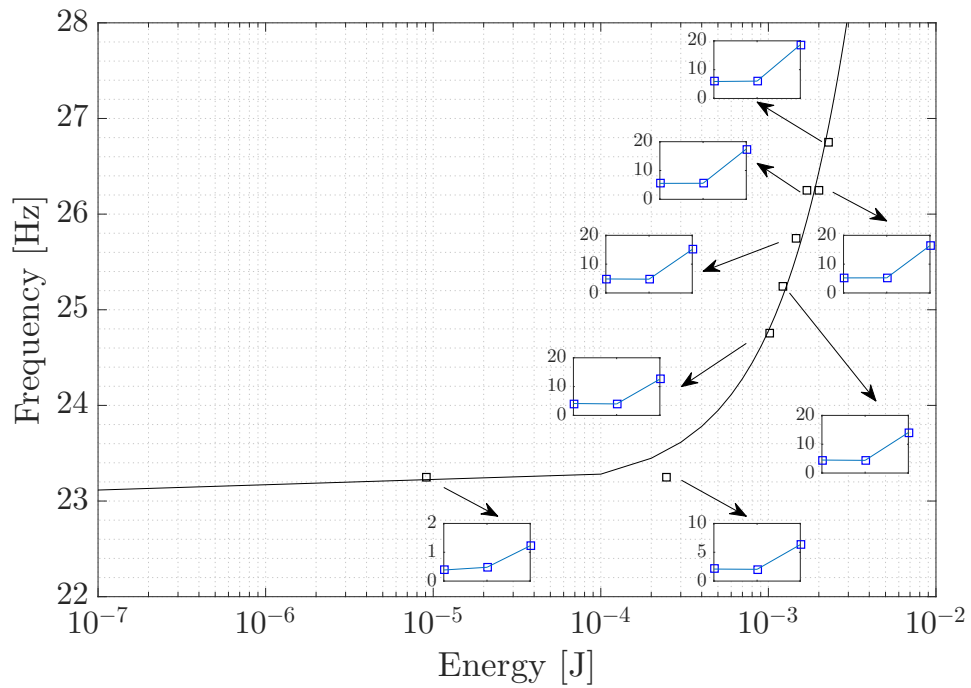
(a) NNM obtido através dos sinais experimentais.



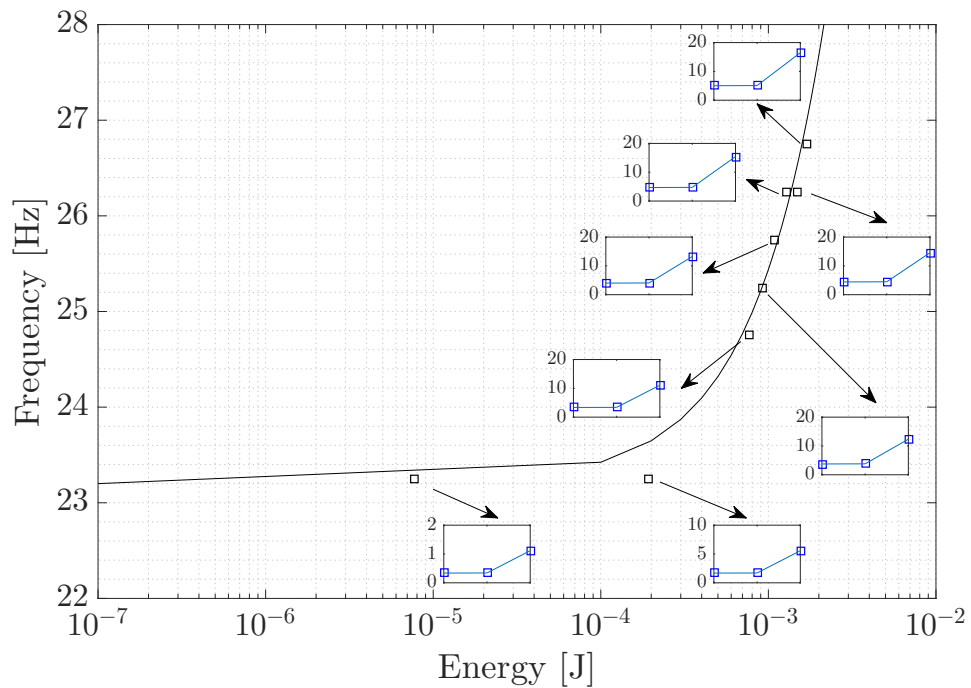
(b) NNM obtido através dos sinais do modelo modal.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 44 – Dependência ente frequência e energia, considerando a primeira frequência natural e o primeiro modo de vibrar da estrutura.



(a) Dados experimentais.



(b) Dados obtidos pelo modelo modal.

4.3 Avaliação e conclusões

Este capítulo abordou a aplicação da análise modal em um exemplo numérico, com um sistema de dois graus de liberdade e um elemento de não linearidade. Foram obtidos os parâmetros modais por análise modal convencional e a não linearidade foi caracterizada por RFS. Em seguida, aplicou-se o mesmo procedimento em um caso experimental, com a construção de um modelo emulando os três primeiros modos de vibrar da estrutura real a partir de 3 sinais de resposta (acelerações) e um sinal de entrada. Foram obtidos os resíduos modais, frequências naturais e razões de amortecimento a partir das FRFs, e então as mesmas foram reconstruídas parametricamente, e comparadas com as FRFs obtidas via estimador \mathcal{H}_1 . Após isso, foi incluído o efeito não-linear no modelo, e obteve-se um modelo modal não linear, por meio de RFS e dos processos de identificação da não linearidade concentrada e discreta. Com a obtenção da expressão da força não linear, o modelo foi então preenchido e obteve-se o modelo completo. Simulou-se o mesmo com uma entrada do tipo *chirp* com alta amplitude de tensão elétrica e verificou-se a sobreposição das curvas. Além disso, verificou-se efeitos provocados pela não linearidade e o movimento dos modos normais não-lineares, pelo espaço de fase. Por fim, foi verificada a relação entre frequência e energia do sistema, tanto pelos dados experimentais quanto obtidos via modelo modal, bem como a extração do primeiro NNM. Verificou-se que o modelo de ordem reduzida foi capaz de emular o comportamento da estrutura.

5 Considerações Finais

Este capítulo destina-se às considerações finais acerca deste trabalho, bem como sugestões de trabalhos futuros com o intuito de explorar novas conclusões sobre o assunto.

5.1 Conclusões

A aplicação da análise modal é um processo eficaz e apresenta resultados satisfatórios na modelagem de sistemas mecânicos. O grande problema é que, quando se tem influência de não linearidades, causadas por materiais, geometrias, folgas, condições de operação, entre outros, este tipo de análise não é mais válido, pois as propriedades de homogeneidade, ortogonalidade, entre outras, não são mais válidas. Neste trabalho, foi possível verificar a dificuldade de se modelar um sistema simples com a presença de não linearidade, considerando a caracterização feita por RFS. Verificou-se que o regime não-linear produz efeitos que não permitem um processo geral para validar um modelo. No entanto, executando a análise modal no regime linear, construindo um modelo modal de ordem reduzida, e depois incluindo os termos não-lineares neste modelo modal, pode-se obter resultados interessantes no que diz respeito à dinâmica não-linear que envolve os NNMs e a dependência entre frequência e energia. Verificou-se que é possível emular o comportamento de uma estrutura através de um método simples.

Para o caso em que um modelo físico foi simulado (numérico), condicionando as respostas à presença de ruídos pré-estabelecidos, com uma não linearidade de natureza discreta e concentrada, a metodologia adotada foi satisfatória, com suficiente grau de correlação entre dados simulados pelo modelo físico e pelo modelo modal.

Na situação experimental, onde uma viga foi modelada considerando seus três primeiros modos de vibrar somente, e incluindo um termo não linear, levando-se em consideração uma abordagem de não linearidade discreta e concentrada, os resultados não foram tão satisfatórios quanto no caso numérico. Isso pode ser explicado por efeitos não lineares não considerados, e que são importantes na dinâmica estrutural, além de problemas de *set-up* experimental, como resolução espacial (número de pontos de medida). O modelo modal reduzido, no entanto, para o caso experimental, possibilitou a visualização dos modos não lineares, que são características de grande interesse na dinâmica não linear.

Entre as grandes dificuldades ao executar este trabalho, destacam-se a necessidade de um conhecimento sólido em análise modal, em especial conceitos que foram cruciais no entendimento do problema, além da dinâmica não-linear e as peculiaridades e métodos para identificação.

5.2 Sugestões de trabalhos futuros

A seguir, tem-se algumas sugestões de trabalhos que complementariam este estudo de maneira interessante.

- Utilizar NNMs para entender o comportamento não-linear do sistema e suas implicações no contexto industrial e em sistemas mais complexos do que o que fora estudado;
- Considerando o caso estudado como uma hipótese de não linearidades suaves e bem representados por casos polinomiais, avaliar casos em que na prática as não linearidades possam ser mais gerais, por exemplo, envolvendo descontinuidades ou então cenários com amortecimento mais acentuado ou com não linearidades de dissipação. Nesse sentido, estudar os efeitos de histerese e aparecimento de folgas em impactos em junções parafusadas, que são avaliados, por exemplo, por *harmonic probing* em Teloli e Silva (2019);
- As FRFs são aproximadas por modos normais lineares, e esta relação com NNMs não existe. O que se faz é aproximar por séries (em especial de Fourier), via balanço harmônico, e uma questão interessante seria aproximar ou buscar uma aproximação por *harmonic probing* para encontrar uma relação entre FRFs de alta ordem (BILLINGS; TSANG, 1989a; BILLINGS; TSANG, 1989b; WORDEN; MANSON; TOMLINSON, 1997);
- Na questão da visualização dos modos não lineares, seria interessante a elaboração de vídeos para mostrar a vibração em fase e fora de fase (síncrona e não síncrona), através de uma abordagem didática.

Referências

ADAMS, D.; ALLEMANG, R. A frequency domain method for estimating the parameters of a nonlinear structural dynamic model through feedback. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 14, n. 4, p. 637-656, jul. 2000. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327000912925>. Acesso em: 8 jun. 2018.

AZRAR, L.; COCHELIN, B.; DAMIL, N.; POTIER-FERRY, M. An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behaviour of elastic plates and shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Oxford, v. 36, n. 8, p. 1251-1277, abr. 1993. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620360802>. Acesso em: 15 maio 2018.

BILLINGS, S.; TSANG, K. Spectral analysis for non-linear systems, part i: Parametric non-linear spectral analysis. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 3, n. 4, p. 319-339, 1989a. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science-/article/pii/0888327089900411>. Acesso em: 15 maio 2018.

BILLINGS, S.; TSANG, K. Spectral analysis for non-linear systems, part ii: Interpretation of non-linear frequency response functions. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 3, n. 4, p. 341-359, 1989b. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science-/article/pii/0888327089900423>. Acesso em: 15 maio 2018.

BOIVIN, N.; PIERRE, C.; SHAW, S. W. Nonlinear modal analysis of structural systems featuring internal resonances. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 182, n. 2, p. 336-341, abr. 1995. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/243363911_Non-linear_modal_analysis_of_structural_systems_featuring_internal_resonances. Acesso em: 15 maio 2018.

BRAUN, S.; FELDMAN, M. Time-frequency characteristics of non-linear systems. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 11, n. 4, p. 611-620, jul. 1997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327097900911>. Acesso em: 15 maio 2018.

CADOU, J.; POTIER-FERRY, M.; COCHELIN, B. A numerical method for the computation of bifurcation points in fluid mechanics. **European Journal of Mechanics - B/Fluids**, Issy les Moulineaux Cedex, v. 25, n. 2, p. 234-254, mar. 2006. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997754605000701>. Acesso em: 15 maio 2018.

CADOU, J. M.; POTIER-FERRY, M.; COCHELIN, B.; DAMIL, N. ANM for stationary navier-stokes equations and with petrov-galerkin formulation. **International Journal**

- for **Numerical Methods in Engineering**, Oxford, v. 50, n. 4, p. 825-845, 2001. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/1097-0207%2820010210%2950%3A4%3C825%3A%3AAID-NME53%3E3.0.CO%3B2-0>. Acesso em: 15 maio 2018.
- CHEN, Q.; WORDEN, K.; PENG, P.; LEUNG, A. Genetic algorithm with an improved fitness function for (N)ARX modelling. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 21, n. 2, p. 994-1007, fev. 2007. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327006000343>. Acesso em: 15 maio 2018.
- COCHELIN, B. Numerical computation of nonlinear normal modes using hbm and anm. In: KERSCHEN, G. (Ed.). **Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems**. Viena: Springer, 2014. v. 555, p. 251-292. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-7091-1791-0_6. Acesso em: 15 maio 2018.
- COCHELIN, B.; DAMIL, N.; M., P.-F. Asymptotic numerical methods and Padé approximants for nonlinear elastic structures. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, Oxford, v. 37, p. 1187-1213, abr. 1994. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620370706>. Acesso em: 15 maio 2018.
- DAVENPORT, J. W. B. **An introduction to the theory of random signals and noise**. New York: IEEE Press, 1987. Disponível em: https://www.ebook.de/de/product/3598541/jr_wilbur_b_davenport_an_introduction_to_the_theory_of_random_signals_and_noise.html. Acesso em: 15 maio 2018.
- DHOOGHE, A.; GOVAERTS, W.; KUZNETSOV, Y. A. MATCONT. **ACM Transactions on Mathematical Software**, New York, v. 29, n. 2, p. 141-164, jun. 2003. Disponível em: <https://dl.acm.org/citation.cfm?doid=779359.779362>. Acesso em: 15 maio 2018.
- DOEDEL, E. J.; PAFFENROTH, R. C.; CHAMPNEYS, A. R.; FAIRGRIEVE, T. F.; KUZNETSOV, Y. A.; OLDEMAN, B. E.; SANDSTEDTE, B.; WANG, X. J. **Auto2000**: continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. [S.l.: s.n.], 2000. Disponível em: <http://cmvl.cs.concordia.ca/>. Acesso em: 15 maio 2018.
- DUCCESCHI, M.; TOUZÉ, C.; BILBAO, S.; WEBB, C. J. Nonlinear dynamics of rectangular plates: investigation of modal interaction in free and forced vibrations. **Acta Mechanica**, Wien, v. 225, n. 1, p. 213-232, ago. 2013. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00707-013-0931-1>. Acesso em: 15 maio 2018.
- EWINS, D. J. **Modal testing: theory and practice**. Letchworth, Hertfordshire, England: Research Studies Press, 1984.
- EWINS, D. J.; WEEKES, B.; CARRI, A. delli. Modal testing for model validation of structures with discrete nonlinearities. **Philosophical Transactions of the Royal Society A**, v. 373, 2015. Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/full/10.1098/rsta.2014.0410>. Acesso em: 15 maio 2018.

FELDMAN, M. Time-varying vibration decomposition and analysis based on the Hilbert transform. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 295, n. 3-5, p. 518-530, ago. 2006. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X06001556>. Acesso em: 15 maio 2018.

FELDMAN, M. Considering high harmonics for identification of non-linear systems by Hilbert transform. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 21, n. 2, p. 943-958, fev. 2007. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327006000264>. Acesso em: 15 maio 2018.

FRAGONARA, L. Z.; CERAVOLO, R.; ERLICHER, S. Comparison of restoring force models for the identification of structures with hysteresis and degradation. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 332, 2013. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022460X13006846>. Acesso em: 15 maio 2018.

FU, Z.; HE, J. **Modal analysis**. Oxford: [s.n.], 2001. 304 p. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=ElwhqUtJUj8C>.

GAWRONSKI, W. K. **Dynamics and control of structures: a modal approach**. New York: Springer, 1998. 256 p.

GENDELMAN, O. V. Bifurcations of nonlinear normal modes of linear oscillator with strongly nonlinear damped attachment. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 37, p. 115-128, 2004. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1023/B:NODY.0000042911.49430.25>. Acesso em: 15 maio 2018.

GEORGIADES, F.; PEETERS, M.; KERSCHEN, G.; GOLINVAL, J. C.; RUZZENE, M. Modal analysis of a nonlinear periodic structure with cyclic symmetry. **AIAA Journal**, Reston, v. 47, n. 4, p. 1014-1025, abr. 2009. Disponível em: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.40461>. Acesso em: 15 maio 2018.

HANSEN, C. **Caracterização experimental de sistemas mecânicos com comportamento não-linear**. Dissertação (Engenharia Mecânica) --- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2015. Disponível em: <http://repositorio.unesp.br/handle/11449/134107>. Acesso em: 15 maio 2018.

HANSEN, C.; SHIKI, S. B.; SILVA, S. da. Structural health monitoring in a buckled beam using Volterra series. In: 7TH EUROPEAN WORKSHOP ON STRUCTURAL HEALTH MONITORING, EWSHM, 7, 2014, Nantes. **Proceedings of the [...]**. Nantes [s.n.], 2014. Disponível em: <http://hal.inria.fr/hal-01022991/document>. Acesso em: 15 maio 2018.

HANSEN, C.; SILVA, S. da; FOLTÊTE, E.; COGAN, S. Nonlinearity detection and identification using discrete-time Volterra series: application to a solar array structure. In: ECCOMAS THERMATIC CONFERENCE ON COMPUTATIONAL METHODS IN STRUCTURAL DYNAMICS AND EARTHQUAKE ENGINEERING, 5, 2015, Crete Island. **Proceedings of the [...]**. Crete Island [s.n.], 2015. Disponível em: <https://www.semanticscholar.org/paper/NOnlinearity-detection-and-identification-using-to-Hansen-Silva/8b96a4e55593bb208f0885475e6aee346f9b287c>. Acesso em: 15 maio 2018.

HERMANS, L.; AUWERAER, H. V. D. Modal testing and analysis of structures under operational conditions: Industrial applications. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 13, p. 193-216, 1999. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327098912110>. Acesso em: 15 maio 2018.

IGLESIAS, A. M. **Investigating various modal analysis extraction techniques to estimate damping ratio**. Dissertação (Master's Degree) --- Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 2000. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.590.1218&rep=rep1&type=pdf>. Acesso em: 15 maio 2018.

JAYAPRAKASH, K. R.; STAROSVETSKY, Y.; VAKAKIS, A. F.; PEETERS, M.; KERSCHEN, G. Nonlinear normal modes and band zones in granular chains with no pre-compression. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 63, n. 3, p. 359-385, set. 2010. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11071-010-9809-0>. Acesso em: 15 maio 2018.

KARKAR, S. **Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires. Application aux instruments de musique auto-oscillants**. Tese (Doctorate Degree) --- Aix-Marseille Université. Laboratoire de Mécanique et d'acoustique, Marseille, out. 2012. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00742651/document>. Acesso em: 15 maio 2018.

KARKAR, S.; COCHELIN, B.; VERGEZ, C. A comparative study of the harmonic balance method and the orthogonal collocation method on stiff nonlinear systems. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 333, n. 12, p. 2554-2567, jun. 2014. Disponível em <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X14000650>. Acesso em: 15 maio 2018.

KARKAR, S.; VERGEZ, C.; COCHELIN, B. Numerical tools for musical instruments acoustics: analysing nonlinear physical models using continuation of periodic solutions. **Acoustics 2012**, Nantes, France, 2012. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00810847>. Acesso em: 15 maio 2018.

KERSCHEN, G.; KOWTKO, J. J.; MCFARLAND, D. M.; BERGMAN, L. A.; VAKAKIS, A. F. Theoretical and experimental study of multimodal targeted energy transfer in a system of coupled oscillators. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 47, n. 1, p. 285-309, 2007. ISSN 1573-269X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s11071-006-9073-5>. Acesso em: 15 maio 2018.

KERSCHEN, G.; PEETERS, M.; GOLINVAL, J. C.; VAKAKIS, A. F. Nonlinear normal modes, part i: A useful framework for the structural dynamicis. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 23, n. 1, p. 170-194, 2009. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327008001015>. Acesso em: 15 maio 2018.

KERSCHEN, G.; PEETERS, M.; GOLINVAL, J. C.; STÉPHAN, C. Nonlinear modal analysis of a full-scale aircraft. **Journal of Aircraft**, Reston, v. 50, n. 5, p. 1409-1419, set. 2013. Disponível em: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.C031918>. Acesso em: 15 maio 2018.

KERSCHEN, G.; SHAW, S. W.; TOUZÉ, C.; GENDELMAN, O. V. **Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems**. Wien: Springer-Verlag Wien, 2014. (CISM International Centre for Mechanical Sciences). Disponível em: <https://www.springer.com/gp/book/9783709117903>. Acesso em: 15 maio 2018. ISBN 978-3-7091-1791-0.

KERSCHEN, G.; WORDEN, K.; F., V. A.; GOLINVAL, J. C. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 20, n. 3, p. 505-592, 2006. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327005000828>. Acesso em: 15 maio 2018.

KING, M.; VAKAKIS, A. An energy-based formulation for computing nonlinear normal-modes in undamped continuous systems. **Journal of Vibration and Acoustics**, New York, v. 116, p. 332-340, 1994. Disponível em: <https://asmedigitalcollection.asme.org/vibrationacoustics/article-abstract/116/3/332/441487/>. Acesso em: 15 maio 2018.

KOVACIC, I.; BRENNAN, M. **The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour**. Chichester, West Sussex, U.K: Wiley, 2011. Disponível em: <http://books-.google.com.br/books?id=f6oZ0cwjTs8C>. Acesso em: 15 maio 2018.

KUETHER, R.; RENSON, L.; DETROUX, T.; GRAPPASONNI, C.; KERSCHEN, G.; ALLEN, M. Nonlinear normal modes, modal interactions and isolated resonance curves. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 351, p. 299-310, 2015. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X15003879>. Acesso em: 15 maio 2018.

LACARBONARA, W.; REGA, G. Resonant non-linear normal modes, part II: activation/orthogonality conditions for shallow structural systems. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Oxford, v. 38, n. 6, p. 873-887, set. 2003. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0020746202000343>. Acesso em: 15 maio 2018.

LACARBONARA, W.; REGA, G.; NAYFEH, A. H. Resonant non-linear normal modes, part I: analytical treatment for structural one-dimensional systems. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Oxford, v. 38, n. 6, p. 851-872, set. 2003. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746202000331>. Acesso em: 15 maio 2018.

LANG, Z. Q.; BILLINGS, S. A. Energy transfer properties of non-linear systems in the frequency domain. **International Journal of Control**, Abingdon, v. 78, n. 5, p. 345-362, mar. 2005. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00207170500095759>. Acesso em: 15 maio 2018.

LEE, Y. S.; KERSCHEN, G.; VAKAKIS, A. F.; PANAGOPOULOS, P.; BERGMAN, L.; MCFARLAND, D. M. Complicated dynamics of a linear oscillator with a light, essentially nonlinear attachment. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Amsterdam, v. 204, n. 1-2, p. 41-69, maio 2005. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016727890500120X>. Acesso em: 15 maio 2018.

- LUNDKVIST, A. **Modal analysis project**. [S.l.], 2010. Disponível em: <https://pt.scribd.com/document/60936928/56813979-Modal-Analysis-Report-Main-With-MATLAB>. Acesso em: 15 maio 2018.
- LUO, A. C. J.; HUANG, J. Approximate solutions of periodic motions in nonlinear systems via a generalized harmonic balance. **Journal of Vibration and Control**, London, v. 18, n. 11, p. 1661-1674, 2011. Disponível em: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/1077546311421053>. Acesso em: 15 maio 2018.
- MAIA, N. M. M.; SILVA, J. M. M. **Theoretical and experimental modal analysis**. Taunton: Research Studies Press, 1997.
- MANEVITCH, L. I.; MIKHLIN, Y. V. On periodic solutions close to rectilinear normal vibration modes. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 36, n. 6, p. 988-994, 1972. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021892872900329>. Acesso em: 15 maio 2018.
- MANLAB. **An interactive path-following and bifurcation analysis software**. 2012. Disponível em: <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr/>. Acesso em 15 maio 2018.
- MARAL, G. **VSAT networks**. 2. ed. Chichester, England: John Wiley & Sons, 2004. Disponível em: https://www.ebook.de/de/product/3696073/maral_vsats_networks_2e.html. Acesso em: 15 maio 2018.
- MARCHESIELLO, S.; GARIBALDI, L. A time domain approach for identifying nonlinear vibrating structures by subspace methods. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 22, n. 1, p. 81-101, jan. 2008. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327007000702>. Acesso em: 15 maio 2018.
- MASRI, S. F.; CAUGHEY, T. K. A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problems. **Journal of Applied Mechanics**, Tehran, v. 46, p. 433-447, 1979.
- MOUSSI, E.; BELLIZZI, S.; COCHELIN, B.; NISTOR, I. Nonlinear normal modes of a two degrees-of-freedom piecewise linear system. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 64-65, p. 266-281, dez. 2015. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327015001430>. Acesso em: 15 maio 2018.
- NARAYANAN, M.; NARAYANAN, S.; PADMANABHAN, C. Multiharmonic excitation for nonlinear system identification. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 311, n. 3-5, p. 707-728, abr. 2008. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X07007651>. Acesso em: 15 maio 2018.
- NARAYANAN, M. D.; NARAYANAN, S.; PADMANABHAN, C. Parametric identification of nonlinear systems using multiple trials. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 48, n. 4, p. 341-360, fev. 2007. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11071-006-9085-1>. Acesso em: 15 maio 2018.

NAYFEH, A. H.; NAYFEH, S. A. On nonlinear modes of continuous systems. **Journal of Vibration and Acoustics**, London, v. 116, n. 1, p. 129-136, jan. 1994. Disponível em: <https://vibrationacoustics.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1469366>. Acesso em: 15 maio 2018.

NOËL, J.; KERSCHEN, G. Frequency-domain subspace identification for nonlinear mechanical systems. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 40, n. 2, p. 701-717, 2013. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S088832701300318X>. Acesso em: 15 maio 2018.

NOËL, J. P.; KERSCHEN, G. Nonlinear system identification in structural dynamics: 10 more years of progress. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 83, p. 2-35, 2017. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S088832701630245X>. Acesso em: 15 maio 2018.

NOËL, J. P.; RENSON, L.; GRAPPASONNI, C.; KERSCHEN, G. A rigorous phase separation method for testing nonlinear structures. In: ISMA 2014 - INTERNATIONAL CONFERENCE ON NOISE AND VIBRATION ENGINEERING, 2014, Leuven. **Conference on [...]**. Leuven: [s.n.], 2014. Disponível em: <https://orbi.uliege.be/handle/2268/173388>. Acesso em: 15 maio 2018.

NOËL, J. P.; RENSON, L.; GRAPPASONNI, C.; KERSCHEN, G. Identification of nonlinear normal modes of engineering structures under broadband forcing. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 74, p. 95-110, 2016. Special Issue in Honor of Professor Simon Braun. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327015001983>. Acesso em: 15 maio 2018.

OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. **Discrete-time signal processing**. 3. ed. Upper Saddle River, NJ: [s.n.], 2013. ISBN 1292025727.

OVERSCHEE, P. van; MOOR, B. L. de. **Subspace identification for linear systems**. New York: Springer Science & Business MediaSpringer Science & Business Media, 2012. Disponível em: https://www.ebook.de/de/product/25188263/peter_van_overschee_b_l_de_moor_subspace_identification_for_linear_systems.html.

PEETERS, M.; KERSCHEN, G.; GOLINVAL, J. C. Modal testing of nonlinear vibrating structures based on nonlinear normal modes. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 25, p. 1227-1247, 2011. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327010003821>. Acesso em: 15 maio 2018.

PEETERS, M.; VIGUIÉ, R.; SÉRANDOUR, G.; KERSCHEN, G.; GOLINVAL, J. C. Nonlinear normal modes, part II: Toward a practical computation using numerical continuation techniques. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 23, n. 1, p. 195-216, jan. 2009. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327008001027>. Acesso em: 15 maio 2018.

PENG, Z.; LANG, Z.; BILLINGS, S. Linear parameter estimation for multi-degree-of-freedom nonlinear systems using nonlinear output frequency-response functions. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 21, n. 8, p. 3108-3122,

nov. 2007. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327007000738>. Acesso em: 15 maio 2018.

PENG, Z.; LANG, Z.; BILLINGS, S. Non-linear output frequency response functions of MDOF systems with multiple non-linear components. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Oxford, v. 42, n. 7, p. 941-958, set. 2007. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746207001199>. Acesso em: 15 maio 2018.

PENG, Z.; LANG, Z.; BILLINGS, S. Nonlinear parameter estimation for multi-degree-of-freedom nonlinear systems using nonlinear output frequency-response functions. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 22, n. 7, p. 1582-1594, out. 2008. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327008000770>. Acesso em: 15 maio 2018.

PENG, Z.; LANG, Z.; WOLTERS, C.; BILLINGS, S.; WORDEN, K. Feasibility study of structural damage detection using NARMAX modelling and nonlinear output frequency response function based analysis. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 25, n. 3, p. 1045-1061, abr. 2011. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327010003213>. Acesso em: 15 maio 2018.

PENG, Z. K.; LANG, Z.; BILLINGS, S. A.; TOMLINSON, G. R. Comparisons between harmonic balance and nonlinear output frequency response function in nonlinear system analysis. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 311, p. 56-73, 2008. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X07006864> via%3Dihub. Acesso em: 15 maio 2018.

PÉRIGNON, F. **Vibration forcées de structures minces, élastiques, nonlinéaires**. Tese (Doctorate Degree) --- Université de la Méditerranée, Marseille, 2004. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00007535>. Acesso em: 15 maio 2018.

PREUMONT, A. **Twelve lectures on structural dynamics**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2013. Disponível em: <https://www.doi.org/10.1007/978-94-007-6383-8>.

RAND, R. A higher-order approximation for nonlinear normal modes in two-degree-of-freedom systems. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Oxford, v. 6, p. 545-547, 1971. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020746271900497>. Acesso em: 15 maio 2018.

RAZZAK, M. A. A simple harmonic balance method for solving strongly nonlinear oscillators. **Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences**, Abingdon, v. 21, p. 68-76, 2016. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jaubas.2015.10.002>. Acesso em: 15 maio 2018.

RENSON, L.; KERSCHEN, G.; COCHELIN, B. Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 364, p. 177-206, 2016. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X15007543>. Acesso em: 15 maio 2018.

RENSON, L.; NOËL, J. P.; KERSCHEN, G. Complex dynamics of a nonlinear aerospace structure: numerical continuation and normal modes. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 79, n. 2, p. 1293-1309, out. 2014. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11071-014-1743-0>. Acesso em: 15 maio 2018.

RICHARDS, C.; SINGH, R. Identification of multi-degree-of-freedom non-linear systems under random excitations by the "reverse path"spectral method. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 213, n. 4, p. 673-708, jun. 1998. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X9891522X>. Acesso em: 15 maio 2018.

RICKER, D. W. **Echo signal processing**. New York: Springer US, 2003. Disponível em: https://www.ebook.de/de/product/4346458/dennis_w_ricker_echo_signal_processing.html. Acesso em: 15 maio 2018.

ROSENBERG, R. The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. **Journal of Applied Mechanics**, Tehran, v. 29, n. 1, p. 7-14, 1962. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01344457>. Acesso em: 15 maio 2018.

ROSENBERG, R. M. Normal modes of nonlinear dual-mode systems. **Journal of Applied Mechanics**, Tehran, v. 27, p. 263-268, 1960. Disponível em: <http://appliedmechanics.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1393892>. Acesso em: 15 maio 2018.

ROSENBERG, R. M. On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. **Advances in Applied Mechanics**, Maryland Heights, v. 9, p. 155-242, 1966. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0065215608700085>. Acesso em: 15 maio 2018.

SCHETZEN, M. **The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems**. Melbourne: Krieger Publishing Co, 2006.

SCHWARZ, B. J.; RICHARDSON, M. H. **Experimental modal analysis**. Orlando: CSI Reliability Week, 1999.

SCUSSEL, O. **On the use of Volterra series in structural dynamics**. Tese (Doctorate in Mechanical) --- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2017. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/150506>. Acesso em: 15 maio 2018.

SCUSSEL, O.; SILVA, S. Output-only identification of nonlinear systems via Volterra series. **Journal of Vibration and Acoustics**, New York, v. 138, n. 4, p. 041012-041012-13, 2016. ISSN 0013-5194. Disponível em: <http://vibrationacoustics.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=2516662>. Acesso em: 15 maio 2018.

SÉRANDOUR, G.; PEETERS, M.; KERSCHEN, G.; GOLINVAL, J. C. Computation of nonlinear normal modes, part ii: Numerical continuation in auto. **ENOC-2008**, Saint Petersburg, Russia, 2008. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/19ba/6f9059c7b2168ea05d97b7b76f8ff475f0b2.pdf>. Acesso em: 15 maio 2018.

- SHAW, S.; PIERRE, C. Normal modes for non-linear vibratory systems. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 164, n. 1, p. 85-124, 1993. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X83711983>. Acesso em: 15 maio 2018.
- SHAW, S. W.; PIERRE, C. Non-linear normal modes and invariant manifolds. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 150, p. 170-173, 1991. Disponível em: <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01310674/document>. Acesso em: 15 maio 2018.
- SHAW, S. W.; PIERRE, C. On nonlinear normal modes. In: WINTER ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, 1992, Anaheim. **Proceedings of the [...]**. Anaheim: ASME, 1992. ISBN 0791810925. Disponível em: <https://www.researchwithnj.com/en/publications/on-nonlinear-normal-modes>. Acesso em: 15 maio 2018.
- SHAW, S. W.; PIERRE, C. Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 169, p. 319-347, 1994. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X84710212>. Acesso em: 15 maio 2018.
- SHIKI, S. B. **Application of Volterra series in nonlinear mechanical system identification and in structural health monitoring problems**. Tese (Doctorate in Mechanical) --- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, mar. 2016. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/137761>. Acesso em: 15 maio 2018.
- SHIKI, S. B.; JUNIOR, V. L.; SILVA, S. da. Damage detection in nonlinear structures using discrete-time Volterra series. **Key Engineering Materials**, Pfaffikon, v. 569-570, p. 876-883, 2013. Disponível em: <http://www.scientific.net/KEM.569-570.876>. Acesso em: 15 maio 2018.
- SHIKI, S. B.; SILVA, S. da; TODD, M. D. On the application of discrete-time Volterra series for the damage detection problem in initially nonlinear systems. **Structural Health Monitoring**, London, v. 16, n. 1, p. 62-78, 2017. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1177/1475921716662142>. Acesso em: 15 maio 2018.
- SILVA, J. M. M.; MAIA, N. M. M. **Modal analysis and testing**. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2012. Disponível em: <https://www.springer.com/gp/book/9780792358947>.
- SILVA, S. da; COGAN, S.; FOLTÊTE, E. Nonlinear identification in structural dynamics based on Wiener series and Kautz filters. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 24, n. 1, p. 52-58, jan. 2010. ISSN 0888-3270. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327009001897>. Acesso em: 15 maio 2018.
- SLATER, J. C. A numerical method for determining nonlinear normal modes. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 10, p. 19-30, maio 1996. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00114796>. Acesso em: 15 maio 2018.

TAHARA, L. Z.; CARLONI, A. C. N.; TELOLI, R.; SILVA, S. Análise das propriedades dos modos normais não lineares em uma viga. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA - CONEM. **Anais [...]**. Salvador: ABCM, 2018. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.26678/ABCM.CONEM2018.CON18-0345>. Acesso em: 15 abr. 2019.

TANG, B.; BRENNAN, M.; GATTI, G.; FERGUSON, N. Experimental characterization of a nonlinear vibration absorber using free vibration. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 367, p. 159-169, abr. 2016. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X15010524>. Acesso em: 15 maio 2018.

TANG, B.; BRENNAN, M. J.; CROCKER, M. J.; PAWELCZYK, M.; PEDRIELLI, F.; CARLETTI, E.; LUZZI, S. Steady-state analysis of nonlinear systems by the receptance harmonic balance method. In: PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONGRESS ON SOUND AND VIBRATION, 22, 2015, Auburn. **Proceedings of the [...]**. Auburn: Int. Inst. Acoustics & Vibration, 2015. p. 7. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/162684>. Acesso em: 15 maio 2018.

TELOLI, R. de O.; SILVA, S. da. A new way for harmonic probing of hysteretic systems through nonlinear smooth operators. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 121, p. 856-875, abr. 2019. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327018307659?via%3Dihub>. Acesso em: 8 jul. 2019.

TSAKIRTZIS, S.; PANAGOPOULOS, P. N.; KERSCHEN, G.; GENDELMAN, O.; VAKAKIS, A. F.; BERGMAN, L. A. Complex dynamics and targeted energy transfer in linear oscillators coupled to multi-degree-of-freedom essentially nonlinear attachments. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 48, n. 3, p. 285-318, set. 2006. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11071-006-9089-x>. Acesso em: 15 maio 2018.

VAKAKIS, A. Non-similar normal oscillations in a strongly non-linear discrete system. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 159, p. 341-361, 1992. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022460X92900564>. Acesso em: 15 maio 2018.

VAKAKIS, A. Non-linear normal modes (nnms) and their applications in vibration theory: An overview. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 11, n. 1, p. 3-22, 1997. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327096999999>. Acesso em: 15 maio 2018.

VAKAKIS, A. F. **Analysis and identification of linear and nonlinear normal modes in vibrating systems**. Tese (Doctorate Degree) --- California Institute of Technology, Pasadena, California, 1990. Disponível em: http://thesis.library.caltech.edu/3200/1/Vakakis_af_1991.pdf. Acesso em: 15 maio 2018.

VILLANI, L. G. G.; SILVA, S.; CUNHA Jr., A. Damage detection in uncertain nonlinear systems based on stochastic Volterra series. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 125, p. 288-310, jun. 2019. Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327018304291>. Acesso em: 8 jul. 2019.

VIRGIN, L. N. **Introduction to experimental nonlinear dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0957-0233/12/3/701>. Acesso em: 15 maio 2018.

WANG, F. X.; BAJAJ, A. K. Nonlinear normal modes in multi-mode models of an inertially coupled elastic structure. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 47, p. 25-47, jan. 2007. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11071-006-9057-5>. Acesso em: 15 maio 2018.

WANG, F. X.; BAJAJ, A. K.; KAMIYA, K. Nonlinear normal modes and their bifurcations for an inertially coupled nonlinear conservative system. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 42, n. 3, p. 233-265, nov. 2005. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11071-005-3582-5>. Acesso em: 15 maio 2018.

WORDEN, K. Data processing and experiment design for the restoring force surfacemethod, part 1: integration and differentiation of measured time data. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 4, n. 4, p. 295-319, 1990. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S088832709090010I>. Acesso em: 15 maio 2018.

WORDEN, K.; BARTHORPE, R. J. Identification of hysteretic systems using NARX models, part I: Evolutionary identification. In: SIMMERMACHER, T. e. a. (Ed.). **Topics in model validation and uncertainty quantification**. [S.l.]: New York: Springer, 2012. v. 4, p. 49-56. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-1-4614-2431-4_5. Acesso em: 15 maio 2018.

WORDEN, K.; BARTHORPE, R. J.; HENSMAN, J. J. Identification of hysteretic systems using NARX models, part II: A Bayesian approach. In: SIMMERMACHER, T. e. a. (Ed.). **Topics in model validation and uncertainty quantification**. [S.l.]: New York: Springer, 2012. v. 4, p. 57-65. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-1-4614-2431-4_6. Acesso em: 15 maio 2018.

WORDEN, K.; HICKEY, D.; HAROON, M.; ADAMS, D. E. Nonlinear system identification of automotive dampers: A time and frequency-domain analysis. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 23, n. 1, p. 104-126, jan. 2009. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327008000630>. Acesso em: 15 maio 2018.

WORDEN, K.; MANSON, G.; TOMLINSON, G. R. A harmonic probing algorithm for the multi-input Volterra series. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 201, n. 1, p. 67-84, 1997. Disponível em: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0746>. Acesso em: 15 maio 2018.

WORDEN, K.; TOMLINSON, G. R. **Nonlinearity in structural dynamics**. Sheffield: Institute of Physics Publishing, 2001.