

LÁZARO ISMAEL HARDY LLINS

“PROJETO DE CONTROLADOR GAIN SCHEDULING
ROBUSTO VIA LMI: SOLUÇÕES MENOS
CONSERVADORAS”

Ilha Solteira - SP
2019

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

“PROJETO DE CONTROLADOR GAIN SCHEDULING
ROBUSTO VIA LMI: SOLUÇÕES MENOS
CONSERVADORAS”

LÁZARO ISMAEL HARDY LLINS

Mestre em Engenharia Elétrica - FEIS / UNESP

Orientador: Prof. Dr. Edvaldo Assunção

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia UNESP-Campus de Ilha Solteira como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.
Especialidade: Automação.

FICHA CATALOGRÁFICA

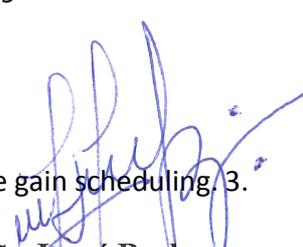
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

H268p Hardy Llins, Lázaro Ismael.
Projeto de controlador gain scheduling robusto via LMI: soluções menos conservadoras / Lázaro Ismael Hardy Llins. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2019
88 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2019

Orientador: Edvaldo Assução
Inclui bibliografia

1. Desigualdades matriciais lineares (LMI). 2. Controle gain scheduling. 3. Controle com realimentação derivativa.



João Josué Barbosa,
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação
Diretor Técnico
CRB 8-5642

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Projeto de Controlador Gain Scheduling Robusto via LMI: Soluções Menos Conservadoras

AUTOR: LÁZARO ISMAEL HARDY LLINS

ORIENTADOR: EDVALDO ASSUNÇÃO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. JEAN MARCOS DE SOUZA RIBEIRO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. CRISTIANO QUEVEDO ANDREA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul



Prof. Dr. EDSON ITALO MAINARDI JUNIOR
IFMS - Campus Três Lagoas / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul

Ilha Solteira, 23 de agosto de 2019

À minha mãe e pai Regla C. e Guillermo

À minha esposa Anabel González

AGRADECIMENTOS

Dedico meus sinceros agradecimentos:

- A Deus, pela paciência e amor incondicional;
- Ao meu orientador, professor Dr. Edvaldo Assunção, pelos ensinamentos, pelo incentivo, pela confiança, paciência e amizade. Penso que esta é a oportunidade ideal para agradecer por tudo aquilo que faz por mim, por tudo o que me ensina, e também, por tudo de bom que a sua postura ética sugere a mim e a todos;
- Aos professores Doutores Marcelo C. M. Teixeira, Rodrigo Cardim e Jean Marcos de Souza Ribeiro pelos diálogos construtivos e descontraídos durante este tempo, pelo acompanhamento e pelas sugestões, extremamente valiosas para este trabalho;
- Aos meus amigos e companheiros dos laboratórios LPC que de forma direta ou indireta me ajudaram;
- A minha mãe, meu pai e minha esposa por sempre me apoiarem no desafio do estudo contínuo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Não só isso, mas também nos gloriamos nas tribulações, porque sabemos que a tribulação produz perseverança; a perseverança, um caráter aprovado; e o caráter aprovado, esperança.”

(Romanos 5:3-4)

“Ele respondeu: Porque a fé que vocês têm é pequena. Eu asseguro que, se vocês tiverem fé do tamanho de um grão de mostarda, poderão dizer a este monte: ‘Vá daqui para lá’, e ele irá. Nada será impossível para vocês. ”

(Mateus 17:20)

“Deem graças ao Senhor, porque ele é bom. O seu amor dura para sempre!”

(Salmos 136:1)

RESUMO

Neste trabalho são propostos resultados para a estabilidade de sistemas lineares sujeitos a parâmetros variantes no tempo (do inglês, *Linear Parameter Varying* - LPV) e incertezas paramétricas. De início, apresenta-se um método para o projeto de um controlador robusto e *gain scheduled* via desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs), com base na teoria de estabilidade segundo Lyapunov, com parâmetro variante no tempo e empregando a realimentação derivativa. Propõe-se um método para projetar o controlador *gain scheduled* usando realimentação derivativa, considerando também incertezas paramétricas. Esta nova formulação foi obtida utilizando o Lema de Finsler, o que permitiu determinar o ganho do controlador sem a necessidade de inverter uma matriz literal. Condições menos conservadoras foram projetadas para um controlador *gain scheduled* considerando a realimentação dos estados do sistemas. Simulações computacionais com exemplos numéricos mostram que os teoremas propostos neste trabalho são menos conservadores do que os existentes na literatura. A metodologia apresentada foi implementada no sistema de suspensão ativa.

Palavras-chave: Desigualdades matriciais lineares (LMI). Controle *gain scheduling*. Controle com realimentação derivativa.

ABSTRACT

In this work, results for the stability of linear parameter-varying (LPV) systems and parametric uncertainties are proposed. At first, a method for designing a gain scheduled and robust controller is described via linear matrix inequalities (*Linear Matrix Inequalities - LMIs*), based on the stability theory of Lyapunov, with time-variant parameters and using state derivative feedback. A method to design a gain scheduling controller using state derivative feedback and also considering parametric uncertainties is proposed. This new formulation was manipulated using the Finsler's Lemma, and allowed to determine the control law without having to invert a symbolic matrix. Less conservative conditions were designed for a gain scheduled controller considering system state feedback. Computational simulations with numerical examples show that the theorems proposed in this work are less conservative than those in the literature. The presented methodology was implemented in the active suspension system.

Keywords: Linear Matrix Inequalities (LMI). Controller *gain scheduling*. Derivative feedback controller .

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Região γ para alocação dos autovalores.	28
Figura 2	Projeto do Controlador com Teoremas Silva et al. (2012) (x), 1 (x, \square), 3 (x, \square , \circ).	34
Figura 3	Projeto do Controlador com Teoremas Silva et al. (2012) (x), 2 (x, \square), 4 (x, \square , \circ) com $\gamma = 0,98$	34
Figura 4	Projeto do Controlador com Teorema Silva et al. (2011a) (x) e Teorema 3 (x, \square).	35
Figura 5	Projeto do Controlador com Teorema Silva et al. (2011a) (x), Teo- rema 4 (x, \square) com $\gamma = 5$	35
Figura 6	Representação da região convexa.	54
Figura 7	Representação da trajetória na região convexa.	54
Figura 8	Projeto do Controlador com Teoremas 5 (x), 6 (x, \square), 11 (x, \square , \diamond) e 9 (x, \square , \diamond , \circ).	56
Figura 9	Projeto do Controlador com Teoremas 8 (\square), 12 (\square , \diamond) e 10 (\square , \diamond , \circ) com $\gamma = 2$	56
Figura 10	Projeto do Controlador com Teoremas Beteto (2019) (x) e 9 (x, \square).	57
Figura 11	Sistema de suspensão ativa Quanser, pertencente ao LPC-FEIS- UNESP.	58
Figura 12	Modelo esquemático do sistema de suspensão ativa.	58
Figura 13	Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s).	61
Figura 14	Sinal de Controle.	61
Figura 15	Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s).	62
Figura 16	Sinal de Controle.	62
Figura 17	Projeto do Controlador com Teoremas 13, 14 (x) e 17 (x, \diamond).	73

Figura 18	Projeto do Controlador com Teoremas 15 (x), 16 (x), 18 (x, \diamond) com $\gamma = 2$	73
Figura 19	Representação gráfica dos conjuntos convexos.	75
Figura 20	Lógica sequencial para obtenção do novo conjunto convexo Θ	76
Figura 21	Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s).	80
Figura 22	Sinal de controle.	80

LISTA DE TABELAS

Tabela Tabela 1	Parâmetros da suspensão ativa.	59
Tabela Tabela 2	Ganhos do controlador aplicando metodologia GS.	63
Tabela Tabela 3	Ganhos do controlador aplicando metodologia GS e incertezas politópicas.	79

ABREVIATURAS E ACRÔNIMOS

LMI *Linear Matrix Inequality*

BMI *Bilinear Matrix Inequality*

LQR *Linear Quadratic Regulator*

LPV *Linear Parameter Varying*

SISO *Single Input Single Output*

MIMO *Multiple Input Multiple Output*

PID *Proportional Integral Derivative*

FGS *Fuzzy Gain Scheduling*

LISTA DE SÍMBOLOS

$-T$	Denota a inversa de uma matriz transposta.
$*$	Denota a transposta do bloco de uma matriz simétrica.
T	Denota transposta de uma matriz ou vetor.
$x_0(t_0)$	Representa condição inicial de um estado.
Λ	Representa um simplex unitário, $\left\{ \sum_{i=1}^N (\cdot) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \right\}$.
$\sum_{i=1}^j (\cdot)$	Representa a somatória de $i = 1$ até j .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
2	CONTROLE ROBUSTO COM REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA: SOLUÇÕES MENOS CONSERVADORAS	23
2.1	Projeto de controle robusto para sistemas lineares usando realimentação derivativa	23
2.2	Projeto de controladores robustos: soluções menos conservadoras	25
2.2.1	<i>Projeto de Controladores Robustos: estabilidade assintótica usando variáveis extras</i>	25
2.2.2	<i>Projeto do Controlador: taxa de decaimento γ</i>	27
2.2.3	<i>Projeto do Controlador Robusto: estabilidade assintótica usando múltiplas variáveis extras</i>	30
2.2.4	<i>Projeto do Controlador Robusto usando múltiplas variáveis e taxa de decaimento γ</i>	32
2.3	Exemplo numérico: análise de factibilidade	33
2.3.1	<i>Comparação entre Lema da Projeção Recíproca e Lema de Finsler</i>	34
2.4	Conclusões parciais	36
3	CONTROLE GS USANDO REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA	37
3.1	Projeto de controle GS para sistemas lineares usando realimentação derivativa	37
3.1.1	<i>Projeto do Controlador: taxa de decaimento γ</i>	40
3.1.2	<i>Projeto de controle GS: estabilidade assintótica usando múltiplas variáveis extras</i>	43
3.1.3	<i>Projeto de controle GS: usando múltiplas variáveis e taxa de decaimento γ</i>	44
3.2	Projeto de controle GS usando realimentação derivativa: Lema da Projeção Recíproca	47
3.2.1	<i>Projeto de controle GS com condição de estabilidade</i>	47

3.2.2	<i>Projeto de controle GS com condição de estabilidade considerando taxa de decaimento</i>	50
3.3	Construção do ganho do controlador dependente do parâmetro $K(\alpha(t))$	53
3.4	Exemplo numérico: análise de factibilidade	55
3.5	Análise de factibilidade: GS considerando variáveis múltiplas versus GS e LQR	56
3.6	Implementação Prática	57
3.7	Conclusões parciais	63
4	CONTROLE GS USANDO REALIMENTÇÃO DE ESTADOS: CONDIÇÕES MAIS RELAXADAS	64
4.1	Projeto de controle GS para sistemas lineares usando realimentação de estados	64
4.1.1	<i>Projeto do Controlador: taxa de decaimento γ</i>	69
4.1.2	<i>Projeto do Controlador: estabilidade assintótica usando múltiplas variáveis extras</i>	70
4.1.3	<i>Projeto do Controlador GS usando múltiplas variáveis e taxa de decaimento γ</i>	71
4.2	Exemplo numérico: análise de factibilidade	72
4.3	Conclusões parciais	73
5	PROJETO DE CONTROLE MISTO <i>GAIN SCHEDULING</i> - ROBUSTO	74
5.1	Metodologia de geração estrutural de um conjunto único por meio de incertezas multiplicativas	74
5.2	Controle GS-robusto usando realimentação derivativa	76
5.2.1	<i>Representação dinâmica do sistema contínuo linear sujeito a incertezas politópicas e parâmetros variantes no tempo</i>	76
5.2.2	<i>Implementação Prática</i>	77
5.2.3	<i>Resultados Obtidos com a Implementação</i>	79
5.3	Conclusões parciais	81

6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	82
6.1	Perspectivas	82
	REFERÊNCIAS	83

1 INTRODUÇÃO

Na atualidade, muitas estratégias de controle são usadas para garantir um desempenho eficiente perante a ocorrência de graves problemas em diferentes processos industriais. A realimentação dos sistemas dinâmicos tem sido uma estratégia de controle muito útil, na qual os resultados obtidos de uma tarefa ou atividade são reintroduzidos no sistema com a intenção de incidir ou atuar sobre ações futuras, já seja para manter o equilíbrio do sistema ou para conduzir a um sistema novo. Na literatura existem diversos trabalhos que mostram resultados relevantes considerando a realimentação: realimentação das variáveis de estados em conjunto com outras técnicas que permitem garantir um bom desempenho juntamente à estabilidade do sistema Barsaiyan e Purwar (2010), a realimentação das saídas do sistema Roppenecker e O'Reilly (1987); Kaddour et al. (2015); Sato e Peaucelle (2018) e a realimentação da derivada dos estados. Esta última tem sido alvo de estudos específicos em sistemas mecânicos, em sistemas sujeitos a vibrações, na indústria aeronáutica, entre outros. O uso de sensores acelerométricos facilitam a obtenção da aceleração, e da velocidade, que pode ser obtida a partir da integração do sinal provido pelo acelerômetro Abdelaziz e Valasek (2005).

O uso da realimentação da derivada do vetor do estado (realimentação derivativa) para sistemas lineares tem sido alvo de estudo nos últimos anos. Muitos autores exploraram métodos semelhantes aos existentes para a realimentação do vetor estado. Por exemplo Abdelaziz e Valasek (2004) os autores utilizam um equacionamento similar à Ackerman para sistemas lineares SISO por meio da realimentação derivativa. Em Faria, Assunção e Teixeira (2009) é apresentada uma nova formulação para estabilizar sistemas multivariáveis lineares MIMO sob realimentação derivativa. Em Moreira et al. (2010) foi apresentada uma pesquisa sobre a rejeição do distúrbio com realimentação derivativa e uma verificação de observabilidade e estabilidade através da derivada do vetor de estado para sistemas lineares. Em Lewis e Syrmos (1991) os autores propõem uma teoria geométrica para sistemas dinâmicos singulares com realimentação derivativa. Em Silva et al. (2012) é apresentada uma metodologia para projetar um controlador menos conservador para sistemas lineares sujeito a incertezas politópicas via realimentação derivativa. Em Michiels et al. (2009) é realizado um estudo para garantir estabilidade e robustez usando a realimentação derivativa. Em Llins et al. (2017) os autores desenvolveram uma

metodologia para o projeto de um controlador de *gain scheduled* usando a realimentação da derivada do vetor de estados. Adicionalmente, diversos trabalhos utilizam a realimentação derivativa como uma estratégia de solução associada as diferentes áreas: não lineares, considerando sistemas incertos, entre outros.

Frequentemente, é necessário dispor de um modelo matemático para realizar o projeto de controle da dinâmica de um sistema. Mais ainda, é possível que o modelo matemático de um sistema apresente parâmetros que podem variar dentro de um intervalo, sendo difícil mensurá-los. Essa situação foi caracterizada para muitos pesquisadores da área como sistemas sujeitos a parâmetros incertos. A técnica desenvolvida para garantir a estabilidade e o desempenho em malha fechada se denominou controle robusto. A teoria do controle robusto está bem estabelecida para sistemas lineares, mas quase todos os processos reais possuem características não lineares. Contudo, se a região operacional da planta for pequena, pode-se usar as abordagens de controle robusto para projetar um controlador linear robusto, onde as não linearidades são tratadas como incertezas do modelo. Nos últimos anos, muitos estudos foram desenvolvidos considerando problemas robustos de controle Ramos e Peres (2002), Veselýa e Ilka (2015) e Veselýa e Ilka (2017). Em destaque, a estabilidade quadrática apresenta-se como uma estratégia muito útil para garantir uma estabilidade do sistema e controlar sistemas lineares incertos Bernussou, Peres e Geromel (1989), Li, Fang e Wang (2017). Com esta abordagem particular, a estabilidade de um politopo de matrizes pode ser comprovada por meio de um teste de factibilidade de um conjunto de LMIs Boyd et al. (1994) envolvendo apenas os vértices do domínio e incertezas.

Neste contexto, a estabilidade quadrática pode levar a resultados muito conservadores em alguns casos. Recentemente, diferentes técnicas foram desenvolvidas para fornecer resultados menos conservadores, como, por exemplo, o uso de funções Lyapunov dependentes de parâmetros Su e Chesi (2017) ou funções Lyapunov por partes Rantzer e Johansson (2000).

A estabilidade robusta usando a lei de controle para a realimentação dos estados é um problema clássico na literatura de controle (BOYD et al., 1994). Várias estratégias foram propostas para obter condições mais relaxadas, e estudos semelhantes foram realizados considerando a realimentação da derivada dos estados Silva et al. (2012), Faria et al. (2009c). Em ambos casos foram utilizadas estratégias com variáveis de folga Silva et al. (2011a). Alguns métodos de estudo de estabilidade para o sistema de malha fechada têm condições baseadas em desigualdades de matrizes, comumente aplicadas na literatura MOZELLI, PALHARES e AVELLAR (2004), Pipeleersa et al. (2009), Silva et al. (2012).

A origem dos controladores *gain scheduled* data nos anos 1960, com a teoria clássica chamada *GS* com base na linearização de um sistema em seus pontos de equilíbrio As-

trom e Wittenmark (2008); Shamma e Athans (1990); Hyde e Glover (1993). Uma técnica mais simples foi usada na Segunda Guerra Mundial para controlar os foguetes V2 (controladores de comutação com base em dados medidos). A eficiência desta formulação clássica de controle *GS* depende das características dinâmicas do sistema não linear. Os controladores podem ser descritos como uma combinação de sistemas lineares, associada a um controlador linear para cada ponto de operação Leith e Leithead (2000). O controlador é projetado levando em consideração apenas a dinâmica local da planta em torno de um ponto de equilíbrio Leith e Leithead (2000). Controladores *gain scheduled* clássico foram aplicados intensamente, mas tiveram limitações. Trabalhar apenas na área de vizinhança dos pontos de equilíbrio operacional representou uma deficiência técnica. A técnica *GS* como conceito teve seus primeiros aportes no controle de voo Sun et al. (2009), Oosterom e Babuska (2001), Masubuchi et al. (2004), no setor aeroespacial Lee e Chung (2001), em sistemas de energia, no controle de turbinas eólicas Badihi, Zhang e Hong (2013), Liu et al. (2012), Ding-Hui et al. (2012), turbinas hidráulicas Ruzhekov, Slavov e Puleva (2011), Ginter e Pieper (2009), turbinas a gás Rodriguez-Martinez e Garduno-Ramirez (2005), em estabilizadores de sistema de energia Ghosh (1991), geradores Jabehdar-Maralani, Yazdanpanah e Mohammadi-Milasi (2004), em rolamentos magnéticos Betschon e Knospe (2001), tem trabalhos dedicados à microgravidade Mehendale, Fialho e Grigoriadis (2003) e na área de saúde, no controle do diabetes Abu-Rmileh e Garcia-Gabin (2010), entre outras aplicações na área industrial.

A mistura de *GS* com outras técnicas ajudou a melhorar o desempenho do sistema, reduzindo a margem do sinal do erro Merry et al. (2014), no caso FGS supera as desvantagens do agendamento de ganho clássico, considerando a restrição de estabilidade e o desempenho tanto no comportamento local quanto global. O agendamento técnico de ganho difuso pode envolver o ganho clássico de programação, bem como as técnicas LPV Naus (2009). Em Zhang et al. (2017) os autores apresentam um método para o projeto de controladores PID gain scheduled fuzzy (*FGS-PID*) para garantir a estabilidade de um sistema elétrico de potência. O método de otimização da colônia de abelhas foi usado para determinar as regras de controle do *FGS-PID*. Em Zhang et al. (2016) apresenta o desenvolvimento de uma metodologia para o problema de controle \mathcal{H}_∞ para uma classe de sistemas *Takagi-Sugeno* de tempo discreto com variações de ganho e *fadings* de canais aleatoriamente ocorridos via LMI.

Existem trabalhos que ressaltam a importância da abordagem do controle robusto com controle *GS*, por exemplo em Sato e Peaucelle (2018) apresenta uma metodologia para solucionar problemas de erros entre os parâmetros *scheduling* reais e fornecidos, que inevitavelmente leva a controlar a degradação do desempenho usando o lema da eliminação (SKELTON; IWASAKI; GRIGORIADIS, 1997). Em Guo e Scherer (2018) é proposta uma solução exata de espaço de estados para o problema de projetar um controlador robusto

de ganho programado com uma estrutura hierárquica e baseado em programação semi-definida. Em Veselýa e Ilka (2015); Veselýa e Ilka (2017) descrevem uma metodologia para projetar controladores PI e PID *gain scheduled* robustos via BMI.

Baseado nos estudos anteriores, em (LLINS et al., 2017) apresentam uma metodologia que considera o controle *GS* usando realimentação derivativa com a possibilidade de alocar os autovalores do sistema para um melhor desempenho.

A dificuldade de projetar controladores robustos *gain scheduled* usando LMI tem sido pouco analisado na literatura e serviu de incentivo para a realização deste trabalho, que é generalizar os resultados anteriores na síntese de controladores robustos considerando *GS*. A motivação foi desenvolver uma estratégia de controle que possa garantir a estabilidade e o desempenho para sistemas sujeitos a parâmetros incertos e variantes no tempo, gerando um mapeamento que preserva a convexidade original do problema. Ainda, consideram-se novas técnicas de relaxação para diminuir o conservadorismo.

Os objetivos deste trabalho são:

- Projetar um controlador robusto usando realimentação da derivada dos estados através de soluções menos conservadoras via LMI, além de analisar e comparar resultados obtidos.
- Projetar um controlador *GS* usando realimentação da derivada dos estados através de soluções menos conservadoras, além de analisar e comparar resultados obtidos.
- Projetar um controlador *GS* usando realimentação dos estados através de soluções menos conservadoras, além de analisar e comparar resultados obtidos.
- Projetar um controlador *GS* robusto usando realimentação da derivada dos estados, além de analisar e comparar resultados obtidos.
- Implementar os projetos dos controladores *GS* usando realimentação da derivadas dos estados.

A organização desta trabalho a partir deste momento:

- Capítulo 2: Apresenta a metodologia para o projeto de controle robusto via realimentação derivativa considerando novas soluções menos conservadoras.
- Capítulo 3: Mostra o desenvolvimento do estudo sobre o projeto de controle *GS* via realimentação derivativa, considerando novas soluções menos conservadoras.
- Capítulo 4: Apresenta a metodologia para o projeto de controle *GS* via realimentação de estados, considerando novas soluções menos conservadoras.

- Capítulo 5: Expõe a estratégia para o projeto de controle GS robusto via realimentação derivativa.
- Capítulo 6: Aponta as conclusões e também algumas perspectivas para pesquisas futuras. Após, uma lista das bibliografias relacionadas diretamente e indiretamente com o trabalho.

2 CONTROLE ROBUSTO COM REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA: SOLUÇÕES MENOS CONSERVADORAS

Nesta seção, apresenta-se uma metodologia para sistemas lineares sujeitos a incertezas politópicas, através da qual é possível projetar um controlador robusto usando realimentação derivativa. Introduce-se um novo método via LMI para garantir estabilidade por meio do Lema de Finsler para flexibilizar e obter soluções menos conservadoras. Utilizam-se métodos disponíveis na literatura para realizar comparações numéricas. O seguinte lema será utilizado na demonstração da metodologia:

Lema 2.1. *Para cada matriz não simétrica $M (M \neq M^T)$, se $M + M^T < 0$, então M é invertível.*

Prova: Vide em Skelton, Iwasaki e Grigoriadis (1997). ■

2.1 Projeto de controle robusto para sistemas lineares usando realimentação derivativa

Considere o seguinte sistema linear contínuo incerto:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

Nesse sistema $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são matrizes que representam a dinâmica do sistema incerto, $x(t)$ vetor de estados e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada.

As matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ são representadas pela combinação convexa N vértices conhecidos:

$$(A(\alpha), B(\alpha)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i, B_i), \alpha \in \Lambda \quad (2)$$

sendo α um parâmetro invariante do tempo pertencente ao simplex unitário.

$$\Lambda = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (3)$$

Pode-se usar uma notação compacta:

$$\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_N]^T.$$

Suponha que a matriz do sistema $A(\alpha)$ seja não singular Abdelaziz e Valasek (2005b). O objetivo é encontrar uma matriz constante $K_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$, de modo que, a lei de controle:

$$u(t) = -K_d \dot{x}(t), \quad (4)$$

estabilize o sistema (1). A matriz $(I + B(\alpha)K_d)$ é suposta de posto completo para que o sistema em malha fechada esteja bem definido. Então, substituindo (4) e (1) no sistema em malha fechada, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) - B(\alpha)K_d \dot{x}(t) \iff \\ \dot{x}(t) &= (I + B(\alpha)K_d)^{-1}A(\alpha)x(t), \end{aligned} \quad (5)$$

A análise da função de Lyapunov (6) permite projetar o controlador que garanta a estabilidade assintótica para o sistema (1):

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= x(t)^T P x(t) > 0, \forall x(t) \neq 0 \implies P = P^T > 0, P \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) < 0. \end{aligned} \quad (6)$$

O Lema 2.2 introduz novas variáveis auxiliares.

Lema 2.2 (Lema de Finsler). *Considere $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{2n}$, $\mathcal{D}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $\mathcal{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$ sendo $\mathcal{B}(\alpha)^\perp$ uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}(\alpha)$ (em outras palavras $\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^\perp = 0$).*

Então, as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\mathcal{W}^T \mathcal{D}(\alpha) \mathcal{W} < 0, \quad \forall \mathcal{W} \neq 0, \quad \mathcal{B}(\alpha) \mathcal{W} = 0,$
- (ii) $\mathcal{B}(\alpha)^\perp{}^T \mathcal{D}(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)^\perp < 0,$
- (iii) $\exists \rho \in \mathbb{R} : \mathcal{D}(\alpha) - \rho \mathcal{B}(\alpha)^T \mathcal{B}(\alpha) < 0,$
- (iv) $\exists \mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{2n \times n} : \mathcal{D}(\alpha) + \mathcal{Q} \mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)^T \mathcal{Q}^T < 0,$

sendo ρ e \mathcal{Q} são variáveis extras (ou multiplicadoras).

Prova: Vide em Skelton, Iwasaki e Grigoriadis (1997). ■

Este lema é muito útil para desacoplar matrizes dependentes de parâmetros ou para reduzir o número de LMIs no projeto de controle MOZELLI, PALHARES e AVELLAR (2004).

2.2 Projeto de controladores robustos: soluções menos conservadoras

Em Silva et al. (2012) é apresentada uma metodologia considerando as funções de Lyapunov dependentes de parâmetros para diminuir o conservadorismo do projeto do controlador, usando o relaxamento com o Lemma de Finsler. No entanto, uma única matriz de Lyapunov foi usada, sendo que essa flexibilização promovida foi feita por meio da adição de diferentes variáveis extras. Na subsecção 2.2.1, são propostas condições mais relaxadas para projetar o controlador (4).

2.2.1 Projeto de Controladores Robustos: estabilidade assintótica usando variáveis extras

Teorema 1. *Considerando A_i invertível, se a matriz simétrica definida positiva Q existe, juntamente com as matrizes Z , X_1 e X_2 que satisfazem as seguintes desigualdades:*

$$\begin{bmatrix} A_i X_1^T + X_1 A_i^T + A_i Z^T B_i^T + B_i Z A_i^T & * \\ Q + X_2 A_i^T - X_1^T & -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{bmatrix} ((A_i + A_j) X_1^T + X_1 (A_i^T + A_j^T) + A_i Z^T B_j^T + A_j Z^T B_i^T + B_i Z A_j^T + B_j Z A_i^T) & * \\ 2Q + X_2 (A_i^T + A_j^T) - 2X_1^T & -2X_2 - 2X_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, j = i+1, 2, \dots, N,$$

então o sistema (5) é assintoticamente estável dado pela matriz obtida em (9).

$$K_d = ZQ^{-1}. \quad (9)$$

Prova: Suponha que (7) e (8) sejam factíveis. Multiplicando (7) por $\alpha_i^2 > 0$ e somando em i , desde $i = 1$ a $i = N$, $\alpha_i \alpha_j > 0$ e (8), somando também desde $i = 1$, até $i = N-1$ e $j = i+1$ a $j = N$, e fazendo uso das seguintes propriedades:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j,$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j H_i R_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 H_j R_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (H_i R_j + H_j R_i)$$

então:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 A_i Q^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (A_i Q^T + A_j Q^T) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j Q^T. \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 Q A_i^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (Q A_i^T + Q A_j^T) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j Q A_j^T. \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 B_i Z_i + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (B_i Z_j + B_j Z_i) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j B_i Z_j. \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 Z_i^T B_i^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j Z_i^T B_j^T. \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 G + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (2G) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j G. \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 Q + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (2Q) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j Q. \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 Q^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (2Q^T) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j Q^T, \end{aligned}$$

Usando as definições pode-se obter seguinte

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)X_1^T + X_1A^T(\alpha) + A(\alpha)Z^T B^T(\alpha) + B(\alpha)ZA^T(\alpha) & * \\ Q + X_2A^T(\alpha) - X_1^T & -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

note que (10), pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)Z^T B^T(\alpha) + B(\alpha)ZA^T(\alpha) & * \\ Q & 0_{n \times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T(\alpha) & -I_{n \times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A(\alpha) \\ -I_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^T & X_2^T \end{bmatrix} < 0. \quad (11)$$

Utilizando o Lema 2.2, com

$$\mathcal{D}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha)Z^T B^T(\alpha) + B(\alpha)ZA^T(\alpha) & * \\ Q & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} A^T(\alpha) & -I_{n \times n} \end{bmatrix},$$

e, portanto, $\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & A(\alpha) \end{bmatrix}^T$, pré e pós multiplicando por $\mathcal{B}(\alpha)^{\perp T}$ e $\mathcal{B}(\alpha)^\perp$, sabendo que $\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^\perp = 0$, pode obter $\mathcal{B}^{\perp T}(\alpha)\mathcal{D}(\alpha)\mathcal{B}^\perp(\alpha) < 0$ a equivalência entre as restrições do lema. Substituindo as matrizes, tem-se

$$A(\alpha)Q + QA^T(\alpha) + A(\alpha)Z^T B^T(\alpha) + B(\alpha)ZA^T(\alpha) < 0, \quad (12)$$

sendo $Q = P^{-1}$ e $Z = K_d Q$. Colocando $P^{-1}A^T(\alpha)$ e $A(\alpha)P^{-1}$ em evidência, tem-se:

$$A(\alpha)P^{-1}(I + B(\alpha)K_d)^T + (I + B(\alpha)K_d)P^{-1}A^T(\alpha) < 0. \quad (13)$$

De acordo com o Lema 2.1, segue que $(I + B(\alpha)K_d)P^{-1}A^T(\alpha)$ é de posto completo, então $(I + B(\alpha)K_d)$, P^{-1} e $A^T(\alpha)$ são de matrizes de posto completo, isso representa que são invertíveis.

Pré e pós multiplicando (13) por $P(I + B(\alpha)K_d)^{-1}$ e $(I + B(\alpha)K_d)^{-T}P$, tem-se

$$P(I + B(\alpha)K_d)^{-1}A(\alpha) + A^T(\alpha)(I + B(\alpha)K_d)^T P < 0. \quad (14)$$

Multiplicando (14) pela esquerda e direita por $x^T(t)$ e $x(t)$, respectivamente, levando-se em conta a definição dada em (5), tem-se

$$\dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) < 0, \quad (15)$$

representando a derivada da função quadrática de Lyapunov, dada por

$$x^T(t)Px(t) > 0, \quad (16)$$

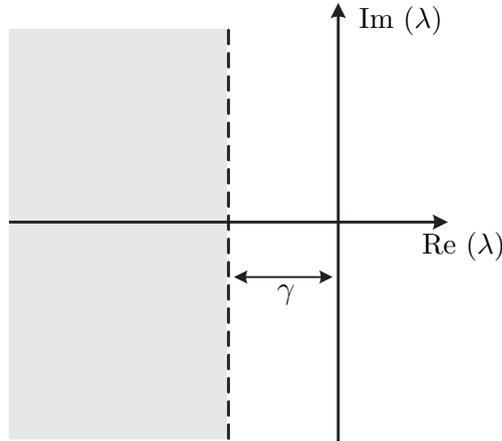
para todo $x(t) \neq 0$, $P = P^T > 0$. ■

2.2.2 Projeto do Controlador: taxa de decaimento γ

O Teorema 2 é proposto para garantir a estabilidade assintótica do sistema (5) e melhorar o desempenho da resposta transitória. Baseia-se na taxa de decaimento Llin et al. (2017). A taxa de decaimento $\gamma > 0$ representada na Figura 1 pode ser obtida se as seguintes condições forem satisfeitas

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\gamma V(x(t)), \quad (17)$$

considerando como candidata a função Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T Px(t) > 0$, sendo $\dot{V}(x(t)) < 0$ para todo $x(t) \neq 0$.

Figura 1 - Região γ para alocação dos autovalores.

Fonte: Silva et al. (2012)

Teorema 2. Considerando A_i invertível, $\gamma > 0$, se a matriz simétrica definida positiva Q existe, juntamente com as matrizes Z , X_1 e X_2 que satisfazem as seguintes desigualdades matriciais:

$$\begin{bmatrix} (A_i X_1^T + X_1 A_i^T + A_i Z^T B_i^T + B_i Z A_i^T + 2\gamma Q + 2\gamma Z^T B_i^T + 2\gamma B_i Z) & * & * \\ Q + X_2 A_i^T - X_1^T & -X_2 - X_2^T & * \\ Z^T B_i^T & 0_{n \times n} & \frac{-Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

 $i = 1, 2, \dots, N;$

$$\begin{bmatrix} ((A_i + A_j) X_1^T + X_1 (A_i^T + A_j^T) + A_i Z^T B_j^T + A_j Z^T B_i^T + B_i Z A_j^T + B_j Z A_i^T + 4\gamma Q + 2\gamma Z^T (B_i^T + B_j^T) + 2\gamma (B_i + B_j) Z) & * & * \\ 2Q + X_2 (A_i^T + A_j^T) - 2X_1^T & -2X_2 - 2X_2^T & * \\ Z^T B_i^T + Z^T B_j^T & 0_{n \times n} & \frac{-Q}{\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

 $i = 1, 2, \dots, N-1, j = i+1, 2, \dots, N,$

então o sistema (5) é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual que γ , dado pela matriz obtida em (20).

$$K_d = ZQ^{-1}. \quad (20)$$

Prova: Suponha que (18) e (19) sejam factíveis. Multiplicando (18) por $\alpha_i^2 > 0$ e somando i , de $i = 1$ até $i = N$, $\alpha_i \alpha_j > 0$ e (19), somando também de $i = 1$, a $i = N - 1$ e em $j = i + 1$ até $j = N$, aplicando o Complemento de Schur Boyd et al. (1994) e considerando as propriedades definidas previamente, segue que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A(\alpha)X_1^T + X_1A^T(\alpha) + A(\alpha)Z^T B^T(\alpha) + B(\alpha)ZA^T(\alpha) & * \\ Q + X_2A^T(\alpha) - X_1^T & -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} B(\alpha)Z \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\gamma Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^T B^T(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (21)$$

De (21), executando as operações entre as matrizes, segue

$$\begin{bmatrix} (A(\alpha)X_1^T + X_1A^T(\alpha) + A(\alpha)Z^T B^T(\alpha) + B(\alpha)ZA^T(\alpha) + 2\gamma Q + 2\gamma Z^T B^T(\alpha) + 2\gamma B(\alpha)Z + 2\gamma B(\alpha)ZQ^{-1}Z^T B^T(\alpha)) & * \\ Q + X_2A^T(\alpha) - X_1^T & -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

e, rearranjando a matriz em soma de matrizes e vetores, segue

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (A(\alpha)Z^T B^T(\alpha) + B(\alpha)ZA^T(\alpha) + 2\gamma Q + 2\gamma Z^T B^T(\alpha) + 2\gamma B(\alpha)Z + 2\gamma B(\alpha)ZQ^{-1}Z^T B^T(\alpha)) & * \\ Q & 0_{n \times n} \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T(\alpha) & -I_{n \times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A(\alpha) \\ -I_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^T & X_2^T \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Usando o Lema 2.2, com

$$\mathcal{D}(\alpha) = \begin{bmatrix} (A(\alpha)Z^T B^T(\alpha) + B(\alpha)ZA^T(\alpha) + 2\gamma Z^T B^T(\alpha) + 2\gamma Q + 2\gamma B(\alpha)Z + 2\gamma B(\alpha)ZQ^{-1}Z^T B^T(\alpha)) & * \\ Q & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} A^T(\alpha) & -I_{n \times n} \end{bmatrix},$$

e, portanto, $\mathcal{B}^\perp(\alpha) = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & A(\alpha) \end{bmatrix}$, pre e pós multiplicando por $\mathcal{B}(\alpha)^{\perp T}$ e $\mathcal{B}(\alpha)^\perp$, sabendo que $\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^\perp = 0$, pode-se obter $\mathcal{B}^{\perp T}(\alpha)\mathcal{D}(\alpha)\mathcal{B}^\perp(\alpha) < 0$ a equivalência entre

as restrições do lema. Substituindo as matrizes, tem-se

$$\begin{aligned} & A(\alpha)Q + QA^T(\alpha) + A(\alpha)Z^T B^T(\alpha) + B(\alpha)ZA^T(\alpha) + 2\gamma Q \\ & + 2\gamma Z^T B^T(\alpha) + 2\gamma B(\alpha)Z + 2\gamma B(\alpha)ZQ^{-1}Z^T B^T < 0, \end{aligned} \quad (24)$$

sendo $Q = P^{-1}$, $Z = K_d Q$. Colocando $P^{-1}A^T(\alpha)$ e $A(\alpha)P^{-1}$ em evidência, tem-se

$$\begin{aligned} & A(\alpha)P^{-1}(I + B(\alpha)K_d)^{-T} + (I + B(\alpha)K_d)P^{-1}A^T(\alpha) + \\ & (I + B(\alpha)K_d)P^{-1}(2\gamma P)P^{-1}(I + B(\alpha)K_d)^{-T} < 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Pre e pós multiplicando (25) por $P(I + B(\alpha)K_d)^{-1}$ e $(I + B(\alpha)K_d)^{-T}P$, tem-se

$$P(I + B(\alpha)K_d)^{-1}A(\alpha) + A^T(\alpha)(I + B(\alpha)K_d)^{-T}P + 2\gamma P < 0. \quad (26)$$

Multiplicando (26) pela esquerda e direita por $x^T(t)$ e $x(t)$, respectivamente. Substituindo (5), tem-se

$$\dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) < -2\gamma x^T(t)Px(t), \quad (27)$$

representando a derivada da função quadrática de Lyapunov, limitada pela taxa de decaimento, dada por

$$x^T(t)Px(t) > 0, \quad (28)$$

para todo $x(t) \neq 0$. E assim, $P = P^T > 0$. ■

2.2.3 Projeto do Controlador Robusto: estabilidade assintótica usando múltiplas variáveis extras

O Teorema 3 é proposto para garantir a estabilidade assintótica do sistema (5), reduzindo o grau de conservadorismo em relação as metodologias anteriores.

Teorema 3. *Considerando A_i invertível, se a matriz simétrica definida positiva Q existe, juntamente com as matrizes Z , X_{1i} e X_{2i} que satisfazem as seguintes desigualdades*

matriciais:

$$\begin{bmatrix} A_i X_{1i}^T + X_{1i} A_i^T + A_i Z^T B_i^T + B_i Z A_i^T & * \\ Q + X_{2i} A_i^T - X_{1i}^T & -X_{2i} - X_{2i}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (29)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{bmatrix} (A_i X_{1j}^T + A_j X_{1i}^T + X_{1i} A_j^T + X_{1j} A_i^T + A_i Z^T B_j^T + A_j Z^T B_i^T + B_i Z A_j^T + B_j Z A_i^T) & * \\ (2Q + X_{2i} A_j^T + X_{2j} A_i^T - X_{1i}^T - X_{1j}^T) & -X_{2i} - X_{2j} - X_{2i}^T - X_{2j}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (30)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, j = i+1, 2, \dots, N,$$

então o sistema (5) é assintoticamente estável dado pela matriz obtida em (31).

$$K_d = ZQ^{-1}. \quad (31)$$

Prova: Considerando as propriedades definidas previamente em conjunto com as propriedades declaradas a seguir,

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 X_{1i} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (X_{1i} + X_{1j}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j X_{1i}.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 X_{2i} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (X_{2i} + X_{2j}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j X_{2i}.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 X_{1i}^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (X_{1i}^T + X_{1j}^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j X_{1i}^T.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 X_{2i}^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (X_{2i}^T + X_{2j}^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j X_{2i}^T,$$

utilizando os seguintes vetores e matrizes

$$\mathcal{D}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) Z^T B^T(\alpha) + B(\alpha) Z A^T(\alpha) & * \\ Q & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} A^T(\alpha) & -I_{n \times n} \end{bmatrix},$$

então, a prova do teorema segue os mesmos passos apresentados no Teorema 1. ■

2.2.4 Projeto do Controlador Robusto usando múltiplas variáveis e taxa de decaimento γ

O próximo teorema é proposto para garantir a estabilidade assintótica do sistema (1) e melhorar o desempenho da resposta transitória, como definido no Teorema 2, mas também adicionar variáveis para reduzir o conservadorismo.

Teorema 4. *Considerando A_i invertível, $\gamma > 0$, se a matriz simétrica definida positiva existe Q , juntamente com as matrizes Z , X_{1i} e X_{2i} que satisfazem as seguintes desigualdades:*

$$\begin{bmatrix} ((A_i X_{1i}^T + X_{1i} A_i^T + A_i Z^T B_i^T + B_i Z A_i^T + 2\gamma Q + 2\gamma Z^T B_i^T + 2\gamma B_i Z) & * & * \\ Q + X_{2i} A_i^T - X_{1i}^T & -X_{2i} - X_{2i}^T & * \\ Z^T B_i^T & 0_{n \times n} & -\frac{Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (32)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{bmatrix} (A_i X_{1j}^T + A_j X_{1i}^T + X_{1i} A_j^T + X_{1j} A_i^T + A_i Z^T B_j^T + A_j Z^T B_i^T + B_i Z A_j^T + B_j Z A_i^T + 4\gamma Q + 2\gamma Z^T (B_i^T + B_j^T) + 2\gamma (B_i + B_j) Z) & * & * \\ 2Q + X_{2i} A_j^T + X_{2j} A_i^T - X_{1i}^T - X_{1j}^T & -X_{2i} - X_{2j} - X_{2i}^T - X_{2j}^T & * \\ Z^T B_i^T + Z^T B_j^T & 0_{n \times n} & -\frac{Q}{\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, j = i+1, 2, \dots, N,$$

então o sistema (5) é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior e igual que γ , dado pela matriz obtida em (34).

$$K_d = ZQ^{-1}. \quad (34)$$

Prova: Usando as propriedades previamente definidas e considerando os seguintes vetores e matrizes:

$$\mathcal{D}(\alpha) = \begin{bmatrix} (A(\alpha)Z^T B^T(\alpha) + B(\alpha)Z A^T(\alpha) + 2\gamma Z^T B^T(\alpha) & * \\ +2\gamma Q + 2\gamma B(\alpha)Z + 2\gamma B(\alpha)Z Q^{-1} Z^T B^T(\alpha) & \\ & Q & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} A^T(\alpha) & -I_{n \times n} \end{bmatrix},$$

então, a prova do teorema segue os mesmos passos apresentados no Teorema 2. ■

Na seção 2.3, verifica-se a eficiência das metodologias propostas. Um exemplo será usado para comparar esta nova metodologia com outras metodologias da literatura.

2.3 Exemplo numérico: análise de factibilidade

Considere um sistema linear incerto (1) representado pelos seguintes vértices do polítopo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 21 & -98 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \xi_1 & -98 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

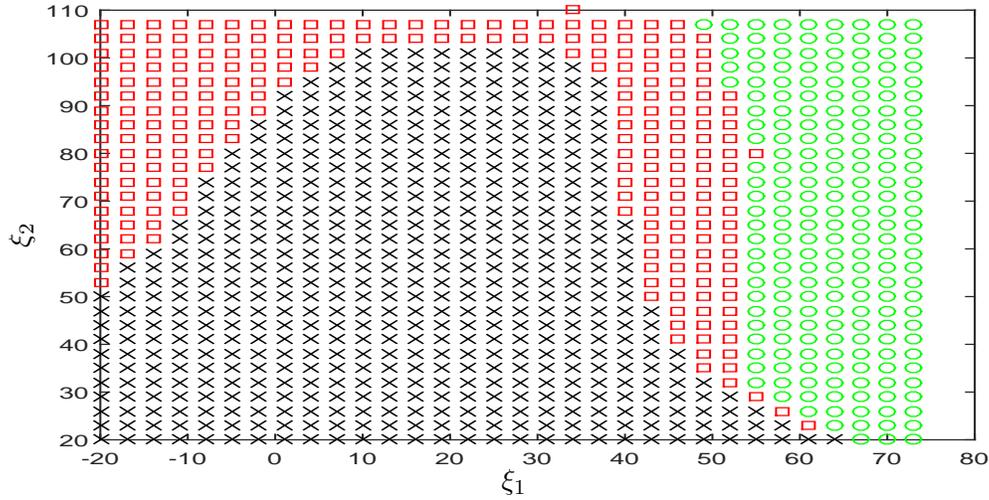
Considere uma variação paramétrica entre os intervalos $-20 \leq \xi_1 \leq 75$ e $20 \leq \xi_2 \leq 110$ com um passo de 3. A região de factibilidade foi construída para analisar e comparar as metodologias propostas nos Teoremas 1, 3 e Teorema apresentado em Silva et al. (2012).

Na Figura 2 é representada a região de factibilidade construída pelos pontos factíveis do Teorema Silva et al. (2012), 1 e 3.

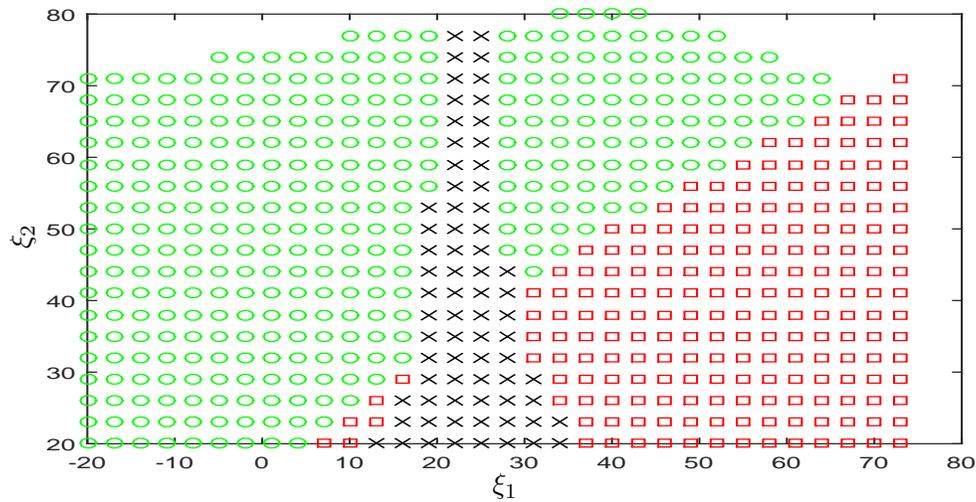
Pode-se observar que os pontos de factibilidade dos Teoremas 1 e 3 são mais significativos que do Teorema de Silva et al. (2012). Na Figura 8 mostra-se a região de factibilidade construída considerando a taxa de decaimento $\gamma = 0.98$. Nesse caso o Teorema de Silva et al. (2012) apresentou menos pontos de factibilidade que os conseguidos pelos Teoremas 2 e 4.

Em Silva et al. (2012) é apresentado um método adicionando um parâmetro para relaxar ainda mais as soluções. O parâmetro permite eliminar o limite de γ inerente ao Teorema anterior de Silva et al. (2012). Contudo, os resultados observados foram semelhantes aos apresentados anteriormente.

Figura 2 - Projeto do Controlador com Teoremas Silva et al. (2012) (x), 1 (x,□), 3 (x,□,○).



Fonte: Resultados do próprio autor

Figura 3 - Projeto do Controlador com Teoremas Silva et al. (2012) (x), 2 (x,□), 4 (x,□,○) com $\gamma = 0,98$.

Fonte: Resultados do próprio autor

Na sequência, são apresentados os resultados comparativos considerando o Lema da Projeção Recíproca.

2.3.1 Comparação entre Lema da Projeção Recíproca e Lema de Finsler

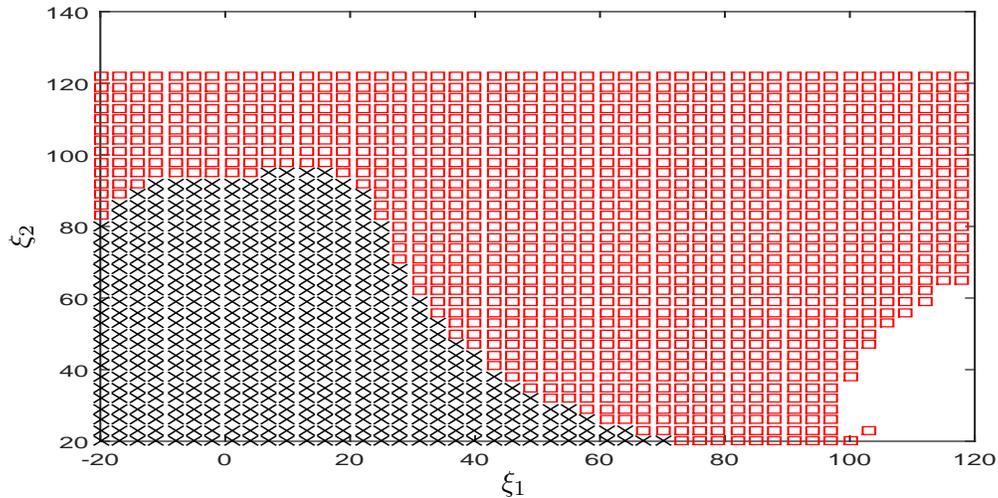
Em Silva et al. (2011a), foi utilizado o Lema da Projeção Recíproca para obter soluções menos conservadoras do que Faria et al. (2009c).

As figuras 4 e 5 mostram análise de factibilidade entre a estratégia usada em Silva et al. (2011a), Teoremas 3 e 4, sendo que os Teoremas 3 a 4 obtiveram maior região de

factibilidade que a estratégia usada em Silva et al. (2011a).

A Figura 4 representa a região de factibilidade constituída pelos pontos factíveis do Teorema Silva et al. (2011a) e Teorema 3.

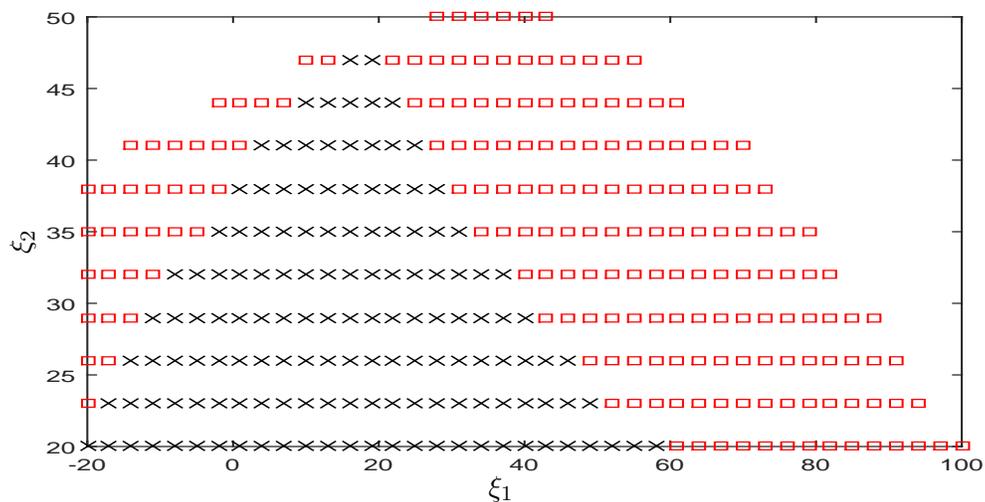
Figura 4 - Projeto do Controlador com Teorema Silva et al. (2011a) (x) e Teorema 3 (x,□).



Fonte: Resultados do próprio autor

A Figura 5 apresenta a região de factibilidade construída pelos pontos factíveis do Teorema Silva et al. (2011a) e Teorema 4 considerando uma taxa de decaimento $\gamma = 5$.

Figura 5 - Projeto do Controlador com Teorema Silva et al. (2011a) (x), Teorema 4 (x,□) com $\gamma = 5$.



Fonte: Resultados do próprio autor

Note-se que os métodos propostos apresentaram uma maior região de factibilidade do que os apresentados em Silva et al. (2011a).

2.4 Conclusões parciais

Nesta seção propôs-se uma metodologia utilizando variáveis multiplicadoras ou de folgas para projetar o controlador robusto considerando realimentação derivativa lançando. A nova estratégia permitiu relaxar e obter soluções menos conservadoras. O exemplo numérico mostrou resultados menos conservadores, quando comparado com métodos apresentados na literatura. A metodologia desenvolvida serve como via para a construção de uma estratégia diferente para projetar um controlador *gain scheduled*, usando realimentação derivativa, que será abordado no próximo capítulo.

3 CONTROLE GS USANDO REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA

Nesta seção, serão desenvolvidas estratégias de controle *gain scheduling* menos conservadoras, considerando os passos apresentado na seção anterior. As novas metodologias serão testadas e comparadas com a literatura existente. O estudo realizado representa um passo significativo na área de controle *gain scheduling* usando realimentação derivativa.

3.1 Projeto de controle GS para sistemas lineares usando realimentação derivativa

Considere o seguinte sistema linear contínuo:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t). \quad (35)$$

Nesse sistema $A(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são matrizes que representam a dinâmica do sistema, $x(t)$ o vetor de estados e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada de controle.

As matrizes $A(\alpha(t))$ e $B(\alpha(t))$ são representadas pela combinação convexa de N vértices conhecidos:

$$(A(\alpha(t)), B(\alpha(t))) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) (A_i, B_i), \alpha(t) \in \Lambda, \quad (36)$$

sendo $\alpha(t)$ um parâmetro variante do tempo pertencente ao simplex unitário.

$$\Lambda = \left\{ \alpha(t) \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1, \alpha_i(t) \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (37)$$

Ou de forma compacta:

$$\alpha(t) = [\alpha_1(t) \quad \alpha_2(t) \quad \dots \quad \alpha_N(t)]^T.$$

Suponha que a matriz do sistema $A(\alpha(t))$ seja não singular Abdelaziz e Valasek (2005b). O objetivo é encontrar matrizes constantes $K_{di} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, de modo que, a lei de

controle

$$u(t) = -K_d(\alpha(t))\dot{x}(t), \quad (38)$$

sendo

$$K_d(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) K_{di}, \alpha_i(t) \geq 0, i = 1, \dots, N, \quad (39)$$

estabilize o sistema (35). A seguinte matriz $(I + B(\alpha(t))K_d(\alpha(t)))$ é assumida de posto completo para que o sistema em malha fechada esteja bem definido. Então, substituindo (38) em (35), o sistema em malha fechada é obtido fazendo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha(t))x(t) - B(\alpha(t))K_d(\alpha(t))\dot{x}(t) \iff \\ \dot{x}(t) &= (I + B(\alpha(t))K_d(\alpha(t)))^{-1}A(\alpha(t))x(t). \end{aligned} \quad (40)$$

Em Llins et al. (2017) foram apresentadas LMIs que definem o projeto dos controladores via Lema 2.2. Esse lema garante a relaxação do conjunto de LMIs devido à desassociação de matrizes ou à redução do número de LMIs em projeto de controladores MOZELLI, PALHARES e AVELLAR (2004).

Usando as definições e os itens *i*), *iv*) do Lema 2.2, no Teorema 5 são propostas condições suficientes para que o sistema (40) seja estabilizável Llins et al. (2017).

Teorema 5. *Se existirem uma matriz simétrica positiva definida $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $Z_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que:*

$$\begin{bmatrix} A_i Q^T + Q A_i^T & G + Q A_i^T - Q^T - B_i Z_i \\ * & -Q^T - B_i Z_i - Q - Z_i^T B_i^T \end{bmatrix} < 0, \quad (41)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

$$\begin{bmatrix} A_i Q^T + A_j Q^T + Q A_i^T + Q A_j^T & 2G + Q A_i^T + Q A_j^T - 2Q^T - B_i Z_j - B_j Z_i \\ * & -2Q^T - B_i Z_j - B_j Z_i - 2Q - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T \end{bmatrix} < 0, \quad (42)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N,$$

então o sistema (40) é estabilizável e as matrizes dos vértices do controlador podem ser dadas por:

$$K_{di} = Z_i Q^{-T}. \quad (43)$$

Prova: Vide em Llins et al. (2017). ■

Continuando a mesma linha de pesquisa, porém, considerando a busca de soluções menos conservadoras, desenvolveu-se uma nova metodologia utilizando o Lema 2.2.

A análise da função de Lyapunov (44) permite projetar o controlador que garanta a estabilidade assintótica para o sistema (40):

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= x(t)^T P x(t) > 0, \forall x(t) \neq 0 \implies P = P^T > 0, P \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) < 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Teorema 6. Considerando A_i invertível, se a matriz simétrica definida positiva Q existe, juntamente com as matrizes Z_i , X_1 e X_2 que satisfazem as seguintes desigualdades matriciais:

$$\begin{bmatrix} A_i X_1^T + X_1 A_i^T + A_i Z_i^T B_i^T + B_i Z_i A_i^T & * \\ Q + X_2 A_i^T - X_1^T & -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad (45)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{bmatrix} ((2A_i + A_j)X_1^T + X_1(2A_i^T + A_j^T) + A_i Z_i^T B_j^T + A_i Z_j^T B_i^T + & * \\ A_j Z_i^T B_i^T + B_i Z_i A_j^T + B_i Z_j A_i^T + B_j Z_i A_i^T) & \\ 3Q + X_2(2A_i^T + A_j^T) - 3X_1^T & -3X_2 - 3X_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad (46)$$

$$i \neq j, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\begin{bmatrix} ((2A_i + 2A_j + 2A_k)X_1^T + X_1(2A_i^T + 2A_j^T + 2A_k^T) + A_i Z_j^T B_k^T + & * \\ A_i Z_k^T B_j^T + A_j Z_i^T B_k^T + A_j Z_k^T B_i^T + A_k Z_i^T B_j^T + A_k Z_j^T B_i^T + \\ B_i Z_j A_k^T + B_i Z_k A_j^T + B_j Z_i A_k^T + B_j Z_k A_i^T + B_k Z_i A_j^T + \\ B_k Z_j A_i^T) & \\ Q + X_2(2A_i^T + 2A_j^T + 2A_k^T) - X_1^T & -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad (47)$$

$$i \neq j, j \neq k, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2, \dots, N,$$

então o sistema (40) é assintoticamente estável dado pela matriz obtida em (48).

$$K_{di} = Z_i Q^{-1}. \quad (48)$$

Prova: Para simplificar nas demonstrações utilizou-se a seguinte notação $\alpha(t) = \alpha$. Agora, suponha que as condições (45), (46) e (47) sejam factíveis. Multiplicando-as por $\alpha_i^3 > 0$, $\alpha_i^2\alpha_j > 0$ e $\alpha_i\alpha_j\alpha_k > 0$, somando por $i = 1$ até $i = N$, $i = 1$ e $i \neq j$ até $i, j = N$, $i = 1$ e $i < j$ e $j < k$ até $i, j, k = N$, considerando as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \alpha_i^3 + 3 \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N \alpha_i^2 \alpha_j + \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{i < j}^N \alpha_j \sum_{j < k}^N \alpha_k = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^3, \\ & \sum_{i=1}^N \alpha_i^3 H_i L + \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N \alpha_i^2 \alpha_j (H_i L + H_i L + H_j L) + \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{i < j}^N \alpha_j \sum_{j < k}^N \alpha_k (H_i L + H_j L + H_k L) \\ & \hspace{25em} = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^3 (H_i L), \\ & \sum_{i=1}^N \alpha_i^3 H_i T_i \Upsilon_i + \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N \alpha_i^2 \alpha_j (H_i T_i \Upsilon_j + H_i T_j \Upsilon_i + H_j T_i \Upsilon_i) + \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{i < j}^N \alpha_j \sum_{j < k}^N \alpha_k (H_i T_j \Upsilon_k + \\ & \hspace{10em} H_i T_k \Upsilon_j + H_j T_i \Upsilon_k + H_j T_k \Upsilon_i + H_k T_i \Upsilon_j + H_k T_j \Upsilon_i) = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^3 (H_i T_i \Upsilon_i), \end{aligned}$$

Sabendo que $\sum_{i=1}^N \alpha_i H_i = H(\alpha)$ e aplicando, em alguns casos, a propriedade definida em (37), obteve-se

$$\left[\begin{array}{cc} A(\alpha)X_1^T + X_1A^T(\alpha) + A(\alpha)Z^T(\alpha)B^T(\alpha) + B(\alpha)Z(\alpha)A^T(\alpha) & * \\ Q + X_2A^T(\alpha) - X_1^T & -X_2 - X_2^T \end{array} \right] < 0. \quad (49)$$

O restante da demonstração segue diretamente da demonstração do Teorema 1. ■

3.1.1 Projeto do Controlador: taxa de decaimento γ

O Teorema 7 é proposto para garantir a estabilidade assintótica do sistema (40) e melhorar o desempenho da resposta transitória. Baseia-se no teorema da taxa de decaimento caracterizada por Llin et al. (2017).

Usando as definições e os itens *i*), *iv*) do Lema 2.2, no Teorema 7 são propostas condições suficientes para que o sistema (40) seja estabilizável com taxa de decaimento $\gamma > 0$.

Teorema 7. Se existirem uma matriz simétrica positiva definida $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, juntamente com as matrizes $Z_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que:

$$\begin{bmatrix} 2\gamma G + A_i Q^T + Q A_i^T & G + Q A_i^T - Q^T - B_i Z_i \\ * & -Q^T - B_i Z_i - Q - Z_i^T B_i^T \end{bmatrix} < 0, \quad (50)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

$$\begin{bmatrix} 4\gamma G + A_i Q^T + A_j Q^T + Q A_i^T + Q A_j^T & 2G + Q A_i^T + Q A_j^T - 2Q^T - B_i Z_j - B_j Z_i \\ * & -2Q^T - B_i Z_j - B_j Z_i - 2Q - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T \end{bmatrix} < 0, \quad (51)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N.$$

então o sistema (40) é estabilizável, com taxa de decaimento maior ou igual à γ , e as matrizes dos vértices do controlador podem ser dadas por:

$$K_{d_i} = Z_i Q^{-T}. \quad (52)$$

Prova: Vide em Llins et al. (2017). ■

Mantendo a mesma linha de pesquisa com objetivo de diminuir o conservadorismo das soluções, propõe-se uma metodologia diferente utilizando o Lema 2.2.

Teorema 8. Considerando A_i invertível, $\gamma > 0$, se a matriz simétrica definida positiva Q existe, juntamente com as matrizes Z_i , X_1 e X_2 que satisfazem as seguintes desigualdades:

$$\begin{bmatrix} ((A_i X_1^T + X_1 A_i^T + A_i Z_i^T B_i^T + B_i Z_i A_i^T + 2\gamma Q + 2\gamma Z_i^T B_i^T + 2\gamma B_i Z_i) & * & * \\ Q + X_2 A_i^T - X_1^T & -X_2 - X_2^T & * \\ Z_i^T B_i^T & 0_{n \times n} & \frac{-Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (53)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\left[\begin{array}{ccc}
((2A_i + A_j)X_1^T + X_1(2A_i^T + A_j^T) + A_i Z_i^T B_j^T + & * & * \\
A_i Z_j^T B_i^T + A_j Z_i^T B_i^T + B_i Z_i A_j^T + B_i Z_j A_i^T + & & \\
B_j Z_i A_i^T + 6\gamma Q + 2\gamma(Z_i^T B_i^T + Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) + & & \\
2\gamma(B_i Z_i + B_i Z_j + B_j Z_i)) & & \\
3Q + X_2(2A_i^T + A_j^T) - 3X_1^T & -3X_2 - 3X_2^T & * \\
Z_i^T B_i^T + Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T & 0_{n \times n} & \frac{-3Q}{2\gamma}
\end{array} \right] < 0,$$

(54)

$$i \neq j, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\left[\begin{array}{ccc}
((2A_i + 2A_j + 2A_k)X_1^T + X_1(2A_i^T + 2A_j^T + 2A_k^T) & * & * \\
+ A_i Z_j^T B_k^T + A_i Z_k^T B_j^T + A_j Z_i^T B_k^T + A_j Z_k^T B_i^T + & & \\
A_k Z_i^T B_j^T + A_k Z_j^T B_i^T + B_i Z_j A_k^T + B_i Z_k A_j^T + & & \\
B_j Z_i A_k^T + B_j Z_k A_i^T + B_k Z_i A_j^T + B_k Z_j A_i^T + \gamma Q + & & \\
2\gamma(Z_i^T B_j^T + Z_i^T B_k^T + Z_j^T B_i^T + Z_j^T B_k^T + Z_k^T B_i^T + Z_k^T B_j^T) + & & \\
2\gamma(B_i Z_j + B_i Z_k + B_j Z_i + B_j Z_k + B_k Z_i + B_k Z_j)) & & \\
Q + X_2(2A_i^T + 2A_j^T + 2A_k^T) - X_1^T & -X_2 - X_2^T & * \\
Z_i^T B_j^T + Z_i^T B_k^T + Z_j^T B_i^T + Z_j^T B_k^T + Z_k^T B_i^T + Z_k^T B_j^T & 0_{n \times n} & \frac{-Q}{2\gamma}
\end{array} \right] < 0,$$

(55)

$$i \neq j, j \neq k, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N,$$

então o sistema (40) é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual que γ , e os vértices do controlador são dados em (56).

$$K_{di} = Z_i Q^{-1}. \quad (56)$$

Prova: Usando as propriedades previamente definidas e considerando os seguintes vetores e matrizes:

$$\mathcal{D}(\alpha) = \left[\begin{array}{ccc}
(A(\alpha)Z^T(\alpha)B^T(\alpha) + B(\alpha)Z(\alpha)A^T(\alpha) + 2\gamma Z^T(\alpha)B^T(\alpha) & * & \\
+ 2\gamma Q + 2\gamma B(\alpha)Z + 2\gamma B(\alpha)Z(\alpha)Q^{-1}Z^T B^T(\alpha)) & & \\
Q & 0_{n \times n} &
\end{array} \right], \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} A^T(\alpha) & -I_{n \times n} \end{bmatrix},$$

então, considerando $K_d(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i K_{di}$ a prova do teorema segue os mesmos passos apresentados no Teorema 2. \blacksquare

A metodologia propõe uma região de factibilidade maior construída a partir da inserção da variáveis multiplicadoras ou de folga. Na sequência, será utilizado a mesma concepção, mas tenta-se adicionar múltiplas variáveis extras, tratando-as como dependentes do parâmetro $\alpha(t)$.

3.1.2 Projeto de controle GS: estabilidade assintótica usando múltiplas variáveis extras

O Teorema 9 é proposto para garantir a estabilidade assintótica do sistema (40), reduzindo o grau de conservadorismo em comparação as proposições apresentadas anteriormente neste capítulo. A diminuição do conservadorismo foi alcançada utilizando um maior número de variáveis de folga.

Teorema 9. *Considerando A_i invertível, se a matriz simétrica definida positiva Q existe, juntamente com as matrizes Z_i , X_{1i} e X_{2i} que satisfazem as seguintes desigualdades:*

$$\begin{bmatrix} A_i X_{1i}^T + X_{1i} A_i^T + A_i Z_i^T B_i^T + B_i Z_i A_i^T & * \\ Q + X_{2i} A_i^T - X_{1i}^T & -X_{2i} - X_{2i}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (57)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{bmatrix} (A_i X_{1i}^T + A_i X_{1j}^T + A_j X_{1i}^T + X_{1i} A_i^T + X_{1i} A_j^T + X_{1j} A_i^T + A_i Z_i^T B_j^T + A_j Z_i^T B_i^T + B_i Z_i A_j^T + B_j Z_i A_i^T) & * \\ (3Q + X_{2i}^T A_i^T + X_{2i}^T A_j^T + X_{2j}^T A_i^T - 2X_{2i} - X_{2j} - 2X_{2i}^T - X_{2j}^T) & -2X_{2i} - X_{2j} - 2X_{2i}^T - X_{2j}^T \\ 2X_{1i}^T - X_{1j}^T & \end{bmatrix} < 0, \quad (58)$$

$$i \neq j, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\left[\begin{array}{cc}
\begin{array}{l}
(A_i X_{1j}^T + A_i X_{1k}^T + A_j X_{1i}^T + A_j X_{1k}^T + \\
A_k X_{1i}^T + A_k X_{1j}^T + X_{1i} A_j^T + X_{1i} A_k^T + \\
X_{1j} A_i^T + X_{1j} A_k^T + X_{1k} A_i^T + X_{1k} A_j^T + \\
A_i Z_j^T B_k^T + A_i Z_k^T B_j^T + A_j Z_i^T B_k^T + A_j Z_k^T B_i^T + \\
A_k Z_i^T B_j^T + A_k Z_j^T B_i^T + B_i Z_j A_k^T + B_i Z_k A_j^T + \\
B_j Z_i A_k^T + B_j Z_k A_i^T + B_k Z_i A_j^T + B_k Z_j A_i^T)
\end{array} & * \\
\\
\begin{array}{l}
Q + X_{2i} A_j^T + X_{2i} A_k^T + X_{2j} A_i^T + X_{2j} A_k^T + \\
X_{2k} A_i^T + X_{2k} A_j^T - X_1^T
\end{array} & \begin{array}{l}
-2X_{2i} - 2X_{2j} - 2X_{2k} - \\
2X_{2i}^T - 2X_{2j}^T - 2X_{2k}^T
\end{array}
\end{array} \right] < 0, \tag{59}$$

$$i \neq j, j \neq k, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N,$$

então o sistema (40) é assintoticamente estável e os vértices do controlador são dado pelas matrizes obtida em (60).

$$K_{di} = Z_i Q^{-1}. \tag{60}$$

Prova: Considerando as propriedades definidas previamente utilizando os seguintes vetores e matrizes

$$\mathcal{D}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) Z^T(\alpha) B^T(\alpha) + B(\alpha) Z(\alpha) A^T(\alpha) & * \\ Q & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} A^T(\alpha) & -I_{n \times n} \end{bmatrix},$$

então, considerando $K_d(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) K_{di}$ a prova deste teorema segue os mesmos passos apresentados no Teorema 1. ■

3.1.3 Projeto de controle GS: usando múltiplas variáveis e taxa de decaimento γ

O Teorema 10 é proposto para garantir a estabilidade assintótica do sistema (40) e melhorar o desempenho da resposta transitória e também adicionar variáveis de folga para reduzir o conservadorismo.

Teorema 10. Considerando A_i invertível, $\gamma > 0$, se a matriz simétrica definida positiva Q existe, juntamente com as matrizes Z_i , X_{1i} e X_{2i} que satisfazem as seguintes desigualdades matriciais:

$$\begin{bmatrix} (A_i X_{1i}^T + X_{1i} A_i^T + A_i Z_i^T B_i^T + B_i Z_i A_i^T + 2\gamma Q + 2\gamma Z_i^T B_i^T + 2\gamma B_i Z_i) & * & * \\ Q + X_{2i} A_i^T - X_{1i}^T & -X_{2i} - X_{2i}^T & * \\ Z_i^T B_i^T & 0_{n \times n} & -\frac{Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (61)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{bmatrix} (A_i X_{1i}^T + A_i X_{1j}^T + A_j X_{1i}^T + X_{1i} A_i^T + X_{1i} A_j^T + X_{1i} A_k^T + A_i Z_i^T B_j^T + A_i Z_j^T B_i^T + A_j Z_i^T B_i^T + B_i Z_i A_j^T + B_i Z_j A_i^T + B_j Z_i A_i^T + 6\gamma Q + 2\gamma(Z_i^T B_i^T + Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) + 2\gamma(B_i Z_i + B_i Z_j + B_j Z_i)) & * & * \\ 3Q + X_{2i} A_i^T + X_{2i} A_j^T + X_{2j} A_i^T - 2X_{1i}^T - 2X_{1j}^T & -2X_{2i} - X_{2j} - 2X_{2i}^T - X_{2j}^T & * \\ Z_i^T B_i^T + Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T & 0_{n \times n} & -\frac{3Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (62)$$

$$i \neq j, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\left[\begin{array}{ccc}
\begin{array}{l}
(A_i X_{1j}^T + A_i X_{1k}^T + A_j X_{1i}^T + A_j X_{1k}^T + \\
A_k X_{1i}^T + A_k X_{1j}^T + X_{1i} A_j^T + X_{1i} A_k^T + \\
X_{1j} A_i^T + X_{1j} A_k^T + X_{1k} A_i^T + X_{1k} A_j^T \\
+ A_i Z_j^T B_k^T + A_i Z_k^T B_j^T + A_j Z_i^T B_k^T + A_j Z_k^T B_i^T + \\
A_k Z_i^T B_j^T + A_k Z_j^T B_i^T + B_i Z_j A_k^T + B_i Z_k A_j^T + \\
B_j Z_i A_k^T + B_j Z_k A_i^T + B_k Z_i A_j^T + B_k Z_j A_i^T + \gamma Q + \\
2\gamma(Z_i^T B_j^T + Z_i^T B_k^T + Z_j^T B_i^T + Z_k^T B_i^T + Z_k^T B_j^T) + \\
2\gamma(B_i Z_j + B_i Z_k + B_j Z_i + B_j Z_k + B_k Z_i + B_k Z_j)
\end{array} & * & * \\
\begin{array}{l}
Q + X_{2i} A_j^T + X_{2i} A_k^T + X_{2j} A_i^T + \\
X_{2j} A_k^T + X_{2k} A_i^T + X_{2k} A_j^T - 2X_{1i}^T - \\
2X_{1j}^T - 2X_{1k}^T
\end{array} & \begin{array}{l}
-2X_{2i} - 2X_{2j} - \\
2X_{2k} - 2X_{2i}^T - \\
2X_{2j}^T - 2X_{2k}^T
\end{array} & * \\
Z_i^T B_j^T + Z_i^T B_k^T + Z_j^T B_i^T + Z_j^T B_k^T + Z_k^T B_i^T + Z_k^T B_j^T & 0_{n \times n} & \frac{-Q}{2\gamma}
\end{array} \right] < 0, \tag{63}$$

$$i \neq j, j \neq k, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N,$$

então o sistema (40) é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a γ , e os vértices do controlador são dados por (64).

$$K_{di} = Z_i Q^{-1}. \tag{64}$$

Prova: Usando as propriedades previamente definidas e considerando os seguintes vetores e matrizes:

$$\mathcal{D}(\alpha) = \left[\begin{array}{ccc}
(A(\alpha) Z^T(\alpha) B^T(\alpha) + B(\alpha) Z A^T(\alpha) + 2\gamma Z^T(\alpha) B^T(\alpha) & * & \\
+ 2\gamma Q + 2\gamma B(\alpha) Z + 2\gamma B(\alpha) Z Q^{-1} Z^T(\alpha) B^T(\alpha) & & \\
Q & & 0_{n \times n}
\end{array} \right], \quad \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} A^T(\alpha) & -I_{n \times n} \end{bmatrix},$$

então, a prova do teorema segue os mesmos passos apresentados no Teorema 2. \blacksquare

Nesta subseção, desenvolveu-se uma teoria de sistema de controle para diminuir o conservadorismo. Existem vários métodos de transformação que podem prover resultados interessantes quanto ao número de soluções factíveis. O Lema da Projeção Recíproca permite adicionar variáveis de folga para o relaxamento das soluções. Essa ferramenta será utilizada para elaborar uma nova metodologia.

3.2 Projeto de controle GS usando realimentação derivativa: Lema da Projeção Recíproca

Nesta subseção, procura-se uma solução para o problema de realimentação derivativa com controladores GS objetivando-se ampliar a área de factibilidade em relação a outras metodologias já existentes na literatura. Emprega-se o Lema da Projeção Recíproca como ferramenta útil de inserção variáveis de folga para busca de resultados interessantes que permitam realizar um análise comparativo de factibilidade com outras metodologias.

O objetivo é garantir um controlador que assegure a estabilidade do sistema descrito em (40) para cada ponto de operação. Na determinação das LMIs para projetar os controladores foi necessário utilizar o Lema 3.1.

Lema 3.1. (*Lema da Projeção Recíproca*) Sendo Y definida positiva,

$$\Psi + S + S^T < 0,$$

A LMI abaixo é factível em relação a W ,

$$\begin{bmatrix} \Psi + Y - (W + W^T) & S^T + W^T \\ S + W & -Y \end{bmatrix} < 0,$$

Prova: Vide em Apkarian, Tuan e Bernussou (2001). ■

O Lema 3.1 facilita uma expansão no espaço das dimensões tanto em termos de restrições como de variáveis Apkarian, Tuan e Bernussou (2001), permitindo uma flexibilização das soluções.

3.2.1 Projeto de controle GS com condição de estabilidade

Utilizado o Lema 3.1, propõe-se o seguinte teorema baseado no teorema apresentado em Silva et al. (2011a), para garantir a estabilidade assintótica do sistema (40).

Teorema 11. Considerando que $\tilde{A}_i = A_i^{-1}$, se existirem uma matriz simétrica definida positiva P , as matrizes Z_i e G satisfazendo as seguintes restrições:

$$\begin{bmatrix} -(G^T + G) & * & * \\ \tilde{A}_i G + \tilde{A}_i B_i Z_i + P & -P & * \\ G & 0 & -P \end{bmatrix} < 0, \quad (65)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{bmatrix} -3(G^T + G) & * & * \\ \Lambda & -3P & * \\ 3G & 0 & -3P \end{bmatrix} < 0, \quad (66)$$

$$\Lambda = (2\tilde{A}_i + \tilde{A}_j)G + \tilde{A}_j B_i Z_i + \tilde{A}_i B_j Z_i + \tilde{A}_i B_i Z_j + 3P.$$

$$i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\begin{bmatrix} -6(G^T + G) & * & * \\ \Gamma & -6P & * \\ 6G & 0 & -6P \end{bmatrix} < 0, \quad (67)$$

$$\Gamma = (2\tilde{A}_i + 2\tilde{A}_j + 2\tilde{A}_k)G + \tilde{A}_i B_j Z_k + \tilde{A}_i B_k Z_j + \tilde{A}_j B_i Z_k + \tilde{A}_j B_k Z_i + \tilde{A}_k B_i Z_j + \tilde{A}_k B_j Z_i + 6P.$$

$$i \neq j, j \neq k, i, j, k = 1, 2, \dots, N,$$

então o sistema (40) é assintoticamente estável com as matrizes de vértices dos controladores obtidas em (68).

$$K_{di} = Z_i G^{-1}. \quad (68)$$

Prova: Suponha que as condições (65), (66) e (67) sejam factíveis. Utilizando as propriedades prévias que definem os polinômios em termos dependentes do parâmetro. Multiplicando (65), (66) e (67)s por $\alpha_i^3 > 0$, $\alpha_i^2 \alpha_j > 0$ e $\alpha_i \alpha_j \alpha_k > 0$ e somando por $i = 1$ até $i = N$, $i = 1$ e $i \neq j$ até $i, j = N$, $i = 1$ e $i < j$ e $j < k$ até $i, j, k = N$, obteve-se

$$\begin{bmatrix} -(G^T + G) & * & * \\ \tilde{A}(\alpha)G + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)Z(\alpha) + P & -P & * \\ G & 0 & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (69)$$

A equivalência $Z(\alpha) = K(\alpha)G$ e usando a forma dual $\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K(\alpha) \rightarrow (\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K(\alpha))^T$, aplicando o complemento de Schur Boyd et al. (1994) em (69), obteve-se

$$\begin{bmatrix} G^T P^{-1} G - (G^T + G) & * \\ (\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K(\alpha))^T G + P & -P \end{bmatrix} < 0, \quad (70)$$

substituindo $G = W^{-1}$ e $P^{-1} = Q$ tem-se

$$\begin{bmatrix} W^{-T} Q W^{-1} - (W^{-T} + W^{-1}) & * \\ (\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K_d(\alpha))^T W^{-1} + P & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (71)$$

Multiplicando a esquerda e direita por $\text{diag}(W^T, I)$ e $\text{diag}(W, I)$, respectivamente obteve-se

$$\begin{bmatrix} Q - (W + W^T) & * \\ (\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K_d(\alpha))^T + PW & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (72)$$

Agora, substituindo $P = Q^{-1}$, multiplicando a esquerda e direita, respectivamente, por $\text{diag}(I, Q)$ e $\text{diag}(I, Q)$ tem-se

$$\begin{bmatrix} Q - (W + W^T) & * \\ Q(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K_d(\alpha))^T + W & -Q \end{bmatrix} < 0. \quad (73)$$

Aplicando o Lema 3.1, definindo como $\Psi = 0_{n \times n}$, $Y = Q$ e $S = Q(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K_d(\alpha))^T$, chega-se a seguinte restrição

$$\tilde{A}(\alpha)(I + B(\alpha)K_d(\alpha))Q + Q(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^T \tilde{A}^T < 0. \quad (74)$$

Considerando $\tilde{A}(\alpha) = A^{-1}(\alpha)$ e $\tilde{A}(\alpha)^T = A^{-T}(\alpha)$. Multiplicando a esquerda por $A(\alpha)$ e direita por $A^T(\alpha)$ tem-se

$$(I + B(\alpha)K_d(\alpha))QA^T(\alpha) + A(\alpha)Q(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^T < 0, \quad (75)$$

substituindo $Q = P^{-1}$ e multiplicando a esquerda e direita por $P(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-1}$ e $(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-T}P$, respectivamente obteve-se a seguinte desigualdade

$$A^T(\alpha)(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-T}P + P(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-1}A(\alpha) < 0. \quad (76)$$

Multiplicando a esquerda por $x^T(t)$ e a direita por $x(t)$, tem-se

$$x^T(t)A^T(\alpha)(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-T}Px(t) + x^T(t)P(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-1}A(\alpha)x(t) < 0. \quad (77)$$

Considerando (40) em malha fechada e substituindo, tem-se

$$\dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) < 0, \quad (78)$$

representando a derivada da função quadrática de Lyapunov, que integrando chega-se a desigualdade dada em (79)

$$x^T(t)Px(t) > 0, \quad (79)$$

para todo $x(t) \neq 0$, é assim, $P = P^T > 0$. Então está demonstrado o Teorema 11. ■

3.2.2 Projeto de controle GS com condição de estabilidade considerando taxa de decaimento

Em busca de uma resposta transitória mais rápida considerou-se um valor constante real $\gamma > 0$, que impõe uma limitante inferior à taxa de decaimento do sistema (40), conforme retratado na Figura 1. As condições de síntese para o controlador, levando em consideração esta imposição, derivadas segundo o uso do Lema da Projeção Recíproca são apresentadas no Teorema 12.

Teorema 12. *Se um valor constante real de $\gamma > 0$ e considerando que $\tilde{A}_i = A_i^{-1}$, se existirem uma matriz simétrica definida positiva P , as matrizes Z_i e G satisfazendo as seguintes restrições:*

$$\begin{bmatrix} -(G^T + G) & * & * & * \\ \tilde{A}_i G + \tilde{A}_i B_i Z_i + P & -P & * & * \\ \tilde{A}_i G + \tilde{A}_i B_i Z_i & 0 & -\frac{P}{2\gamma} & * \\ G & 0 & 0 & -P \end{bmatrix} < 0, \quad (80)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{bmatrix} -3(G^T + G) & * & * & * \\ \Pi_1 & -3P & * & * \\ \Delta_1 & 0 & -3\frac{P}{2\gamma} & * \\ 3G & 0 & 0 & -3P \end{bmatrix} < 0, \quad (81)$$

$$\Pi_1 = (2\tilde{A}_i + \tilde{A}_j)G + \tilde{A}_j B_i Z_i + \tilde{A}_i B_j Z_i + \tilde{A}_i B_i Z_j + 3P.$$

$$\Delta_1 = (2\tilde{A}_i + \tilde{A}_j)G + \tilde{A}_j B_i Z_i + \tilde{A}_i B_j Z_i + \tilde{A}_i B_i Z_j.$$

$$i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\begin{bmatrix} -6(G^T + G) & * & * & * \\ \Pi_2 & -6P & * & * \\ \Delta_2 & 0 & -3\frac{P}{\gamma} & * \\ 6G & 0 & 0 & -6P \end{bmatrix} < 0,$$

$$\Pi_2 = (2\tilde{A}_i + 2\tilde{A}_j + 2\tilde{A}_k)G + \tilde{A}_i B_j Z_k + \tilde{A}_i B_k Z_j + \tilde{A}_j B_i Z_k + \tilde{A}_j B_k Z_i + \tilde{A}_k B_i Z_j + \tilde{A}_k B_j Z_i + 6P.$$

$$\Delta_2 = (2\tilde{A}_i + 2\tilde{A}_j + 2\tilde{A}_k)G + \tilde{A}_i B_j Z_k + \tilde{A}_i B_k Z_j + \tilde{A}_j B_i Z_k + \tilde{A}_j B_k Z_i + \tilde{A}_k B_i Z_j + \tilde{A}_k B_j Z_i.$$

$$i \neq j, j \neq k, i, j, k = 1, 2, \dots, N,$$

então o sistema (40) é assintoticamente estável dado as matrizes dos vértices do controlador obtidas em (82).

$$K_{di} = Z_i G^{-1}. \quad (82)$$

Prova: Suponha que as condições (80), (81), (12) sejam fatíveis. Multiplicando-as pela $\alpha_i^3 > 0$, $\alpha_i^2 \alpha_j > 0$ e $\alpha_i \alpha_j \alpha_k > 0$ e somando por $i = 1$ até $i = N$, $i = 1$ e $i \neq j$ até $i, j = N$, $i = 1$ e $i < j$ e $j < k$ até $i, j, k = N$ e usando as propriedades definidas anteriormente, além da definição (37) obteve-se

$$\begin{bmatrix} -(G^T + G) & * & * & * \\ \tilde{A}(\alpha)G + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)Z(\alpha) + P & -P & * & * \\ \tilde{A}(\alpha)G + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)Z(\alpha) & 0 & -\frac{P}{2\gamma} & * \\ G & 0 & 0 & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (83)$$

Transformando a equivalência $Z(\alpha) = K_d(\alpha)G$, usando a forma dual $\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K_d(\alpha) \rightarrow (\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K_d(\alpha))^T$ e aplicando o complemento de Schur Boyd et al. (1994), em (83) obteve-se

$$\begin{bmatrix} G^T P^{-1} G - (G^T + G) & * & * \\ (\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K_d(\alpha))^T G + P & -P & * \\ (\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K_d(\alpha))^T G & 0 & -\frac{P}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0. \quad (84)$$

Aplicando-se, novamente, o complemento de Schur Boyd et al. (1994), tem-se

$$\begin{bmatrix} (G^T(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K_d(\alpha))2\gamma P^{-1}(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K_d(\alpha))^T G + G^T P^{-1} G - (G^T + G)) & * \\ (\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K_d(\alpha))^T G + P & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (85)$$

Substituindo $G = W^{-1}$ e $P^{-1} = Q$, multiplicando a esquerda e direita por $\text{diag}(W^T, I)$ e $\text{diag}(W, I)$, respectivamente obteve-se

$$\begin{bmatrix} (\tilde{A}(\alpha)(I + B(\alpha)K_d(\alpha))2\gamma Q(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^T \tilde{A}^T(\alpha) + Q - (W^{-T} + W^{-1})) & * \\ (\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K_d(\alpha))^T + Q^{-1}W & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (86)$$

Substituindo $Q^{-1} = P$, e multiplicando a esquerda e direita por $\text{diag}(I, Q)$ e $\text{diag}(I, Q)$, respectivamente tem-se

$$\begin{bmatrix} (\tilde{A}(\alpha)(I + B(\alpha)K_d(\alpha))2\gamma Q(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^T \tilde{A}^T(\alpha) + & * \\ Q - (W^{-T} + W^{-1}) & * \\ Q(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K_d(\alpha))^T + W & -Q \end{bmatrix} < 0. \quad (87)$$

Aplicando o Lema 3.1, definindo como $\Psi = \tilde{A}(\alpha)(I + B(\alpha)K_d(\alpha))2\gamma Q(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^T \tilde{A}^T(\alpha)$, $Y = Q$ e $S = Q(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)B(\alpha)K_d(\alpha))^T$, chega-se a seguinte restrição

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\alpha)(I + B(\alpha)K_d(\alpha))Q + Q(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^T \tilde{A}^T(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)(I + B(\alpha)K_d(\alpha))2\gamma Q \\ (I + B(\alpha)K_d(\alpha))^T \tilde{A}^T(\alpha) < 0, \end{aligned} \quad (88)$$

considerando $\tilde{A}(\alpha) = A^{-1}(\alpha)$ e $\tilde{A}(\alpha)^T = A^{-T}(\alpha)$. Multiplicando a esquerda por $A(\alpha)$ e direita por $A^T(\alpha)$ tem-se

$$\begin{aligned} (I + B(\alpha)K_d(\alpha))QA^T(\alpha) + A(\alpha)Q(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^T + (I + B(\alpha)K_d(\alpha))2\gamma Q \\ (I + B(\alpha)K_d(\alpha))^T < 0. \end{aligned} \quad (89)$$

Substituindo $Q = P^{-1}$ e multiplicando a esquerda e direita por $P(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-1}$ e $(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-T}P$, respectivamente obteve-se a seguinte desigualdade

$$A^T(\alpha)(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-T}P + P(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-1}A(\alpha) + 2\gamma P < 0. \quad (90)$$

Multiplicando a esquerda por $x^T(t)$ e a direita por $x(t)$, tem-se

$$\begin{aligned} x^T(t)A^T(\alpha)(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-T}Px(t) + x^T(t)P(I + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-1}A(\alpha)x(t) + \\ 2\gamma x^T(t)Px(t) < 0. \end{aligned} \quad (91)$$

Considerando a equação (40), tem-se

$$\dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) < -2\gamma x^T(t)Px(t), \quad (92)$$

representando a derivada da função quadrática de Lyapunov menor que um limite superior tendo em conta $\gamma > 0$. Sabe-se que a desigualdade (93) corresponde a função quadrática de Lyapunov,

$$x^T(t)Px(t) > 0, \quad (93)$$

para todo $x(t) \neq 0$, $P = P^T > 0$. Então está demonstrado o Teorema 12. \blacksquare

As metodologias propostas permitem matematicamente representar uma flexibilização do sistema de controle com o acréscimo das variáveis multiplicadoras ou folga. Na próxima seção a teoria proposta será testada e serão analisados os resultados estabelecendo uma comparação com trabalhos existentes na literatura.

3.3 Construção do ganho do controlador dependente do parâmetro $K(\alpha(t))$

A composição do controlador *gain scheduled* $K(\alpha(t))$ é direta quando o problema em questão apresenta apenas um parâmetro $\alpha(t)$ variante no tempo. Para dois ou mais parâmetros variantes no tempo a composição de $K(\alpha(t))$ apresenta uma certa complexidade.

As metodologias apresentadas anteriormente contribuem no projeto do ganho do controlador, mas as matrizes de ganhos são obtidas segundo a dinâmica do sistema considerando o regime de operação entre os limites estabelecidos para os parâmetros variantes no tempo. A determinação do valor do ganho dependente do parâmetro $K(\alpha(t))$ torna-se dificultada pela quantidade de variáveis que influenciam o sistema. Na formulação do ganho $K(\alpha)$, existe uma estreita relação entre os parâmetros variantes no tempo, e os elementos que estão associados ao equacionamento do simplex unitário.

Nesta seção apresenta-se um estudo metodológico para sistemas dinâmicos sujeitos a dois parâmetros variantes, a partir do qual, pode-se realizar a composição do ganho $K(\alpha(t))$.

Considere o seguinte sistema dinâmico linear variante no tempo

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t). \quad (94)$$

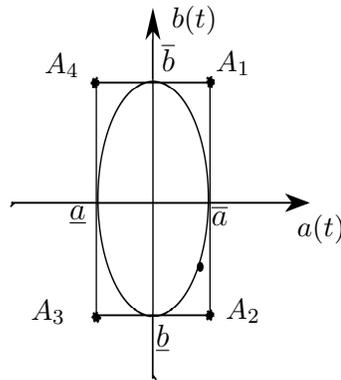
Supomos que $A(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são matrizes que representam a dinâmica do sistema e são sujeitas aos parâmetros $a(t)$ e $b(t)$ de limite inferior \underline{a} , \underline{b} e limite superior \bar{a} e \bar{b} , respectivamente, $x(t)$ é vetor de estados, e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é vetor de entrada. O número de parâmetros ($n = 2$) gera uma região convexa de 4 vértices (2^n), resultado da definição dos termos variantes dentro de um conjunto expressado através do simplex unitário como (37).

Sabe-se que para aplicar a estratégia de controle *GS* é necessário dispor da medição das variáveis variantes no tempo. Através das leituras de $\alpha(t)$ ao longo do tempo, pode-se calcular o controlador $K(\alpha(t))$ que garante a estabilidade do sistema, atualizando seus valores ao longo do tempo. Na Figura 6 é apresentada a representação convexa para um suposto trajeto elipsoidal formado pela medição de $\alpha(t)$ ao longo do tempo.

A partir de $\alpha(t)$ medido, representado por um ponto da elipse, pode-se fazer uma decomposição nos novos eixos, transversais ou diagonais, obtendo-se os valores $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$, como se mostra na Figura 7.

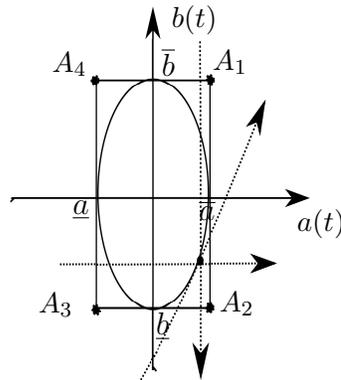
Nesse exemplo, a decomposição no eixo diagonal não será utilizada. A partir da

Figura 6 - Representação da região convexa.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 7 - Representação da trajetória na região convexa.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

definição (37), pode-se determinar o valor no ponto de operação. Baseado na Figura 7, utilizando-se a reta transversal horizontal, tem-se

$$A(\alpha(t)) = \alpha_1 p(t) A(\alpha(t))_{c1} + \alpha_2 p(t) A(\alpha(t))_{c2}, \quad (95)$$

sendo $A(\alpha(t))_{c1}$ e $A(\alpha(t))_{c2}$ os valores nos pontos extremos, calculados como

$$A(\alpha(t))_{c1} = \alpha_{3L}(t) A_3 + \alpha_{4L}(t) A_4, \quad A(\alpha(t))_{c2} = \alpha_{1L}(t) A_1 + \alpha_{2L}(t) A_2, \quad (96)$$

os valores dos termos $\alpha_{1L}(t)$, $\alpha_{2L}(t)$, $\alpha_{3L}(t)$ e $\alpha_{4L}(t)$ são medidos.

Substituindo (96) em (95), obtém-se

$$A(\alpha(t)) = \alpha_1 p(t) (\alpha_{3L}(t) A_3 + \alpha_{4L}(t) A_4) + \alpha_2 p(t) (\alpha_{1L}(t) A_1 + \alpha_{2L}(t) A_2), \quad (97)$$

sendo $\alpha_1 p(t)$ e $\alpha_2 p(t)$, os valores associados ao ponto de interesse que forma parte de um

simplex unitário. Multiplicando distributivamente,

$$A(\alpha(t)) = \alpha_2 p(t) \alpha_{1L}(t) A_1 + \alpha_2 p(t) \alpha_{2L}(t) A_2 + \alpha_1 p(t) \alpha_{3L}(t) A_3 + \alpha_1 p(t) \alpha_{4L}(t) A_4, \quad (98)$$

dado na expressão, temos que

$$\alpha_1(t) = \alpha_2 p(t) \alpha_{1L}(t), \quad \alpha_2(t) = \alpha_2 p(t) \alpha_{2L}(t), \quad \alpha_3(t) = \alpha_1 p(t) \alpha_{3L}(t), \quad \alpha_4(t) = \alpha_1 p(t) \alpha_{4L}(t),$$

esses valores representam o ganho variável nesse ponto de operação, fazendo a somatória da ponderação entre os parâmetros e os ganhos respectivos, determina-se

$$K(\alpha(t)) = \alpha_1(t) K_1 + \alpha_2(t) K_2 + \alpha_3(t) K_3 + \alpha_4(t) K_4.$$

3.4 Exemplo numérico: análise de factibilidade

Nesta seção pretende-se verificar a eficácia da nova metodologia proposta comparando com estratégias similares Llins et al. (2017).

Considere um sistema com as seguintes variações paramétricas de vértices do politopo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 21 & -98 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \xi_1 & -98 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

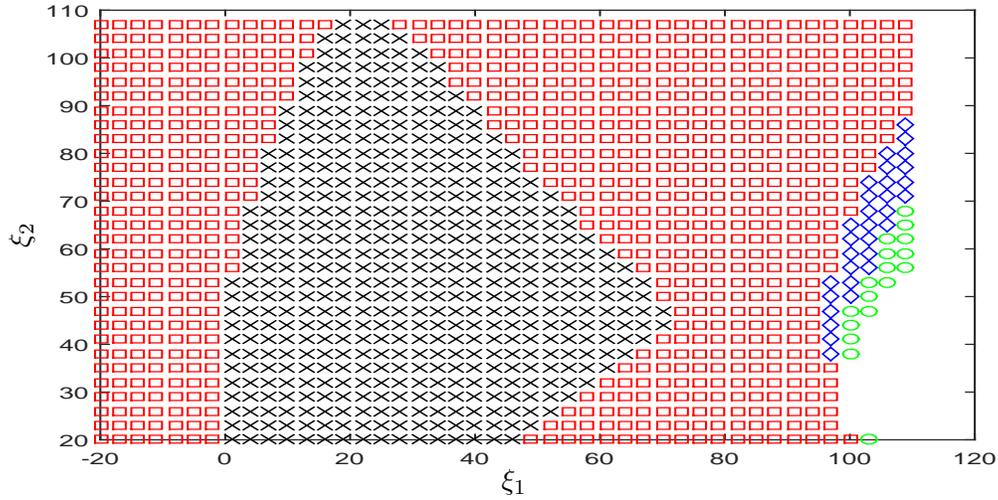
Considere uma variação paramétrica entre os intervalos $-20 \leq \xi_1 \leq 110$ e $20 \leq \xi_2 \leq 140$ com um passo de 3. A região de factibilidade foi construída para analisar e comparar a metodologias propostas nos teoremas desse capítulo.

A Figura 8 representa a região de factibilidade construída pelos pontos factíveis do Teoremas 5, 6, 9 e 11.

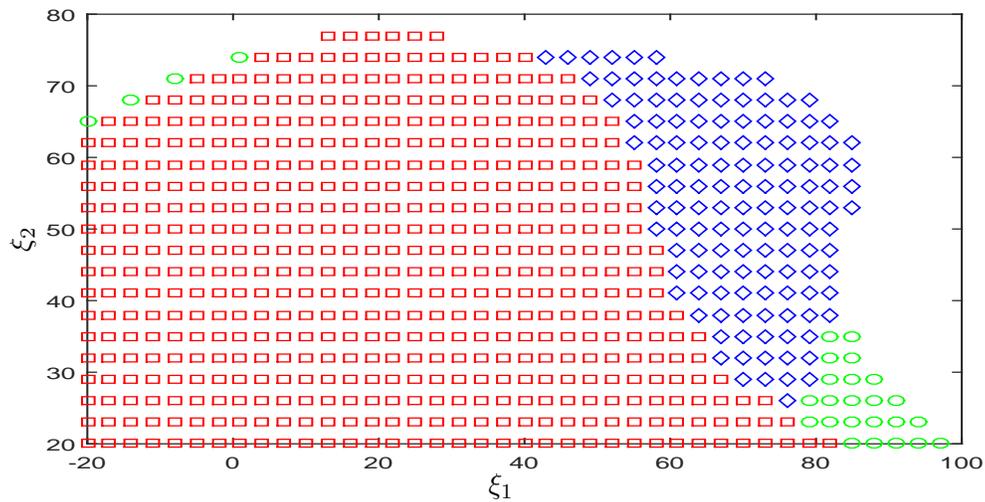
Observa-se que os resultados obtidos mostram como o Teorema 9 apresenta resultados mais significativos, encontrando um número maior de soluções factíveis que os outros teoremas propostos.

A Figura 9 representa a existência de controladores factíveis projetados usando os Teoremas 7, 8, 12 e 10, para um valor de $\gamma = 2$. Os resultado obtidos mostram que para valores pequenos de γ o Teorema 7 não consegue encontrar factibilidade, demonstrando ser, de fato, uma metodologia muito conservadora.

Figura 8 - Projeto do Controlador com Teoremas 5 (x), 6 (x, □), 11 (x, □, ◇) e 9 (x, □, ◇, ○).



Fonte: Resultados do próprio autor

Figura 9 - Projeto do Controlador com Teoremas 8 (□), 12 (□, ◇) e 10 (□, ◇, ○) com $\gamma = 2$.

Fonte: Resultados do próprio autor

3.5 Análise de factibilidade: *GS* considerando variáveis múltiplas versus *GS* e *LQR*

Nesta seção são expostos os resultados comparativos entre as duas estratégias *GS* considerando variáveis múltiplas, apresentada nas seções anteriores e *GS* anexando a técnica *LQR* como método de controle ótimo, estudado em Beteto (2019).

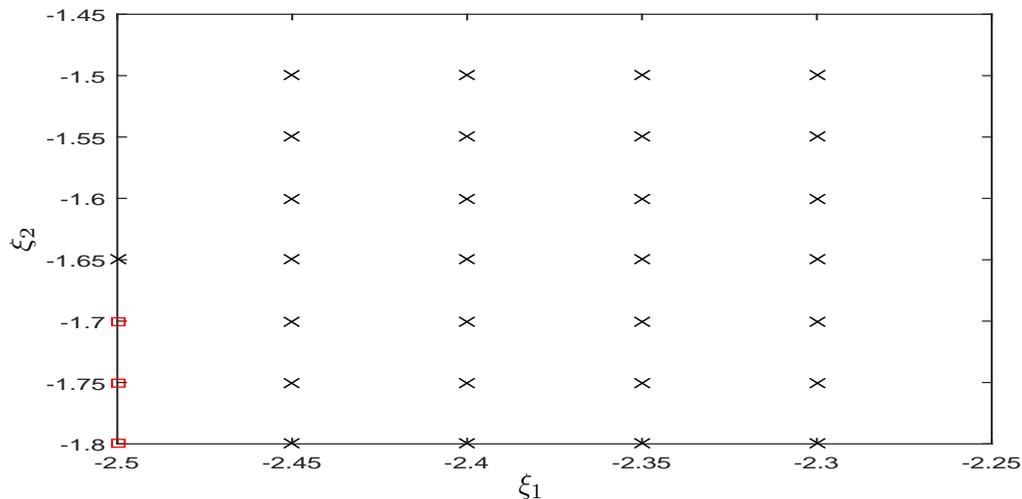
Suponha o seguinte sistema sujeito as variações paramétricas de vértices do politopo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 10 & -98 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \xi_1 & -10 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Considere uma variação paramétrica entre os intervalos $-2,55 \leq \xi_1 \leq -2,3$ e $-1,8 \leq \xi_2 \leq -1,3$ com um passo de 0,05. A região de factibilidade foi construída para analisar e comparar a metodologias propostas.

Figura 10 - Projeto do Controlador com Teoremas Beteto (2019) (x) e 9 (x, □).



Fonte: Resultados do próprio autor

A Figura 10 apresenta como a metodologia proposta no Teorema 9 supera a metodologia de Beteto (2019) levando-se em conta a quantidade de pontos factíveis na região de estudo. A análise dos resultados permite observar, como, nesse caso predomina o carácter restritivo de usar o controle LQR considerando realimentação da derivadas dos estados. Contudo, é importante ressaltar que esta análise não contempla uma comparação quanto ao desempenho dinâmico provido pelas técnicas de controle em questão.

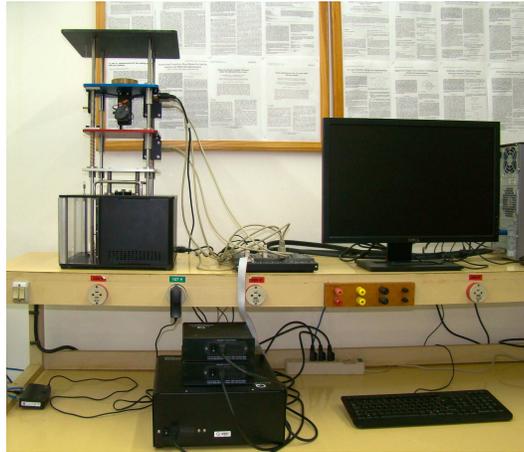
Esta seção permitiu estender os conhecimentos a outras técnicas direcionada sobre a mesma linha de pesquisa. As análises realizadas nesta seção foram úteis para ampliar nosso horizonte.

3.6 Implementação Prática

Nesta seção, a metodologia proposta é testada através da implementação prática de sistema de suspensão ativa pertencente ao LPC-FEIS-UNESP. Plota-se a resposta do sistema no tempo e o sinal de controle $u(t) = -K_d(\alpha(t))\dot{x}(t)$ para validar o desempenho do controle projetado.

O sistema de suspensão ativa utilizado, fabricado pela Quanser, pode ser visto na Figura 11.

Figura 11 - Sistema de suspensão ativa Quanser, pertencente ao LPC-FEIS-UNESP.

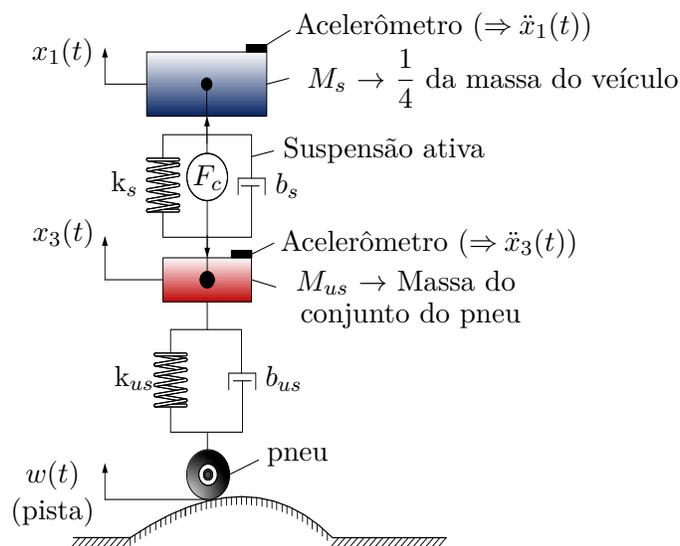


Fonte: Pertence ao LPC-FEIS-UNESP

Está constituído por um conjunto de duas massas, denominadas M_s e M_{us} . A massa M_s representa $\frac{1}{4}$ do corpo total do veículo e é suportada pela mola k_s e pelo amortecedor b_s . A massa M_{us} corresponde à massa do conjunto do pneu do veículo e é suportada pela mola k_{us} e pelo amortecedor b_{us} . Para atenuar as vibrações causadas por irregularidades na pista utiliza-se o sistema de suspensão ativa, representado por um motor (atuador) conectado entre as massas M_s e M_{us} , e controlado pela força F_c . Os valores dos parâmetros estão dispostos na Tabela 1.

O modelo esquemático da Figura 12 pode ser representado em espaços de estados, como

Figura 12 - Modelo esquemático do sistema de suspensão ativa.



Fonte: Oliveira et al. (2014)

segue:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-ks}{Ms} & \frac{-bs}{Ms} & 0 & \frac{bs}{Ms} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-ks}{Mus} & \frac{bs}{Mus} & \frac{-kus}{Mus} & \frac{-(bs+bus)}{Mus} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ms} \\ 0 \\ \frac{-1}{Mus} \end{bmatrix} u(t), \quad (99)$$

sendo $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ e $x_4(t) = \dot{x}_3(t)$, representando as velocidades respectivas de cada massa.

Tabela 1 - Parâmetros da suspensão ativa.

Parâmetros	Valor
M_s	2,45 (Kg)
M_{us}	1 (Kg)
K_s	900 (N/m)
k_{us}	2500 (N/m)
b_s	7,5 (Ns/m)
b_{us}	5 (Ns/m)

Fonte: Oliveira et al. (2014)

Na implementação o sinal de referência z_r foi escolhido para reproduzir uma onda quadrada de 0,02m de amplitude, frequência de $\frac{1}{3}$ Hz com largura de pulso de 50%. No intervalo de 0 a 12s o sistema encontra-se em malha aberta, de 12,01 a 30s o sistema encontra-se em malha fechada. O período de amostragem foi suficientemente pequeno e o controlador foi implementado por emulação. Neste ponto, ressalta-se que em malha fechada a lei de controle utilizada é dada por $u = -K_d(\alpha(t))\dot{x}$.

A variação paramétrica $\alpha(t)$ impõe a definição de um sistema representado pela combinação convexa de dois vértices, sendo que um representa o ganho do amplificador com 100% e o outro com 50%. Os valores dos elementos de $K_d(\alpha(t))$ ao longo do tempo são determinados pela ponderação dos ganhos projetados a partir dos termos em função do tempo. Tais termos são expressados através do *simplex unitário*:

$$\alpha_1(t) = \frac{\bar{a} - a(t)}{\bar{a} - \underline{a}}, \quad (100)$$

$$\alpha_2(t) = 1 - \alpha_1(t) = \frac{a(t) - \underline{a}}{\bar{a} - \underline{a}}, \quad (101)$$

sendo

$$a(t) = 0,5 + 0,5 * \text{sen}(2\pi 0,1t + \frac{\pi}{2}), \quad (102)$$

e a composição do controlador *scheduled*, é dado da seguinte forma

$$K_d(\alpha(t)) = \alpha_1(t)K_{d_1} + (1 - \alpha_1(t))K_{d_2}. \quad (103)$$

Portanto, para realizar o projeto de controle foram considerados os seguintes vértices do polítopo que foram construído pelos parâmetros do sistema dados na Tabela 1. É importante destacar que esses parâmetros possuem pequenas variações ao longo do tempo.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,347 & -3,061 & 0 & 3,061 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = A_1, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,408 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,204 \\ 0 \\ -0,5 \end{bmatrix}.$$

Para obtenção dos valores dos controladores as LMIs apresentadas no Teorema 6, obtendo-se :

$$K_{d_1} = \begin{bmatrix} 0,0450 & 0,0078 & 0,1549 & 0,0251 \end{bmatrix},$$

$$K_{d_2} = \begin{bmatrix} 0,0649 & 0,0145 & 0,3114 & 0,0469 \end{bmatrix}. \quad (104)$$

Pode-se observar que os valores dos ganhos são muito pequenos, e para este caso não representa valor significativo de sinal de controle. Como consequência, o comportamento da resposta transitória do sistema em malha fechada é similar que malha aberta. Na busca de resultados mais interessantes foi necessário aplicar o Teorema 8.

Utilizando as LMIs do Teorema 8 para $\gamma = 0,039$, obteve-se os valores do ganho do controlador:

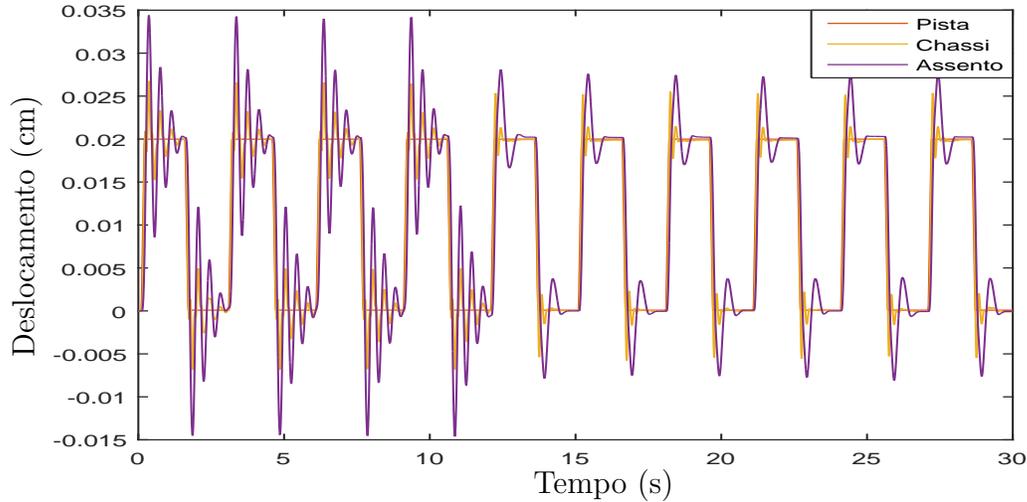
$$K_{d_1} = \begin{bmatrix} 39,1323 & 4,4591 & -33,9414 & -1,5370 \end{bmatrix},$$

$$K_{d_2} = \begin{bmatrix} 77,4840 & 8,8396 & -66,8834 & -3,0493 \end{bmatrix}, \quad (105)$$

os quais garantam a estabilidade do sistema com um tempo de acomodação menor que outros projetos implementados, como se mostra na Figura 13 e um aceitável valor do sinal de controle, mostrado na Figura 14, respeitando o valor de $39,4N$ de saturação imposto pelo equipamento para proteção do mesmo.

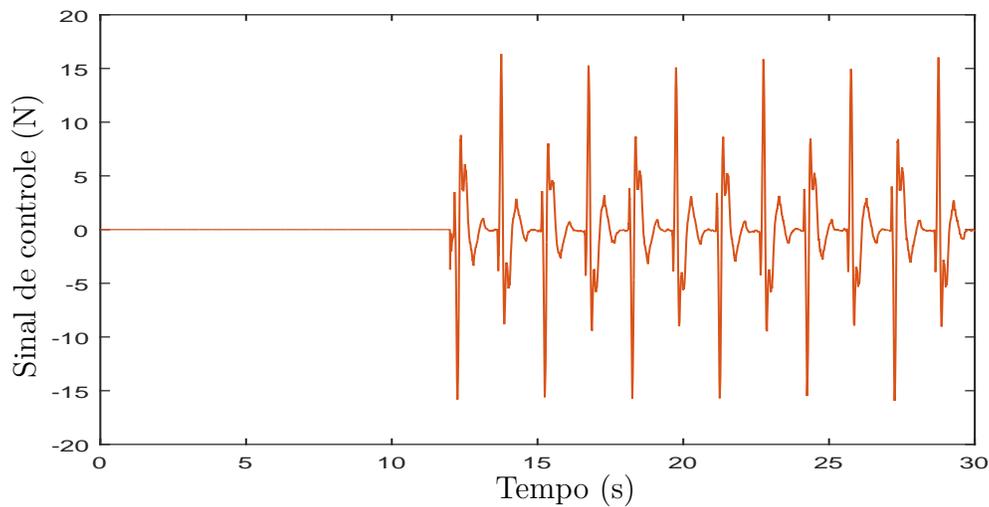
Resolvendo as LMIs apresentadas no Teorema 9, obteve-se os seguintes ganhos do

Figura 13 - Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s).



Fonte: Resultados do próprio autor

Figura 14 - Sinal de Controle.



Fonte: Resultados do próprio autor

controlador:

$$\begin{aligned} K_{d_1} &= \begin{bmatrix} 1383,0 & 1242,0 & -35168,0 & -698,0 \end{bmatrix}, \\ K_{d_2} &= \begin{bmatrix} 1383,0 & 1242,0 & -35169,0 & -698,0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (106)$$

Pode-se observar que os valores dos ganhos são elevados, que proporcionalmente geram valor de sinal de controle alto. Esse sinal foi limitado pelo saturador do equipamento. Por esta razão, foi necessário aplicar o Teorema 10, para buscar resultados que garantissem valores implementáveis que não sobrepasse o valor de saturação.

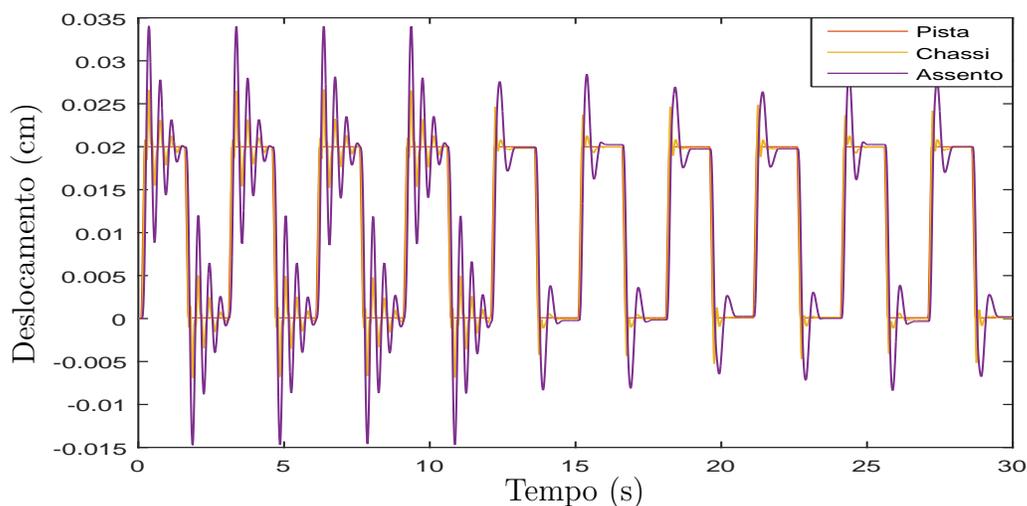
Aplicando as LMIs do Teorema 10 para $\gamma = 0,1$, obteve-se os valores do ganho do

controlador:

$$\begin{aligned} K_{d_1} &= \begin{bmatrix} 64,8974 & 3,0226 & -43,8010 & -1,2248 \end{bmatrix}, \\ K_{d_2} &= \begin{bmatrix} 67,1419 & 3,6032 & -51,6851 & -1,4351 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (107)$$

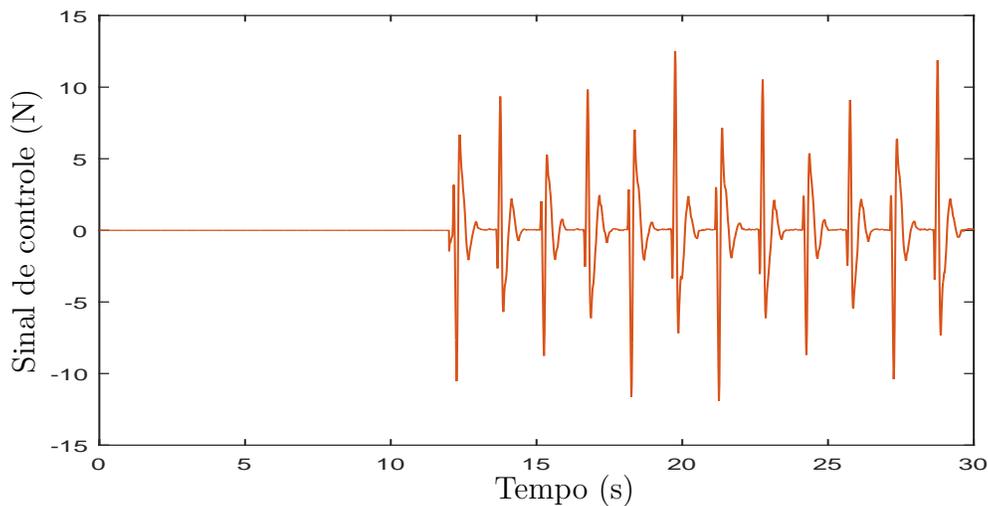
os quais sustentam a estabilidade do sistema com um tempo de acomodação menor e um adequado valor do sinal de controle, como mostram a Figura 15 e 16 respectivamente, em relação a outros projetos implementados.

Figura 15 - Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s).



Fonte: Resultados do próprio autor

Figura 16 - Sinal de Controle.



Fonte: Resultados do próprio autor

A Tabela 2 contém os valores dos ganhos do controlador obtidos mediante a solução

das LMIs dos Teoremas 11 e 12.

Tabela 2 - Ganhos do controlador aplicando metodologia GS.

Metodologia	K_{d_1}	K_{d_2}
Teorema 11	[2087,0 1492,0 -19240,0 -543,0]	[4657,0 3327,0 -42844,0 -1210,0]
Teorema 12 $\gamma = 4$	[201,0982 12,8208 -85,8875 -2,9045]	[345,5365 22,4207 -141,9291 -4,8999]
Teorema 12 $\gamma = 5$	[164,2614 8,0194 -32,2800 -1,5219]	[282,8266 142,975 -53,9581 -2,5936]

Fonte: Resultados do próprio autor

Nota-se que os ganhos do controlador adquiridos da Tabela 2, apresentaram valores de norma superiores que os teoremas projetados nesta seção. Como consequência, não forneceram respostas transitórias e sinais de controle de muito interesse comparado com resultados anteriores, mas satisfizeram o requisito de estabilidade, elemento fundamental de nosso estudo.

3.7 Conclusões parciais

Nesta seção foram propostas novas metodologias para projetar um controle *GS* considerando realimentação derivativa através de variáveis multiplicadoras. As novas estratégias permitiram relaxar as soluções do projeto. É importante destacar que os ganhos do controlador são obtidos sem a necessidade de inverter uma matriz literal, vantagem já expressada em Llins et al. (2017). O exemplo numérico possibilitou definir como determinação da taxa de decaimento na formulação influencia muito na factibilidade do sistema. No sistema de suspensão ativa foram implementados as metodologias expostas nesta seção, através dos resultados práticos obtidos, pode-se observar como o sistema em malha aberta é estável, embora apresente oscilações que possam afetar o conforto do motorista. Nota-se que o sistema em malha fechada diminuiu o número de oscilações e a amplitude do movimento do assento do motorista sem perder a estabilidade do sistema. O desenvolvimento teórico apresentado nesta seção é pilar fundamental da construção metodológica sobre sistemas *multi simplex* no capítulo 5.

4 CONTROLE GS USANDO REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS: CONDIÇÕES MAIS RELAXADAS

Neste capítulo, utiliza-se o procedimento desenvolvido no Capítulo 2 para conseguir novas estratégias de controle *gain scheduling* menos conservadoras usando realimentação de estados. Um exemplo numérico permitirá realizar uma comparação entre as novas metodologias com a literatura existente.

4.1 Projeto de controle GS para sistemas lineares usando realimentação de estados

Considere o seguinte sistema linear contínuo

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t). \quad (108)$$

Nesse sistema $A(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são matrizes que representam a dinâmica do sistema, $x(t)$ o vetor de estados e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada de controle .

As matrizes $A(\alpha(t))$ e $B(\alpha(t))$ são representadas pela combinação convexa com N vértices conhecidos

$$(A(\alpha(t)), B(\alpha(t))) = \sum_{i=1}^N \alpha(t)_i (A_i, B_i), \alpha \in \Lambda \quad (109)$$

sendo $\alpha(t)$ é um parâmetro variante do tempo pertencente ao simplex unitário.

O objetivo é encontrar uma matrizes constantes $K_e i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, de modo que, a lei de controle

$$u(t) = -K_e(\alpha(t))x(t), \quad (110)$$

sendo

$$K_e(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) K_e i, \alpha_i(t) \geq 0, i = 1, \dots, N, \quad (111)$$

estabilize o sistema (108). Então, substituindo (110) em (108) no sistema em malha

fechada, obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha(t))x(t) - B(\alpha(t))K_e(\alpha(t))x(t) \iff \\ \dot{x}(t) &= (A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K_e(\alpha(t)))x(t).\end{aligned}\quad (112)$$

Em Llins (2015) são propostas condições LMIs que permitem projetar os ganhos dos controladores considerando a análise de estabilidade a partir da existência da matriz de Lyapunov para o conjunto do sistema que satisfaz as condições (113) e (114).

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) > 0, \forall x(t) \neq 0, \quad (113)$$

$$\dot{V}(x(t)) < 0, \forall x(t) \neq 0. \quad (114)$$

Teorema 13. *Se existirem uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $j=1,2,\dots,N$, tais que:*

$$WA_j^T + A_jW - Z_j^T B_j^T - B_j Z_j < 0, \quad (115)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

$$WA_i^T + A_iW + WA_j^T + A_jW - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T - B_i Z_j - B_j Z_i < 0, \quad (116)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N$$

então a lei de controle através da realimentação de estado com parâmetro variante no tempo,

$$u(t) = -K_e(\alpha(t))x(t), \quad (117)$$

sendo

$$K_e(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))W^{-1}, \quad (118)$$

e

$$\begin{aligned}Z(\alpha(t)) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Z_j; \alpha_j(t) \geq 0, \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j &= 1; j = 1, 2, \dots, N,\end{aligned}\quad (119)$$

garante a estabilidade à malha fechada do sistema (112), por meio da matriz positiva definida $P = W^{-1}$.

Prova: Vide em Llins (2015). ■

A seguir, propõe-se uma metodologia utilizando o Lema 2.2 que permite, relaxar o conjunto de LMIs (115) e (116), para diminuir o conservadorismo das soluções.

Teorema 14. *Se existirem a matriz simétrica definida positiva Q , juntamente com as matrizes Z_i , X_1 e X_2 que satisfazem as seguintes desigualdades:*

$$\begin{bmatrix} A_i X_1^T + X_1 A_i^T - Z_i^T B_i^T - B_i Z_i & * \\ Q + X_2 A_i^T - X_1^T & -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad (120)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{bmatrix} (A_i + A_j) X_1^T + X_1 (A_i^T + A_j^T) - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T & * \\ -B_i Z_j - B_j Z_i & \\ \\ 2Q + X_2 (A_i^T + A_j^T) - 2X_1^T & -2X_2 - 2X_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad (121)$$

$$i \neq j, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N,$$

então o sistema (112) é assintoticamente estável dado pela matriz obtida em (122).

$$K_{ei} = Z_i Q^{-1}. \quad (122)$$

Prova: Para simplificar nas demonstrações utilizamos a seguinte notação $\alpha(t) = \alpha$. Suponha que as condições (120) e (121) são factíveis. Multiplicando (120) por $\alpha_j^2(t) > 0$ e (121) por $\alpha_i(t)\alpha_j(t)$ e, somando em j , de $j = 1$ até $j = N$ e i , de $i = 1$ até $i = N - 1$ e em j , de $j = i + 1$ até $j = N$ respectivamente cada termo da matriz, considerando que

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j H_i R_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 H_j R_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (H_i R_j + H_j R_i).$$

e, adicionalmente, lembrando que $\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1$ e $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2 X_1 A_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (X_1 A_i^T + X_1 A_j^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j X_1 A_j^T$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j X_1 A_j^T = \sum_{j=1}^N \alpha_j X_1 A_j^T = X_1 A^T(\alpha).$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2 A_j X_1^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (A_i X_1^T + A_j X_1^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j X_1^T,$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j X_1^T = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j X_1^T = A(\alpha) X_1^T.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2 X_2 A_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (X_2 A_i^T + X_2 A_j^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j X_2 A_j^T,$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j X_2 A_j^T = \sum_{j=1}^N \alpha_j X_2 A_j^T = X_2 A^T(\alpha).$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2 A_j X_2^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (A_i X_2^T + A_j X_2^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j X_2^T,$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j X_2^T = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j X_2^T = A(\alpha) X_2^T.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2 Z_j^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j Z_i^T B_j^T = Z^T(\alpha) B^T(\alpha).$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) B_j Z_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (B_i Z_j + B_j Z_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j B_i Z_j = B(\alpha) Z(\alpha).$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 Q + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (2Q) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j Q.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 X_1^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (2X_1^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j X_1^T.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 X_1 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j(t) (2X_1) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j X_1.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 X_2^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (2X_2^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j X_2^T.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 X_2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j(t) (2X_2) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j X_2.$$

Substituindo, obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)X_1^T + X_1A^T(\alpha) - Z^T(\alpha)B^T(\alpha) - B(\alpha)Z(\alpha) & * \\ Q + X_2A^T(\alpha) - X_1^T & -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad (123)$$

A partir de (123), pode-se separar em uma somatória de matrizes,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -Z^T(\alpha)B^T(\alpha) - B(\alpha)Z(\alpha) & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1A^T(\alpha(t)) & -X_1 \\ X_2A^T(\alpha(t)) & -X_2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} A(\alpha(t))X_1^T & A(\alpha(t))X_2^T \\ -X_1^T & -X_2^T \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (124)$$

Agora, reescrevendo a segunda e terceira parcela de (124) através de produtos matriciais,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -Z^T(\alpha)B^T(\alpha) - B(\alpha)Z(\alpha) & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T(\alpha(t)) & -I \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} A(\alpha(t)) \\ -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^T & X_2^T \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (125)$$

Utilizando o Lema de Finsler 2.2, com

$$\mathcal{D}(\alpha) = \begin{bmatrix} -Z^T(\alpha)B^T(\alpha) - B(\alpha)Z(\alpha) & * \\ Q & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} A^T(\alpha) & -I_{n \times n} \end{bmatrix},$$

e portanto, $\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & A(\alpha) \end{bmatrix}^T$, pré e pós multiplicando por $\mathcal{B}(\alpha)^{\perp T}$ e $\mathcal{B}(\alpha)^\perp$, sabendo que $\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^\perp = 0$, pode obter $\mathcal{B}^{\perp T}(\alpha)\mathcal{D}(\alpha)\mathcal{B}^\perp(\alpha) < 0$ a equivalência entre as restrições do lema. Substituindo as matrizes, tem-se

$$A(\alpha)Q + QA^T(\alpha) - Z^T(\alpha)B^T(\alpha) - B(\alpha)Z(\alpha) < 0, \quad (126)$$

sendo $Q = P^{-1}$, $Z(\alpha) = K_e(\alpha)W$, ao pré e pós multiplicar (126) por P , tem-se

$$A^T(\alpha)P + PA(\alpha) - K_e^T(\alpha)B^T(\alpha)P - PB(\alpha)K_e(\alpha) < 0, \quad (127)$$

Deixando em evidência P , tem-se

$$(A(\alpha) - B(\alpha)K_e(\alpha))^T P + P(A(\alpha) - B(\alpha)K_e(\alpha)) < 0. \quad (128)$$

Multiplicando pela esquerda e direita por $x^T(t)$ e $x(t)$, respectivamente, e substituindo

(112), tem-se

$$\dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) < 0, \quad (129)$$

representando a derivada da função quadrática de Lyapunov, dada por

$$x^T(t)Px(t) > 0, \quad (130)$$

para todo $x(t) \neq 0$, é assim, $P = P^T > 0$. ■

4.1.1 Projeto do Controlador: taxa de decaimento γ

Em Cadalso (2016) é apresentada uma metodologia para determinar os ganhos dos vértices do controlador para garantir a estabilidade do sistema considerando taxa de decaimento.

Teorema 15. *Se existirem uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e matrizes $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $j = 1, 2, \dots, N$, tais que*

$$WA_j^T + A_jW - Z_j^T B_j^T - B_j Z_j + 2\gamma W < 0, \quad (131)$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

$$WA_i^T + A_iW + WA_j^T + A_jW - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T - B_i Z_j - B_j Z_i + 4\gamma W < 0, \quad (132)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N.$$

então o sistema (112) é estabilizável, com taxa de decaimento maior ou igual à γ , e as matrizes dos vértices do controlador podem ser dadas por:

$$K_{ei} = Z_i Q^{-T}. \quad (133)$$

Prova: Vide em Cadalso (2016). ■

No seguinte teorema, propõe-se uma metodologia menos conservadora com taxa de decaimento utilizando o Lema 2.2.

Teorema 16. *Considerando $\gamma > 0$, se existirem a matriz simétrica definida positiva Q , juntamente com as matrizes Z_i , X_1 e X_2 que satisfazem as seguintes desigualdades:*

$$\begin{bmatrix} A_i X_1^T + X_1 A_i^T - Z_i^T B_i^T - B_i Z_i + 2\gamma Q & * \\ Q + X_2 A_i^T - X_1^T & -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad (134)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{bmatrix} (A_i + A_j)X_1^T + X_1(A_i^T + A_j^T) - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T - B_i Z_j - B_j Z_i + 4\gamma Q & * \\ 2Q + X_2(A_i^T + A_j^T) - 2X_1^T & -2X_2 - 2X_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad (135)$$

$$i \neq j, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N,$$

então o sistema (112) é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual que γ , e os vértices do controlado são dados em (136).

$$K_{ei} = Z_i Q^{-1}. \quad (136)$$

A prova do teorema segue os mesmo passos do Teorema 14.

4.1.2 Projeto do Controlador: estabilidade assintótica usando múltiplas variáveis extras

Nesta seção, é proposto um novo teorema com objetivo de garantir a estabilidade assintótica do sistema (112) e diminuir o conservadorismo, inserindo múltiplas variáveis de folga.

Teorema 17. *Se existirem a matriz simétrica definida positiva Q , juntamente com as matrizes Z_i , X_{1i} e X_{2i} que satisfazem as seguintes desigualdades:*

$$\begin{bmatrix} A_i X_{1i}^T + X_{1i} A_i^T - Z_i^T B_i^T - B_i Z_i & * \\ Q + X_{2i} A_i^T - X_{1i}^T & -X_{2i} - X_{2i}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (137)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{bmatrix} (A_i X_{1j}^T + A_j X_{1i}^T + X_{1i} A_j^T + X_{1j} A_i^T - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T - B_i Z_j - B_j Z_i) & * \\ (2Q + X_{2i} A_j^T + X_{2j} A_i^T - X_{1i}^T - X_{1j}^T) & -X_{2i} - X_{2j} - X_{2i}^T - X_{2j}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (138)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, j = i+1, 2, \dots, N,$$

então o sistema (112) é assintoticamente estável dado pela matriz obtida em (139).

$$K_{ei} = Z_i Q^{-1}. \quad (139)$$

Prova: Considerando as propriedades definidas previamente chega-se obter os seguintes vetores e matrizes

$$\mathcal{D}(\alpha) = \begin{bmatrix} -Z^T(\alpha)B^T(\alpha) - B(\alpha)Z(\alpha) & * \\ Q & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} A^T(\alpha) & -I_{n \times n} \end{bmatrix},$$

então, a prova do teorema segue os mesmos passos apresentados no Teorema 14. ■

4.1.3 Projeto do Controlador GS usando múltiplas variáveis e taxa de decaimento γ

O próximo teorema é proposto para garantir a estabilidade assintótica do sistema (112) e melhorar o desempenho da resposta transitória, inserindo múltiplas variáveis para reduzir o conservadorismo.

Teorema 18. Considerando $\gamma > 0$, se existirem a matriz simétrica definida positiva Q , juntamente com as matrizes Z_i , X_{1i} e X_{2i} que satisfazem as seguintes desigualdades:

$$\begin{bmatrix} ((A_i X_{1i}^T + X_{1i} A_i^T - Z_i^T B_i^T - B_i Z_i + 2\gamma Q) & * \\ Q + X_{2i} A_i^T - X_{1i}^T & -X_{2i} - X_{2i}^T \quad * \end{bmatrix} < 0, \quad (140)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{bmatrix} (A_i X_{1j}^T + A_j X_{1i}^T + X_{1i} A_j^T + X_{1i} A_j^T - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T) & * \\ -B_i Z_j - B_j Z_i + 4\gamma Q & \\ 2Q + X_{2i} A_j^T + X_{2j} A_i^T - X_{1i}^T - X_{1j}^T & -X_{2i} - X_{2j} - X_{2i}^T - X_{2j}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (141)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, j = i+1, 2, \dots, N,$$

então o sistema (112) é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior e igual

que γ , dado pela matriz obtida em (142).

$$K_{ei} = Z_i Q^{-1}. \quad (142)$$

Prova: Utilizando as propriedades previamente definidas e considerando os seguintes vetores e matrizes:

$$\mathcal{D}(\alpha) = \begin{bmatrix} -Z^T(\alpha)B^T(\alpha) - B(\alpha)Z(\alpha) + 2\gamma Q & * \\ & Q \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} A^T(\alpha) & -I_{n \times n} \end{bmatrix},$$

então, a prova do teorema segue os mesmos passos apresentados no Teorema 14. ■

Na próxima seção, verifica-se a eficiência das metodologias propostas. Um exemplo será usado para comparar esta nova metodologia com outras metodologias da literatura.

4.2 Exemplo numérico: análise de factibilidade

Considere um sistema linear (112) representado pelos seguintes vértices do politopo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 21 & -98 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix},$$

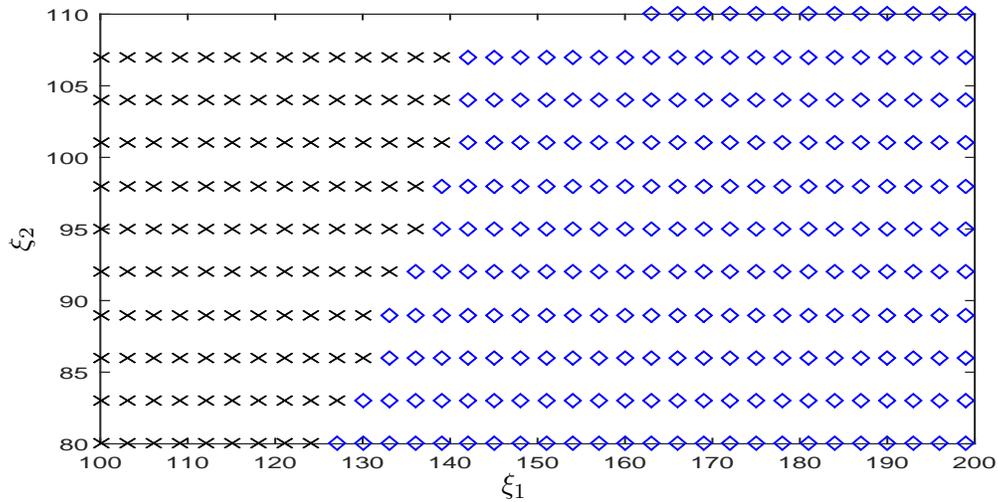
$$A_2 = \begin{bmatrix} \xi_1 & -98 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Considere uma variação paramétrica entre os intervalos $100 \leq \xi_1 \leq 200$ e $80 \leq \xi_2 \leq 110$ com um passo de 3. A região de factibilidade foi construída para analisar e comparar as metodologias propostas nos Teoremas 13, 14, 17, 15, 16 e 18.

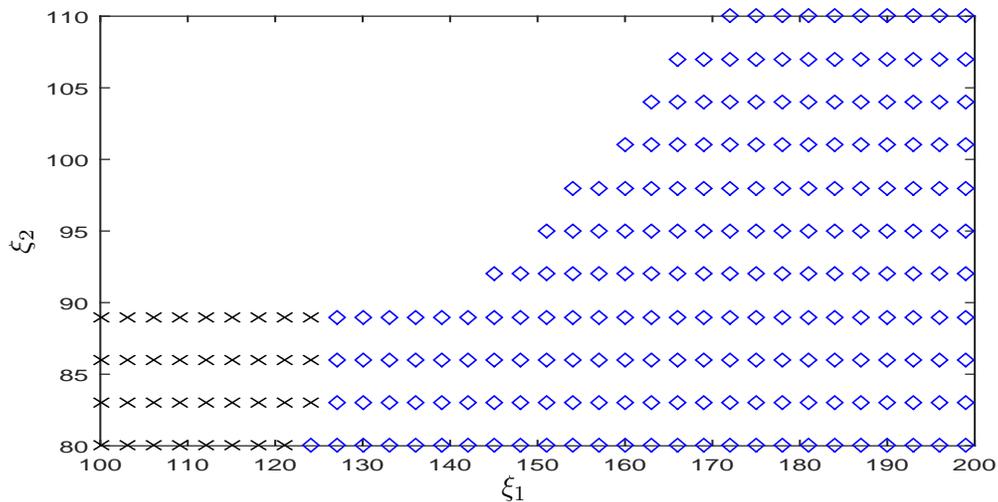
Pode-se observar que na Figura 17 a metodologia apresentada no Teorema 17 apresentou uma região de factibilidade maior do que a apresentada pelos Teoremas 13 e 14. É interessante como os pontos de factibilidade foram iguais considerando os Teoremas 13 e 14 para esse exemplo.

Na Figura 18 evidencia-se como a região de factibilidade diminuiu, ao impor-se a restrição para uma mínima taxa de decaimento, encontrando-se um número menor de pontos factíveis.

Nota-se que o Teorema 18 apresentou um resultado superior aqueles obtidos utilizando os Teoremas 15 e 16. Similarmente ao observado na Figura 17, note que os Teoremas 15 e 16 apresentaram o mesmo desempenho em termos de factibilidade para o exemplo estudado.

Figura 17 - Projeto do Controlador com Teoremas 13, 14 (x) e 17 (x, \diamond).

Fonte: Resultados do próprio autor

Figura 18 - Projeto do Controlador com Teoremas 15 (x), 16 (x), 18 (x, \diamond) com $\gamma = 2$.

Fonte: Resultados do próprio autor

4.3 Conclusões parciais

Nesse capítulo apresentou-se a teoria aplicada em um exemplo considerando a realimentação dos estados do sistema, evidenciando a suficiência das condições propostas para projetar o controlador *gain scheduled*. O Lema de Finsler foi uma ferramenta importante para garantir a estabilidade do sistema. Os resultados numéricos mostram que a metodologia apresentada é viável.

5 PROJETO DE CONTROLE MISTO *GAIN SCHEDULING* - ROBUSTO

Nesta seção propõe-se a geração de um novo conjunto convexo, considerando a multiplicação de incertezas politópicas e parâmetros variantes no tempo por meio de uma lógica sequencial. Essa estratégia aplica-se para diminuir a complexidade computacional referente ao número de LMIs. O objetivo é realizar um mapeamento que permita o uso das LMIs propostas na seção anterior. Objetiva-se também garantir respostas transitórias com tempo de estabelecimento menores.

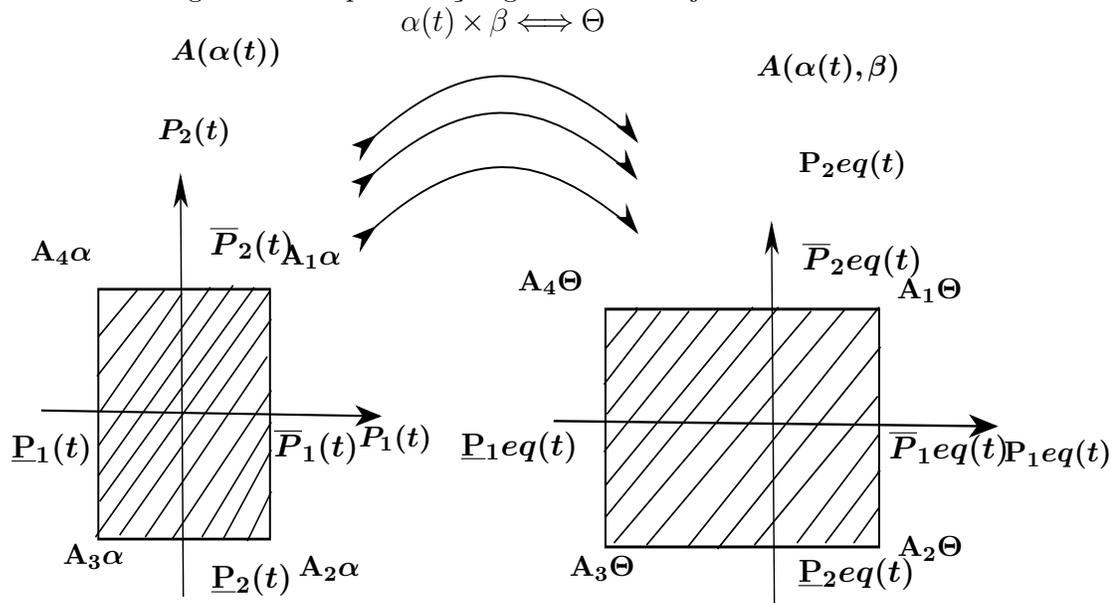
5.1 Metodologia de geração estrutural de um conjunto único por meio de incertezas multiplicativas

Na literatura, muitos autores consideram cenários complexos no sentido de aumentar o domínio das incertezas, o qual pode-se definir como *multi-simplex*. Esses conjuntos podem ser denominados do tipo aditivos, multiplicativos ou combinados. Em Sato. (2011), Daafouz, Bernussou e Geromel (2008), Silva et al. (2011b) e Assunção, Faria e Teixeira (2008b) podem ser vistos alguns casos particulares. A consideração de sistemas *multi-simplex* cria uma complexidade na determinação das soluções por via das desigualdades matriciais, algumas são formuladas considerando uma abordagem linear e bilinear das variáveis como Veselýa e Ilka (2015) e Veselýa e Ilka (2017). Nesta seção propõe-se uma metodologia para unificar aqueles cenários em um conjunto utilizando uma lógica sequencial expressada no mapeamento entre as incertezas. Esta estratégia não mudaria a estrutura das LMIs propostas nas seções prévias, que são construídas na base de um simplex.

Considere as seguintes regiões convexas mostradas na Figura 19, construídas a partir dos intervalos variantes no tempo $\underline{a}(t) \leq a(t) \leq \bar{a}(t)$, $\underline{b}(t) \leq b(t) \leq \bar{b}(t)$ e do parâmetro incerto $\underline{\beta} \leq \beta \leq \bar{\beta}$ assim, de forma ilustrativa, são considerados dois parâmetros variantes no tempo $a(t)$ e $b(t)$ e apenas um incerto (β),

Pode-se observar na Figura 19 a multiplicação dos conjuntos gera uma região convexa similar, porém, com valores de vértices diferentes, fato este que representa uma vantagem. Na Figura 20 é apresentada uma lógica sequencial que permite realizar um mapeamento

Figura 19 - Representação gráfica dos conjuntos convexos.



Fonte: Resultados do próprio autor

das regiões convexas considerando incertezas multiplicativas do sistema.

A lógica sequencial permite definir uma nova estrutura de forma que ambos parâmetros (incertos e variantes no tempo) pertençam a um simplex unitário, representadas da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^N \alpha(t) = 1, \alpha(t) \geq 0, i = 1, 2, \dots, N. \quad (143)$$

$$\sum_{i=1}^N \beta(t) = 1, \beta(t) \geq 0, i = 1, 2, \dots, N. \quad (144)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha = 1, \alpha \geq 0, i = 1, 2, \dots, N. \quad (145)$$

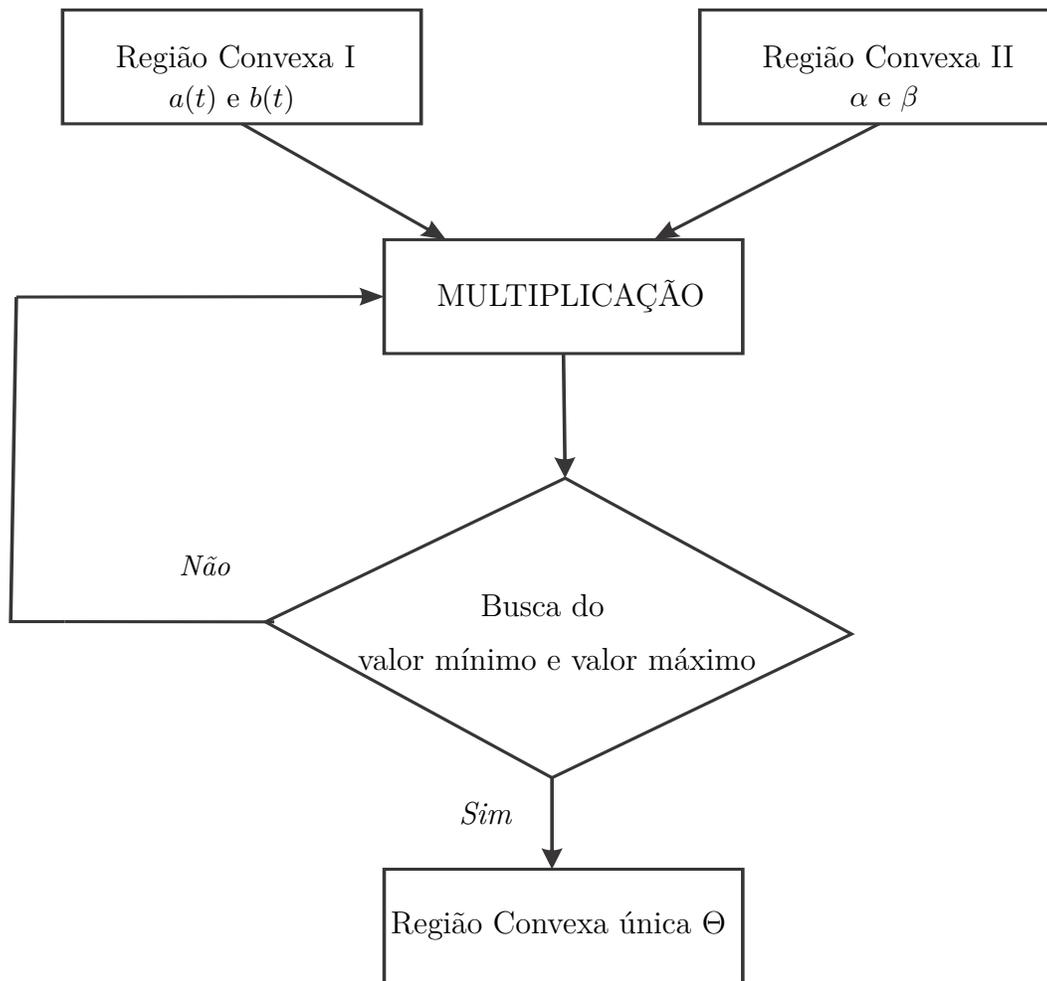
$$\sum_{i=1}^N \beta = 1, \beta \geq 0, i = 1, 2, \dots, N. \quad (146)$$

$$\theta = (\alpha(t), \beta(t), \alpha, \beta). \quad (147)$$

Logo, por ser uma união de dois conjuntos definidos como simplex unitário temos que

$$\sum_{i=1}^N \theta = 1, \theta \geq 0, i = 1, 2, \dots, N. \quad (148)$$

A metodologia acima gera um novo intervalo e um novo conjunto, simplificando assim a obtenção das LMIs, de modo a facilitar ao usuário projetar o controlador sem perder a essência da consideração das incertezas.

Figura 20 - Lógica sequencial para obtenção do novo conjunto convexo Θ .

Fonte: Resultados do próprio autor

5.2 Controle *GS-robusto* usando realimentação derivativa

Nesta seção, procura-se uma solução para sistemas lineares considerando a inclusão do novo conjunto politópico. Utiliza-se a estratégia de controle *GS-robusto* usando realimentação derivativa para sistemas sujeitos a incertezas politópicas e parâmetros variantes no tempo. As metodologias propostas em seções anteriores são empregados para testar o novo método.

5.2.1 Representação dinâmica do sistema contínuo linear sujeito a incertezas politópicas e parâmetros variantes no tempo

Em muitos problemas da vida real a dinâmica da planta pode se ver comprometida pelas variações paramétricas e dinâmicas, que em alguns casos influenciariam na estabil-

idade. A continuação descreve-se uma solução para este problema

Considera-se o seguinte sistema linear baseado no novo conjunto:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t), \beta)x(t) + B(\alpha(t), \beta)u(t),$$

ou

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t). \quad (149)$$

Utilizando a realimentação derivativa, dada por:

$$u(t) = -K(\alpha(t), \beta)\dot{x}(t),$$

ou

$$u(t) = -K(\theta)\dot{x}(t). \quad (150)$$

Substituindo (150) em (149), tem-se

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) - B(\theta)K(\theta)\dot{x}(t), \quad (151)$$

obtem-se

$$\dot{x}(t) = (I + B(\theta)K(\theta))^{-1}A(\theta)x(t). \quad (152)$$

5.2.2 Implementação Prática

Para validar na prática dos teoremas propostos, uma implementação foi aplicada no modelo esquemático apresentado na Figura 12. O sistema pode ser representado em espaços de estados, como segue:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-ks}{Ms} & \frac{-bs}{Ms} & 0 & \frac{bs}{Ms} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-ks}{Mus} & \frac{bs}{Mus} & \frac{-kus}{Mus} & \frac{-(bs+bus)}{Mus} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ms} \\ 0 \\ \frac{-1}{Mus} \end{bmatrix} u(t), \quad (153)$$

sendo $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ e $x_4(t) = \dot{x}_3(t)$, representando as velocidades respectiva de cada massa. A massa pode ser alterada devido a duas cargas iguais (cada uma tem peso de 0,4975 kg), que compõem a massa M_s . Desta forma, a massa M_s pode pertencer ao intervalo $1,9525 \leq M_s \leq 2,45(kg)$. Considerando o parâmetro $\rho = 1/Ms$, o intervalo pode ser modificado para $1/M_smax \leq 1/M_s \leq 1/M_smin \implies \rho_{min} \leq \rho \leq \rho_{max} \implies 0,4082 \leq \rho \leq 0,5122$. A substituição pelo parâmetro ρ , é realizada para não perder a convexidade do

politopo formado pelos vértices definidos entre a relação incertezas politópicas e parâmetro variante no tempo.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\rho ks & -\rho bs & 0 & \rho bs \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-ks}{Mus} & \frac{bs}{Mus} & \frac{-kus}{Mus} & \frac{-(bs+bus)}{Mus} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \\ 0 \\ \frac{-1}{Mus} \end{bmatrix} u(t). \quad (154)$$

Mantendo a mesma indicação definida na seção anterior para utilizar a variação paramétrica temporal $\alpha(t)$ no controlador, foi inserido um ganho artificial variante no tempo no canal de saída do sinal de controle $u(t)$. Isso é feito via *software*, emulando uma variação ao longo do tempo do ganho do amplificador de potência que alimenta o motor C.C. do atuador. A variação paramétrica pode ser representada no modelo sobre o vetor de entrada $B(\alpha(t))$. Destaca-se que essa variação paramétrica $\alpha(t)$ gera dois vértices, considerando a situações seguintes: funcionamento do amplificador ao 100% e o outro ao 50%.

Representando as condições de trabalho podemos chegar a seguinte situação,

$$A(\alpha(t), \beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\rho ks & -\rho bs & 0 & \rho bs \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-ks}{Mus} & \frac{bs}{Mus} & \frac{-kus}{Mus} & \frac{-(bs+bus)}{Mus} \end{bmatrix}, B(\alpha(t), \beta) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha(t)\rho \\ 0 \\ \frac{-\alpha(t)}{Mus} \end{bmatrix},$$

com

$$B(\alpha(t), \beta) = B(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \\ 0 \\ \frac{-\alpha(t)}{Mus} \end{bmatrix}.$$

Para calcular os valores do intervalo θ foi utilizada a lógica sequencial descrita na Figura 20. Portanto, para realizar o projeto de controle foram considerados os seguintes vértices do politopo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,380 & -3,0615 & 0 & 3,0615 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2041 \\ 0 \\ -0,5 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -460,9800 & -3,8415 & 0 & 3,8415 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5122 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

5.2.3 Resultados Obtidos com a Implementação

Nesta seção será projetada e implementada os teoremas propostos no Capítulo 3 no sistema de suspensão ativa, sobre a base da metodologia que foi apresentado neste capítulo.

Na Tabela 3 mostra os valores dos ganhos do controlador projetados considerando uma variação temporal $\alpha(t)$ no ganho do canal de saída do sinal de controle $u(t)$ e incerteza da massa do motorista entre o intervalo $M_s = 1,9525kg$ e $M_s = 2,45kg$.

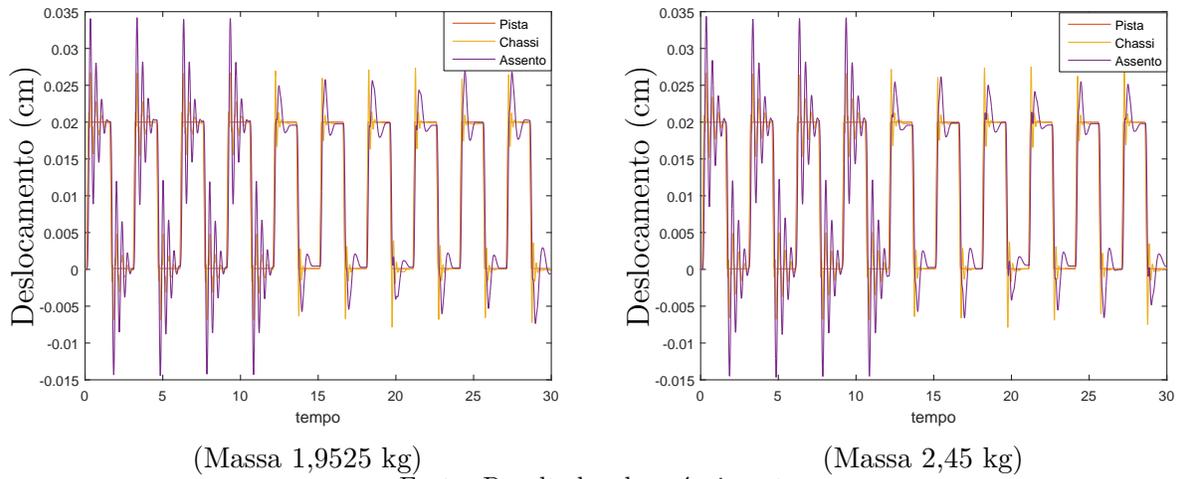
Tabela 3 - Ganhos do controlador aplicando metodologia GS e incertezas politópicas.

Metodologia	K_{d_1}	K_{d_2}
Teorema 6	[7,3424 0,6107 7,6999 0,1043 3,4891]	[3,4891 0,4817 3,3592 0,0568]
Teorema 8 $\gamma = 0,029$	[52,2092 7,2937 -46,4287 -1,3062]	[27,0762 4,0764 -31,3534 -0,6915]
Teorema 9	[51,2932 5,0166 -210,1552 0,1241]	[52,7264 4,9019 -203,3085 0,2056]
Teorema 10 $\gamma = 0,029$	[143,0700 13,0707 -187,4284 -3,5738]	[141,8743 11,8996 -152,2184 -2,9279]
Teorema 11	[678,0 101,8 -1863,5 -30,9]	[497,1 77,1 -1594,0 -24,3]
Teorema 12 $\gamma = 4$	[252,3802 10,9075 -13,6931 -1,0593]	[180,1871 9,6652 -97,1998 -1,0827]

Fonte: Resultados do próprio autor

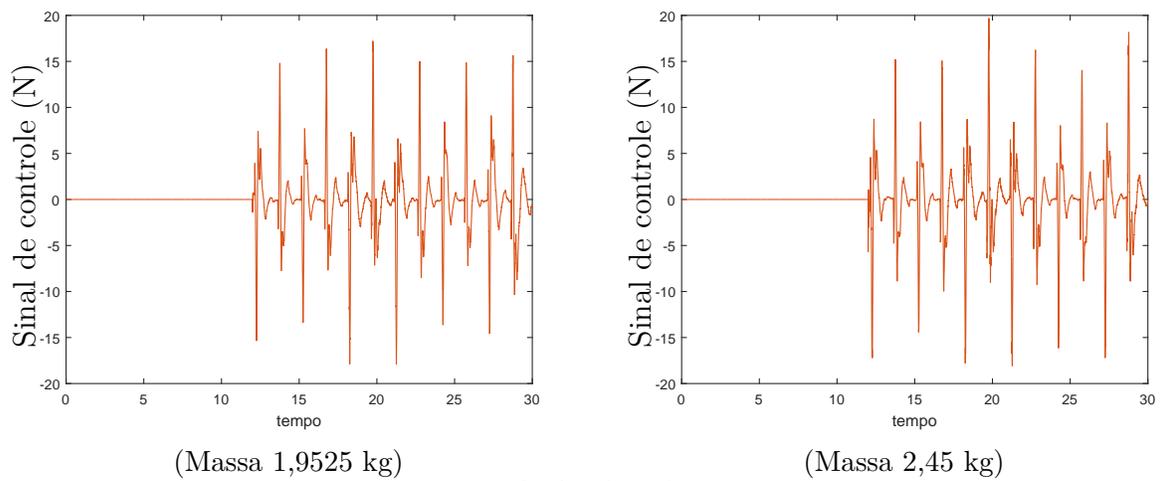
Nas Figuras 21 e 22, representam a resposta transitória e o sinal de controle implementados com os valores do Teorema 10 dado pela Tabela 3, sendo o teste que mostrou os resultados mais interessantes enquanto a diminuição de pico máximo, número de oscilações e magnitude de sinal de controle.

Figura 21 - Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-30s).



Fonte: Resultados do próprio autor

Figura 22 - Sinal de controle.



Fonte: Resultados do próprio autor

5.3 Conclusões parciais

A metodologia apresentada neste capítulo possibilita ao usuário ou projetista aplicar as LMIs obtidas na seção anterior, considerado como um conjunto único *multi-simplex* através da multiplicação de conjuntos e *simplex unitário*. Os testes realizados no sistema de suspensão ativa demonstraram a eficiência da teoria desenvolvida.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Foram propostas, neste trabalho, diferentes técnicas para síntese de controladores *gain scheduling* de sistemas com parâmetros variantes no tempo e realimentação derivativa, utilizando-se funções de Lyapunov quadráticas e o Lema de Finsler cujas formulações se basearam em *Linear Matrix Inequalitys* (LMIs).

A metodologia desenvolvida no Capítulo 2, possibilitou a expansão do estudo já desenvolvido na literatura a outras estratégias que foram aplicadas nas seções posteriores. O estudo de factibilidade permitiu demonstrar que as variáveis artificiais inseridas na nova metodologia conseguiram resultados melhores que os existentes na literatura.

No Capítulo 3, projetou-se o controlador *GS* utilizando a metodologia apresentada na capítulo anterior, a qual foi muito útil para obter soluções menos conservadoras do que as existentes. A implementação prática valida a nova metodologia.

No Capítulo 4, desenvolveu-se uma metodologia para obter soluções menos conservadoras para sistemas dinâmicos utilizando realimentação dos estados.

No Capítulo 5, concluiu-se que a metodologia proposta para incertezas multiplicativas *multi-simplex*, não acrescenta o número de vértices, apenas gera um novo conjunto equivalente. A nova região convexa facilita a simplificar o número de LMIs, o que caracteriza uma vantagem.

A implementação prática foi uma ferramenta importante para validar a metodologia proposta, abrindo as portas à futuras pesquisas.

6.1 Perspectivas

- Projetar para estratégia *gain scheduling* o controlador considerando a taxa de variação do parâmetro em função do tempo.
- Projetar o controlador *gain scheduled* considerando a metodologia *D-estabilidade*.

REFERÊNCIAS

- ABDELAZIZ, T.; VALASEK, M. Pole-placement for SISO linear systems by state-derivative feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 151, n. 4, p. 377 – 385, 2004.
- ABDELAZIZ, T.; VALASEK, M. State derivative feedback by LQR for linear time invariant systems. *IFAC Proceedings Volumes*, [s.n.], v. 38, n. 1, p. 435–440, 2005.
- ABDELAZIZ, T.; VALASEK, M. Eigenstructure assignment by proportional-plus-derivative feedback for second-order linear control systems. *Kybernetika*, Prague, v. 41, n. 5, p. 661 – 676, 2005b.
- ABU-RMILEH, A.; GARCIA-GABIN, W. A gain-scheduling model predictive controller for blood glucose control in type 1 diabetes. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Piscataway, v. 57, n. 10, p. 2478–2484, Oct 2010.
- APKARIAN, P.; TUAN, H. D.; BERNUSSOU, J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and \mathcal{H}_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities LMI characterizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 46, n. 12, p. 1941–1946, 2001.
- ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; TEIXEIRA, M. C. M. \mathcal{D} -estabilidade de sistemas descritores sujeitos a falhas estruturais usando realimentação da derivada dos estados. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 17., 2008, Juiz de Fora. *Anais[...]*. Juiz de Fora: SBA, 2008b. v. 1. 6p. (Artigo 38448).
- ASTROM, K. J.; WITTENMARK, B. *Adaptative control*. 2. ed. New York: Addison-Wesley: Addison-Wesley, 2008.
- BADIHI, H.; ZHANG, Y.; HONG, H. Fault-tolerant control design for a large off-shore wind turbine using fuzzy gain-scheduling and signal correction. In: *American Control Conference*. 2013, Washington. Conference[...] Washington: IEEE: [s.n.], 2013. p. 1448–1453.
- BARSAIYAN, P.; PURWAR, S. Comparison of state feedback controller design methods for mimo systems. In: *International Conference on Power, Control and Embedded Systems*. 2010. Hallahabad[...]. Hallahabad: IEEE: [s.n.], 2010. p. 1–6.
- BERNUSSOU, J.; PERES, P.; GEROMEL, J. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems Control Letters*, Amsterdam, v. 13, n. 1, p. 65 – 72, 1989.
- BETETO, M. A. L. *Less Conservative Conditions for the Robust and Gain-Scheduled LQR-State Derivative Controllers*. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2019.

- BETSCHON, F.; KNOSPE, C. R. Reducing magnetic bearing currents via gain scheduled adaptive control. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Piscataway, v. 6, n. 4, p. 437–443, Dec 2001.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. 2. ed. Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. (Studies in Applied Mathematics, 15).
- CADALSO, M. R. R. *Projeto via LMI de controladores gain scheduling com restrição de D-estabilidade.2016*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2016.
- DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. C. On inexact LPV control design of continuous-time polytopic systems. *Automatica*, Campinas, v. 53, n. 7, p. 1674–1678, 2008.
- DING-HUI, W.; YI-YANG, L.; YAN-XIA, S.; ZHI-CHENG, J. LPV robust gain-scheduling control for doubly fed induction generator wind energy conversion system. In: *Proceedings of the Chinese Control Conference*. 31, 2012, Hefei. Conference of the [...] Hefei: IEEE: [s.n.], 2012. p. 6687–6691.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Realimentação da derivada dos estados em sistemas multivariáveis lineares usando LMIs. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática*, Campinas, v. 20, p. 83 – 93, 2009.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; SILVA, N. A. P. da. Robust state-derivative pole placement LMI-based designs for linear systems. *International Journal of Control*, London, v. 82, n. 1, p. 1–12, 2009c.
- GHOSH, F. Design and performance of a local gain scheduling power system stabilizer for inter-connected system. In: *TENCON '91.1991 IEEE Region 10 International Conference on EC3-Energy, Computer, Communication and Control Systems*. 1991, New Delhi. Conference of the [...]. New Delhi: IEEE: [s.n.], 1991. v. 1, p. 355–359.
- GINTER, V. J.; PIEPER, J. K. Robust gain scheduled control of a hydrokinetic turbine part 2: Testing. In: *2009 IEEE Electrical Power Energy Conference (EPEC)*. 2009, Montreal. Conference of the [...], Montreal: IEEE: [s.n.], 2009. p. 1–5.
- GUO, Y.; SCHERER, C. W. Robust gain-scheduled controller design with a hierarchical structure. *IFAC-PapersOnLine*, [s.n.], v. 51, p. 228–233, 2018.
- HYDE, R.; GLOVER, K. The application of scheduled \mathcal{H}_∞ controllers to a vstol aircraft. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 38, n. 7, p. 1021–1039, 1993.
- JABEHDAR-MARALANI, P.; YAZDANPANA, M. J.; MOHAMMADI-MILASI, R. A novel adaptive gain-scheduling controller for synchronous generator. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications, 2004*. Taipei. Proceedings of the [...]. Taipei: IEEE: [s.n.], 2004. v. 1, p. 800–805.
- KADDOUR, A. A.; MAZOUZI, E. H. E.; BENJELLOUN, K.; ELALAMI, N. Static output-feedback controller design for a fish population system. *Applied Soft Computing*,

Amsterdam, v. 29, p. 280 – 287, 2015.

LEE, C. H.; CHUNG, M. J. Gain-scheduled state feedback control design technique for flight vehicles. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Piscataway, v. 37, n. 1, p. 173–182, 2001.

LEITH, D. . J. .; LEITHEAD, W. E. . Survey of gain-scheduling analysis and design. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 73, n. 11, p. 1001–1025, 2000.

LEWIS, F.; SYRMOS, V. A geometric theory for derivative feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 36, n. 9, p. 1111 – 1116, 1991.

LI, Z.-Y.; FANG, R.; WANG, Y. Stability and robust stability of integral delay systems with multiple exponential kernels. *IEEE Access*, Piscataway, v. 5, p. 21650–21659, 2017.

LIU, X.; WANG, R.; ZHANG, X.; XU, D. Gain scheduling PD controller for variable pitch wind turbines. In: *Proceedings of the International Power Electronics and Motion Control Conference*. 7, 2012, Harbin. Proceedings of the [...] Harbin: IEEE, 2012.: [s.n.], 2012. v. 3, p. 2162–2167.

LLINS, L. I. H. *Projeto do controlador gain scheduling usando realimentação derivativa via LMI.2015*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2015.

LLINS, L. I. H.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; CADALSO, M. R. R. Design of gain scheduling control using state derivative feedback,. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2017, p. 11, 2017.

MASUBUCHI, I.; KATO, J.; SAEKI, M.; OHARA, A. Gain-scheduled controller design based on descriptor representation of LPV systems: application to flight vehicle control. In: *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. 43, 2004,Nassau. Conference of the [...]. Nassau: IEEE: [s.n.], 2004. v. 1, p. 815–820.

MEHENDALE, C. S.; FIALHO, I. J.; GRIGORIADIS, K. M. Adaptive active microgravity isolation using LPV gain-scheduling methods. In: *Proceedings of the American Control Conference, 2003*. Denver. Proceedings of the [...]. Denver: IEEE: [s.n.], 2003. v. 2, p. 1452–1457.

MERRY, R. J. E.; HOLIERHOEK, J. L.; MOLENGRAFT, M. J. G. van de; STEINBUCH, M. Gain scheduling control of a walking piezo actuator. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, Piscataway, v. 19, n. 3, p. 954–962, june 2014.

MICHIELS, W.; VYHLÍDAL, T.; HUIJBERTS, H.; NIJMEIJER, H. Stabilizability and stability robustness of state derivative feedback controllers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Philadelphia, v. 47, n. 6, p. 3100–3117, 2009.

MOREIRA, M. R.; ESTEVES, T.; TEIXEIRA, M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO E.; FARIA, F. A. Stabilizability and disturbance rejection withs tate-derivative feedback. *ResearchGate*, New York, v. 151, p. 12, 2010.

MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; AVELLAR, G. S. C. A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy

systems. *Wind Energy*, Chichester, v. 8, n. 1, p. 1–7, 2004.

NAUS, G. *Gain scheduling Robust Design and Automated Tuning of Automotive Controllers.2002*. Dissertação (Master's Degree) — University of Technology Eindhoven, Eindhoven, 2009.

OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A.; MOREIRA, M. R.; SILVA, J. H. P. Projeto de controle robusto \mathcal{H}_∞ chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa. In: AUTOMATIC CONTROL, CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA,20,2014. Belo Horizonte: SBA, 2014. p. 8. Disponível em: < <http://www.swge.inf.br/CBA2014/anais/PDF/1569934845.pdf>>. Acesso em: 22 set. 2015.

OOSTEROM, M.; BABUSKA, R. Fuzzy gain scheduling for flight control laws. In: *IEEE International Conference on Fuzzy Systems. (Cat. No.01CH37297)*. 10, 2001, Melbourne. Conference of the [...]. Melbourne: IEEE, 2001: [s.n.], 2001. v. 2, p. 716–719.

PIPELEERSA, G.; DEMEULENAEREA, B.; SWEVERSA, J.; VANDENBERGHE, L. Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 58, p. 510–518, 2009.

RAMOS, D.; PERES, P. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 47, p. 675–678, 2002.

RANTZER, A.; JOHANSSON, M. Piecewise linear quadratic optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 45, p. 629–637, 2000.

RODRIGUEZ-MARTINEZ, A.; GARDUNO-RAMIREZ, R. PI fuzzy gain-scheduling speed control of a gas turbine power plant. In: *Proceedings of the International Conference on, Intelligent Systems Application to Power Systems*. 13, 2005, Arlington. Conference of the [...]. Arlington: IEEE: [s.n.], 2005. p. 302–307.

ROPPENECKER, G.; O'REILLY, J. Parametric output feedback controller design. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 20, n. 5, P 8, p. 247 – 252, 1987.

RUZHEKOV, G.; SLAVOV, T.; PULEVA, T. Modeling and implementation of hydro turbine power adaptive control based on gain scheduling technique. In: *International Conference on Intelligent System Applications to Power Systems*. Hersonissos. Conference of the [...]. Hersonissos: IEEE, 2011: [s.n.], 2011. p. 1–6.

SATO., M. Gain-scheduled output-feedback controllers using inexactly measured scheduling parameters for linear parametrically affine systems. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Bunkyo-ku, v. 4, n. 2, p. 45–152, 2011.

SATO, M.; PEAUCELLE, D. A new method for gain-scheduled output feedback controller design using inexact scheduling parameters. In: *IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*. Copenhagen.. Conference of the [...]. Copenhagen: IEEE: [s.n.], 2018. p. 1295–1300.

SHAMMA, J.; ATHANS, M. Stabilizability and stability robustness of state derivative

- feedback controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 35, n. 8, p. 3100–3117, 1990.
- SILVA, E. R. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C.; FARIA, F. A.; BUZACHERO, L. F. Less conservative control design for linear systems with polytopic uncertainties via state-derivative feedback. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2012, p. 1–21, 2012.
- SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; BUZACHERO, L. F. S. Parameter-dependent Lyapunov functions for state-derivative feedback control in polytopic linear systems. *International Journal of Control*, v. 84, p. 1377–1386, 2011.
- SILVA, E. R. P. da; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Estabilização de sistemas fuzzy T-S incertos usando realimentação derivativa. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, Campinas, v. 22, p. 273 – 283, 2011.
- SKELTON, R. E.; IWASAKI, T. E.; GRIGORIADIS, K. *A Unified Algebraic Approach to Control Design*. New York: Bristol:Taylor & Francis, 1997.
- SU, L.; CHESI, G. Robust stability analysis and synthesis for uncertain discrete time networked control systems over fading channels. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 62, p. 1966–1971, 2017.
- SUN, Y.; ZHANG, W.; ZHANG, M.; LI, D. Design of neural network gain scheduling flight control law using a modified pso algorithm based on immune clone principle. In: *International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation*. Changsha. Conference of the [...]. Changsha: IEEE: [s.n.], 2009. v. 1, n. 2, p. 259–263.
- VESELÝA, V.; ILKA, A. Design of robust gain-scheduled PI controllers. *Journal of the Franklin Institute*, Oxford, v. 352, p. 1476–1494, 2015.
- VESELÝA, V.; ILKA, A. Generalized robust gain-scheduled PID controller design for affine LPV systems with polytopic uncertainty. *Systems and Control Letters*, Piscataway, v. 105, p. 6–13, 2017.
- ZHANG, S.; WANG, Z.; DING, D.; WEI, G.; ALSAADI, F.; HAYAT, T. A gain-scheduling approach to non-fragile \mathcal{H}_∞ fuzzy control subject to fading channels. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, p. 1–1, 2016.
- ZHANG, S.; WANG, Z.; DING, D.; WEI, G.; ALSAADI, F.; HAYAT, T. Improvement of power system transient stability by PV farm with fuzzy gain scheduling of PID controller. *IEEE Systems Journal*, Piscataway, v. 11, p. 1684–1691, 2017.