



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente

Conjuntos Controláveis por Cadeias para Ações de Semigrupos em Fibrados

Cintia Aparecida da Silva Scanholato

Orientador: Prof. Dr. Ronan Antonio dos Reis

Programa: Matemática Aplicada e Computacional – PósMac

Presidente Prudente, Agosto de 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Conjuntos Controláveis por Cadeias para Ações
de Semigrupos em Fibrados**

Cintia Aparecida da Silva Scanholato

Orientador: Prof. Dr. Ronan Antonio dos Reis

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” campus de Presidente Prudente para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Agosto de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação - Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação - UNESP, Campus de Presidente Prudente

S294c Scanholato, Cintia Aparecida da Silva.
Conjuntos controláveis por cadeias para ações de semigrupos em fibrados /
Cintia Aparecida da Silva Scanholato. - 2015
70 f.

Orientador: Ronan Antonio dos Reis
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, 2015
Inclui bibliografia

1. Ações de semigrupos. 2. Conjuntos controláveis. 3. Conjuntos controláveis por cadeias. 4. Fibrados. I. Scanholato, Cintia Aparecida da Silva. II. Reis, Ronan Antonio. III. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. IV. Título.

Claudia Adriana Spindola
CRB-8ª/5790

BANCA EXAMINADORA

Ronan Antonio dos Reis

Prof. Dr. RONAN ANTONIO DOS REIS
ORIENTADOR

Marcelo Messias

Prof. Dr. MARCELO MESSIAS
UNESP/FCT

Carlos José Braga Barros

Prof. Dr. CARLOS JOSÉ BRAGA BARROS
UEM

Cintia Aparecida da Silva Scanholato

CINTIA APARECIDA DA SILVA SCANHOLATO

Presidente Prudente (SP), 19 de agosto de 2015.

Resultado: APROVADO.

*Dedico à minha família, principalmente à minha
mãe Creuza, por estar sempre ao meu lado, me
apoiando incondicionalmente e à memória de
meu pai Luiz.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me iluminado e abençoado meus caminhos, me dando forças para chegar até aqui.

À minha família que sempre me apoiou e me incentivou em meus estudos. Em especial à minha mãe pela sua paciência, amor incondicional e por nunca ter medido esforços para que eu permanecesse firme em meus estudos.

Aos meus amigos que sempre acreditaram, incentivaram e me deram forças a conquistar este sonho.

Aos meus amigos do PósMac e da Graduação, que tornaram esta jornada muito mais fácil e divertida, sem vocês o caminho teria sido muito mais árduo.

Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação e do Departamento de Matemática, por sua prestatividade sempre.

A todos os meus professores, que contribuíram para minha formação até o Mestrado, em especial, à professora Eliane Salvatori, que há 15 anos despertou meu gosto pela Matemática e desde então acreditou em meu potencial.

Por fim, ao meu orientador Prof. Dr. Ronan Antonio dos Reis, pela sua imensa dedicação e paciência desde a graduação até a conclusão deste trabalho. Nunca medindo esforços para que o resultado fosse o melhor possível.

“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades. Lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível.”

Charles Chaplin

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar os conjuntos controláveis por cadeias para ações de semigrupos em fibrados.

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

No capítulo 1, apresentamos algumas preliminares necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo 2, estudamos alguns tópicos da Teoria Geométrica de Controle, tais como, sistemas de controle, semigrupo e o grupo do sistema, acessibilidade, controlabilidade e controlabilidade aproximada para sistemas de controle. Estudamos também certas regiões do espaço de fase, ditas conjuntos controláveis para sistemas de controle, em que o sistema de controle é aproximadamente controlável. E, na sequência, estudamos os conjuntos controláveis por cadeias para sistemas de controle.

Posteriormente, no capítulo 3, estudamos os conjuntos controláveis para ações de semigrupos, bem como, algumas de suas propriedades, tais como, dois conjuntos controláveis para a ação de um semigrupo, são iguais ou são disjuntos. Vimos também o conceito de conjunto de transitividade de um conjunto controlável, e algumas propriedades, tais como, é um conjunto aberto e denso no qual o semigrupo age transitivamente. Em seguida, estudamos os conjuntos controláveis por cadeias para ações de semigrupos em espaços métricos, em que mostramos alguns resultados, como por exemplo, o que caracteriza os conjuntos controláveis por cadeias como interseções de conjuntos controláveis para certos semigrupos.

E, por fim, no último capítulo, estudamos o comportamento dos conjuntos controláveis por cadeias nos fibrados principais e nos seus fibrados associados, em que vimos alguns resultados, como por exemplo, mostramos que os conjuntos controláveis por cadeias do espaço total de um fibrado são projetados dentro de conjuntos controláveis por cadeias do espaço base do fibrado, e bem como, conjuntos de transitividade de conjuntos controláveis por cadeias são projetados dentro do conjunto de transitividade de conjuntos controláveis por cadeias.

Palavras-Chave: *Ações de Semigrupos, Conjuntos Controláveis, Conjuntos Controláveis por Cadeias, Fibrados.*

Abstract

The main objective of this work is to study the chain control sets for semigroups actions.

The paper is organized as follows:

First, in chapter 1, we presented some preliminaries necessary for the development of this work.

Then, in chapter 2, we studied some topics of the Geometric Control Theory, such as, control sets, semigroup and system group, accessibility, controllability and approximate controllability for control sets. We also studied certain regions of phase space, called controllable system for control sets, where the control sets are approximately controllable. And, in the sequence, we studied the controllable sets by chains for control systems.

Subsequently, in chapter 3, we studied the controllable sets for semigroups actions, also some of their properties, such as, two controllable sets for semigroup actions, are the same or are disjoint. We also saw the concept of transitivity set of a controllable set, and some properties, such as, is an open and dense set in which the semigroup acts transitively. After that, we studied the controllable sets by chains for semigroups actions in metric spaces, in which we show some results, for example, what characterizes the sets controllable by chains as intersections of controllable sets for certain semigroups.

Finally, in the last chapter, we studied the behavior of the chain control sets for the fiber bundles and their associated bundles, in which we have seen some results, for example, we showed that the chains controllable sets of the total space of a fiber bundle are designed within chains controllable sets of the fiber bundle base space, and as well, chain controllable sets of transitivity of sets are designed within the transitivity of chain control sets.

Keywords: *Semigroups actions, Controllable sets, Chain control sets, Fiber bundle.*

Conteúdo

1	Preliminares	1
1.1	Grupos Topológicos	1
1.2	Ações de Grupos	2
1.2.1	Ações de Grupos em Conjuntos	2
1.2.2	Espaços Homogêneos	5
1.2.3	Ações contínuas	7
1.3	Semigrupos	9
1.4	Grupos de Lie	12
1.5	Fibrados Principais	13
1.6	Fibrados Associados	18
2	Introdução à Teoria Geométrica de Controle	22
2.1	Sistemas de Controle	22
2.2	Órbitas, Sistemas Acessíveis e Controláveis	31
2.3	Conjuntos Controláveis para Sistemas de Controle	35
2.4	Conjuntos Controláveis por Cadeias para Sistemas de Controle	39
3	Conjuntos Controláveis e Conjuntos Controláveis por Cadeias para Ações de Semigrupos	41
3.1	Conjuntos Controláveis para Ações de Semigrupos	41
3.2	Conjuntos Controláveis por Cadeias para Ações de Semigrupos	48
3.3	Conjuntos Controláveis por Cadeias como Interseção de Conjuntos Controláveis	54

4	Conjuntos Controláveis por Cadeias em Fibrados	60
4.1	Semigrupos de Homeomorfismos e Acessibilidade	60
4.2	Conjuntos Controláveis por Cadeias e Propriedades	63

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, daremos algumas definições preliminares necessárias para o desenvolvimento deste trabalho, tais como, a noção de grupos topológicos e suas ações, topologia quociente, espaços homogêneos, e por fim, introduziremos os conceitos de fibrados principais e fibrados associados.

1.1 Grupos Topológicos

Iniciamos com o seguinte conceito.

Definição 1 *Um grupo topológico G é uma tripla (G, \cdot, τ_G) tal que G é um grupo munido de uma topologia τ_G compatível com o produto no grupo, isto é, as aplicações*

$$\begin{aligned} p : G \times G &\rightarrow G & i : G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto x.y & x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

são contínuas.

Observamos que as aplicações p e i são contínuas se, e somente se, a aplicação,

$$\begin{aligned} q : G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto x.y^{-1}. \end{aligned}$$

é contínua.

A seguir, consideremos os conceitos de translações e conjugações em grupos topológicos.

Definição 2 Dado um grupo G e um elemento $g \in G$, temos as seguintes aplicações:

- i) translação à esquerda: $E_g : G \rightarrow G$ tal que $E_g(h) = gh$.
- ii) translação à direita: $D_g : G \rightarrow G$ tal que $D_g(h) = hg$.
- iii) conjugação: $C_g : G \rightarrow G$ tal que $C_g(h) = ghg^{-1}$.

Proposição 1 As aplicações E_g , D_g e C_g são homeomorfismos.

Exemplo 1 O grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ com a topologia usual é um grupo topológico, e em geral, o grupo $(\mathbb{R}^n, +)$ é um grupo topológico. O grupo multiplicativo (\mathbb{R}^*, \cdot) com a topologia induzida da usual de \mathbb{R} é um grupo topológico.

Exemplo 2 O grupo linear geral $Gl(n, \mathbb{R})$ de todas as matrizes reais $n \times n$ invertíveis é um grupo com a topologia induzida do espaço das matrizes.

Exemplo 3 O grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R}) = \{A : AA^t = Id\}$, e bem como, o grupo ortogonal especial linear $SO(n, \mathbb{R})$, são grupos topológicos com a topologia induzida do espaço das matrizes.

Exemplo 4 O grupo de Heisenberg das matrizes reais 3×3 da forma,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

é um grupo topológico.

1.2 Ações de Grupos

1.2.1 Ações de Grupos em Conjuntos

Sejam (G, \cdot) um grupo e X um conjunto qualquer.

Definição 3 Uma ação à esquerda de G em X é uma aplicação que associa a cada $g \in G$ uma aplicação $a(g) : X \rightarrow X$ e que satisfaz as propriedades:

1. $a(e) = Id_X$, isto é, $a(e)(x) = x, \forall x \in X$, e
2. $a(gh) = a(g) \circ a(h)$.

Uma ação à direita é definida analogamente, considerando a propriedade (2) como: $a(gh) = a(h) \circ a(g)$.

Uma ação à esquerda (ou à direita) pode ser vista como um homomorfismo $a : G \rightarrow B(X)$, onde $B(X)$ é o grupo das bijeções de X , com o produto dado pela composta de duas aplicações.

De forma alternativa, temos a seguinte definição:

Definição 4 *Uma ação à esquerda é definida como sendo uma aplicação*

$$\phi : G \times X \rightarrow X,$$

satisfazendo $\phi(e, x) = x$ e $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x))$, com $g, h \in G$ e $x \in X$.

Observação: A relação entre as aplicações ϕ e a é óbvia: $\phi(g, x) = a(g)(x)$, isto é, $a(g)$ é a aplicação parcial ϕ_g de ϕ quando a primeira coordenada é fixada: $\phi_g(x) = \phi(g, x)$.

A outra aplicação parcial associada a ϕ é obtida fixando $x \in X : \phi_x : G \rightarrow X$, $\phi_x(g) = \phi(g, x) = a(g)(x)$.

Denotaremos por gx e xg as ações à esquerda e à direita, respectivamente.

Observação: Utilizando as notações acima, temos que uma ação à esquerda satisfaz: $1.x = x$ e $g(hx) = (gh)x$, enquanto uma ação à direita satisfaz: $x.1 = x$ e $(xg)h = x(gh)$.

Seja a uma ação à esquerda de G em X , então a aplicação a' dada por $a'(g) = a(g^{-1})$ é uma ação à direita e vice-versa.

Trabalharemos mais geralmente com as ações à esquerda, de forma que as propriedades e resultados serão análogos para ações à direita, substituindo $a(g)$ por $a(g^{-1})$.

Definição 5 *Dado $x \in X$, a órbita do ponto x por G , denotada por Gx , é dada como sendo o conjunto*

$$Gx = \{gx \in X : g \in G\}.$$

Proposição 2 *Cada órbita é uma classe de equivalência da relação de equivalência:*

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tal que } gx = y.$$

Demonstração: Temos que $1.x = x$, o que implica que $x \sim x$, e portanto, a propriedade de reflexividade está satisfeita. Se $x \sim y$ então existe $g \in G$ tal que $y = gx$, daí, aplicando g^{-1} na igualdade, temos $g^{-1}y = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = 1.x = x$, isto é, $y \sim x$, logo a propriedade de simetria está

satisfeita. Para ver a transitividade, suponhamos que $x \sim y$ e $y \sim z$, então existem $g, h \in G$, tais que

$$\begin{aligned} y &= gx \\ \text{e isto implica que, } z &= h(gx) = (hg)x, \text{ ou seja, } x \sim z, \text{ pois } hg \in G, \\ z &= hy \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. \square

Desta forma, temos que duas órbitas coincidem ou são disjuntas, como veremos em particular, no exemplo abaixo.

Exemplo 5 *Seja a ação do grupo $Gl(2, \mathbb{R})$ em \mathbb{R}^2 . Temos duas órbitas para esta ação. De fato, $Gl(2, \mathbb{R}) \cdot (0, 0) = \{(0, 0)\}$ é uma órbita. Agora, se tomarmos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $(x, y) \neq (0, 0)$ temos que $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in Gl(2, \mathbb{R})$ já que seu determinante $x^2 + y^2 \neq 0$.*

Também temos que $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Logo, se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são não nulos, temos que existem g_1, g_2 em $Gl(2, \mathbb{R})$, tais que

$$g_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Então, $(x_1, y_1) \sim (1, 0)$ e $(x_2, y_2) \sim (1, 0)$. Como \sim é uma relação de equivalência, segue da propriedade de transitividade que $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$. Concluindo assim, que $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ é outra órbita desta ação.

Definição 6 *O conjunto G_x dos elementos de G que fixam x é chamado de subgrupo de isotropia de x , ou seja,*

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}.$$

Exemplo 6 *Seja a ação do grupo $Gl(2, \mathbb{R})$ em \mathbb{R}^2 , o subgrupo de isotropia do ponto $(1, 0)$ é dado pelo subgrupo,*

$$G_{(1,0)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : c \neq 0 \right\}.$$

Proposição 3 *Dados $x, y \in X$, suponha que $y = gx$ com $g \in G$. Então, $G_y = gG_xg^{-1}$, onde G_x e G_y denotam os subgrupos de isotropia de x e y , respectivamente.*

Consideremos o seguinte conceito:

Definição 7 *Uma ação a de G em X , é dita:*

1. efetiva se $gx = x$, para todo $x \in X$, então $g = 1$.
2. livre se os subgrupos de isotropia se reduzem ao elemento neutro de G , isto é, se $gx = x$, para algum $x \in X$, então $g = 1$.
3. transitiva se, X é uma órbita de G , isto é, para todo par de elementos $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$.

Observamos que da definição acima, temos que ações livres são efetivas, porém, a recíproca nem sempre vale.

A restrição da ação a uma órbita é uma ação transitiva, logo toda propriedade sobre ações transitivas se aplica também à restrição da ação a uma órbita.

1.2.2 Espaços Homogêneos

A seguir, estaremos interessados em definir um espaço homogêneo de um grupo. Para isto consideremos a ação de grupos em espaços quocientes. Seja $H \subset G$ um subgrupo e G/H o conjunto das classes laterais gH com $g \in G$, $G/H = \{gH : g \in G\}$.

Temos que a aplicação,

$$(g, g_1H) \longmapsto g(g_1H) = (gg_1)H,$$

define uma ação à esquerda de G em G/H .

Seja a projeção canônica (aplicação sobrejetora):

$$\pi : G \rightarrow G/H$$

$$g \longmapsto gH.$$

Dessa forma, a ação fica escrita como:

$$g\pi(g_1) = g(g_1H) = gg_1H = \pi(gg_1).$$

A ação de G em G/H é transitiva e toda ação transitiva está em bijeção com um espaço quociente de G .

Proposição 4 *Suponha que a ação de G em X é transitiva e tome $x \in X$. Então a aplicação $\xi_x : gG_x \in G/G_x \rightarrow gx \in X$ é uma bijeção entre G/G_x e X . A aplicação ξ_x é equivariante no sentido em que $g\xi_x(g_1H) = \xi_x((gg_1)H)$, $g, g_1 \in G$, isto é, ξ_x comuta com as ações de G em G/H e X , respectivamente. Além disso, se $y = gx$ então $\xi_y = \xi_x \circ D_g$.*

Observemos que a aplicação ξ_x citada acima está relacionada com a aplicação parcial ϕ_x pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G & & X \\ & \xrightarrow{\phi_x} & \\ \downarrow \pi & \nearrow \xi_x & \\ G/H & & \end{array}$$

Definição 8 *O conjunto G/H é (também) chamado de espaço homogêneo do grupo G .*

Num espaço homogêneo os grupos agem transitivamente.

Definição 9 *O ponto x escolhido para estabelecer a identificação entre X e G/G_x é chamado de origem ou base do espaço homogêneo X .*

Alterando a origem x , o espaço quociente não é alterado, pois numa ação transitiva os subgrupos de isotropia são conjugados entre si, como vimos na Proposição 3.

Todas as propriedades citadas até aqui, se aplicam também para ações à direita, onde os espaço homogêneos são os quocientes $H \backslash G$, formados pelas classes laterais Hg , $g \in G$.

Num espaço homogêneo G/H , isto é, na presença de uma ação transitiva, as ações livres são aquelas em que o subgrupo de isotropia H se reduz a $\{e\}$, sendo assim, o espaço homogêneo se identifica a G .

Proposição 5 *Seja G uma ação transitiva em $X = G/H$. Então a ação é efetiva se, e só se, H não contém subgrupos normais de G , além de $\{e\}$. (Um subgrupo H de um grupo G diz-se subgrupo normal de G se $aH = Ha$, para qualquer $a \in G$).*

1.2.3 Ações contínuas

Definição 10 *Sejam G um grupo topológico e X um espaço topológico. Uma ação de G em X é contínua se a aplicação $\phi : G \times X \rightarrow X$, $\phi(g, x) = gx$, é contínua.*

Observemos que se, $H \subset G$ é um subgrupo, então $\phi : H \times X \rightarrow X$ será uma ação de H , chamada de restrição a H da ação de G em X e, em particular temos que a restrição de uma ação contínua é contínua.

Se ϕ for contínua, então as aplicações parciais

$$\begin{aligned}\phi_x & : G \rightarrow X, x \in X : \phi_x = gx \text{ e} \\ \phi_g & : X \rightarrow X, g \in G : \phi_g = gx\end{aligned}$$

também são contínuas.

Proposição 6 *Os subgrupos de isotropia G_x , $x \in X$, são fechados.*

Demonstração: Em relação à aplicação ϕ , o subgrupo de isotropia é dado por

$$\phi^{-1}(\{x\}) = \{g \in G : \phi(g, x) = x\} = G_x.$$

Como ϕ é contínua então segue que, os subgrupos que fixam um ponto são fechados, ou seja, G_x é fechado. \square

Exemplo 7 *Seja a ação,*

$$\phi : Gl(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(g, x) \mapsto gx.$$

ϕ é uma ação contínua, pois $\phi = p_{/Gl(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n}$ é a restrição de uma aplicação polinomial $p : M(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que é contínua.

Observação: A ação dada no exemplo acima, induz ações contínuas de subgrupos H de $Gl(n, \mathbb{R})$ em \mathbb{R}^n , dada pela restrição $\phi = p_{/H \times \mathbb{R}^n}$.

Introduziremos a seguir uma topologia no espaço quociente G/H , chamada de *topologia quociente*.

Definição 11 *Sejam Y um espaço topológico e \sim uma relação de equivalência em Y . Denotemos por Y/\sim o conjunto das classes de equivalência de \sim e por $\pi : Y \rightarrow Y/\sim$ a aplicação sobrejetora canônica que a cada $y \in Y$ associa sua classe de equivalência. A topologia quociente em Y/\sim é aquela em que um subconjunto $A \subset Y/\sim$ é aberto se, e só se, $\pi^{-1}(A)$ é aberto em Y .*

Proposição 7 *Sejam Y e Z espaços topológicos em que Y é munido da relação de equivalência \sim . Então, uma aplicação $f : (Y/\sim) \rightarrow Z$ é contínua se, e somente se, $f \circ \pi : Y \rightarrow Z$ é contínua.*

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \pi \downarrow & \searrow & \\ Y/\sim & \xrightarrow{f} & Z \end{array} .$$

Observemos que dado um grupo G e um subgrupo $H \subset G$, o quociente G/H é o conjunto das classes de equivalência da relação de equivalência em G ,

$$x \sim y \iff xH = yH.$$

Assim, quando G é um grupo topológico, G/H pode ser munido da topologia quociente por essa relação de equivalência.

Tem-se que a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : G &\rightarrow G/H \\ g &\longmapsto gH, \end{aligned}$$

é uma aplicação aberta.

Sejam G_1 e G_2 grupos topológicos e $H_1 \subset G_1$, $H_2 \subset G_2$ subgrupos. O produto cartesiano $H_1 \times H_2$ também é um subgrupo de $G_1 \times G_2$ e o quociente $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2)$ se identifica com $(G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$ pela bijeção:

$$\begin{aligned} \phi : (G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) &\rightarrow (G_1/H_1) \times (G_2/H_2) \\ \phi : (g_1, g_2)(H_1, H_2) &\longmapsto (g_1H_1, g_2H_2). \end{aligned}$$

Pelo diagrama abaixo, podemos notar que ϕ é um homeomorfismo em relação às topologias quocientes nos espaços homogêneos.

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \xrightarrow{Id} & G_1 \times G_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) & \xrightarrow{\phi} & (G_1/H_1) \times (G_2/H_2). \end{array}$$

Proposição 8 *A ação $\phi : G \times G/H \rightarrow G/H$ é contínua em relação a topologia quociente.*

Observemos que se $\phi : G \times X \rightarrow X$ é uma ação, então temos que cada órbita Gx está em bijeção com o quociente G/Gx . Desta forma, podemos colocar uma topologia na órbita Gx de modo que um subconjunto $A \subset Gx$ é aberto se o conjunto correspondente em G/Gx for um aberto da topologia quociente.

Se a ação ϕ acima for contínua, então a órbita $Gx \subset X$ admite também a topologia induzida de X .

E no caso de termos a ação $\phi : G \times X \rightarrow X$ contínua, a sua restrição a uma órbita Gx também será contínua em relação à topologia induzida.

Proposição 9 *Seja $\phi : G \times X \rightarrow X$ uma ação contínua e transitiva de G em X . Fixe $x \in X$ e considere a bijeção $\xi_x : G/Gx \rightarrow X$ dada por $\xi_x(gGx) = gx$, então, ξ_x é contínua em relação à topologia quociente em G/Gx .*

Terminaremos esta seção, observando um caso particular de quocientes, quando H é um subgrupo normal de G .

Neste caso, o quociente G/H tem estrutura de grupo tal que $(gH)(hH) = (gh)H$ e a projeção canônica $\pi : G \rightarrow G/H$ é um homeomorfismo.

O grupo G/H munido da topologia quociente, passa a ser um grupo topológico.

De fato, dado o diagrama,

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{p} & G \\ \pi \downarrow \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ G/H \times G/H & \xrightarrow{\phi} & G/H \end{array}$$

ϕ denota o produto em G/H e é contínua, pela Proposição 8, e sua inversa também é contínua pela comutatividade do diagrama, juntamente com a Proposição 7.

Logo, em relação à topologia quociente, $\pi : G \rightarrow G/H$ é um homomorfismo contínuo e uma aplicação aberta.

1.3 Semigrupos

Nesta seção, introduziremos o conceito de semigrupos em grupos e em grupos topológicos. Outros detalhes poderão ser encontrados, por exemplo, em [12].

Definição 12 Um semigrupo é um conjunto não vazio S munido de uma operação $*$ associativa, ou seja, para todos $s, t, u \in S$ tivermos $(s * t) * u = s * (t * u)$.

Exemplo 8 O conjunto dos números reais positivos, (\mathbb{R}^+, \cdot) , com a operação usual de multiplicação, é um semigrupo.

Exemplo 9 O conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \text{ são números reais não negativos} \right\},$$

é um semigrupo com o produto usual de matrizes. O mesmo vale para quaisquer matrizes $n \times n$ com todas as entradas reais não negativas.

Daremos a seguir o conceito de subsemigrupo, que é quando o semigrupo está contido no grupo, ou seja,

Definição 13 Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto $T \subset G$ é um subsemigrupo de G se $(T, *)$ é um semigrupo.

Proposição 10 Suponhamos que $(G, *)$ é um grupo e T um subconjunto de G . Então, T é um subsemigrupo de G se, e somente se, para quaisquer elementos $x, y \in T$ tivermos $x * y \in T$.

Demonstração: De fato, sejam $x, y \in T$, com $x * y \in T$. Daí, podemos definir a seguinte operação interna em T

$$* : T \times T \rightarrow T$$

$$(x, y) \mapsto x * y$$

na qual $*$ é uma restrição da operação de G ao conjunto T .

Como $*$ é associativa em G , então também será em T , já que T é um subconjunto de G . Logo, pela Definição 12 temos que $(T, *)$ é um semigrupo. E, pela Definição 13 temos que T é um subsemigrupo de G . A recíproca é imediata da Definição 13. \square

Exemplo 10 Consideremos o conjunto $Sl(2, \mathbb{R})$, o conjunto das matrizes invertíveis 2×2 com determinante igual a 1. Então, o conjunto

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl(2, \mathbb{R}^+) : a, b, c, d \geq 0 \right\}.$$

T é um subsemigrupo de $Sl(2, \mathbb{R})$. De fato, sejam $A, B \in T$ com $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, e $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \geq 0$. Daí, temos

$$A.B = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

que também possui apenas entradas não negativas. Logo, $A.B \in T$, e pela Proposição 10, temos que T é um subsemigrupo de $Sl(2, \mathbb{R})$.

Exemplo 11 Sejam $G = \mathbb{R}^2$ grupo abeliano com a operação de adição usual e o conjunto

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \text{ e } y \geq 0\}.$$

Então, T é um subsemigrupo de G . De fato, sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in T$. Então, temos que $y_1 \leq x_1$, $y_1 \geq 0$, e $y_2 \leq x_2$, $y_2 \geq 0$, o que implica que $y_1 + y_2 \leq x_1 + x_2$ e $y_1 + y_2 \geq 0$. Logo, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in T$, mostrando assim, que T é um subsemigrupo de G .

A seguir, denotaremos por T^{-1} o conjunto: $T^{-1} = \{g^{-1} : g \in T\}$.

Proposição 11 Suponha que T é um subsemigrupo de um grupo G . Então T^{-1} também é um subsemigrupo de G .

Demonstração: Tomemos $x, y \in T^{-1}$. Então, pela definição de T^{-1} temos que $x = g^{-1}$ e $y = h^{-1}$, para $g, h \in T$. Logo, $x*y = g^{-1}*h^{-1} = (h*g)^{-1} \in T^{-1}$, pois T é subsemigrupo. \square

É claro que se, o elemento neutro e do grupo pertencer a T , então também pertence a T^{-1} .

Definição 14 Um subconjunto não vazio I , de um subsemigrupo T , é um ideal à esquerda de T se $TI \subset I$, um ideal à direita se $IT \subset I$ e um ideal se for ideal à esquerda e à direita.

Proposição 12 *Seja T um subsemigrupo de um grupo topológico G tal que $\text{int}(T) \neq \emptyset$. Então $\text{int}(T)$ é um ideal em T .*

Demonstração: Como $\text{int}(T) \neq \emptyset$, existem $g \in \text{int}(T)$ e U uma vizinhança aberta de g , tal que $g \in U \subset T$. Daí, para todo $t \in T$ temos que $gt \in Ut \subseteq T$. Como G é um grupo topológico, a translação à direita é um homeomorfismo. Logo, o conjunto Ut é uma vizinhança aberta de gt , isto é, $gt \in \text{int}(T)$. Logo, $(\text{int}(T))T \subset \text{int}(T)$. Analogamente, temos que $T(\text{int}(T)) \subset \text{int}(T)$. Portanto, $\text{int}(T)$ é um ideal de T . \square

1.4 Grupos de Lie

Nesta seção, veremos os conceitos de grupos e subgrupos de Lie, bem como alguns exemplos e resultados relevantes.

Definição 15 *Um grupo de Lie é uma variedade C^∞ com uma estrutura de grupo tal que a aplicação produto*

$$p : G \times G \rightarrow G$$

$$p(x, y) = x.y,$$

é de classe C^∞ .

Exemplo 12 $Gl(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) / \det A \neq 0\}$ é um grupo de Lie com a multiplicação de matrizes.

Exemplo 13 *Para outros exemplos de grupos de Lie, temos que o espaço \mathbb{R}^n é um grupo de Lie com a operação usual de adição de números reais. O espaço $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ com o produto usual complexo é um grupo de Lie.*

Exemplo 14 *O toro $T^2 = S^1 \times S^1$ é um grupo de Lie, ou mais geralmente, o toro n -dimensional. $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ (n -fatores) é um grupo de Lie. E, em geral, o produto cartesiano de dois grupos de Lie com a estrutura de variedade diferenciável produto e a operação produto direto de grupos é um grupo de Lie.*

Definição 16 *Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo. Então, H é um subgrupo de Lie de G se, H é uma subvariedade imersa de G tal que o produto $H \times H \rightarrow H$ é diferenciável em relação à estrutura intrínseca de H .*

Exemplo 15 *Também são grupos de Lie o grupo linear especial*

$$Sl(n, \mathbb{R}) = \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) / \det(A) = 1\},$$

bem como, o grupo ortogonal

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / A \cdot A^t = I\},$$

onde A^t é a transposta de A com a operação de multiplicação usual de matrizes.

1.5 Fibrados Principais

Nesta seção, introduziremos o conceito de fibrados principais e veremos alguns exemplos.

Definição 17 *Sejam P, M variedades diferenciáveis e G um grupo de Lie. Um fibrado principal $P(M, G)$ é formado pelo espaço total P , pela base M e pelo grupo estrutural G os quais estão relacionados do seguinte modo:*

1. G age livremente à direita em P pela ação,

$$P \times G \rightarrow P$$

$$(p, g) \mapsto pg,$$

ou seja, se $pg = p$ para algum p , então $g = 1$.

2. *O espaço das órbitas dessa ação*

$$\{pG : p \in P\} = G/P,$$

é M . Isso significa que existe uma submersão:

$$\pi : P \rightarrow M,$$

tal que as órbitas de G são os conjuntos $\pi^{-1}\{x\}$, $x \in M$.

3. P é localmente trivial no sentido de que para todo $x \in M$ existe uma vizinhança U de x e um difeomorfismo.

$$\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G,$$

que é da forma:

$$\psi(p) = (\pi(p), \phi(p)),$$

onde $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ é uma aplicação que satisfaz,

$$\phi(pa) = \phi(p)a,$$

para todo $p \in \pi^{-1}(U)$ e $a \in G$.

Denotamos por $P(M, G)$ um fibrado principal.

O fibrado $P(M, G)$ é dito fibrado topológico se os espaços envolvidos são espaços topológicos e as aplicações são contínuas (homeomorfismos, quando bijeções).

O fibrado principal é de classe C^k , $k \geq 1$, se os espaços envolvidos forem variedades diferenciáveis de classe C^k , neste caso G deve ser grupo de Lie, e as aplicações envolvidas são diferenciáveis de classe C^k (no caso de bijeções, são difeomorfismos). Neste caso a projeção $\pi : P \rightarrow M$ torna-se uma submersão, pois através do difeomorfismo ψ ela se identifica com a projeção na primeira coordenada $U \times G \rightarrow U$.

As fibras do fibrado principal são denotadas por $P_x = \pi^{-1}\{x\}$, $x \in M$.

Exemplo 16 *Sejam G um grupo de Lie e uma variedade diferenciável M , a ação definida por:*

$$\begin{aligned} (M \times G) \times G &\rightarrow (M \times G) \\ ((x, g), h) &\longmapsto (x, gh), \end{aligned}$$

é uma ação livre. O produto cartesiano $P = M \times G$ é um fibrado principal com grupo estrutural G , em que a base se reduz a um ponto $M = \{x\}$. $P = M \times G$ é chamado de fibrado trivial.

A seguir, introduziremos a definição de fibrado tangente e um exemplo muito importante de fibrado principal, dito fibrado das bases.

Definição 18 Chamamos de fibrado tangente de uma variedade diferenciável M à união disjunta de todos os espaços tangentes de M . Simbolicamente, temos,

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M,$$

onde $T_x M$ é o espaço tangente a M no ponto x .

Um elemento de TM pode ser pensado como um par (x, v) em que x é um ponto em M e v é um vetor tangente a M no ponto x . Existe uma projeção natural $\pi : TM \rightarrow M$ definida por $\pi(x, v) = x$. Esta projeção leva cada espaço tangente $T_x M$ no ponto x .

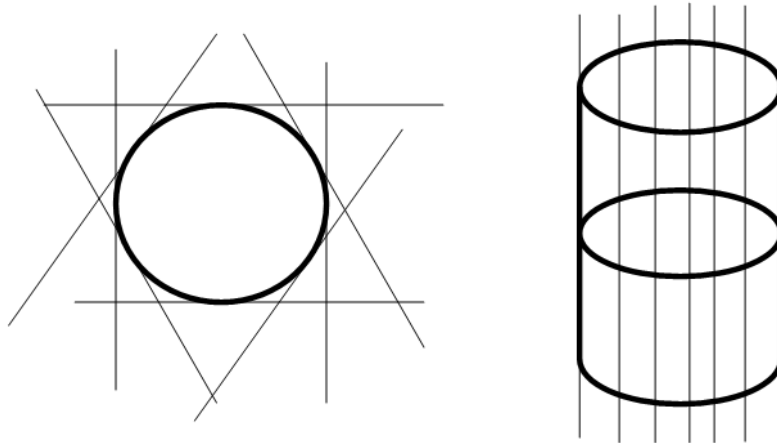


Figura 1.1: Fibrado tangente TS^1 (acima).

Exemplo 17 Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n e TM seu fibrado tangente. O fibrado das bases ou fibrado dos referenciais de M é o conjunto BM de todas as bases de TM , isto é, BM é o conjunto de todas as bases de $T_x M$, para todo $x \in M$. Equivalentemente, uma base $p \in BM$ pode ser vista como uma aplicação linear inversível (referencial), denotada também, por $p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$, $x \in M$. O grupo $Gl(n, \mathbb{R})$ age à direita em BM por

$$(p, g) \longmapsto pg = p \circ g,$$

com $p \in BM$ e $g \in Gl(n, \mathbb{R})$. Como todos os elementos de BM são transformações lineares inversíveis, segue que essa ação é livre. E, como para

quaisquer aplicações lineares $p, q : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ existe $g = p^{-1} \circ q \in Gl(n, \mathbb{R})$, onde p^{-1} é a inversa de p , segue que tal ação é transitiva nas fibras. Podemos considerar a projeção $BM \rightarrow M$ que a cada $p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ associa o ponto $x \in M$, tal que a fibra $B_x M$ é o conjunto dos referenciais de $T_x M$. Observamos que a condição de trivialização local se obtém tomando cartas de M . Assim, essa construção define BM como um fibrado principal com grupo estrutural $Gl(n, \mathbb{R})$ e base M .

Vejamos agora uma variação do exemplo anterior.

Exemplo 18 Denotemos por $B_k(n)$ o conjunto das transformações lineares injetoras,

$$B_k(n) = \{p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n); p : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ é injetora, } k < n\}.$$

Podemos definir uma ação à direita de $Gl(k, \mathbb{R})$ em $B_k(n)$ por multiplicação à direita de matrizes,

$$\begin{aligned} \varphi : B_k(n) \times Gl(k, \mathbb{R}) &\rightarrow B_k(n) \\ (p, a) &\longmapsto p.a. \end{aligned}$$

Pela injetividade de $p \in B_k(n)$, segue que φ é uma ação livre.

Denotemos por $Gr_k(n)$ o conjunto de todos os subespaços de \mathbb{R}^n de dimensão k . $Gr_k(n)$ é uma variedade diferenciável de dimensão $k(n - k)$, chamada de variedade Grassmanniana.

Vejamos que $B_k(n)(Gr_k(n), Gl(k, \mathbb{R}))$ é um fibrado principal com grupo estrutural $Gl(k, \mathbb{R})$.

De fato, para cada $p \in B_k(n)$, tem-se que $\text{Im}(p)$ é um elemento de $Gr_k(n)$, por p ser injetora. Daí, dadas duas aplicações $p, q \in B_k(n)$, estas estão na mesma órbita se, e somente se, possuem a mesma imagem. De fato, sejam p e $q = pa$, com $a \in Gl(k, \mathbb{R})$, p e q são elementos de uma mesma órbita se suas imagens coincidem e se estas imagens coincidem, então é possível escrever $p^{-1}q$ onde p^{-1} denota a inversa de p , sendo p uma aplicação de \mathbb{R}^k sobre sua imagem. Então $p^{-1}q \in Gl(k, \mathbb{R})$ e como $q = p(p^{-1}q)$, logo, dois elementos com mesma imagem estão numa mesma órbita de $Gl(k, \mathbb{R})$.

Isto define uma aplicação,

$$\pi : B_k(n) \rightarrow Gr_k(n)$$

$$p \longmapsto \text{Im}(p),$$

tal que cada fibra $\pi^{-1}(\text{Im}(p)) = \{p.a : a \in \text{Gl}(k, \mathbb{R})\}$ é uma órbita de $\text{Gl}(k, \mathbb{R})$.

Resta mostrarmos que este fibrado é localmente trivial. Para isto, seja $x \in \text{Gl}(k, \mathbb{R})$, podemos tomar k campos vetoriais $\{X_1, \dots, X_K\}$ linearmente independentes em todos os pontos de uma vizinhança W de x em $\text{Gr}_k(n)$. Então a cada $y \in W$, podemos associar um conjunto de k vetores linearmente independentes $\{X_1(y), \dots, X_k(y)\}$ em \mathbb{R}^n , os quais geram o espaço y , a menos de isomorfismo. Desta forma, fica bem definida uma seção local $\sigma : W \rightarrow B_k(n)$ que a cada $y \in W$ associa uma única transformação linear injetora $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ definida na base canônica de \mathbb{R}^k por $p(e_i) = X_i(y)$, para $i = 1, \dots, k$.

Notemos que $\pi(\sigma(y)) = \text{Im}(p) = y$. Agora, se $\pi(\sigma(y)) = \pi(q)$, então existe $a \in \text{Gl}(k, \mathbb{R})$ tal que $q = \sigma(y).a$, com isto podemos definir $\phi : \pi^{-1}(W) \rightarrow \text{Gl}(k, \mathbb{R})$ por $\phi(\sigma(y).a) = a$ e a bijeção $\psi : \pi^{-1}(W) \rightarrow W \times \text{Gl}(k, \mathbb{R})$ por $\psi(\sigma(y).a) = (y, a)$. Note que $\phi(\sigma(y)) = 1$ e $\phi(\sigma(y).a) = \phi(\sigma(y)).a$.

Se tivermos $k = 1$, a Grassmanniana é o espaço projetivo \mathbb{P}^{n-1} . Neste caso, $B_k(n)$ é $\mathbb{R}^n - \{0\}$ e a projeção

$$\mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1},$$

é a identificação canônica das retas de \mathbb{R}^n .

Exemplo 19 *Consideremos o conjunto*

$$\text{St}_k(n) = \{p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n); p : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ é isometria}\},$$

chamado de variedade de Stiefel. A variedade de Stiefel pode ser vista como o conjunto das bases ortonormais em \mathbb{R}^n de um subespaço de dimensão n .

Também pode ser visto como o conjunto das transformações lineares $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ que satisfazem

$$p^t p = 1.$$

O grupo $O(k)$ age livremente à direita em $\text{St}_k(n)$ e a projeção

$$\pi : \text{St}_k(n) \rightarrow \text{Gr}_k(n)$$

$$p \longmapsto \text{Im}(p),$$

define o fibrado principal $St_k(n)(Gr_k(n), O(k))$.

Se $k = 1$, a projeção $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ associa pontos antipodais de S^{n-1} à reta em \mathbb{R}^n que passa por esses pontos.

$$\phi(\sigma(x)) = 1.$$

1.6 Fibrados Associados

Um fibrado associado é constituído por um fibrado principal $P(M, G)$ e uma ação à esquerda do grupo estrutural G num espaço F .

O grupo G age à esquerda no produto $P \times F$ por $g(p, v) = (pg, g^{-1}v)$, com $g \in G$ e $(p, v) \in P \times F$. Tal ação determina uma relação de equivalência em $P \times F$, de modo que,

$$(p, v) \sim (q, w) \text{ se, e somente se, existe } g \in G : q = pg \text{ e } w = g^{-1}v.$$

Denotaremos por $[p, v]$ a classe de equivalência do par $(p, v) \in P \times F$.

Definição 19 Chamamos de fibrado associado a P com fibra tipo F e base M , ao conjunto E das classes de equivalência de \sim . O denotamos por $E = P \times_G F$.

Vejamos algumas observações importantes:

1. Se $(p, v) \sim (q, w)$, então p e q estão na mesma fibra de P . Logo, a aplicação $\pi_E : P \times_G F \rightarrow M$ tal que $\pi_E([p, v]) = \pi(p)$ é bem definida. Logo, $E = P \times_G F$ é um fibrado sobre M . Denotaremos por $E_x = \pi^{-1}\{x\}$, $x \in M$, as fibras de $E \rightarrow M$.

2. Se tivermos $(p, v) \sim (p, w)$, com $p \in P$, então $v = w$. De fato, se $(p, v) \sim (p, w)$, então existe $g \in G$ tal que $p = pg$ e $w = g^{-1}v$. Mas de $p = pg$ temos que $g = 1$, pois a ação de P em G é livre, logo, $w = (1)^{-1}v = 1v = v$. Ou seja, se fixarmos $p \in P$, então cada classe de equivalência $[p, v] \in P \times_G F$ é determinada por um único $v \in F$.

Os fibrados associados também admitem trivializações locais e estas são herdadas das trivializações do fibrado principal.

De fato, seja $\sigma : U \rightarrow P$ uma seção local de P , daí a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_\sigma : U \times F &\rightarrow \pi_E^{-1}(U) \\ (x, v) &\longmapsto \sigma(x)v, \end{aligned}$$

é uma bijeção.

De fato, primeiramente temos que ψ_σ está bem definida.

Agora, sejam $(x, v), (y, w) \in U \times F$ tais que $\psi_\sigma(x, v) = \psi_\sigma(y, w)$ então $\sigma(x)v = \sigma(y)w$. Logo, existe $g \in G$ tal que $\sigma(y) = \sigma(x)g$ e $w = g^{-1}v$.

Então

$$x = \pi(\sigma(x)) = \pi(\sigma(x)g) = \pi(\sigma(y)) = y.$$

E como a ação de G em P é livre, temos que $g = 1$, logo, $x = y$ e ψ_σ é injetora.

Por fim, verifiquemos que ψ_σ é sobrejetora. Seja $[p, w] \in \pi_E^{-1}(U)$. Como $\pi(\sigma(\pi(p))) = \pi(p) = p$, segue que existe $g \in G$ tal que $p = \sigma(\pi(p))g$.

Agora consideremos $\sigma_1 : U_1 \rightarrow P$ outra seção local de P , tal que $U \cap U_1 \neq \emptyset$. Então dado $x \in U \cap U_1$, temos que

$$\pi(\sigma_1(x)) = \pi(\sigma(x)).$$

Logo, existe $\theta \in G$ tal que

$$\sigma_1(x) = \sigma(x)\theta(x).$$

Daí, $\sigma_1(x)v = \sigma(x)\theta(x)v$ e tomando ψ_{σ_1} a trivialização correspondente a σ_1 , temos a relação a seguir entre ψ_σ e ψ_{σ_1} :

$$\psi_\sigma^{-1} \circ \psi_{\sigma_1}(x, v) = \psi_\sigma^{-1}(\psi_{\sigma_1}(x, v)) = \psi_\sigma^{-1}(\sigma_1(x)v) = \psi_\sigma^{-1}(\sigma(x)\theta(x)v) = (x, \theta(x)v),$$

para todo $x \in U \cap U_1$.

Logo, usando estas trivializações locais é possível colocarmos uma estrutura de variedade diferenciável em E .

Exemplo 20 *Seja uma variedade diferenciável M de dimensão n . Na seção anterior, construímos o fibrado das bases BM , como referenciais do fibrado tangente TM . O grupo estrutural de BM é $Gl(n, \mathbb{R})$. Por outro lado, TM é obtido de BM identificando-o como o fibrado associado $BM \times_{Gl(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n$, construído a partir da ação linear canônica de $Gl(n, \mathbb{R})$ em \mathbb{R}^n , ou seja, existe uma bijeção entre $T_x M$ e $BM \times_{Gl(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n$. De fato, consideremos a aplicação α ,*

$$\alpha : BM \times_{Gl(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$$

$$[\sigma, v] \mapsto \alpha([\sigma, v]) = \sigma(v), \quad \text{com } x = \pi(\sigma),$$

tal que $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ é um elemento de BM .

Se tivermos $(\sigma, v) \sim (\rho, w)$, então existe $g \in Gl(n, \mathbb{R})$ tal que $(\rho, w) = (\sigma g, g^{-1}v)$, daí, pela ação linear canônica de $Gl(n, \mathbb{R})$ em \mathbb{R}^n segue que $\sigma(v) = \sigma(w)$, logo, α está bem definida.

Por outro lado, sejam $[\sigma, v], [\rho, w] \in BM \times_{Gl(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n$ tais que $\sigma(v) = \sigma(w)$. Como $\pi(\sigma) = \pi(\rho) = x$, então temos $\rho = \sigma g$ para algum $g \in Gl(n, \mathbb{R})$. E como σ é injetora, segue que $w = g^{-1}v$, então $[\sigma, v] = [\rho, w]$. Logo, α é injetora.

Agora, devemos mostrar que α é sobrejetora. Consideremos $w \in T_x M$, $x = \pi(\sigma)$, para algum $\sigma \in BM$. Desta forma, como σ é sobrejetora, temos que existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma(v) = w$.

A seguir apresentaremos dois casos particulares de fibrados associados, nas seguintes proposições.

Proposição 13 *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal e G/H um espaço homogêneo de G . O subgrupo H age à direita em P . Denote por P/H o conjunto das órbitas dessa ação. Então, P/H se identifica ao fibrado associado $P \times_G G/H$.*

Demonstração: Denotemos por $x_0 = 1H$ a origem de G/H . Um elemento de P/H é uma órbita à direita pH , $p \in P$. Consideremos a aplicação que a cada $pH \in P/H$ associa a classe $[p, x_0] \in P \times_G G/H$. Vejamos que esta

aplicação é uma bijeção. Inicialmente, observemos que está bem definida. De fato, se, $q = ph \in pH$, então $[q, x_0] = [ph, x_0] = [p, hx_0] = [p, x_0]$. Tal aplicação é injetora, pois se $[q, x_0] = [p, x_0]$ então $q = pg$ e $x_0 = g^{-1}x_0$. Da última igualdade temos que $g^{-1} \in H$, logo, $g \in H$. E da primeira igualdade segue que $qH = pH$ então $p = q$. E, também, esta aplicação é sobrejetora, de fato, dado $[q, x] \in P \times_G G/H$ então existe $g \in G$ tal que $g^{-1}x = x_0$, o que

implica que $[p, x_0] = [q, x]$ se $p = qg^{-1}$, mostrando assim que $[q, x]$ está na imagem da aplicação.

Logo, a aplicação $pH \mapsto [p, x_0]$ é uma bijeção, identificando P/H com $P \times_G G/H$. \square

A identificação da proposição anterior se escreve em coordenadas locais: se $U \times G \approx \pi^{-1}(U)$ é uma trivialização local de P , então obtém-se uma ação à direita:

$$(U \times G) \times H \rightarrow U \times G$$

$$(z, g)h \longmapsto (z, gh),$$

com $z \in U$, $g \in G$ e $h \in H$. Logo, o conjunto das órbitas em $\pi^{-1}(U)$ se identifica a $U \times G/H$. Reciprocamente, os elementos de $\pi_E^{-1}(U)$ podem ser escritos como $(z, 1).x$ com $z \in U$ e $x \in G/H$, já que $(z, 1) \in U \times G$ se identifica a um elemento de $\pi^{-1}(U)$. No fibrado trivial $U \times G$ a bijeção entre P/H e $P \times_G G/H$ é dada por

$$(z, gH) \in (U \times G)/H \longmapsto (z, 1).gH \in (U \times G) \times_G G/H.$$

A partir dessa descrição local de identificação $P/H \approx P \times_G G/H$, segue que ela é um difeomorfismo no caso de fibrados diferenciáveis.

Proposição 14 *Suponha que $P(M, G)$ seja um fibrado principal e $\phi : G \rightarrow H$ seja um homomorfismo de grupos de Lie. O grupo G age à esquerda em H por $(g, h) \longmapsto \phi(g)h$. Denote por $P \times_\phi H$ o fibrado associado obtido dessa ação. Então $P \times_\phi H$ é um fibrado principal com grupo estrutural H .*

Demonstração: Consideremos a ação à direita de H em $P \times_\phi H$ dada por

$$[p, h]h_1 = [p, hh_1].$$

Tal ação é livre, pois se $[p, hh_1] = [p, h]$ então existe $g \in G$ tal que $p = pg$ e $hh_1 = \phi(g)^{-1}h$. De $p = pg$, temos que $g = 1$. Daí, substituindo $g = 1$ na segunda igualdade, temos que $hh_1 = h$, logo, $h_1 = 1$. Temos também que a ação é transitiva nas fibras, pois $p, h \in H \longmapsto [p, h]$ é uma bijeção entre H e a fibra. E, por fim, temos que a ação à direita define $P \times_\phi H \rightarrow M$, já que a condição de trivialização local é satisfeita pelas propriedades de trivialização local de fibrados associados em geral. \square

Capítulo 2

Introdução à Teoria Geométrica de Controle

Neste capítulo, estudaremos alguns conceitos da Teoria Geométrica de Controle, tais como, acessibilidade, controlabilidade e controlabilidade aproximada para sistemas de controle. Estudaremos também certas regiões do espaço de fase, ditas conjuntos controláveis, em que o sistema de controle é aproximadamente controlável. E, na sequência, introduziremos o conceito de conjuntos controláveis por cadeias. Para outros detalhes sobre este estudo nos referimos, por exemplo, à [6] e [20].

2.1 Sistemas de Controle

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos básicos sobre sistemas de controle.

Iniciemos com o seguinte conceito:

Definição 20 *Um sistema de controle é formado por:*

1. *Uma variedade diferenciável M de dimensão d ;*
2. *Um conjunto de controle $U \subset \mathbb{R}^n$ e um conjunto de funções admissíveis*

$$\mathfrak{U} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow U : u \text{ é localmente integrável}\}.$$

3. *Uma família de equações diferenciais*

$$x' = X(x, u(t)),$$

onde $X : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ é uma aplicação C^∞ , e TM é o fibrado tangente de M .

Chamaremos de *controle* a cada elemento de \mathfrak{U} . Observemos que cada função de controle $u \in \mathfrak{U}$ determina uma equação diferencial dependente do tempo, o que origina diferentes trajetórias do sistema.

Quando o conjunto \mathfrak{U} for o conjunto das funções constantes por partes, o denotaremos por

$$\mathfrak{U}_{cp} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow U : u \text{ é constante por partes}\}.$$

De um outro modo, um sistema de controle é uma família de equações diferenciais que depende dos controles $u \in U$. Para cada controle $u \in \mathfrak{U}$, temos que a aplicação $X_u : M \rightarrow TM$, dada por $X_u(x) = X(x, u)$, é um *campo vetorial* completo de classe C^∞ em M . Desta forma, para cada $u \in U$ e $x \in M$, a equação diferenciável

$$x' = X(x, u(t)), \text{ com } x(0) = x_0$$

possui solução única $\varphi(t, x_0, u)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Aqui todos os campos vetoriais X_u , $u \in U$ são completos.

Fixemos $t_1 \in \mathbb{R}$ e consideremos $u_1 = u(t_1) \in U$ com $u \in \mathfrak{U}$. Desta forma, a equação diferencial autônoma

$$x' = X_{u_1}(x)$$

tem solução única $\varphi_x^{u_1}(t)$ com $\varphi_x^{u_1}(0) = x_0$, para $x \in M$.

Logo, o fluxo $\varphi_x^{u_1}(t, x) = \varphi_x^{u_1}(t)$ é definido em $\mathbb{R} \times M$.

Denotaremos $\varphi_x^{u_1}(t)$ por $e^{tX_{u_1}}(x)$.

Da continuidade em relação à condição inicial, segue que a aplicação $\varphi(t, \cdot, u) : M \rightarrow M$ é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathfrak{U}$ fixados. Assim, um sistema de controle pode ser definido pelo conjunto de campos de vetores $\Sigma = \{X_u : u \in U\}$.

Definição 21 *Seja $u_1, u_2 \in \mathfrak{U}$ funções de controle e $s \in \mathbb{R}$.*

1. *Uma s-concatenação de u_1, u_2 é a função $u : \mathbb{R} \rightarrow U$ dada por*

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{se } t \leq s \\ u_2(t - s), & \text{se } t > s \end{cases}$$

2. *Dados $u \in \mathfrak{U}$ e $s \in \mathbb{R}$, a função de controle $u(\cdot + s)(t) = u(t + s)$ será denominada s-translação de u , para quaisquer $u \in \mathfrak{U}$ e $s \in \mathbb{R}$, $u(\cdot + s) \in \mathfrak{U}$.*

Se tivermos $u \in \mathfrak{U}$ e $t, s \in \mathbb{R}$. As soluções das equações diferenciais com respectivas funções de controle u e $u(\cdot + s)$, satisfazem a igualdade

$$\varphi(t + s, x, u) = \varphi(t, \varphi(s, x, u), u(\cdot + s)).$$

Proposição 15 Para cada $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathfrak{U}$, a aplicação $\varphi(t, \cdot, u) : M \rightarrow M$ é um homeomorfismo.

Demonstração: Temos que a aplicação $\varphi(t, \cdot, u)$ é contínua, pois é a solução de um sistema de controle. Agora, sejam $x, y \in M$ tais que $\varphi(t, x, u) = y$. Aplicando o resultado anterior, temos que

$$x = \varphi(0, x, u) = \varphi(t - t, x, u) = \varphi(-t, \varphi(t, x, u), u(\cdot + t)) = \varphi(-t, y, u(\cdot + t))$$

Logo, a aplicação $\varphi(t, \cdot, u)$ é invertível e sua inversa é a aplicação $\varphi(-t, \cdot, u(\cdot + t))$. Como $-t \in \mathbb{R}$ e $u(\cdot + t) \in \mathfrak{U}$ temos que $\varphi(-t, \cdot, u(\cdot + t))$ é solução do sistema de controle. Logo, também é uma aplicação contínua.

E, portanto, $\varphi(t, \cdot, u)$ é um homeomorfismo. □

Vejamos a seguir alguns exemplos de sistemas de controle.

Exemplo 21 A família de equações diferenciais lineares da forma

$$x' = Ax + Bu(t)$$

onde $x \in \mathbb{R}^m$, A é uma matriz real $m \times m$, B matriz real $m \times n$ e $u(t) \in U$ com $U = \mathbb{R}^n$ e $M = \mathbb{R}^m$ define um sistema de controle, chamado de sistema de controle linear.

Exemplo 22 Sejam $M = \mathbb{R}^2$ e $U = \mathbb{R}$. Consideremos o conjunto das funções de controle $\mathfrak{U} = \{-1, 1\}$ e o sistema de controle,

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad x' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Inicialmente, estudemos a equação diferencial

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 + 1 \\ -5x_2 + 2 \end{pmatrix}, \quad \text{com } x = (x_1, x_2).$$

Logo, $x' = (-3x_1 + 1, -5x_2 + 2)$. Então, temos a seguinte solução para a equação

$$\varphi_t^{u_1}(x) = \left(x_1 e^{-3t} - \frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{1}{3}, x_2 e^{-5t} - \frac{2}{5} e^{-5t} + \frac{2}{5} \right)$$

A única singularidade da equação é dada pelo ponto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$. E quando $t \rightarrow +\infty$, a trajetória $\varphi_t^{u_1}(x)$ tende ao ponto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$, já que $-3, -5 < 0$. Além disso, como $-5 < -3$, então a segunda coordenada de $\varphi_t^{u_1}(x)$ tende mais rápido a $\frac{2}{5}$ do que a primeira coordenada tende a $\frac{1}{3}$. Logo, a reta tangente à trajetória $\varphi_t^{u_1}(x)$ tende à reta que passa por $(\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$ e é paralelo à reta E_1 . Agora, em relação à segunda equação temos

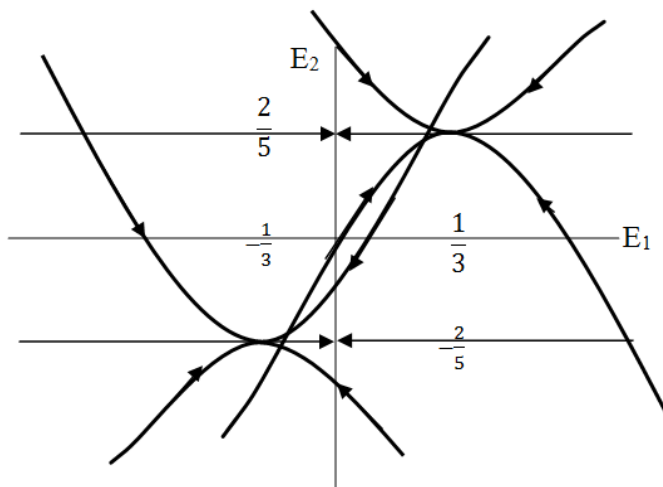
$$x' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 - 1 \\ -5x_2 - 2 \end{pmatrix}, \text{ com } x = (x_1, x_2).$$

e a solução

$$\varphi_t^{u_2}(x) = \left(x_1 e^{-3t} + \frac{1}{3} e^{-3t} - \frac{1}{3}, x_2 e^{-5t} + \frac{2}{5} e^{-5t} - \frac{2}{5} \right)$$

Neste caso, a única singularidade é $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{5})$. Quando $t \rightarrow +\infty$, $\varphi_t^{u_2}(x) \rightarrow (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{5})$ e a reta tangente a esta trajetória tende à reta que passa pelo ponto $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{5})$ e que é paralela à reta E_1 . Os pontos $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{5})$ e $(\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$ são conhecidos como nós atratores.

(2)



2.png

Figura 2.1: Trajetórias do sistema de controle (*)

Exemplo 23 *Exemplo 24* A família de equações diferenciais do tipo

$$x' = A_0x + \sum_{i=1}^n u_i(t)A_ix$$

onde A_0, \dots, A_m são matrizes reais $m \times m$, $u(t) \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^m$ é um sistema de controle, é chamada de sistema de controle bilinear.

Para um caso particular de sistema de controle bilinear, consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 25 Sejam $M = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}$, e consideremos o seguinte sistema de controle

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + u(t) \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} x.$$

Uma trajetória para esta família de equações diferenciais é dada pela concatenação de trajetórias de $x' = A_0x$ e $x' = A_1x$. Claramente, para ambas equações, a única singularidade é o ponto $(0, 0)$. Para a equação $x' = A_0x$, temos que o fluxo desta equação é dado por $\varphi(t, x) = (x_1e^{3t}, x_2e^{-2t})$, tais que as coordenadas estão relacionadas a uma base $\{v_1, v_2\}$ de autovetores associados aos autovalores -2 e 3 . Se $x_2 \neq 0$, $\varphi(t, x) \rightarrow \infty$ quando t tende a $+\infty$, e assim, as soluções se aproximam da E_2 gerada pelo vetor v_2 . E analogamente, $\varphi(t, x) \rightarrow \infty$ se aproximam da reta E_1 gerada pelo vetor v_1 , quando $t \rightarrow -\infty$. Agora, se $x_2 = 0$, $\varphi(t, x) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^2$, quando $t \rightarrow +\infty$, e $\varphi(t, x) \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow -\infty$. As trajetórias deste caso estão ilustradas na Figura 2.2-A.

E, para a equação $x' = A_1x$, o fluxo do sistema é dado em coordenadas polares por

$$\varphi(t, x) = \rho(\cos(\theta - 2t), \text{sen}(\theta - 2t)).$$

Todas as outras trajetórias são elipses em torno da origem, com período π . As trajetórias estão ilustradas na Figura 2.2-B.

Exemplo 26 Por fim, a trajetória do sistema de controle $x' = A_0x + u(t)A_1x$ é dada pela concatenação das trajetórias das duas equações analisadas (Figura

2.2-C).

(2)

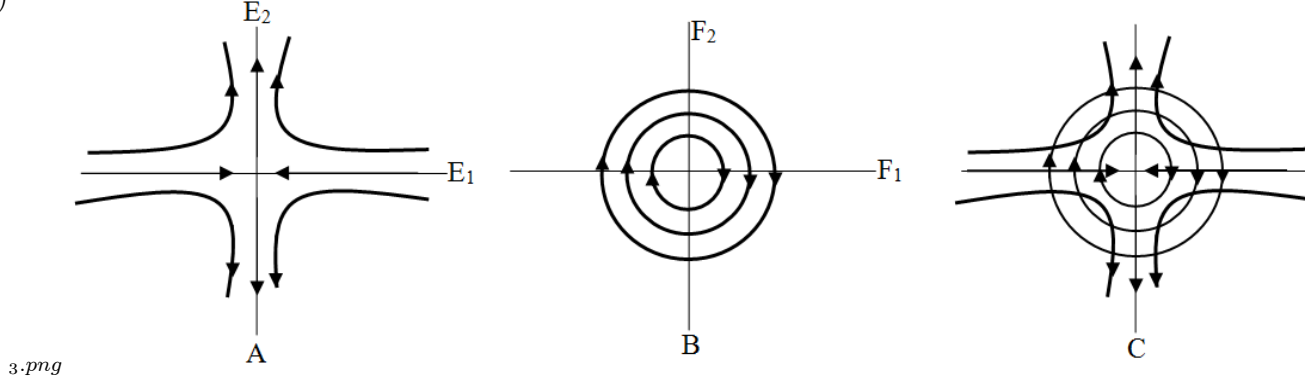


Figura 2.2

A seguir, dado um sistema de controle $x' = X(x, u(t))$, a cada campo vetorial $X_u \in \Sigma$ e $t \in \mathbb{R}$, corresponde um homeomorfismo $e^{tX_u} : M \rightarrow M$ de classe C^∞ , dado por,

$$e^{tX_u}(x) = \varphi(t, x, u) \text{ e } e^{0X_u}(x_0) = Id(x).$$

Para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$, temos que $e^{(t+s)X_u} = e^{tX_u} \cdot e^{sX_u}$. De fato, dado $x \in M$, temos que

$$\begin{aligned} e^{(t+s)X_u}(x) &= \varphi(t+s, x, u) = \varphi(t, \varphi(s, x, u), u(\cdot + s)) = \varphi(t, \varphi(s, x, u), u) \\ &= e^{tX_u}(\varphi(s, x, u)) = e^{tX_u}(x)[e^{sX_u}(x)] = e^{tX_u}(x) \cdot e^{sX_u}(x). \end{aligned}$$

A seguir, definiremos o grupo e o semigrupo de um sistema de controle.

Definição 22 O grupo e o semigrupo do sistema de controle $x' = X(x, u(t))$ são, respectivamente, definidos por:

$$\begin{aligned} G_\Sigma &= \{ e^{t_n X_{u_n}} e^{t_{n-1} X_{u_{n-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}} : u_i \in \mathfrak{U}, t_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \}, \text{ e} \\ S_\Sigma &= \{ e^{t_n X_{u_n}} e^{t_{n-1} X_{u_{n-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}} : u_i \in \mathfrak{U}, t_i > 0, n \in \mathbb{N} \}. \end{aligned}$$

Temos que G_Σ e S_Σ são não-vazios e $S_\Sigma \subset G_\Sigma$.

Proposição 16 O conjunto G_Σ é um grupo, munido com a operação interna de composição de aplicações.

Demonstração: Inicialmente, notemos que $Id_M = e^{0X_u} \in G_\Sigma$. Já temos de imediato que a propriedade associativa é satisfeita, já que a composição de aplicações satisfaz esta propriedade. Agora, tomemos quaisquer $\phi, \psi \in G_\Sigma$, tais que

$$\begin{aligned}\phi &= e^{t_l X_{u_l}} e^{t_{l-1} X_{u_{l-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}}, \\ \psi &= e^{t_k X_{v_k}} e^{t_{k-1} X_{v_{k-1}}} \dots e^{t_1 X_{v_1}},\end{aligned}$$

onde $t_i, s_j \in \mathbb{R}$ com $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, l$. Daí, temos que

$$\begin{aligned}\phi \circ \psi &= (e^{t_l X_{u_l}} e^{t_{l-1} X_{u_{l-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}}) \circ (e^{t_k X_{v_k}} e^{t_{k-1} X_{v_{k-1}}} \dots e^{t_1 X_{v_1}}) \\ &= e^{t_l X_{u_l}} e^{t_{l-1} X_{u_{l-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}} e^{t_k X_{v_k}} e^{t_{k-1} X_{v_{k-1}}} \dots e^{t_1 X_{v_1}}\end{aligned}$$

renumerando na igualdade acima, segue que,

$$\phi \circ \psi = e^{r_m X_{w_m}} e^{r_{m-1} X_{w_{m-1}}} \dots e^{r_1 X_{w_1}},$$

onde $w_i = v_i$, $i = 1, \dots, k$, $w_j = u_j$, $j = 1, \dots, l$ e $r_{j'} \in \mathbb{R}$ com $j' = 1, \dots, m = k + l$, isto é, $\phi \circ \psi \in G_\Sigma$. Então, dado $\phi \in G_\Sigma$ com $\phi = e^{t_l X_{u_l}} e^{t_{l-1} X_{u_{l-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}}$, pela Proposição 15, temos que a sua inversa existe e é dada por

$$\phi^{-1} = e^{-t_l X_{u_l}} e^{-t_{l-1} X_{u_{l-1}}} \dots e^{-t_1 X_{u_1}},$$

e portanto, pertence a G_Σ , logo, G_Σ é um grupo. \square

Definição 23 *Dado um grupo G , dizemos que um subconjunto não vazio S de G é um subsemigrupo de G se, S é um semigrupo referente a operação definida pelo grupo G .*

Proposição 17 *O conjunto S_Σ é um subsemigrupo de G_Σ .*

Demonstração: De fato, como S_Σ é um subconjunto de G_Σ temos que a propriedade associativa é satisfeita para os elementos de S_Σ . Agora resta mostrarmos que este conjunto é fechado para a operação de composição de aplicações. De fato, sejam $\alpha, \beta \in S_\Sigma$, com

$$\begin{aligned}\alpha &= e^{t_l X_{u_l}} e^{t_{l-1} X_{u_{l-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}}, \text{ e} \\ \beta &= e^{s_k X_{v_k}} e^{s_{k-1} X_{v_{k-1}}} \dots e^{s_1 X_{v_1}}\end{aligned}$$

onde $t_i > 0$ e $s_j > 0$ com $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, l$. Assim temos,

$$\begin{aligned}\alpha \circ \beta &= (e^{t_l X_{u_l}} e^{t_{l-1} X_{u_{l-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}}) \circ (e^{s_k X_{v_k}} e^{s_{k-1} X_{v_{k-1}}} \dots e^{s_1 X_{v_1}}) \\ &= e^{t_l X_{u_l}} e^{t_{l-1} X_{u_{l-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}} e^{s_k X_{v_k}} e^{s_{k-1} X_{v_{k-1}}} \dots e^{s_1 X_{v_1}}.\end{aligned}$$

E, após uma renumeração na igualdade acima, obtemos

$$\alpha \circ \beta = e^{r_m X_{w_m}} e^{r_{m-1} X_{w_{m-1}}} \dots e^{r_1 X_{w_1}},$$

onde $w_i = v_i$, $i = 1, \dots, k$, $w_j = u_j$, $j = 1, \dots, l$ e $r_{j'} \in \mathbb{R}$ com $j' = 1, \dots, m = k + l$, isto é, $\alpha \circ \beta \in S_\sigma$. \square

As trajetórias de um sistema de controle definidas para valores positivos são determinadas pelos campos de vetores em Σ e pelo correspondente semi-grupo S_Σ , já que em geral usamos concatenações para construção de trajetórias de um sistema de controle para valores positivos. Seja $\Sigma = \{X_u : u \in U\}$ o conjunto de campo de vetores completos de um sistema de controle. Tomemos $X_{u_1}, \dots, X_{u_n} \in \Sigma$ e definamos $F : [0, T] \rightarrow \Sigma$ dado por $F(t) = X_{u_k}$ se, $t \in [t_{k-1}, t_k]$, onde $t_0 = 0$, $t_n = T$ e $k = 1, \dots, n$.

Consideremos o problema de valor inicial

$$x' = F(t)(x), \text{ com } x(0) = x_0.$$

A solução deste problema é dada por

$$e^{tX}(x_0) = e^{(t-t_{k-1})X} e^{t_{k-1}X_{k-1}} \dots e^{t_1 X_1}(x_0),$$

onde $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ e $k = 1, \dots, n$.

De fato, $e^{0X_1}(x_0) = x_0$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} e^{tX}(x_0) &= \frac{d}{dt} e^{tX_u} (e^{-t_{k-1}X_k} e^{t_{k-1}X_{k-1}} \dots e^{t_1 X_1}(x_0)) \\ &= X_{u_k} (e^{tX_k} (e^{-t_{k-1}X_k} e^{t_{k-1}X_{k-1}} \dots e^{t_1 X_1}(x_0))) = X_{u_k} (e^{tX}(x_0)) = F(t)(e^{tX}(x_0)).\end{aligned}$$

A seguir, definiremos órbita do grupo e do semigrupo de um sistema de controle.

Definição 24 *Seja $x' = X(x, u(t))$ um sistema de controle e $x \in M$. A órbita do grupo do sistema é o conjunto*

$$G_\Sigma(x) = \{y \in M : \text{existe } \phi \in G_\Sigma \text{ com } \phi(x) = y\}$$

A órbita positiva do semigrupo é o conjunto,

$$S_\Sigma^+(x) = \{y \in M : \text{existe } \phi \in S_\Sigma \text{ com } \phi(x) = y\},$$

e a órbita negativa do semigrupo é o conjunto,

$$S_\Sigma^-(x) = \{y \in M : \text{existe } \phi \in S_\Sigma \text{ com } \phi(y) = x\}.$$

Observemos que quando o conjunto das funções de controle é \mathfrak{U}_{cp} , obtemos:

$$\begin{aligned} S_\Sigma^+(x) &= \{y \in M : \text{existe } u \in \mathfrak{U}_{cp} \text{ e } t > 0 \text{ com } e^{tX_u}(x) = y\}, \text{ e} \\ S_\Sigma^-(x) &= \{y \in M : \text{existe } u \in \mathfrak{U}_{cp} \text{ e } t > 0 \text{ com } e^{tX_u}(y) = x\}. \end{aligned}$$

A seguir, veremos que cada órbita é uma classe de equivalência da relação de equivalência:

$$x \sim y \iff y \in S_\Sigma(x).$$

Temos a seguinte proposição:

Proposição 18 *" \sim " é uma relação de equivalência em M .*

Demonstração: Claramente esta relação é reflexiva, pois $x \sim x$, já que $x \in G_\Sigma(x)$. Se $x \sim y$, então existe $\phi \in G_\Sigma$ tal que $\phi(x) = y$, por outro lado, $\phi^{-1}(y) = x$, com $\phi^{-1} \in G_\Sigma$, logo, $y \sim x$ (propriedade de simetria). E por fim, se $x \sim y$ e $y \sim z$, então existem $\phi, \psi \in G_\Sigma$ tais que $\phi(x) = y$ e $\psi(y) = z$, logo, $\psi\phi(x) = z$, com $\psi\phi \in G_\Sigma$, portanto $x \sim z$ (propriedade de transitividade). \square

Desta forma, temos que o conjunto das órbitas determinam uma partição do espaço de fase M .

2.2 Órbitas, Sistemas Acessíveis e Controláveis

Nesta seção, apresentaremos conceitos e resultados relacionados às propriedades de transitividade, acessibilidade, controlabilidade e controlabilidade aproximada de sistemas de controle em uma variedade diferenciável M .

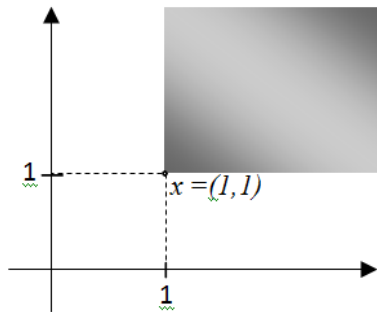
Temos que um grupo G age transitivamente em um conjunto X se para quaisquer $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $gx = y$.

Definição 25 Um sistema de controle em M determinado por um conjunto de campos de vetores Σ é dito transitivo, quando o grupo do sistema G_Σ age transitivamente em M .

Exemplo 27 Sejam $M = \mathbb{R}^2$ e $\Sigma = \{X_1, X_2\}$ a família de campos $X_1 = 1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ e $X_2 = 2 \frac{\partial}{\partial x_2}$, onde $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$ é a base canônica do espaço \mathbb{R}^2 . As soluções das equações $x' = X_1(x)$ e $x' = X_2(x)$ são dadas por $\varphi_x^1(t) = (x_1 + t, x_2)$ e $\varphi_x^2(t) = (x_1, x_2 + 2t)$, respectivamente, onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Fixando-se, $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$, dado um ponto qualquer $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ temos a solução de valor inicial x_0 , $\varphi_{x_0}^1(t)$ e $\varphi_{x_0}^2(t)$. Sejam $t_1 = x_1 - x_1^0$ e $t_2 = \frac{x_2 - x_2^0}{2}$. Temos que $\varphi_{t_1}^1$ e $\varphi_{t_2}^2 \in G_\Sigma$ é tal que $\varphi_{t_2}^2 \circ \varphi_{t_1}^1(x_0) = x$, e portanto, $G_\Sigma(x) = \mathbb{R}^2$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^2$, ou seja, o sistema de controle é transitivo em \mathbb{R}^2 . Se tomarmos, por exemplo, $x = (1, 1)$, a órbita $S_\Sigma(x)$ será dada por:

$$S_\Sigma(x) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \geq 1, \beta \geq 1\} \setminus \{x\} \text{ (Veja Figura 2.3).}$$

2



4.png

Figura 2.3

Exemplo 28 Com as mesmas condições do exemplo anterior, consideremos $X_1 = 1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ e $X_2 = 2 \frac{\partial}{\partial x_2}$. As soluções das equações $x' = X_1(x)$ e $x' = X_2(x)$

são dadas por $\varphi_x^1(t) = (x_1 + t, x_2)$ e $\varphi_x^2(t) = (x_1, x_2 + 2t)$, respectivamente, onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Fixando-se, $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$, dado um ponto qualquer $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ temos a solução de valor inicial x_0 , $\varphi_{x_0}^1(t)$ e $\varphi_{x_0}^2(t)$. Sejam $t_1 = -\frac{x_1 - x_1^0}{2}$ e $t_2 = x_2 - x_2^0$. Temos que $\varphi_{t_1}^1$ e $\varphi_{t_2}^2 \in G_\Sigma$ é tal que $\varphi_{t_2}^2 \circ \varphi_{t_1}^1(x_0) = x$, logo, $G_\Sigma(x) = \mathbb{R}^2$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^2$, e daí temos que o sistema de controle é também transitivo em \mathbb{R}^2 . Novamente, se tomarmos $x = (1, 1)$, a órbita $S_\Sigma(x)$ será dada por:

$$S_\Sigma(x) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq 1, \beta \geq 1\} \setminus \{x\} \text{ (Veja Figura 2.4)}.$$

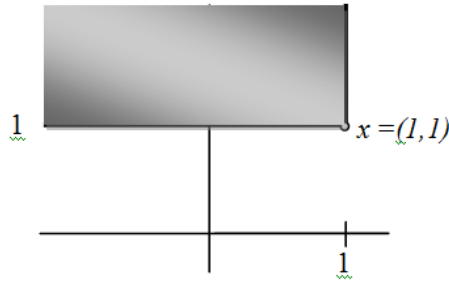


Figura 2.4

Definição 26 Um sistema de controle Σ é dito acessível a partir de $x \in M$ se $\text{int}(S_\Sigma(x)) \neq \emptyset$. O sistema é dito acessível se o for a partir de qualquer $x \in M$.

Se Σ satisfaz a propriedade de acessibilidade e M é conexa, então Σ é um sistema transitivo, já que as órbitas particionam M .

Definição 27 1. O sistema Σ é dito controlável a partir de $x \in M$ se $S_\Sigma(x) = M$. O sistema é controlável se o for a partir de todo $x \in M$.

2. O sistema Σ é aproximadamente controlável a partir de $x \in M$ se $fe(S_\Sigma(x)) = M$ e é aproximadamente controlável se o for a partir de todo $x \in M$.

Observação: Observemos que se, o sistema Σ é controlável a partir de $x \in M$, então $M = S_\Sigma(x) \subset G_\Sigma(x) \subset M$, logo, $G_\Sigma(x) = M$, daí segue que o sistema é também transitivo a partir de x . Por outro lado, se $S_\Sigma(x) = M$

então $\text{int}(S_\Sigma(x)) \neq \emptyset$, e portanto, o sistema é acessível a partir de $x \in M$. Porém, o fato de Σ ser controlável a partir de um certo $x \in M$ não implica que o sistema seja acessível, por exemplo, o sistema em \mathbb{R}^2 formado por $X = \frac{\partial}{\partial x}$ e $\pm Y$ onde Y é o campo $\frac{\partial}{\partial y}$ restrito ao semi-plano $x < 0$. Já a controlabilidade aproximada não implica nem na acessibilidade nem na transitividade do sistema. Os sistemas Σ e $-\Sigma$ são ao mesmo tempo controláveis ou não controláveis, já que as trajetórias de Σ e $-\Sigma$ coincidem, porém, são percorridas em sentido contrário.

Veremos daqui em diante resultados que serão úteis para provar a controlabilidade de certos sistemas.

Proposição 19 *Se Σ é aproximadamente controlável e $-\Sigma$ acessível, então Σ e $-\Sigma$ são controláveis.*

Demonstração: Basta mostrarmos que Σ é controlável, já que o resultado será análogo para $-\Sigma$. Tomemos $x, y \in M$. Temos que $S_\Sigma(x)$ é denso em M , já que Σ é aproximadamente controlável. Logo,

$$(S_{-\Sigma}(y)) \cap (S_\Sigma(x)) \supset (\text{int}(S_{-\Sigma}(y)) \cap (S_\Sigma(x))) \neq \emptyset.$$

Se $z \in (S_{-\Sigma}(y)) \cap (S_\Sigma(x))$ então $z = \phi^{-1}(y) = \psi(x)$ com $\phi, \psi \in S_\Sigma$. Daí, temos que $y = \phi \circ \psi(x)$ e $y \in S_\Sigma(x)$.

Como x, y são arbitrários, está provada a controlabilidade de Σ . \square

Definição 28 *Seja X um campo de vetores completo em M . Um ponto $x \in M$ é recorrente para X se para toda vizinhança U de x , existem $t, s > 0$ tais que $X_t(x) \in U$ e $X_{-s}(x) \in U$.*

Tal conjunto será denotado por $rc(X)$.

(I) Os campos de Σ são completos e para todo $X \in \Sigma$, $rc(X)$ é denso em M .

Lema 1 *Suponha que Σ seja um sistema transitivo que satisfaz **(I)**. Seja $U \subset M$ um aberto não vazio e invariante, isto é, $S_\Sigma(U) \subset U$. Então U é denso em M .*

Demonstração: Como Σ é transitivo, M é o único conjunto que é invariante por S_Σ e $S_{-\Sigma}$. Por isso, é suficiente mostrarmos que $S_\Sigma(fe(U)) \subset fe(U)$ e $S_{-\Sigma}(fe(U)) \subset fe(U)$.

Temos que $fe(U)$ é invariante, pelo fato de U o ser. Desta forma, resta verificar apenas que $S_{-\Sigma}(fe(U)) \subset fe(U)$, ou seja, que $fe(U)$ é invariante por trajetórias negativas. Para ver isso, seja $x \in fe(U)$ e suponhamos por absurdo que existem $X \in \Sigma$ e um aberto V com $V \cap fe(U) = \emptyset$ e tal que, para algum $t > 0$, $X_{-t}(x) \in V$. Então, $X_t(V) \cap U$ é um aberto não vazio, pois $X_t(X_{-t}(x)) = x \in fe(U)$.

Por hipótese, $rc(X)$ é denso em M , e portanto,

$$rc(X) \cap X_t(V) \cap U \neq \emptyset.$$

Daí, temos que existem $y \in X_t(V) \cap U$ e $T > t$ tal que $X_T(y) \in X_t(V) \cap U$, o que implica que $X_{T-t}(y) \in V$. Mas, $T - t > 0$ e U é invariante por trajetórias positivas.

Como $y \in U$, $X_{T-t}(y) \in U$.

Logo, $X_{T-t}(y) \in V \cap U$, o que contradiz a escolha de V . \square

A partir do lema anterior, se considerarmos $U = int(S_\Sigma)$, é possível mostrarmos a controlabilidade de sistemas que satisfazem **(I)**, ou mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 1 *Suponha que Σ e $-\Sigma$ são acessíveis e que Σ satisfaz **(I)**. Então Σ é controlável.*

Demonstração: Se $x \in M$ então $int(S_\Sigma(x)) \neq \emptyset$ e $int(S_\Sigma(x))$ é invariante por trajetórias positivas de Σ . Daí, pelo Lema 1, $int(S_\Sigma(x))$ é denso. E pela Proposição 19, temos que Σ é controlável a partir de x . Como x é arbitrário, a demonstração está concluída. \square

Exemplo 29 *Sejam $M = \mathbb{R}^n$ e $U = \mathbb{R}$. Consideremos o conjunto de funções*

de controle $\mathfrak{U}_{cp} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é constante por partes}\}$ e a família de equações diferenciais Σ

$$x' = X(x, u(t)) = u(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dado $u_1 = u(t_1)$, com $u \in \mathfrak{U}_{cp}$, temos que as soluções da equação $x' =$

$X_{u_1}(x) = u_1 \cdot(x)$ são da forma $\varphi_x^{u_1}(t) = e^{u_1 t}x$. Se $u_1 = 0$, tais soluções são pontos singulares. Se $u_1 \neq 0$, o único ponto singular é a origem.

As trajetórias nos pontos são segmentos de retas tendendo para origem, quando $t \rightarrow \pm\infty$, respectivamente, conforme $u_1 < 0$ e $u_1 > 0$.

Assim, dado $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo, a órbita $G_\Sigma(x)$ é um segmento de reta passando por x e tendendo para a origem.

Logo, $\text{int}(S_\Sigma(x)) = \emptyset$, já que $S_\Sigma(x) \subset G_\Sigma(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

E, portanto, o sistema não é aproximadamente controlável, nem acessível a partir de qualquer $x \in \mathbb{R}^n$. (Veja Figura 2.5).

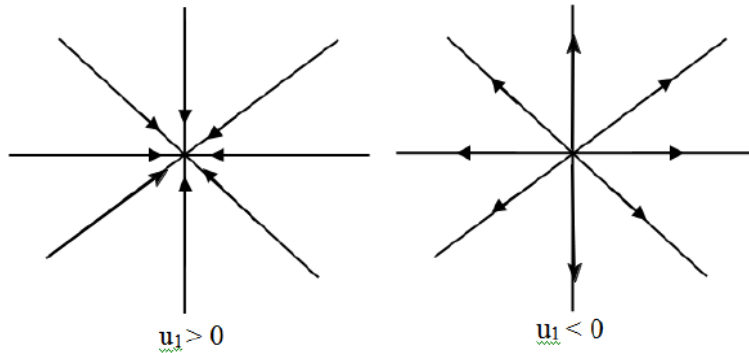


Figura 2.5

2.3 Conjuntos Controláveis para Sistemas de Controle

Nesta seção, veremos o conceito de conjuntos controláveis para sistemas de controle, que são regiões do espaço em que ocorre a controlabilidade aproximada e, em seguida, veremos também o conceito de conjuntos controláveis invariantes para um sistema de controle. Iniciaremos com o conceito de conjuntos controláveis para um sistema de controle, ou seja:

Definição 29 Dado um sistema Σ em M , um subconjunto $D \subset M$, não vazio, é um conjunto controlável para Σ , se:

1. $D \subset \text{fe}(S_\Sigma(x))$, para todo $x \in D$;
2. Existe uma trajetória positiva inteiramente contida em D , ou seja, para todo $x \in D$, existe uma função de controle $u \in \mathfrak{U}$ e uma trajetória $\varphi(t, x, u)$ com $\varphi(0, x, u) = x$ tal que $\varphi(t, x, u) \in D$, para todo $t \geq 0$.

3. D é maximal em relação às propriedades (1) e (2).

Observemos que a condição (1) da definição acima é equivalente a dizer que, dados quaisquer dois pontos $x, y \in D$, tem-se $x \in fe(S_\Sigma(y))$. De fato, fixemos $x \in D$, então, qualquer ponto $y \in D$ satisfaz $y \in fe(S_\Sigma(x))$, isto é, $D \subset fe(S_\Sigma(x))$. Analogamente, se (1) vale, dados quaisquer $x, y \in D$, temos que $D \subset fe(S_\Sigma(x))$, em particular, $x \in fe(S_\Sigma(y))$. Desta forma, a condição (1) nos diz que todo ponto em D é aproximadamente atingível a partir de qualquer outro ponto em D , ou seja, D satisfaz a propriedade de controlabilidade aproximada.

Definição 30 Um conjunto controlável D é dito invariante se, $fe(S_\Sigma(x)) = fe(D)$, para todo $x \in D$. (c.c.i.).

Lema 2 Seja C um conjunto controlável invariante para Σ . Então $S_\Sigma(x) \subset fe(C)$, para todo $x \in fe(C)$.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que $S_\Sigma(x) \not\subset fe(C)$, para algum $x \in fe(C)$. Logo, existem $y \in S_\Sigma(x)$ e uma vizinhança U de y tal que $U \cap fe(C) = \emptyset$. Seja $\phi \in S_\Sigma$ tal que $y = \phi(x)$. Então $\phi^{-1}(U) \cap C \neq \emptyset$. Daí, temos que existe $z \in C$ tal que $\phi(z) \in U$ o que implica que $\phi(z) \notin fe(C)$, o que contradiz a hipótese de que C é um conjunto controlável invariante. \square

Observamos que quando um sistema é aproximadamente controlável temos que o espaço M é um conjunto controlável para o sistema, e além disso, é o único conjunto controlável, pois a propriedade de maximalidade da definição de conjunto controlável, garante que conjuntos controláveis distintos são disjuntos.

E, também um sistema de controle pode ter muitos ou nenhum conjunto controlável, como veremos a seguir.

Exemplo 30 Sejam $M = \mathbb{R}$ e o sistema

$$x' = u(t), u(t) \in U \subset \mathbb{R}, u \in \mathfrak{U}.$$

Se $U \subset (0, +\infty)$, então o sistema não admite conjuntos controláveis. De fato, temos que as soluções gerais do sistema são dadas por

$$\varphi(t, x, u) = x + \int_0^t u(s) ds,$$

onde $\int_0^t u(s)ds$ é uma função positiva e crescente de t . Suponhamos que D seja um conjunto controlável para o sistema. Daí, dado $x \in D$, deve existir

uma função de controle $u \in \mathfrak{U}$ tal que $\varphi(t, x, u) \in D$, para todo $t \geq 0$. Agora, tomemos $y > x$ tal que $y = \varphi(t_1, x, u)$, com $t_1 > 0$. Logo, $y \in D$. Se tivermos $z \in S_\Sigma(y)$, então $z > y$, e assim, $(S_\Sigma(x)) \subset (0, +\infty)$. Desta forma, $x \notin fe(S_\Sigma(y))$, contradizendo o fato de D satisfazer a propriedade de controlabilidade aproximada. Logo, não é um conjunto controlável para o sistema.

Por outro lado, se $U = \{0\}$, então todo conjunto de um ponto é um conjunto controlável para o sistema. De fato, neste caso, todo $u \in \mathfrak{U}$ coincide com a aplicação nula em \mathbb{R} , e portanto, as soluções do sistema são definidas por $\varphi(t, x, u) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja $D = \{x_0\}$. Então, para qualquer $u \in \mathfrak{U}$, $\varphi(t, x_0, u) = x_0 \in D$, para todo $t \geq 0$. E, portanto, D satisfaz a condição (2) da Definição 29.

Analogamente, temos que $S_\Sigma(x_0) = \{x_0\}$, o que implica que $D \subset fe(S_\Sigma(x_0))$, satisfazendo a condição (1). Por fim, dado $x \neq x_0$, temos que $x \notin fe(S_\Sigma(x_0))$, logo, D não pode estar contido em outro conjunto que satisfaz a propriedade da controlabilidade aproximada.

E, portanto, D é maximal, concluindo que D é um conjunto controlável.

Proposição 20 *Sejam D_1 e D_2 conjuntos controláveis para Σ . Então, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ou $D_1 = D_2$.*

Demonstração: Suponhamos que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ e tomemos $x \in D_1 \cap D_2$. Vamos mostrar que o conjunto $D_1 \cup D_2$ satisfaz as condições (1) e (2) da Definição 29. De fato, dado $y \in D_1 \cup D_2$, temos que $y \in D_1$ ou $y \in D_2$. Suponhamos que $y \in D_1$. Como D_1 é um conjunto controlável, existe uma função de controle $u \in \mathfrak{U}$ tal que $\varphi(t, y, u) \in D_1$, para todo $t \geq 0$. Em particular, $\varphi(t, y, u) \in D_1 \cup D_2$, para todo $t \geq 0$. Logo, $D_1 \cup D_2$ satisfaz a condição (2) da Definição 29.

Também satisfaz a condição (1). De fato, seja $z \in D_1 \cup D_2$ e suponhamos que $z \in D_1$. Dado outro ponto $w \in D_1 \cup D_2$, temos que, se $w \in D_1$, então $w \in fe(S_\Sigma(y))$, pois D_1 é um conjunto controlável. Porém, se $w \in D_2$, então pelo fato de $x \in D_1$ e $x \in D_2$, temos que $x \in fe(S_\Sigma(z))$ e $w \in fe(S_\Sigma(x))$. Daí, segue que $w \in fe(S_\Sigma(z))$. Como w é qualquer em $D_1 \cup D_2$, então $D_1 \cup D_2 \subset fe(S_\Sigma(z))$. Como z é arbitrário em $D_1 \cup D_2$, segue que $D_1 \cup D_2 \subset fe(S_\Sigma(z))$, para todo $z \in D_1 \cup D_2$. Por fim, como $D_1 \subset D_1 \cup D_2$

e $D_2 \subset D_1 \cup D_2$, da maximilidade de D_1 e D_2 , temos que $D_1 \cup D_2 = D_1$ e $D_1 \cup D_2 = D_2$, e portanto, $D_1 = D_2$. \square

Proposição 21 *Seja $D \subset M$ um subconjunto satisfazendo as condições (1) e (2) da Definição 29. Então, D está contido em um conjunto controlável.*

Demonstração: Consideremos o conjunto de todos os subconjuntos de M contendo D que satisfaçam as condições (1) e (2). Vamos denotar este conjunto por \mathcal{D} e o ordenemos pela relação de inclusão. \mathcal{D} é não vazio, já que $D \subset \mathcal{D}$. Tomemos uma cadeia arbitrária $\{C_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos $C_i \in \mathcal{D}$. Mostraremos que o conjunto $\bigcup_{i \in I} C_i$ também pertence a \mathcal{D} e, portanto, que

toda cadeia em \mathcal{D} é limitada superiormente. De fato, dado $x \in \bigcup_{i \in I} C_i$, temos que $x \in C_j$, para algum $j \in I$. Como C_j satisfaz a condição (2), existe uma trajetória positiva passando por x inteiramente contida em $C_j \subset \bigcup_{i \in I} C_i$.

Logo, $\bigcup_{i \in I} C_i$ satisfaz a condição (2). Agora, dados quaisquer dois pontos $x, y \in \bigcup_{i \in I} C_i$, temos que $x \in C_i$, para algum $i \in I$ e que $y \in C_j$, para algum $j \in I$. Como C_i e C_j contêm D , tomemos um ponto $z \in D$. Temos que $x \in fe(S_\Sigma(z))$ e $z \in fe(S_\Sigma(y))$, e portanto, $x \in fe(S_\Sigma(y))$. Logo, $\bigcup_{i \in I} C_i$

satisfaz também a condição (1), considerando que $\bigcup_{i \in I} C_i \subset \mathcal{D}$. Segue pelo Lema de Zorn que \mathcal{D} possui elementos maximais. Seja C_{\max} um destes elementos maximais. Então C_{\max} é um conjunto controlável contendo D , e além disso C_{\max} é o único conjunto controlável em \mathcal{D} , pois se C'_{\max} é um conjunto controlável em \mathcal{D} , então $C_{\max} \cap C'_{\max} \neq \emptyset$, já que $D \subset C_{\max} \cap C'_{\max}$, e pela proposição anterior, $C_{\max} = C'_{\max}$. \square

2.4 Conjuntos Controláveis por Cadeias para

Sistemas de Controle

Nesta seção, veremos o conceito de controlabilidade por cadeias para sistemas de controle, o qual foi introduzido por Colonius e Kliemann. A seguir, consideremos um sistema como na Definição 20 e denotaremos por d a métrica em M .

Começemos com o seguinte conceito:

Definição 31 *Fixemos $x, y \in M$ e sejam $\varepsilon, T > 0$. Uma (ε, T) -cadeia de x para y é formada por um número natural n , $x_0 = x$, $x_1, \dots, x_n = y \in M$, $u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathfrak{U}$ e tempos $t_0, \dots, t_{n-1} \geq T$ tais que*

$$d(\varphi(t_j, x_j, u_j), x_{j+1}) < \varepsilon,$$

para todo $j = 0, \dots, n-1$. Se para todo $\varepsilon, T > 0$ existe uma (ε, T) -cadeia de x para y , então o ponto x é dito controlável por cadeias para y .

Tal definição dá a ideia de controlabilidade com "saltos" arbitrários entre partes das trajetórias.

Definição 32 *Um conjunto $E \subset M$ é chamado de conjunto controlável por cadeias, se:*

1. *Para todo $x \in E$ existe $u \in \mathfrak{U}$ tal que $\varphi(t, x, u) \in E$, para todo $t \in \mathbb{R}$;*
2. *Para todo $x, y \in E$ e $\varepsilon, T > 0$ existe uma (ε, T) -cadeia de x para y ;*
3. *E é maximal em relação às propriedades (1) e (2).*

Observamos que os conjuntos controláveis por cadeias são conjuntos maximais satisfazendo a propriedade de controlabilidade por cadeias.

Em um conjunto controlável por cadeias pode-se atingir cada ponto através de trajetórias com saltos arbitrários e tais trajetórias não precisam necessariamente estarem inteiramente contidas no conjunto.

Conjuntos controláveis por cadeias são dois a dois disjuntos, segundo a condição (3) da Definição 32.

Exemplo 31 *Seja $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e consideremos o sistema de controle*

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -u(t) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t), \quad u \in \mathfrak{U}_{cp}, \quad u(t) \in U = [0, 1] \subset \mathbb{R}.$$

Os autovalores da matriz $\begin{pmatrix} -u(t) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ são complexos conjugados

$$\lambda_1 = \frac{-u(t) + \sqrt{u(t)^2 - 4}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-u(t) - \sqrt{u(t)^2 - 4}}{2},$$

para cada $u \in \mathfrak{U}_{cp}$ e $t \in \mathbb{R}$. Se u é a função constante nula, as soluções do sistema são dadas em coordenadas polares por,

$$\varphi(t, x, u) = \|x\|(\cos(\theta - t), \text{sen}(\theta - t)).$$

Logo, as trajetórias do sistema são circunferências centradas na origem. Tais circunferências são conjuntos satisfazendo as duas primeiras condições da definição de conjunto controlável. E, assim, cada circunferência deve estar contida em um conjunto controlável. Agora, se u é positiva, as partes reais dos autovalores λ_1 e λ_2 são negativas. Assim, as trajetórias do sistema tendem para a origem de \mathbb{R}^2 espiralando em torno dela. Notemos que se tomarmos um ponto na região exterior a uma circunferência não podemos atingi-lo aproximadamente a partir de um ponto desta circunferência, e a partir de um ponto na região interior da circunferência não podemos atingir aproximadamente um ponto na circunferência. Dessa forma, as circunferências centradas na origem são os conjuntos controláveis para o sistema. O espaço M é um conjunto controlável por cadeias. De fato, basta mostrarmos que M satisfaz a propriedade de controlabilidade por cadeias.

Sejam $a, b \in M$. Se $\|a\| = \|b\|$ as trajetórias periódicas através de a e b coincidem. Daí, temos que o ponto a é controlável por cadeias para b . Se $\|a\| \neq \|b\|$, suponhamos que $\|b\| > \|a\|$ e consideremos a coroa compacta $C = \{x \in M : \|a\| \leq \|x\| \leq \|b\|\}$. Dados $\varepsilon, T > 0$ cubramos C com bolas abertas de raio ε e tomemos uma subcobertura finita $C = \bigcup_{x_i \in C} B(x_i, \varepsilon)$.

Usando a função de controle constante nula, podemos construir uma (ε, T) -cadeia de a para b .

Capítulo 3

Conjuntos Controláveis e Conjuntos Controláveis por Cadeias para Ações de Semigrupos

Neste capítulo, estudaremos os conjuntos controláveis para ações de semigrupos e algumas de suas propriedades, tais como, dois conjuntos controláveis para a ação de um semigrupo são iguais ou são disjuntos. Veremos também o conceito de conjunto de transitividade de um conjunto controlável, e algumas propriedades, tais como, que este é um conjunto aberto e denso em que o semigrupo age transitivamente. Em seguida, estudaremos os conjuntos controláveis por cadeias para ações de semigrupos em espaços métricos, em que mostraremos alguns resultados, como por exemplo, o que caracteriza os conjuntos controláveis por cadeias como interseções de conjuntos controláveis para certos semigrupos. Para outros detalhes, damos como referência Braga Barros e San Martin em [1], [18] e [19].

3.1 Conjuntos Controláveis para Ações de Semigrupos

Nesta seção, assumiremos que S é um subsemigrupo de um grupo topológico G agindo em um espaço métrico M .

Começemos com os seguintes conceitos.

Definição 33 Dado um ponto $x \in M$, definimos os conjuntos,

$$Sx = \{y \in M : \text{existe } g \in S \text{ tal que } gx = y\},$$

$$S^{-1}x = \{y \in M : \text{existe } g \in S \text{ tal que } gy = x\}.$$

O conjunto Sx é denominado órbita de x por S .

Definição 34 Dizemos que um subsemigrupo S é controlável (ou que age transitivamente) em M se, para todos $x, y \in M$ existe $g \in S$ tal que $gx = y$.

Definição 35 Um conjunto controlável para o semigrupo S em M é um subconjunto $D \subset M$ que satisfaz:

1. $\text{int}(D) \neq \emptyset$,
2. Para todo $x \in D$, $D \subset fe(Sx)$,
3. D é maximal em relação às propriedades (1) e (2), ou seja, se $D \subset D'$ e D' satisfaz (1) e (2), então $D = D'$.

A condição (3) acima, nos diz que dois conjuntos controláveis ou são disjuntos ou coincidem.

Exemplo 32 Todos os conjuntos controláveis, com interior não vazio, para sistemas de controle são exemplos de conjuntos controláveis para semigrupos. Neste caso, S será S_Σ , o semigrupo do sistema.

Para estudarmos as propriedades dos conjuntos controláveis precisamos do seguinte lema.

Lema 3 Se $a, b, c \in M$ são tais que $a \in fe(Sb)$ e $b \in fe(Sc)$ então $a \in fe(Sc)$.

Demonstração: Sejam $a \in fe(Sb)$ e $b \in fe(Sc)$. Dada uma vizinhança

aberta V_a de a em M , temos que existe $g \in S$ tal que $gb \in V_a$.

Como π_g é uma aplicação contínua, o conjunto $\pi_g^{-1}(V_a)$ é aberto em M e contém b . Então, contém um ponto hc , uma vez que $b \in fe(Sc)$. Assim,

$\pi_g(hc) = ghc \in V_a$, com $gh \in S$ e, portanto, $a \in fe(Sc)$. \square

Proposição 22 *Dois conjuntos controláveis D e D' ou são disjuntos ou coincidem.*

Demonstração: Tal resultado segue imediatamente do item (3) da Definição 35. \square

Utilizando o Lema de Zorn, podemos ver que todo conjunto de interior não vazio satisfazendo a "controlabilidade aproximada" (condição (2) na definição de conjunto controlável) está contido num conjunto controlável, ou seja:

Proposição 23 *Se D é um subconjunto de M satisfazendo as condições (1) e (2) da Definição 35, então D está contido num conjunto controlável.*

Demonstração: Seja o conjunto

$$\mathcal{F}_D = \{C \subset M : C \text{ contém } D \text{ e satisfaz (1) e (2)}\}.$$

Vamos ordenar \mathcal{F}_D pela relação de inclusão. \mathcal{F}_D é não vazio já que $D \subset \mathcal{F}_D$. Tomemos uma cadeia arbitrária $\{C_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos C_i de \mathcal{F}_D e denotemos o conjunto $U = \bigcup_{i \in I} C_i$. Temos que $\text{int}(U) \neq \emptyset$, pois cada C_i tem interior não vazio já que satisfaz (1). Daí, dado $x \in U$, temos que $x \in C_j$, para algum $j \in I$. E se $y \in U$, então $y \in C_k$, para algum $k \in I$. Tomemos um ponto $z \in D$. Como C_j e C_k contém D , temos que $z \in fe(Sx)$ e $y \in fe(Sz)$. Daí, segue pelo Lema 3 que $y \in fe(Sx)$. Logo, $U \in fe(Sx)$, para todo $x \in U$. Desta forma, U satisfaz as condições (1) e (2) e $D \subset U$, logo, $U \in \mathcal{F}_D$. Logo, toda cadeia em D é limitada superiormente, então pelo Lema de Zorn, \mathcal{F}_D possui elementos maximais. Seja C_{\max} um elemento maximal em \mathcal{F}_D . Então, C_{\max} é um conjunto controlável contendo D . \square

Uma propriedade que aparece no estudo de sistemas de controle é a da acessibilidade destes sistemas. Um sistema de controle em M é acessível se a órbita positiva a partir de qualquer ponto de M tem interior não vazio neste espaço. Para subsemigrupos esta definição se traduz da seguinte maneira.

Definição 36 *Dizemos que o semigrupo S é acessível se, e somente se, $\text{int}_M(Sx) \neq \emptyset$, para todo $x \in M$.*

Daqui em diante por simplicidade, utilizaremos a notação $int_M(Sx) = int(Sx)$.

Observemos que, se S tem interior não vazio em G , então S e S^{-1} são acessíveis. De fato, neste caso $int(S)x$ (respectivamente $int(S^{-1})x$) é um aberto contido em $int(Sx)$ (respectivamente $int(S^{-1}x)$), isto é, uma consequência de estarmos assumindo que a aplicação φ_x é aberta.

Veremos a seguir que o interior e o fecho da órbita a partir de um ponto é invariante pela ação do semigrupo.

Proposição 24 *Suponha que S age em M . Então,*

1. $S int(Sx) \subset int(Sx)$.
2. $S fe(Sx) \subset fe(Sx)$.

Demonstração: Para ver o item (1), sejam $g \in S$ e $z \in int(Sx)$. Então, existe um aberto U tal que $z \in U \subset Sx$. Utilizando que φ_g é um homeomorfismo, segue que gU é um aberto e $gz \in gU \subset gSx \subset Sx$. E, portanto $gz \in int(Sx)$. Para ver o item (2), sejam $g \in S$ e $y \in fe(Sx)$. Isto implica que existe uma sequência de pontos $g_n x$ em Sx convergindo para y . Então, pela continuidade da ação, segue que $gg_n x$ converge para gy e, portanto, $gy \in fe(Sx)$. \square

A seguir, estaremos interessados em definir o conjunto de transitividade de um conjunto controlável, e ver algumas de suas propriedades. Para fazer isto, seja D um conjunto controlável, definamos

$$D_0 = \{x \in D : x \in int(Sx) \cap int(S^{-1}x)\}.$$

Definição 37 *Definimos D_0 como o conjunto de transitividade de D . Dizemos que D é um conjunto controlável efetivo se $D_0 \neq \emptyset$.*

Temos a seguinte afirmação, que assegura a existência de conjuntos controláveis efetivos.

Proposição 25 *Se $x \in M$ é tal que $x \in int(Sx) \cap int(S^{-1}x)$, então existe um único conjunto controlável D , tal que $x \in D$, que é efetivo.*

Demonstração: Observemos que o subconjunto $int(Sx) \cap int(S^{-1}x)$ satisfaz as hipóteses da Proposição 23. De fato, se $y, z \in int(Sx) \cap int(S^{-1}x)$,

então $y = gx$ e $z = h^{-1}x$ com $g, h \in S$. Daí, $y = gx = ghz$, mostrando que $y \in Sz \subset fe(Sz)$. E, portanto, existe um conjunto controlável D que contém $int(Sx) \cap int(S^{-1}x)$, e disto segue que $x \in D$ e $D_0 \neq \emptyset$. A unicidade segue da Proposição 22, ou seja, do fato que diferentes conjuntos controláveis não se interceptam. \square

Veremos a seguir que D_0 é o subconjunto de D onde o semigrupo é transitivo. Mostraremos também que D_0 é aberto e denso em D , ou mais precisamente, temos:

Proposição 26 *Se $D_0 \neq \emptyset$ então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $D \subset int(S^{-1}x)$, para todo $x \in D_0$.
2. $D_0 = int(S^{-1}x) \cap int(Sx)$, para todo $x \in D_0$.
3. Para quaisquer $x, y \in D_0$ existe $g \in S$ com $gx = y$.
4. D_0 é denso em D .
5. D_0 é S -invariante em D , isto é, se $h \in S$, $x \in D_0$ e $hx \in D$ então $hx \in D_0$.

Demonstração: Para ver o item 1, sejam $y \in D$ e $x \in D_0$. Como $x \in D$ e $x \in int(S^{-1}x)$ (pela definição do subconjunto D_0), temos que $int(S^{-1}x) \cap D \neq \emptyset$. E, como $y \in D$ e $int(S^{-1}x)$ é uma vizinhança de x , temos por (2) da Definição 35, que existe $g \in S$ tal que $gy \in int(S^{-1}x)$. Logo, $y \in g^{-1}int(S^{-1}x) \subset int(S^{-1}x)$.

Para ver o item 2, sejam $x \in D_0$ e $y \in int(S^{-1}x) \cap int(Sx)$, então $x \in Sy$ e $x \in S^{-1}y$. Mas, $Sx \subset Sy$ e $S^{-1}x \subset S^{-1}y$ o que implica que $int(Sx) \subset int(Sy)$ e $int(S^{-1}x) \subset int(S^{-1}y)$. Portanto, $y \in (int(Sx) \cap int(S^{-1}x)) \subset (int(Sy) \cap int(S^{-1}y))$ e $y \in D_0$. De maneira recíproca, se $x, y \in D_0$, então, por (1), $y \in int(S^{-1}x)$ e $x \in int(S^{-1}y)$. Logo, existe $g \in S$ tal que $gx = y$. E, como $x \in int(Sx)$, então temos que $y = gx \in g int(Sx) \subset int(Sx)$. E, portanto, $y \in int(Sx) \cap int(S^{-1}x)$, e $D_0 \subset int(Sx) \cap int(S^{-1}x)$. Assim, temos $D_0 = int(Sx) \cap int(S^{-1}x)$.

O item 3 segue do fato de, $D_0 \subset int(Sx) \cap int(S^{-1}x)$.

E, para mostrar o item 4, seja $x \in D_0$. Pelo fato de $D_0 = int(Sx) \cap int(S^{-1}x)$ e, $int(Sx)$ e $int(S^{-1}x)$ serem abertos, temos que $fe(D_0) = fe(int(Sx)) \cap fe(int(S^{-1}x))$. E, por (1) temos $D \subset int(S^{-1}x)$. Temos também que, $D \subset fe(Sx) \subset fe(S int(Sx)) \subset fe(Sx)$. Logo, $D \subset fe(D_0)$ e D_0 é denso em D .

E, por fim, para ver o item 5, sejam $h \in S$, $x \in D_0$ e suponha que $hx \in D$. Como, $x \in int(Sx)$, então $hx \in int(Sx)$ e por (1), também temos

$hx \in \text{int}(S^{-1}x)$, e, portanto, $hx \in \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x) = D_0$. \square

A seguir, definiremos conjuntos controláveis invariantes.

Definição 38 Dizemos que C é um conjunto controlável invariante para S em M se, ele satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\text{int}(C) \neq \emptyset$.
2. $fe(Sx) = fe(C)$, para todo $x \in C$.
3. C é maximal em relação às propriedades (1) e (2), isto é, se $C \subset D$ e D satisfaz (1) e (2) então $C = D$.

Proposição 27 Suponha que $C = \bigcap_{x \in M} fe(Sx) \neq \emptyset$. Então C é o único conjunto controlável invariante para S em M .

Proposição 28 Todo conjunto controlável invariante é um conjunto controlável.

Demonstração: Seja C um conjunto controlável invariante para a ação de S . Pela Definição 38, temos que $\text{int}(C) \neq \emptyset$ e que C é fechado. Logo, $C \subset fe(Sx)$, para todo $x \in C$. Agora, devemos mostrar a maximilidade de C em relação às estas propriedades. Suponhamos que exista D contendo C tal que $D \subset fe(Sx)$, para todo $x \in D$. Disto segue que, $fe(Sz) = fe(C) \subset fe(D)$, para todo $z \in C$. Logo, $fe(D) = fe(Sz)$, para todo $z \in C$ (pois, $fe(D) \subset fe(Sz) \subset fe(D)$). Resta mostrarmos que $fe(Sz) \subset fe(D)$, para todo $x \in D$. Para isto, tomemos $y \in fe(Sx)$ e $z \in C$. Como $x \in D \subset fe(Sz)$, para todo $x \in D$, temos que $fe(D) = fe(Sx)$. Da maximilidade de C como c.c.i. segue que C é um conjunto controlável. \square

Proposição 29 Seja $C \subset M$ não vazio, satisfazendo a condição (2) da Definição 38 e fechado, então C é um conjunto controlável invariante para S .

Observemos que se, C é um conjunto controlável invariante para um subsemigrupo S de interior não vazio então, C é fechado e portanto seu conjunto de transitividade será $C_0 = (\text{int}_G(S))C \cap C = (\text{int}_G(S))C$. Outros detalhes podem ser encontrados em [19].

Observemos também que os conjuntos controláveis podem não existir para ações de semigrupos em espaços quaisquer, como veremos no seguinte exemplo.

Exemplo 33 Seja $G = (\mathbb{R}, +)$, $S = \{a \in \mathbb{R} : a \geq 0\} = \mathbb{R}^+ \subset G$ e $M = \mathbb{R}$. Considere a ação do semigrupo \mathbb{R}^+ em \mathbb{R} definida por

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, x) &\longmapsto a + x.\end{aligned}$$

Neste caso, S age em \mathbb{R} como o semigrupo das translações $\{\varphi_a : \varphi_a(x) = a + x : a \geq 0\}$. Mostremos que não existem conjuntos controláveis para esta ação. De fato, suponha $D \subset \mathbb{R}$ com $\text{int}_M(D) \neq \emptyset$ e $x \in D$. Se D não for conexo, tomemos a componente conexa que contém x . Temos que existe $y \in D$ tal que $y < x$. A órbita Sx de um ponto qualquer $x \in D$ é $Sx = \{z \in \mathbb{R} : z \geq x\} = fe(Sx)$. Observe agora que $y \in D$ mas $y \notin fe(Sx)$, contrariando o item (2) da definição de conjunto controlável.

Consideremos agora o seguinte exemplo.

Exemplo 34 Sejam $G = Sl(2, \mathbb{R})$ e

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl(2, \mathbb{R}) : a, b, c, d \geq 0 \right\}.$$

Temos que S é um subsemigrupo de interior não vazio em $Sl(2, \mathbb{R})$. Seja $\varphi : S \times \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ definida por

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, [(x_1, x_2)]\right) = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right],$$

onde $[(x_1, x_2)]$ é a reta passando pela origem e por (x_1, x_2) . Lembremos que a topologia de $\mathbb{R}P^1$ é definida da seguinte maneira: um subconjunto $U \subset \mathbb{R}P^1$ é aberto se, e somente se $\pi^{-1}(U)$ é aberto em \mathbb{R}^2 , onde $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ é definida por $\pi(x_1, x_2) = [(x_1, x_2)]$. Afirmamos agora que o conjunto

$$C = \{[(x_1, x_2)] \in \mathbb{R}P^1 : x_1, x_2 \geq 0\},$$

correspondente ao primeiro e ao terceiro quadrantes do espaço euclidiano \mathbb{R}^2 é um conjunto controlável invariante para S . De fato, sejam $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ elementos de \mathbb{R}^2 . Se $[x], [y] \in C$, então $x_i, y_i > 0$, para $i = 1, 2$. Logo,

$$\begin{aligned}g &= \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} \begin{pmatrix} \frac{x_1}{y_1} & 0 \\ 0 & \frac{x_2}{y_2} \end{pmatrix} \in S, \\ g[x] &= \left[\begin{pmatrix} \frac{x_1}{y_1} & 0 \\ 0 & \frac{x_2}{y_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] = \left[\frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} y \right] = [y].\end{aligned}$$

Logo, temos que $[y] \in S[x]$, então, $\text{int}(C) \subset S[x]$, para todo $[x] \in \text{int}(C)$. Agora, se tomarmos $[x] \notin \text{int}(C)$, devemos ter que $[x] = [(x_1, x_2)]$, com uma coordenada nula. Tomando g com todas as entradas positivas, temos que

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] = [(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)] \in \text{int}(C).$$

Já que as duas coordenadas são não nulas. Logo, dado qualquer $[x] \in C$, existe $g \in S$ tal que $g[x] \in \text{int}(C)$. Reciprocamente, se tomarmos $g \in S$ e $[x] \in C$, temos que $g[x] \in C$, pois estamos tomando todas as entradas de g e as coordenadas de x não negativas.

Assim, $S[x] \subset C$, para todo $[x] \in C$, e por consequência, $fe(S[x]) \subset fe(C)$. Logo, temos que $fe(S[x]) \subset fe(C)$, para todo $x \in C$. Como C é fechado, pela Proposição 29, temos que C é um c.c.i.

3.2 Conjuntos Controláveis por Cadeias para Ações de Semigrupos

Nesta seção, introduzimos os conjuntos controláveis por cadeias para ações de semigrupos.

Inicialmente definiremos conjuntos controláveis por cadeias para uma família de subconjuntos de um subsemigrupo. Seja G um grupo topológico e $S \subset G$ um subsemigrupo. Suponha que S age em um espaço métrico M . Fixemos uma distância d em M . Podemos definir cadeias em M em relação a uma família \mathcal{F} de subconjuntos de S .

Definição 39 *Seja \mathcal{F} uma família de subconjuntos de S . Tomemos $x, y \in M$, $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathcal{F}$. Uma (S, ε, A) -cadeia de x para y consiste de pontos $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$ em M e g_0, \dots, g_{n-1} em A tal que $d(g_j x_j, x_{j+1}) < \varepsilon$ para $j = 0, \dots, n - 1$.*

Um conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias é um subconjunto de M cujos pontos podem ser unidos por (S, ε, A) -cadeias, ou seja,

Definição 40 *Um conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias para S em M é um subconjunto $E \subset M$ que satisfaz,*

1. $\text{int}(E) \neq \emptyset$.

2. Para todos $x, y \in E$, existe uma (S, ε, A) -cadeia de x para y , para todos $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathcal{F}$.
3. E é maximal em relação às propriedades (1) e (2).

Definição 41 O semigrupo S é dito transitivo por \mathcal{F} -cadeias se, M é um conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias, ou seja, se quaisquer dois pontos de M podem ser unidos por (S, ε, A) -cadeias, para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathcal{F}$.

A seguir, veremos alguns exemplos de famílias de subconjuntos de um semigrupo S que poderão ser utilizadas posteriormente.

Temos a família \mathcal{F}_∞ definida por:

$$\mathcal{F}_\infty = \{S - K : K \text{ é um compacto de } G\}.$$

Temos também a família:

$$\mathcal{F}_{\infty, S} = \{S - K : K \text{ é um compacto de } S\}.$$

Observemos que, se tivermos um sistema de controle num grupo de Lie G e S for o semigrupo do sistema, podemos definir a família $\mathcal{F}_{control}$. Para isto, sejam X_0, X_1, \dots, X_m campos vetoriais invariantes à direita num grupo de Lie G , ou seja, campos que satisfazem: $X_*(D_g) = X$, para qualquer $g \in G$, onde $D_g : G \rightarrow G$ é a translação à direita $h \mapsto hg$. Assim, consideremos o sistema de controle

$$x'(t) = X_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t)X_i(x(t)),$$

onde $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathfrak{U}$, para alguma classe de controles admissíveis \mathfrak{U} .

Como no início deste trabalho, denotaremos por $\varphi(t, g, u)$ a solução do sistema no tempo t , dada pelo controle u e iniciando em $g \in G$, onde tal solução é dada por $\varphi(t, g, u) = \varphi(t, e, u)g$ onde e é a identidade de G . Assim, o conjunto de atingibilidade a partir da identidade no tempo t , $A(t)$ é dado por $A(t) = \{\varphi(t, e, u)g : u \in \mathfrak{U}\}$.

Proposição 30 *A união*

$$S = \bigcup_{t \geq 0} A(t),$$

é um semigrupo (dito semigrupo do sistema).

Seja a família de subconjuntos de S

$$\mathcal{F}_{control} = \bigcup_{t>T} \{A(t) : T \geq 0\},$$

onde $A(t)$ é o conjunto de atingibilidade no tempo t .

Observemos que os conjuntos controláveis por $\mathcal{F}_{control}$ -cadeias existem somente para semigrupos de controle, enquanto os conjuntos controláveis por \mathcal{F}_∞ e $\mathcal{F}_{\infty,S}$ -cadeias podem ser definidos para semigrupos em geral.

Proposição 31 *Para as famílias $\mathcal{F}_{\infty,S}$ e \mathcal{F}_∞ temos que $\mathcal{F}_{\infty,S} \subseteq \mathcal{F}_\infty$, e a igualdade ocorre se S é fechado em G .*

Demonstração: Seja $A = S - K \in \mathcal{F}_{\infty,S}$, onde K é um compacto de S . Temos também que K é compacto de G e portanto $A \in \mathcal{F}_\infty$. Se S é fechado em G , seja $A = S - K = S - (K \cap S) \in \mathcal{F}_\infty$, onde K é compacto de G . Temos que $K \cap S$ é fechado e está contido no compacto K , logo é compacto, e assim, concluímos que $A \in \mathcal{F}_{\infty,S}$. \square

Apesar da definição acima mencionar explicitamente uma distância em M , a noção de conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias não se altera quando consideramos uma distância equivalente àquela inicialmente considerada. Daí, temos o seguinte resultado:

Proposição 32 *Sejam d e d' duas métricas equivalentes em M . Então E é um conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias através da métrica d se e só se E é um conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias através da métrica d' .*

Demonstração: Tomemos $x, y \in E$. Sejam $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$ em M e $g_0, \dots, g_{n-1} \in A$ determinando uma (S, ε, A) -cadeia de x para y através da métrica d . Logo, temos $d(g_j x_j, x_{j+1}) < \varepsilon$, para $j = 0, \dots, n-1$.

Como d e d' são equivalentes, existem constantes $c, k > 0$ tais que

$$k \cdot d'(x, y) \leq d(x, y) \leq c \cdot d'(x, y), \forall x, y \in M.$$

Daí, $d'(g_j x_j, x_{j+1}) < \frac{\varepsilon}{k}$, para $j = 0, \dots, n-1$.

Então, $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y \in M$ e $g_0, \dots, g_{n-1} \in A$ determinam uma $(S, \frac{\varepsilon}{k}, A)$ -cadeia de x para y através da métrica d' .

Por outro lado se, $x'_0 = x, x'_1, \dots, x'_{n-1}, x'_n = y$ em M e g'_0, \dots, g'_{n-1} em A determinam uma (S, ε, A) -cadeia de x para y através da métrica d' , então

analogamente, temos que $x'_0 = x, x'_1, \dots, x'_{n-1}, x'_n = y$ em M e $g'_0, \dots, g'_{n-1} \in A$ determinam uma $(S, c\varepsilon, A)$ -cadeia de x para y através da métrica d . Logo, temos que a condição (2) da definição de conjunto controlável por cadeias independe da métrica, e assim, concluímos a demonstração. \square

Veremos a seguir, através de uma aplicação do Lema de Zorn, que qualquer subconjunto satisfazendo as duas primeiras condições na definição de conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias está contido num conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias.

Proposição 33 *Seja E um subconjunto de M satisfazendo as condições (1) e (2) da Definição 40, então E está contido num conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias.*

Demonstração: Seja $J = \{F \subset M : F \text{ satisfaz (1) e (2) da Definição 40}\}$. $J \neq \emptyset$, pois $E \in J$. Vamos considerar a inclusão como relação de ordem em J . Mostremos que todo conjunto totalmente ordenado de J tem limite superior. De fato, seja $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$, onde I é um conjunto de índices, um conjunto totalmente ordenado de elementos de J . Então

$$F = \bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha, \quad F \in J,$$

é um limite superior para $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$. De fato, se $x, y \in F$, então $x \in F_{\alpha_0}$ e $y \in F_{\alpha_1}$. Mas, $F_{\alpha_0} \subset F_{\alpha_1}$ ou $F_{\alpha_1} \subset F_{\alpha_0}$, isto implica que existe uma (S, ε, A) -cadeia de x para y , para todo $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathcal{F}$. Pelo Lema de Zorn, temos que J tem um elemento maximal e E está contido num conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias. \square

Segue da condição (3) da Definição 40 que dois conjuntos controláveis por \mathcal{F} -cadeias ou são disjuntos ou coincidem, isto é,

Proposição 34 *Sejam E e F dois conjuntos controláveis por \mathcal{F} -cadeias para S em G . Então $E = F$ ou $E \cap F = \emptyset$.*

Demonstração: Suponhamos que $E \cap F \neq \emptyset$ e tomemos $x \in E \cap F$. Mostraremos que $E \cup F = E = F$.

Tomemos $\varepsilon > 0$, $A \in \mathcal{F}$ e $a, b \in E \cup F$. Mostraremos que existe uma (S, ε, A) -cadeia de a para b . Suponhamos que $a \in E$ e $b \in F$. Como $a \in E$

e $x \in F$, existem $x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x$ em M , $g_0, \dots, g_{n-1} \in A$ tal que $d(g_j x_j, x_{j+1}) < \varepsilon$, para $j = 0, \dots, n-1$.

Por outro lado, temos que $x \in E$ e $b \in F$, logo, existem, $y_0 = x, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = b$ em M e h_0, \dots, h_{m-1} em A tal que $d(h_i y_i, y_{i+1}) < \varepsilon$, para $i = 0, \dots, m-1$.

Logo, $x_0 = a, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m = b$ e $g_0, \dots, g_{n-1}, h_0, \dots, h_{m-1}$ em A determinam uma (S, ε, A) -cadeia de a para b . \square

Observe a seguir que nem sempre existem conjuntos controláveis por \mathcal{F} -cadeias.

Exemplo 35 *Seja S o semigrupo de translações na reta real dado por, $S = \{g_a : g_a(x) = x+a \text{ com } a \geq 0\}$. Seja \mathcal{F} uma família qualquer de subconjuntos de S . Então não existe conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias na reta real. De fato, tomemos x e y reais e suponhamos que $x < y$. Então, para $\varepsilon < \frac{d(x,y)}{2}$, e para qualquer $A \in \mathcal{F}$ não existe (S, ε, A) -cadeia de y para x . Isto é verdade, pois $g \geq y$ para todo $g \in S$.*

A seguir, mostraremos que sob algumas condições sobre a família \mathcal{F} de subconjuntos do semigrupo S , os conjuntos controláveis efetivos estarão contidos nos conjuntos controláveis por \mathcal{F} -cadeias. Consideraremos as seguintes condições sobre \mathcal{F} .

Definição 42 *Seja \mathcal{F} uma família de subconjuntos de um semigrupo S . Diremos que \mathcal{F} satisfaz a propriedade P_l (respectivamente P_r), se para todo $\phi, \psi \in S$, $\phi \neq e$ e $A \in \mathcal{F}$, existe um número inteiro positivo n tal que $\phi^n \psi \in A$ (respectivamente $\psi \phi^n \in A$).*

Notemos que, se \mathcal{F} satisfaz tanto P_l quanto P_r então, $\phi^n \in A$ para algum inteiro $n \geq 0$. Basta tomar $\psi = \phi$.

Proposição 35 *A família $\mathcal{F}_{control}$ satisfaz as propriedades P_l e P_r .*

Demonstração: De fato, tomemos $A \in \mathcal{F}_{control}$, $g \in int(S)$ e $h \in S$. En-

tão, temos que $g = \varphi(t_1, e, u)$ e $h = \varphi(t_2, e, v)$, com $u, v \in \mathfrak{U}$ e $t_1, t_2 > 0$. Assim, $g^n = \varphi(nt_1, e, u^n)$, onde o controle u^n é n -vezes a concatenação de u por ele mesmo. Temos então que $g^n h = \varphi(nt_1 + t_2, e, w)$, com $w \in \mathfrak{U}$. Logo, $g^n h \in A$, para algum $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Analogamente, temos que $h g^n \in A$, para

qualquer $n \in \mathbb{Z}_+^*$. □

Para famílias satisfazendo as propriedades P_l e P_r é possível comparar os conjuntos controláveis por cadeias com os conjuntos controláveis efetivos. Denotemos por S_A o semigrupo gerado por um subconjunto $A \subset S$.

Proposição 36 *Suponha que \mathcal{F} é uma família de subconjuntos de um semigrupo S satisfazendo as propriedades P_l e P_r e tome $A \in \mathcal{F}$. E, sejam S_A o subsemigrupo gerado por A e, D um conjunto controlável efetivo para S . Então $D \subset fe(S_A(x))$, para qualquer $x \in D$.*

Demonstração: Tomemos $x, y \in D$ e mostremos que $y \in fe(S_A(x))$. Inicialmente, assumamos que $y \in D_0$. Então existe $h \in S$ tal que $y = hx$, já que $D \subset (intS)^{-1}D_0$, ocorre pela Proposição 26.

Temos também que existe $g \in int(S)$ tal que $gy = y$. Como $g^nh \in A$, por P_l , e $g^nhx = y$, obtemos que $y \in S_Ax$.

Agora, para y arbitrário tomemos $z \in D_0$. Então, pela primeira parte da demonstração $z \in S_Ax$, e, portanto, é suficiente mostrar que $y \in fe(S_Az)$. Para isto, tomemos $g \in int(S)$ tal que $gz = z$ e uma sequência $h_m \in S$ tal que $h_mz \rightarrow y$. Então, por P_r temos que $h_mg^n \in S_A$ para n suficientemente grande. Desde que $h_mg^n z = h_mz$, temos que existe uma sequência $g_k \in S_A$ com $g_kz \rightarrow y$, concluindo assim a demonstração. □

Uma consequência da Proposição 36 é a de que um conjunto controlável efetivo satisfaz (2) na definição de conjuntos controláveis, para quaisquer $A \in \mathcal{F}$ e $\varepsilon > 0$, ou mais precisamente,

Corolário 1 *Suponha que \mathcal{F} satisfaz tanto P_l quanto P_r . Então, um conjunto controlável efetivo para S está contido em um conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias.*

Demonstração: Seja D um conjunto controlável efetivo para S , então, pela Proposição 36 segue que para todo $A \in \mathcal{F}$, tem-se $D \subset fe(S_A(x))$, para todo $x \in D$. Vejamos que isto implica que D satisfaz às duas primeiras condições da Definição 40, e assim, utilizando a Proposição 33, segue que D está contido num conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias. De fato, como D é um conjunto controlável para S , temos que $int(D) \neq \emptyset$. Para ver o outro ítem, sejam $x, y \in D$, dados $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathcal{F}$, pela Proposição 36, $y \in fe(S_A(x))$, e

assim, existe uma sequência $g_n x \longrightarrow y$, ou equivalentemente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $d(g_n x, y) < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Façamos $x_0 = x$, $x_1 = g_0 x_0$, $x_2 = g_1 x_1, \dots, x_{n_0-1} = g_{n_0-2} x$, $x_{n_0} = g_{n_0-1} x$ e $y = g_{n_0} x$, e assim, obtemos uma (S, ε, A) -cadeia de x para y . \square

Podemos então definir conjuntos controláveis por \mathcal{F} -cadeias efetivos.

Definição 43 *Seja \mathcal{F} uma família de subconjuntos de S . Um conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias é dito efetivo se, ele contém um conjunto controlável para S que seja efetivo.*

Proposição 37 *Se uma família \mathcal{F} satisfaz tanto P_l quanto P_r , então, um conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias E é efetivo se, e só se o subconjunto $E_0 = \{x \in E : x \in \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)\}$ é não vazio.*

Demonstração: Se E é um conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias efetivo, então $E \supset D$ um conjunto controlável efetivo para S . Daí, existe $x \in D \subset E$ tal que $x \in \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)$. Para ver a recíproca, suponha que $E_0 \neq \emptyset$. Então, pela Proposição 25, existe um único conjunto controlável efetivo, $E' = E$, que contém E_0 , mostrando que E é um conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias efetivo. \square

3.3 Conjuntos Controláveis por Cadeias como Interseção de Conjuntos Controláveis

Nesta seção, para um semigrupo de homeomorfismos de um espaço métrico compacto, mostraremos uma caracterização dos conjuntos controláveis por cadeias como interseção de conjuntos controláveis para semigrupos gerados por vizinhanças de S (semigrupos perturbados) na topologia da convergência uniforme. Tais conjuntos controláveis por cadeias nos permite aplicar os resultados sobre conjuntos controláveis no estudo dos conjuntos controláveis por cadeias.

A seguir, suponha que S é um semigrupo de homeomorfismos de M e que d é uma métrica em M . Uma cadeia num semigrupo S é dada pelo intercalar da ação de elementos de S com pequenos saltos de elementos de M . Daí, temos que os conjuntos controláveis por cadeias para a ação de S são obtidos

através dos conjuntos controláveis para semigrupos gerados por vizinhanças de S .

Consideremos no grupo G de homeomorfismos de M , a métrica da convergência uniforme definida por:

$$d'(g, h) = \sup_{x \in M} d(gx, hx).$$

É de fácil verificação que a métrica d' é invariante à direita pela ação de G , isto é, se $g, h, t \in G$ então $d'(g, h) = d'(gt, ht)$.

Usaremos a notação $B(A, \varepsilon)$ para a ε -vizinhança em relação à d' no subconjunto A , onde

$$B(A, \varepsilon) = \{g \in G : \exists h \in A, d'(h, g) < \varepsilon\}.$$

Seja o subconjunto $A \subset S$, denotaremos por $S_{\varepsilon, A}$ o subsemigrupo de G gerado pela ε -vizinhança de A em G (semigrupo perturbado), ou seja,

$$S_{\varepsilon, A} = [B(A, \varepsilon)].$$

Proposição 38 *Sejam $x, y \in M$ e $A \subset S$. Então:*

1. *Se $y \in S_{\varepsilon, A}(x)$, então existe uma (S, ε, A) -cadeia de x para y .*
2. *Se $y \in fe(S_{\varepsilon, A}(x))$ então existe uma (S, ε', A) -cadeia de x para y , para todo $\varepsilon' > \varepsilon$.*

Demonstração: Para ver o item 1, seja $y \in S_{\varepsilon, A}(x)$. Então existe $g \in S_{\varepsilon, A}$ tal que $gx = y$, e segue da definição de $S_{\varepsilon, A}$ que $g = g_{k-1} \dots g_0$ com $g_i \in$

$B(A, \varepsilon)$, $i = 0, \dots, k-1$.

Tomemos $h_0, \dots, h_{k-1} \in A$ tal que,

$$d'(h_i, g_i) < \varepsilon, \text{ com } i = 0, \dots, k-1.$$

Logo, as sequências $x_0 = x, x_1 = g_0x_0, \dots, x_k = g_{k-1}x_{k-1} = y$ e $h_0, \dots, h_{k-1} \in A$ determinam uma (S, ε, A) -cadeia de x para y . De fato,

$$\begin{aligned} d(h_i x_i, x_{i+1}) &= d(h_i x_i, g_i x_i) \\ &\leq d'(h_i, g_i) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

com $i = 0, \dots, k - 1$, o que mostra a existência de uma (S, ε, A) -cadeia de x para y .

E, para ver o item 2, suponhamos que $y \in fe(S_{\varepsilon, A}x)$. Logo, existe uma sequência $g_n \in S_{\varepsilon, A}$ tal que $g_n x \rightarrow y$. Tomemos $\varepsilon' > \varepsilon$ e seja n_0 tal que $d(g_{n_0}x, y) < \varepsilon' - \varepsilon$. Como na demonstração de (1), existe uma (S, ε, A) -

cadeia de x para $g_{n_0}x$. Tomemos $y_0 = x, \dots, y_n = g_{n_0}x \in M, h_0, \dots, h_{n-1} \in A$ como a (S, ε, A) -cadeia de x para $g_{n_0}x$. Então, $d(h_i y_i, y_{i+1}) < \varepsilon$, com $i = 0, \dots, n - 1$. Logo, a cadeia $z_0 = x, z_1 = y_1, \dots, z_{n-1} = y_{n-1}, z_n = y$ em M e $h_0, \dots, h_{n-1} \in A$ é uma (S, ε', A) -cadeia de x para y . De fato, $d(h_{n-1}y_{n-1}, y) \leq d(h_{n-1}y_{n-1}, g_{n_0}x) + d(g_{n_0}x, y) < \varepsilon + (\varepsilon' - \varepsilon) = \varepsilon'$. Logo, $d(h_{i-1}y_{i-1}, y_i) < \varepsilon < \varepsilon'$, com $i = 0, \dots, n - 1$. \square

O resultado acima mostra que pontos atingíveis pela ação do semigrupo gerado pela perturbação de A também são atingíveis por (S, ε, A) -cadeias. Para mostrarmos a recíproca, precisamos introduzir a seguinte hipótese sobre a ação de G em M .

Hipótese H: Existem constantes $c > 0$ e $\eta > 0$ tal que a ação de G em M satisfaz, para qualquer $x \in M$ e qualquer $y \in B_\eta(x)$ existe $k \in G$ com $kx = y$ e $d(kx, x) \geq c.d'(k, 1_M)$.

Observemos que para ações que satisfazendo a hipótese **H** é possível interligar pontos suficientemente próximos em M por elementos de G cuja distância à identidade não seja muito maior do que a distância entre os pontos.

Como $d'(k, 1_M) = \sup_{y \in M} d(ky, y)$ e $d(kx, x) \geq c.d'(k, 1_M)$, temos que $c \leq 1$, com $c = 1$ se, e somente se, dado $x \in M$, x for um ponto para o qual o sup em $d'(k, 1_M)$ é atingido.

Exemplo 36 *Consideremos o espaço métrico compacto*

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \cup \{0\},$$

onde C_n são os círculos $C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{n}\}$, com a métrica padrão de \mathbb{R}^2 . Todos os homeomorfismos φ de M , tem a propriedade que $\varphi(0) = 0$, e assim, a hipótese **H** não é satisfeita em 0. Se $\varphi(0) \neq 0$, então o componente contendo $\varphi(0)$ é um círculo e o componente contendo 0 é o conjunto $\{0\}$. E este não é homeomorfo ao círculo.

Proposição 39 *Assumamos a hipótese **H** e seja ε tal que $0 < \varepsilon < \eta$. Suponhamos que $x_0, \dots, x_n \in M$ e $h_0, \dots, h_{n-1} \in G$ são sequências determinando uma (S, ε, A) -cadeia de x_0 para x_n . Então, existe $g \in S_{\varepsilon', A}$ com $gx_0 = x_n$, onde $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{c}$.*

Demonstração: Como $d(h_i x_i, x_{i+1}) < \varepsilon < \eta$, temos pela hipótese **H** que existe $k_i \in G$ tal que

$$d(h_i x_i, x_{i+1}) = d(k_i h_i x_i, h_i x_i) \geq c \cdot d'(k_i, 1_M), \quad \text{com } i = 0, \dots, n-1.$$

Logo, $d'(k_i, 1_M) < \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon'$. Tomando $g_i = k_i h_i$. Então, $d'(g_i, h_i) = d'(k_i h_i, h_i) = d'(k_i, 1_M) < \varepsilon'$, pela invariância à direita de d' .

E, portanto, $g_i \in B(A, \varepsilon')$ e $g_i x_i = k_i h_i x_i = x_{i+1}$, e $x_n = g_{n-1} \dots g_0 x_0$, o que conclui a demonstração. \square

Juntando as Proposições 38 e 39 temos que os conjuntos controláveis por cadeias em M , que satisfazem a hipótese **H**, podem ser estudados através dos conjuntos controláveis para ações dos semigrupos (perturbados) $S_{\varepsilon, A}$.

Como temos que $S_A \subset S_{\varepsilon, A}$, para todo $\varepsilon > 0$, então os conjuntos controláveis efetivos para S estão contidos nos conjuntos controláveis para $S_{\varepsilon, A}$, e disto segue que o conjunto controlável para $S_{\varepsilon, A}$ também é efetivo. De fato, se $g \in \text{int}(S)$ fixa um ponto y , então o mesmo vale para g^n , com $n \geq 0$ e $g^n \in \text{int}(S_{\varepsilon, A})$.

Para o semigrupo $S_{\varepsilon, A}$, temos a seguinte versão da Proposição 36.

Proposição 40 *Seja S um semigrupo de homeomorfismos de um espaço métrico compacto M e D é um conjunto controlável efetivo para S em M . Seja \mathcal{F} uma família de subconjuntos de S satisfazendo tanto P_l quanto P_r , e que o espaço M satisfaz a hipótese **H**. Então, $D \subset S_{\varepsilon, A}(x)$, para qualquer $x \in D$, $A \in \mathcal{F}$ e ε suficientemente pequeno.*

Demonstração: Sejam $x, y \in D$ e mostremos que $y \in S_{\varepsilon, A}(x)$. De fato, pela Proposição 36, existe $g \in S_A$ tal que gx está próximo de y . Como S_A é gerado por A , g é da forma, $g = g_1 \dots g_n$, com $g_i \in A$.

Utilizando a hipótese **H**, temos que existe $k \in G$ com $d'(k, 1_M) < \varepsilon$ e $kgx = y$, logo, $kg \in S_{\varepsilon, A}$ e $y \in S_{\varepsilon, A}(x)$. \square

Proposição 41 *Suponha que a hipótese \mathbf{H} é satisfeita e assumamos que \mathcal{F} satisfaz P_l e P_r . Seja D um conjunto controlável efetivo para S em M . Então, para cada $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathcal{F}$ existe um conjunto controlável $D_{\varepsilon,A}$ para o semigrupo perturbado $S_{\varepsilon,A}$, tal que $D \subset D_{\varepsilon,A}$.*

Demonstração: De fato, para todo $x, y \in D$ mostremos que $y \in S_{\varepsilon,A}(x)$, para ε suficientemente pequeno. Pela Proposição 40, existe $\phi \in S_A$ tal que $\phi(x)$ está próximo de y . Por outro lado, pela definição de S_A temos $\phi = \phi_1 \dots \phi_n$, com $\phi_i \in A$. Então, utilizando a hipótese \mathbf{H} , existe $\gamma \in G$ tal que $d'(\gamma\phi, \phi) = d'(\gamma, 1) < \varepsilon$, e $\gamma\phi(x) = y$ de modo que $\gamma\phi \in S_{\varepsilon,A}$, e portanto, $y \in S_{\varepsilon,A}(x)$. \square

O resultado, a seguir, caracteriza os conjuntos controláveis por \mathcal{F} -cadeias como interseções de conjuntos controláveis para os semigrupos perturbados $S_{\varepsilon,A}$.

Teorema 2 *Seja S um semigrupo de homeomorfismos de M . Suponha que M satisfaz a hipótese \mathbf{H} e seja \mathcal{F} uma família de subconjuntos de S satisfazendo P_l e P_r . Seja D um conjunto controlável efetivo para S em M e para $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathcal{F}$, denotemos por $D_{\varepsilon,A}$ o conjunto controlável para o semigrupo perturbado $S_{\varepsilon,A}$ contendo D . Então,*

$$E = \bigcap_{\varepsilon, A} D_{\varepsilon, A},$$

é o único conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias contendo D .

Demonstração: Temos que $\text{int}(E) \neq \emptyset$, já que $D \subset E$. Para quaisquer $x, y \in E$, $y \in fe(S_{\varepsilon',A}(x))$, para todo $\varepsilon' > 0$ e $A \in \mathcal{F}$. Então, pela Proposição 38, existe uma (S, ε, A) -cadeia de x para y , para todo $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathcal{F}$, o que mostra que E é transitivo por cadeias. Basta verificarmos a maximalidade de E . Tomemos $x \notin E$ e $y \in E$ e suponhamos que para todo $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathcal{F}$ existem (S, ε, A) -cadeias de x para y e de y para x . Como M satisfaz a hipótese \mathbf{H} , pela Proposição 39 temos que $x \in S_{\varepsilon,A}(y)$ e $y \in S_{\varepsilon,A}(x)$, com $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathcal{F}$. Porém, $y \in D_{\varepsilon,A}$ (pois $y \in E$), logo, $x \in D_{\varepsilon,A}$ para todo ε, A , contradizendo a hipótese de que $x \notin E$. Logo, mostramos que $E \cup \{x\}$ não está contido em nenhum conjunto controlável por cadeias e assim temos a maximalidade de E . \square

Proposição 42 *Seja S um semigrupo de homeomorfismos de M . Suponha que M satisfaz a hipótese **H** e seja \mathcal{F} uma família de subconjuntos de S satisfazendo P_l e P_r , além disso, suponha que existe um único conjunto controlável invariante D , para S em M . Então $D_{\varepsilon,A}$ é o único conjunto controlável invariante para $S_{\varepsilon,A}$ contendo o conjunto controlável invariante para S .*

Demonstração: Pela Proposição 27, temos que existe um único conjunto controlável para S em um espaço compacto, digamos C , se, e somente se, $C = \bigcap_{x \in M} fe(Sx) \neq \emptyset$. E neste caso, o conjunto controlável invariante é dado por esta intersecção e, assim, uma afirmação semelhante vale para $S_{\varepsilon,A}$. Vamos definir $C_{\varepsilon,A} = \bigcap_{x \in M} fe(S_{\varepsilon,A}(x))$ e, assim, para mostrarmos o resultado, basta mostrarmos que $D_{\varepsilon,A} \cap C_{\varepsilon,A} \neq \emptyset$. Para ver isto, tomemos $x \in M$. Então, pela Proposição 26, $D \subset int(S^{-1}(y))$, para todo $y \in D_0$, e isto implica que existe $\phi \in S$ tal que $\phi(x) \in D_0$. Como \mathcal{F} satisfaz P_l , então $\phi^n \in A$, para algum n inteiro (tomamos $\phi = \psi$ na definição de P_l). Como $\phi^n(x) \in D$, pois D é invariante, e como $D \subset D_{\varepsilon,A}$ e $D_{\varepsilon,A}$ é um conjunto controlável para $S_{\varepsilon,A}$, segue que $D_{\varepsilon,A} \subset fe(S_{\varepsilon,A}(x))$, concluindo assim o resultado. \square

Capítulo 4

Conjuntos Controláveis por Cadeias em Fibrados

Neste capítulo, estudaremos os conjuntos controláveis por cadeias em fibrados principais e seus fibrados associados. Inicialmente, estudaremos alguns semigrupos de homeomorfismos em fibrados, e a propriedade de acessibilidade. Estudaremos o comportamento dos conjuntos controláveis por cadeias em fibrados, como por exemplo, sob algumas hipóteses, mostraremos que os conjuntos controláveis por cadeias do espaço total de um fibrado são projetados dentro de conjuntos controláveis por cadeias do espaço base do fibrado, e bem como, conjuntos de transitividade de conjuntos controláveis por cadeias são projetados dentro do conjunto de transitividades de conjuntos controláveis por cadeias. Veremos também que um conjunto controlável por \mathcal{F}_q -cadeias na fibra de um fibrado está contido em um conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias no espaço total, entre outros.

4.1 Semigrupos de Homeomorfismos e Acessibilidade

Com as notações introduzidas nas seções 1.5 e 1.6, sejam G um grupo topológico agindo à direita num espaço topológico Q , e $Q(M, G)$ o fibrado principal com espaço total Q , espaço base M e grupo estrutural G e seja $\pi_Q : Q \rightarrow M$ a projeção canônica.

A seguir, introduziremos alguns semigrupos. Consideremos S_Q um semi-

grupo de homeomorfismos de Q comutando com a ação à direita, isto é,

$$\phi_Q(q.a) = \phi_Q(q).a, \text{ com } a \in G \text{ e } \phi_Q \in S_Q.$$

O semigrupo S_Q induz um semigrupo S_M de homeomorfismos de M , ou seja, se $y \in M$ e $y = \pi_Q(q)$, definimos um elemento $\phi_M \in S_M$ tal que

$$\phi_M(y) = \pi_Q(\phi_Q(q)), \text{ com } \phi_Q \in S_Q.$$

Suponhamos que o grupo estrutural G age à esquerda e transitivamente no grupo topológico F . Como já vimos, temos o fibrado associado ao fibrado principal $Q(M, G)$, com fibra tipo F . Denotado por $E(M, F, G, Q)$ ou simplesmente por E , o espaço total deste fibrado. Vale lembrarmos que os elementos de E são classes de equivalência da relação em $Q \times F$ dada por $(q, v) \sim (qa, a^{-1}v)$, $a \in G$, e denotamos por $[q, v]$, $q \in Q$, $v \in F$, os elementos de E . A projeção canônica $\pi_E : E \rightarrow M$ no fibrado é definida por $\pi_E([q, v]) = \pi_Q(q)$.

O semigrupo S_Q também induz um outro semigrupo de homeomorfismos, o semigrupo S_E de homeomorfismos de E , tal que, $S_E([q, v]) = [S_Q(q), v]$, ou seja,

$$\phi_E([q, v]) = [\phi_Q(q), v], \text{ com } \phi_Q \in S_Q.$$

Proposição 43 *Se S_Q é acessível, então S_E é acessível.*

Demonstração: De fato, temos que a aplicação

$$v \in F \longmapsto qv \in E_x, \text{ com } x = \pi(q),$$

é uma submersão, logo,

$$\text{int}(S_E(q.v)) = \text{int}(S_Q(q).v) = \text{int}(S_Q(q)).v, \text{ para todo } x \in M \text{ e } v \in F.$$

E como S_Q é acessível, temos $\text{int}(S_Q(q)) \neq \emptyset$, para todo $q \in Q$, daí, segue que S_E é acessível. \square

Seja $q \in Q$, então definimos o conjunto,

$$S_q = S_Q(q) \cap \pi_Q^{-1}(x), \quad x = \pi_Q(q).$$

Usando a identificação de $\pi_Q^{-1}(x)$ com G dada por $a \in G \longmapsto qa \in \pi_Q^{-1}(x)$, S_q pode ser visto como um subconjunto de G ,

$$S_q = \{a \in G : \exists \phi_Q \in S_Q, \phi_Q(q) = q.a\}.$$

Proposição 44 *Se $S_q \neq \emptyset$, então S_q é um subsemigrupo de G .*

Demonstração: De fato, sejam $a_1, a_2 \in S_q$, então $\psi_Q(q) = q.a_1$ e $\phi_Q(q) = q.a_2$. Daí, temos,

$$q = (q.a_1).a_2^{-1} \implies q = \psi(q)a_2^{-1},$$

então,

$$\phi_Q(q) = \phi_Q(\psi(q)a_2^{-1}) = q.a_1.$$

Logo, temos $\phi_Q(\psi(q)) = q.(a_1a_2)$, o que implica que $a_1a_2 \in S_q$. \square

Observação: E mais, S_q é o subsemigrupo agindo na fibra tipo F .

Os semigrupos S_Q, S_E e S_q foram estudados em [2].

Seja \mathcal{F} uma família de subconjuntos de S_Q . A família \mathcal{F} induz a família \mathcal{F}_M no semigrupo S_M , a família \mathcal{F}_E em S_E e a família \mathcal{F}_q em S_q , isto é,

$$\mathcal{F} \subset S_Q \quad \text{induz} \quad \begin{array}{l} \cdot \mathcal{F}_E \subset S_E \\ \cdot \mathcal{F}_M \subset S_M \\ \cdot \mathcal{F}_q \subset S_q \end{array}.$$

De fato, para cada $A \in \mathcal{F}$, definimos:

$$\begin{aligned} A_M &= \{\phi_M \in S_M : \exists \phi_Q \in A \text{ e } \phi_M(\pi_Q(q)) = \pi_Q(\phi_Q(q))\}, \\ A_E &= \{\phi_E \in S_E : \exists \phi_Q \in A \text{ e } \phi_E([q, v]) = [\phi_Q(q), v]\}, \text{ e} \\ A_q &= \{a \in G : \exists \phi_Q \in A \text{ e } \phi_Q(q) = q.a\}. \end{aligned}$$

Assim, podemos definir as famílias induzidas:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_M &= \{A_M : A \in \mathcal{F}\}, \\ \mathcal{F}_E &= \{A_E : A \in \mathcal{F}\}, \text{ e} \\ \mathcal{F}_q &= \{A_q : A \in \mathcal{F}\}. \end{aligned}$$

Proposição 45 *Seja \mathcal{F} uma família de subconjuntos de S_Q satisfazendo P_l e P_r . Então, $\mathcal{F}_M, \mathcal{F}_E$ e \mathcal{F}_q também satisfazem P_l e P_r .*

Demonstração: Mostraremos primeiramente que P_l é satisfeito. De fato, dado $A \in \mathcal{F}$, existe $n \in \mathbb{Z}$, tal que $\phi_Q(\rho_Q)^n = \sigma \in A$, com ϕ_Q e $\rho_Q \in S_Q$. Daí, para a família \mathcal{F}_M , temos

$$\sigma_M(\pi_Q(q)) = \pi_Q(\sigma_Q(q)), \text{ (pela igualdade enunciada acima, } \phi_M(\pi_Q(q)) = \pi_Q(\phi_Q(q))\text{)},$$

daí, substituindo $\sigma = \phi_Q(\rho_Q)^n$, temos

$$\pi_Q((\phi_Q(\rho_Q)^n)(q)) = (\phi_M(\rho_M)^n)(\pi_Q(q)),$$

e, portanto, $\phi_M(\rho_M)^n \in A_M$. Para a família \mathcal{F}_E ,

$$\phi_E(\rho_E)^n([q, v]) = \phi_E([\rho_Q^n(q), v]) = [(\phi_Q(\rho_Q)^n)(q), v],$$

logo, $\phi_E(\rho_E)^n \in A_E$. Por fim, sejam $a, b \in S_q$ e $A_q \in \mathcal{F}_q$, daí, existem $\phi_Q, \rho_Q \in S_Q$, tais que $\phi_Q(q) = q.a$ e $\rho_Q(q) = q.b$. Daí,

$$\phi_Q(\rho_Q)^n(q) = \phi_Q(q.a^n) = q.ba^n.$$

Então, $\phi_Q(\rho_Q)^n \in A$ e $ba^n \in A_q$. Analogamente, demonstra-se que $\mathcal{F}_M, \mathcal{F}_E$ e \mathcal{F}_q satisfazem P_r . \square

4.2 Conjuntos Controláveis por Cadeias e Propriedades

Nesta seção, estudaremos o comportamento dos conjuntos controláveis por cadeias para ações de semigrupos em fibrados. Mostraremos que a projeção de um conjunto controlável por cadeias no espaço total do fibrado está contida num conjunto controlável por cadeias na base do fibrado.

Teorema 3 *Sejam E um fibrado com projeção $\pi : E \rightarrow M$ e \mathcal{F} uma família de subconjuntos de S_Q . Suponha que E é compacto e seja $H \subset E$ um conjunto controlável por \mathcal{F}_E – cadeias. Então, existe um conjunto controlável por \mathcal{F}_M – cadeias $B \subset M$ tal que $\pi(H) \subset B$.*

Demonstração: Temos $\text{int}(H) \neq \emptyset$, já que por hipótese H é um conjunto controlável por \mathcal{F}_E – cadeias, e π é uma aplicação aberta. Então, temos $\text{int}(\pi(H)) \neq \emptyset$. Mostremos que existe um conjunto controlável por \mathcal{F}_M – cadeias, $B \subset M$, tal que $\pi(H) \subset B$, ou seja, dados $x', y' \in \pi(H)$, podemos unir estes pontos através de uma (S_M, ε, A_M) –cadeia. Para isso, sejam $\varepsilon > 0$, $A_M \in \mathcal{F}_M$ e $x', y' \in \pi(H)$. Tomemos $x, y \in H$, tais que $\pi(x) = x'$ e $\pi(y) = y'$. Como E é compacto e π é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$d(\pi(z), \pi(z')) < \varepsilon \quad \text{se} \quad d(z, z') < \delta, \quad \text{com } z, z' \in E.$$

Sejam $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$ em E e $\phi_{E_0}, \phi_{E_1}, \dots, \phi_{E_{n-1}}$ em A_E formando uma (S_E, δ, A_E) – cadeia de x para y . Daí, do fato de π ser uniformemente contínua, da definição do semigrupo S_M e de

$$d(x_j, \phi_{E_j}(x_j)) < \delta,$$

temos que,

$$d(\pi(x_j), \pi(\phi_{E_j}(x_j))) = d(\pi(x_j), \phi_{M_j}(\pi(x_j))) < \varepsilon,$$

isto é, $\pi(x_i)$ e ϕ_{M_i} determinam uma (S_M, ε, A_M) – cadeias de x' para y' . Como $\pi(H)$ satisfaz as propriedades (1) e (2) da Definição 40, $\pi(H)$ está contido em um conjunto controlável por \mathcal{F} – cadeias. Logo, existe um conjunto controlável por \mathcal{F}_M – cadeias $B \subset M$ tal que $\pi(H) \subset B$. \square

Vejamos a seguir, o conceito de acessibilidade sobre um conjunto controlável por \mathcal{F} – cadeias.

Definição 44 *Seja \mathcal{F} uma família de subconjuntos de S_Q , satisfazendo P_l e P_r . Suponha que H é um conjunto controlável por cadeias efetivo em M e seja $H_0 = \{x \in H : x \in \text{int}(S_M(x)) \cap \text{int}(S_M^{-1}(x))\}$. O semigrupo S_Q é dito acessível sobre H_0 se, para todo $q \in \pi_Q^{-1}(H_0)$, $\text{int}(S_Q(q)) \cap \pi_Q^{-1}(H_0) \neq \emptyset$.*

Lema 4 *Seja $H \subset M$ um conjunto controlável por \mathcal{F}_M – cadeias efetivo e suponha que S_Q é acessível sobre H_0 . Então, $\text{int}(S_q) \neq \emptyset$ se $q \in \pi_Q^{-1}(H_0)$.*

Demonstração: Tomemos $\phi_Q \in S_Q$ tal que $\phi_Q(q) \in \text{int}(S_Q(q)) \cap \pi_Q^{-1}(H_0)$. Existe um conjunto controlável efetivo, D , para S_M tal que $x = \pi_Q(q) \in D_0$. Então, $\pi_Q(\phi_Q(q)) = \phi_M(\pi_Q(q)) \in D_0$, e existe $\psi_Q \in S_Q$ tal que $x = \psi_M(\pi_Q(\phi_Q(q)))$, de modo que $\psi_Q\phi_Q(q)$ pertence à mesma fibra que q . Daí, pela escolha de ϕ_Q , temos que $\psi_Q\phi_Q(q) \in \text{int}(S_Q(q))$, logo, se tomarmos $a \in G$ tal que $\psi_Q\phi_Q(q) = q.a$, então $a \in \text{int}(S_q)$, concluindo a demonstração do lema. \square

A recíproca do Teorema 3 é garantida pelo seguinte teorema.

Teorema 4 *Sejam E um fibrado com projeção $\pi : E \rightarrow M$ e \mathcal{F} uma família de subconjuntos de S_Q satisfazendo P_l e P_r . Suponha que E é compacto, $B \subset M$ é um conjunto controlável por \mathcal{F}_M – cadeias efetivo e que S_Q é acessível sobre B_0 . Então, existe um conjunto controlável por \mathcal{F}_E – cadeias efetivo $H \subset E$ tal que $\pi(H) \subset B$.*

Demonstração: Temos por hipótese que B é um conjunto controlável por \mathcal{F}_M -cadeias efetivo, logo, $B_0 \neq \emptyset$. Então, tomemos $x \in B_0 = \{x \in B : x \in \text{int}(S_M(x)) \cap \text{int}(S_M^{-1}(x))\}$. Pela Proposição 25, temos que $x \in C$, onde C é um conjunto controlável efetivo, contido em B . Usando a Proposição 3.4, de [2], temos que existe um conjunto controlável efetivo $D \subset E$ para S_E , com $\pi(D) \subset C$. Dentro dessas condições, o Corolário 1 nos garante que D está contido em um conjunto controlável por \mathcal{F}_E -cadeias, dito H . Como conjuntos controláveis por cadeias são maximais e pelo Teorema 3, temos que existe um conjunto controlável por \mathcal{F}_M -cadeias, $B \subset M$, tal que $\pi(H) \subset B$. \square

Sejam d_E uma métrica no espaço total E do fibrado com fibra típica F , d_F uma métrica invariante à direita na fibra F e d_M a métrica no espaço base M tal que a projeção canônica $\pi_E : E \rightarrow M$ é Lipschitziana, ou seja, existe uma constante $c > 0$ tal que, para todo $x, y \in E$, tem-se $d_E(x, y) \leq c \cdot d_M(\pi_E(x), \pi_E(y))$.

Para darmos continuidade ao estudo, consideremos o seguinte resultado estudado em [2].

Proposição 46 *Assuma que S_M é acessível e seja $C \subset M$ um conjunto controlável efetivo, e suponha que para cada $x \in C_0$, existe $q \in \pi_Q^{-1}(x)$, $x \in M$, tal que S_q age transitivamente em F . Então, para cada $p \in Q$ tal que $\pi(p) \in C_0$, temos que S_p é transitivo em F . Além disso, S_E é acessível sobre C , $D = \pi^{-1}(C)$ é um conjunto controlável efetivo em E e S_E é transitivo sobre C_0 .*

Podemos considerar os conjuntos controláveis por cadeias como interseção de conjuntos controláveis, como vimos na Seção 3.3 para ações de semigrupos, e agora para fibrados. Recordando tais notações, seja o subconjunto $A \subset S$, denotaremos por $S_{\varepsilon, A}$ o subsemigrupo de G gerado pela ε -vizinhança de A em G , ou seja,

$$S_{\varepsilon, A} = [B(A, \varepsilon)].$$

Assim, temos o seguinte resultado.

Teorema 5 *Seja E um fibrado associado ao fibrado principal Q , com grupo estrutural compacto. Suponha que M e E são compactos e que Q é conexo. Vamos assumir que \mathcal{F} é uma família de subconjuntos de S_Q satisfazendo P_l e P_r e, que as ações dos grupos de homeomorfismos sobre M e E satisfazem*

a hipótese **H**. Seja B um conjunto controlável por \mathcal{F}_M -cadeias efetivo em M e suponhamos que S_Q é acessível sobre B_0 . Então, $\pi_E^{-1}(B)$ é um conjunto controlável por \mathcal{F}_E -cadeias efetivo em E . Logo, o número de conjuntos controláveis por \mathcal{F}_E -cadeias efetivo em E é igual ao número de conjuntos controláveis por \mathcal{F}_M -cadeias em M .

Demonstração: Primeiramente, mostraremos que,

$$((S_M)_{\varepsilon, A_M}) \subset (S_E)_{c\varepsilon, A_E},$$

ou seja, que $\phi_E \in (S_E)_{c\varepsilon, A_E}$ se $\phi_M \in (S_M)_{\varepsilon, A_M}$. Basta mostrarmos que, $\phi_E \in B(A_E, c\varepsilon)$, com $\phi_M \in B(A_M, \varepsilon)$.

De fato, pois

$$\begin{aligned} d'(\gamma_E, \phi_E) &= \sup_{[q, v] \in E} d_E(\gamma_E([q, v]), \phi_E([q, v])) \\ &= \sup_{[q, v] \in E} d_E([\gamma_Q(q), v], [\phi_Q(q), v]) \\ &\leq c \cdot \sup_{[q, v] \in E} d_M(\pi_Q(\gamma_Q(q)), \pi_Q(\phi_Q(q))) \\ &= c \cdot d'(\gamma_M, \phi_M). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2, temos que

$$B = \bigcap_{\varepsilon, A_M} D_{\varepsilon, A_M},$$

onde D_{ε, A_M} é um conjunto controlável para $(S_M)_{\varepsilon, A_M}$. Daí, temos

$$\pi^{-1}(B) = \bigcap_{\varepsilon, A_M} \pi^{-1}(D_{\varepsilon, A_M}).$$

E, pela Proposição 46 acima, tem-se que $\pi^{-1}(D_{\varepsilon, A_M})$ é um conjunto controlável para $((S_M)_{\varepsilon, A_M}) \subset (S_E)_{c\varepsilon, A_E}$. Logo, $\pi^{-1}(B)$ é um conjunto controlável por \mathcal{F}_E -cadeias em E , caracterizando novamente os conjuntos controláveis por cadeias como a interseção de conjuntos controláveis. \square

O Teorema a seguir mostra que um conjunto controlável por \mathcal{F}_q -cadeias na fibra de um fibrado principal está contido num conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias no espaço total.

Teorema 6 *Seja E um fibrado associado ao fibrado principal Q com projeções π_E e π_Q , respectivamente. Suponha que \mathcal{F} é uma família de subconjuntos de S_Q . Seja $q \in \pi_Q^{-1}(x)$, $x \in M$. E seja H um conjunto controlável por \mathcal{F}_q -cadeias em F .*

Então:

1) *Qualquer conjunto controlável por \mathcal{F}_q -cadeias em $\pi_Q^{-1}(x)$ está contido em um conjunto controlável por \mathcal{F} -cadeias em Q .*

2) *$[q, H]$ está contido em um conjunto controlável por \mathcal{F}_E -cadeias em E .*

Demonstração: 1) Seja H um conjunto controlável por \mathcal{F}_q -cadeias em $\pi_Q^{-1}(x)$. Tomemos $z, z' \in H$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ e $A_q \in \mathcal{F}_q$ existem $x_0 = z$, $x_1, \dots, x_n = z'$ em $\pi_Q^{-1}(x)$ e $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in A_q$ tais que

$$d(x_j a_j, x_{j+1}) < \varepsilon, \quad \text{com } j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Seja $\phi_{Q_j} \in A$ dado por $\phi_{Q_j}(q) = qa_j$. Então, x_0, \dots, x_n e $\phi_{Q_0}, \dots, \phi_{Q_{n-1}}$ determinam uma \mathcal{F} -cadeia de z para z' .

2) Sejam $[q, v], [q, v'] \in [q, H]$. Como H é um conjunto controlável por \mathcal{F}_q -cadeias, para todo $\varepsilon > 0$ e $A_q \in \mathcal{F}_q$ existe $v_0 = v, \dots, v_n = v'$ em F e $a_0, \dots, a_{n-1} \in A_q$ tal que $d_F(a_j v_j, v_{j+1}) < \varepsilon$, com $j=0,1,\dots,n-1$. Seja $\phi_{Q_j} \in A$ dado por $\phi_{Q_j}(q) = qa_j$. Então, $[q, v_0], \dots, [q, v_n]$ e $\phi_{Q_0}, \dots, \phi_{Q_{n-1}}$ determinam uma (S, ε, A) -cadeia de $[q, v]$ para $[q, v']$. De fato,

$$\begin{aligned} d_E(\phi_{E_j}([q, v_j]), [q, v_{j+1}]) &= d_E([qa_j, v_j], [q, v_{j+1}]) \\ &= d_E([q, a_j v_j], [q, v_{j+1}]) \\ &= d_F(a_j v_j, v_{j+1}) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Bibliografia

- [1] Braga Barros, C.J. e San Martin L.A.B.: *Chain control sets for semigroup actions*. Computational and Applied Mathematics, vol. 15, n. 3, 257–276, 1996.
- [2] Braga Barros, C.J. e San Martin L.A.B.: *On the action of semigroups in fiber bundles*. Matemática Contemporânea , vol 13, 1-19, 1997.
- [3] Braga Barros, C. J.: *Chain control sets and fiber bundles*. Computational and Applied Mathematics. vol. 22, n. 3, 411–424, 2003.
- [4] Braga Barros, C.J. e Reis R. A.: *On the number of control sets on compact homogeneous spaces*. Portugaliae Mathematica, vol 60 fasc. 3, 359-371, 2003.
- [5] Colonius, F. e Kliemann, W.: *Linear control semigroups acting on projective spaces*. Journal of Dynamics and Differential Equations, vol 5, 3, 495-528, 1993.
- [6] Colonius, F. e Kliemann, W.: *Some aspects of control systems as dynamical systems*. Journal of Dynamics and Differential Equations, vol 5, 3, 469–494, 1993.
- [7] Colonius, F. e Kliemann, W.: *The dynamics of control*. Birkhauser, Boston, 2000.
- [8] Helgason, S.: *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*. Academic Press, New York, 1978.
- [9] Husemoller, D.: *Fibre bundles*. Graduate texts in mathematics; Springer Verlag, New York Heidelberg Berlin, vol 20, 1975.

- [10] Jurdjevic, V. e Sussman, H. J.: *Control systems on Lie groups*. J. Of. Diff. Eq. vol 12, 313-329, 1972.
- [11] Kobayashi, S e Nomizu, K.: *Foundations of differential geometry*. John Wiley & Sons, New York, 1963.
- [12] Lawson, J. D., Hilgert J., e Hofmann, K. H.: *Lie groups, convex cones and semigroups*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1989.
- [13] Lima, E. L.: *Variedades Diferenciáveis*. IMPA, 2011.
- [14] Lobry, C.: *Controlability of nonlinear systems on compact manifolds*. SIAM, Control, Vol. 12, n. 1, 1-4. 6, 1974.
- [15] Mimura, M. e Toda, H.: *Topology of Lie groups, I and II*. Translations of mathematical monographs, vol 91, 1991.
- [16] Munkres, J. R.: *Topology, A First Course*. Prentice-Hall, 2nd, 1975.
- [17] San Martin, L.A.B.: *Invariant control sets on flag manifolds*. Mathematics of Control, Signals and Systems, vol 6, 41-61, 1993.
- [18] San Martin, L.A.B.: *Control sets and semigroups in semi-simple Lie groups*. In Semigroups in algebra, geometry and analysis. Gruyter Verlag, 1994.
- [19] San Martin, L.A.B. e Tonelli, P.A.: *Semigroup actions on homogeneous spaces*. Semigroup Forum vol 50, 59-88, 1995.
- [20] San Martin, L. A. B.: *Notas de Grupos de Lie*. Unicamp/IMECC, 2012.
- [21] Singer, I. M.; Thorpe, J.A.: *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*. Springer, 1967.
- [22] Varadarajan, V.S.: *Lie groups, Lie algebras and their representations*. Prentice-Hall, 1974.
- [23] Varadarajan, V.S.: *Harmonic analysis on real reductive groups*. LNM-Springer, 576, 1977.
- [24] Vinberg, E.B.: *Invariant convex cones and orderings in Lie groups*. Funct. Anal. and Appl. 14, 1-13, 1980.

- [25] Wan, Chê-hsien.: *Lie algebras*. International series of monographs in pure and applied mathematics, vol 104.
- [26] Warner, F. W.: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott, Foresman and Company, 1970.
- [27] Warner, G.: *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups*. Springer-Verlag, 1972.