

Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Pedro Vinícius Fernandes Martins

O método holográfico aplicado em física da matéria condensada

Rio Claro – SP

2019

Pedro Vinícius Fernandes Martins

O método holográfico aplicado em física da matéria condensada

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, câmpus Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antônio Barreiro

Rio Claro – SP

2019

M386m Martins, Pedro Vinícius Fernandes
O método holográfico aplicado em física da matéria condensada /
Pedro Vinícius Fernandes Martins. -- Rio Claro, 2019
48 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Luiz Antônio Barreiro

1. Holografia. 2. Supercondutividade. 3. Supercondutividade
holográfica. 4. Buraco negro. 5. Método holográfico. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Pedro Vinícius Fernandes Martins

O método holográfico aplicado em física da matéria condensada

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, câmpus Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antônio Barreiro

Comissão examinadora

Prof. Dr. Luiz Antônio Barreiro

UNESP – Rio Claro

Prof. Dr. Ricador Paupitz Barbosa dos Santos

UNESP – Rio Claro

Prof. Dr. Emanuel Fernandes de Lima

UFSCar – São Carlos

Data da defesa: 13 de setembro de 2019

Conceito: APROVADO

Rio Claro – SP

2019

Agradecimentos

Dedico este trabalho à minha família que esteve comigo e que me ofereceu suporte emocional e motivacional, em especial às minhas irmãs Aline Martins e Janaína Martins, à minha mãe Leila Oliveira e à minha tia Matilde Oliveira. Mas nada se compara ao esforço feito pela minha grande companheira Aline Souza que esteve presente comigo em todos os momentos difíceis, serei eternamente grato por passar todos esses anos ao meu lado e me apoiar em minhas escolhas e principalmente ao apoio à elaboração da presente dissertação, este trabalho não seria possível sem o apoio dessas pessoas incríveis.

O maior agradecimento é destinado ao Prof.Dr. Luiz Antônio Barreiro, que teve muita paciência e muita dedicação em ensinar e principalmente em me orientar por quais caminhos seguir. Ao Departamento de Física por oferecer suporte à pesquisa e ao ensino.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um método alternativo, conhecido em matéria condensada como método holográfico, cuja origem remonta à conhecida dualidade AdS (Espaço anti-d’Sitter) e CFT (Teoria de Campo Conforme). Esse método é especialmente adaptado para resolução de problemas nos quais as partículas encontram-se fortemente ligadas, e que não permitem um tratamento perturbativo usual. Problemas desse tipo aparecem constantemente em atuais fenômenos da física da matéria condensada, como o caso da supercondutividade em “altas temperaturas”. Assim nessa dissertação é considerado um modelo baseado no método holográfico, no qual são incluídos termos não lineares na lagrangeana de interação eletromagnética, cuja origem vem de teoria de cordas bosônicas. Os resultados indicam que existe a possibilidade de se explicar esses materiais supercondutores com alta temperatura crítica.

Palavras chave: Supercondutividade, supercondutividade holográfica, método holográfico, buraco negro, holografia

Abstract

The objective of this work is to present an alternative method, known in condensed matter as a holographic method, whose origin dates back to the well-known AdS (Space Anti-Space) and CFT (Conformal Field Theory) duality. This method is especially adapted for solving problems in which the particles are tightly bound, and which do not allow a usual perturbative treatment. Problems of this type appear constantly in the current phenomena of condensed matter physics, as in the case of superconductivity in "high temperatures". Thus in this dissertation is considered a model based on the holographic method, in which are included non-linear terms in the Lagrangian of electromagnetic interaction, whose origin comes from the theory of bosonic strings. The results indicate that it is possible to explain these superconducting materials at high critical temperature

Keywords: Superconductivity, holographic superconductivity, holographic method, black hole, holography

Sumário

INTRODUÇÃO	1
I. A correspondencia AdS/CFT	1
1. Supercondutividade	4
I. Introdução.....	4
1.1 Teoria de London	4
1.2 Teoria de Ginzburg-Landau	7
1.3 Teoria BCS: uma teoria quântica	9
2. Fundamentação Teórica.....	14
2.1. Espaço Anti-de Sitter e a Fronteira Conforme.....	14
2.2. Teoria de Campo Conforme.....	17
2.3. Supercondutividade Holográfica	19
3. Aplicando o Método Holográfico	21
3.1. Equações de Movimento	21
3.2. Adição de termos não lineares.....	25
4. Conclusões e Perspectivas.....	29
Apêndice.....	31
A. Equações de movimento.....	31
A.1. Caso radial	31
A.2. Caso estático.....	33
A.3. Termos não lineares	35
Referências Bibliográficas	39

INTRODUÇÃO

I. A correspondência AdS/CFT

Os conceitos trabalhados em teorias de campo quântico fortemente acopladas tem sido um grande desafio para os físicos. Os diagramas de Feynman assim como outras técnicas perturbativas conseguem fazer extraordinariamente bem em algumas áreas, como exemplo pode-se citar a parte eletrofraca do Modelo Padrão e dos Líquidos Fermi em matéria condensada, no entanto sempre houve uma questão: o que acontece quando o acoplamento não é suficientemente pequeno? Os resultados seriam precisos com métodos perturbativos? Os fenômenos fortemente acoplados desempenham um papel crucial na natureza. Um exemplo é a conexão na parte $SU(3)$ do Modelo Padrão, onde pode-se determinar o comportamento de alguns constituintes fundamentais da matéria e também mais recentemente a descoberta de supercondutores de alto T_c (temperatura crítica), alguns dos quais são hipoteticamente fortemente acoplados. Nesta tese, será explorada uma abordagem para teorias de campo quântico fortemente acopladas que é conhecida como conjectura *AdS/CFT* (Anti-de Sitter/Teoria de Campos Conformes), que nos diz que teorias de campo quântico fortemente acopladas em $D - 1$ dimensões têm uma teoria dual gravitacional fracamente acoplada em D dimensões. A correspondência AdS / CFT que é frequentemente chamada de *gauge-gravity duality* (dualidade calibre-gravidade), é uma dualidade que descreve a mesma física com diferentes teorias que podemos relacionar umas às outras. O caso específico de AdS / CFT afirma que uma teoria D-dimensional com gravidade no espaço AdS descreve a mesma física que uma teoria de campo quântica dimensional $(D - 1)$ que existe no limite do espaço D-dimensional.

O regime perturbativo das teorias de calibre não se adequam tão bem para o tratamento em baixas energias para os casos que passam para o limite de acoplamento forte, no entanto, quando se trata de limites para altas energias essas teorias de calibre se ajustam muito bem. De tal forma que a conjectura de Maldacena [2] diz que há uma equivalência entre teorias de cordas em espaços $AdS_n \times MD-n$ (AdS_n é espaço Anti-de Sitter n -dimensional e $MD-n$ é uma variedade compacta em $D - n$ dimensões) e uma teoria quântica de campos que aborda as propriedades distintas que existem na fronteira conforme desse espaço. O fato de haver uma equivalência entre teorias quânticas em dimensões diferentes torna a conjectura de Maldacena uma realização do princípio Holográfico, um princípio bastante geral para teorias de gravitação quântica.

Numa primeira impressão que se tem é que esta teoria parece muito estranha porque traduzida em física cotidiana, parece significar que todos os fenômenos que acontecem *dentro* de uma caixa pode ser descrito pelo que acontece *nos limites* da caixa. Esse conceito é chamado de holografia porque está diretamente relacionado a um holograma em que imagens tridimensionais são codificadas em alguma superfície bidimensional, ou até mesmo o contrário. Pode-se entender a dimensão extra na teoria da gravidade como a escala de energia, em uma analogia muito próxima com o RG, da teoria de campo na fronteira. Para tornar a ideia de holografia não tão improvável quanto se pode inicialmente pensar, observe a fórmula de Bekenstein-Hawking para a entropia de um buraco negro:

$$S_{BH} = \frac{k_B A}{4l_p^2}, \quad (1.1)$$

onde A é a área do horizonte de eventos, k_B é a constante de Boltzmann e l_p é o comprimento de Planck. Essa é a maior quantidade de entropia que um objeto com um determinado tamanho pode ter. Note que a entropia é diretamente proporcional à área do buraco negro e não ao volume. Uma interpretação disto é que o horizonte do buraco negro é dividido em pixels e que cada um deles possui o tamanho da área de Planck, isso faz com que cada pixel desse tipo tenha um certo número de graus de liberdade. Todos os objetos podem assim ser descritos em seu limite e chegamos a algo que é muito semelhante em natureza à correspondência AdS / CFT. Deve-se ressaltar que se acredita que o nosso universo seja de geometria de Sitter e não anti-de Sitter, conforme exigido por essa correspondência. No entanto, a fórmula de Bekenstein-Hawking para a entropia de um buraco negro aparenta sugerir uma espécie de dualidade mais geral para as geometrias gerais do espaço.

Apesar de todas essas implicações da correspondência AdS/CFT não serem de compreensão tão fácil e muito menos ser intuitiva, a noção básica de uma dualidade entre teorias de diferentes dimensões não é tão complicada. Na figura 1.1, um volume bidimensional com gravidade e alguns campos de interação é dual para uma teoria de campo conforme de uma dimensão nos limites da fronteira.

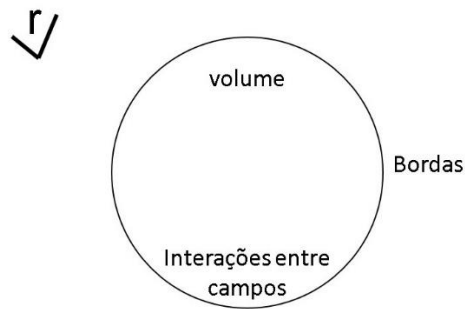


Figura 1 - Aqui a CFT (teoria de campo conforme) é representada como as bordas da figura. Essa é uma representação do que existe em uma teoria AdS/CFT

A afirmação real da correspondência AdS / CFT é que a geometria em massa precisa ser assintoticamente AdS. A correspondência é válida contanto que a geometria que estiver próxima ao CFT no limite seja "quase do tipo AdS". Isso quer dizer que pode-se perturbar a métrica na maior parte da fronteira sem que haja a quebra da suposta validade de nossa conjectura. Dizemos validade presumida pois a correspondência AdS / CFT não é um teorema comprovado, mas sim uma conjectura que é plausível vista do ponto de vista correto. Também deve-se dizer que, mesmo se correta, a correspondência AdS / CFT em sua forma original só será válida dentro de uma certa aproximação, chamada limite Large-N. Isso restringe a classe de CFTs que se encaixam para ser usados dentro da correspondência, no entanto geralmente escolhe-se fazer uma aproximação (não controlada) de um CFT com N baixo ou zero que pode ser descrito por um volume dual. Deve-se salientar que nem sempre é tão intuitivo qual é a interpretação para o N na teoria antiga, tornando-se naturalmente difícil conhecer o seu valor. A idéia principal é avaliar se é possível obter alguma física interessante a partir deste volume subjacente dual que poderia levar a um comportamento "universal" na teoria do campo, como a supercondutividade, por exemplo.

Desta maneira, a ideia principal deste trabalho é aplicar a holografia em física da matéria condensada, mais especificamente realizar um tratamento holográfico em torno do fenômeno da supercondutividade utilizando uma lagrangeana bosônica da teoria de cordas abertas. Uma breve revisão histórica sobre os supercondutores e suas principais teorias, quântica e clássica, será apresentada posteriormente. Será feito, também, uma breve discussão introdutória a cerca do método holográfico e suas bases teóricas. Por fim, os resultados computacionais serão comparados com os experimentais encontrados para o caso que envolve o grafeno.

1. Supercondutividade

I. Introdução

A supercondutividade foi descoberta em 1911 e sua principal característica é que a resistividade DC deve ser igual a zero e também deve ocorrer a expulsão de campos magnéticos do supercondutor, o chamado efeito *Meissner-Ochsenfeld*, que ocorre quando um material passa do estado normal para o supercondutor, de tal forma que ele repele de seu interior um campo magnético fraco. Suponha inicialmente que exista uma amostra esférica de um material supercondutor, no estado normal ($T > T_c$) e sem a presença de campo magnético externo. Se resfriarmos a amostra abaixo da temperatura crítica mantendo o campo nulo, e então torná-lo diferente de zero, o campo no interior da amostra continuará nulo. Isto é perfeitamente explicado fazendo-se uso da relação constitutiva $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ para o condutor perfeito, combinada com a equação de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

para nos fornecer que $\partial_t \mathbf{B} = 0$, no interior da amostra, isso mostra que se o campo externo for nulo, ele não irá mudar o seu valor.

1.1 Teoria de London

A primeira teoria que se propôs e que de fato conseguiu descrever o efeito Meissner-Ochsenfeld apresentado pelos materiais supercondutores foi, primeiramente, desenvolvida pelos irmãos London em 1935, motivados pelo modelo de dois fluidos para o superfluido He. Neste modelo proposto, é assumido que uma parte dos elétrons de condução se comporta em um estado normal enquanto o outro se comporta como um superfluido. Enquanto os elétrons supercondutores se movem sem dissipação (como num condutor perfeito), os elétrons na fase normal continuam se comportando como se tivessem uma resistividade finita, de tal forma que a resistividade coletiva é nula.

Sabe-se que, para este caso, a densidade de corrente supercondutora é dada por $\mathbf{j} = n_s e \mathbf{v}$, onde n_s é o número de elétrons supercondutores por unidade de volume. Devido à ação

de um campo elétrico " E " sobre um dos elétrons supercondutores haverá um valor de aceleração que é dado por $m\dot{v} = eE$.

Assim, propõe-se uma teoria fenomenológica para as propriedades eletrodinâmicas dos supercondutores. Para tal, considera-se dois fluidos, um normal com concentração n_n e um superfluido com concentração n_x onde $n_x + n_n = n = N/V$. Para o fluido normal tem-se a seguinte situação:

$$j_n = \sigma_n E \quad (1.3)$$

Que é regido pela lei de Drude

$$\sigma_n = \frac{e^2 n_n \tau}{m} \quad (1.4)$$

Supondo que o fluido seja insensível à dispersão e que sua supercorrente seja dada por:

$$j_s = -en_s v_s \quad (1.5)$$

Utilizando a segunda lei de Newton,

$$\frac{\partial j_s}{\partial t} = \frac{e^2 n_s}{m} E \quad (1.6)$$

Essa é a primeira equação de London. Aqui é assumido que n_n e n_x são uniformes e estacionários, ou seja, são constantes no espaço e no tempo. Utilizando a equação de Maxwell para o campo tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times j_s = \frac{e^2 n_s}{m} \nabla \times E = \frac{e^2 n_s}{m} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Integrando no tempo então,

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = \frac{e^2 n_s}{m} B + C(r) \quad (1.8)$$

Onde $C(r)$ é o termo que representa a constante de integração dentro de cada ponto r do supercondutor. Esse termo também pode ser definido dependendo das condições iniciais. Assumindo que $C(r)=0$, temos a segunda lei de London. Se partirmos de um corpo supercondutor em campo magnético aplicado zero, temos que $\mathbf{j}_s=0$, $B=0$ e $C(r)=0$. Para descrever o efeito de Meissner-Ochsenfeld, deve-se considerar o caso de um corpo se tornando supercondutor por resfriamento em um campo aplicado não-nulo. No entanto, este caso não pode ser tratado dentro da teoria de London, uma vez que aqui assume-se que a densidade do superfluido n_s é constante no tempo. Dessa forma, para explicar a expulsão do fluxo basta considerar que $C(r)=0$. Assim tem-se a segunda equação de London

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = \frac{e^2 n_s}{m} B. \quad (1.9)$$

Juntamente com a lei de Ampère

$$\nabla \times B = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_n. \quad (1.10)$$

Como não existe corrente de deslocamento para o caso estacionário, então

$$\nabla \times \nabla \times B = -\frac{4\pi e^2 n_s}{mc^2} B + \frac{4\pi}{c} \sigma_n \nabla \times E = -\frac{4\pi e^2 n_s}{mc^2} B + \frac{4\pi}{c} \sigma_n \frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.11)$$

Nesta parte é desprezado o último termo pois só há interesse para o caso estacionário e utiliza-se uma propriedade do cálculo vetorial,

$$-\nabla(\nabla \cdot B) + \nabla^2 B = \frac{4\pi e^2 n_s}{mc^2} B. \quad (1.12)$$

Aqui é definido o *comprimento de penetração de London*,

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s}} \quad (1.13)$$

De tal forma que,

$$\nabla^2 B = \frac{1}{\lambda_L^2} B \quad (1.14)$$

É possível notar que uma possível solução para essa equação, seria uma do tipo exponencial.

$$B(x) = B_0 e^{-\frac{x}{\lambda_L}} \quad (1.15)$$

Para $x > 0$ esse resultado mostra que o campo consegue entrar em uma pequena região na superfície mas no interior o campo ainda é nulo. Assim, este resultado mostra que o campo é repellido exponencialmente, em outras palavras isso implica diretamente que $B \rightarrow 0$.

1.2 Teoria de Ginzburg-Landau

O fenômeno da supercondutividade descrita pela teoria de Ginzburg-Landau avalia o fenômeno do ponto de vista da termodinâmica. Ela é essencialmente uma adaptação da teoria de transições de fase de segunda ordem de Landau, desenvolvida em por volta de 1930, para este sistema em particular. Um ponto interessante dessa teoria é que ela consegue representar algumas características puramente quânticas dos supercondutores utilizando apenas um tratamento clássico.

Ginzburg e Landau propuseram que a energia livre do sistema, caso não houvesse presença de campo magnético, seria da seguinte forma

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi(x)|^2 + a(T)|\psi(x)|^2 + \frac{b(T)}{2} |\psi(x)|^4 \quad (1.16)$$

Utilizando o princípio variacional

$$F_s(T) = F_n(T) + \int d^3x \left(\frac{\hbar}{2m^*} |\nabla\psi(x)|^2 + a(T)|\psi(x)|^2 + \frac{b(T)}{2} |\psi(x)|^4 \right) \quad (1.17)$$

então,

$$\frac{\hbar}{2m^*} \Delta\psi + a\psi + b|\psi|^2 \quad (1.18)$$

onde, o parâmetro m^* , que tem dimensões de massa, contém o custo energético associado ao gradiente do parâmetro de ordem, e, de forma geral, o termo representa uma massa efetiva do sistema. A equação (1.13) quando comparada com à equação de Gross-Pitaevskii

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \psi''(x) + (V(x) + \mu)\psi(x) + g\psi(x)^3 \quad (1.19)$$

irá descrever o estado fundamental de um sistema quântico de bósons idênticos, utilizando a aproximação de Hartree-Fock.

O real potencial na descrição da supercondutividade, para a teoria de Ginzburg-Landau, se torna admirável quando é trabalhada com as equações na presença de um campo magnético externo. De tal forma, é possível acoplar a teoria de London e assim conseguir descrever o efeito de *Meissner-Ochsenfeld*. Os efeitos do campo magnético podem ser incluídos de forma relativamente simples na teoria, através da substituição não-mínima $-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - QA$. Aqui o potencial vetor para o campo magnético é representado por A e Q é o valor associado a carga da partícula. Ainda é possível mostrar que a interpretação correta do parâmetro de ordem $\psi(\mathbf{x})$ é que ele representa a função de onda quântica para o centro de massa dos pares de elétrons, os *pares de Cooper*; de tal maneira que o valor obtido para a carga líquida seja de $-2e$. Logo, a equação (1.11) se torna

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{\hbar}{2m^*} |(-i\hbar\nabla + 2eA)\psi(x)|^2 + a(T)|\psi(x)|^2 + \frac{b(T)}{2} |\psi(x)|^4 \quad (1.20)$$

Integrando a densidade de energia no espaço que se relaciona diretamente com o campo magnético e adicionando o seguinte termo

$$\frac{1}{2\mu_0} \int d^3x B(x)^2 \quad (1.21)$$

Utilizando novamente o princípio variacional para a energia, têm-se que:

$$\frac{\hbar}{2m^*} (\Delta + \frac{2ie}{\hbar} A)\psi + a\psi + b|\psi|^2 \quad (1.22)$$

Que é, novamente a equação de Schrodinger não-linear, mas agora ela aparece com um termo a mais, que representa o potencial vetor. A derivada

$$j_s = -\frac{\delta F}{\delta A(x)} \quad (1.23)$$

representa uma supercorrente induzida devido a presença de campo magnético. Ao calcular esta derivada para todas as componentes de A_μ , tem-se que:

$$j_s = -\frac{ie\hbar}{m^*} (\bar{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\bar{\psi}) - \frac{4e^2}{m^*} |\psi|^2 A. \quad (1.24)$$

A equação (1.19) representa a mesma expressão quântica para a densidade de corrente de probabilidade de partículas que possuem massa m^* e carga $-2e$.

1.3 Teoria BCS: uma teoria quântica

Uma característica importante dos supercondutores é o chamado *gap* de energia entre o estado fundamental e a excitações das quasi-partículas do sistema, que é denotado por Δ e é da

ordem de $k_B T_c$. As medidas de calor específico para supercondutores foi o que ocasionou as primeiras evidências experimentais, os resultados mostraram que o calor específico dos elétrons, que estavam bem abaixo da temperatura crítica, apresentava um crescimento exponencial do tipo. Esse crescimento exponencial era da seguinte forma

$$C \sim \gamma T_c a e^{-\frac{b T_c}{T}} \quad (1.25)$$

onde a e b são constantes e para o estado normal o calor específico é dado por $C = \gamma T_c$.

A temperatura na qual a supercondutividade se instala é conhecida como temperatura crítica, neste trabalho será chamada de T_c . Esses primeiros experimentos conseguiram definir valores de temperaturas críticas para diferentes elementos que variavam aproximadamente na faixa de 0 – 20 K. Embora houvessem alguns modelos puramente fenomenológicos, como as equações de London, descrevendo diferentes aspectos da supercondutividade, nunca houve uma explicação do que acontecia a nível microscópico.. Essa explicação foi desenvolvida a partir de 1957. Neste ano Bardeen, Cooper e Schrieffer publicaram o que mais tarde foi chamado de teoria BCS, em homenagem aos três autores. A base da teoria BCS é que em temperaturas suficientemente baixas (abaixo de T_c) os elétrons que normalmente se repelem e de repente começam a sentir uma força de atração em relação à outra devido às suas interações com os íons de rede no volume do material. Isso pode resultar em estados de quasi-partículas ligadas conhecidas como pares de Cooper, esses pares são os próprios elétrons ligados entre si por fônons que se propagam através da rede. Usando essa teoria e explicando as propriedades desses primeiros supercondutores descobertos, eles são conhecidos como supercondutores BCS. A principal característica desses supercondutores é o fato de que o mecanismo principal e responsável pela supercondutividade é a formação de pares de Cooper via interação fonônica.

A teoria BCS dos pares Cooper descreve muito bem todos os fenômenos dos supercondutores BCS, mas em 1986 os supercondutores high- T_c foram descobertos. Estes materiais de alto T_c possuem algumas propriedades que não podem ser explicadas pela teoria BCS. Existe uma gama de possibilidades propostas para explicação, mas elas podem ser classificadas em duas categorias principais. Uma categoria se assemelha muito à teoria BCS e a diferença é que a força atrativa entre os elétrons do material é mediada por algo diferente de fônons; a atração de spin é um exemplo dessa teoria. A outra classe principal diz que a atração não é fraca como se prevê na teoria BCS, mas que este é um fenômeno fortemente acoplado. O

método da teoria da perturbação não é aplicável aqui e realmente não há bons métodos de fazer cálculos para tal teoria. É aqui que a conjectura AdS / CFT entra em jogo; A ideia principal explorada aqui é que, usando essa dualidade, possamos obter novos insights sobre esse estado da matéria, porque dessa forma pode-se calcular o comportamento de uma teoria fortemente acoplada. Esta é a força real da conjectura AdS / CFT em geral e, se for correta, ela se torna uma ferramenta capaz de fazer cálculos que são impossíveis de fazer com outros métodos. Para poder comparar o comportamento das teorias AdS / CFT para os supercondutores com algo, precisamos encontrar algumas previsões gerais da teoria BCS e, então, buscar semelhanças e diferenças com o novo modelo.

A teoria BCS foi a primeira teoria microscópica a conseguir explicar convenientemente as propriedades dos materiais supercondutores. Ela permitiu que fosse possível calcular, de forma mais precisa, parâmetros da teoria como o comprimento de penetração, comprimento de coerência ou o campo magnético crítico, assim como predizer o *gap de energia*, o que era impossível trabalhando com as teorias clássicas que existiam até o momento.

O eixo central da teoria consiste no fato de que em um determinado sólido, a força efetiva entre os elétrons pode ser atrativa ao invés de repulsiva: isso é explicado pelo acoplamento entre os elétrons e os fônons, que são as quasipartículas associadas à propagação do som ao longo da rede cristalina. Dessa forma, embora os elétrons tenham uma interação repulsiva entre si, quando eles se movem pelo sólido o que se vê não são os elétrons “puros”, mas sim uma quasipartícula que é um elétron com a chamada *interação de troca*. É essa interação de troca que “suaviza” a interação de Coulomb e permite a interação atrativa entre os elétrons.

Depois disso, Leon Cooper verificou que a interação entre os elétrons poderia apresentar um modelo atrativo na região próxima à superfície de Fermi, e então mostrou que para essa região um par de elétrons pode formar um estado ligado, ou seja, os pares de Cooper. Isto quer dizer que a superfície de Fermi nesse caso é estável mesmo para interação atrativa entre as partículas.

Expandindo este conceito que foi atribuído apenas para um par de partículas, o que se espera então é que no caso de muitas partículas ocorra a formação de pares até que um ponto de equilíbrio seja alcançado. Porém, resta o problema de escrever uma função de onda para esse estado, onde todo elétron que esteja na região próxima à superfícies de Fermi se encontre pareado. Construindo operadores de criação e aniquilação, Schieffer deu um tratamento de estados coerentes ao problema, de tal forma que agora se cria um elétron de momentum \mathbf{k} e

spin *up*. Com esta notação, definiu-se o seguinte operador P_k^\dagger que é o responsável pela criação dos pares de Cooper.

$$P_k^\dagger = c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\uparrow}^\dagger. \quad (1.26)$$

Agora, em termos desse operador, tem-se o seguinte estado proposto

$$|\psi\rangle = C e^{\sum_k \alpha_k P_k^\dagger} |0\rangle, \quad (1.27)$$

para este caso, os números α_k são escolhidos de forma a minimizar a energia total do sistema. Ainda é possível mostrar que

$$[P_k^\dagger, P_k] = 0 \quad (1.28)$$

assim a função de onda (1.22) para o conjunto dos pares de Cooper fica escrita como

$$|\psi\rangle = C \prod_k e^{\alpha_k P_k^\dagger} |0\rangle \quad (1.29)$$

Com isso, o ponto de partida seria de um estado de vácuo e então adiciona-se os pares de elétrons: aqui pode-se notar um estado na teoria BCS como um condensado de pares de elétrons acima de um já preenchido mar de Fermi. Para finalizar, vale ressaltar que a teoria BCS falha na descrição de materiais que são chamados de “*high-Tc*” supercondutores, onde alguns exemplos como as cerâmicas baseadas em óxido de cobre, podem se tornar supercondutores a temperaturas acima de 100K. Essa teoria também irá falhar no regime de acoplamento forte, já que toda teoria foi desenvolvida com a hipótese de acoplamento fraco entre os elétrons, quando se pode desprezar o seu efeito sobre os fônons da rede.

Um resultado muito geral que é obtido da teoria BCS é a energia necessária para quebrar a ligação entre os pares Cooper em função da temperatura do material. Este resultado para $T \approx T_c$ é

$$\frac{\Delta}{T_c} = 3.5 \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \quad (1.30)$$

onde Δ é a energia mínima de interrupção chamada de gap de energia e $k_B = 1$, ou seja, energia e temperatura têm as mesmas unidades. Este é um comportamento muito característico, já que cai perto de T_c . O comportamento completo do gap de energia para $T < T_c$ é plotado na figura 2 tirada de [17]

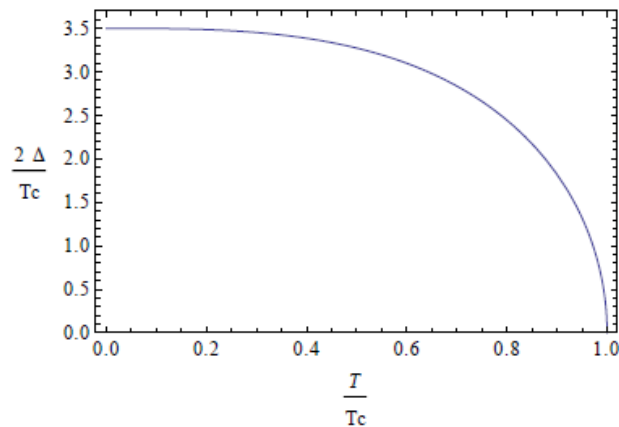


Figura 2 – Comportamento geral do gap de energia da teoria BCS

2. Fundamentação Teórica

2.1. Espaço Anti-de Sitter e a Fronteira Conforme

O espaço Anti-de Sitter nas dimensões D (AdS_D , que significa $D - 1$ direcção espacial e uma de tempo) é um tempo de espaço com curvatura negativa constante e sua métrica pode ser escrita como:

$$ds^2 = -r^2 dt^2 + \frac{1}{r^2} dr^2 + r^2 x_i^2 \quad (2.1)$$

onde é fixado o raio do AdS igual a um (podemos pensar como se fosse o inverso da curvatura do espaço) e $r \geq 1$ é o raio. É possível notar diretamente que ao definir $r \rightarrow \infty$ a métrica efectivamente “comprime” a direcção radial do espaço e então

$$ds^2 = r^2(-dt^2 + x_i^2) \quad (2.2)$$

Se introduzirmos agora um chamado escalonamento conforme da métrica de modo que $ds^2 \rightarrow \Omega^2 ds^2$ onde escolhemos $\Omega = \frac{1}{r}$ tem-se que,

$$ds^2 = dx_i^2 - dt^2 \quad (2.3)$$

que é a métrica de Minkowski em uma dimensão menor do que a inicial, isso ocorre pois a direcção radial desapareceu. Como a métrica de Minkowski, em algum sentido, foi obtida indo até o limite, ou seja, muito grande, e fazendo uma escala conforme, nós a chamamos de limite de conformação do espaço AdS. O limite conforme do AdS_D é Mink_{D-1} . O espaço vazio do AdS não desperta muito interesse, mas a correspondência AdS / CFT afirma que preciso apenas se restringir a geometrias que são assintoticamente AdS, isto é, perto do limite o espaço é AdS, no entanto no interior do volume é possível que existam desvios disso. Ao introduzir um buraco negro, a teoria adquire uma entropia e uma temperatura devido ao horizonte de eventos do buraco negro. A métrica de um buraco negro de Schwarzschild AdS é

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(dx^2 + dy^2) \quad (2.4)$$

onde,

$$f(r) = r^2 - \frac{M}{r} \quad (2.5)$$

onde M na métrica está relacionado com a massa do buraco negro, e em $f(r) = 0$ vemos o raio de Schwarzschild (para espaço AdS) $= M_1 = 3$ que é o horizonte de eventos para o buraco negro, nós iremos simplesmente chamar de horizonte. Sabemos que perto do limite o espaço é assintoticamente AdS_D , e agora será definido como é o espaço próximo do horizonte de eventos. Aqui define-se, sem prova, o fato não intuitivo de que, em um volume dimensional $3 + 1$, desde que haja um horizonte de eventos, a geometria do horizonte próximo é sempre $AdS_2 \times R^2$. Que a geometria do horizonte próximo sempre contenha uma AdS_2 (uma temporal e uma direção espacial) é de fato um efeito bem peculiar e terá conseqüências importantes mais tarde.

Como a teoria contém apenas uma escala de energia, a temperatura do buraco negro, as únicas temperaturas que podemos distinguir são zero e diferente de zero, porque sempre pode-se fazer um reescalonamento das temperaturas mínimas. Para poder falar sobre temperaturas diferentes, é preciso introduzir mais uma escala de energia, isso será feito através da introdução de campos escalares acoplados a um campo de Maxwell em massa. Outra maneira de introduzir uma escala de energia diferente é permitir que o buraco negro tenha uma carga, ou seja, um buraco negro de Reissner-Nordstrom, mas este não será o foco deste trabalho. No entanto, deve-se notar que quando se trabalha no limite $G_N \rightarrow 0$, isto é, ao se desprezar a dinâmica gravitacional, a métrica do buraco negro AdS Reissner-Nordstrom torna-se o mesmo daquele com a métrica de buraco negro AdS Schwarzschild. Assim pode-se afirmar que, nesta fronteira ou limite, o buraco negro de Reissner-Nordstrom e o buraco negro de Schwarzschild são degenerados, ou seja, indistinguíveis.

Pode-se ainda trabalhar com a ação gravitacional para o espaço anti-de Sitter, onde tem-se:

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d+1} x \sqrt{-g} [-2\Lambda + \sum c_i R^i]. \quad (2.6)$$

Onde G_N é a constante gravitacional de Newton, Λ é a constante cosmológica, c_{iS} são constantes a serem determinadas, R é o escalar de curvatura e g é o determinante do tensor métrico. De tal forma que o tensor métrico é dado por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -L^2/z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2/z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^2/z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^2/z^2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

O escalar de curvatura pode ser dado da seguinte forma:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

sendo $R_{\mu\nu}$ conhecido como tensor de Ricci. Ao escolher $c_1=1$ e $c_2=c_3=\dots=0$ tem-se a ação de Einstein-Hilbert e aplicando o princípio variacional e tornando a métrica como variacional tem-se a seguinte equação de movimento,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{\Lambda}{2} g_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

o traço dessa equação fornece,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 2 \frac{d+1}{d-1} \Lambda. \quad (2.10)$$

Partindo da definição do tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R_{\gamma\lambda\nu}^{\lambda} \quad (2.11)$$

e considerando que $R_{\gamma\lambda\nu}^{\lambda}$ é o tensor de curvatura de Riemman, que possui a seguinte forma

$$R_{\gamma\lambda\beta}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\lambda\gamma}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\beta\kappa}^{\alpha} \Gamma_{\lambda\gamma}^{\kappa} - \Gamma_{\lambda\kappa}^{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\kappa}, \quad (2.12)$$

agora, introduzindo o símbolo de Christoffel,

$$\Gamma_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} \right). \quad (2.13)$$

É possível encontrar a curvatura do espaço, que será dada por:

$$R = -\frac{d(d+1)}{L^2} \quad (2.14)$$

que é negativa e caracteriza o espaço anti-de Sitter. Esse espaço também possui uma constante cosmológica que se apresenta da seguinte maneira

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2L^2}. \quad (2.15)$$

Substituindo os resultados, a equação de movimento do espaço anti-de Sitter será dada por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{d}{L^2} g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.16)$$

2.2. Teoria de Campo Conforme

Para ter uma noção melhor do que está acontecendo, queremos visualizar o que a teoria contém. A fim de visualizar um espaço infinito de várias dimensões, é feita uma projeção de nosso espaço em um disco de Poincaré como mostrado na figura abaixo. Às vezes, é conveniente trabalhar em uma coordenada diferente da r , essa nova coordenada é definida como $z = \frac{L}{r}$. A coordenada z se torna muito conveniente para propósitos numéricos, pois tudo é feito entre um intervalo de coordenadas $z \in [0,1]$.

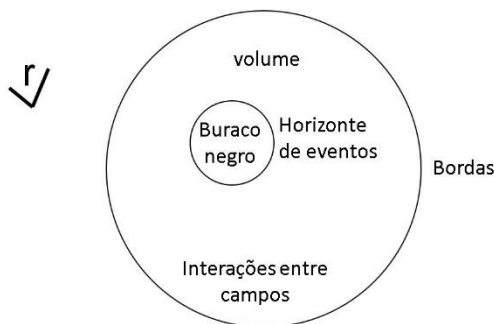


Figura 3 - visualização da representação do que contém na teoria AdS/CFT com um buraco negro

Teorias conformes (CFT's) são teorias quânticas que são invariantes sob a ação de transformações conformes. As transformações conformes consistem em rotações, traduções temporais, traduções, dilatações e transformações conformais especiais[4]. O atual foco será nas dilatações que são transformações de escala, nas quais escala-se simultaneamente o tempo (energia) e o espaço (momentum). Em geral, este escalonamento pode ser da forma

$$t \rightarrow \alpha^z t, x \rightarrow \alpha x \quad (2.17)$$

mas neste trabalho será utilizado apenas casos em que o expoente crítico dinâmico $z = 1$. Vale ressaltar que este expoente crítico dinâmico z não tem ligação com a coordenada $z = L$ definido acima, esta é apenas a convenção de nomenclatura comum. Nota-se aqui que, apesar de existirem QFT's (Teorias Quânticas de Campo) que são invariantes de escala e não invariavelmente conformes, esses termos serão utilizados como equivalentes.

Uma CFT possui operadores e diz-se que eles possuem uma dimensão de escala Δ se a seguinte relação é satisfeita

$$\mathcal{O}(x) \rightarrow \alpha^\Delta \mathcal{O}(x) \quad (2.18)$$

quando aplicamos as transformações (2.16). Nota-se que a teoria não parece a mesma em todas as escalas de energia, ou seja, não é auto-similar, como se poderia levar a concluir pelo nome invariante da escala, de maneira geral só escala de uma maneira muito específica. Uma determinada dimensão de escala Δ para um operador é o que determina como o operador em questão se comporta quando entramos entre diferentes escalas de energia da teoria. Vemos a partir da equação (2.16) que, aplicando um $\lambda > 1$, são percorridas distâncias mais curtas, ou seja, energias mais altas, e se $\lambda < 1$, são percorridas distâncias mais longas, ou seja, energias mais baixas. Isto pode parecer confuso mas aqui a escala é feita de tal modo que o argumento dos operadores não é alterado, ou seja, λx é mantido durante a escala λ . Uma maneira muito

conveniente de estudar o comportamento de uma CFT é estudá-la em uma formulação eficaz em baixas energias, que constitui um ambiente semelhante a um laboratório. Nota-se que não pode-se esperar obter uma visão completa sobre a energia superior d.o.f. escalando para energias cada vez mais altas. Só podemos descer em energias para obter uma teoria completa e dizemos que uma CFT é transmitida para um ponto conforme ou infravermelho (IR) em baixas energias. Esses pontos fixos são pontos em que o escalonamento subsequente não altera mais a teoria. Isso significa que nesses pontos fixos a teoria é auto-similar, ou seja, tem a mesma aparência em todas as escalas e são esses pontos conformes aos quais nos referimos quando dizemos que os CFT's são invariantes de escala. A teoria também pode conter um ponto ultravioleta (UV) – ponto de correção em altas energias, onde ir a energias mais altas não causa nenhum tipo de alteração na teoria em questão.

Uma parte dessa nomenclatura será importante mais tarde. Vemos na equação (2.17) que para ir para energias mais baixas (lembre-se de $\lambda < 1$) pode acontecer três coisas: i) tornar o operador mais importante no caso $\Delta < 0$, ii) tornar o operador menos importante no caso $\Delta > 0$ ou iii) a importância do operador permanece a mesma no caso $\Delta = 0$. Esses casos são chamados de operadores relevantes, irrelevantes e marginais, respectivamente. Para nós, onde estamos interessados no comportamento de baixa energia da teoria, os operadores mais importantes são, portanto, os operadores relevantes, porque crescem em importância quando descem em energia.

2.3. Supercondutividade Holográfica

Os exemplos mais utilizados da correspondência AdS/CFT envolvem espaços de 10 ou 11 dimensões como a teoria de cordas ou a teoria M, onde os campos no limite de baixas energias são encontrados através de uma redução dimensional. Para o caso em que se quer descrever um fenômeno específico como é o caso da supercondutividade, pode-se simplesmente escolher os campos e suas interações no interior do espaço de tal forma que se possa modelar o fenômeno desejado da melhor maneira possível.

Portanto, para que isso ocorra, deve-se escolher os campos que devem ser necessários para que se faça uma descrição para o caso da supercondutividade. O objeto básico para a teoria gravitacional é a métrica $g_{\mu\nu}$. O seu valor de fronteira $g^0_{\mu\nu}$ é interpretado como a métrica da teoria dual.

Fazendo uma analogia, um campo de calibre A_μ corresponde a uma corrente J_μ e um campo escalar complexo corresponde a um operador (também com carga) cuja natureza é

desconhecida. O lagrangeano para um campo escalar complexo, na presença de gravidade, pode ser do tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{k_1^2}(R + \Lambda) - \frac{1}{k_1^2} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \psi \bar{D}^\mu \bar{\psi} + V(|\phi|) \right), \quad (2.19)$$

para este caso k_1 e k_2 são constantes de acoplamento e o primeiro termo representa o lagrangeano de Einstein-Hilbert, enquanto o segundo se assemelha muito ao lagrangeano para o modelo de Higgs, que é o modelo abeliano. A definição do potencial é de suma importância, uma vez que para o caso de quebra espontânea de simetria pode-se escolhê-lo como $V(\psi) = \frac{\lambda}{4} (|\psi| - a^2)^2$, mas como neste trabalho o foco são os supercondutores, a definição para o potencial assumira a forma $V(\psi) = -m^2 |\psi|^2$. Esse tipo de potencial é ilimitado, e o campo seria, portanto, instável. Há o fato de que uma eventual carga de fundo pode trazer um deslocamento para o termo de massa, isso acaba por contribuir ainda mais para a sua instabilidade. No entanto, dentro do espaço AdS existe a possibilidade de uma certa escolha para a massa do campo escalar, chamado de limite de Breitenlohner-Freedman na qual este continua estável, mesmo na presença desses tipos de potenciais ilimitados. Então, como o potencial é arbitrário, escolhe-se um que não viole esse limite. Para simular os efeitos da temperatura na teoria dual, deve se considerar que os campos se situam dentro de um espaço que seja apenas assintoticamente AdS, essas definições fazem com que possua uma métrica que recupera a equação (2.4)

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(dx^2 + dy^2). \quad (2.20)$$

que é a métrica que descreve o buraco negro de Schwarzschild para o espaço AdS.

3. Aplicando o Método Holográfico

3.1. Equações de Movimento

Nesta seção será mostrado como foi a aplicação do método holográfico aos supercondutores. Aqui também será mostrado que a supercondutividade holográfica se adequa muito bem quando utilizada a métrica do buraco negro de Schwarzschild no espaço AdS. A partir da utilização das definições feitas nas equações (2.4) e (2.5), pode-se esperar que a teoria de contorno descreva, para um supercondutor, ao menos um potencial vetorial de Maxwell que descreva o campo eletromagnético. Dadas as circunstâncias, o objetivo é descrever, com clareza, o sistema dimensional 2+1 dimensões, isso faz com que se torne melhor trabalhar com o espaço AdS₄.

Aqui será introduzido um campo escalar carregado que pode adquirir um valor de expectativa e, assim, dar origem a um efeito Higgs para o fóton pois em um supercondutor existe um condensado, no caso da teoria BCS pode-se citar os pares de Cooper como exemplo. Alternativamente, este campo escalar pode ser visto de forma algo análoga ao parâmetro de ordem dinâmica da teoria de Ginzburg-Landau, mas sem o termo $|\psi|^4$. Isto significa que o volume todo deve ter um campo escalar e um campo de Maxwell que são governados pela equação de Klein-Gordon e Maxwell, respectivamente.

$$S_{KG} = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} (|\nabla\psi|^2 + m^2|\psi|^2) d^d x \quad (3.1)$$

$$S_{EM} = -\frac{1}{4} \int \sqrt{-g} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) d^d x \quad (3.2)$$

Essas duas equações descrevem a ação para a equação de Klein-Gordon e para o campo eletromagnético, respectivamente. Para que se possa incluir o termo gravitacional adiciona-se o termo para a ação gravitacional dada pelo espaço de Einstein-Hilbert.

$$S_{EM} = -\frac{1}{2k^2} \int \sqrt{-g} \left(R + \frac{d(d+1)}{L^2} \right) d^d x \quad (3.3)$$

Onde R é o escalar de Ricci e $k = \sqrt{8\pi G}$ e o segundo termo é claramente a constante cosmológica com valor menor que zero, o que é inerente à geometria AdS. Para o espaço-tempo curvo a derivada do tensor será dado por:

$$\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu A^\rho \quad (3.4)$$

Vale ressaltar que o segundo termo que aparece é o símbolo de Christoffel quando ele age em campos de tensores. Agora, se for adicionado a ação da equação de Klein-Gordon com a contribuição eletromagnética e a ação para a equação de Einstein-Hilbert juntos e escalá-los separadamente para obter as equações corretas, obtém-se uma teoria de partículas escalares livres em um campo eletromagnético livre interagindo apenas com a gravidade. Se o campo escalar estiver carregado, sabe-se que há interações entre o campo escalar carregado e o campo. O esquema de acoplamento faz com que a derivada ∇_μ se promova a uma derivada covariante de calibre que assume a seguinte forma

$$D_\mu = \nabla_\mu - iA_\mu \quad (3.5)$$

que produzirá,

$$S_{Bulk} = \int \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2k^2} \left(R + \frac{d(d+1)}{L^2} \right) - \frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) - m^2 |\psi|^2 - |\nabla_\mu \psi - iA_\mu \psi|^2 \right) d^d x \quad (3.6)$$

Essa representação que descreve a ação S_{Bulk} são equações diferenciais não acopladas envolvendo o campo escalar ψ , o potencial vetor A_μ e a métrica do *background* $g_{\mu\nu}$ e por conta disso se tornam difíceis de serem resolvidas. Para este caso basta fazer $G_N \rightarrow 0$, onde G_N é a constante gravitacional de Newton, pois os campos no *bulk* não reagem à métrica, isso significa que assim é possível fixar a métrica para o caso Schwarzschild AdS. De tal forma que isso produzirá uma ação na qual envolve apenas a soma das contribuições da ação relacionada com a equação de Klein-Gordon e a ação eletromagnética. Então,

$$S_{Bulk} = \int \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) - m^2 |\psi|^2 - |\nabla_\mu \psi - iA_\mu \psi|^2 \right) d^d x \quad (3.7)$$

Se for observado o caso em que os campos tem apenas a dependência radial, a ação produzirá a seguinte equação de movimento

$$\psi'' + \left(\frac{f'}{f} + \frac{2}{r}\right)\psi' + \frac{\phi^2}{f^2}\psi - \frac{m^2}{2f^2}\psi = 0 \quad (3.8)$$

Para o campo escalar. Para o caso em que existe apenas o campo no interior do *bulk* tem-se que $A_t = \phi$, em outras palavras esse é o valor do potencial elétrico, o que significa que $A_r = A_x = A_y = 0$. Agora impondo a condição de calibre de Lorentz que diz que $\nabla_\mu A^\nu = 0$, e que para o atual caso será $\nabla_t A^t = 0$. Também é possível observar, a partir das equações de Maxwell, que a fase de ψ é constante, de modo que sem perda de generalidade podemos considerar um campo escalar real [14]. Isso nos permite obter a seguinte equação de movimento para o potencial elétrico

$$\phi'' + \frac{2}{r}\phi' - \frac{2\psi^2}{f}\phi = 0 \quad (3.9)$$

As equações (3.8) e (3.9) são duas equações diferenciais não lineares acopladas e é possível resolvê-las numericamente[16]. A ideia agora é descrever o método pelo qual as equações são resolvidas. A partir das equações de movimento, verifica-se que as equações que descrevem o potencial escalar elétrico próximo dos limites da fronteira se comporta como

$$\psi(r) = \frac{\psi^{(1)}}{r} + \frac{\psi^{(2)}}{r^2} + \dots \quad (3.10)$$

e

$$\phi(r) = \mu - \frac{\rho}{r} + \dots \quad (3.11)$$

respectivamente. Para esse caso μ representa o potencial químico, ρ é a densidade de carga e $\psi^{(i)}$ representa os termos que dão origem a um valor já esperado para um operador escalar de dimensionamento i . Aqui o interesse é em encontrar soluções para as equações que tenham um $\psi^{(i)}$ finito e o outro zero, representando o valor esperado e a fonte, respectivamente. A ideia básica por trás da técnica de solução é construir uma expansão em série de todos esses campos no horizonte para alguma ordem. Em seguida, substituindo essas expansões pelas equações e usando o NDSolve para integrar até o limite em que combina-se as soluções da expansão do

horizonte com uma expansão no limite, como as das equações anteriores. Podemos então determinar $\psi^{(i)}$, μ e ρ , em geral ambos $\psi^{(i)}$ serão finitos, então deve-se buscar explicitamente soluções com um deles igual a zero. Isso fornecerá valores já esperados para operadores de dimensão conforme 1 e 2 e de fato o interesse principal deste trabalho são as quantidades sem dimensões, ou seja, as quantidades que não têm uma dimensão de dimensionamento. Isso significa que devemos "normalizar" nossos operadores porque, por definição, eles possuem uma dimensão específica e dividiremos pela temperatura para conseguir isso. A temperatura pode ser calculada como

$$T = \frac{3}{4\pi\sqrt{\rho}} \quad (3.12)$$

e possui dimensionamento 1. A temperatura crítica T_c é o valor de temperatura onde verifica-se a transição de fase e também define uma escala de temperatura natural que pode-se utilizar para que se normalize as quantidades encontradas. Dessa forma, as grandezas adimensionais que deseja-se computar possuem a seguinte forma

$$\frac{\langle \mathcal{O}_1 \rangle}{T_c} = e^{\frac{\sqrt{\langle \mathcal{O}_2 \rangle}}{T_c}}. \quad (3.13)$$

Essas grandezas serão plotadas em função da temperatura normalizada $\frac{T}{T_c}$. Esses resultados produzem as figuras abaixo e mostram que existem operadores que adquirem valores de expectativa abaixo de uma certa temperatura crítica, assim pode-se notar que os operadores condensam, e é exatamente isso que acontece nos supercondutores e, para um valor de temperatura abaixo de T_c , um *gap* de energia se forma.

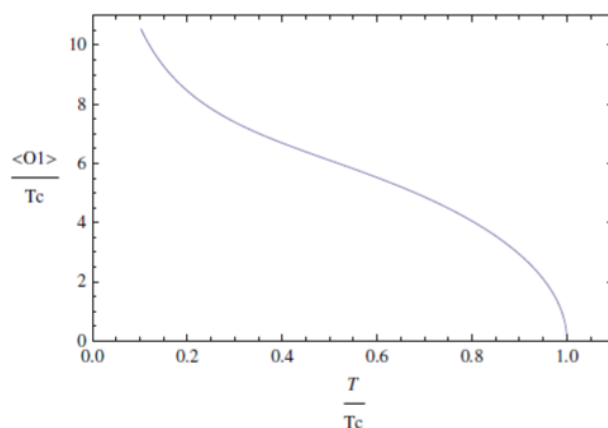


Figura 4 - Resultado numérico esperado para o operador escalar de dimensão 1

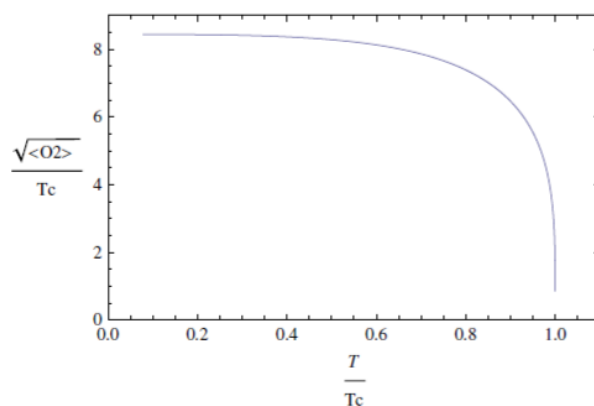


Figura 5 - Resultado numérico do valor esperado para o operador escalar de dimensão 2

A figura (5) merece uma atenção especial. Note que ela recupera os resultados esperados para o *gap* de energia previsto pela teoria BCS. Também é possível notar uma grande diferença entre essas duas figuras, a da teoria BCS tende a um valor mais baixo, no eixo vertical, valores $\sim 3 - 6$. Para este trabalho a curva tenderá a outros valores maiores, esses valores são típicos para um *gap* que possui alto valor de T_c .

3.2. Adição de termos não lineares

Na literatura, existem algumas formas distintas para se calcular a lagrangeana não-abeliana de Born-Infeld. Nesta dissertação será utilizada a seção 7 do artigo de Tseytlin, onde a ideia é escrever a lagrangeana como uma soma de termos independentes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{g^2} \text{tr} [& -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (2\alpha') (a_1 F_\mu^\lambda F_\lambda^\nu F_\nu^\mu + a_2 D^\lambda F_\lambda^\mu D^\rho F_{\rho\mu}) \\
& + (2\alpha')^2 (a_3 F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu F_\mu^\rho F_{\nu\rho} + a_4 F_\lambda^\mu F_\nu^\lambda F^{\nu\rho} F_{\mu\rho} \\
& + a_5 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} + a_6 F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \\
& + a_7 F^{\mu\nu} D^\lambda F_{\mu\nu} D^\rho F_{\rho\lambda} + a_8 D^\lambda F_{\lambda\mu} D^\rho F_{\rho\mu} F^{\mu\nu} \\
& + a_9 D^\rho D^\lambda F_\lambda^\mu D_\rho D^\sigma F_{\sigma\mu}) + \mathcal{O}((2\alpha')^3)] \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Analisando as redefinições de campo, nota-se que os coeficientes a_2 , a_7 , a_8 e a_9 continuam arbitrários, dessa forma eles se tornam insensíveis para o desenvolvimento da lagrangeana, dessa forma pode-se atribuir o valor nulo a eles, assim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{g^2} \text{tr} [& -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (2\alpha') (a_1 F_\mu^\lambda F_\lambda^\nu F_\nu^\mu) \\
& + (2\alpha')^2 (a_3 F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu F_\mu^\rho F_{\nu\rho} + a_4 F_\lambda^\mu F_\nu^\lambda F^{\nu\rho} F_{\mu\rho} \\
& + a_5 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} + a_6 F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}) + \mathcal{O}((2\alpha')^3)] \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Está é a lagrangeana que será utilizada para descrever as equações de movimento. A equação de movimento que descreve apenas a dependência radial do campo será exatamente a equação (3.8), mostrada na seção anterior. Já para o caso estático em que se considera o campo apenas no interior do *bulk* pode-se considerar a mesma ação gravitacional, no entanto, será adicionado termos não lineares. Dessa forma, a ação gravitacional a ser trabalhada será a de Born-Infeld e teoria de cordas, então

$$S_{BI} = \int \sqrt{-g} \left(a (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + b (F_\nu^\mu F_\rho^\nu F_\sigma^\rho F_\mu^\sigma) \right) d^d x. \tag{3.16}$$

Essa ação irá produzir, para o caso estático, a seguinte equação de movimento:

$$\phi'' + \frac{2}{r} \phi' - \frac{2\psi^2}{f} \phi - 16a(-2r\phi'^3 + 3r\phi'^2\phi'') + 24br^2\phi'^2\phi'' = 0. \tag{3.17}$$

A demonstração dessa equação de movimento e todos os demais detalhes estão no apêndice deste trabalho. Neste trabalho foram avaliados os parâmetros a e b e qual a sua relação com o comportamento de $\frac{\sqrt{\langle O_2 \rangle}}{T_c}$. Na figura abaixo pode-se ver os resultados produzidos a partir da evolução dessa equação de movimento.

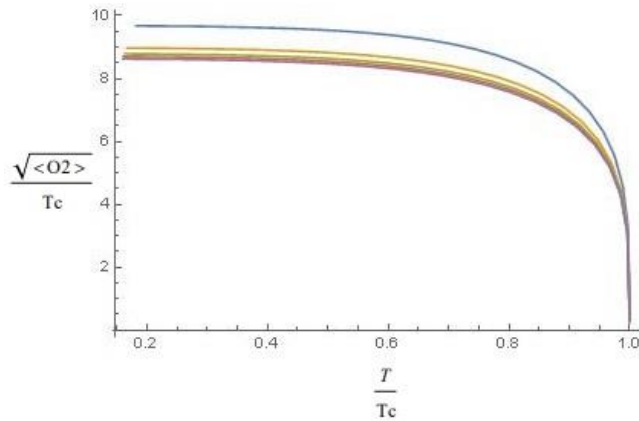
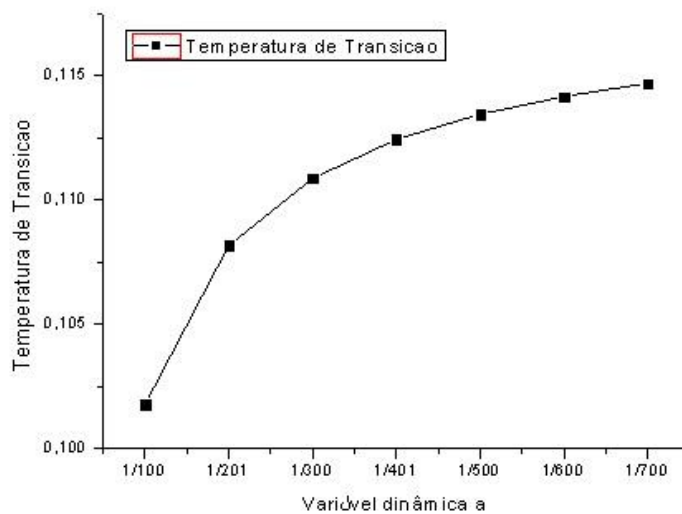


Figura 6 – Curva que mostra o comportamento do gap de energia em função da temperatura crítica

Nota-se claramente a semelhança entre as figuras (2), (5) e (6). Aqui verifica-se que ao variar o parâmetro de ordem é resgatado o mesmo comportamento para a curva $\frac{\sqrt{\langle O_2 \rangle}}{T_c}$, ou seja, o comportamento da teoria BCS para o *gap* de energia em um material supercondutor. O resultado também está em concordância com a previsão teórica para a supercondutividade holográfica. É importante ressaltar que a teoria AdS aplicada em física da matéria condensada (AdS/CMP) consegue reproduzir os resultados de maneira qualitativa e em concordância com experimentos em materiais fortemente correlacionados, uma das classes desse tipo de material encontra-se os supercondutores de *High-T_c*.

Também notou-se que, comparativamente com os resultados obtidos pela previsão da teoria BCS, os valores para o gap de energia são mais altos do que os esperados pela teoria. Um outro gráfico que explicita um panorama entre a temperatura de transição de fase, ou seja, o valor de temperatura que já se inicia o estado de supercondutância, em função da variável dinâmica “ a ”.



Ater um papo

Figura 7 - Gráfico da Temperatura de transição de fase em função da variável dinâmica vinda dos termos não lineares

Aqui ainda tem-se duas considerações a fazer. A primeira é que essa variação só foi verificada quando se alterou o valor do termo a . Também foi visto que a variável dinâmica “ b ”, tem a mesma influência sobre os valores da transição de fase e sobre os gaps ou lacunas de energia. É plausível a sugestão de que a tanto a temperatura crítica como as lacunas na energia dependam de termos de correções adicionais, o que não foi explorado nesse trabalho.

4. Conclusões e Perspectivas

A principal conclusão que se pode tirar sobre o método holográfico ou AdS/CFT é que ele produz resultados em concordância qualitativa com experimentos em materiais fortemente correlacionados, uma dessas classes de materiais são os cupratos de alta temperatura crítica.

É bem conhecido que existem correções à eletrodinâmica de Maxwell, alguns exemplos são os chamados termos não lineares os quais tem origem nos termos lagrangeanos de baixas energias em teoria de cordas. Com a introdução desses termos foi possível verificar uma razoável variação na lacuna de energia (gap), permitindo, em princípio, que o modelo possa tratar de materiais com novas lacunas de energia, os quais pertencem à região denominada cupratos sub-dopados. Espera-se que nesta região a competição entre diferentes fases tenha um grande impacto na física. Assim, esses termos não-lineares, nos permitiram ajustar a teoria para incorporar uma certa gama de lacunas energéticas dos cupratos. Também foi possível perceber uma grande variação na temperatura crítica.

Um ponto que vale a pena enfatizar é que é possível incluir novas correções não lineares, entretanto, se for considerada a superssimetria, todos os termos de mais baixa ordem são aqueles já apresentados no texto. Por outro lado, não foi possível baixar de 8 a lacuna de energia o que está bem acima do valor equivalente na teoria BCS.

Há uma série de possíveis alterações no modelo que podem ser considerados. É muito provável que a reação reversa possa ser considerada uma das mais importantes. Nesse trabalho nós trabalhamos com a métrica de fundo como sendo constante, que sabemos ser uma aproximação. Seria interessante ver quanto do comportamento é alterado e se obtemos alguns efeitos qualitativamente novos, os quais podem ser perdidos nessa aproximação. Em particular, esperamos que essa reação reversa resolva os problemas obter um limite inferior na lacuna de energia levando em um nível abaixo de 8. Outros cálculos que se pretende fazer é obter outras quantidades físicas a partir da teoria, como por exemplo, usando a fórmula de Hawking, calcular a entropia e com isso obter várias quantidades termodinâmicas e então comparar com experimentos.

Nessas conclusões finais cabe acrescentar que o método holográfico tem sido aplicado nos mais diversos problemas da matéria condensada como por exemplo o estudo do grafeno. Há alguns anos, desde a criação do grafeno, ele tornou-se intensamente estudado. Isto é em parte devido às suas inúmeras aplicações possíveis na tecnologia, mas também é chama a

atenção por razões puramente científicas. O grafeno possui muitas propriedades estranhas porque possui dimensões $2 + 1$, isso restringe o movimento de elétrons e também torna difícil fazer previsões usando métodos comuns de física da matéria condensada. A razão pela qual estamos interessados está intimamente ligada à universalidade e dimensionalidade; Já que esperamos capturar o comportamento de materiais bidimensionais $2 + 1$, esperamos captar um pouco da física de materiais verdadeiramente $2 + 1$ dimensionais.

Pode ser mostrado que devido à sua estrutura hexagona o grafeno tem uma estrutura de banda semelhante a um cone. Aqui considera-se que as transições acontecem com $k = 0$, ou seja, não ocorre mudança no momento entre os estados inicial e final, essa é uma suposição razoável a ser tomada, caso pretenda-se trabalhar em algum regime experimentalmente acessível.

A linha rotulada E_F na figura abaixo é conhecida como superfície de Fermi que é a "superfície de energia" ocupada mais alta em $T = 0$. A razão pela qual uma coleção de férmions em $T = 0$ tem uma superfície de Fermi é que eles não podem estar todos em menor estado, uma vez que devem obedecer ao princípio de exclusão de Pauli. Uma coleção de bósons não exibe uma superfície de Fermi.

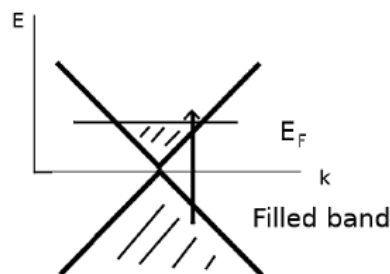


Figura 8- Uma transição no grafeno de uma banda na parte inferior da figura para uma banda mais enérgica e baixa. Nos experimentos, as transições que podem ocorrer são aquelas com jk muito pequeno, como descrito acima pela seta.

Assim um futuro trabalho com o grafeno seria um estudo do teorema de Coleman-Mermin-Wagner (Teorema CMW) o qual mostra que não é possível haver quebra espontânea de simetria em sistemas com $2+1$ dimensões e como isso seria visto a partir da teoria holográfica.

Apêndice

A. Equações de movimento

A.1. Caso radial

Métrica do espaço AdS

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(dx^2 + dy^2)$$

Para este caso o tenso métrico será dado por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/f(r) \end{pmatrix} \Rightarrow g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(r) \end{pmatrix}$$

Onde, para a solução de Schwarzschild

$$f(r) = r^2 \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right)$$

Sendo r_0 conhecido como raio de Schwarzschild.

O determinante da métrica é $g = \text{Det}[g_{\mu\nu}] = r^4$ e a ação gravitacional é dada por:

$$S = \int \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} (F_{\alpha\beta} F_{\alpha'\beta'}) - m^2 |\psi|^2 - |\nabla_\alpha \psi - ie A_\alpha \psi|^2 \right) d^d x$$

Onde

$$\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu A^\rho$$

Agora, utilizando as equações de Euler-Lagrange temos a seguinte situação

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= \sqrt{-g}[-m^2\psi + ieA_\alpha g^{\alpha\beta}(\nabla_\beta\psi - ieA_\beta\psi)] \\ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)} \right) &= \partial_\mu \{ \sqrt{-g}[\delta_\alpha^\mu g^{\alpha\beta}(\nabla_\beta\psi - ieA_\beta\psi)] \}\end{aligned}$$

Ao considerar o caso estático, ou seja, com o campo apenas na direção radial e fazendo $A_r = A_x = A_y = 0$ e $A_0 = \phi$ (potencial elétrico). Então

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= r^2[-m^2\psi - ieA_0 g^{0\beta}(\nabla_\beta\psi - ieA_\beta\psi)] \\ &= r^2[-m^2\psi - ieA_0 g^{00}(\nabla_0\psi - ieA_0\psi)] \\ &= r^2 \left[-m^2\psi - ie\phi \left(-\frac{1}{f(r)} \right) (-ie\phi\psi) \right]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = -r^2 \left[m^2\psi - e^2 \frac{\phi^2\psi}{f(r)} \right] \quad (1)$$

O que leva a

$$\begin{aligned}\partial_r \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_r\psi^*)} \right) &= -\partial_r \{ r^2[\delta_\alpha^r g^{\alpha\beta}(\nabla_\beta\psi - ieA_\beta\psi)] \} \\ &= -\partial_r \{ r^2[g^{rr}(\nabla_r\psi - ieA_r\psi)] \} \\ &= -\partial_r \{ r^2[f\partial_r\psi] \}\end{aligned}$$

$$= -(2rf\psi' + r^2f'\psi' + r^2f\psi'') \quad (2)$$

Então,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \partial_r \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_r \psi^*)} \right) = 0 \quad (3)$$

Substituindo as equações (1) e (2) em (3) e dividindo tudo por $-r^2f$, tem-se

$$\psi'' + \left(\frac{f'}{f} + \frac{2}{r} \right) \psi' + \frac{\phi^2}{f^2} \psi - \frac{m^2}{2f^2} \psi = 0$$

A.2. Caso estático

Aplicando novamente Euler-Lagrange, tem-se

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = -\frac{1}{4} g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} (F_{\alpha\beta} F_{\alpha'\beta'}) - m^2 |\psi|^2 + [((\nabla_\alpha \psi)^* - ieA_\alpha \psi^*) g^{\alpha\beta} (\nabla_\beta \psi + ieA_\beta)]$$

Aplicando exatamente as mesmas condições para o caso anterior

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} &= r^2 \left[-ie\psi^* \left(-\frac{1}{f(r)} \right) (iA_0\psi) + ie(-iA_0\psi^*) \left(-\frac{1}{f(r)} \right) \psi \right] \\ &= -2e^2 \frac{r^2}{f(r)} \phi \psi^2 \end{aligned} \quad (5)$$

O que leva a

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_0)} \right) &= \partial_\mu \frac{\partial}{\partial_\mu A_0} \left[\sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} (F_{\alpha\beta} F_{\alpha'\beta'}) \right) \right] \\
&= \partial_\mu \frac{\partial}{\partial_\mu A_0} \left[\sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} \right) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) (\partial_{\alpha'} A_{\beta'} - \partial_{\beta'} A_{\alpha'}) \right] \\
&= -\frac{1}{4} \partial_r \{ r^2 (g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'}) [(\delta_\alpha^r \delta_\beta^0 - \delta_\beta^r \delta_\alpha^0) (\partial_{\alpha'} A_{\beta'} - \partial_{\beta'} A_{\alpha'}) \\
&\quad + (\delta_{\alpha'}^r \delta_{\beta'}^0 - \delta_{\beta'}^r \delta_{\alpha'}^0) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)] \} \\
&= -\frac{1}{4} \partial_r \{ r^2 [(g^{r\alpha'} g^{0\beta'} - g^{0\alpha'} g^{r\beta'}) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \\
&\quad + (g^{\alpha r} g^{\beta 0} - g^{\alpha 0} g^{\beta r}) (\partial_{\alpha'} A_{\beta'} - \partial_{\beta'} A_{\alpha'})] \} \\
&= -\frac{1}{4} \partial_r \{ r^2 [(g^{rr} g^{00} (\partial_r A_0 - \partial_0 A_r) - g^{00} g^{rr} (\partial_0 A_r - \partial_r A_0)) \\
&\quad + (g^{rr} g^{00} (\partial_r A_0 - \partial_0 A_r) - g^{00} g^{rr} (\partial_0 A_r - \partial_r A_0))] \}
\end{aligned}$$

Utilizando o fato de que $g^{rr} g^{00} = f \times \left(-\frac{1}{f}\right) = -1$. Então o resultado da equação de Euler-Lagrange será:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_0)} \right) = \partial_\mu \{ r^2 \partial_r \phi \} = 2r \partial_r \phi + r^2 \partial_r^2 \phi \quad (6)$$

Agora, substituindo (5) e (6) em (3), tem-se

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} - \partial_r \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_r A_0)} \right) = -2e^2 \frac{r^2}{f(r)} \phi \psi^2 + 2r \partial_r \phi + r^2 \partial_r^2 \phi = 0$$

Dividindo tudo por r^2

$$\phi'' + \frac{2}{r}\phi' - \frac{2\psi^2}{f}\phi = 0 \quad (7)$$

Que é a segunda equação de movimento [14].

A.3. Termos não lineares

Considere a ação de Bom-Infeld e teoria de campos

$$S_{BI} = \int \sqrt{-g} \left(a(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + b(F_\nu^\mu F_\rho^\nu F_\sigma^\rho F_\mu^\sigma) \right) d^d x.$$

Para o termo $a(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2$ tem-se que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = 0$, o que leva direto a

$$A_{III}^{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{(\partial_\beta A_\alpha)} \right) = a\sqrt{-g}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2$$

E sabendo que $(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho}$, então

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{(\partial_\beta A_\alpha)} \right) &= g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} g^{\sigma\sigma'} g^{\rho\rho'} (\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu) (\nabla_{\mu'} A_{\nu'} - \nabla_{\nu'} A_{\mu'}) \\ &\quad \times (\nabla_\sigma A_\rho - \nabla_\rho A_\sigma) (\nabla_{\sigma'} A_{\rho'} - \nabla_{\rho'} A_{\sigma'}) \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} A_{III}^{\alpha\beta} &= ar^2 (g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} g^{\sigma\sigma'} g^{\rho\rho'}) \left[(\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta) F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} F_{\sigma'\rho'} + (\delta_{\mu'}^\alpha \delta_{\nu'}^\beta - \delta_{\nu'}^\alpha \delta_{\mu'}^\beta) F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} F_{\sigma'\rho'} \right. \\ &\quad \left. + (\delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta - \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta) F_{\mu\nu} F_{\mu'\nu'} F_{\sigma\rho} + (\delta_{\sigma'}^\alpha \delta_{\rho'}^\beta - \delta_{\rho'}^\alpha \delta_{\sigma'}^\beta) F_{\mu\nu} F_{\mu'\nu'} F_{\sigma\rho} \right] \end{aligned}$$

O que resulta em

$$A_{III}^{\alpha\beta} = 8ar^2 g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\sigma\sigma'} g^{\rho\rho'} F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} F_{\sigma'\rho'} \quad (8)$$

Passamos agora para o cálculo do termo

$$T_3 = \nabla_\beta \left(\frac{\partial}{\partial_\beta A_\alpha} ar^2 (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 \right) = \nabla_\beta A_{III}^{\alpha\beta}$$

Note que $A_{III}^{\alpha\beta} = -A_{III}^{\beta\alpha}$, ou seja, é anti-simétrico, como o símbolo de Christoffel é simétrico nos índices covariantes, então $\Gamma_{\rho\beta}^\alpha A_{III}^{\rho\beta} = 0$. Desse fato consta que

$$T_3^0 = \partial_\beta A_{III}^{0\beta} + \Gamma_{\rho\beta}^\beta A^{0\rho}$$

Resgatando o resultado obtido em (8), então

$$\begin{aligned} A^{0\beta} &= 8ar^2 g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\sigma\sigma'} g^{\rho\rho'} F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} F_{\sigma'\rho'} \\ &= 8ar^2 g^{00} g^{r\beta} F_{0r} (g^{rr} g^{00} F_{r0} F_{r0} + g^{00} g^{rr} F_{0r} F_{0r}) \\ A^{0\beta} &= -16ar^2 \phi'^3 \delta_r^\beta \end{aligned}$$

De tal forma que

$$T_3^0 = -16a[2r\phi'^3 + 3r^2\phi'^2\phi''] \quad (9)$$

Agora o desenvolvimento para o termo $b(F_\nu^\mu F_\rho^\nu F_\sigma^\rho F_\mu^\sigma)$

$$A_{IV}^{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{(\partial_\beta A_\alpha)} \right) = b\sqrt{-g}(F_\nu^\mu F_\rho^\nu F_\sigma^\rho F_\mu^\sigma)$$

Onde

$$(F_\nu^\mu F_\rho^\nu F_\sigma^\rho F_\mu^\sigma) = (g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} g^{\sigma\sigma'} g^{\rho\rho'}) F_{\mu'\nu'} F_{\nu'\rho'} F_{\rho'\sigma'} F_{\sigma'\mu'}$$

O desenvolvimento desse termo leva a

$$\begin{aligned} A_{IV}^{\beta\alpha} = br^2(g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} g^{\sigma\sigma'} g^{\rho\rho'}) & \left[(\delta_{\mu'}^\beta \delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^\beta \delta_{\mu'}^\alpha) F_{\nu'\rho'} F_{\rho'\sigma'} F_{\sigma'\mu} + (\delta_{\nu'}^\beta \delta_\rho^\alpha - \delta_\rho^\beta \delta_{\nu'}^\alpha) F_{\mu'\nu'} F_{\rho'\sigma'} F_{\sigma'\mu} \right. \\ & \left. + (\delta_{\rho'}^\beta \delta_\sigma^\alpha - \delta_\sigma^\beta \delta_{\rho'}^\alpha) F_{\mu'\nu'} F_{\nu'\rho'} F_{\sigma'\mu} + (\delta_{\sigma'}^\beta \delta_\mu^\alpha - \delta_\mu^\beta \delta_{\sigma'}^\alpha) F_{\mu'\nu'} F_{\nu'\rho'} F_{\rho'\sigma'} \right] \end{aligned}$$

De fato, assim como os outros termos, A_{IV} é um tensor, cujos índices contra-variantes são $A_{IV}^{\beta\alpha}$, então

$$T_4^0 = \nabla_\beta A_{IV}^{0\beta} - \Gamma_{\rho\beta}^\beta A^{0\rho}$$

Aqui foi considerado $\alpha=0$ e que $F_{0r} = -F_{r0} = \partial_r A_0 = \phi$, então

$$\begin{aligned}
A_{IV}^{0\beta} = br^2\{ & [g^{r\beta} g^{00} g^{rr} g^{00} (-\phi')(\phi)(\phi) + g^{00} g^{\beta r} g^{00} g^{rr} (\phi')(-\phi')(\phi') \\
& + g^{00} g^{r\beta} g^{rr} g^{00} (-\phi')(-\phi')(\phi') + g^{rr} g^{00} g^{\beta r} g^{00} (\phi')(\phi')(-\phi') \\
& + g^{rr} g^{00} g^{r\beta} g^{00} (\phi')(-\phi')(-\phi') + g^{00} g^{rr} g^{00} g^{\beta r} (-\phi')(\phi')(\phi') \\
& + g^{00} g^{rr} g^{00} g^{r\beta} (-\phi')(\phi')(-\phi') + g^{\beta r} g^{00} g^{rr} g^{00} (\phi')(-\phi')(\phi')]\}
\end{aligned}$$

$$A_{IV}^{0\beta} = br^2(8g^{r\beta})(\phi')^3$$

O que irá gerar

$$T_4^0 = 24br^2\phi'^2\phi'' \quad (10)$$

Assim, ao se somar (7) com (9) e (10), resulta em

$$\phi'' + \frac{2}{r}\phi' - \frac{2\psi^2}{f}\phi - 16a(-2r\phi'^3 + 3r\phi'^2\phi'') + 24br^2\phi'^2\phi'' = 0$$

Referências Bibliográficas

- [1] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S.V. Dubonos, I.V. Grigorieva, and A.A. Firsov. Electric field effect in atomically thin carbon lms. *Science*, 306:666, 2004, arXiv:cond-mat/0410550v1 [cond-mat.mtrl-sci].
- [2] PETERSEN, J. L. Introduction to the Maldacena conjecture on AdS/CFT. *Int. J. Mod. Phys.*, A14, p. 3597–3672, 1999.
- [3] Wenger, T. Holographic Superconductivity: Effective Field Theoretic Approach to Layered Superconductors. Tese (Mestrado). Department of Fundamental Physics Chalmers University of Technology Gothenburg, Sweden 2012
- [4] A. Altland and B. Simons. *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2010.
- [5] A.A. Tseytlin, On non-abelian generalization of Born-Infeld action in string theory, *Nucl. Phys. B* 501 (1997) 41, [hep-th/9701125].
- [6] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, Gauge theory correlators from noncritical string theory," *Phys. Lett. B* 428, 105 (1998) [hep-th/9802109].
- [7] S.A. Hartnoll, C.P. Herzog and G.T. Horowitz, Building a holographic superconductor, *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008) 031601
- [8] J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schieer. *Phys. Rev.* 108, 1175 (1957)
- [9] L. A. Barreiro and R. Medina. Revisiting the S-matrix approach to the open superstring low energy effective lagrangian, *JHEP* 10(2012)108
- [10] Karch A, Maciejko J, Takayanagi T. Holographic fractional topological insulators in 2+1 and 1+1 dimensions. *Phys Rev D*, 2010, 82: 126003. [arXiv: 1009.2991 [hep-th]]
- [11] Ryder, L.H., *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1996.
- [12] WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1972.

- [13] HARTNOLL, S. A.; HERZOG, C. P.; HOROWITZ, G. T. Holographic Superconductors. *JHEP*, v. 12, p. 015, 2008.
- [14] MAEDA, K.; NATSUUME, M.; OKAMURA, T. Universality class of holographic superconductors. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 79, n. 12, p. 126004, Jun 2009.
- [15] D'HOKER, E.; FREEDMAN, D. Z. Supersymmetric gauge theories and the AdS/CFT correspondence. *arXiv:hep-th/0201253*, 2002.
- [16] S.A. Hartnoll, C.P. Herzog, and G.T. Horowitz. Building an AdS/CFT superconductor. *Phys. Rev. Lett.*, 101:031601, 2008, arXiv:0803.3295v1 [hep-th].
- [17] M. Tinkham. Introduction to Superconductivity. McGraw-Hill, NY, 2nd edition, 1996