

ANDRÉ OLIVEIRA KÖHN

**Estudo analítico e numérico das tensões de Hertz em contato entre uma
esfera/plano e um cilindro/plano**

André Oliveira Köhn

**Estudo analítico e numérico das tensões de Hertz em contato entre uma
esfera/plano e um cilindro/plano**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na área de Projetos.

Orientador: Prof. Dr. Fernando de Azevedo Silva

Guaratinguetá - SP
2019

K79e	<p>Köhn, André Oliveira</p> <p>Estudo analítico e numérico das tensões de Hertz em contato entre uma esfera/plano e um cilindro/plano / André Oliveira Köhn – Guaratinguetá, 2019.</p> <p>72 f : il.</p> <p>Bibliografia: f. 65-69</p> <p>Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2019.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. Fernando de Azevedo Silva</p> <p>1. Tensão superficial. 2. Materiais – deformação. 3. Projeto auxiliado por computador. 4. Projetos de engenharia. I. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU 532.61(043)</p>
------	---

Luciana Máximo
Bibliotecária/CRB-8 3595

ANDRÉ OLIVEIRA KÖHN

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA"

PROGRAMA: ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA: PROJETOS

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dra. Ivonete Ávila
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. FERNANDO DE AZEVEDO SILVA
Orientador/UNESP/FEG


Prof. Dr. EDSON COCCHIERI BOTELHO
UNESP/FEG


Prof. Dr. ANTONIO CARLOS ANCELOTTI JÚNIOR
UNIFE/EM

Dezembro de 2019

DADOS CURRICULARES

ANDRÉ OLIVEIRA KÖHN

NASCIMENTO	18.10.1993 – Itanhandu/ MG
FILIAÇÃO	Afonso Celso Gomes Köhn Janice Maria Oliveira Köhn
2012/2017	Curso de Graduação em Engenharia Mecânica Universidade Estadual Paulista, Campus de Guaratinguetá
2018/2019	Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, nível de Mestrado Universidade Estadual Paulista, Campus de Guaratinguetá

dedico este trabalho de modo especial aos meus pais, que sempre me mostraram que tudo ficará bem no final.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que, cada um à sua maneira, me ajudaram durante todo o processo que me trouxe até aqui. Minha família, meus amigos, professores e funcionários da FEG, sem eles certamente esta minha caminhada não seria possível,

ao Prof. Dr. Fernando de Azevedo Silva, não somente pelo auxílio durante a elaboração desta dissertação, mas também pelas longas conversas, pela confiança depositada em mim, e por todos os conselhos e ajuda durante este período,

à CAPES e ao CNPq, pelo investimento em minha formação.

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Mas permita que a mente tenha cautela, porque apesar da carne ser maltratada, as circunstâncias da vida são bastante gloriosas.”

Jack Kerouac

RESUMO

Neste trabalho é apresentado um estudo analítico e numérico a respeito das tensões superficiais entre dois elementos. Quando uma força externa é aplicada a dois corpos em contato, verifica-se a existência de uma pequena deformação entre os elementos, causando um achatamento no plano de contato e criando uma zona de altas tensões de formato elíptico. Com a repetição cíclica destes carregamentos, pode ocorrer a perda progressiva de material superficial dos elementos envolvidos. De forma a investigar este fenômeno, esta dissertação realizou a análise detalhada de dois casos específicos encontrados na mecânica: o contato existente entre a esfera e a pista interna de um rolamento (contato esfera/plano), e o contato entre uma roda e um trilho ferroviário (contato cilindro/plano). Este estudo é essencial para a compreensão de como a aplicação de um carregamento externo pode influenciá-la superfície de dois elementos. A análise foi realizada através de duas abordagens: uma analítica, através das equações oriundas da Teoria de Hertz, e outra numérica, através de programas computacionais de elementos finitos. Com os resultados verificados, foi feita uma série de gráficos que ilustram o comportamento das tensões ao longo dos eixos, além da análise da área afetada pela ação das tensões superficiais. Por fim, verificou-se a existência de tensões normais compressivas máximas encontradas no plano de contato entre os elementos, sendo a maior tensão localizada na direção do eixo de aplicação do carregamento. À medida que se aumenta a profundidade, estas tensões tendem a se anular rapidamente. No plano de contato, as tensões só estão presentes dentro da elipse no contato causado pela deformação, sendo nula em suas bordas. Além das tensões normais, há a presença de tensões cisalhantes, sendo seu valor máximo encontrado a uma pequena profundidade. Foi verificado que as tensões de cisalhamento são os elementos mais significativos para possíveis desgastes superficiais futuros que podem levar o componente à falha e à fratura.

PALAVRAS-CHAVE: Tensão superficial. Tensões de Hertz. Contato esfera/plano. Contato cilindro/plano.

ABSTRACT

An analytical and numerical study regarding contact stresses between two elements is presented in this work. When an external force is applied to two bodies in contact, a small deformation between the elements appears, flattening the contact plane and creating high elliptical stresses. The cyclical repetition of these stresses can cause the progressive loss of surface material from the bodies. To verify this phenomenon, this work developed a detailed analysis of two specific cases found in many mechanical applications: the contact between a sphere and an inner ring of a bearing (sphere/plane contact) and the contact between a wheel and a rail track (cylinder/plane contact). This study is essential to the understanding of the influence in the surface of these two elements caused by an external load. The analysis was performed using two different approaches: one analytical, using Hertz equations, and one numerical, using computational simulations and finite element software. After the results were validated, a number of graphics were developed using the Hertz Equations for contact stresses to illustrate how the stresses behave along the axis, as well as the analysis of the area affected by the contact stresses. It was found that the maximum compressive stresses are located at the contact plane between the bodies, and the highest stress is found along the axis where the load was applied. When the depth is increased, all normal stresses tend to decrease until they became null. At the contact plane, all stresses are located inside an elliptical area, where the peak is found at its center and all borders are null. Along with the normal stresses, the external load causes the appearance of shear stresses, and its maximum value is found at a small depth from the contact surface. The shear stresses are the most significant elements are the most critical stresses regarding the presence of cracks and failures.

KEYWORDS: Contact stresses. Hertz stresses. Sphere/plane contact. Cylinder/plane contact.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Desgaste causado pela fadiga superficial. a) Pista interna de um rolamento axial de esferas; b) Dentes de engrenagem; c) Came; d) Roda.....	17
Figura 2 - Análise fotoelástica das tensões de contato entre dois sólidos.	18
Figura 3 - Duas superfícies genéricas em contato.	23
Figura 4 - Superfície curva.	24
Figura 5 - Contato Hertziano entre dois sólidos.	26
Figura 6 - Contato entre duas esferas.	27
Figura 7 - Dois cilindros em contato.	30
Figura 8 - Representação esquemática da propagação da trinca.	34
Figura 9 - Falha superficial devido à: a) Pitting; b) Spalling.	35
Figura 10 - Fluxograma Resumo.....	37
Figura 11 - Seção transversal de um rolamento axial de esferas.	38
Figura 12 - Rolamento FAG 6207.	42
Figura 13 – Modelo representativo de $\frac{1}{4}$ do contato esfera/plano.....	44
Figura 14 - Restrições para contato esfera/plano. a) Simetria aos eixos x e y; b) Suporte fixo na base.	45
Figura 15 - Carregamento aplicado ao contato esfera/plano.	45
Figura 16 - Malha final para contato esfera/plano.....	46
Figura 17 - Exemplos de rodas e trilhos encontrados no mercado.....	47
Figura 18 - Modelo cilindro/plano.....	48
Figura 19 - Restrições contato cilindro/plano. a) Suporte fixo; b) Eixos x e z.	49
Figura 20 - Carregamento aplicado ao contato cilindro/plano.	49
Figura 21 - Malha final do contato cilindro/plano.....	50
Figura 22 - Comportamento das tensões em função da profundidade.	52
Figura 23 - Resultado computacional do contato esfera/plano (Inventor).	53
Figura 24 - Resultado computacional do contato esfera/plano (Ansys).....	56
Figura 25 - Plano de contato entre esfera/plano.	56
Figura 26 - Tensões atuantes no eixo da carga.	59
Figura 27 - Tensões atuantes no plano de contato.	60
Figura 28 - Círculo de Mohr para a profundidade de $z = a$	61
Figura 29 - Resultado numérico do contato cilindro/plano. a) Visão 3D; b) Plano yz.....	61
Figura 30 - Plano de contato entre cilindro/plano.	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dimensões do rolamento.	39
Tabela 2 - Dados técnicos do rolamento FAG6207.	40
Tabela 3 - Fator de velocidade f_v	41
Tabela 4 - Coeficiente de vida f_h e exemplos de aplicações.	42
Tabela 5 - Dados utilizados para o cálculo do contato esfera/plano.	43
Tabela 6 - Dados utilizados para cálculo do contato cilindro/plano.	47
Tabela 7 - Resultados analíticos e numéricos do contato esfera/plano (<i>Inventor</i>).	51
Tabela 8 - Resultados analíticos e numéricos do contato esfera/plano (<i>Ansys</i>).	55
Tabela 9 - Resultados da área de contato entre esfera/plano.	57
Tabela 10 - Resultados analíticos e numéricos para contato cilindro/plano.	58
Tabela 11 - Resultados da área de contato entre cilindro/plano.	63

LISTA DE SÍMBOLOS

i	índice de identificação
A, B	índice de curvatura
z	equação geral do plano
R_x, R_y	raio de curvatura dos corpos em contato
m, n	centro da circunferência
r	raio da circunferência
h	separação entre as superfícies
δ	deslocamento dos corpos em contato
w_1, w_2	deslocamento pontual
m	constante do material
q	constante geométrica
ν	coeficiente de Poisson
E	módulo de elasticidade
P_{\max}	pressão máxima
$P_{\text{média}}$	pressão média
a, b	raio da área elíptica de contato
F	carregamento aplicado
σ	tensão normal
τ	tensão de cisalhamento
σ'	tensão de von Mises
l	comprimento do cilindro
S_c	resistência de contato
CS	coeficiente de segurança
d	diâmetro menor do anel interno;
d_1	diâmetro maior do anel interno
D	diâmetro maior do anel externo;
D_1	diâmetro menor do anel externo;
B	largura dos anéis interno e externo;
d_{CR}	diâmetro do corpo rolante;
r_i	raio axial da pista do anel interno;
r_o	raio axial da pista do anel externo;
C_r	capacidade de carga dinâmica, radial
C_{0r}	capacidade de carga estática, radial
C_{ur}	carga limite de fadiga, radial
n_g	velocidade limite
n_b	velocidade nominal
L_{10}	vida em fadiga
C_r	capacidade carga dinâmica do modelo fornecida pelo catálogo
P	carga constante aplicada
f_h	coeficiente de vida do rolamento
f_n	coeficiente de velocidade

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	CONSIDERAÇÕES GERAIS	15
1.2	JUSTIFICATIVA DO TRABALHO.....	16
1.3	OBJETIVOS.....	17
1.4	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	18
1.5	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	20
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	22
2.1	GEOMETRIA DO CONTATO HERTZIANO: CASO GERAL.....	23
2.2	GEOMETRIA DO CONTATO HERTZIANO: CASOS PARTICULARES.....	27
2.2.1	Caso particular: contato esfera/esfera.....	27
2.2.2	Caso Particular: contato cilindro/cilindro de eixos paralelos	29
2.3	MECÂNICA DO DESGASTE.....	32
2.3.1	Modos de falha.....	32
2.3.2	Propagação das trincas	33
3	MATERIAIS E MÉTODOS	37
3.1	CONTATO ENTRE ROLAMENTO E PISTA (CASO ESFERA/ PLANO).....	37
3.1.1	Formulação analítica.....	37
3.1.1.1	O rolamento	37
3.1.1.2	Força de aplicação	40
3.1.2	Formulação computacional	43
3.1.2.1	Restrições	44
3.1.2.2	Carregamento	45
3.1.2.3	Malha	46
3.1.2.4	Superfícies de contato	46
3.2	CONTATO ENTRE RODA E TRILHO (CASO CILINDRO/PLANO).....	46
3.2.1	Formulação Analítica	47
3.2.2	Formulação Computacional.....	48
3.2.2.1	Restrições	48
3.2.2.2	Carregamento	49
3.2.2.3	Malha	50
3.2.2.4	Superfícies de contato	50
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	51

4.1	RESULTADOS ESFERA/PLANO	51
4.1.1	Resultados analíticos	51
4.1.2	Resultados numéricos.....	53
4.1.2.1	Simulação com <i>Inventor</i>	53
4.1.2.2	Simulação com <i>Ansys</i>	54
4.2	RESULTADO CILINDRO/PLANO	57
4.2.1	Resultados Analíticos	58
4.2.1.1	Tensões ao longo do eixo z	58
4.2.1.2	Tensões no plano xy	59
4.2.1.3	Círculo de Mohr para as tensões	60
4.2.2	Resultados Numéricos	61
5	CONCLUSÕES	64
6	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	65
	REFERÊNCIAS	66
	APÊNDICE A – Formulação Computacional para esfera/plano.....	70

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

O estudo das tensões de contato é um tópico central na Mecânica dos Sólidos. Quando duas superfícies, independentemente de suas formas, entram em contato através da aplicação de um carregamento, haverá a formação de um campo de tensões na área de contato. Esta região é altamente dependente do carregamento aplicado, das propriedades materiais dos elementos envolvidos e da geometria dos corpos em contato (NORTON, 2013), e é caracterizada por atingir valores de tensão superiores aos limites de resistência dos materiais comumente usados, podendo atingir cerca de 2~5 GPa em seu ponto de pressão máxima em aplicações comuns como rolamentos (ARAKERE, 2016; SOLANKI; VAKHARIA, 2017), além da ocorrência de uma pequena deformação das partes em contato.

A partir do momento em que as superfícies de dois sólidos se tocam, ambos os corpos estão sujeitos à ocorrência do desgaste, termo que engloba diversos tipos de falhas que envolvem alterações na superfície (NORTON, 2013). Alguns tipos de desgaste comuns na engenharia ocorrem quando há o movimento de deslizamento entre estas superfícies, como a abrasão, adesão e erosão. Porém, neste trabalho é estudada a mecânica envolvida no desgaste devido à fadiga superficial, no qual o movimento relativo entre os sólidos é o rolamento puro ou com uma pequena porcentagem de deslizamento, causando as tensões de contato.

A primeira grande contribuição para este assunto foi desenvolvida por Heinrich Hertz em 1882, através de seu trabalho *On The Contact of Elastic Solids*. Neste estudo, Hertz propôs uma análise da deformação causada pelo contato entre dois corpos elásticos de geometria curva (JOHNSON, 2003). Todas as equações e proposições sobre este assunto são baseadas no modelo proposto por Hertz.

A simulação pelo método dos elementos finitos (MEF) é uma das principais aliadas no estudo das tensões de Hertz. O MEF é definido como um “método aproximado de cálculo de sistemas contínuos” (ALVES FILHO, 2000), onde um corpo contínuo é dividido em um número finito de partes (elementos) conectadas através de pontos (nós). Com o desenvolvimento da tecnologia, computadores se tornaram uma parte essencial no cálculo de problemas MEF graças aos diversos programas de alto desempenho que permitem a resolução rápida e precisa de problemas físicos complexos (CHANDRUPATLA; BELEGUNDU, 2012). Porém, apesar da facilidade e praticidade causada pelo advento da tecnologia, não é prudente apenas aceitar os resultados gerados pelo programa, sendo ainda necessário um olhar mais

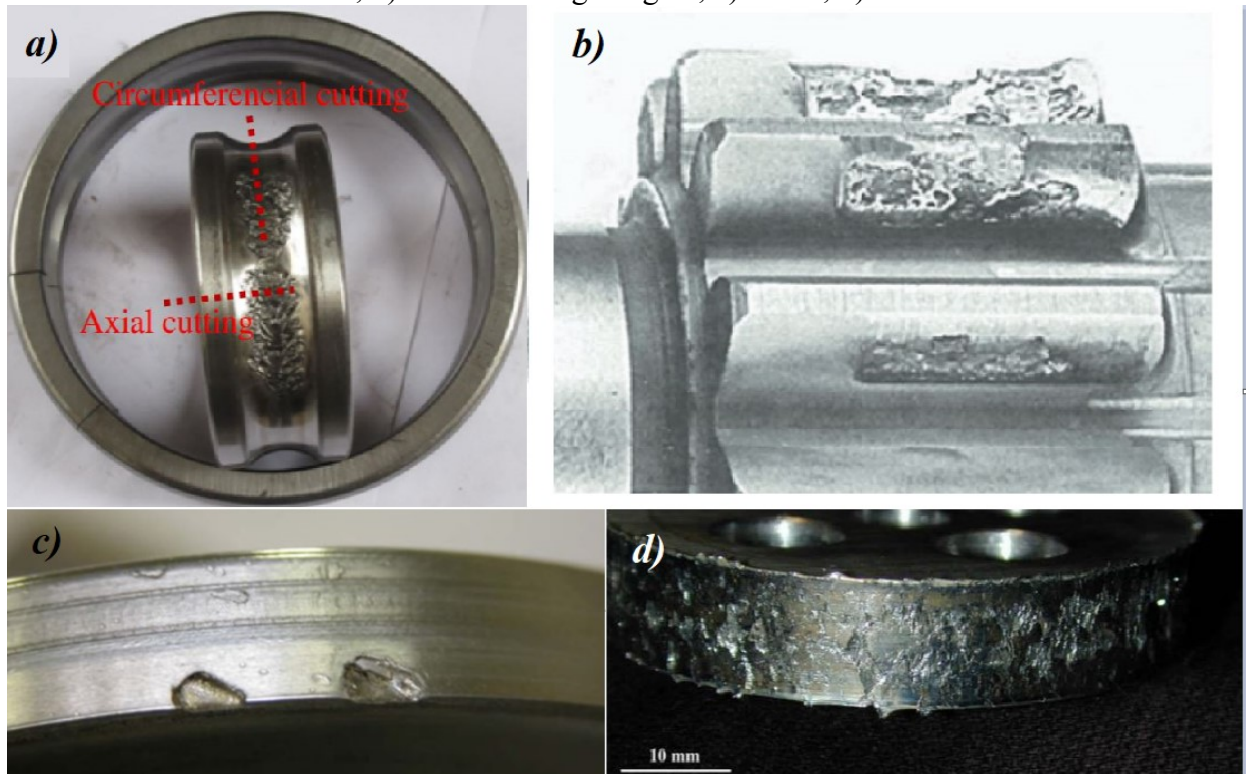
profundo e crítico do engenheiro sobre o problema. Por isso, neste trabalho foram realizadas abordagens analíticas e computacionais em duas situações onde as tensões de Hertz estão presentes, para assim obter dois resultados por métodos diferentes, podendo avaliá-los e compará-los.

1.2 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

Segundo Moghaddam et al. (2015), quando uma peça é instalada corretamente, o principal modo de falha será a fadiga do material, mecanismo que ocorre devido às cargas variantes no tempo em níveis de tensão menores do que os limites de resistência do material (NORTON, 2013) depois de um alto número de ciclos. A fadiga pode se manifestar de maneira tradicional, quando um componente se rompe devido à repetição do carregamento, iniciando a formação e propagação de uma trinca que causa a ruptura do elemento quando atinge o seu tamanho crítico. Porém, este trabalho estuda os mecanismos por trás da fadiga superficial, processo que se manifesta na região de contato entre dois elementos. De acordo com Juvinal e Marshek (2008), “Falhas por fadiga superficial são uma consequência da aplicação repetida das cargas que produzem tensões na superfície de contato e abaixo delas”. Assim sendo, a fadiga superficial ocorre em aplicações onde há o contato constante entre duas superfícies, como cames/seguidores, engrenagens, roda/trilho e rolamentos. Na Figura 1, são mostrados conseqüências da fadiga superficial para os elementos mencionados. Em todos os casos, houve a perda severa de material na região da peça onde há o contato cíclico com outro elemento. O desgaste superficial de cada componente pode comprometer toda a operação do elemento, por isso é essencial a compreensão do comportamento que causa estas falhas.

Entretanto, antes da análise da fadiga superficial, é imprescindível a análise estática dos elementos envolvidos para total compreensão do mecanismo por trás das tensões superficiais decorrentes da aplicação de um carregamento externo. Em função disso, esta dissertação se propôs a analisar em detalhes especificamente dois casos comuns à mecânica: o contato existente entre uma esfera/pista de um rolamento, e o contato existente entre uma roda/trilho. Após esta análise completa destes dois casos específicos, a compreensão dos efeitos que as tensões superficiais podem causar é mais clara para aqueles que buscarem informações a respeito deste fenômeno no futuro. Desta forma, o estudo das tensões de Hertz e de todos os fenômenos envolvidos estudados neste trabalho é o primeiro passo para o entendimento das causas da fadiga superficial.

Figura 1 - Desgaste causado pela fadiga superficial. a) Pista interna de um rolamento axial de esferas; b) Dentes de engrenagem; c) Came; d) Roda.



Fonte: a) Deng (2014); b) Norton (2013); c) e d) Donzella; Petrogalli (2010).

1.3 OBJETIVOS

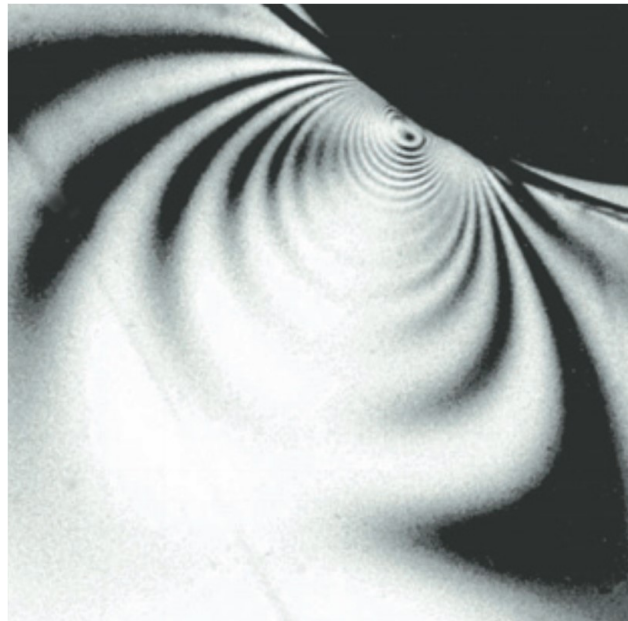
O objetivo deste trabalho é realizar uma análise detalhada dos efeitos causados pela existência de tensões superficiais em duas aplicações comuns na mecânica: o contato entre a esfera e a pista interna de um rolamento axial de esferas (caracterizado como esfera/plano), e o contato entre uma roda e um trilho ferroviário (caracterizado como cilindro/plano).

Para ambos os casos estudados, foi feita duas abordagens diferentes: uma analítica, através da aplicação das equações fornecidas pela teoria de Hertz, e outra abordagem numérica, através da utilização de programas computacionais de elementos finitos, como *Ansys*, *Inventor* e *Nastran in-CAD*. Os resultados obtidos por ambas as abordagens são comparados entre si, e então se procurou apontar uma série de características resultantes da existência das tensões superficiais nos elementos analisados, entre elas: ponto crítico do modelo, área de contato formada, pressão máxima atingida e comportamento das tensões ao longo dos eixos.

1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os primeiros estudos realizados sobre tensões no contato entre dois sólidos foram feitos pelo físico alemão Heinrich Hertz na década de 1880, enquanto estudava a interferência óptica entre duas lentes de vidro. Ao investigar se a pressão aplicada nas lentes para fixação no experimento interferia no resultado, Hertz percebeu uma deformação em formato elíptico no contato entre os sólidos. Seu estudo se tornou a base para toda a mecânica do contato que seria estudada desde então. Conforme a engenharia progrediu, novos estudos resultaram em melhorias na teoria Hertziana, eliminando diversas restrições impostas nas condições de Hertz, como a necessidade das superfícies serem livres de atrito e perfeitamente elásticas (JOHNSON, 2003). A Figura 2 retrata a onda de deformações elípticas causado pelo contato entre duas superfícies curvas.

Figura 2 - Análise fotoelástica das tensões de contato entre dois sólidos.



Fonte: Norton(2013).

O estudo das tensões superficiais se faz necessário em diferentes áreas da Mecânica. Em qualquer situação onde haja o contato entre dois elementos e a aplicação de um carregamento externo, haverá a formação de uma zona de altas tensões na superfície entre os elementos. Como exemplos, citam-se os rolamentos, onde o contato entre o elemento rolante e as pistas dos anéis provoca uma zona de tensões de Hertz; dentes de engrenagens, tópico de estudo de diversos trabalhos recentes como Hao e Shi (2015); Hwang et al. (2013); Patil et al. (2014) e Gonzales-Perez e Fuentes (2011); cames e seguidores (JUVINALL; MARSHEK,

2008); corrente e uma roda dentada (BUDYNAS; MISCHKE; SHIGLEY, 2005); processos de conformação mecânica como calandragem e laminação, onde cilindros em contato são usados para alterar a espessura de um material (NORTON, 2013); entre uma roda e um trilho, tópico abordado em diversos trabalhos recentes, como Nejad, Shariati e Farhangdoost (2016); Xiao, Zhang e Qian (2014); Jaifu, Raon e Pimsarn (2018) e Srivastava (2017), sendo as tensões de Hertz presentes neste contato as principais causas de falhas e trincas nestes elementos.

É comum que este contato entre as partes seja cíclico, como no caso dos elementos rolantes de mancais e em rodas sobre trilhos, onde um determinado ponto da superfície entra em contato com o outro sólido a cada rotação sucessiva, gerando as chamadas tensões de Hertz. Estas tensões podem ser repetidas em milhões de ciclos, causando o processo de fadiga superficial, quando alterações aleatórias e repetidas de tensão e deformação em um ponto ocasionam trincas sub-superficiais e superficiais que causam o desgaste e a perda de material na superfície devido aos processos *de pitting* (crateração) e *spalling* (lascamento), causando prejuízo financeiro e humano (NORTON, 2013; SRIVASTAVA, 2017).

A zona de tensões causada pelo contato entre dois sólidos é caracterizada pelo seu estado triaxial de tensões compressivas, além de tensões de cisalhamento em todas as direções (SUBHASH et al., 2017; ARAKERE, 2016). As tensões normais são máximas na superfície de contato, e se anulam à medida que a profundidade é aumentada. Diversos estudos mostraram que as tensões cisalhantes são as mais críticas em relação ao surgimento de trincas (SUBHASH et al., 2017; JUVINALL; MARSHEK, 2008; DENG; QIN, HUANG, 2015), e trabalhos como os de Deng (2014) e Deng, Qin e Huang (2015) mostram que há um pico destas tensões na região sub-superficial, geralmente ao redor de uma descontinuidade na microestrutura do elemento, ocasionando uma trinca que pode se propagar e causar o colapso do conjunto.

Mancais de rolamentos são elementos mecânicos utilizados em diversos ramos da indústria, como a naval, aeronáutica, automobilística, entre outras. São definidos a partir do tipo de seus elementos rolantes (esfera, rolos, agulhas, cilindros, cones, etc), quantidade de pistas (simples, dupla, tripla) e do tipo de carga a qual são submetidos (radial e/ou axial) (NORTON, 2013), sendo constituídos geralmente por elementos rolantes de aço presos entre duas pistas (anel interno e externo), retidos dentro de uma gaiola, sendo o modelo a ser utilizado escolhido a partir das condições e exigências de sua aplicação. Estes elementos são imprescindíveis para a transmissão de movimento entre duas partes, como, por exemplo, em um eixo. O bom desempenho de um rolamento exige uma boa combinação de diferentes

parâmetros que atuam mutuamente sobre a peça, tais como velocidade de rotação, carregamentos aplicados, lubrificação e geometria das partes em contato.

O corpo rolante do rolamento está em contato cíclico com a pista interna, e assim está sujeito aos efeitos das tensões de Hertz. Devido à importância desta questão, diversos trabalhos buscam entender o mecanismo deste problema. Porém, o estudo do contato entre as partes de um rolamento se mostra de grande complexidade devido às altas tensões na região de contato, que chegam a 2~5 GPa (RYCERZ; OLVER; KADIRIC, 2017; MORALES-ESPEJEL; GABELLI, 2015; SUBHASH et al., 2017; LI, 2018; ARAKERE, 2016), além de diversos parâmetros que influenciam na situação final, como lubrificação, vibração, rugosidade (MOHD YUSOF; RIPIN, 2014), dimensões do rolamento (CHEN; WEN, 2015), velocidade de rotação, intensidade dos carregamentos aplicados (GUO et al., 2015) e curvaturas dos anéis externo e interno (DENG et al., 2013; CHEN et al., 2014). Portanto, cada parâmetro exige um estudo aprofundado para que se entenda em detalhes seu comportamento no mecanismo da fadiga superficial. Além disso, o tipo de elemento rolante influencia diretamente no contato mecânico, exigindo um estudo específico em função de sua geometria. Morales-Espejel e Gabelli (2015) e Deng et al. (2015) discutem o fenômeno em rolamentos de rolos cônicos, Solanki e Vakharia (2017a); Solanki e Vakharia (2017b); Li et al. (2018) e Mohd Yusof e Ripin (2014) em rolamentos de rolos cilíndricos, e Lostado, Martinew e Mac Donald (2015) em rolamentos autocompensadores de rolos cilíndricos.

1.5 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

No capítulo 1 deste trabalho, um panorama geral a respeito da mecânica de contato é apresentado, destacando seu histórico, sua importância, em quais situações está presente e o atual estado da arte deste tema, além da motivação e objetivos para a realização deste estudo.

No capítulo 2, são apresentados os fundamentos teóricos por trás de todos os cálculos realizados neste estudo. É mostrada uma abordagem geral para o contato entre dois sólidos, e posteriormente um direcionamento para os dois casos específicos abordados neste trabalho, apresentando todas as equações e proposições aplicadas.

No capítulo 3, toda a metodologia empregada é apresentada. São discutidos todos os dados utilizados nos cálculos, além da descrição de todas as decisões empregadas para a construção do modelo computacional e sua simulação.

Os resultados são apresentados e discutidos no capítulo 4, onde também é feita uma comparação entre os dados obtidos através da abordagem analítica e numérica a fim de validar os cálculos realizados.

No capítulo 5, todas as conclusões tiradas pela realização deste trabalho são mostradas, além de sugestões para trabalhos futuros.

Por fim, o capítulo 6 é dedicado a relatar toda a referência bibliográfica consultada para realização deste trabalho.

Após a seção de referências bibliográficas, ainda há um Apêndice dedicado a explicar em detalhes tópicos que foram abordados apenas superficialmente no decorrer do texto para não comprometer a estrutura e a continuidade do raciocínio durante a dissertação.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

O tópico de estudo deste trabalho é o contato entre dois corpos e como este afeta sua distribuição de tensões e sua geometria. Este contato é diferenciado entre conforme ou não-conforme. O primeiro trata de superfícies que se encaixam naturalmente sem deformações, enquanto o segundo envolve superfícies cujo contato gera uma deformação e a formação de uma área entre os elementos (JOHNSON, 2003).

Quando as superfícies de dois corpos não-conformes se tocam, idealmente o contato seria um ponto (contato esfera/ esfera) ou uma linha única (contato cilindro/ cilindro de eixos paralelos). Como a tensão é definida pela divisão entre força aplicada por área, estes casos resultariam em uma tensão infinita, o que é impossível na prática. Porém, assim que um carregamento externo é aplicado, estas superfícies tendem a se deformar, transformando este contato em uma região de dimensões muito pequenas quando comparadas às dimensões gerais dos elementos, possibilitando a formação de uma zona de tensões na superfície de contato. O formato dessa região é diretamente relacionado à geometria dos corpos, e é necessária sua predição para o estudo das tensões de Hertz e de como elas afetarão os elementos.

A teoria básica para o estudo das tensões superficiais foi iniciada por H. Hertz no fim do século XIX, quando ele estudou o contato entre dois corpos elásticos e curvos (HONGYAN, 2016). De acordo com os estudos realizados, a área de contato entre duas superfícies é uma elipse, e essa região é caracterizada por possuir uma zona de altas tensões que podem chegar até a 2~5 GPa em seu pico (SOLANKI; VAKHARIA, 2017a), e deve ser tratada separadamente da distribuição geral de tensões dos corpos (JOHNSON, 2003). O material da região de contato é comprimido igualmente em todas as direções, fazendo com que seja possível a resistência às grandes tensões (JUVINALL; MARSHEK, 2008). É devido a essa compressão que a resistência para tensões geradas pelo contato puntiforme é mais alta que os demais limites de resistência do material, chegando a 5 GPa para aços especiais (SOLANKI; VAKHARIA, 2017a).

As equações formuladas por Hertz são baseadas em algumas suposições (JOHNSON, 2003; HOJJATI; KAZEMI, 2007; SOLANKI; VAKHARIA, 2017a):

- (i) As tensões superficiais devem desaparecer a medida que aumenta-se a profundidade;
- (ii) As deformações na região de contato são pequenas quando comparadas com as dimensões dos corpos ($a \ll R1; R2$);
- (iii) As superfícies em contato são contínuas e não-conformes;

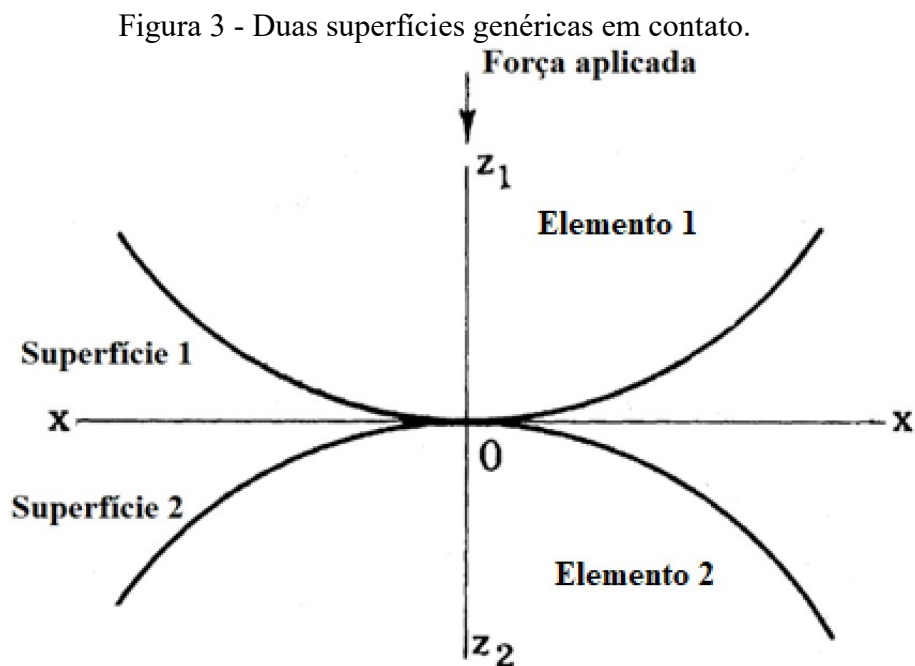
- (iv) As superfícies são livres de atrito;
- (v) Os materiais em contato são isotrópicos;
- (vi) Coeficiente de Poisson ν e Módulo de Young E permanecem inalterados após o carregamento externo;
- (vii) As tensões normais são inexistentes fora da região de contato para ambas as superfícies;
- (viii) Os limites do material são respeitados, isto é, as deformações estão dentro de seu regime elástico;
- (ix) A distância entre os corpos é zero na zona de contato, porém finita fora desta região;

Respeitando todas as condições impostas, as equações de Hertz podem ser aplicadas.

Inicialmente, deve-se descrever o contato geral entre dois elementos para depois ser estudado os casos particulares.

2.1 GEOMETRIA DO CONTATO HERTZIANO: CASO GERAL

Considera-se o contato entre os elementos 1 e 2, sendo o plano onde as superfícies se tocam xy , e o eixo z sendo a profundidade e também a direção do carregamento aplicado, conforme Figura 3.



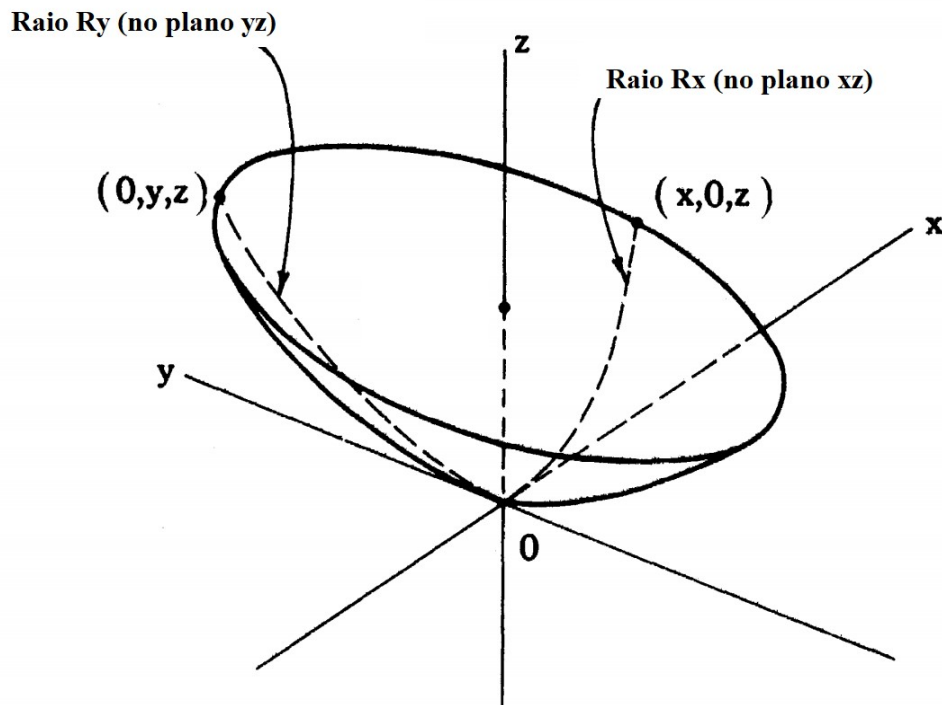
Fonte: Adaptado de Puttock (1969).

A equação geral que descreve o contorno das superfícies é descrita pela equação (1).

$$z_i = A_i \cdot x^2 + B_i \cdot y^2 \quad (1)$$

Sendo A e B duas constantes dependentes da curvatura dos corpos 1 e 2, e i um índice que se refere à identificação de cada elemento. Estas constantes podem ser obtidas analisando os planos onde $x = 0$ e $y = 0$, segundo Figura 4.

Figura 4 - Superfície curva.



Fonte: Adaptado de Puttock (1969).

Fazendo com que $x=0$ obtém-se a equação (2):

$$z = B \cdot y^2 \quad (2)$$

No plano yz tem-se apenas a curvatura de R_y , então o valor da constante B pode ser obtido a partir da equação geral da circunferência, dada pela equação (3).

$$(y - m)^2 + (z - n)^2 = r^2 \quad (3)$$

Sendo m e n o centro da circunferência e r seu raio.

Substituindo $m = 0$, $n = R_y$ e $r = R_y$, é obtido a equação (4).

$$y^2 + z^2 = 2.Ry.z \quad (4)$$

O termo de segundo grau de z pode ser desprezado devido ao seu valor insignificante (PUTTOCK, 1969), e assim é obtido:

$$z = \frac{y^2}{2.Ry} \quad (5)$$

A partir da equação (6), pode-se obter o valor da constante B , sendo:

$$B = \frac{1}{2.Ry} \quad (6)$$

Fazendo o mesmo para $y = 0$, e analisando o plano xz , é obtido o valor da constante A :

$$A = \frac{1}{2.Rx} \quad (7)$$

Assim, é possível descrever o perfil da superfície dos elementos 1 e 2, sendo estes unicamente dependentes dos raios principais de curvatura de cada corpo.

$$z_1 = \frac{x^2}{2.Rx_1} + \frac{y^2}{2.Ry_1} \quad (8)$$

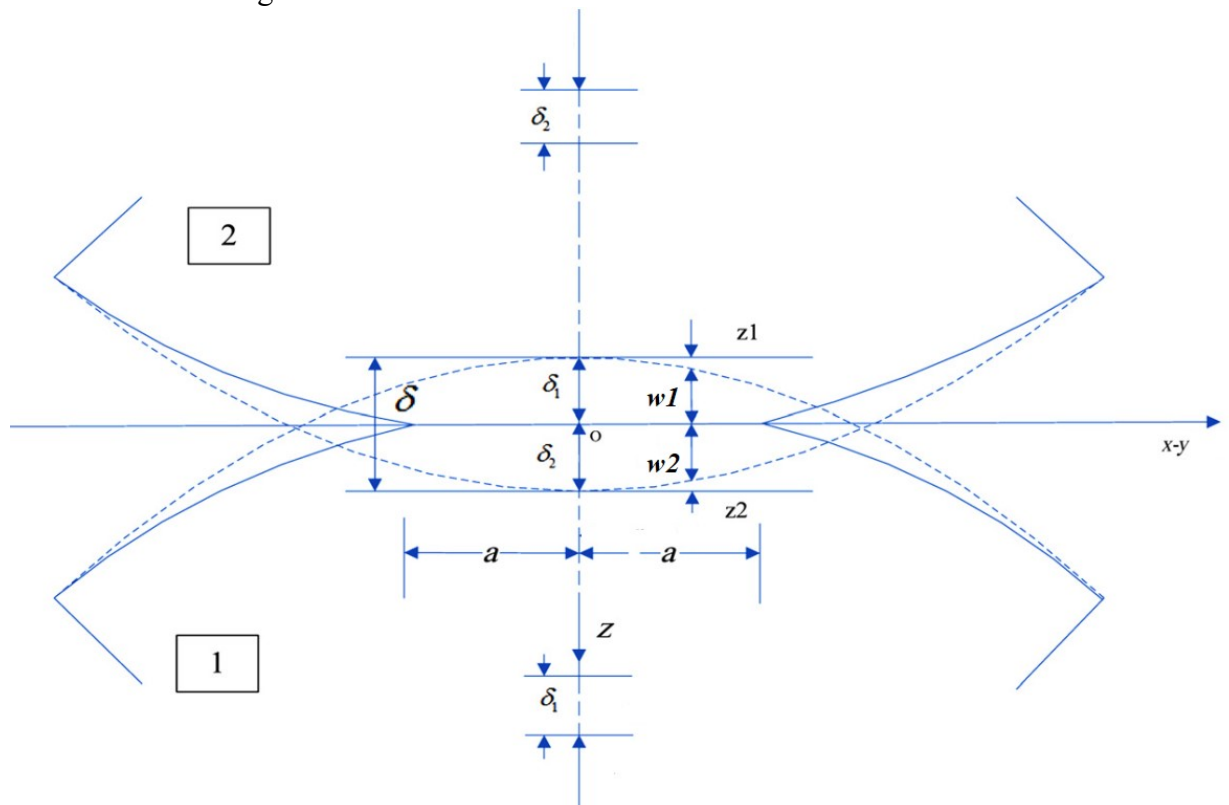
$$z_2 = \frac{x^2}{2.Rx_2} + \frac{y^2}{2.Ry_2} \quad (9)$$

Segundo Williams e Dwyer-Joyce (2001), a separação h entre as superfícies é dada pela expressão (10):

$$h = z_1 + z_2 \quad (10)$$

O comportamento da geometria dos corpos quando submetidos a uma força externa é demonstrado na Figura 5. Após a aplicação do carregamento, os corpos 1 e 2 se deslocarão um em direção ao outro à uma distância de δ_1 e δ_2 respectivamente. Se não houvesse a deformação, aconteceria a sobreposição dos corpos conforme representado pela linha tracejada. Porém, devido a alteração da superfície de contato, há a formação de uma área de contato de largura $2a$.

Figura 5 - Contato Hertziano entre dois sólidos.



Fonte: Adaptado de Cao et al. (2015).

Se os deslocamentos de pontos correspondentes na superfície dos corpos 1 e 2 são definidos por w_1 e w_2 , todos os pontos dentro da região de contato obedecerão a relação definida pela equação (11):

$$(z_1 + w_1) + (z_2 + w_2) = \delta_1 + \delta_2 = \delta \quad (11)$$

Por outro lado, os pontos fora da região de contato são caracterizados pela expressão (12):

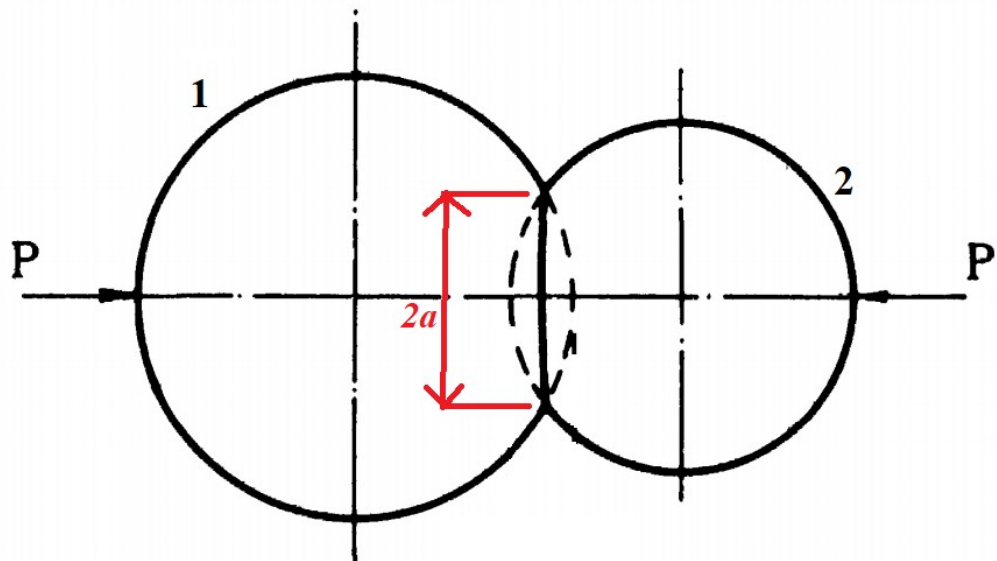
$$(z_1 + w_1) + (z_2 + w_2) > \delta \quad (12)$$

2.2 GEOMETRIA DO CONTATO HERTZIANO: CASOS PARTICULARES

2.2.1 Caso particular: contato esfera/esfera

O contato ideal entre duas esferas seria um ponto único. Porém, foi visto que ocorre uma deformação na região de contato, gerando uma pequena área elíptica na superfície entre ambos os elementos. Tendo em vista que cada esfera é simétrica em relação a si mesmo, isto é, cada esfera apresenta um único raio comum a todos os eixos, para facilitar a nomenclatura diz-se que a área formada tem formato circular, pois as dimensões do semi-eixo maior e do semi-eixo menor da elipse são idênticas, sendo a o raio da circunferência de contato, conforme Figura 6.

Figura 6 - Contato entre duas esferas.



Fonte: Adaptado de Puttock (1969).

Para o caso de duas esferas, tem-se que $R_{x1} = R_{y1} = R_1$ e $R_{x2} = R_{y2} = R_2$. Portanto, as constantes A e B são iguais para ambos os planos, e as equações gerais do plano e a distância h entre eles para este caso são dadas pelas equações (13-15).

$$z_1 = \frac{x^2}{2.R_1} + \frac{y^2}{2.R_1} \quad (13)$$

$$z_1 = \frac{x^2}{2 \cdot R_2} + \frac{y^2}{2 \cdot R_2} \quad (14)$$

$$h = z_1 + z_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot \frac{y^2}{2} \quad (15)$$

Segundo Norton (2013) e Juvinal e Marshek (2008) a tensão de contato será dependente de constantes dos materiais e constantes geométricas de cada esfera. A primeira é representada por m_n , sendo n um índice que define cada elemento em contato, e envolve o coeficiente de Poisson ν , razão entre a deformação específica lateral e longitudinal, e o módulo de Young E , relação entre a tensão aplicada e a deformação (NORTON, 2013). A segunda é representada pela constante q , e envolve a curvatura de ambas as esferas (R_1 e R_2).

$$m_n = \frac{1 - \nu_n^2}{E_n} \quad (16)$$

$$q = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (17)$$

Segundo Norton (2013) e Juvinal e Marshek (2008), a pressão de contato máxima ($P_{máx}$) é observada no centro da região de contato, e $P_{média}$ é uma pressão média a qual é obtida através da divisão entre o carregamento aplicado F e a área circular de contato de raio a , que é obtida através de uma relação entre F e as constantes de material m_1 e m_2 .

$$P_{máx} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{\pi \cdot a^2} \quad (18)$$

$$P_{média} = \frac{F}{\pi \cdot a^2} \quad (19)$$

$$a = 0.375 \cdot \frac{(m_1 + m_2)}{q} \cdot F^{1/3} \quad (20)$$

O carregamento aplicado F ocasionará um estado triaxial de tensões, o qual σ_x , σ_y e σ_z serão tensões compressivas ocasionadas pelo contato. Segundo Norton (2013), é possível descrever o comportamento das três tensões principais e das tensões cisalhantes através das equações (21-23). Considera-se o plano xy como o plano que contém a região de contato entre as partes, e z é o eixo perpendicular a este plano que representa a profundidade e também o eixo de aplicação da força.

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{P_{m\acute{a}x}}{2} \cdot \left[-(1 + 2\nu) + 2(1 + \nu) \cdot \left(\frac{z}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) - \left(\frac{z}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^3 \right] \quad (21)$$

$$\sigma_z = P_{m\acute{a}x} \cdot \left[-1 + \frac{z^3}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (22)$$

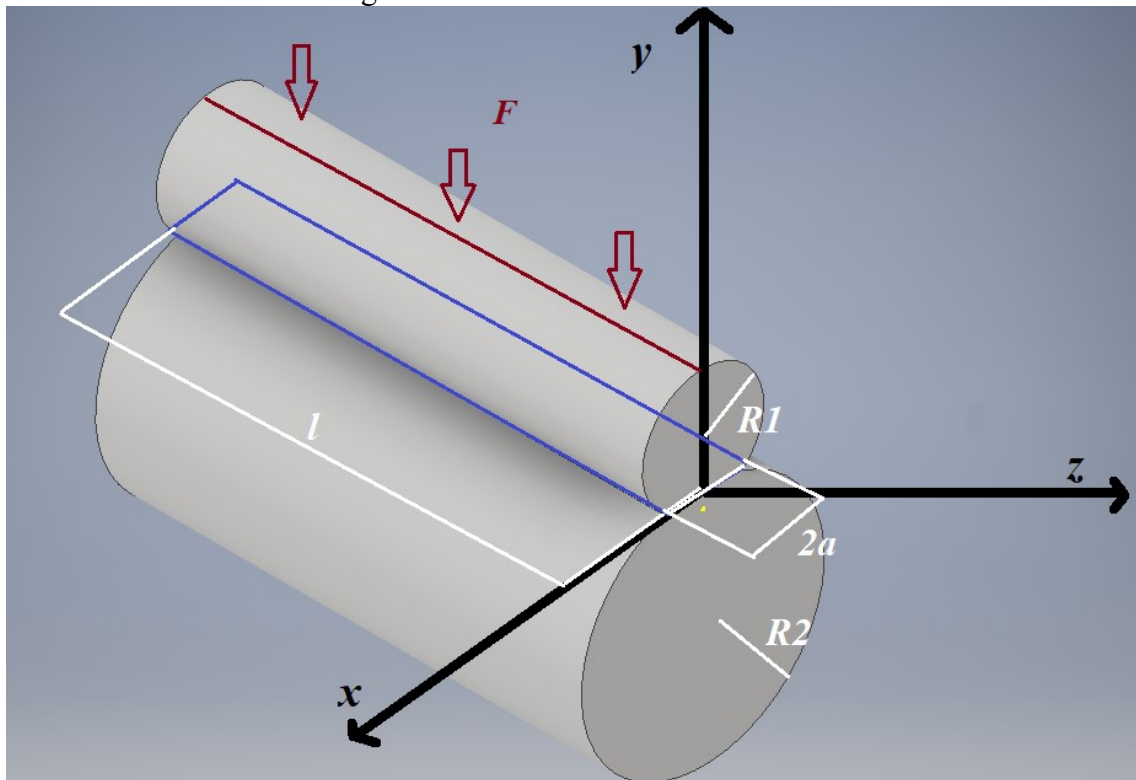
$$\tau_{13} = \frac{P_{m\acute{a}x}}{2} \cdot \left[\frac{(1 - 2\nu)}{2} + (1 - \nu) \cdot \left(\frac{z}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) - \left(\frac{3}{2} \right) \cdot \left(\frac{z}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^3 \right] \quad (23)$$

Sabe-se que a regi\~ao de contato entre a esfera e pista de um rolamento \u00e9 complexa, possuindo quatro curvaturas (uma radial e axial para cada elemento em contato). De forma a simplificar os c\u00e1lculos e a possibilitar a aplica\u00e7\u00e3o das equa\u00e7\u00f5es de Hertz para o caso espec\u00edfico estudado (caso rolamento/pista) nesta disserta\u00e7\u00e3o, assumiu-se que um dos corpos seja uma placa plana. Para isso, foi feito com que a curvatura R_2 tenda ao infinito nas equa\u00e7\u00f5es de Hertz. Apesar da simplifica\u00e7\u00e3o, os resultados se mostram v\u00e1lidos e pr\u00f3ximos a realidade (NORTON, 2013).

2.2.2 Caso Particular: contato cilindro/cilindro de eixos paralelos

Quando dois cilindros de comprimento l e raios R_{x1} e R_{x2} com eixos paralelos s\u00e3o postos em contato atrav\u00e9s de um carregamento externo, idealmente a regi\u00e3o de contato seria uma linha paralela aos eixos, por\u00e9m devido \u00e0 deforma\u00e7\u00e3o ocorrida na superf\u00edcie entre os elementos, forma-se uma \u00e1rea retangular de comprimento $2a$ e comprimento l na regi\u00e3o de contato, conforme Figura 7. Esta geometria \u00e9 um caso adaptado de uma elipse onde um semi-eixo da elipse \u00e9 significativamente maior que o outro semi-eixo (no caso, o eixo longitudinal de comprimento l \u00e9 consideravelmente maior que o eixo transversal de comprimento $2a$).

Figura 7 - Dois cilindros em contato.



Fonte: Produção do próprio autor.

Para este caso, tem-se que $R_{x1} = R_1$ e $R_{x2} = R_2$, enquanto $R_{y1} = R_{y2} = \infty$. Portanto, as constantes B para cada plano são nulas pois não há curvatura para o eixo y e suas equações são resumidas em:

$$z_1 = \frac{x^2}{2 \cdot R_1} \quad (24)$$

$$z_2 = \frac{x^2}{2 \cdot R_2} \quad (25)$$

A partir das dimensões de cada cilindro, e de suas propriedades mecânicas (módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν), pode-se obter o campo de tensões gerado pela aplicação da carga F . Considerando o plano xy coincidente com o plano de contato entre os corpos (sendo o eixo y paralelo ao eixo dos cilindros), e o eixo z representando a profundidade do contato e também o eixo de aplicação da força, é possível obter o comportamento das tensões em função dos eixos.

Segundo Norton (2013) e Johnson (2003), a pressão máxima $P_{máx}$ é encontrada no plano de contato onde $z = 0$, e seu valor é descrito pela equação (26).

$$P_{m\acute{a}x} = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot a \cdot l} \quad (26)$$

Segundo Johnson (2003), a dimens\~{a}o $2a$ da largura da regi\~{a}o de contato \u00e9 obtida por uma rela\~{c}\~{a}o entre o carregamento aplicado F e as propriedades geom\u00e9tricas e mec\~{a}nicas (m\u00f3dulo de Young e coeficiente de Poisson) do material.

$$a = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right) \cdot \left(\frac{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}\right) \cdot \left(\frac{F}{l}\right)} \quad (27)$$

Dentro da regi\~{a}o de contato, h\u00e1 um campo de tens\~{o}es cujo valor m\u00e1ximo \u00e9 encontrado na linha de centro, e diminui a medida que se afasta do centro at\u00e9 se tornarem nulas nas bordas do contato, sendo inexistentes fora desta regi\~{a}o(SOLANKI; VAKHARIA, 2017a).

O comportamento das tens\~{o}es normais σ ao longo do eixo de aplica\~{c}\~{a}o de carga (eixo z) \u00e9 descrito por equa\~{c}\~{o}es (28-30), e a tens\~{a}o principal de cisalhamento τ_1 \u00e9 dada pela equa\~{c}\~{a}o (31)(JOHNSON, 2003).

$$\sigma_x = -\frac{P_{m\acute{a}x}}{a} \cdot \left\{ \frac{(a^2 + 2z^2)}{\sqrt{(a^2 + z^2)}} - 2z \right\} \quad (28)$$

$$\sigma_y = -2 \cdot P_{m\acute{a}x} \cdot \nu \cdot \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)} + \frac{z}{a} \right\} \quad (29)$$

$$\sigma_z = P_{m\acute{a}x} \cdot a \cdot \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{(a^2 + z^2)}} \right) \right\} \quad (30)$$

$$\tau_1 = -\frac{P_{m\acute{a}x}}{a} \cdot \left\{ z - \left(\frac{z^2}{\sqrt{(a^2 + z^2)}} \right) \right\} \quad (31)$$

Para ter uma no\~{c}\~{a}o de como as tens\~{o}es agem simultaneamente, utiliza-se a equa\~{c}\~{a}o de von Mises, expressa pela equa\~{c}\~{a}o (32) (NORTON, 2013; BREZEANU, 2015; SOLANKI; VAKHARIA, 2017a).

$$\sigma' = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6 \cdot (\tau_1)^2}{2}} \quad (32)$$

As tensões no plano do contato são distribuídas elipticamente. O comportamento de cada uma é descrito de acordo com as equações (33-34) (JOHNSON, 2003).

$$\sigma_x = \sigma_z = -P_{máx.} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} \quad (33)$$

$$\sigma_x = \sigma_z = -2 \cdot \nu \cdot P_{máx.} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} \quad (34)$$

Para adaptar as equações para o caso entre uma roda e um trilho, deve-se fazer com que $R_2 = \infty$, assim como feito para o cálculo das tensões Hertzianas em um rolamento. Desta forma, as equações englobam um contato entre um cilindro (roda) e um plano (trilho), situação estudada neste trabalho.

2.3 MECÂNICA DO DESGASTE

2.3.1 Modos de falha

O mecanismo exato por trás dos desgastes ocorridos decorrentes do contato superficial ainda não é consenso entre especialistas (BUDYNAS; MISCHKE; SHIGLEY, 2005; NORTON, 2013) devido à grande dificuldade de se obter dados relativos ao processo de desgaste sob um movimento de rolamento (RYCERZ; OLVER; KADIRIC, 2017). Porém, em geral, o desgaste ocorrerá de duas maneiras: crateramento/lascamento originado na superfície e/ou na sub-superfície (MOGHADDAM et al., 2015). Estas falhas geralmente se iniciam ao redor de descontinuidades existentes na estrutura do material que funcionam como concentradores de tensões, sendo elas presentes desde a construção do elemento ou consequência da aplicação de tensões cíclicas.

Estas discontinuidades podem ser causadas por diversos fatores, e sua localização é aleatória, dificultando a prevenção de falhas. Segundo Norton (2013), os modos de falha mais comum decorrentes das tensões de contato são:

- i) **Inclusões:** ocorre quando óxidos que são capturados no processo de fabricação do material.
- ii) **Concentração de tensão geométrica:** ocorre quando uma peça do contato é axialmente menor que a outra, ou quando há mudanças bruscas na geometria, como riscos superficiais, ângulos vivos, rasgos de chavetas, fios de roscas, etc.
- iii) **Esfoliação:** trincas originadas à uma profundidade pequena que se estendem por uma grande área, fazendo com que a superfície seja descascada da peça.
- iv) **Fadiga abaixo da camada endurecida termoquimicamente:** ocorre apenas em peças que foram tratadas termoquimicamente em processos como nitretação, carbonetação etc. Se a camada não tiver a espessura suficiente, a trinca se originará abaixo dela e se propagará até rompê-la.

Apesar das diferentes origens que uma falha pode apresentar, o mecanismo de propagação que se segue é semelhante em todos os casos (NORTON, 2013).

Segundo Budynas, Mishke e Shigley (2005), os fatores que mais influenciam no desgaste superficial são: tensões de Hertz, número de ciclos de aplicação de carga, dureza do material, grau de lubrificação dos elementos, temperatura e acabamento da superfície. Diversos processos são comumente realizados para retardar os efeitos da falha por fadiga superficial, sendo os mais comuns os tratamentos de superfície como nitretação e carbonetação, onde é introduzido uma camada de nitrogênio e carbono respectivamente a fim de aumentar a dureza da superfície, e assim aumentara resistência ao desgaste. Estes métodos são comumente utilizados em engrenagens e rolamentos de aço (CALLISTER, 2000). Além disso, a introdução de tensões residuais de compressão é um método utilizado para auxiliar na melhora do desempenho dos elementos (JUVINALL; MARSHEK, 2008).

2.3.2 Propagação das trincas

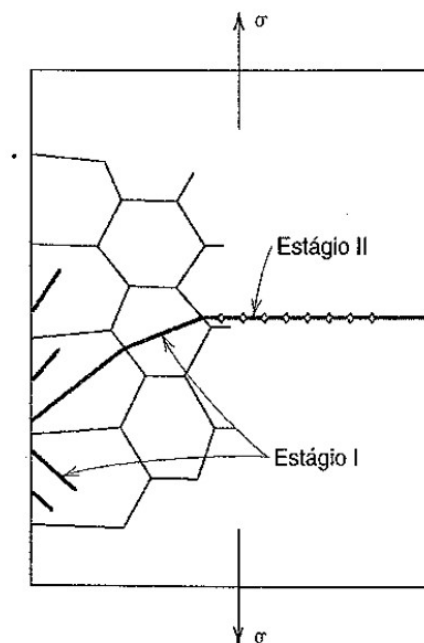
A partir do momento em que uma trinca é estabelecida na estrutura do material, a repetição da aplicação do carregamento irá ocasionar sua propagação até a ruptura do material. O mecanismo por trás deste processo é semelhante em todos os casos, e pode ser dividido em três etapas (CALLISTER, 2000).

- i) Iniciação da trinca, onde uma pequena deformidade irá se formar a partir de um modo informado na seção 2.3.1;
- ii) Propagação da trinca, onde a trinca cresce à cada ciclo de tensões;
- iii) Fratura final, quando a trinca atinge seu tamanho crítico e falha de maneira repentina;

O tempo total de propagação de trinca é a soma da duração das etapas (i), (ii) e (iii). Porém, a contribuição da etapa (iii) é insignificante pois a falha acontece de maneira instantânea, logo a duração total é dividida nas etapas (i) e (ii), sendo a propagação da trinca responsável pela maior parcela da vida do elemento, consumindo cerca de 80% do tempo (RYCERZ; OLVER; KADIRIC, 2017; NORTON, 2013; CALLISTER, 2000).

Acredita-se que a maioria das trincas se iniciam na região onde a tensão cisalhante é máxima, pouco abaixo da superfície (BUDYNAS; MISCHKE; SHIGLEY, 2005), e se propaga em direção a superfície. Após a nucleação da trinca, ela irá se propagar nos planos cristalográficos de maior tensão de cisalhamento (CALLISTER, 2000), e tende a se direcionar de maneira perpendicular à aplicação do carregamento e paralela à superfície (DENG; QIN; HUANG, 2015), após uma propagação inicial de cerca de 15~30° (DONZELLA; PETROGALLI, 2010), conforme pode ser visto na Figura 8.

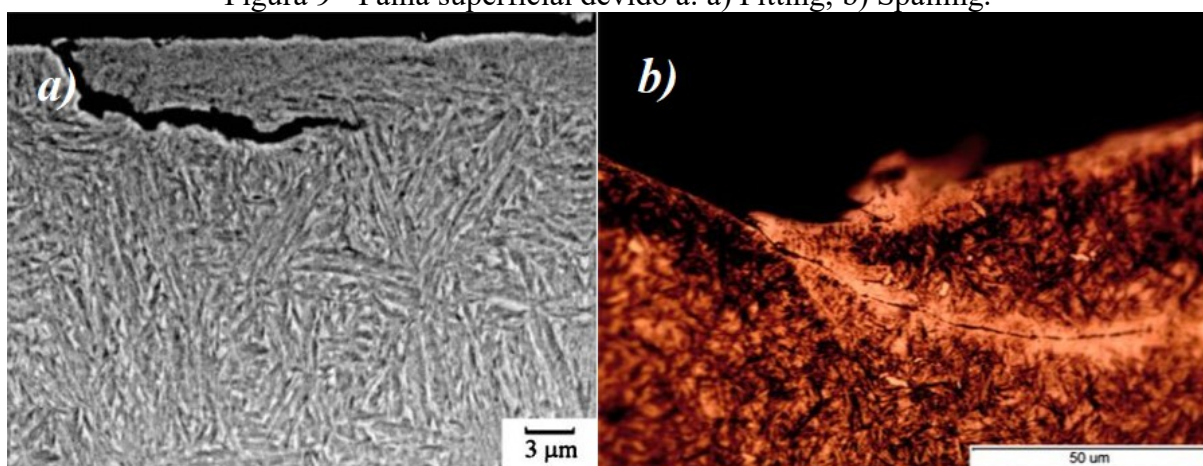
Figura 8 - Representação esquemática da propagação da trinca.



Fonte: Callister(2000).

Quando a trinca é ocasionada devido a existência das tensões de Hertz, a trinca pode se originar na superfície, sub-superfície ou em ambas. À medida que este se propaga, parte do material tende a ser recortado da superfície, ocasionando a perda de matéria e o desgaste visto na Figura 1. A Figura 9 retrata dois rolamentos que, após estarem sob efeito das tensões superficiais por um longo período de tempo, tiveram o processo de formação da trinca iniciado, e as trincas estão se propagando com níveis de severidade diferentes para as Figuras 9a e 9b. É visto que a quantidade de matéria que seria perdida caso a degradação da superfície fosse consolidada na Figura 9b (*spalling*) é muito mais severa quando comparado à degradação da Figura 9a (*pitting*), devido à profundidade da trinca observada.

Figura 9 - Falha superficial devido à: a) Pitting; b) Spalling.



Fonte: Moghaddam et al. (2015).

2.3.3 Resistência de Contato

Conforme visto, o contato superficial entre duas peças sujeitas a um movimento de rolamento e/ou deslizamento entre si ocasiona um estado triaxial de tensões compressivas, que podem ser repetidas em milhares de ciclos e ocasionar a fadiga superficial e consequentemente a falha catastrófica entre as partes. Apesar da dificuldade de medição, o conceito de **resistência de contato** é definido como a “pressão de contato que, após um número específico de ciclos, causará a falha na superfície” (BUDYNAS; MISCHKE; SHIGLEY, 2005), e é um valor aproximado do nível de tensão que um elemento pode suportar. O valor da resistência de contato é intrínseco ao material utilizado, sendo obtido através de experimentos em laboratório.

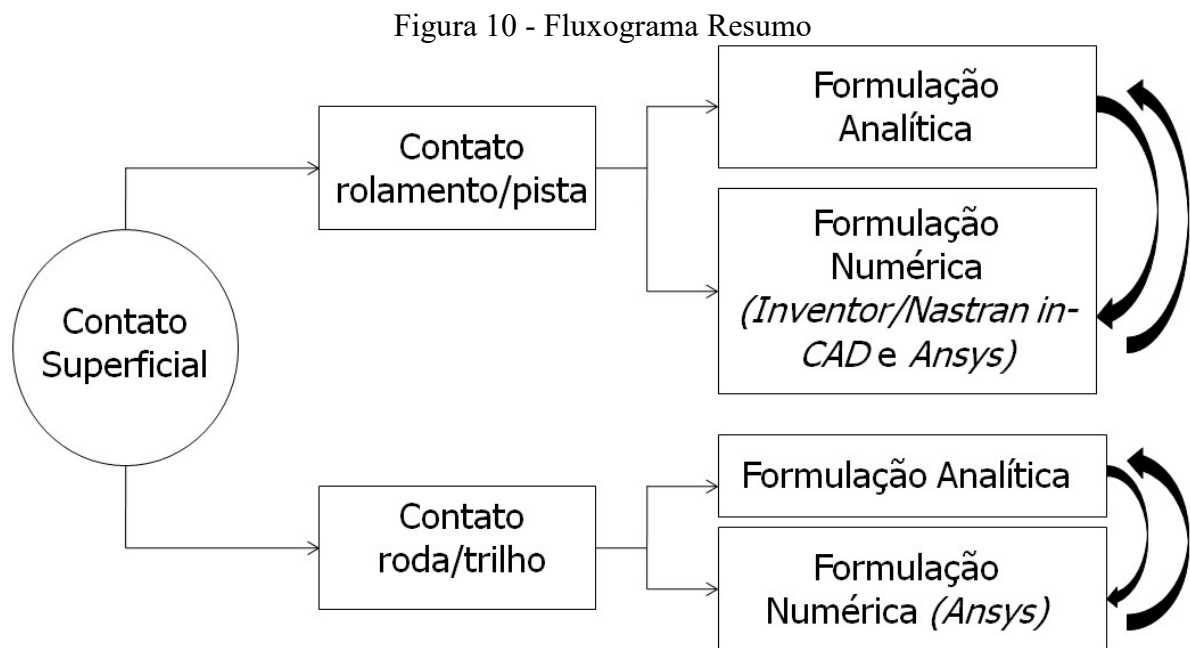
A resistência de contato é essencial para analisar se o material pode suportar a pressão máxima prevista pelas equações de Hertz. Para isso, compara-se o valor obtido de $P_{máx}$ com o

valor da resistência de contato S_c para o material utilizado, através da equação (35). Se o coeficiente de segurança CS calculado for superior a 1, o conjunto mecânico é aprovado e não haverá falhas previstas devido à tensões de contato, e caso seja inferior a 1, o projeto deve ser modificado para contornar esta situação.

$$CS = \frac{S_c}{P_{m\acute{a}x}} > 1 \quad (35)$$

3 MATERIAIS E MÉTODOS

A Figura 10 retrata em detalhes todo trabalho realizado nesta dissertação. A partir do tema geral do trabalho, “Contato Superficial”, foi realizada a análise analítica e numérica de dois casos específicos: contato entre a esfera e pista de um rolamento radial de esferas (contato esfera/plano) e entre uma roda e trilho (contato cilindro/plano). A primeira abordagem envolveu a teoria de Hertz e suas equações para cada tipo de contato em questão, enquanto a abordagem computacional envolveu a construção de modelos de elementos finitos utilizando dois programas diferentes: *Inventor*, *Nastran in-CAD* e *Ansys* para o rolamento, e *Ansys* para o trilho/roda. Em cada modelo numérico foi aplicado restrições que simulem o caso real, além da construção de malhas que aperfeiçoem os resultados. Os resultados obtidos foram comparados entre si em busca da validação da simulação computacional.



Fonte: Autor.

3.1 CONTATO ENTRE ROLAMENTO E PISTA (CASO ESFERA/ PLANO)

3.1.1 Formulação analítica

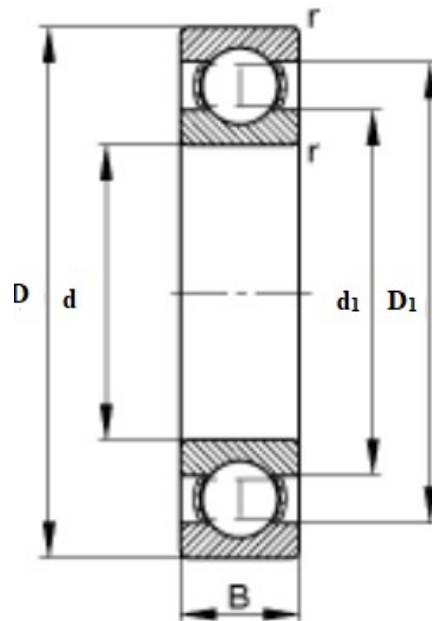
3.1.1.1 O rolamento

Um rolamento é definido por diversas dimensões. São elas:

- d : diâmetro menor do anel interno;
- d_1 : diâmetro maior do anel interno
- D : diâmetro maior do anel externo;
- D_1 : diâmetro menor do anel externo;
- B : largura dos anéis interno e externo;
- d_{CR} : diâmetro do corpo rolante;
- r_i : raio axial da pista do anel interno;
- r_o : raio axial da pista do anel externo;

O cálculo analítico e a simulação foram feitos baseados em um modelo real de rolamento encontrado no mercado. O modelo escolhido foi o 6207, da fabricante de rolamentos FAG. A Figura 11 demonstra o rolamento em corte, indicando alguma de suas dimensões utilizadas neste trabalho.

Figura 11 - Seção transversal de um rolamento axial de esferas.



Fonte: Adaptado de FAG (1999).

O catálogo da fabricante FAG (1999) não fornece todas as dimensões necessárias para a modelagem computacional e para a análise analítica. Para isso, buscou-se equações que proporcionassem as dimensões faltantes, como o diâmetro da esfera e raios axiais da pista interna e externa. Como comparação, todas as dimensões (inclusive as fornecidas no

catálogo da fabricante) foram medidas e conferidas em laboratório, utilizando-se de equipamentos de metrologia.

Houghton (1976) estabelece equações que fornecem as dimensões faltantes.

$$d_{cr} = 0,3 \cdot (D_o - D_i) \quad (36)$$

$$r_i = 0,52 \cdot d \quad (37)$$

$$r_o = 0,52 - 0,54 \cdot d \quad (38)$$

Em laboratório, foram conferidas todas as dimensões através da metrologia. Os instrumentos utilizados foram escolhidos conforme a necessidade de precisão, facilidade de manuseio, e forma da medida. Os instrumentos de medição utilizados para cada dimensão foram:

- d, D, B : paquímetro;
- d_i, D_i : gabarito de perfis;
- d_{CR} , micrômetro;
- r_i, r_o : gabarito de raios;

Na Tabela 1, é mostrado os valores fornecidos pelo catálogo FAG (1999), ao lado dos valores obtidos em laboratório.

Tabela 1 - Dimensões do rolamento.

Dado	Catálogo fabricante (mm)	Medições em laboratório (mm)
d	35,00	34,95
D	72,00	72,01
B	17,00	17,00
D_i	65,00	64,70
d_i	42,00	42,63
d_{cr}	11,00*	11,12
r_i	5,77*	5,70
r_o	5,99*	5,70

Fonte: Produção do próprio autor.

OBS: os valores indicados por * são aqueles que foram obtidos através do uso das equações(36-38), utilizando os valores originalmente do catálogo FAG (1999).

Verifica-se que os resultados obtidos pela metrologia são bem próximos dos fornecidos pelo catálogo FAG (1999). A maior diferença para as dimensões de r_i , r_o e d_l , D_l são justificadas pois os métodos do gabarito de raios e gabarito de perfis não são suficientemente exatos para esta medida.

Com as dimensões verificadas, foi possível utilizá-las para os cálculos analíticos da análise de tensões de contato. Optou-se por utilizar apenas as dimensões obtidas a partir do catálogo da fabricante e das equações da literatura.

3.1.1.2 Força de aplicação

Neste trabalho, buscou-se realizar a simulação de um rolamento sujeito a uma força radial pré-definida. Para isso, foi realizada uma série de cálculos para estimar uma força condizente com a realidade do modelo de rolamento escolhido, assumindo que o elemento trabalha em sua situação de maior esforço, ou seja, sua situação limite. O catálogo da fabricante fornece parâmetros que indicam a capacidade limite de funcionamento do rolamento, indicado pela Tabela 2.

Tabela 2 - Dados técnicos do rolamento FAG6207.

Dado	Valor	Legenda
C_r	27.500 N	Capacidade de carga dinâmica, radial
C_{0r}	15.300 N	Capacidade de carga estática, radial
C_{ur}	720 N	Carga limite de fadiga, radial
n_g	13.800 1/min	Velocidade limite
n_b	1/min	Velocidade nominal

Fonte: Adaptado de Catálogo FAG (1999).

Norton (2013) define uma série de equações que retratam o comportamento do rolamento em operação, a partir da definição os carregamentos e de parâmetros funcionais. A vida em fadiga L_{10} de um mancal de rolamento de esferas é dada pela equação (39):

$$L_{10} = \left(\frac{C_r}{P}\right)^3 \quad (39)$$

Onde C_r é a capacidade de carga dinâmica do modelo fornecida pelo catálogo da fabricante, e P é a carga constante aplicada.

Como a carga P é desconhecida, é necessário utilizar a equação (40):

$$\frac{f_h}{f_n} = \frac{C_r}{P} \quad (40)$$

Onde f_h é o coeficiente de vida do rolamento, e f_n é o coeficiente de velocidade, e ambos os valores são retirados de tabelas do catálogo NSK (2013), podendo ser aplicados em todos os rolamentos. O primeiro é retirado a partir de uma interpolação com os valores destacados na Tabela 3, sendo que $n = 10.400 \text{ rpm}$, e assim foi obtido o valor de $f_n = 0,147$. Para o segundo assumiu-se um valor de $f_h = 4$, pois este é um valor médio para o especificado para operações longas em motores industriais, conforme Tabela 4.

Tabela 3 - Fator de velocidade f_n .

Velocidade de Rotação n (rpm)	Fator de Velocidade f_n	
	Rolamento de Esferas	Rolamento de Rolos
8 000	0,161	0,193
8 500	0,158	0,190
9 000	0,155	0,186
9 500	0,152	0,183
10 000	0,149	0,181
11 000	0,145	0,176
12 000	0,141	0,171
13 000	0,137	0,167
14 000	0,134	0,163
15 000	0,130	0,160

Fonte: Adaptado de NSK (2013).

Tabela 4 - Coeficiente de vida f_h e exemplos de aplicações.

Condições de Trabalho	Valores de f_h e Aplicações		
	~3	2~4	3~5
Uso esporádico ou curto período	<ul style="list-style-type: none"> Pequenos motores para aspiradores e máquinas de lavar domésticos Ferramentas elétricas 	<ul style="list-style-type: none"> Máquinas agrícolas 	
Uso ocasional mas requer funcionamento seguro		<ul style="list-style-type: none"> Motores para aparelhos de ar condicionado doméstico Máquinas de construção civil 	<ul style="list-style-type: none"> Roletes de correias transportadoras Elevadores
Uso intermitente mas relativamente em períodos longos	<ul style="list-style-type: none"> Pescoço de cilindros de laminação 	<ul style="list-style-type: none"> Pequenos motores Guindastes de convés Pontes rolantes Caixas de pinhão Veículos de passeio 	<ul style="list-style-type: none"> Motores industriais Máquinas operatrizes Sistemas de engrenamento em geral Peneiras vibratórias Britadores

Fonte: Adaptado de NSK (2013).

Substituindo os valores adotados na equação (40), foi obtido um valor para a carga no rolamento equivalente de $P = 1.010,6 N$.

O valor de P representa a força total que o eixo exercerá sobre o rolamento em funcionamento. O modelo escolhido para este trabalho é formado por nove esferas idênticas que rolam entre os anéis externos e internos, como pode ser visto na Figura 12. Dividindo-se o valor de P pelo número Z de corpos rolantes, pode-se obter uma aproximação da força aplicada em cada esfera.

Figura 12 - Rolamento FAG 6207.



Fonte: Produção do próprio autor.

Portanto, a carga aplicada em cada esfera é de $112,3\text{ N}$. Esta é a força que será usada tanto nas simulações analíticas quanto na modelagem computacional.

O material utilizado para os cálculos foi o aço AISI 52100, liga de aço mais utilizado em rolamentos (CHEN et al., 2016).

Assim, foram utilizados os valores segundo a Tabela 5 para os cálculos:

Tabela 5 - Dados utilizados para o cálculo do contato esfera/plano.

Dado	Valor	Legenda
R_1	5,50 mm	Raio da esfera
R_2	∞	Raio do plano
E_1	210 GPa	Módulo de elasticidade longitudinal (esfera)
E_2	210 GPa	Módulo de elasticidade longitudinal (plano)
ν_1	0,30	Coefficiente de Poisson (esfera)
ν_2	0,30	Coefficiente de Poisson (plano)
F	112,3 N	Força sobre cada esfera

Fonte: Adaptado de Norton (2013).

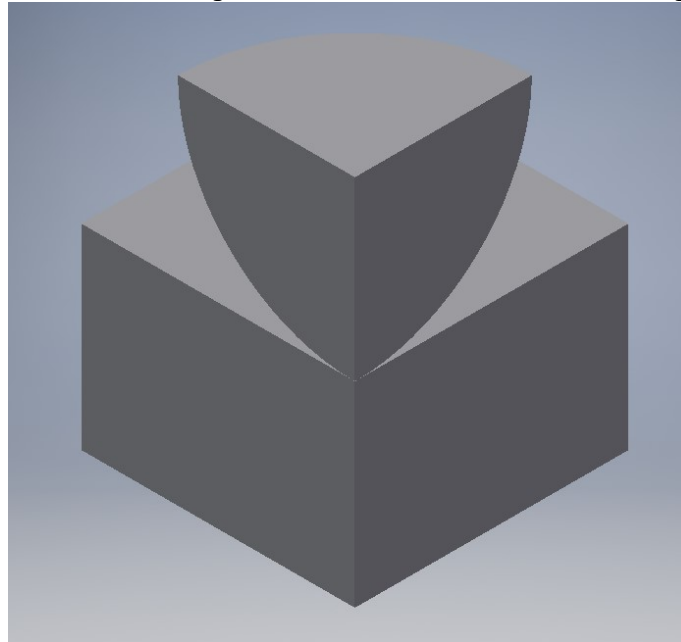
A partir destes dados, foram obtidos os valores para a , B , $P_{máx}$, $P_{média}$, além das tensões σ_x , σ_y , σ_z e τ_{13} através das equações de Hertz apresentadas anteriormente. Como a região de tensão máxima é localizada no plano de contato entre as partes, para calcular as tensões máximas deve-se fazer com que $z = 0$ nas equações de Hertz.

3.1.2 Formulação computacional

Segundo Subhash et al. (2017) e Satyanarayana e Melkote (2004), a simulação de contato entre uma esfera e um plano pode ser simplificada para $\frac{1}{4}$ do modelo devido a simetria do contato, mantendo as mesmas características do modelo completo, desde que as restrições aplicadas mantenham a configuração original do elemento. Essa transformação

atrativa, pois dessa maneira o custo computacional do processamento é menor, e o tempo de resposta do computador é mais ágil. Assim, foi construído um modelo computacional utilizando o software *Inventor* e *Nastran in-CAD* de $\frac{1}{4}$ da esfera e base (representando o anel inferior do rolamento), como visto na Figura 13.

Figura 13–Modelo representativo de $\frac{1}{4}$ do contato esfera/plano.



Fonte:Produção do próprio autor.

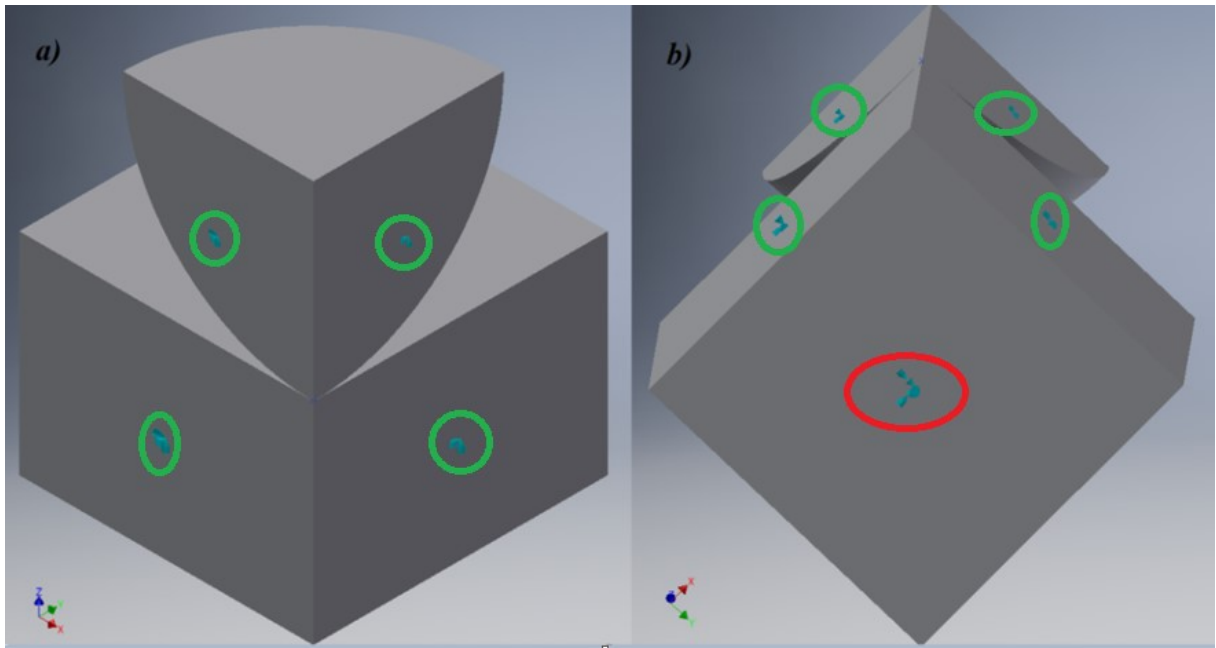
3.1.2.1 Restrições

Fixou-se a face inferior da base, aplicando-se uma restrição em todas as direções.

Para simular a simetria do modelo completo, foram aplicadas restrições de simetria em relação ao eixo perpendicular ao plano simétrico para as faces internas da esfera e da base. Assim, o modelo se comporta de maneira semelhante à sua versão completa.

Ambas as restrições estão indicadas na Figura 14.

Figura 14 - Restrições para contato esfera/plano. a) Simetria aos eixos x e y ; b) Suporte fixo na base.

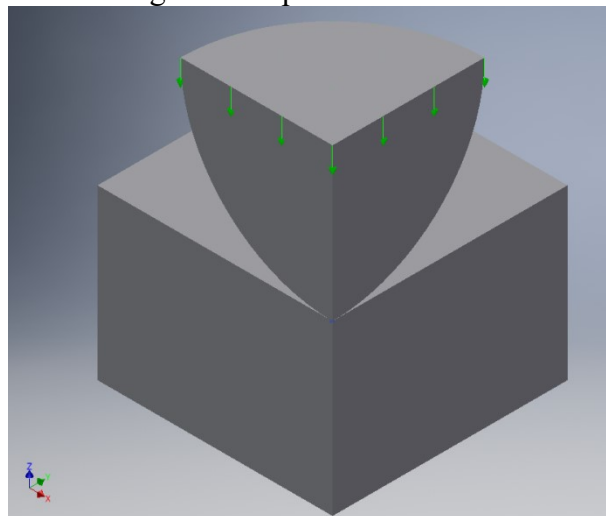


Fonte:Produção do próprio autor.

3.1.2.2 Carregamento

Aplicou-se um carregamento de compressão de $112,3$ N na face superior da esfera, na direção negativa do eixo z , conforme Figura 15. Esta força representa a carga aproximada que cada esfera do rolamento receberá a partir de uma sollicitação externa de $1.010,6$ N.

Figura 15 - Carregamento aplicado ao contato esfera/plano.



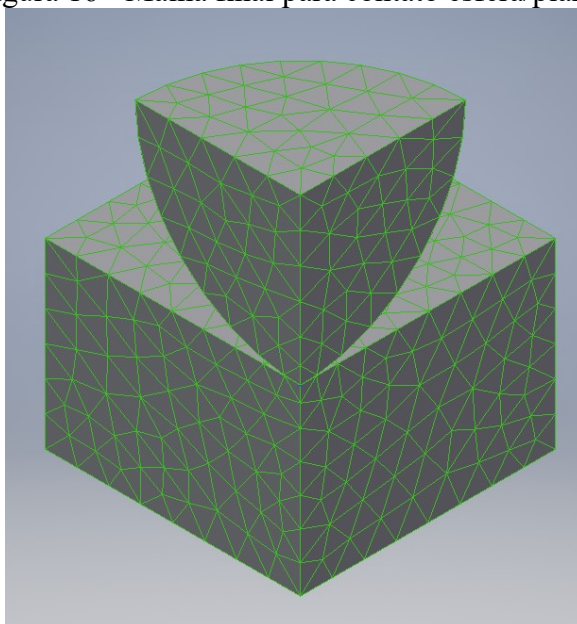
Fonte:Produção do próprio autor.

3.1.2.3 Malha

A malha foi gerada automaticamente pelo programa. Porém, para encontrar resultados mais precisos, foi necessário refinar a malha no vértice de contato entre a esfera e a base, isto é, no vértice comum a ambas as partes.

A malha final está indicada na Figura 16 e foi criada com elementos parabólicos de tamanho $0,626441$ mm, com tolerância de $1,25288e-05$, e possui 6.903 nós e 4.299 elementos.

Figura 16 - Malha final para contato esfera/plano.



Fonte:Produção do próprio autor.

3.1.2.4 Superfícies de contato

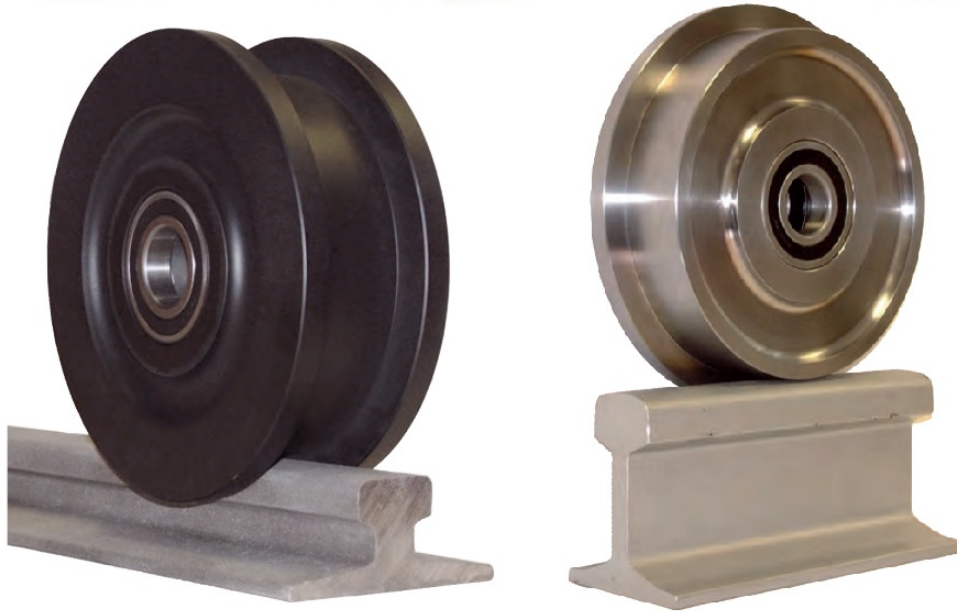
A superfície externa da esfera e a superior da base estão em contato. Para uma modelagem de acordo com a realidade, foi utilizada a opção *Sliding/No Separation* para este contato. Com isso, define-se que as faces em contato não poderão se separar, mantendo-se unidas durante toda a aplicação do carregamento.

3.2 CONTATO ENTRE RODA E TRILHO (CASO CILINDRO/PLANO)

O cálculo foi realizado com base em uma roda sobre um trilho, sendo ambas as partes de aço. Na Figura 17 estão retratados dois exemplos de trilho e rodas encontrados no mercado. É possível ver que o contato entre as partes é caracterizado por uma superfície

cilíndrica (roda) e por uma superfície plana (trilho). Para adaptar as equações para o caso cilindro/ plano, fez-se com que $R2$ tenda ao infinito nas equações de Hertz.

Figura 17 - Exemplos de rodas e trilhos encontrados no mercado.



Fonte: Brauer (2019).

3.2.1 Formulação Analítica

Os dados utilizados para os cálculos foram retirados de Norton (2013) com base em uma aplicação real cujo enunciado era:

“Uma roda de uma ponte rolante rola vagarosamente sobre um trilho. Qual é o tamanho da região de contato e quais são as tensões?” (NORTON, 2013)

Todas as propriedades geométricas e do material foram dadas e estão indicadas na Tabela 6.

Tabela 6 - Dados utilizados para cálculo do contato cilindro/plano.

Dados	Valor	Legenda
d	301,80mm	Diâmetro da roda
l	22,23mm	Espessura da roda
F	22.241,11N	Carga aplicada
E	200,00 GPa	Módulo de Elasticidade (roda e trilho)
ν	0,28	Coefficiente de Poisson (roda e trilho)

Fonte: Adaptado de Norton (2013).

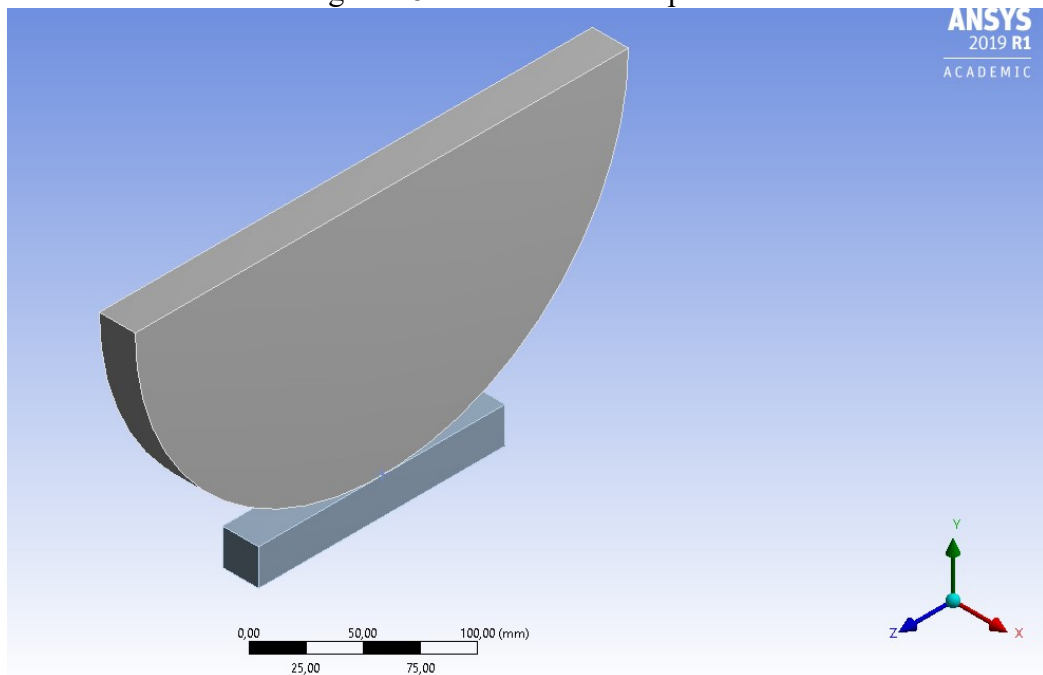
A partir das equações Hertzianas para este tipo de contato, utilizaram-se os dados da Tabela 6 para obtenção dos valores de a , $P_{máx}$, além do comportamento das tensões no plano de contato entre as partes e ao longo do eixo de aplicação da carga.

3.2.2 Formulação Computacional

A simulação computacional foi feita a partir de um modelo simplificado de $\frac{1}{2}$ de cilindro. Com as restrições e carregamentos aplicados corretamente, essa simplificação está de acordo com a realidade.

Para este caso, foi utilizado o programa *Ansys* para a modelagem e simulação, com $\frac{1}{2}$ de cilindro representando a roda e um plano simples representando o trilho, conforme Figura 18. O modelo foi dimensionado seguindo os mesmos dados utilizados no cálculo analítico, indicado na Tabela 6.

Figura 18 - Modelo cilindro/plano.



Fonte:Produção do próprio autor.

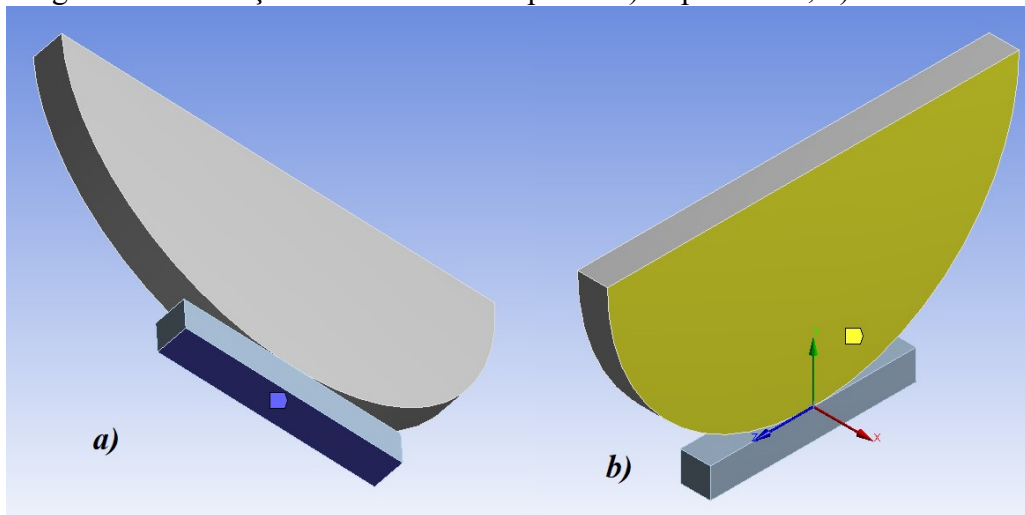
3.2.2.1 Restrições

Aplicou-se um suporte fixo na face inferior do trilho, evitando que o modelo se desloque verticalmente.

Também fixou-se as faces laterais do cilindro nos sentido x e z . Assim, o cilindro pode se deslocar apenas na direção y , que também é a direção da carga aplicada.

Com essas restrições, o modelo se comporta de maneira similar à uma roda sendo pressionada sobre um trilho. Ambas restrição são destacadas na Figura 19.

Figura 19 - Restrições contato cilindro/plano. a) Suporte fixo; b) Eixos x e z .

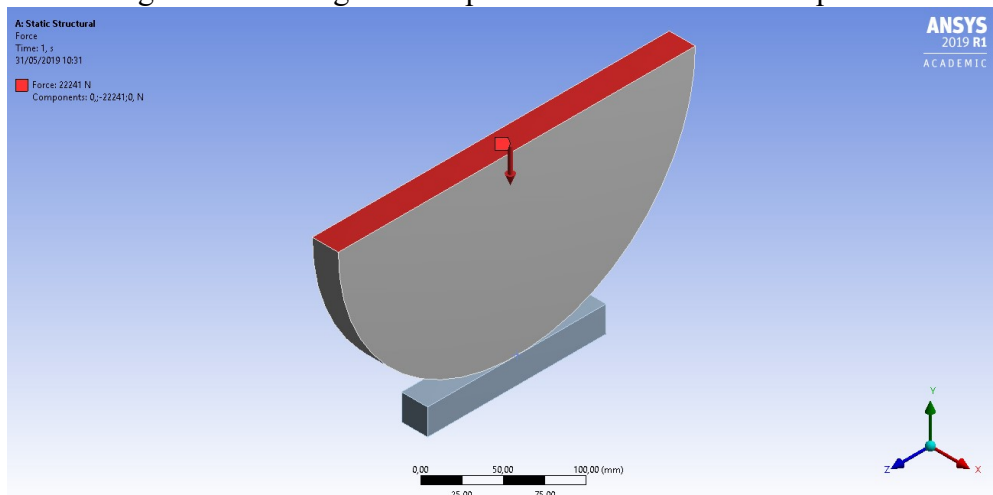


Fonte:Produção do próprio autor.

3.2.2.2 Carregamento

Seguindo as informações de Norton(2013) mostradas emTabela 6, aplicou-se um carregamento de 5.000 lb ($22.241,11\text{ N}$) na face intermediária do cilindro na direção negativa de y , conforme Figura 20.

Figura 20 - Carregamento aplicado ao contato cilindro/plano.



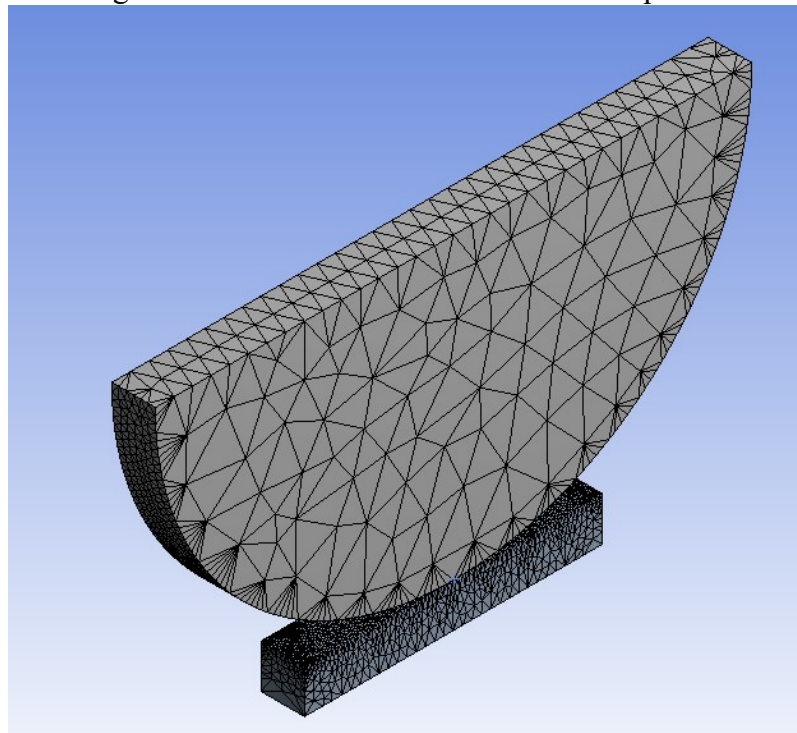
Fonte:Produção do próprio autor.

3.2.2.3 Malha

Primeiramente, a malha foi gerada automaticamente pelo programa. Porém, em busca de uma melhoria dos resultados, as faces e pontos de contato entre os corpos, regiões mais críticas no conjunto, foram refinados.

A versão acadêmica do programa *Ansys* utilizada nesta simulação possui a limitação de 32.000 nós. Isto se mostrou um fator limitante na qualidade de malha, pois um refinamento exagerado superaria este limite e tornaria o processo impossível. Por isso, buscou-se um número de nós próximo ao limite que se adequasse ao modelo. O modelo final possui 27.968 nós e 15.551 elementos. O resultado final utilizado na simulação é mostrado na Figura 21.

Figura 21 - Malha final do contato cilindro/plano.



Fonte:Produção do próprio autor.

3.2.2.4 Superfícies de contato

Foi utilizado o tipo de contato *Frictionless* entre as faces do cilindro e do plano que estão em contato. Este tipo de contato faz com que não haja atrito entre as superfícies escolhidas, e assim respeitando a condição (iv) das proposições de Hertz.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 RESULTADOS ESFERA/PLANO

Os resultados analíticos foram obtidos pelas equações demonstradas no item 2.2.1, enquanto os resultados computacionais foram obtidos resolvendo a simulação proposta no item 3.1.2. A Tabela 7 contém os resultados gerados por ambas abordagens, além de um erro percentual para cada tensão.

Tabela 7 - Resultados analíticos e numéricos do contato esfera/plano (*Inventor*).

Dado	Analíticos	Numéricos (<i>Inventor</i>)	Erro percentual
σ_x	-1.698,14 MPa	-1.667,04 MPa	1,83%
σ_y	-1.698,14 MPa	-1.645,38 MPa	3,11%
σ_z	-2.122,68 MPa	-3.617,99 MPa	70,44%
τ_{yz}	706,66 MPa	682,80 MPa	3,38%
τ_{xz}	706,66 MPa	696,62 MPa	1,42%

Fonte:Produção do próprio autor.

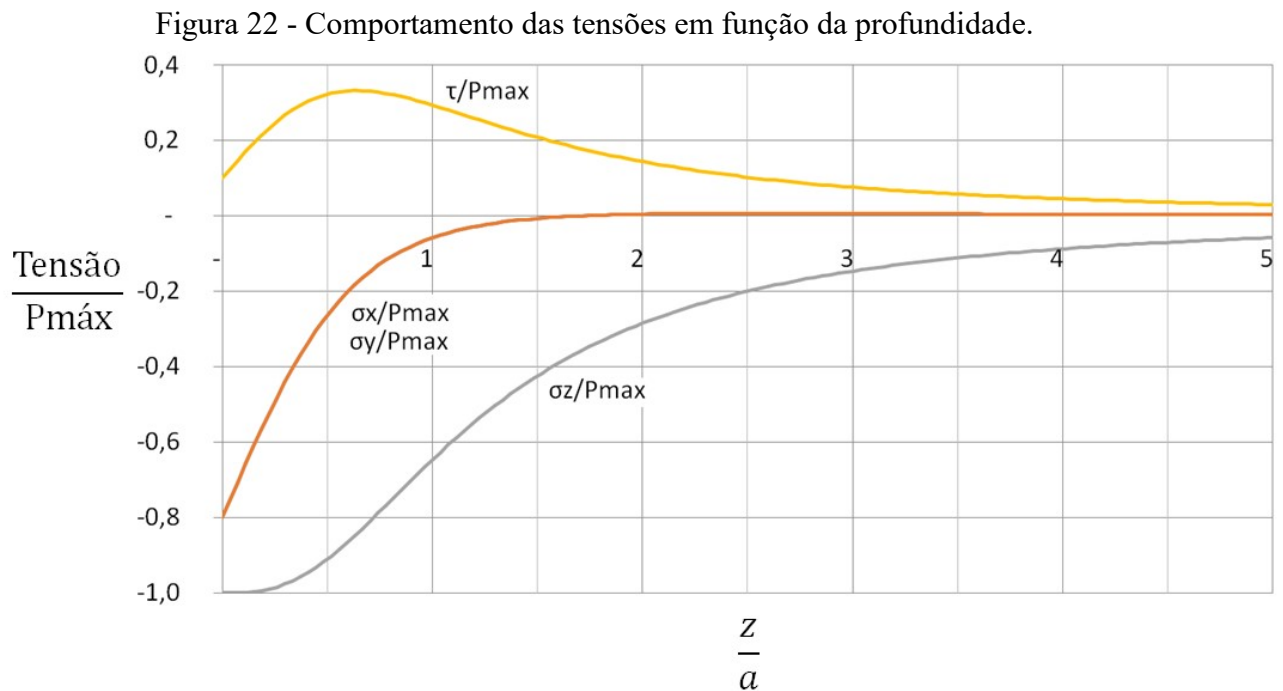
4.1.1 Resultados analíticos

Aplicando os parâmetros previamente definidos nas equações de Hertz, foram obtidos os resultados para as cinco tensões máximas propostas, como mostrado na Tabela 7. O valor do raio a é de $0,159 \text{ mm}$, e a área da região de contato entre as partes causada pela deformação é de $0,0793 \text{ mm}^2$.

Todas as tensões normais são compressivas. Vê-se que as tensões nas direções x e y se comportam da mesma maneira. Estas tensões máximas estão no plano de contato entre as partes, e a tensão na direção z possui o maior valor absoluto. As tensões de cisalhamento nos planos yz e xz possuem os mesmos valores, e são perpendiculares ao plano de contato entre as

partes. Todas as tensões normais máximas são encontradas na região de contato, isto é, quando a profundidade é nula, e $z = 0$. Conforme a profundidade aumenta, as tensões diminuem até se tornarem nulas.

Para analisar como essas tensões se comportam com o aumento da profundidade, foi utilizada a sugestão de Norton (2013), onde é feita a normalização das tensões em função de $P_{máx}$ e a distância z em função do raio da área de contato a . Com essa abordagem, a análise do comportamento das tensões ao longo do eixo de aplicação da carga (z) é facilitada, pois quanto maior o valor da abcissa, maior a profundidade, e quanto maior a distância do ponto zero na ordenada, maior o valor absoluto da tensão. O resultado desta normalização é demonstrada na Figura 22.



Fonte:Produção do próprio autor.

Pela Figura 22, é visto que σ_x e σ_y se comportam de maneira idêntica. Seus valores máximos têm valores aproximados de $0,8 P_{máx}$, e as tensões caem rapidamente à medida que se aumenta o valor de z . Quando a profundidade atinge aproximadamente 150% o valor do raio da região de contato a , as tensões σ_x e σ_y se tornam nulas.

A tensão σ_z possui valor máximo igual à $P_{máx}$, e possui uma curva de declínio mais suave que as tensões nas direções x e y . Seu valor tende a zero apenas quando a profundidade atinge cerca de 500% o valor do raio da região de contato.

A tensão de cisalhamento máxima é encontrada abaixo da superfície, aproximadamente em $z = 0,63a$, e seu valor é em torno de $0,33P_{máx}$.

Assim, é possível concluir que as tensões variam consideravelmente em uma pequena região. Para uma profundidade 500% maior que o raio da circunferência de contato, todas as tensões se reduzem a menos de 10% de seu valor máximo. Logo, conclui-se que a medição das tensões de contato é um tema complexo, pois além das tensões serem altamente variáveis em uma distância de décimos de milímetros, elas possuem valores extremamente altos. O pico de tensão é localizado na superfície das partes em contato, e os valores chegam a valores superiores a 2 GPa na direção do eixo z .

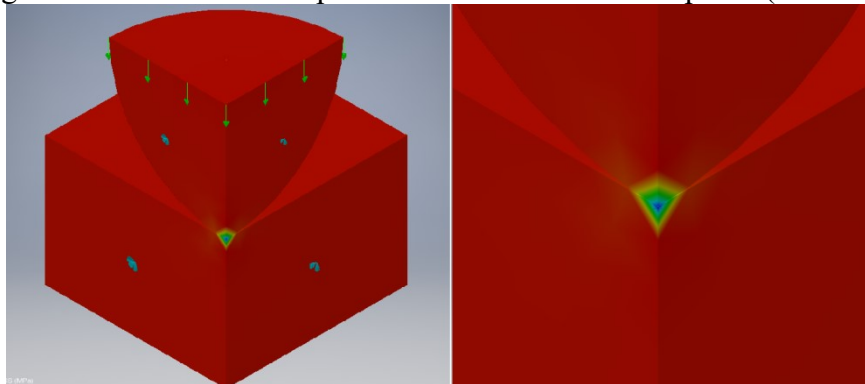
4.1.2 Resultados numéricos

4.1.2.1 Simulação com *Inventor*

Resolvendo a simulação numérica proposta no item 3.2.2, obtêm-se os valores máximos de σ_x , σ_y , σ_z , τ_{yz} e τ_{xz} , como também indicado pela Tabela 7.

Todos os valores máximos de tensão normal são encontrados no vértice comum a base e a esfera. Pela Figura 23 pode ser visto que o ponto mais crítico para as tensões normais se encontra no vértice, e à medida que a profundidade aumenta, esse valor diminui rapidamente até se anular. Também é visto que a zona de atuação das tensões se resume a uma pequena vizinhança na região de contato entre as partes.

Figura 23 - Resultado computacional do contato esfera/plano (*Inventor*).



Fonte:Produção do próprio autor.

Comparando os resultados da simulação numérica com os resultados analíticos, verifica-se que os valores de σ_x , σ_y , τ_{yz} e τ_{xz} estão muito próximos, variando em média de 2,5%. Porém, o valor de σ_z obtido pela simulação está consideravelmente distante do valor analítico.

Das cinco tensões calculadas computacionalmente, quatro delas foram validadas pelo cálculo analítico, sendo o valor de σ_z obtido pelo modelo computacional completamente fora do esperado. Uma das possíveis explicações para a discrepância verificada entre os valores obtidos para σ_z seria o fato que a influência da espessura da placa no resultado final não é considerada nas equações de Hertz, isto é, enquanto os resultados do modelo computacional possuem uma ligação direta com a espessura do plano, em nenhum momento as equações Hertzianas abordam esta variável. Essa falta de especificação da rigidez do plano pode causar grandes incertezas no resultado final para as tensões na direção da profundidade do plano.

Apesar da discrepância em uma das tensões, a teoria diz que as tensões mais críticas, isto é, aquelas que causarão o surgimento de trincas que provocarão a falha por fadiga superficial na peça, são as tensões de cisalhamento. Como a diferença entre os valores calculados para as tensões cisalhantes é cerca de 1,42%, pode-se dizer que o modelo FEM é válido para esta simulação.

Devido a discrepância de valores encontrada, foi feito a mesma simulação utilizando o programa de elementos finitos *Ansys*, com o objetivo de verificar se este erro foi causado pelo programa utilizado na primeira simulação (*Inventor*), ou se é um problema intrínseco ao modelo proposto. A descrição da formulação computacional realizada se encontra como Apêndice A desta dissertação, enquanto os resultados obtidos são discutidos no item 4.1.2.2

4.1.2.2 Simulação com *Ansys*

O objetivo desta simulação é verificar e comparar os resultados obtidos para a mesma simulação utilizando dois programas diferentes, analisando se o desvio encontrado para a tensão σ_z é vista em ambos os casos. Resolvendo a simulação numérica no *Ansys* proposta no Apêndice A, obtêm-se os valores máximos de σ_x , σ_y , σ_z , τ_{yz} e τ_{xz} , e então compara-se com os resultados obtidos anteriormente. Os valores das tensões encontrados e o erro percentual de cada uma em relação ao resultado analítico são mostrados na Tabela 8

Tabela 8 - Resultados analíticos e numéricos do contato esfera/plano (*Ansys*).

Dado	Analíticos	Numéricos (<i>Ansys</i>)	Erro percentual
σ_x	-1.698,14 MPa	-1.987,2 MPa	17,02%
σ_y	-1.698,14 MPa	-1.766,2MPa	4,01%
σ_z	-2.122,68 MPa	-3.321,1 MPa	56,46%
τ_{yz}	706,66 MPa	712,83 MPa	0,87%
τ_{xz}	706,66 MPa	722,58 MPa	2,25%

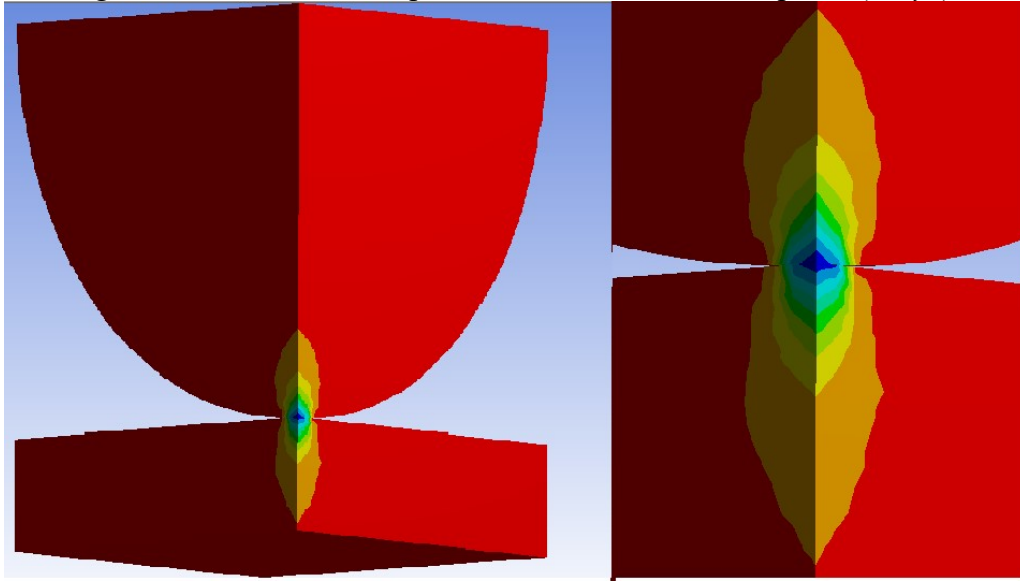
Fonte:Produção do próprio autor.

Para esta simulação, os valores obtidos para, σ_y , τ_{yz} e τ_{xz} continuam muito próximos do resultado analítico, enquanto σ_x possui um desvio relativamente maior, quando comparado aos outros. Porém, o objetivo principal desta segunda análise é verificar o comportamento de σ_z e compará-lo aos resultados utilizando o *Inventor*. Para este caso, observou-se que o desvio continua consideravelmente maior do que as outras tensões, confirmando a hipótese de que resultados para a tensão no sentido do eixo de aplicação de carga obtidos através de simulações computacionais possuirão um desvio muito maior quando comparado às outras tensões. Porém, conforme a teoria diz, esta tensão não é a mais significativa para a existência de falhas e trincas na peça, portanto considera-se que a simulação fornece valores úteis e factíveis com a realidade para o estudo do comportamento do elemento.

O programa *Ansys* possui melhores ferramentas para análise do campo de tensões do contato entre os elementos do que o *Inventor*. Então, é possível analisar em detalhes a vizinhança do contato e verificar o comportamento das tensões.

A Figura 24 ilustra o comportamento das tensões na região de contato. Percebe-se que a tensão possui um valor absoluto máximo no vértice dos elementos, e que a mesma se reduz através de ondas elípticas conforme aumenta-se a profundidade..

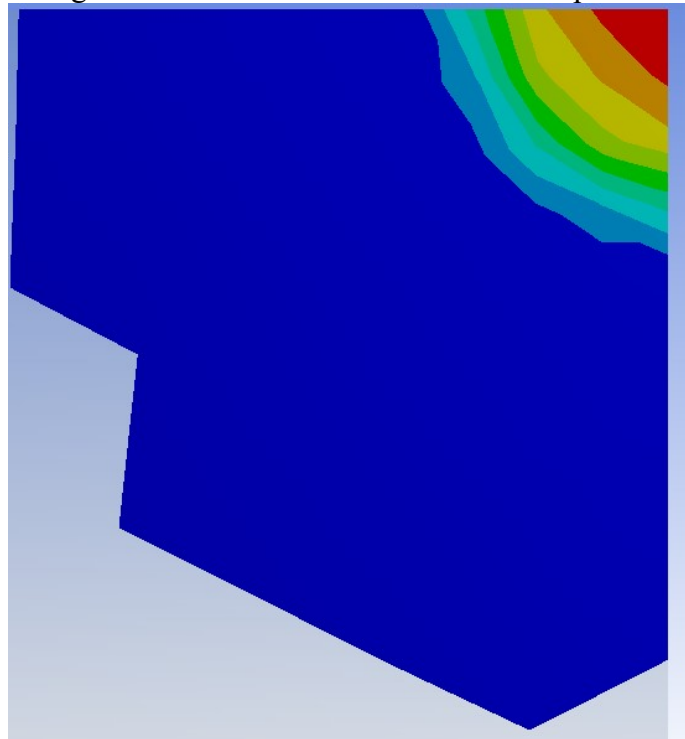
Figura 24 - Resultado computacional do contato esfera/plano (*Ansys*).



Fonte:Produção do próprio autor.

A Figura 25 é um recorte das faces em contato no plano xy . Percebe-se com clareza a distribuição circular das tensões, sendo o valor absoluto máximo encontrado no vértice dos elementos, e o mesmo é reduzido até se tornar nulo nas bordas da circunferência de tensões.

Figura 25 - Plano de contato entre esfera/plano.



Fonte:Produção do próprio autor.

Analisando a Figura 25 no programa *ImageJ*, é possível estimar o tamanho da região afetada pelas tensões superficiais ocorrida devido ao contato entre um elemento e outro. Criando-se uma escala de medidas definida pelo usuário, são obtidos valores computacionais aproximados para o raio a da circunferência de contato e o valor de sua área total, e então estes resultados podem ser comparados com os valores obtidos analiticamente através das equações de Hertz. Como não há uma divisão linear perfeita, foram tomadas dez medidas para o raio a e então foi feita sua média aritmética, para então ser comparado com os dados analíticos.

O desvio padrão obtido para o raio a é de 1,08%, portanto considera-se que o programa fornece valores confiáveis. Os valores obtidos para o raio a e conseqüentemente para a área circular de contato, assim como o erro percentual quando comparado aos resultados analíticos, são retratados na Tabela 9.

Tabela 9 - Resultados da área de contato entre esfera/plano.

Dados	Analíticos	Numéricos	Erro percentual
Raio a	0,159 mm	0,189 mm	18,87 %
Área	0,0793 mm ²	0,112102 mm ²	41,86 %

Fonte: Produção do próprio autor.

Apesar do desvio percentual verificado, é visto que os resultados possuem a mesma grandeza, reforçando a ideia de que o modelo está de acordo com a realidade. A análise dimensional da área deformada é consideravelmente afetada pela qualidade de malha do modelo, e tendo em vista que foi utilizada a versão acadêmica do *Ansys* com limitação do número de nós, deve-se levar em consideração possíveis imperfeições no contorno da circunferência de deformação.

4.2 RESULTADO CILINDRO/PLANO

Os resultados analíticos foram obtidos pelas equações demonstradas no item 2.2.2, enquanto os resultados computacionais foram obtidos resolvendo a simulação proposta no

item 3.2.2. A Tabela 10 contém os resultados gerados por ambas abordagens, além de um erro percentual para cada tensão.

A Tabela 10 contém os resultados analíticos e numéricos.

Tabela 10 - Resultados analíticos e numéricos para contato cilindro/plano.

Dados	Analíticos	Numéricos	Erro percentual
σ_x	-253,69 MPa	-238,41 MPa	6,03%
σ_y	-453,08 MPa	-542,63 MPa	19,78%
σ_z	-453,08 MPa	-429,84 MPa	5,12%
τ_{yz}	135,90 MPa	129,84 MPa	4,46%
$P_{máx}$	484,31 MPa	487,21 MPa	0,60%

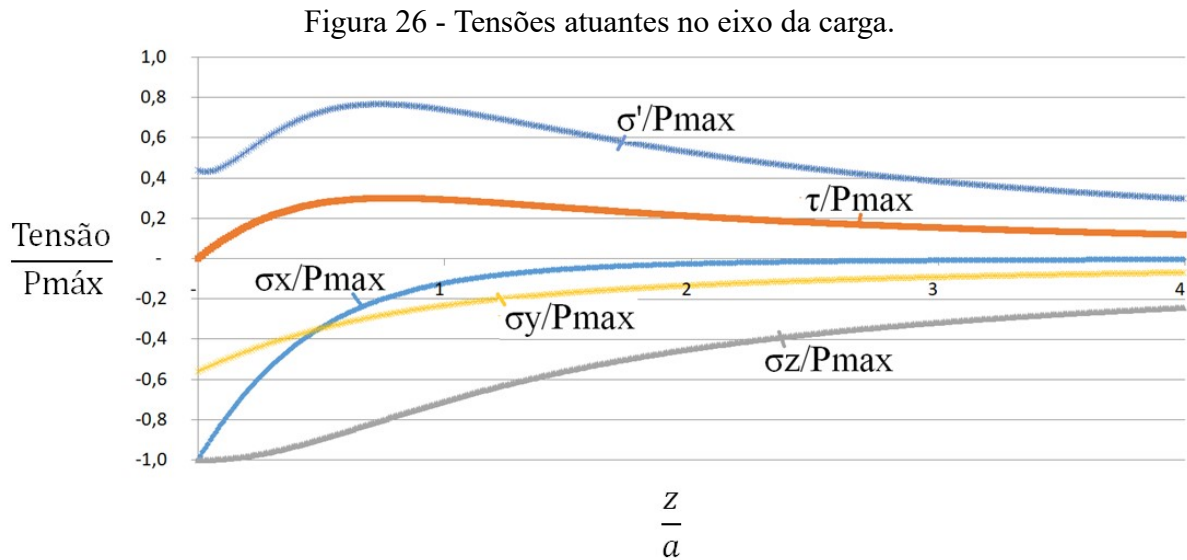
Fonte:Produção do próprio autor.

4.2.1 Resultados Analíticos

A partir das tensões de Hertz, obtêm-se os valores de a e $P_{máx}$, além do comportamento das tensões no plano de contato entre as partes e ao longo do eixo de aplicação da carga pelas equações (28-34). Através da equação (26) e equação (27), foi obtido os valores de $P_{máx} = 484,31 \text{ MPa}$ e $a = 1,31 \text{ mm}$, e o valor da área de contato é de $58,24 \text{ mm}^2$. Este valor de pressão máxima é encontrado no centro do contato entre as partes, na linha central do retângulo formado pelo contato entre o cilindro e o plano. Este retângulo tem espessura de $2a$ e comprimento l , e fora desta região as tensões são nulas.

4.2.1.1 Tensões ao longo do eixo z

A Figura 26 ilustra o comportamento das tensões σ_x , σ_y , σ_z , τ_l e a tensão de von Mises σ' ao longo do eixo de aplicação da carga. Foi feito a mesma abordagem normalizada utilizada na Figura 22, com a mesma justificativa de que este método facilita a interpretação dos resultados.



Pela Figura 26, observa-se que as 3 tensões normais são compressivas, e possuem valores máximos quando $z = 0$, e tendem a se anular rapidamente quando aumenta-se a profundidade z . As tensões σ_x , σ_y e σ_z para $z = 0$ são as tensões principais, pois não há tensão de cisalhamento neste ponto. Este estado tridimensional de tensões ocorre devido ao coeficiente de Poisson, pois quando um corpo é pressionado a outro na direção z , o material da vizinhança tende a se comprimir para evitar estas deformações.

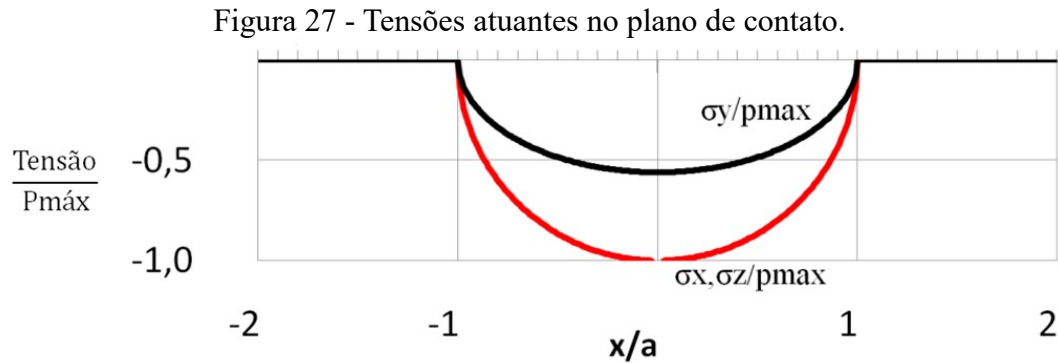
A máxima tensão de cisalhamento é positiva e está abaixo da superfície de contato entre os corpos, a uma profundidade de $0,78a$ e seu valor é aproximadamente $0,30P_{máx}$. Ela é resultante da combinação das tensões no círculo de Mohr (JUVINALL; MARSHEK, 2008).

A tensão de von Mises representa a tensão única de tração uniaxial que causa o mesmo efeito que as tensões atuantes combinadas. Seu valor máximo é encontrado a uma profundidade de $0,73a$, e ela é altamente influenciada pelo comportamento da tensão de cisalhamento, sendo que ambas possuem um perfil semelhante no gráfico. Assim, é possível concluir que a tensão cisalhante é a mais crítica para o surgimento de trincas que podem ocasionar a falha do elemento.

4.2.1.2 Tensões no plano xy

A Figura 27 ilustra como as tensões σ_x , σ_y e σ_z se comportam no plano de contato entre os dois corpos. Também foi utilizada a estratégia vista em Norton (2013) de transformar o

eixo da ordenada em uma função da tensão variante sobre a pressão máxima, enquanto o eixo da abcissa é uma função da variável x pelo valor fixo a .



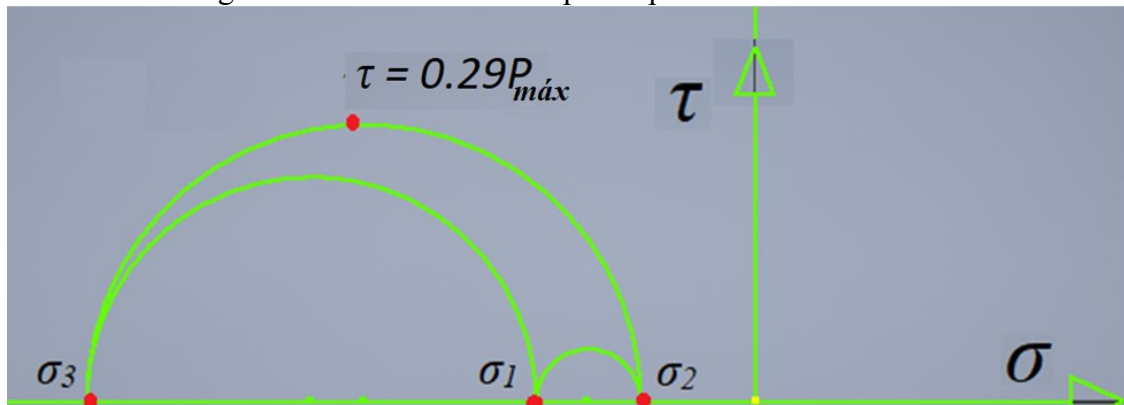
As tensões retratadas possuem valor máximo em sua linha de centro, e diminuem rapidamente até atingirem a borda, tornando-se nulas. Só há tensão na região de contato entre os corpos, isto é, fora da região de contato ($x > a$ e $x < -a$) a tensão é inexistente, confirmando a proposição (vii) de Hertz citada no Capítulo 2 desta dissertação.

Na região de contato ($-a < x < a$) as tensões são distribuídas de forma elíptica, variando de zero até seu valor máximo na sua linha de centro, para depois se reduzir até se tornar nula novamente na borda.

4.2.1.3 Círculo de Mohr para as tensões

O círculo de Mohr é uma representação gráfica cuja abcissa representa as tensões normais e a ordenada as tensões cisalhantes. Através desse método, é possível encontrar as tensões principais para certa situação. Devido ao estado tridimensional de tensões causado pelas contatos de Hertz, o círculo de Mohr construído possui três circunferências, refletindo a existência de três tensões principais, que são localizados nas interseções de cada eixo das abcissas com cada circunferência. Como exemplo, construiu-se o círculo de Mohr para o estado triaxial de tensões para a profundidade $z = a$, abaixo do plano de contato entre os corpos, obtendo-se a Figura 28.

Figura 28 - Círculo de Mohr para a profundidade de $z = a$.



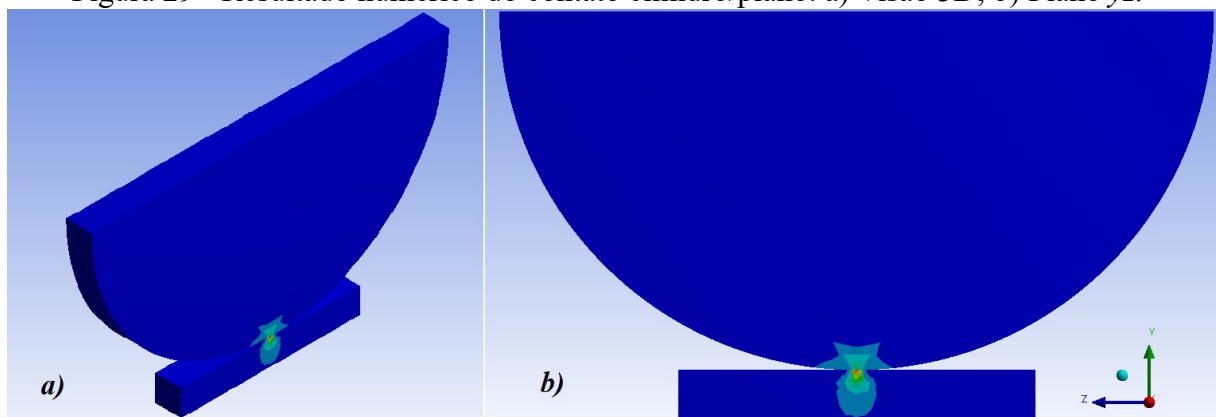
Fonte:Produção do próprio autor.

É visto que as tensões σ_1 , σ_2 e σ_3 são as tensões principais para esta configuração pois a tensão de cisalhamento é nula. Também é observado que a tensão de cisalhamento máxima para $z = a$ é igual a $0.29P_{máx}$, valor coincidente com o obtido na Figura 26.

4.2.2 Resultados Numéricos

Resolvendo a simulação proposta, foram obtidos os valores de σ_x , σ_y , σ_z , τ_{yz} e $P_{máx}$. De acordo com a Figura 29, a região mais crítica do modelo é encontrada na linha central do contato entre o meio cilindro e o plano, assim como diz a teoria. As tensões normais são máximas no plano de contato onde $y = 0$, e tendem a diminuir rapidamente a medida que aumenta-se a profundidade.

Figura 29 - Resultado numérico do contato cilindro/plano. a) Visão 3D; b) Plano yz.



Fonte:Produção do próprio autor.

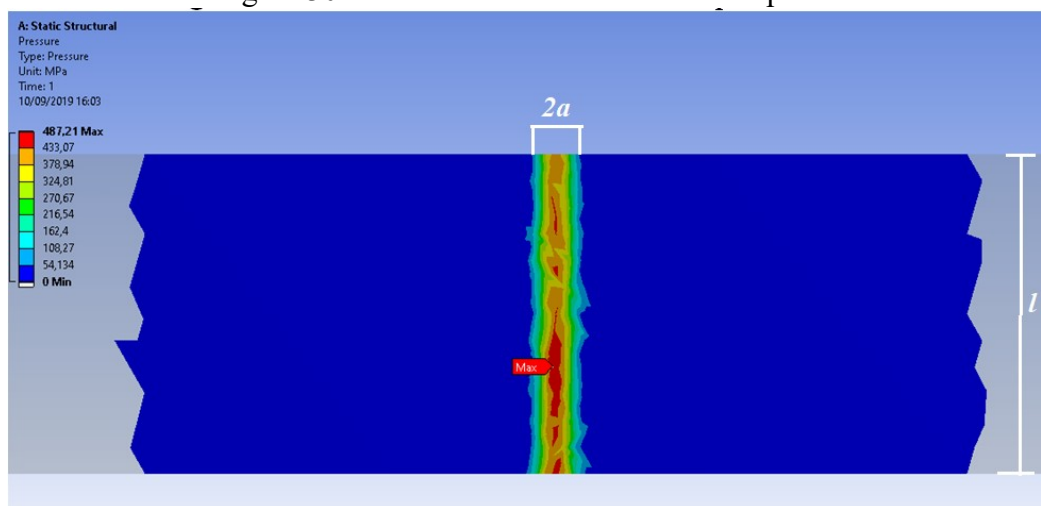
Pela Tabela 10, é visto que os valores encontrados para a simulação numérica estão consideravelmente próximos dos resultados analíticos. Os resultados para σ_x , σ_y , σ_z , τ_{yz} e $P_{m\acute{a}x}$ possuem uma média de 7,20% de erro percentual quando comparados entre si.

O resultado para a tensão normal no sentido da aplicação da força y foi o mais discrepante em relação aos resultados numéricos, assim como na análise do contato entre esfera e plano. As mesmas suposições podem ser aplicadas neste caso para justificar a maior discrepância para esta tensão, como a falta de consideração da rigidez do modelo, isto é, da espessura da base, no cálculo analítico. Como este modelo foi simulado utilizando-se a versão acadêmica do *Ansys*, também deve ser levada em consideração a limitação do número de nós na construção da malha. Caso a versão completa e ilimitada do programa tivesse sido utilizada, este limite não existiria e acredita-se que os resultados seriam melhores.

Os valores mais críticos para a formação de trincas e falhas no modelo são as tensões cisalhantes, e o erro percentual desta é de 4,46%. Como estas tensões são as mais importantes na análise do comportamento do modelo perante o surgimento de falhas e trincas e estes resultados estão satisfatórios, pode-se dizer que este modelo apresenta resultados factíveis à realidade.

Além da análise das tensões, também foi estudado o comportamento da área de contato entre os corpos. A face superior da base está ilustrada na Figura 30, juntamente com a distribuição de tensões nesta região.

Figura 30 - Plano de contato entre cilindro/plano.



Fonte: Produção do próprio autor.

Vê-se claramente que a existência de um retângulo de espessura $2a$ e comprimento l , cuja linha central é a região de pressão máxima, e que a tensão cai a medida que se afasta do centro, exatamente como foi dito na fundamentação teórica.

Através do programa *ImageJ*, pode-se calcular as dimensões desta região afetada pela distribuição de tensões. A Figura 30 é aberta neste programa, e então cria-se uma escala de medidas definida pelo usuário, podendo assim calcular a largura $2a$ da região e sua área. Como não há uma divisão exatamente linear, foi tomada dez medidas para ambas as dimensões e foi feita a média aritmética, para então ser comparada com os dados analíticos. Os desvios padrão para a largura $2a$ é de 0,89%, enquanto para o cálculo da área é de 0,64%. Como os valores de desvio padrão são pequenos, pode-se considerar que o programa fornece valores confiáveis. Estes resultados são mostrados na Tabela 11.

Tabela 11 - Resultados da área de contato entre cilindro/plano.

Dados	Analíticos	Numéricos	Erro percentual
Largura $2a$	2,62 mm	3,20 mm	22,14 %
Área	58,24 mm ²	66,32 mm ²	13,87 %

Fonte: Produção do próprio autor.

Comparando os resultados analíticos e numéricos, é visto que ambos possuem a mesma grandeza, apesar de um leve desvio percentual. Assim, reforça-se a ideia de que o modelo está de acordo com a realidade.

5 CONCLUSÕES

Após a obtenção de todos os resultados analíticos e numéricos deste trabalho, pode-se tirar diversas conclusões a respeito do comportamento mecânico causado pelas tensões superficiais para ambos os estudos de caso realizados. Os resultados analíticos e numéricos foram validados, e os resultados foram considerados satisfatórios, sendo possível descrever uma série de características a respeito do fenômeno envolvido.

Com as simulações computacionais realizadas, verificou-se que a tensão na direção do eixo de aplicação de carga gerou resultados distantes dos analíticos esperados. Porém, sabe-se que as tensões mais críticas para o surgimento de trincas e fraturas são as tensões cisalhantes, e como estas geraram resultados muito próximos para ambos os estudos de caso realizados, concluiu-se que as simulações apresentaram valores factíveis com a realidade. Além da análise computacional das tensões, foi feita a verificação das dimensões da área afetada por este fenômeno, e foi visto que esta possui dimensão muito menor do que as dimensões dos elementos envolvidos, e todos estes valores também foram validados pelos resultados analíticos.

A partir do momento que há uma aplicação de um carregamento externo à dois elementos em contato, há formação de uma área deformada comum à ambos. Nos casos estudados nessa dissertação, verificou-se a criação de uma área circular para o contato esfera/plano, e de uma área retangular para o contato cilindro/plano.

Após a aplicação do carregamento externo, há a formação de um estado tri-axial de tensões compressivas, além da presença de tensões de cisalhamento. Esta região afetada por estas tensões é pequena, sendo limitada a apenas uma vizinhança ao redor do ponto de contato, e estas tendem a se anular rapidamente a medida que a profundidade é aumentada.

As tensões compressivas atingem seu valor máximo na superfície de contato, e tendem a se anular a medida que afasta-se deste ponto. Por sua vez, as tensões de cisalhamento atingem seu valor máximo à uma profundidade abaixo da superfície. Os resultados da tensão de Von Mises corroboraram com o fato previsto de que as tensões de cisalhamento são as mais significantes e influentes no comportamento total, pois o perfil desta se mostrou semelhante ao perfil da tensão cisalhante.

6 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho realizou o estudo de apenas dois casos específicos onde as tensões de contato são presentes. Há inúmeras outras aplicações onde este fenômeno é verificado e possui grande importância na previsão de falhas, podendo constituir um novo trabalho acadêmico. Alguns exemplos que podem ser citados são o contato entre dentes de engrenagens e outros modelos de rolamentos.

O estudo realizado para esta dissertação é a base da investigação da fadiga superficial, fenômeno de grande importância na mecânica que pode causar graves danos. Portanto, esta dissertação pode funcionar como base para um novo trabalho o qual a fadiga superficial será avaliada em detalhes, através de simulações computacionais e procedimentos experimentais.

REFERÊNCIAS

- ALVES FILHO, A. **Elementos finitos: a base da tecnologia CAE**. 2. ed. São Paulo: Érica, 2000. 292 p.
- ARAKERE, N. K. Gigacycle rolling contact fatigue of bearing steels: a review. **International Journal of Fatigue**, Gainesville. v. 93, p. 238-249, 2016.
- BRAUER. **Wheels and castors catalog**. 2019. 116 p. Disponível em: https://www.brauer.co.uk/files/downloads/23_wheels%20catalogue%20-%20english.pdf. Acesso em: 09 dez. 2019.
- BREZEANU, L. C. Contact Stresses between Two cylindrical bodies: cylinder and cylindrical cavity with parallel axes—part I: theory and FEA 3D modeling. **Procedia Technology**, v. 19, p. 169-176, 2015.
- BREZEANU, L. C. Contact stresses between two cylindrical bodies with parallel axes: analisys by FEM. **Scientific Bulletin of the " Petru Maior" University of Targu Mures**, Târgu Mureș, v. 10, n. 2, p. 9, 2013.
- BUDYNAS, R. G.; MISCHKE, C. R.; SHIGLEY, J. E. **Projeto de engenharia mecânica**. 7. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. 500 p.
- CALLISTER, W. **Ciência e engenharia de materiais: uma introdução**. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2000. 589 p.
- CAO, P. *et al.* Tire–pavement contact stress with 3D finite-element model: part 2: all-steel tire on heavy vehicles. **Journal of Testing and Evaluation**, Philadelphia, v. 44, n. 2, p. 801-811, 2015.
- CHANDRUPATLA, T. R.; BELEGUNDU, A. D. **Introduction to finite elements in engineering**. 4. ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2012. 496 p.
- CHEN, G.; WEN, J. Effects of size and raceway hardness on the fatigue life of large rolling bearing. **Journal of Mechanical Science and Technology**, Seoul, v. 29, n. 9, p. 3873-3883, 2015.
- CHEN, L. *et al.* Influence of groove shape on clearance in four-point-contact slewing bearing. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Rio de Janeiro, v. 36, n. 3, p. 461-467, 2014.
- CHEN, L. *et al.* Rework solution method on large size radial roller bearings. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Rio de Janeiro, v. 38, n. 4, p. 1249-1260, 2016.
- DENG, S. *et al.* Analysis of surface crack growth under rolling contact fatigue in a linear contact. **Tribology Transactions**, Wuhan, v. 58, n. 3, p. 432-443, 2015.
- DENG, S. *et al.* Finite element analysis of fatigue life for deep groove ball bearing. **Journal**

of Materials: design and applications, London, v. 227, n. 1, p. 70-81, 2013.

DENG, S. *et al.* Investigation of rolling contact fatigue cracks in ball bearings. **International Journal of Fracture**, Dordrecht, v. 188, n. 1, p. 71-78, 2014.

DENG, S.; QIN, X.; HUANG, S. A study on the effect of subsurface crack propagation on rolling contact fatigue in a bearing ring. **Journal of Mechanical Science and Technology**, Seoul, v. 29, n. 3, p. 1029-1038, 2015.

DONZELLA, G.; PETROGALLI, C. A failure assessment diagram for components subjected to rolling contact loading. **International Journal of Fatigue**, Guildford, v. 32, n. 2, p. 256-268, 2010.

FAG. **Rolamentos FAG**. 1999. 382 p. Disponível em: https://www.itaperolamentos.com.br/wp-content/files/files_49eddb31126b8.pdf. Acesso em: 09 dez. 2019.

GONZALEZ-PEREZ, I.; ISERTE, J. L.; FUENTES, A. Implementation of Hertz theory and validation of a finite element model for stress analysis of gear drives with localized bearing contact. **Mechanism and Machine Theory**, Elmsford, v. 46, n. 6, p. 765-783, 2011.

GUO, W. *et al.* Fatigue life analysis of rolling bearings based on quasistatic modeling. **Shock and Vibration**, Washington, v. 2015, p. 1-10. 2015.

HAO, Y.; SHI, Y. Contact stress analysis for a pair of aluminum matrix composite helical gear and steel worm. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, Westport, v. 34, n. 3, p. 213-221, 2015.

HOJJATI, M. H.; KAZEMI ESFE, M. Finite element simulation of elastic contact between two cylinders. **Multidiscipline Modeling in Materials and Structures**, Babol, v. 3, n. 4, p. 505-514, 2007.

HONGYAN, C. *et al.* Applicability of the Hertz contact theory to rolling rubber cylinders model. **International Journal Of Mechanical Engineering And Applications**, Nova Iorque, p. 242-248. dez. 2016.

HOUGHTON, P.S. **Ball and roller bearings**. Essex: Applied Science Publishers, 1976. 427 p.

HWANG, S.C. *et al.* Contact stress analysis for a pair of mating gears. **Mathematical and Computer Modelling**, Oxford, v. 57, n. 1-2, p. 40-49, 2013.

JAIFU, A.; RAEON, S.; PIMSARN, M. Study of fatigue crack initiation location of wheel and rail under rolling contact using finite element method. **Matec Web of Conferences**, Paris, v. 192, n. 02012, p. 1-4. 2018.

JOHNSON, K.L. **Contact mechanics**. 9. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 452 p.

JUVINALL, R. C.; MARSHEK, K. M. **Fundamentos do projeto de componentes de**

máquinas. 4. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2008. 500 p.

LI, F. *et al.* A new damage-mechanics-based model for rolling contact fatigue analysis of cylindrical roller bearing. **Tribology International**, Surrey, v. 120, p. 105-114, 2018.

LOSTADO, R.; MARTINEZ, R.F.; MAC DONALD, B. J. Determination of the contact stresses in double-row tapered roller bearings using the finite element method, experimental analysis and analytical models. **Journal of Mechanical Science and Technology**, Seoul, v. 29, n. 11, p. 4645-4656, 2015.

MOGHADDAM, S. M. *et al.* Effect of non-metallic inclusions on butterfly wing initiation, crack formation, and spall geometry in bearing steels. **International Journal of Fatigue**, Guildford, v. 80, p. 203-215, 2015.

MOHD YUSOF, N. F.; RIPIN, Z. M.. Analysis of surface parameters and vibration of roller bearing. **Tribology Transactions**, Wuhan, v. 57, n. 4, p. 715-729, 2014.

MORALES-ESPEJEL, G. E.; GABELLI, A. The progression of surface rolling contact fatigue damage of rolling bearings with artificial dents. **Tribology Transactions**, Wuhan, v. 58, n. 3, p. 418-431, 2015.

NEJAD, R. M.; SHARIATI, M.; FARHANGDOOST, K. Effect of wear on rolling contact fatigue crack growth in rails. **Tribology International**, Surrey, v. 94, p. 118-125, 2016.

NORTON, R. L. **Machine Design**. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. 1028 p.

NSK. **Catálogo geral de rolamentos**. 2013. Disponível em: <http://www.nsk.com.br/rolamentos-144.htm#tab2949>. Acesso em: 09 dez. 2019.

PATIL, S. S. *et al.* Contact stress analysis of helical gear pairs, including frictional coefficients. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elmsford, v. 85, p. 205-211, 2014.

PUTTOCK, M. J. *et al.* **Elastic compression of spheres and cylinders at point and line contact**. Melbourne, Australia: Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, 1969. 64 p.

RYCERZ, P.; OLVER, A.; KADIRIC, A. Propagation of surface initiated rolling contact fatigue cracks in bearing steel. **International Journal of Fatigue**, Guildford, v. 97, p. 29-38, 2017.

SATYANARAYANA, S.; MELKOTE, S. N. Finite element modeling of fixture–workpiece contacts: single contact modeling and experimental verification. **International journal of machine tools and manufacture**, Oxford, v. 44, n. 9, p. 903-913, 2004.

SOLANKI, M. T.; VAKHARIA, D. A finite element analysis of an elastic contact between a layered cylindrical hollow roller and flat contact. **Industrial Lubrication and Tribology**, Droitwich, v. 69, n. 1, p. 30-41, 2017b.

SOLANKI, M. T.; VAKHARIA, D. Extending hertz equation for an elastic contact between a

layered cylindrical hollow roller and flat plate through an experimental technique. **Industrial Lubrication and Tribology**, Droitwich, v. 69, n. 2, p. 312-324, 2017a.

SRIVASTAVA, J. P. *et al.* Rolling contact fatigue life of rail for different slip conditions. **Latin American Journal of Solids and Structures**, São Paulo, v. 14, n. 12, p. 2243-2264, 2017.

SUBHASH, G. *et al.* A new approach towards life prediction of case hardened bearing steels subjected to rolling contact fatigue. **Materials Performance and Characterization**, Gainesville, v. 6, n. 4, p. 656-677, 2017.

WILLIAMS, J. A.; DWYER-JOYCE, R. S. **Contact between solid surfaces**. Modern tribology handbook, v. 1, p. 121-162, 2001. 42 p.

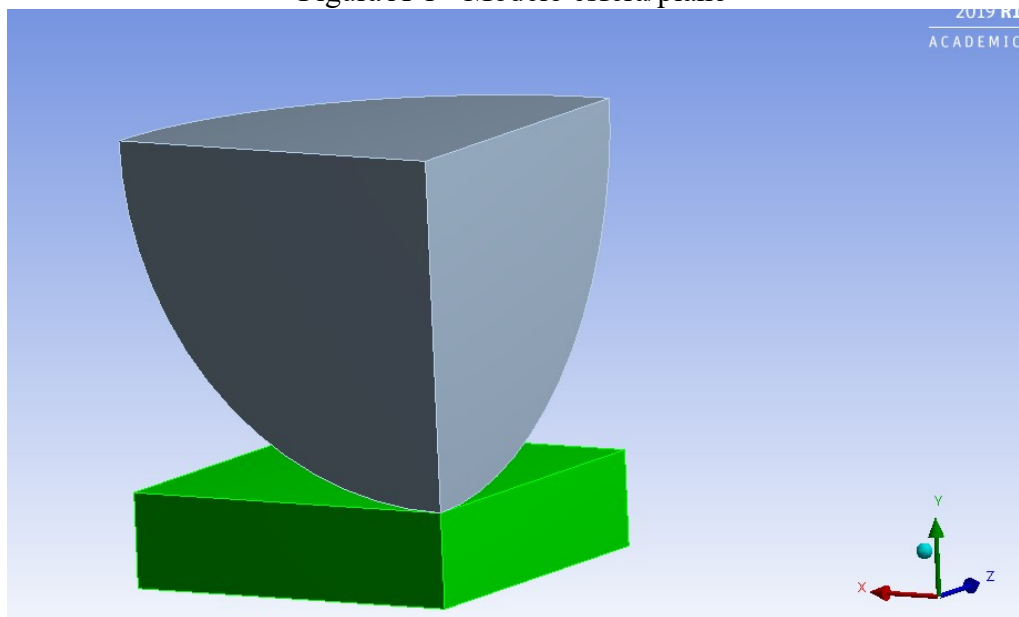
XIAO, J. H.; ZHANG, F. C.; QIAN, L. H. Contact stress and residual stress in the nose rail of a high manganese steel crossing due to wheel contact loading. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, Oxford, v. 37, n. 2, p. 219-226, 2014.

APÊNDICE A – Formulação Computacional para esfera/plano

A simulação computacional foi feita a partir de um modelo simplificado de $\frac{1}{4}$ do contato entre uma esfera e um plano, conforme verificado na literatura. Aplicando as restrições e carregamentos corretamente, essa simplificação está de acordo com a realidade.

Utilizando o programa *Ansys* para a modelagem e simulação, modelou-se $\frac{1}{4}$ de esfera representando o elemento rolante do rolamento utilizado, enquanto sua pista interna é representado pelo plano simples.

Figura A-1 - Modelo esfera/plano



Fonte: Produção do próprio autor.

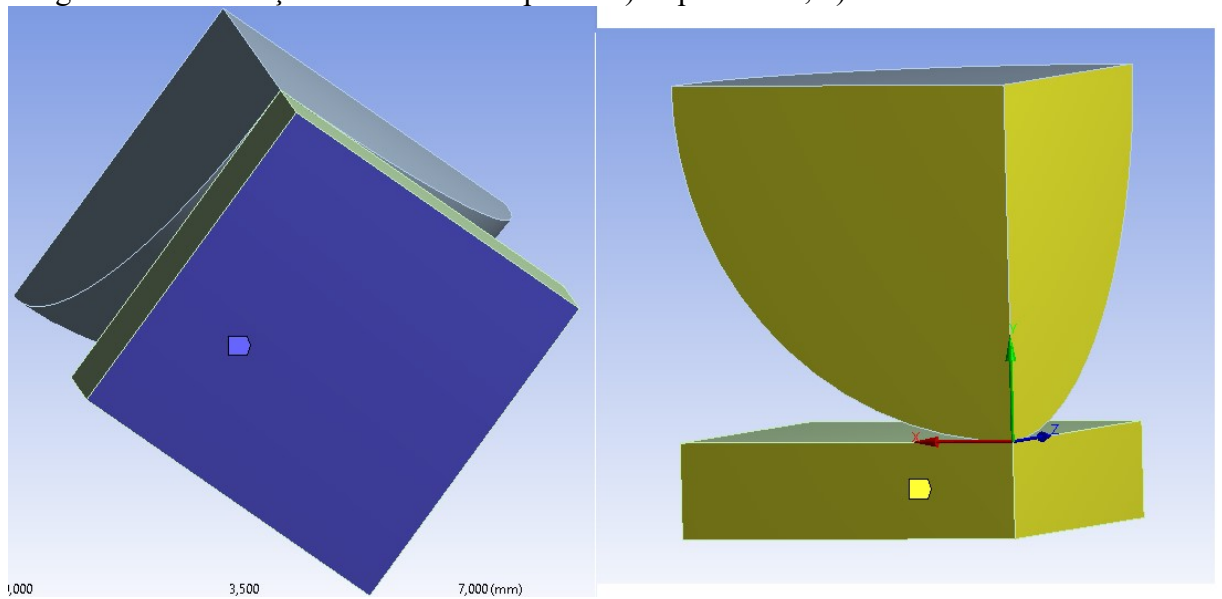
1. Restrições

Aplicou-se um suporte fixo na face inferior do plano simples, evitando que o modelo se desloque na direção vertical.

Fixaram-se todas as faces internas da esfera e do plano no sentido x e z , fazendo com que só exista deslocamento na direção y , ou seja, na direção da carga aplicada.

Com estas restrições, o modelo reduzido comporta-se como o modelo completo. Ambas as restrições são destacadas na Figura A-2.

Figura A-2 - Restrições contato esfera/plano. a) Suporte fixo; b) Eixos x e z .

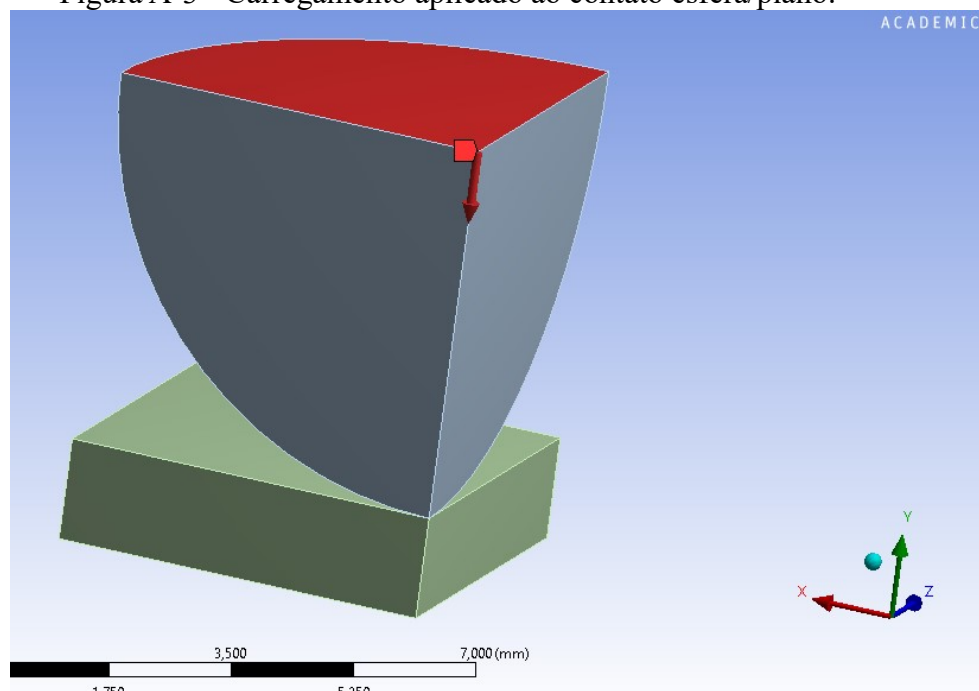


Fonte: Produção do próprio autor.

2. Carregamento

Aplicou o mesmo carregamento utilizado no item 3.1.2.2, na face superior interna da esfera, na direção negativa do eixo y , conforme Figura A-3.

Figura A-3 - Carregamento aplicado ao contato esfera/plano.



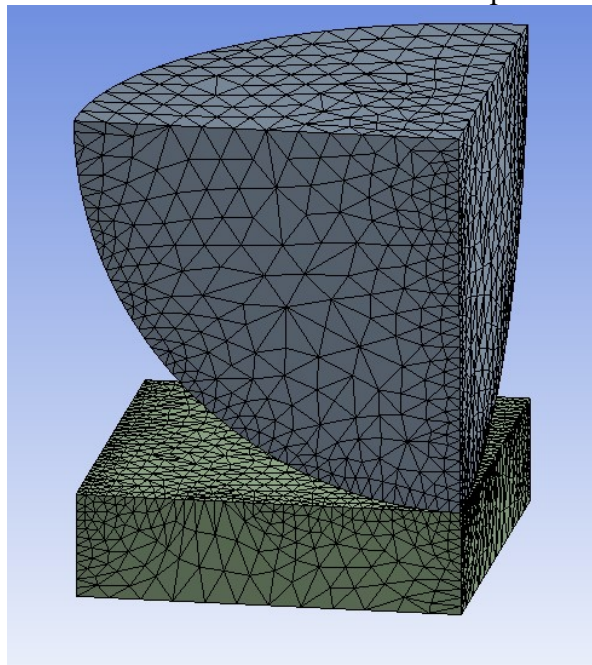
Fonte: Produção do próprio autor.

3. Malha

Primeiramente, a malha foi gerada automaticamente pelo próprio programa. Em seguida, foi feito um refinamento nas áreas mais sensíveis às tensões para que os resultados sejam mais factíveis à realidade.

Foi utilizada a versão acadêmica do programa *Ansys*, portanto teve-se que trabalhar com o limite de nós imposto por esta versão de 32 mil nós. Esta limitação se mostrou um fator limitante na qualidade de malha. O modelo final possui 18.826 nós e 9.711 elementos. O resultado final utilizado na simulação é mostrado na Figura A-4.

Figura A-4 - Malha final do contato esfera/plano.



Fonte: Produção do próprio autor.

4. Superfícies de contato

Foi utilizado o tipo de contato *Frictionless* no contato entre a esfera e o plano. Este tipo de contato faz com que não haja atrito entre as superfícies escolhidas, e assim respeitando a condição (iv) das proposições de Hertz.