

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JULIO DE MESQUITA FILHO"  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU**

**Higor Biondo de Assis**

**ANÁLISES DE SENSIBILIDADE APLICADAS À  
MODELAGEM DE PROBLEMAS DE FLUXO EM  
MEIOS POROSOS E ESTABILIDADE DE TALUDES  
PARA QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS**

**Bauru**

**2019**

**Higor Biondo de Assis**

**ANÁLISES DE SENSIBILIDADE APLICADAS À  
MODELAGEM DE PROBLEMAS DE FLUXO EM  
MEIOS POROSOS E ESTABILIDADE DE TALUDES  
PARA QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Geotecnia

Orientador: Prof. Dr. Caio Gorla Nogueira

**Versão original**

**Bauru**

**2019**

Assis, Higor Biondo de.

Análises de sensibilidade aplicadas à modelagem de problemas de fluxo em meios porosos e estabilidade de taludes para quantificação de incertezas / Higor Biondo de Assis, 2019

81 f.: il.

Orientador: Caio Gorla Nogueira

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2019

1. Planejamento de experimento. 2. Análises de sensibilidade. 3. Fluxo em meios porosos. 4. Estabilidade de taludes. 5. Teoria da Confiabilidade. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

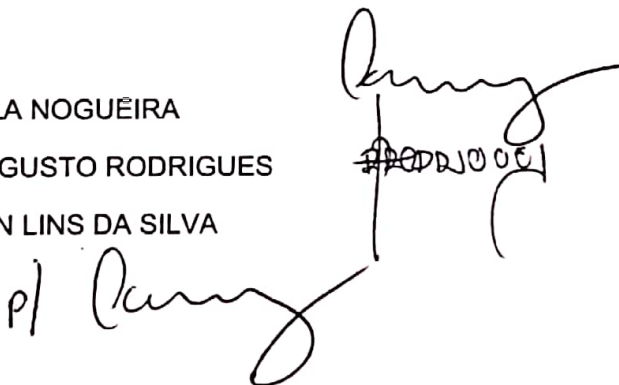
**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE HIGOR BIONDO DE ASSIS, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.**

Aos 12 dias do mês de agosto do ano de 2019, às 10:00 horas, no(a) Sala de Videoconferência (prédio antigo DEE), reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. CAIO GORLA NOGUEIRA - Orientador(a) do(a) Departamento de Engenharia Civil e Ambiental / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. ROGER AUGUSTO RODRIGUES do(a) Departamento de Engenharia Civil e Ambiental / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. JEFFERSON LINS DA SILVA do(a) Geotecnia / Escola de Engenharia de São Carlos - EESC - USP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de HIGOR BIONDO DE ASSIS, intitulada **ANÁLISES DE SENSIBILIDADE APLICADAS À MODELAGEM DE PROBLEMAS DE FLUXO EM MEIOS POROSOS E ESTABILIDADE DE TALUDES PARA QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. CAIO GORLA NOGUEIRA

Prof. Dr. ROGER AUGUSTO RODRIGUES

Prof. Dr. JEFFERSON LINS DA SILVA





*Dedico este trabalho aos meus queridos pais, Rosângela e João, pelo amor incondicional.*

*“Temos de fazer o melhor que podemos. Esta é a nossa sagrada responsabilidade humana.”*

*Albert Einstein*

## RESUMO

ASSIS, H. B. **ANÁLISES DE SENSIBILIDADE APLICADAS À MODELAGEM DE PROBLEMAS DE FLUXO EM MEIOS POROSOS E ESTABILIDADE DE TALUDES PARA QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS**. 2019. 81p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", Bauru, 2019.

Este trabalho apresenta um conjunto de técnicas estatísticas básicas aplicadas à modelagem de problemas de fluxo em meios porosos fraturados e de estabilidade de taludes, com o objetivo de identificar as variáveis explicativas mais influentes sobre a variabilidade das variáveis resposta. Diferentes planejamentos de experimentos foram utilizados para possibilitar a construção de metamodelos polinomiais representativos dos fenômenos estudados. Uma modificação do planejamento do tipo Box-Behnken é apresentada e foi proposta pelo autor para analisar problemas que envolvem elevado número de variáveis explicativas (e.g. 30). Os metamodelos, obtidos via método dos mínimos quadrados, são também chamados de superfícies de resposta ou modelos de regressão e são indispensáveis à verificação da sensibilidade das variáveis explicativas. O conjunto de técnicas mostrou-se muito eficaz na identificação das variáveis explicativas que provocaram efeitos mais significativos sobre a variável resposta. Evidenciou-se também, por meio dos exemplos de estabilidade de taludes tratados, a possibilidade de se quantificar incertezas com o uso de metamodelos suficientemente adequados, uma opção que pode ser bastante útil no processo de quantificação de incertezas de problemas que não possuem soluções analíticas simples.

**Palavras-chave:** Planejamento de experimento. Análise de sensibilidade. Fluxo em meios porosos. Estabilidade de taludes. Teoria da Confiabilidade.



## ABSTRACT

ASSIS, H. B. **SENSITIVITY ANALYSIS APPLIED TO MODELLING OF PROBLEMS OF FLUID FLOW IN POROUS MEDIA AND SLOPE STABILITY TO UNCERTAINTIES QUANTIFICATION**. 2019. 81p.

Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", Bauru, 2019.

This paper presents a set of basic statistical techniques applied to the modeling of flow problems in fractured porous and slope stability media, aiming to identify the most influential explanatory variables on the response variables variability. Different designs of experiments were used to enable the construction of polynomial metamodels representative of the studied phenomena. A Box-Behnken type design modification is presented and was proposed by the author to analyze problems involving high number of explanatory variables (e.g. 30). The metamodels, obtained by the least squares method, are also called response surfaces or regression models and are indispensable for verifying the sensitivity of the explanatory variables. The set of techniques was very effective in identifying the explanatory variables that had the most significant effects on the response variable. It was also evidenced, through the examples of stability of treated slopes, the possibility of quantifying uncertainties using sufficiently adequate metamodels, an option that can be very useful in the process of quantifying uncertainty of problems that do not have simple analytical solutions.

**Keywords:** Design of experiments. Sensitivity analysis. Fluid flow in porous media. Slope stability. Reliability theory.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>13</b>
2.1	Objetivo geral	13
2.2	Objetivos específicos	13
<b>3</b>	<b>JUSTIFICATIVA</b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>ANÁLISES DE SENSIBILIDADE</b>	<b>18</b>
<b>4.1</b>	<b>Planejamento de experimentos</b>	<b>18</b>
4.1.1	Planejamento Fatorial Completo	19
4.1.2	Planejamento Box-Behnken	21
<b>4.2</b>	<b>Planejamento das simulações numéricas</b>	<b>23</b>
4.2.1	Simulações de fluxo em meio poroso	23
<b>4.3</b>	<b>Construção de metamodelos via Método dos Mínimos Quadrados</b>	<b>24</b>
<b>4.4</b>	<b>Adequabilidade dos modelos de regressão</b>	<b>26</b>
4.4.1	Análise de variância	26
4.4.2	Raiz quadrada do erro médio quadrático	27
4.4.3	Coefficientes de determinação	28
4.4.4	Erro de modelo	29
4.4.5	Testes de significância	29
4.4.5.1	Teste F	30
4.4.5.2	Teste t-Student	30
<b>4.5</b>	<b>Fluxograma geral de análise</b>	<b>31</b>
<b>5</b>	<b>EXEMPLO NUMÉRICO: FLUXO EM MEIO POROSO</b>	<b>33</b>
5.1	Exemplo 1: seção j189	35
<b>6</b>	<b>EXEMPLO NUMÉRICO: ESTABILIDADE DE TALUDES</b>	<b>42</b>
6.1	Procedimento para realização das análises de sensibilidade	43
6.2	Exemplo 1: talude em Bauru-SP	45
6.3	Exemplo 2: talude em Campinas-SP	55
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>66</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>68</b>

**APÊNDICES** **71**

**APÊNDICE A – MODELAGEM DO PROBLEMA DE FLUXO EM  
MEIOS POROSOS . . . . . 72**

<b>A.1</b>	<b>Meios porosos . . . . .</b>	<b>72</b>
<b>A.2</b>	<b>Lei de Darcy . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>A.3</b>	<b>Modelo de Placas Paralelas . . . . .</b>	<b>74</b>
<b>A.4</b>	<b>Equações de conservação de massa . . . . .</b>	<b>75</b>
<b>A.5</b>	<b>Método dos Elementos Finitos . . . . .</b>	<b>77</b>
<b>A.6</b>	<b>Elemento de interface de elevada razão de aspecto . . . . .</b>	<b>79</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a mudança de abordagem empregada na solução dos problemas de engenharia tem sido cada vez mais evidenciada. Essa mudança refere-se à consideração das incertezas presentes nos sistemas os quais o homem necessita intervir, que outrora era muitas vezes ignorada ou tratada de forma muito simplificada.

Diante da necessidade de melhor compreensão dos problemas físicos e fenômenos naturais, a engenharia precisa diariamente tomar decisões mediante cenários de incertezas, sejam elas epistêmicas, intrínsecas ou devidas ao erro humano. Perante a essa realidade, a ciência busca aprimorar suas técnicas, por meio da consideração das incertezas existentes nos problemas que se propõe a analisar. Dentre as técnicas mais usuais, como cita Pereira, Sánchez e Guimarães (2016), está a teoria de probabilidades, que é base da teoria da confiabilidade (ANG; TANG, 1984).

Pertencente ao contexto apresentado, as engenharias civil e ambiental têm empregado nos mais diversos problemas a abordagem probabilística para propor soluções aos problemas de interesse. Assim, a partir de informações estatísticas, torna-se possível um vasto conjunto de informação de grande valia para os engenheiros decidirem quais as soluções mais adequadas para as situações enfrentadas, levando-se em consideração o risco.

No Brasil é comum que deslizamentos de encostas ocorram em períodos de chuvas, por exemplo, condição essa que na maioria das vezes torna inviável a intervenção antrópica, devido a magnitude do problema, para que o colapso seja evitado. Ciente de que controlar situações de falha em sistemas de grande escala é algo impraticável, é papel do engenheiro propor ações que busquem mitigar as consequências de possíveis falhas, sejam essas consequências de natureza material ou humana, como nos casos de Mariana-MG e Brumadinho-MG, por exemplo. Nesses locais, provavelmente seria impossível conter o rompimento das barragens de rejeito, no entanto, com uma previsão adequada do risco existente, seria possível evitar parte importante das graves consequências ocorridas.

Uma maneira possível de se realizar uma análise de estabilidade de taludes de forma adequada é por meio do acoplamento direto dos métodos de equilíbrio limite com os métodos de confiabilidade, ambos amplamente difundidos, como apresentado por Koker, Day e Zwiers (2018) e Abdulai e Sharifzadeh (2018). Outra forma de abordar o problema é por meio do método dos elementos finitos, considerando tanto a variabilidade espacial quanto temporal dos parâmetros, discutido por Dyson e Tolooiyan (2019), incorporando assim o regime transiente na avaliação de risco do problema. Alguns estudos têm sido realizados nessa linha, oferecendo medidas de segurança através do monitoramento dos deslocamentos de barragens, como apresenta Zhang et al. (2018). Com essa técnica é

---

possível tratar o problema de estabilidade de forma acoplada, avaliando simultaneamente as condições hidráulicas e mecânicas do problema, ou seja, os campo de pressões neutras e a resistência do maciço ao cisalhamento (CALAMAK; YANMAZ, 2016).

Semelhante aos problemas de estabilidade de taludes, os problemas de reservatórios de petróleo podem se beneficiar de ferramentas numéricas próximas para solucionar o que interessar, pois também são relativos a meios porosos permeados por fluidos, sejam gases ou líquidos. Alguns autores propõem abordagens diferentes para quantificação de incertezas para esse tipo de problema, devido a baixo nível de informação disponível a respeito dos parâmetros, como a teoria de possibilidades e a teoria de evidências (PEREIRA et al., 2014). Por outro lado, apesar da menor exigência em relação ao conhecimento das variáveis independentes dos problemas de interesse, as teorias de possibilidades e de evidências demandam muito mais computacionalmente. Essas teorias distinguem-se da teoria de probabilidades justamente por não exigirem informações tão precisas a respeito da variabilidade dos parâmetros, contornando essa questão com o uso de informações subjetivas fornecidas por especialistas da área ou técnicas como a lógica fuzzy, por exemplo.

Na indústria do petróleo há um grande interesse em uma melhor compreensão das propriedades de formação geológica, presentes nos campos de exploração de petróleo. Quando se tratam de meios porosos heterogêneos, naturalmente fraturados ou com fraturas induzidas pela técnica de fraturamento hidráulico (TAHERI-SHAKIB et al., 2018), o que é bastante comum nos campos brasileiros, essas fraturas têm grande importância na determinação de propriedades equivalentes, como a permeabilidade, parâmetro que direciona as atividades de produção da indústria petrolífera.

Tanto em problemas de fluxo em meios porosos quanto nos de estabilidade de taludes apresentados neste trabalho, técnicas de planejamento de experimentos e de inferência estatística são empregadas para análises de sensibilidade (HELTON et al., 2006), permitindo a identificação das variáveis explicativas mais influentes sobre a variabilidade das variáveis respostas, possibilitando um melhor entendimento acerca dos principais parâmetros que governam o problema. Na prática da engenharia, a consequência direta da aplicação dessa técnicas permite ao engenheiro propor soluções mais conscientes e otimizadas, devido a maior compreensão do problema, oferecendo à sociedade projetos tecnicamente mais sofisticados e eficientes para as soluções desejadas.

## 2 OBJETIVOS

### 2.1 Objetivo geral

Este trabalho tem por objetivo principal o emprego de um conjunto de técnicas estatísticas para verificação da sensibilidade das variáveis independentes sobre a variável resposta aplicadas à modelagem de problemas de fluxo em meios porosos e de estabilidade de taludes. Identificar as variáveis independentes mais influentes sobre a variabilidade da resposta é uma tarefa importante para determinar adequadamente quais dessas variáveis devem ser tratadas como variáveis aleatórias num processo de quantificação de incertezas.

### 2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos são:

- a otimização do planejamento de experimentos para simulações numéricas de problemas que envolvem grande quantidade de variáveis independentes, que possibilitem a construção de metamodelos suficientemente adequados para representar a variável resposta do problema;
- a aplicação de análises estatísticas multivariadas para identificação das variáveis independentes de maior influência sobre a variável resposta;
- a quantificação de incertezas, via teoria da confiabilidade, aplicada à estabilidade de taludes para identificação das superfícies críticas de máxima probabilidade de falha, de máximo risco, de modo a serem comparadas à superfície crítica de menor fator de segurança;
- a comparação das respostas das análises probabilísticas obtidas por acoplamento direto de solução analítica do problema físico ao *First-Order Reliability Method* com as respostas obtidas via acoplamento direto de metamodelos a mesmo método de confiabilidade.

### 3 JUSTIFICATIVA

A importância do trabalho proposto é justificada pela relevância crescente dos temas nos últimos anos em todo o mundo. Considerar a variabilidade dos parâmetros de entrada de um problema de engenharia torna-se cada vez mais uma tarefa indispensável, uma vez que as incertezas estão sempre presentes. Em um levantamento bibliográfico realizado em uma das mais importantes base de dados, a SCOPUS, as buscas resultaram em evidente interesse por trabalhos relacionados à quantificação de incertezas em problemas de engenharia, com crescimento praticamente exponencial nos últimos anos, conforme Figuras 1, 2. No entanto, há ainda uma participação muito pequena do Brasil nos números verificados, apesar de que os problemas de estabilidade de taludes e de geomecânica de reservatórios de petróleo são assuntos extrema importância para a sociedade e economia do país. Fatos recentes evidenciam bem essa importância, como por exemplo:

- a ruptura das barragens de rejeito de mineração das cidades de Mariana-MG e Brumadinho-MG, que deixou centenas de vítimas;
- as atividades de exploração dos campos de petróleo do pré-sal, uma das principais commodities negociadas e exportadas pelo Brasil.

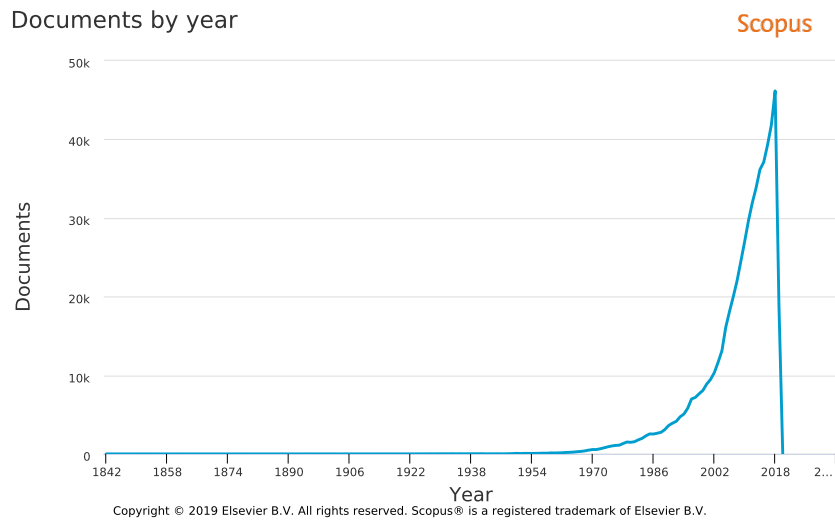
Em problemas de engenharia, há sempre a necessidade de tomada de decisões mediante cenários de incertezas. Essas incertezas estão relacionadas à qualidade da informação, às limitações dos modelos que representam matematicamente os problemas e a aleatoriedade natural dos processos e parâmetros. Como consequência direta, há sempre a possibilidade de um sistema não operar conforme o esperado. A quantificação das incertezas permite um ganho de informações que pode auxiliar significativamente o engenheiro na tomada de decisões. No entanto, fazê-la aumenta muito a complexidade dos cálculos envolvidos no tratamento do problema, mostrando que o desenvolvimento de programas computacionais é bastante interessante. No entanto, mesmo com o uso de computadores modernos, à medida em que se incrementa o número de variáveis tratadas como aleatórias, a não-linearidade estatística pode aumentar a ponto de inviabilizar a realização da análise. Selecionar de modo criterioso quais variáveis devem ser tratadas como aleatórias e quais devem ser tratadas como determinísticas é o que justifica a necessidade de se realizar análises de sensibilidade em problemas com grande número de variáveis. Além disso, as análises de sensibilidade permitem identificar como o engenheiro pode intervir de forma mais eficiente ao propor suas soluções técnicas.

Diante dessa realidade, compreender os fenômenos naturais sobre os quais existe um universo de incertezas, têm sido um trabalho de grande necessidade para que de alguma

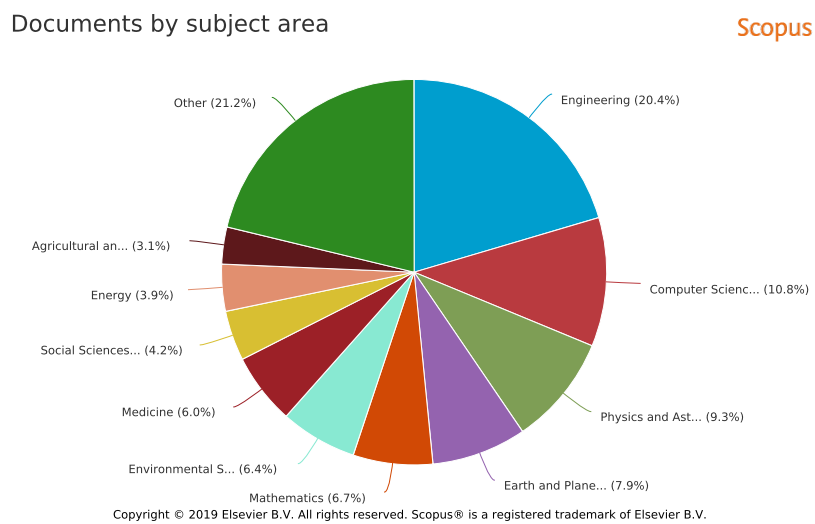
forma, valendo-se das ferramentas disponíveis, os engenheiros sejam capazes de avaliar o nível de segurança ou de risco, no intuito de evitar tragédias de ordem social, ambiental e/ou econômica. Este trabalho justifica-se em função das necessidades da sociedade atual, que espera o exercício competente e ético do papel que foi designado aos engenheiros.



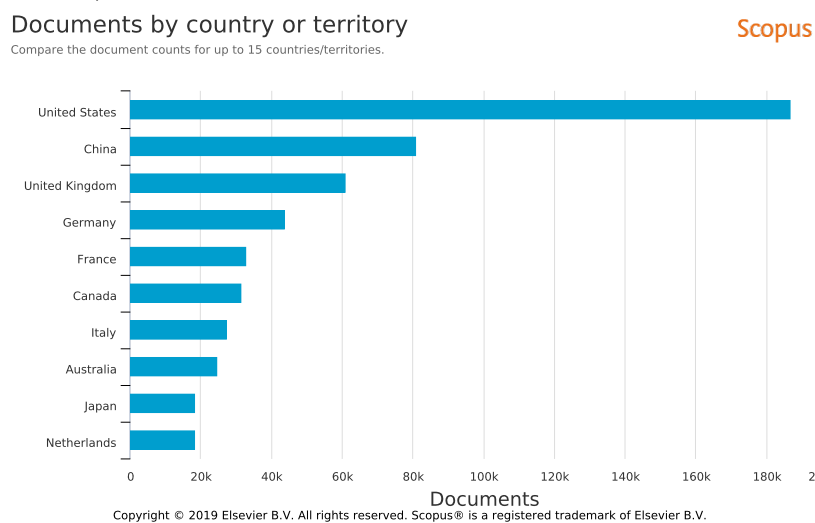
Figura 1: Resultados da busca por palavras-chave: *uncertainty AND engineering*



a) número de publicações anuais



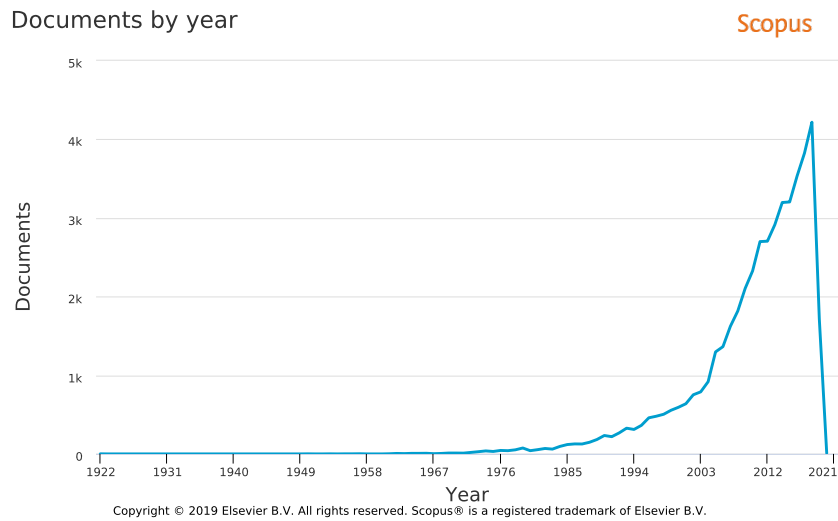
b) participação no número de publicações por área



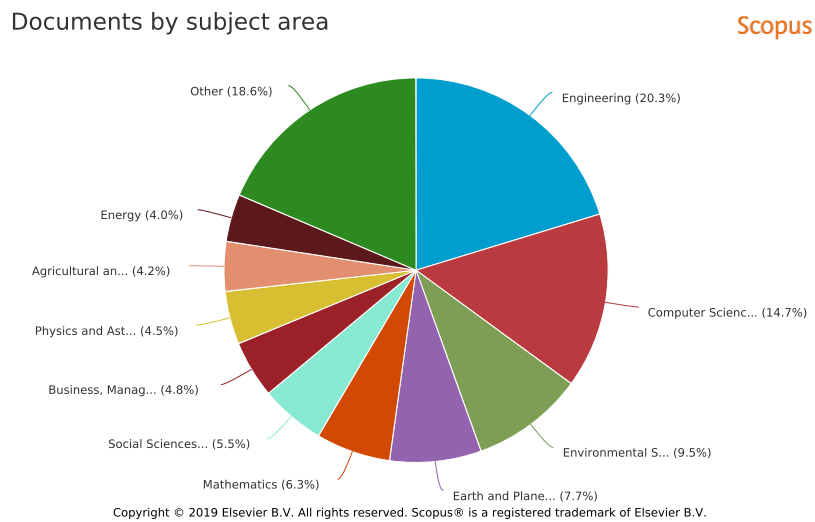
c) número de publicações por países

Fonte: Elsevier

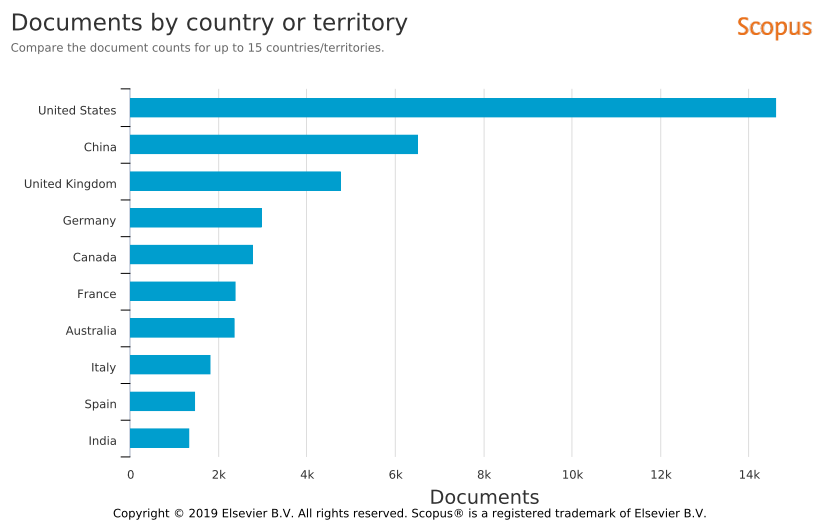
Figura 2: Resultados da busca por palavras-chave: *uncertainty AND environment*



a) número de publicações anuais



b) participação no número de publicações por área



c) número de publicações por países

Fonte: Elsevier

## 4 ANÁLISES DE SENSIBILIDADE

As técnicas utilizadas para realização das análises de sensibilidade utilizadas neste trabalho são apresentadas neste capítulo. Entende-se por análises de sensibilidade as análises que são capazes de determinar qual a contribuição individual das variáveis de entrada de um problema sobre sua variável resposta (HELTON et al., 2006), e que geralmente são realizadas com o uso de um conjunto de técnicas estatísticas. Essas técnicas foram aplicadas tanto aos problema de fluxo em meio poroso fraturado, quanto aos problemas de estabilidade de taludes, a fim de identificar as variáveis explicativas mais influentes sobre variabilidade da resposta.

Entende-se por variáveis explicativas de um modelo ou experimento as variáveis capazes de explicar os efeitos causados sobre a variável resposta. Essa variáveis também são denominadas variáveis independentes.

Nos problemas de reservatório de petróleo, as variáveis independentes são as aberturas das fraturas presentes no domínio físico analisado, enquanto que a variável resposta é a permeabilidade equivalente do meio fraturado. Nos problemas de estabilidade de taludes, as variáveis referem-se aos parâmetros geotécnicos coesão, ângulo de atrito e peso específico do solo que compõe o talude, sendo o Fator de Segurança do talude a variável resposta do problema.

A análise de sensibilidade proposta segue as seguintes etapas: planejamento de experimentos; simulações numéricas; modelagem de superfícies de resposta via Método dos Mínimos Quadrados (MMQ); análise dos erros; análise de variância do modelo com efeitos fixos, em que os valores assumidos pelas variáveis explicativas no planejamento de experimentos são fixados pelo experimentador.

### 4.1 Planejamento de experimentos

Quando o objetivo é conhecer os efeitos de uma variável explicativa sobre a variabilidade da variável resposta de um determinado processo ou fenômeno físico, é comum que se realize um conjunto de experimentos a fim de identificar possíveis relações entre essas variáveis. Segundo critérios pré-estabelecidos pelo experimentador, os experimentos são realizados variando os níveis das variáveis explicativas de forma conjunta, o que permite avaliar de que forma essas variações afetam a variável resposta. As variáveis explicativas controladas pelo experimentador são também chamadas de fatores ( $k$ ).

Planejar um experimento consiste em definir um conjunto de testes ou corridas que seja suficiente para a identificação adequada dos fatores mais influentes sobre a variável resposta em um determinado sistema (MONTGOMERY, 2017). Conseqüentemente, um

planejamento de experimento possibilita o desenvolvimento de modelos que relacionam as principais variáveis independentes à variável resposta os quais podem ser utilizados para aprimorar processos, sistemas, e auxiliar nas tomadas de decisões.

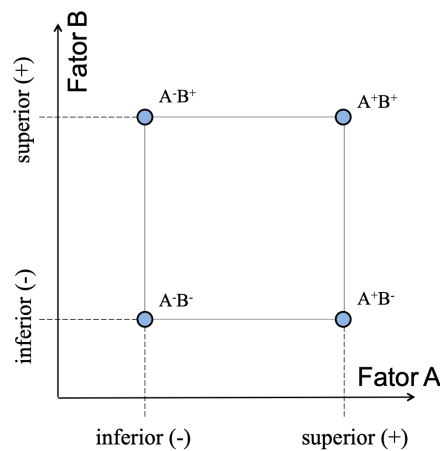
Neste trabalho serão apresentados dois tipos de planejamento de experimentos: o planejamento Fatorial Completo e o planejamento Box-Behnken. Dessa forma, a partir dos conceitos do primeiro, será possível compreender o segundo, o qual teve papel importante no planejamento das simulações realizadas.

#### 4.1.1 Planejamento Fatorial Completo

Um planejamento Fatorial Completo é construído a partir de todas as combinações possíveis dos níveis dos fatores, onde os níveis são os valores assumidos pelos fatores para que as combinações sejam elaboradas. Cada combinação recebe o nome de corrida ou realização do experimento.

Se um experimento do tipo Fatorial Completo envolver dois fatores que variam em dois níveis, sendo um inferior e outro superior, denotados por  $(-1)$  e  $(+1)$  respectivamente, possuirá então um número de corridas igual a  $2^2$ , conforme ilustra a Figura 3.

Figura 3: Planejamento Fatorial Completo com dois fatores e dois níveis.



Fonte: elaborado pelo autor.

No entanto, se o planejamento Fatorial Completo envolver mais fatores  $k$ , todos variando em dois níveis, então o número de corridas desse experimento será igual a  $2^k$ . Esses são muito usuais e geralmente chamados de planejamentos do tipo Fatorial Completo  $2^k$ .

A Tabela 1 exemplifica um planejamento Fatorial Completo  $2^2$ .

Tabela 1: Planejamento Fatorial Completo  $2^2$ , referente à representação geométrica da Figura 3.

Corridas	Níveis	
	Fator A	Fator B
1	-1	-1
2	-1	+1
3	+1	-1
4	+1	+1

Fonte: elaborado pelo autor.

O experimentador, se julgar conveniente, pode estabelecer número de níveis distintos aos fatores ou fixá-los em valores diferentes de dois. Assim, um planejamento Fatorial Completo  $3^k$  é concebido a partir de  $k$  fatores que variam em três níveis. Os níveis inferior, central e superior são denotados  $(-1)$ ,  $(0)$  e  $(+1)$ , conforme Tabela 2.

Tabela 2: Planejamento Fatorial Completo  $3^2$ .

Corridas	Níveis	
	Fator A	Fator B
1	-1	-1
2	-1	0
3	-1	+1
4	0	-1
5	0	0
6	0	+1
7	+1	-1
8	+1	0
9	+1	+1

Fonte: elaborado pelo autor.

Seguindo a mesmo raciocínio, um planejamento Fatorial Completo  $3^k$  que envolver três fatores (A, B e C), possuirá um total de 27 corridas, conforme Tabela 3.

Tabela 3: Planejamento Fatorial Completo  $3^3$ .

Corridas	Níveis			Corridas	Níveis			Corridas	Níveis		
	Fator A	Fator B	Fator C		Fator A	Fator B	Fator C		Fator A	Fator B	Fator C
1	-1	-1	-1	10	0	-1	-1	19	+1	-1	-1
2	-1	-1	0	11	0	-1	0	20	+1	-1	0
3	-1	-1	+1	12	0	-1	+1	21	+1	-1	+1
4	-1	0	-1	13	0	0	-1	22	+1	0	-1
5	-1	0	0	14	0	0	0	23	+1	0	0
6	-1	0	+1	15	0	0	+1	24	+1	0	+1
7	-1	+1	-1	16	0	+1	-1	25	+1	+1	-1
8	-1	+1	0	17	0	+1	0	26	+1	+1	0
9	-1	+1	+1	18	0	+1	+1	27	+1	+1	+1

Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se que o número de corridas de um planejamento Fatorial Completo é dado por uma relação exponencial que é função do número de fatores existentes. Com isso, a medida que o número de fatores de um experimento é incrementado, o número de corridas requerido aumenta rapidamente. Conseqüentemente, os custos para execução do experimento aumentam, podendo até se tornar inviável.

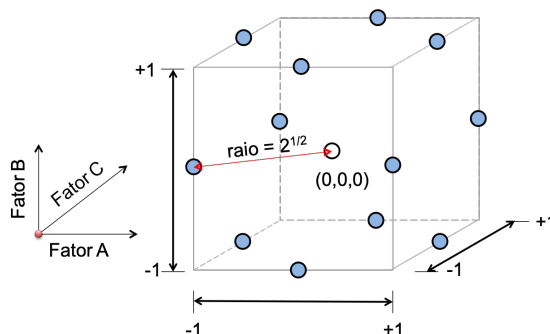
Para contornar essa limitação, outros planejamentos foram desenvolvidos ao longo do tempo, como os planejamentos Fatoriais em Blocos, planejamentos Fatoriais Fracionários (MONTGOMERY, 2017), planejamento Plackett-Burmann (PLACKETT; BURMAN, 1946), planejamento Box-Behnken (BOX; BEHNKEN, 1960), entre outros. Essas alternativas têm por objetivo de reduzir o número de corridas em relação aos planejamentos fatoriais completos, viabilizando a execução de experimentos que envolvem um grande número de fatores. Neste trabalho, o principal planejamento adotado foi baseado no planejamento do tipo Box-Behnken, devido ao elevado número de fatores presentes em alguns problemas e pela necessidade de se conceber um planejamento que possibilitasse ajustes satisfatórios de superfícies de resposta de segunda ordem, as quais serão apresentadas em outra seção deste trabalho.

#### 4.1.2 Planejamento Box-Behnken

Em 1960, Box e Behnken propuseram um tipo de planejamento com a finalidade de ajustar superfícies de respostas (BOX; BEHNKEN, 1960), alternativamente ao planejamento Fatorial Completo. Essa alternativa consiste na construção de um planejamento a partir de combinações de planejamentos fatoriais completos  $2^k$  com blocos incompletos (MONTGOMERY, 2017). No entanto, os fatores são variados em três níveis: inferior, central e superior, denotados  $(-1)$ ,  $(0)$  e  $(+1)$ .

A Tabela 4 apresenta um planejamento Box-Behnken que envolve três fatores.

Figura 4: Planejamento Box-Behnken com três fatores.



Fonte: adaptado de (MONTGOMERY, 2017).

Tabela 4: Planejamento Box-Behnken com três fatores.

Corridas	Níveis		
	Fator A	Fator B	Fator C
1	-1	-1	0
2	-1	+1	0
3	+1	-1	0
4	+1	+1	0
5	-1	0	-1
6	-1	0	+1
7	+1	0	-1
8	+1	0	+1
9	0	-1	-1
10	0	-1	+1
11	0	+1	-1
12	0	+1	+1
13	0	0	0
14	0	0	0
15	0	0	0

Fonte: adaptado de (MONTGOMERY, 2017).

Esse é um planejamento esférico, com todos os pontos distantes  $\sqrt{2}$  do centro do cubo, onde  $\sqrt{2}$  é a medida do raio da esfera, conforme Figura 4. É assim chamado pois não há no planejamento pontos nos vértices do cubo, havendo somente sobre os pontos médios de suas arestas, sendo assim pontos contidos na superfície da esfera de raio  $\sqrt{2}$ .

É importante salientar que nesse planejamento não há pontos nos vértices da região cúbica delimitada pelos limites inferiores e superiores dos fatores. Esse aspecto pode ser bastante vantajoso quando os pontos nos vértices do cubo são proibitivamente caros ou impossíveis de serem realizados em função das restrições do processo físico (MONTGOMERY, 2017).

## 4.2 Planejamento das simulações numéricas

### 4.2.1 Simulações de fluxo em meio poroso

Neste trabalho, um planejamento semelhante ao Box-Behnken foi proposto para avaliação da sensibilidade dos parâmetros. Essa alternativa foi escolhida devido ao elevado número de fatores envolvidos em alguns dos casos analisados, em que  $k \leq 30$ . Desse modo, foi possível reduzir significativamente o número de corridas em relação ao que é requerido pelo planejamento Fatorial Completo  $2^k$ . Além disso, como os experimentos consistem em simulações numéricas computacionais, réplicas e aleatoriedade não são aplicáveis em razão das respostas serem sempre idênticas para uma mesma corrida.

O planejamento proposto associa os conceitos de combinações simples a planejamentos fatoriais completos e é realizado em três etapas. A primeira etapa consiste em gerar todas combinações de  $k$  fatores pertencentes a um conjunto de  $n$  fatores, o que gera um número de combinações simples dado por:

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (4.1)$$

A segunda etapa consiste na aplicação do planejamento Fatorial Completo  $2^k$  apenas aos fatores  $k$  de cada combinação gerada na etapa anterior, o que fornece um número total de corridas  $N$  do experimento dado por:

$$N = C(n, k) \cdot 2^k. \quad (4.2)$$

Por último, a matriz de planejamento é construída a partir das duas etapas anteriores. Para melhor compreensão, a Tabela 5 apresenta a construção de um planejamento na forma proposta em que três fatores ( $n = 3$ ) são combinados dois a dois ( $k = 2$ ):



Tabela 5: Combinações simples, fatoriais completos  $2^2$  e matriz de planejamento com 3 fatores combinados 2 a 2.

Combinações	Fatores		Fatoriais completos $2^2$						Matriz de planejamento				
	$x_1$	$x_2$	$c_1$		$c_2$		$c_3$		Combinações	Corridas	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$c_1$	$x_1$	$x_2$	$x_1$	$x_2$	$x_1$	$x_3$	$x_2$	$x_3$	$c_1$	1	-1	-1	0
$c_2$	$x_1$	$x_3$	-1	-1	-1	-1	-1	-1		2	+1	-1	0
$c_3$	$x_2$	$x_3$	+1	-1	+1	-1	+1	-1		3	-1	+1	0
			-1	+1	-1	+1	-1	+1		4	+1	+1	0
			+1	+1	+1	+1	+1	+1	$c_2$	5	-1	0	-1
										6	+1	0	-1
										7	-1	0	+1
									8	+1	0	+1	
									$c_3$	9	0	-1	-1
										10	0	+1	-1
										11	0	-1	+1
										12	0	+1	+1

Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se que os planejamentos podem ser construídos gradativamente, incrementando-se  $k$  a partir de  $k = 1$ . O número de fatores  $k$  envolvidos em cada combinação é, portanto, arbitrário e definido após a análise dos resultados do experimento. Por consequência, considera-se o planejamento satisfatório quando este permite obter, a partir de um número mínimo de corridas, um modelo de regressão capaz de estimar a variável resposta com erros mínimos e desempenhar as análises de sensibilidade.

### 4.3 Construção de metamodelos via Método dos Mínimos Quadrados

A construção de modelos simplificados a partir de um conjunto de dados experimentais pode ajudar a responder perguntas relacionadas à otimização de forma racional e econômica a respeito de um processo ou fenômeno físico. Esses modelos são também chamados de metamodelos, superfícies de resposta ou modelos de regressão, e consistem em expressões matemáticas capazes de estimar a variável resposta à partir de intervalos pré-estabelecidos das variáveis independentes. Para isso, as técnicas estatísticas são bastante úteis e podem fornecer informação rica que auxiliam nas tomadas de decisões (NETO; SCARMINIO; BRUNS, 1996). Sendo assim, uma técnica amplamente difundida é a construção de superfícies de respostas a partir de métodos de regressão.

Um processo ou sistema pode ser representado na forma matricial conforme a Equação (4.3):

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{y}$  é o vetor da variável resposta;  $\mathbf{X}$  refere-se à matriz de planejamento;  $\boldsymbol{\beta}$  é o vetor de coeficientes do modelo de regressão; e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o vetor de erros aleatórios associado à determinação experimental de seu valor (MONTGOMERY, 2017).

Após a definição do planejamento de experimentos, as simulações computacionais são realizadas. Assim, obtém-se o vetor da variável resposta  $\mathbf{y}$  que contém os resultados das corridas do planejamento. Em seguida, a fim de possibilitar a construção das superfícies de resposta, o analista precisa definir qual o modelo de regressão será utilizado. Os modelos mais comuns citados na literatura para regressões paramétricas, que envolvem apenas variáveis quantitativas, são os modelos lineares e quadráticos. As Equações (4.4) e (4.5), (??), exemplificam esses modelos para o caso de três variáveis explicativas:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon, \quad (4.4)$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_1^2 + \beta_5 x_2^2 + \beta_6 x_3^2 + \varepsilon, \quad (4.5)$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_1^2 + \beta_5 x_2^2 + \beta_6 x_3^2 + \beta_7 x_1 x_2 + \beta_8 x_1 x_3 + \beta_9 x_2 x_3 + \varepsilon. \quad (4.6)$$

onde os metamodelos quadráticos diferem entre si por possuírem ou não fatores de interação, que consistem no produto de dois ou mais fatores.

onde  $y$  é a resposta de uma corrida do planejamento com 3 fatores envolvidos e erro aleatório associado à essa corrida dado por  $\varepsilon$ . Os coeficientes  $\beta$  são definidos a partir de regressão via Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). Ambos os modelos serão utilizados neste trabalho, de modo que o primeiro possibilitará a classificação das variáveis independentes mais influentes, e o segundo, estimar a variável resposta com erros que atendam aos critérios de tolerância pré-estabelecidos.

Os modelos obtidos com a aplicação do Método dos Mínimos Quadrados, são dados na forma matricial por:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad (4.7)$$

onde  $\hat{\mathbf{y}}$  é o vetor das respostas estimadas pelo modelo de regressão; e  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  são os coeficientes da função de aproximação de forma polinomial, também chamado de vetor de estimadores.

O MMQ consiste num processo de otimização para definir o vetor  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  que minimiza a função  $L$ , dada por:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \quad (4.8) \end{aligned}$$

onde a notação  $\bullet^T$  representa o transposto do vetor ou matriz ao qual se refere.

Aplicando as derivadas parciais em  $L$  e igualando a zero, pode-se substituir  $\beta$  por  $\hat{\beta}$ , donde se obtém:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -2\mathbf{X}^T \mathbf{y} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X} \beta \Rightarrow -2\mathbf{X}^T \mathbf{y} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\beta} = 0. \quad (4.9)$$

Rearranjando os termos da Equação (4.9), têm-se a relação:

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \hat{\beta} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}. \quad (4.10)$$

Assim,  $\hat{\beta}$  é definido conforme:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}. \quad (4.11)$$

## 4.4 Adequabilidade dos modelos de regressão

### 4.4.1 Análise de variância

A variabilidade total de uma regressão linear múltipla pode ser decomposta na variabilidade do modelo e na variabilidade dos erros. Desse modo, a soma de quadrados total ( $SQT$ ) é dada pela Equação (4.12):

$$SQT = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{J} \mathbf{y}}{N} = \mathbf{y}^T \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{J}}{N} \right) \mathbf{y}, \quad (4.12)$$

onde  $y_i$  é a resposta experimental da corrida  $i$ ;  $\bar{y}$  é a média do vetor de respostas  $\mathbf{y}$ ;  $N$  é o número de corridas do experimento;  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de dimensões  $(N \times N)$ , e  $\mathbf{J}$  é a matriz dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(N \times N)}. \quad (4.13)$$

A partir das propriedades dos estimadores ( $\hat{\beta}$ ), a soma de quadrados dos erros ( $SQE$ ) é dada conforme a Equação (4.14):

$$SQE = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \hat{\beta} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \left[ \mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \right] \mathbf{y} = \mathbf{y}^T (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \mathbf{y}. \quad (4.14)$$

A matriz  $\mathbf{H}$  é denominada matriz chapéu e transforma  $\mathbf{y}$  no vetor de respostas estimadas  $\hat{\mathbf{y}}$  pelo modelo de regressão, e é dada por  $\mathbf{H} = \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ , uma vez que  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{H} \mathbf{y}$ .

Por fim, a soma de quadrados do modelo de regressão ( $SQR$ ) á dada conforme Equação (4.15):

$$SQR = SQT - SQE = \mathbf{y}^T \left( \mathbf{H} - \frac{\mathbf{J}}{N} \right) \mathbf{y}. \quad (4.15)$$

Com  $SQR$ ,  $SQE$  e  $SQT$  calculados, pode-se então construir a tabela da análise de variância para os modelos de regressão lineares com  $n$  variáveis explicativas, usualmente chamada de Tabela ANOVA, conforme Tabela 6:

Tabela 6: Tabela ANOVA.

	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Quadrado médio
Modelo de regressão	$SQR$	$n$	$QMR$
Erros	$SQE$	$N - n - 1$	$QME$
Total	$SQT$	$N - 1$	

Fonte: adaptado de (MONTGOMERY, 2017).

onde  $QMR = SQR/n$  e  $QME = SQE/(N - n - 1)$  e referem-se ao quadrado médio do modelo de regressão ( $QMR$ ) e ao quadrado médio dos erros ( $QME$ ), respectivamente. A tabela ANOVA é útil aos testes de significância, empregados na verificação da adequabilidade dos modelo de regressão, a partir dos testes de hipóteses que serão apresentados posteriormente.

#### 4.4.2 Raiz quadrada do erro médio quadrático

A raiz do erro médio quadrático ( $RMSE$ ) é o parâmetro que permite avaliar a variabilidade dos erros ou resíduos. É comumente usado como medida de adequabilidade do modelo de regressão, e mede o quão distante estão os valores de  $\hat{\mathbf{y}}$  em relação aos valores da resposta experimental ou resposta numérica de referência  $\mathbf{y}$ . Assim,  $RMSE$  é dado por:

$$RMSE = \sqrt{\left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 \right]}. \quad (4.16)$$

Quanto menor o valor de  $RMSE$ , diz-se que melhor é o ajuste do modelo de regressão. Portanto, é desejável que  $RMSE$  seja sempre o mínimo possível.

## 4.4.3 Coeficientes de determinação

O coeficiente de determinação  $R^2$  expressa o percentual da variabilidade da resposta que é explicado pelo modelo de regressão ajustado, e é dado por:

$$R^2 = \frac{SQR}{SQT} = 1 - \frac{SQE}{SQT}, \quad (4.17)$$

com  $0 \leq R^2 \leq 1$ . Um modelo de regressão perfeitamente ajustado possui  $R^2 = 1$ , enquanto que  $R^2 = 0$  significa que o modelo é incapaz de explicar qualquer variabilidade da resposta. Observa-se que  $R^2$  não é função dos graus de liberdade do planejamento de experimento adotado.

Segundo Helton et al. (2006), Helton et al. (2007), as análises de sensibilidade podem ser realizadas a partir de modelos de regressão lineares simples, que consideram modelos que envolvem um único fator, e é dado por:

$$\begin{Bmatrix} \hat{y}_1 \\ \dots \\ \hat{y}_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{(j)} \\ 1 & \dots \\ 1 & x_N^{(j)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{\beta}_0^{(j)} \\ \hat{\beta}_1^{(j)} \end{Bmatrix}, \quad (4.18)$$

onde  $j$  representa o fator o qual se deseja conhecer a influência sobre a variabilidade da resposta. Dessa forma, o coeficiente de determinação  $R_j^2$  do modelo de regressão linear simples é o parâmetro que expressa a influência do fator  $j$  sobre a variabilidade da resposta. Sabendo que o  $R^2$  é coeficiente de determinação do modelo de regressão múltipla, dado pela Equação (4.7), o qual envolve todos os fatores do experimento, então:

$$\sum_{j=1}^n R_j^2 \approx R^2. \quad (4.19)$$

Já coeficiente de determinação ajustado  $R_{adj}^2$  considera os graus de liberdade do experimento, e é dado por:

$$R_{adj}^2 = 1 - \left( \frac{N-1}{N-n} \right) (1 - R^2), \quad (4.20)$$

com  $0 \leq R_{adj}^2 \leq 1$ . À medida que uma nova variável independente é incluída na construção do modelo de regressão,  $SQE$  tende a reduzir, aumentando  $R^2$ . No entanto, pode ocorrer a diminuição de  $R_{adj}^2$  devido à perda de um grau de liberdade no denominador ( $N - n$ ), evidenciando se a nova variável contribui para a explicação da variabilidade da resposta e também se o número de corridas do experimento é suficiente ou deve ser aumentado.

#### 4.4.4 Erro de modelo

A variável erro de modelo é o parâmetro que permite considerar a variabilidade do erro experimental em um modelo. Pode ser chamado também de *bias – factor* (BECK et al., 2009) e é dado pelo valor médio  $E_m$  da razão  $y_i/\hat{y}_i$ , conforme :

$$E_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i}{\hat{y}_i} \right), \quad (4.21)$$

em tem como valor ideal  $E_m = 1$ . No entanto, expressar a variabilidade do erro de modelo apenas por uma medida de tendência central não é suficiente, fazendo-se necessário uma medida de dispersão dessa variável. Desse modo, a medida de dispersão do erro de modelo é dada por seu coeficiente de variação  $COV_{E_m}$ , escrito em termos percentuais na forma:

$$COV_{E_m} = \frac{\sigma_{E_m}}{E_m} \cdot 100, \quad (4.22)$$

em que  $\sigma_{E_m}$  é o desvio-padrão da variável erro de modelo. Quanto melhor ajustado for o modelo, mais próximo a 1 será o valor de  $E_m$  e mais próximo a 0% será o valor de  $COV_{E_m}$ .

#### 4.4.5 Testes de significância

Os testes de significância são uma das ferramentas mais comuns de inferência estatística. Eles têm por objetivo avaliar as evidências fornecidas por um experimento a respeito de alguma afirmativa relacionada a ele. Para tanto, o primeiro passo necessário é o estabelecimento das hipóteses, que se inicia com um enunciado cauteloso das afirmativas a serem comparadas (MOORE; NOTZ; FLIGNER, 2013). São duas as hipóteses que devem ser definidas: a hipóteses nula ( $H_0$ ) e a hipótese alternativa ( $H_1$ ).

A lógica dos testes de significância é buscar evidências que sejam contrárias à afirmativa  $H_0$ , de modo que seja possível rejeitá-la a partir de um nível de significância adotado pelo analista, e que seja condizente com a natureza do problema avaliado (MONTGOMERY, 2017). Desse modo, o teste é organizado para avaliar a força da evidência contra a hipótese nula, sendo que  $H_0$  representa usualmente nenhum efeito ou nenhuma diferença sobre a variável resposta. A hipótese alternativa  $H_1$  representa a afirmativa sobre a população, que corresponde à todas as medidas possíveis de uma variável e não apenas às medidas das amostras, a favor da qual as evidências são buscadas (MOORE; NOTZ; FLIGNER, 2013).

Nas análises de sensibilidade propostas por esse trabalho, os testes de significância serão empregados em duas situações: validação das superfícies de respostas modeladas via MMQ através do teste F; e avaliação da influência individual das variáveis explicativas sobre a variabilidade da resposta através do teste t-Student.

## 4.4.5.1 Teste F

O teste F, também conhecido como teste Fisher-Snedecor é empregado na verificação de adequabilidade do modelo de regressão definido via MMQ. Nesse caso, as hipóteses  $H_0$  e  $H_1$  são definidas como:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_N = 0 \\ H_1 : \beta_j \neq 0, \text{ com } j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (4.23)$$

Portanto, rejeitar  $H_0$  significa dizer que há pelo menos uma variável explicativa  $x_1, \dots, x_N$  que influencia de forma significativa a variabilidade da variável resposta do modelo.

Segundo o Teorema da Distribuição de Forma Quadrática (MONTGOMERY, 2017), conclui-se sob  $H_0$  que:

$$F_0 = \frac{QMR}{QME} \sim F_{(N;N-n-1)}, \quad (4.24)$$

e rejeita-se  $H_0$  se  $F_0 > F_{(N;N-n-1)}$  e se *valor P* =  $P[F_{(N;N-n-1)} > F_0] < \alpha$ , sendo  $\alpha$  o nível de significância arbitrado pelo analista, e o *valor P* a probabilidade que expressa o quão forte é a evidência contrária à hipótese nula. Quanto menor o *valor P*, diz-se que maior é a força da evidência fornecida pelos dados do experimento contra  $H_0$ .

Observa-se que o *valor P* é dado pela probabilidade de  $F$  assumir um valor maior que  $F_0$  segundo a função densidade de probabilidades F de Fisher-Snedecor, o que caracteriza o teste como unilateral superior. Isso significa que ao rejeitar  $H_0$ ,  $\beta_j > 0$ .

A tabela para Análise de Variância (ANOVA) com a estatística F é dada conforme Tabela 7:

Tabela 7: Tabela ANOVA com estatística F.

	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Quadrado médio	Estatística F
Modelo de regressão	$SQR$	$n$	$QMR$	$F_0$
Erros	$SQE$	$N - n - 1$	$QME$	
Total	$SQT$	$N - 1$		

Fonte: adaptado de (MOORE; NOTZ; FLIGNER, 2013).

## 4.4.5.2 Teste t-Student

O teste t-Student é usualmente empregado para testar individualmente a influência das variáveis explicativas do modelo de regressão. Permite identificar a eficácia do modelo ao incluir ou excluir uma variável explicativa qualquer a partir do coeficiente de regressão  $\beta_j$  da variável  $x_j$ .

À medida que novos fatores são incluídos em um modelo de regressão,  $SQR$  aumenta e  $SQE$  diminui sempre. No entanto, a variância de  $\hat{\mathbf{y}}$  também aumenta. Por esse motivo é importante a realização dos testes de hipóteses, de modo a identificar quais os fatores mais influentes sobre a variável resposta, os quais deverão ser incluídos no modelo. Neste caso, as hipóteses adotadas para o teste de significância individual dos coeficiente de regressão são:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_j = 0 \\ H_1 : \beta_j \neq 0 \end{cases}, \text{ com } j = 0, 1, \dots, N. \quad (4.25)$$

Rejeitar  $H_0$  significa dizer que a variável  $x_j$  é importante para determinação da variável resposta e deve ser incluída no modelo. Caso contrário, poderá ser desconsiderada, pois exerce influência desprezível sobre a variabilidade da resposta.

O teste t-Student rejeita  $H_0$  se  $|t_0| > t_{(1-\alpha, N-n-1)}$  e *valor P*  $< \alpha$ , sendo  $t_0$  dado por:

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{QME \cdot C_{jj}}} \sim t_{(N-n-1)}, \quad (4.26)$$

onde  $t_0$  é denominado *Estatística*,  $\hat{\beta}$  é o estimador ou coeficiente do metamodelo que multiplica a variável  $x_j$  e  $C_{jj}$  é o j-ésimo elemento da diagonal principal da matriz  $C = (X^T X)^{-1}$ . Neste caso, o *valor P* é dado por:

$$\text{valor } P = 2 \cdot P \left[ t_{(N-n-1)} > |t_0| \right]. \quad (4.27)$$

#### 4.5 Fluxograma geral de análise

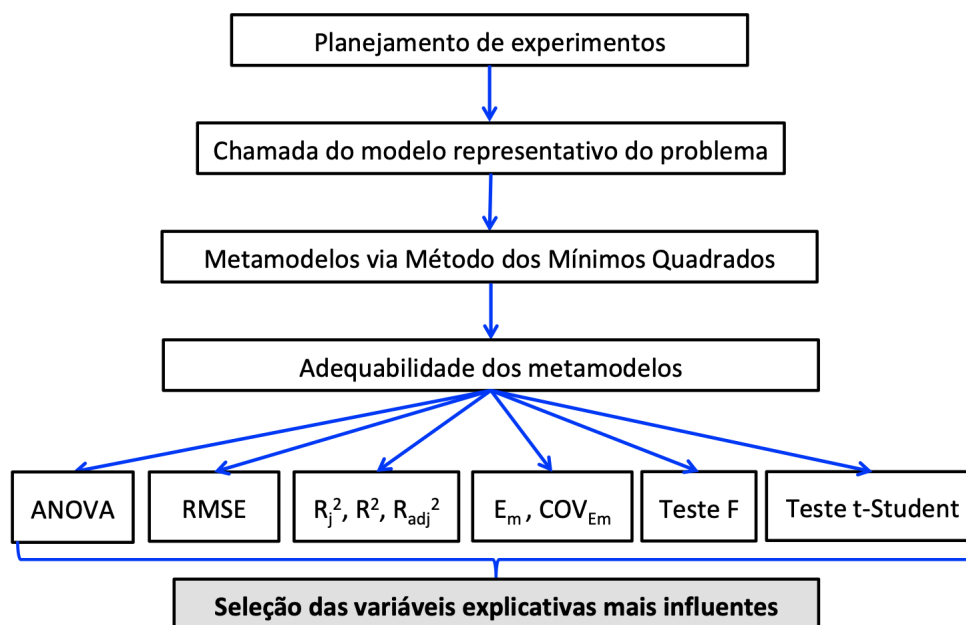
Com o uso de um conjunto de técnicas estatísticas, as análises de sensibilidade realizadas neste estudo seguem basicamente o esquema apresentado pelo fluxograma geral de análises (Figura 5).

A sequência de etapas apresentada inicia-se com a definição de um planejamento inicial que possibilite a identificação adequada das variáveis mais influentes do problema estudado. As chamadas do modelo de cálculo que representam o problema físico são feitas à cada corrida do planejamento, de modo a fornecer o vetor de respostas  $\mathbf{y}$ .

Com a matriz de planejamento, proveniente do planejamento adotado, os diferentes metamodelos polinomiais são construídos via MMQ. Em seguida, avalia-se a capacidade dos metamodelos de representar a variabilidade da variável reposta por meio de medidas de adequabilidade dos modelos. Complementarmente, os testes de hipótese do tipo F e do tipo t-Student são aplicados para verificação da significância estatística dos metamodelos



Figura 5: Fluxograma geral de análises.



Fonte: elaborado pelo autor.

e de suas variáveis explicativas, respectivamente. Os resultados dos testes e as medidas de adequabilidade dos metamodelos permitem, por fim, identificar quais as variáveis explicativas provocam efeitos mais significativos sobre a variável resposta. Importante ressaltar que a identificação das variáveis de maior influência pode ser muito útil aos estudos que envolvam quantificação de incertezas, pois é necessária a identificação das variáveis que serão tratadas como variáveis aleatórias nas análises probabilísticas. Isso se justifica pelo interesse em considerar o menor número de variáveis aleatórias no problema, de modo que não comprometa a qualidade da resposta probabilística, pois a medida em que o número de variáveis aleatórias é incrementado, aumenta-se também a não-linearidade estatística do problema, tornando as análises mais custosas.

## 5 EXEMPLO NUMÉRICO: FLUXO EM MEIO POROSO

Um simulador computacional de fluxo monofásico bidimensional, com base na formulação de elementos finitos, foi utilizado para o cálculo da permeabilidade equivalente  $k_{eq}$  do meio poroso fraturado. A forma forte da equação de conservação de massa para regime estacionário e problema exclusivamente hidráulico, dada pela Lei de Darcy, é representada a seguir conforme (5.1):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu_w} (-\nabla p) = 0, & \text{em } \Omega \quad (\text{Equação do balanço de massa}) \\ p = \bar{p}, & \text{em } \Gamma_p \quad (\text{Condição essencial}) \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \bar{q} & \text{em } \Gamma_q \quad (\text{Condição natural}) \end{cases} \quad (5.1)$$

em que  $\mathbf{k}$  é a matriz de permeabilidade do meio poroso,  $\mu_w$  é a viscosidade dinâmica da água,  $p$  são pressões nodais, incógnita do problema,  $\bar{p}$  são as pressões prescritas no contorno  $\Gamma_p$ ,  $\mathbf{q}$  é o vetor de fluxo,  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à superfície no contorno  $\Gamma_q$  e  $\bar{q}$  corresponde ao fluxo prescrito em  $\Gamma_q$ .

A forma fraca, obtida a partir da aplicação do Teorema da Divergência e do método de Galerkin, referente às equações diferenciais (5.1) é escrita na forma

$$\int_{\Omega} W_i \nabla \cdot \left( \rho_w \frac{\mathbf{k}}{\mu_w} \nabla p_w \right) d\Omega = 0, \quad \forall W_i \in U_0, \quad (5.2)$$

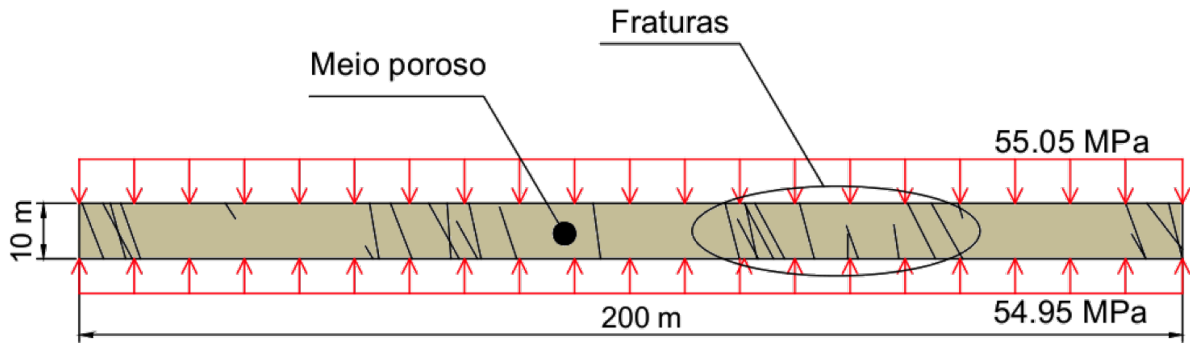
e o problema consiste em encontrar  $p \in U$  tal que:

$$\begin{cases} U = \{p \mid p \in H^1, p = \bar{p} \text{ em } \Gamma_p\} \\ U_0 = \{W_i \mid W_i \in H^1, W_i = 0 \text{ em } \Gamma_p\} \end{cases} \quad (5.3)$$

Apesar da incógnita do problema ser  $\mathbf{p}$ , nas análises de sensibilidade realizadas a permeabilidade equivalente do meio fraturado ( $k_{eq}$ ) foi considerada como variável resposta, enquanto que as aberturas das fraturas  $F$  presentes no domínio são as variáveis explicativas. O cálculo de  $k_{eq}$  é feito a partir dos valores das vazões nodais obtidas, via método dos elementos finitos, para o problema de valores de contorno. O gradiente de pressão imposto ao problema foi de 0.1 MPa na direção vertical, como ilustra a Figura 6:

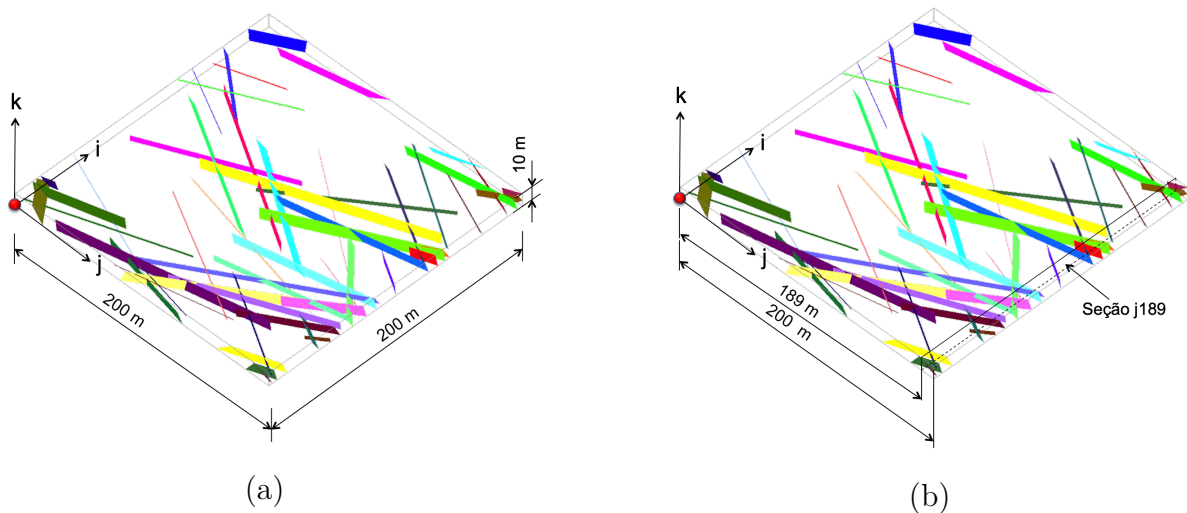
Os exemplos numéricos apresentados referem-se a uma célula de simulação de reservatório de petróleo hipotética, baseada numa célula de simulação de um campo real, onde estão presentes 54 fraturas com valores distintos de aberturas (Figura7).

Figura 6: Gradiente de pressão imposto à seção transversal do meio poroso fraturado.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 7: Célula de simulação de reservatório: (a) sistema de coordenadas e dimensões; (b) identificação de uma seção transversal.



Fonte: elaborado pelo autor.

As permeabilidades da rocha matriz consideradas foram:  $3.4329 \cdot 10^{-13} m^2$  na direção horizontal das seções, correspondente à direção  $i$  da célula; e  $2.600 \cdot 10^{-17} m^2$  na direção vertical da seção, correspondente à direção  $k$  da célula, que é a mesma direção do fluxo imposto. A abertura de uma fratura é considerada constante tanto ao longo de sua altura, quanto de seu comprimento e sua permeabilidade é dada pelo modelos de placas paralelas. Para realização das análises, foi definida uma seção transversal da célula em relação à direção  $j$ , que contemplasse o maior número de fraturas possível. A identificação da seção representa a distância e a direção, em relação à origem do sistema de coordenadas adotado em que está posicionada. Assim, a seção identificada por j189 está posicionada a 189 metros da origem na direção  $j$ , paralela ao plano  $ik$  e tem dimensões 200 metros por 10 metros. Assim, o planejamento do tipo Box-Behnken modificado que foi proposto poderá ser testado para realização das análises de sensibilidade, uma vez o problema é

composto por um elevado número de variáveis explicativas, correspondente às aberturas de 30 fraturas.

### 5.1 Exemplo 1: seção j189

A seção j189 é intersectada por 30 fraturas e foi escolhida por ser a seção que contempla o maior número de fraturas. A Tabela 8 apresenta os valores das aberturas da seção.

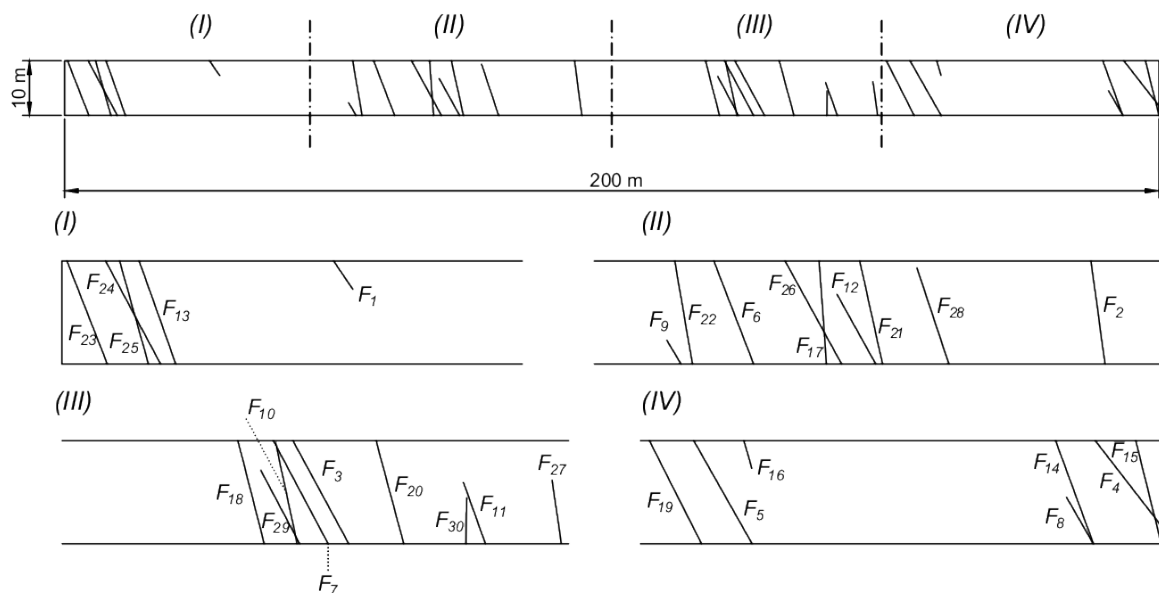
Tabela 8: Aberturas das fraturas da seção j189.

Fratura	Abertura [m]	Fratura	Abertura [m]	Fratura	Abertura [m]	Fratura	Abertura [m]	Fratura	Abertura [m]
F1	2.00E-06	F7	2.00E-06	F13	8.00E-05	F19	1.70E-05	F25	1.28E-04
F2	6.40E-05	F8	1.19E-04	F14	2.16E-04	F20	1.99E-04	F26	8.80E-05
F3	6.00E-06	F9	4.50E-05	F15	2.00E-06	F21	5.30E-04	F27	6.00E-05
F4	4.00E-06	F10	9.30E-05	F16	1.55E-07	F22	4.09E-04	F28	7.00E-06
F5	4.60E-05	F11	9.14E-04	F17	2.00E-05	F23	7.80E-05	F29	1.51E-04
F6	6.00E-05	F12	4.69E-04	F18	7.02E-04	F24	2.00E-06	F30	2.70E-05

Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura 8 ilustra a disposição das 30 fraturas referentes à seção j189, com suas respectivas identificações.

Figura 8: Identificações das fraturas da seção j189.



Fonte: elaborado pelo autor.

Três planejamentos baseados no planejamento do tipo Box-Behnken foram delineados para realização das simulações, para construção dos metamodelos e para as análises de sensibilidade, com número de fatores por combinação  $k$  e número de corridas  $N$ , conforme Tabela 9:

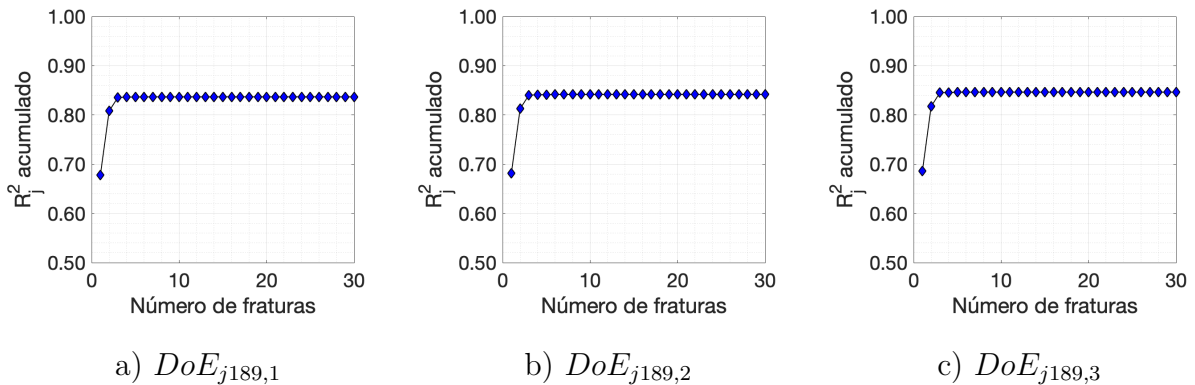
Tabela 9: Planejamentos empregados nas análises da seção j189.

Planejamento	$n$	$k$	$N$
$DoE_{j189,1}$	30	1	60
$DoE_{j189,2}$	30	2	1740
$DoE_{j189,3}$	30	3	32480

Fonte: elaborado pelo autor.

Ademais, os fatores foram considerados em dois níveis: inferior e superior, definidos pelo valor da abertura das fratura multiplicado 0.5 e 1.5 respectivamente. Observa-se nesse caso que ao adotar o tipo de planejamento proposto, alternativamente ao planejamento do tipo Fatorial Completo, o número de corridas é reduzido de  $2^{30} = 1.073.741.824$  para 32.480 corridas, diminuindo significativamente o tempo necessário para processamento das simulações.

A sensibilidade das fraturas pode ser verificada, para cada planejamento adotado, a partir das regressões lineares simples, que considera individualmente cada uma das fraturas contidas na seção j189. O coeficiente de determinação individual das fraturas  $R_j^2$  e seu seu valor acumulado são apresentados pela Figura 9, considerando a ordem decrescente da influência das fraturas sobre a variabilidade de  $\mathbf{k}_{eq}$ .

Figura 9:  $R_j^2$  acumulado referente às fraturas da seção j189.

Fonte: elaborado pelo autor.

Os valores de  $R_j^2$  em ordem decrescente, com as respectivas fraturas identificadas, referentes aos três planejamentos adotados são apresentados pela Tabela 10.

Tabela 10: Classificação das fraturas da seção j189 por ordem decrescente de influência sobre  $\mathbf{k}_{eq}$  a partir dos valores de  $R_j^2$ .

$DoE_{j189,1}$			$DoE_{j189,2}$			$DoE_{j189,3}$		
Fratura	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado	Fratura	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado	Fratura	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado
F18	0.678115	0.678115	F18	0.681962	0.681962	F18	0.685852	0.685852
F21	0.129995	0.808110	F21	0.130718	0.812679	F21	0.131449	0.817301
F22	0.027569	0.835679	F22	0.027725	0.840405	F22	0.027883	0.845184
F14	0.000557	0.836236	F14	0.000561	0.840965	F14	0.000564	0.845748
F20	0.000437	0.836673	F20	0.000439	0.841405	F20	0.000442	0.846190
F12	0.000137	0.836811	F12	0.000137	0.841541	F12	0.000136	0.846326
F25	0.000024	0.836835	F25	0.000024	0.841565	F25	0.000024	0.846350
F29	0.000015	0.836849	F29	0.000015	0.841580	F29	0.000015	0.846365
F26	0.000004	0.836854	F26	0.000004	0.841584	F26	0.000004	0.846369
F10	0.000004	0.836858	F10	0.000004	0.841588	F10	0.000004	0.846373
F13	0.000002	0.836859	F13	0.000002	0.841590	F13	0.000002	0.846375
F23	0.000001	0.836860	F23	0.000001	0.841591	F23	0.000001	0.846376
F8	0.000001	0.836861	F8	0.000001	0.841592	F8	0.000001	0.846376
F2	0.000000	0.836862	F2	0.000000	0.841592	F2	0.000000	0.846377
F6	0.000000	0.836862	F6	0.000000	0.841592	F6	0.000000	0.846377
F11	0.000000	0.836862	F11	0.000000	0.841593	F11	0.000000	0.846377
F5	0.000000	0.836862	F5	0.000000	0.841593	F5	0.000000	0.846378
F9	0.000000	0.836862	F7	0.000000	0.841593	F7	0.000000	0.846378
F7	0.000000	0.836862	F9	0.000000	0.841593	F9	0.000000	0.846378
F17	0.000000	0.836862	F24	0.000000	0.841593	F24	0.000000	0.846378
F24	0.000000	0.836862	F17	0.000000	0.841593	F17	0.000000	0.846378
F27	0.000000	0.836862	F27	0.000000	0.841593	F27	0.000000	0.846378
F19	0.000000	0.836862	F19	0.000000	0.841593	F19	0.000000	0.846378
F3	0.000000	0.836862	F3	0.000000	0.841593	F3	0.000000	0.846378
F28	0.000000	0.836862	F28	0.000000	0.841593	F28	0.000000	0.846378
F30	0.000000	0.836862	F30	0.000000	0.841593	F30	0.000000	0.846378
F4	0.000000	0.836862	F4	0.000000	0.841593	F4	0.000000	0.846378
F15	0.000000	0.836862	F15	0.000000	0.841593	F15	0.000000	0.846378
F1	0.000000	0.836862	F1	0.000000	0.841593	F16	0.000000	0.846378
F16	0.000000	0.836862	F16	0.000000	0.841593	F1	0.000000	0.846378

Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se que a fratura  $F18$  é capaz de explicar aproximadamente 68% da variabilidade de  $\mathbf{k}_{eq}$ . Ao adicionar a fratura  $F21$  ao metamodelo linear, as duas fraturas são capazes de explicar cerca de 81% da variabilidade de  $\mathbf{k}_{eq}$ . Assim, ao incluir novas fraturas, segundo a ordem de importância apresentada, a capacidade do modelo de explicar a variabilidade da variável resposta aumenta com incrementos cada vez menores, de modo que  $R_j^2$  acumulado tende a um valor constante. Quando isso acontece, significa que a fratura que pouco contribuiu para o aumento de  $R_j^2$  acumulado exerce pouca ou nenhuma influência sobre a determinação de  $\mathbf{k}_{eq}$ . No entanto, para saber se a contribuição da fratura pode ser desprezada, recorre-se aos testes de significância, considerando um nível de significância considerado adequado para o problema estudado.

Neste estudo os testes de significância adotados foram os testes do tipo F para validação do metamodelo obtido via MMQ e testes do tipo t-Student para avaliação individual da influência da fratura sobre  $\mathbf{k}_{eq}$ . Para a seção j189, seis níveis de significância

foram adotados, variando de  $0.01\% \leq \alpha \leq 10\%$ , a fim de demonstrar como o nível de significância  $\alpha$  pode influenciar a rejeição das hipóteses nulas.

Os resultados dos testes de significância do tipo F dos três planejamentos são dados pela Tabela 11.

Tabela 11: Resultados dos testes F da seção j189.

$DoE_{j189,1}$		$DoE_{j189,2}$		$DoE_{j189,3}$	
$F_0 = 4.9588$		$F_0 = 302.6551$		$F_0 = 5959.20000$	
$valor P = 0.00002$		$valor P = 0$		$valor P = 0$	
$\alpha$	<i>Estatística F</i>	$\alpha$	<i>Estatística F</i>	$\alpha$	<i>Estatística F</i>
0.1000	1.6155	0.1000	1.3467	0.1000	1.3421
0.0500	1.8543	0.0500	1.4658	0.0500	1.4595
0.0250	2.0923	0.0250	1.5747	0.0250	1.5664
0.0100	2.4118	0.0100	1.7078	0.0100	1.6970
0.0010	3.2671	0.0010	2.0086	0.0010	1.9911
0.0001	4.2324	0.0001	2.2807	0.0001	2.2558

Fonte: elaborado pelo autor.

Nesse caso, a hipótese nula foi rejeitada em todos os planejamentos adotados, pois  $valor P < \alpha$  para todos os valores de  $\alpha$ . Isso que significa que há pelo menos uma fratura dentre as 30 presentes na seção que exerce influência estatisticamente significativa sobre  $\mathbf{k}_{eq}$ .

O teste t-Student permite identificar quais as fraturas exercem efeitos estatisticamente significativos sobre  $\mathbf{k}_{eq}$ . Se o *valor P* da fratura for menor que o  $\alpha$  considerado, a hipótese nula pode ser rejeitada, o que significa que a fratura avaliada é tem importante influência sobre a variabilidade da resposta.

As fraturas selecionadas pelo teste t-Student são apresentadas pela Tabela 13 em função de  $\alpha$  e do planejamento de experimento adotado.

Os resultados dos testes de significância realizados evidenciaram que das 30 fraturas presentes na seção j189, no máximo 8 exercem influência significativa sobre  $\mathbf{k}_{eq}$ . A partir desse conjunto de fraturas selecionadas é que foram construídos os modelos de regressão quadráticos, identificados pela Tabela 13. A finalidade de se ajustar um metamodelo quadrático é reduzir a variabilidade da resposta estimada, de modo que seja possível representar de maneira simplificada, através de uma função polinomial, uma solução numérica bastante sofisticada. O metamodelo pode ser bastante útil no processo de quantificação de incertezas, pois permite seu acoplamento direto aos modelos probabilísticos como os métodos de confiabilidade, por exemplo.

Após a construção dos metamodelos quadráticos, foi possível comparar a variabilidade de  $\hat{\mathbf{k}}_{eq}$  proporcionada pelos diferentes planejamentos, níveis de significância e modelos de regressão considerados. A Tabela 14 apresenta as medidas de adequabilidade dos modelos.

Tabela 12: Resultados dos testes t-Student para as avaliações individuais das fraturas da seção j189.

$DoE_{j189,1}$			$DoE_{j189,2}$			$DoE_{j189,3}$		
Fratura	<i>Estadística t</i>	<i>valor P</i>	Fratura	<i>Estadística t</i>	<i>valor P</i>	Fratura	<i>Estadística t</i>	<i>valor P</i>
(intercepto)	-2.346935	0.025968	(intercepto)	-18.128680	0.000000	(intercepto)	-79.526327	0.000000
F18	10.979270	0.000000	F18	85.775574	0.000000	F18	380.617275	0.000000
F21	4.807122	0.000043	F21	37.553539	0.000000	F21	166.629266	0.000000
F22	2.213770	0.034865	F22	17.294992	0.000000	F22	76.743710	0.000000
F14	0.314686	0.755253	F14	2.459076	0.014028	F14	10.914448	0.000000
F20	0.278715	0.782441	F20	2.177450	0.029583	F20	9.662072	0.000000
F12	0.156182	0.876972	F12	1.213989	0.224920	F12	5.359485	0.000000
F25	0.065070	0.948565	F25	0.507845	0.611627	F25	2.251223	0.024378
F29	0.051401	0.959359	F29	0.401210	0.688316	F29	1.778717	0.075296
F26	0.027515	0.978237	F26	0.214880	0.829887	F26	0.953094	0.340549
F10	0.026902	0.978722	F10	0.210190	0.833544	F10	0.932781	0.350940
F13	0.016399	0.987028	F13	0.128116	0.898072	F13	0.568480	0.569713
F23	0.014958	0.988168	F23	0.116864	0.906982	F23	0.518584	0.604055
F08	0.010798	0.991459	F08	0.083722	0.933287	F08	0.368678	0.712370
F02	0.008942	0.992927	F02	0.069909	0.944275	F02	0.310442	0.756227
F06	0.007009	0.994456	F06	0.054783	0.956318	F06	0.243220	0.807836
F11	0.006009	0.995247	F11	0.046810	0.962670	F11	0.207115	0.835922
F05	0.004988	0.996055	F05	0.039016	0.968882	F05	0.173347	0.862379
F09	0.000625	0.999505	F07	0.004985	0.996023	F07	0.023294	0.981416
F07	0.000604	0.999522	F09	0.004869	0.996116	F09	0.021529	0.982824
F17	0.000506	0.999600	F24	0.004296	0.996573	F24	0.021471	0.982870
F24	0.000480	0.999620	F17	0.003948	0.996851	F17	0.017489	0.986047
F27	0.000335	0.999735	F27	0.002631	0.997901	F27	0.011720	0.990649
F19	0.000302	0.999761	F19	0.002364	0.998114	F19	0.010495	0.991627
F03	0.000024	0.999981	F03	0.000194	0.999846	F03	0.000870	0.999306
F28	0.000010	0.999992	F28	0.000080	0.999936	F28	0.000356	0.999716
F30	0.000002	0.999998	F30	0.000017	0.999986	F30	0.000079	0.999937
F04	0.000002	0.999999	F04	0.000012	0.999990	F04	0.000055	0.999956
F15	0.000000	1.000000	F15	0.000002	0.999998	F15	0.000011	0.999991
F01	0.000000	1.000000	F01	0.000001	0.999999	F16	0.000000	1.000000
F16	0.000000	1.000000	F16	0.000000	1.000000	F01	0.000004	0.999996

Fonte: elaborado pelo autor.

Pode-se notar que os metamodelos quadráticos reduziram significativamente a variabilidade de  $\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{eq}}$ , proporcionando um melhor ajuste às respostas das simulações, pois reduziram os valores de  $RMSE$  principalmente referentes ao  $DoE_{j189,3}$  onde o número de corridas foi maior. Além disso, proporcionou  $R^2 \approx 1$ , o que significa que foi capaz de representar aproximadamente 100% da variabilidade da resposta com um conjunto de 6 a 8 fraturas. Quanto ao  $R_{adj}^2$  é possível perceber que a medida que o número de corridas é incrementado no planejamento, mais seu valor se aproxima de  $R^2$ , o que demonstra que o planejamento foi suficiente para fornecer metamodelos que representassem satisfatoriamente as simulações realizadas. E por fim, os parâmetros  $E_m$  e  $COV_{E_m}$  (%) confirmam a redução da variabilidade de  $\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{eq}}$  proporcionada pelos metamodelos quadráticos, uma vez que  $E_m = 1$  representa um ajuste perfeito das  $\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{eq}}$  em relação  $\mathbf{k}_{\mathbf{eq}}$  quando  $COV_{E_m}$  (%) = 0.

A Figura 10 apresenta as respostas do simulador e estimadas pelo metamodelo *Quadrático7*, considerando  $\alpha = 0.05 = 5\%$ , e os resíduos dados pela diferença entre  $k_{eq,i} - \hat{k}_{eq,i}$ .



Tabela 13: Seleção das fraturas estatisticamente significativas da seção j189 para construção dos modelos de regressão quadráticos.

$DoE_{j189,1}$	Fratura	F18	F21	F22						Número de fraturas	Modelo
	$R_j^2$	0.67812	0.13000	0.02757							
	$\alpha = 0.0001$	✓	✓								
	$\alpha = 0.0010$	✓	✓								
	$\alpha = 0.0100$	✓	✓								
	$\alpha = 0.0250$	✓	✓								
$DoE_{j189,2}$	Fratura	F18	F21	F22	F14	F20				Número de fraturas	Modelo
	$R_j^2$	0.68196	0.13072	0.02773	0.00056	0.00044					
	$\alpha = 0.0001$	✓	✓	✓							
	$\alpha = 0.0010$	✓	✓	✓							
	$\alpha = 0.0100$	✓	✓	✓							
	$\alpha = 0.0250$	✓	✓	✓	✓						
$DoE_{j189,3}$	Fratura	F18	F21	F22	F14	F20	F12	F25	F29	Número de fraturas	Modelo
	$R_j^2$	0.68585	0.13145	0.02788	0.00056	0.00044	0.00014	0.00002	0.00001		
	$\alpha = 0.0001$	✓	✓	✓	✓	✓	✓				
	$\alpha = 0.0010$	✓	✓	✓	✓	✓	✓				
	$\alpha = 0.0100$	✓	✓	✓	✓	✓	✓				
	$\alpha = 0.0250$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			
	$\alpha = 0.0500$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			
	$\alpha = 0.1000$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		

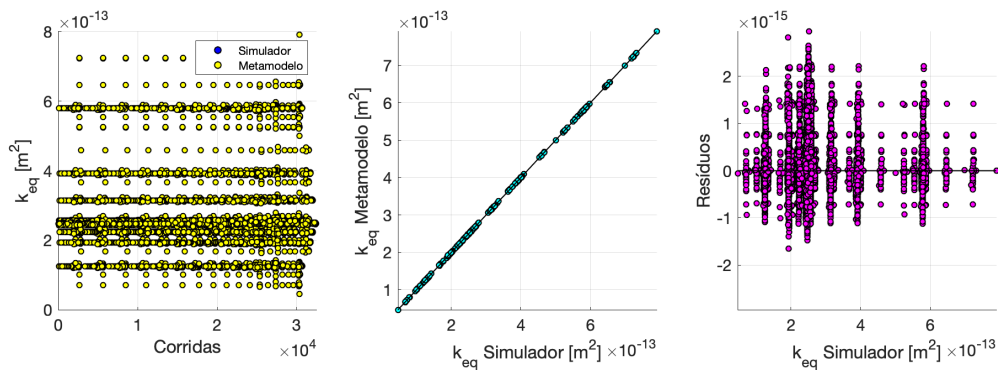
Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 14: Medidas de adequabilidade dos modelos de regressão lineares e quadráticos referentes à seção j189.

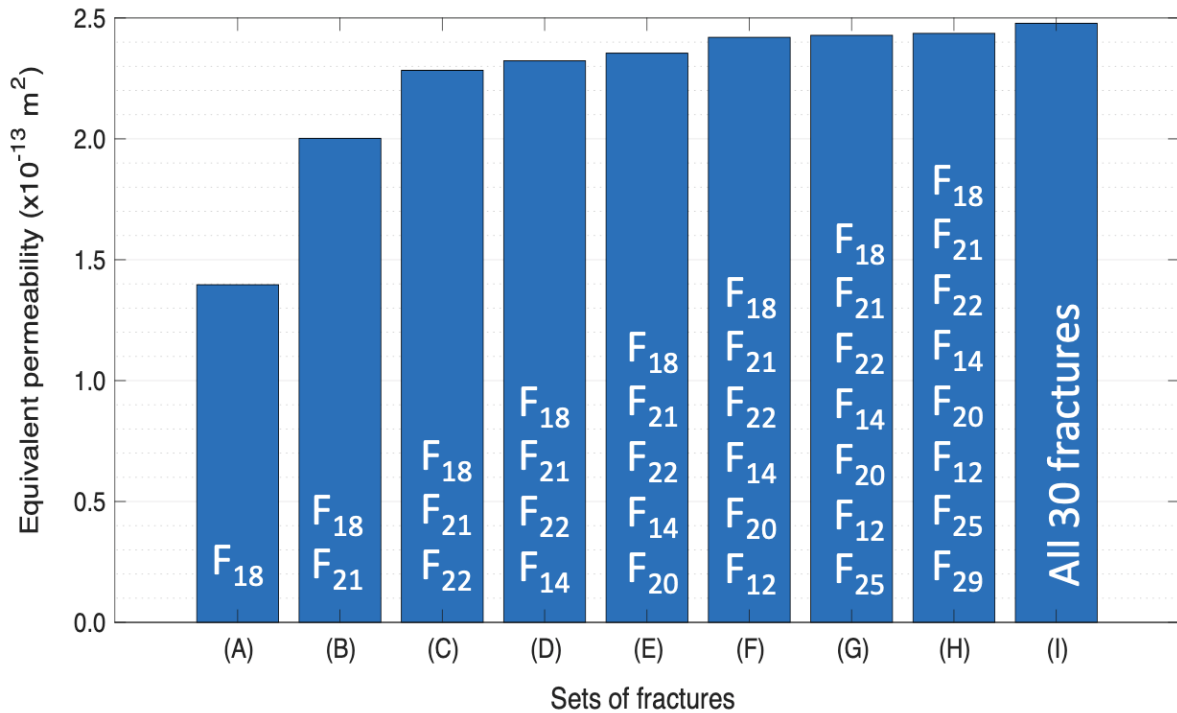
Planejamento	Modelo	$RMSE$	$R^2$	$R_{adj}^2$	$E_m$	$COV_{E_m} (\%)$
$DoE_{j189,1}$	Linear 1	2.885E-14	0.83686	0.66810	1.05307	45.69406
	Quadrático 1	5.091E-14	0.00125	-0.03380	1.00000	19.97676
	Quadrático 2	2.228E-14	0.81208	0.80201	1.00000	8.78469
$DoE_{j189,2}$	Linear 2	2.812E-14	0.84159	0.83881	1.06786	51.62510
	Quadrático 3	3.039E-14	0.81206	0.81174	1.00000	12.38747
	Quadrático 4	3.037E-14	0.81250	0.81207	1.00000	12.37264
	Quadrático 5	1.278E-14	0.96681	0.96672	1.00000	5.27433
$DoE_{j189,3}$	Linear 3	3.354E-14	0.84638	0.84624	1.04482	113.28074
	Quadrático 6	8.257E-16	0.99994	0.99994	1.00000	0.27993
	Quadrático 7	4.774E-16	0.99997	0.99997	1.00000	0.20557
	Quadrático 8	3.413E-16	0.99998	0.99998	1.00000	0.14482

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 10: Seção j189:  $k_{eq}$  versus  $\hat{k}_{eq}$  e resíduos.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 11: Seção j189:  $k_{eq}$  em função da quantidade de fraturas presentes na seção.

Fonte: elaborado pelo autor.

Os três gráficos apresentam um comparativo entre as repostas e evidenciam quão bem ajustado está o metamodelo. Dessa forma, o gráfico de  $k_{eq} \times Corridas$  mostra a sobreposição praticamente perfeita das respostas do simulador pelas respostas do metamodelo, enquanto que o gráfico  $k_{eq} \text{ Metamodelo} \times k_{eq} \text{ Simulador}$ , mostra que todos os pontos estão sobre sua bissetriz, o que significa que as estimativas são muito próximas ou iguais às respostas numéricas experimentais. Nota-se também que os resíduos fornecidos pelo metamodelo escolhido são da ordem de  $10^{-15}$  enquanto que a ordem de grandeza da variável resposta é de  $10^{-13}$ .

Os valores de  $k_{eq}$  aumentam à medida que se considera somente as fraturas mais importantes, conforme mostra a Figura 11 .

## 6 EXEMPLO NUMÉRICO: ESTABILIDADE DE TALUDES

O problema de estabilidade de taludes é tratado neste trabalho através do método de Bishop simplificado para cálculo do Fator de Segurança ( $FS$ ), sendo o  $FS$  a razão entre os esforços resistentes e os esforços solicitantes da cunha de ruptura do maciço avaliada, escrito na forma:

$$FS = \frac{\sum [c'b + (W - ub)tg\phi']}{\sum W \text{sen}\theta} \frac{1}{m_\theta} \quad (6.1)$$

$$m_\theta = \text{cos}\alpha + \frac{\text{sen}\theta tg\phi'}{FS} \quad (6.2)$$

onde  $c'$  é a coesão efetiva do solo presente na base da lamela;  $b$  é a largura da lamela, medida na direção horizontal;  $W$  é o peso da lamela;  $u$  a pressão neutra atuante na base da lamela;  $\phi'$  o ângulo de atrito do solo presente na base da lamela; e  $\theta$  é o ângulo de inclinação da base da lamela medido em relação à horizontal. Observa-se que o método é iterativo e que os valores de  $FS$  são calculados a partir de uma estimativa inicial presente na expressão de  $m_\theta$ . Maiores detalhes a respeito da formulação e de sua implementação computacional podem ser consultados em (GIACON JUNIOR, 2018).

O método é amplamente utilizado até os dias de hoje, tendo sua origem na década de 1950, sendo uma extensão do método ordinário de lamelas, também denominado método Sueco ou método de Fellenius. Estes métodos baseiam-se na Teoria de Equilíbrio Limite, que considera o solo tem comportamento rígido plástico, i.e. rompe sem deformar-se; as equações equilíbrio estático para cálculo de  $FS$  são válidas apenas até a iminência da ruptura do maciço, apesar de se tratar de um processo dinâmico; e que o  $FS$  é constante ao longo de toda a superfície de ruptura, ignorando-se assim eventuais fenômenos de ruptura progressiva (MASSAD, 2003).

As análises de sensibilidade foram aplicadas ao problema de estabilidade de taludes em dois casos distintos. O primeiro caso refere-se a um talude hipotético, composto por solo homogêneo, cujos parâmetros geotécnicos adotados nas análises são relativos ao solo de Bauru-SP. Os parâmetros foram obtidos via ensaios triaxiais por Fagundes (2014). O segundo caso, refere-se a um talude hipotético, composto por dois horizontes de solo, cujos parâmetros geotécnicos adotados são relativos ao solo de Campinas-SP, caracterizados por Albuquerque et al. (2011). Para realização das análises de sensibilidade, o mesmo procedimento foi adotado para ambos e será descrito a seguir.

Análises de probabilísticas também foram aplicadas ao problema de estabilidade de taludes, com o uso do programa *Risk Applied to Slope Stability* (RASS). O programa

foi implementado em Matlab e sua formulação detalhada e *benchmarks* para validação do código podem ser consultadas em (ASSIS; GIACON JUNIOR; NOGUEIRA, 2018) e (GIACON JUNIOR; ASSIS; NOGUEIRA, 2018). O programa realiza as análises probabilísticas com base na teoria da confiabilidade, e as probabilidades de falha são definidas via acoplamento direto dos método de equilíbrio limite ao *First-Order Reliability Method* (FORM), onde o modo de falha verificado é a ruptura por cisalhamento do maciço, o qual é representado pela equação de estado limite  $G(\mathbf{X})$  escrita na forma:

$$G(\mathbf{X}) = FS(\mathbf{X}) - 1,00, \quad (6.3)$$

sendo  $\mathbf{X}$  o conjunto de variáveis aleatórias independentes do problema. Maiores detalhes a respeito da formulação do FORM e de outros métodos de confiabilidade podem ser consultados em (NOGUEIRA, 2010).

### 6.1 Procedimento para realização das análises de sensibilidade

As análises de sensibilidade foram realizadas para três situações distintas para cada um dos taludes. Essas situações foram definidas a partir da identificação de três superfícies críticas, sendo elas a de menor fator de segurança mínimo ( $FS_{mín.}$ ), a de máxima probabilidade de falha ( $Pf_{máx.}$ ) e a de risco máximo ( $Risco_{máx.}$ ), obtidas por meio das análises determinísticas e de confiabilidade. A quantificação do risco é realizada de forma simplificada neste trabalho, conforme Zhang e Huang (2016), em que o risco ( $Risco$ ) é o produto dado por:

$$Risco = Pf \cdot C, \quad (6.4)$$

onde  $C$  corresponde ao volume ou ao peso de solo da cunha de ruptura com probabilidade de falha  $Pf$ , considerando uma faixa de 1m de talude. Assim, quanto maior for a cunha de ruptura, maiores são as consequências provocadas por sua ruptura.

Dessa forma, as análises de estabilidade permitem identificar superfícies críticas segundo critérios distintos, uma vez que as superfícies com  $FS_{mín.}$  e  $Pf_{máx.}$  não são as que oferecem necessariamente o maior risco ao talude.

Em seguida, três planejamentos fatoriais completos foram construídos para cada uma das superfícies críticas identificadas, resultando em nove planejamentos para cada talude estudado. Foram adotados planejamentos fatoriais completos do tipo  $2^k$ ,  $3^k$  e  $5^k$ , em que os níveis inferiores e superiores foram definidos com base nos coeficientes de variação ( $CV$ ) das variáveis explicativas e também do ponto central do planejamento. Para a superfície de  $FS_{mín.}$ , resultado da análise determinística, o ponto central é a própria média ( $\mu$ ) da variável. Para as superfícies de  $Pf_{máx.}$  e  $Risco_{máx.}$ , o ponto central é o valor da

variável no ponto de projeto ( $x^*$ ). No caso do planejamento fatorial completo  $2^k$ , o ponto central da variável é utilizado exclusivamente para definição do nível inferior e superior. A Tabela 15 apresenta os níveis empregados nos planejamentos, onde o desvio-padrão da variável ( $\sigma$ ) é dado pela multiplicação de seu valor no ponto central por seu respectivo *CV*.

Tabela 15: Níveis inferiores, superiores e ponto central dos planejamentos fatoriais completos.

Planejamento	Níveis inferiores		Ponto central	Níveis superiores	
	(-2)	(-1)	(0)	(+1)	(+2)
Fatorial completo $2^k$	$-2\sigma$	-	-	-	$2\sigma$
Fatorial completo $3^k$	$-2\sigma$	-	$\mu$ ou $x^*$	-	$2\sigma$
Fatorial completo $5^k$	$-2\sigma$	$-\sigma$	$\mu$ ou $x^*$	$\sigma$	$2\sigma$

$\mu$ : para planejamentos que consideram a superfície de  $FS_{\min}$ .  
 $x^*$ : para planejamentos que consideram as superfícies de  $Pf_{\max}$  e  $Risco_{\max}$ .

Fonte: elaborado pelo autor.

Esse critério foi considerado com base na probabilidade uma variável com distribuição normal assumir um valor que esteja compreendido nos intervalos definidos pelos múltiplos dos desvios-padrões, sendo essas probabilidades de aproximadamente:

- 68% entre  $-\sigma$  e  $\sigma$ ;
- 95% entre  $-2\sigma$  e  $2\sigma$ .

Definidos os planejamentos, obtém-se o vetor variável resposta ( $\mathbf{y}$ ), que nesse caso refere-se aos valores de *FS* de cada corrida do experimento, calculados com o uso do programa RASS, considerando apenas a superfície crítica de referência do planejamento. Analogamente às análises de sensibilidade aplicadas ao problema de fluxo em meios porosos, a sequência de técnicas estatísticas são aplicadas para avaliação da sensibilidade dos parâmetros  $c'$ ,  $\phi'$  e  $\gamma$  sobre a variabilidade do *FS*, considerando-se metamodelos polinomiais lineares e quadráticos, com e sem fatores de interação, para cálculo das respostas estimadas ( $\hat{\mathbf{y}}$ ). A sensibilidade da variável é expressa pelo coeficiente de determinação das regressões simples ( $R_j^2$ ), que podem ser comparados aos fatores de sensibilidade obtidos via análises de confiabilidade, expressos pelos quadrados dos cossenos diretores ( $\alpha_j^2$ ) que definem o ponto de projeto, onde  $j$  representa as variáveis explicativas do problema, com  $j = 1, 2, 3$ . Em seguida, aplica-se os teste de significância do tipo F e do tipo t-Student para verificação da significância dos metamodelos e dos parâmetros  $c'$ ,  $\phi'$  e  $\gamma$  individualmente. As medidas de adequabilidade  $RMSE$ ,  $R^2$ ,  $R_{adj}^2$ ,  $E_m$  e  $COV_{E_m}$  dos metamodelos gerados por cada planejamento são avaliadas na sequência. Por fim, novas análises de confiabilidade são realizadas considerando os mesmos parâmetros de entrada da análises de confiabilidade inicial, com duas exceções: os índices de confiabilidade ( $\beta$ ) são calculados apenas para as três superfícies críticas identificadas na primeira análise; e para cada superfície crítica, o  $\beta$

é calculado de duas formas, sendo a primeira por acoplamento direto do método de Bishop simplificado o FORM e, na segunda, pelo acoplamento direto do metamodelo ao FORM. Assim, os valores de  $\beta$  fornecidos pelos diferentes métodos e pelos diferentes metamodelos são comparados, bem como o histórico de convergência do  $\beta$  obtido pelo acoplamento do metamodelo ao FORM, a medida em que o número de corridas exigidas pelo planejamento fatorial completo aumenta em função do aumento do número de níveis.

## 6.2 Exemplo 1: talude em Bauru-SP

Definida a geometria do talude, as análises determinística e probabilística foram processadas com uso do programa RASS. As superfícies críticas identificadas por investigação são apresentadas pela Tabela 16.

Tabela 16: Superfícies críticas segundo os critérios de  $FS_{\min.}$ ,  $Pf_{\max.}$  e  $Risco_{\max.}$ .

Critério	Método de análise	Superfície crítica			$FS$	$\beta$	$Pf$	$Risco_{Vol.} [m^3/m]$	$Risco_{Peso} [kN/m]$
		$x_c [m]$	$y_c [m]$	$R [m]$					
$FS_{\min.}$	A	-1.20	9.40	9.40	1.35364	2.02395	0.02149	0.38113	6.18269
$Pf_{\max.}$	B	-1.80	9.60	9.63	1.36763	1.95979	0.02501	0.36498	5.92176
$Risco_{\max.}$	B	-1.60	9.80	9.82	1.35664	1.98119	0.02378	0.39101	6.34299

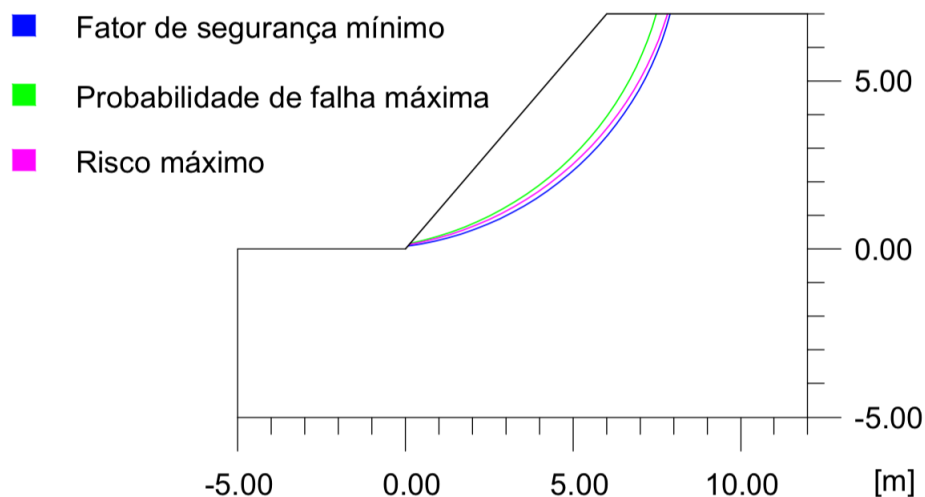
Método de análise A:  $FS$  definido via método de Bishop simplificado

Método de análise B:  $Pf$  e  $Risco$  definidos via Método de Bishop Simplificado diretamente acoplado ao FORM

Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se que neste caso as superfícies críticas não são coincidentes, que os valores de  $FS$  das superfícies críticas probabilísticas não são os mínimos obtidos na análise e que a superfície de  $Pf_{\max.}$  não é a mesma que oferece  $Risco_{\max.}$ . A superfícies críticas são ilustradas pela Figura 12.

Figura 12: Talude de Bauru-SP: superfícies de críticas definidas pelos diferentes critérios adotados.



Fonte: elaborado pelo autor.

A partir desses resultados, foram definidos os valores de referência para construção dos planejamentos fatoriais completos. A Tabela 17 apresenta os valores dos parâmetros geotécnicos considerados.

Tabela 17: Parâmetros geotécnicos do solo de Bauru-SP, referentes aos pontos centrais dos planejamentos fatoriais completos  $2^k$ .

Critério	$c'$ [kPa]	$\phi'$ [°]	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	Planejamento
$FS_{mín.}$	10.00	28.00	16.00	$DoE_{Bauru,FS}$
$Pf_{máx.}$	5.86	24.88	16.22	$DoE_{Bauru,Pf}$
$Risco_{máx.}$	5.90	25.07	16.22	$DoE_{Bauru,R}$

Fonte: elaborado pelo autor.

Para a superfície de  $FS_{mín.}$  os valores são as médias dos parâmetros ( $\mu$ ), e para as superfícies de  $Pf_{máx.}$  e de  $Risco_{máx.}$ , os valores referem-se às coordenadas do ponto de projeto ( $\mathbf{x}^*$ ) no espaço físico, em que os coeficientes de variação de  $c'$ ,  $\phi'$  e  $\gamma$  equivalem a 30%, 10% e 5%, respectivamente. Esses valores foram levantados da literatura e definidos por Phoon e Kulhawy (1999).

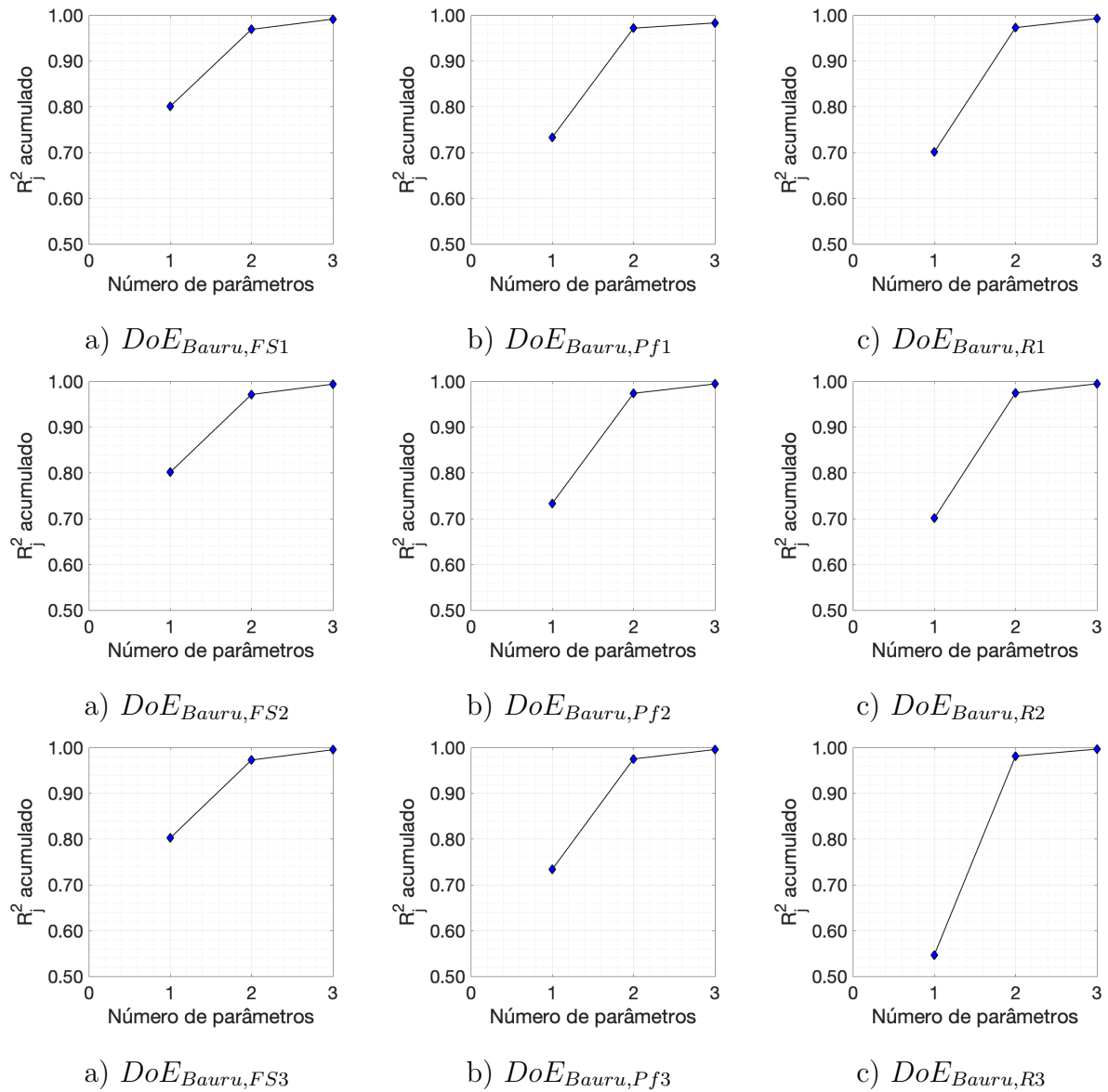
Os nove planejamentos construídos para analisar as sensibilidades de  $c'$ ,  $\phi'$  e  $\gamma$  sobre a variável respostas  $FS$ , exigem números de corridas distintos, em função do número de níveis considerados, conforme apresenta a Tabela 18

Tabela 18: Planejamentos empregados nas análises de sensibilidade dos parâmetros do solo de Bauru-SP.

Planejamento	Tipo	k	N
$DoE_{Bauru,FS1}$	Fatorial Completo $2^k$	3	8
$DoE_{Bauru,Pf1}$	Fatorial Completo $2^k$	3	8
$DoE_{Bauru,R1}$	Fatorial Completo $2^k$	3	8
$DoE_{Bauru,FS2}$	Fatorial Completo $3^k$	3	27
$DoE_{Bauru,Pf2}$	Fatorial Completo $3^k$	3	27
$DoE_{Bauru,R2}$	Fatorial Completo $3^k$	3	27
$DoE_{Bauru,FS3}$	Fatorial Completo $5^k$	3	125
$DoE_{Bauru,Pf3}$	Fatorial Completo $5^k$	3	125
$DoE_{Bauru,R3}$	Fatorial Completo $5^k$	3	125

Fonte: elaborado pelo autor.

A sensibilidade dos parâmetros, expressa por  $\alpha_j^2$  quando se trata de análise de confiabilidade, e por  $R_j^2$ , quando a análise é realizada por regressão linear simples, é apresentada pela Tabela 19 e ilustrada pela Figura 13.

Figura 13:  $R_j^2$  acumulado referente aos parâmetros geotécnicos do solo de Bauru-SP.

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 19: Classificação dos parâmetros do solo de Bauru-SP por ordem decrescente de influência a partir dos valores de  $\alpha_j^2$  e  $R_j^2$ .

Superfície de $FS_{\min.}$			Superfície de $Pf_{\max.}$			Superfície de $Risco_{\max.}$		
Parâmetro	$\alpha_j^2$	$\alpha_j^2$ acumulado	Parâmetro	$\alpha_j^2$	$\alpha_j^2$ acumulado	Parâmetro	$\alpha_j^2$	$\alpha_j^2$ acumulado
$c'$	0.667601	0.667601	$c'$	0.72909	0.72909	$c'$	0.695534	0.695534
$\phi$	0.313561	0.981162	$\phi$	0.250343	0.979433	$\phi$	0.284839	0.980373
$\gamma$	0.018838	1.000000	$\gamma$	0.020567	1.000000	$\gamma$	0.019627	1.000000
$DoE_{Bauru,FS1}$			$DoE_{Bauru,Pf1}$			$DoE_{Bauru,R1}$		
Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado	Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado	Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado
$c'$	0.801022	0.801022	$c'$	0.733424	0.733424	$c'$	0.701231	0.701231
$\phi'$	0.168377	0.969398	$\phi'$	0.238656	0.972080	$\phi'$	0.272082	0.973313
$\gamma$	0.022412	0.991810	$\gamma$	0.011425	0.983504	$\gamma$	0.019576	0.992889
$DoE_{Bauru,FS2}$			$DoE_{Bauru,Pf2}$			$DoE_{Bauru,R2}$		
Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado	Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado	Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado
$c'$	0.801801	0.801801	$c'$	0.733629	0.733629	$c'$	0.701185	0.701185
$\phi'$	0.169903	0.971704	$\phi'$	0.240557	0.974187	$\phi'$	0.274128	0.975313
$\gamma$	0.022534	0.994238	$\gamma$	0.020587	0.994773	$\gamma$	0.019673	0.994986
$DoE_{Bauru,FS3}$			$DoE_{Bauru,Pf3}$			$DoE_{Bauru,R3}$		
Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado	Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado	Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado
$c'$	0.802600	0.802600	$c'$	0.734088	0.734088	$c'$	0.700989	0.700989
$\phi'$	0.170459	0.973059	$\phi'$	0.241333	0.975421	$\phi'$	0.261194	0.962183



Os resultados evidenciam a predominante influência exercida pela coesão sobre a variabilidade do fator de segurança do talude, bem como a pouca variabilidade dos valores de  $R^j$  quando diferentes planejamentos foram adotados para analisar uma mesma superfície crítica. Embora os valores de  $R^j$  sejam diferentes entre as três superfícies críticas avaliadas, a ordenação das variáveis mais influentes é idêntica para todos os casos mostrados. Além disso, o conjunto de variáveis explicativas  $c'$ ,  $\phi'$  e  $\gamma$  foi capaz de explicar praticamente cem por cento da variabilidade do  $FS$  quando a geometria do talude e da superfície de ruptura foram fixadas.

O teste é aplicado aos planejamentos e seus resultados evidenciam que há nos metamodelos lineares ao menos uma variável dentre as variáveis  $c'$ ,  $\phi'$  e  $\gamma$  capaz de explicar a variabilidade de  $\mathbf{FS}$ , o que é totalmente coerente ao que já é conhecido sobre o problema de estabilidade de taludes. A Tabela 20 apresenta os resultados para os diferentes níveis de significância adotados.

Tabela 20: Resultados dos testes F referentes ao talude de Bauru-SP.

$DoE_{Bauru,FS1}$		$DoE_{Bauru,Pf1}$		$DoE_{Bauru,R1}$	
$F_0 = 161.4734$		$F_0 = 194.4142$		$F_0 = 186.1661$	
valor $P = 0.00013$		valor $P = 0.00009$		valor $P = 0.00009$	
$\alpha$	<i>Estatística F</i>	$\alpha$	<i>Estatística F</i>	$\alpha$	<i>Estatística F</i>
0.1000	1.533206	0.1000	4.190860	0.1000	4.190860
0.0500	2.131847	0.0500	6.591382	0.0500	6.591382
0.0250	2.776445	0.0250	9.979199	0.0250	9.979199
0.0100	3.746947	0.0100	16.694369	0.0100	16.694369
0.0010	7.173182	0.0010	56.177188	0.0010	56.177188
0.0001	13.033672	0.0001	181.017917	0.0001	181.017917
$DoE_{Bauru,FS2}$		$DoE_{Bauru,Pf2}$		$DoE_{Bauru,R2}$	
$F_0 = 1322.9292$		$F_0 = 1459.1599$		$F_0 = 1521.4473$	
valor $P = 0.00000$		valor $P = 0.00000$		valor $P = 0.00000$	
$\alpha$	<i>Estatística F</i>	$\alpha$	<i>Estatística F</i>	$\alpha$	<i>Estatística F</i>
0.1000	2.338727	0.1000	2.338727	0.1000	2.338727
0.0500	3.027998	0.0500	3.027998	0.0500	3.027998
0.0250	3.750486	0.0250	3.750486	0.0250	3.750486
0.0100	4.764877	0.0100	4.764877	0.0100	4.764877
0.0010	7.668829	0.0010	7.668829	0.0010	7.668829
0.0001	11.189405	0.0001	11.189405	0.0001	11.189405
$DoE_{Bauru,FS3}$		$DoE_{Bauru,Pf3}$		$DoE_{Bauru,R3}$	
$F_0 = 9120.2011$		$F_0 = 10067.0677$		$F_0 = 10139.2285$	
valor $P = 0.00000$		valor $P = 0.00000$		valor $P = 0.00000$	
$\alpha$	<i>Estatística F</i>	$\alpha$	<i>Estatística F</i>	$\alpha$	<i>Estatística F</i>
0.1000	2.129605	0.1000	2.129605	0.1000	2.131191881
0.0500	2.679535	0.0500	2.679535	0.0500	2.682131712
0.0250	3.225955	0.0250	3.225955	0.0250	3.229793246
0.0100	3.947678	0.0100	3.947678	0.0100	3.953514208
0.0010	5.778277	0.0010	5.778277	0.0010	5.790971178
0.0001	7.652962	0.0001	7.652962	0.0001	7.675257668

Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se que em que para o nível de significância de 0.0001, a hipótese nula  $DoE_{Bauru,FS1}$  não pôde ser rejeitada, que significa que nenhuma das variáveis  $c'$ ,  $\phi'$  e  $\gamma$  foi

capaz de explicar a variabilidade da resposta. No entanto, a medida em que o número de níveis do planejamento é incrementado para 3 e 5, para todos os níveis de significância a hipótese nula pôde ser rejeitada, confirmando a importância a capacidade de  $c'$ ,  $\phi'$  e  $\gamma$  de explicar a variabilidade do **FS**.

Os testes t-Student para verificação da significância de  $c'$ ,  $\phi'$  e  $\gamma$  individualmente foram aplicados em seguida. Os resultados são apresentados pela Tabela 21.

Tabela 21: Resultados dos testes t-Student referentes ao talude de Bauru-SP.

$DoE_{Bauru,FS1}$			$DoE_{Bauru,Pf1}$			$DoE_{Bauru,R1}$		
Parâmetro	<i>Estatística t</i>	<i>valor P</i>	Parâmetro	<i>Estatística t</i>	<i>valor P</i>	Parâmetro	<i>Estatística t</i>	<i>valor P</i>
(intercepto)	2.342045	0.079201	(intercepto)	2.490348	0.067459	(intercepto)	2.286667	0.084166
$c'$	19.779663	0.000039	$c'$	20.845109	0.000031	$c'$	19.860548	0.000038
$\phi'$	9.068546	0.000820	$\phi'$	11.933905	0.000282	$\phi'$	12.371170	0.000245
$\gamma$	-3.308551	0.029695	$\gamma$	-3.520790	0.024433	$\gamma$	-3.318317	0.029425
$DoE_{Bauru,FS2}$			$DoE_{Bauru,Pf2}$			$DoE_{Bauru,R2}$		
Parâmetro	<i>Estatística t</i>	<i>valor P</i>	Parâmetro	<i>Estatística t</i>	<i>valor P</i>	Parâmetro	<i>Estatística t</i>	<i>valor P</i>
(intercepto)	6.669416	0.000001	(intercepto)	6.649812	0.000001	(intercepto)	6.502592	0.000001
$c'$	56.574018	0.000000	$c'$	56.818315	0.000000	$c'$	56.714849	0.000000
$\phi'$	26.042579	0.000000	$\phi'$	32.535645	0.000000	$\phi'$	35.461519	0.000000
$\gamma$	-9.484315	0.000000	$\gamma$	-9.517904	0.000000	$\gamma$	-9.499916	0.000000
$DoE_{Bauru,FS3}$			$DoE_{Bauru,Pf3}$			$DoE_{Bauru,R3}$		
Parâmetro	<i>Estatística t</i>	<i>valor P</i>	Parâmetro	<i>Estatística t</i>	<i>valor P</i>	Parâmetro	<i>Estatística t</i>	<i>valor P</i>
(intercepto)	17.461078	0.000000	(intercepto)	17.419885	0.000000	(intercepto)	15.91677412	0.000000
$c'$	148.515120	0.000000	$c'$	149.195026	0.000000	$c'$	147.3992343	0.000000
$\phi'$	68.443351	0.000000	$\phi'$	85.543842	0.000000	$\phi'$	89.91253625	0.000000
$\gamma$	-24.887151	0.000000	$\gamma$	-24.985965	0.000000	$\gamma$	-24.00726177	0.000000

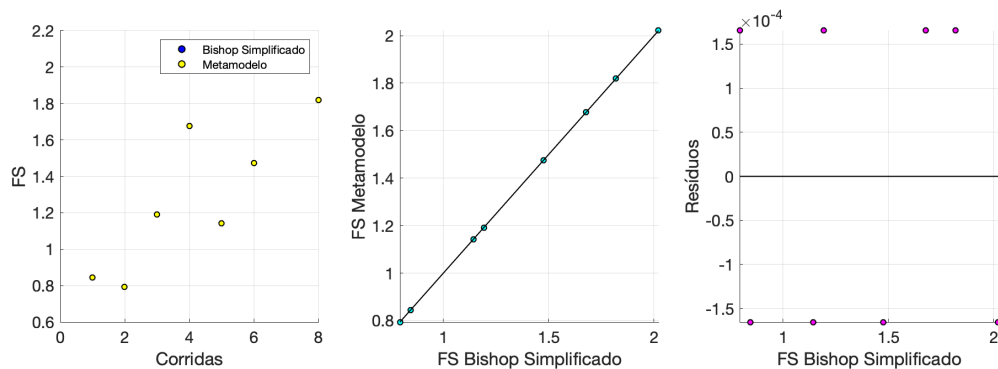
Fonte: elaborado pelo autor.

Nota-se que para os planejamentos  $DoE_{Bauru,FS1}$ ,  $DoE_{Bauru,Pf1}$  e  $DoE_{Bauru,R1}$ , em que as variáveis são definidas apenas em dois níveis, a rejeição da hipótese nula nem sempre foi possível. Isso significa que dependendo do nível de significância considerado, não se pode afirmar que a variável  $\gamma$  exerce algum efeito sobre o fator de segurança do talude. No entanto, a medida em que os planejamentos são refinados, a contribuição dessa variável para a explicação dos efeitos sobre o  $FS$  fica evidentemente confirmada. As medidas de adequabilidade dos metamodelos obtidos via MMQ são apresentadas pela Tabela 22.

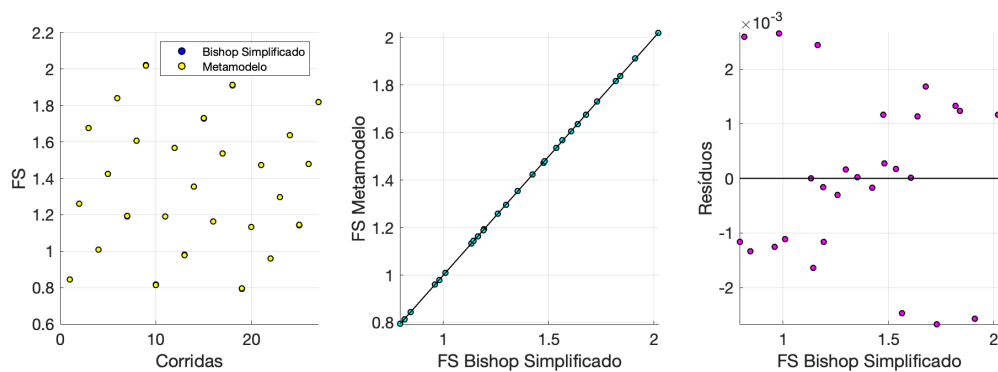
Os resultados mostram a maior capacidade dos metamodelos quadráticos com fatores de interação de estimar a variável resposta, em comparação aos demais metamodelos. No entanto, em todos os casos, valores relativamente baixos de  $RMSE$ , de  $E_m$  e de  $COV_{E_m}$  foram obtidos, bem como valores relativamente elevados de  $R^2$  e de  $R_{adj}^2$ . À medida em que os metamodelos são refinados, percebe-se uma maior adequabilidade, sendo que em todos os casos os metamodelos melhor ajustados são aqueles fornecidos pelas regressões que tomam por referência os planejamentos referentes às superfícies críticas probabilísticas. As Figuras 14, 15 e 16 apresentam um comparativo entre **FS** e  $\widehat{FS}$  para os diferentes planejamentos e metamodelos adotados.

Por último, com o objetivo de verificar a capacidade dos metamodelos de estimar

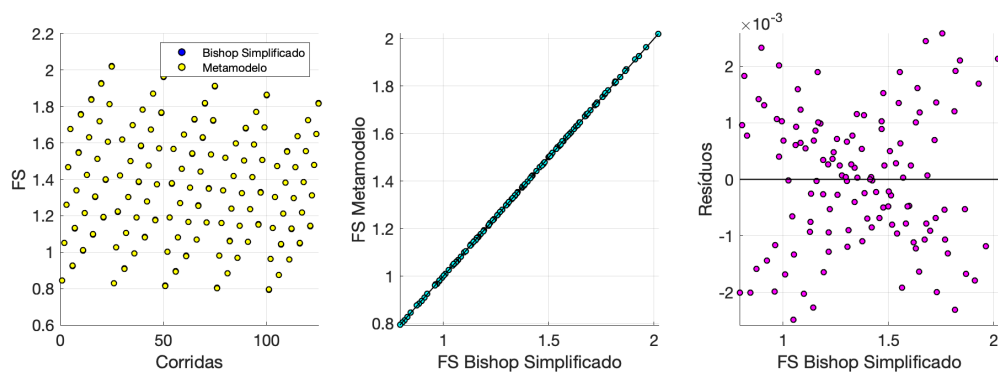
Figura 14: Talude de Bauru: **FS** versus  $\widehat{\text{FS}}$  e resíduos referentes à superfície crítica de  $FS_{min}$  e metamodelos quadráticos com fatores de interação.



a) metamodelo quadrático FS1<sup>b</sup>



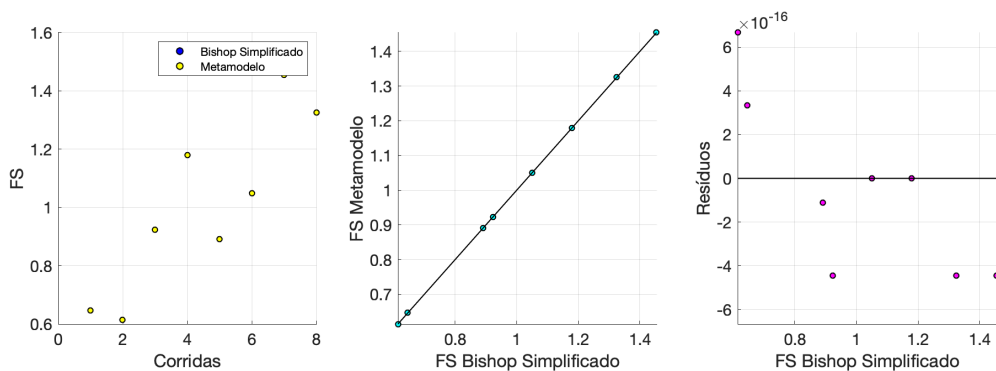
b) metamodelo quadrático FS2<sup>b</sup>



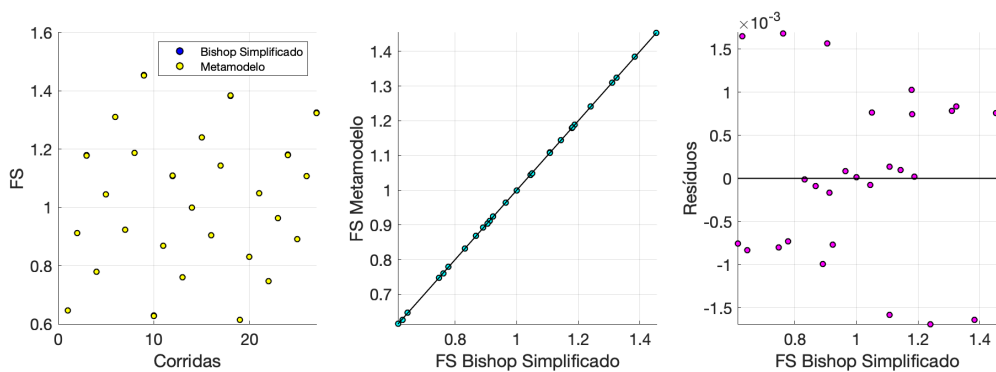
c) metamodelo quadrático FS3<sup>b</sup>

Fonte: elaborado pelo autor.

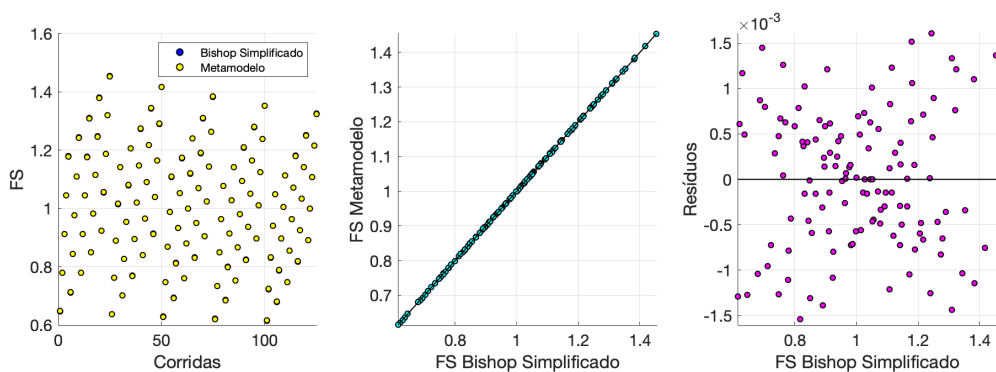
Figura 15: Talude de Bauru: **FS** versus  $\widehat{\text{FS}}$  e resíduos referentes à superfície crítica de  $Pf_{máx}$  e metamodelos quadráticos com fatores de interação.



a) metamodelo quadrático  $Pf1^b$



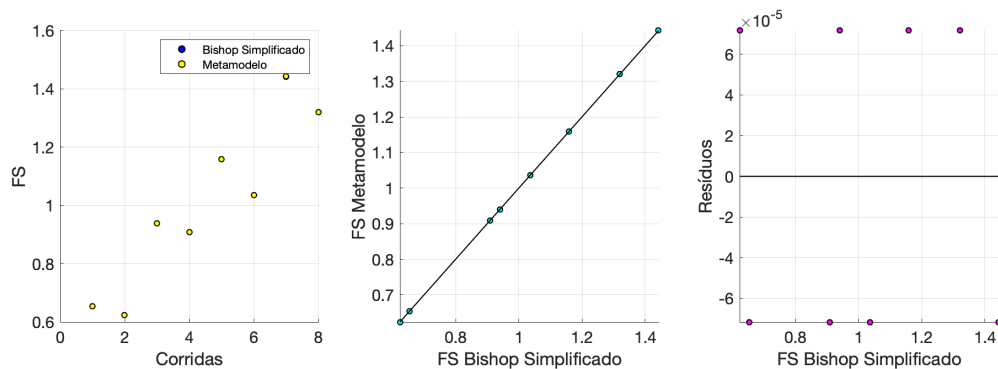
b) metamodelo quadrático  $Pf2^b$



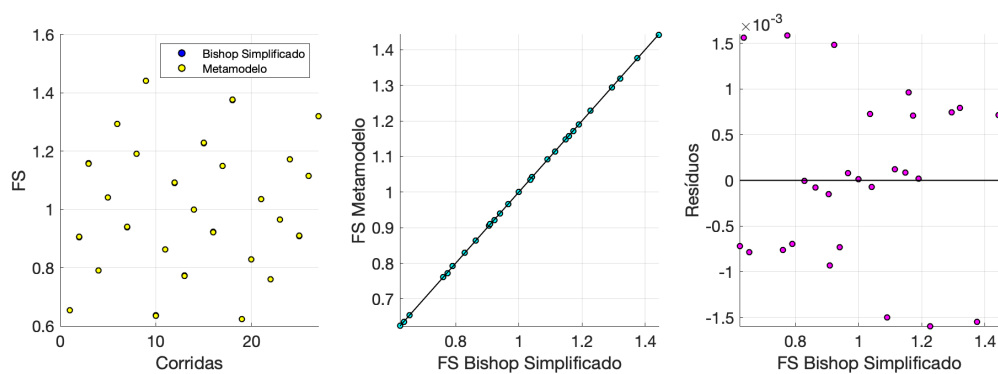
c) metamodelo quadrático  $Pf3^b$

Fonte: elaborado pelo autor.

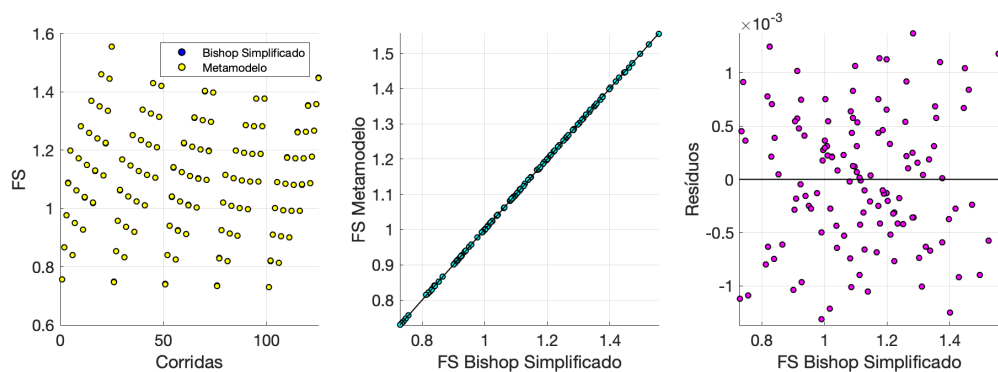
Figura 16: Talude de Bauru:  $FS$  versus  $\widehat{FS}$  e resíduos referentes à superfície crítica de  $Risco_{máx}$ . e metamodelos quadráticos com fatores de interação.



a) metamodelo quadrático  $R1^b$



b) metamodelo quadrático  $R3^b$



c) metamodelo quadrático  $R3^b$

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 22: Medidas de adequabilidade dos modelos de regressão lineares e quadráticos referentes ao talude de Bauru-SP.

Planejamento	Metamodelo	$RMSE$	$R^2$	$R_{adj}^2$	$E_m$	$COV_{E_m}$ [%]
$DoE_{Bauru,FS1}$	Linear FS1	5.3988E-02	0.99181	0.98567	1.00088	3.48619
	Quadrático FS1 <sup>a</sup>	5.3988E-02	0.99181	0.98567	1.00088	3.48619
	Quadrático FS1 <sup>b</sup>	2.3391E-04	1.00000	1.00000	1.00000	0.01509
$DoE_{Bauru,Pf1}$	Linear Pf1	3.2936E-02	0.99319	0.98808	1.00040	2.76158
	Quadrático Pf1 <sup>a</sup>	2.9979E-02	0.99436	0.99012	0.99981	2.34748
	Quadrático Pf1 <sup>b</sup>	0.0000E+00	1.00000	1.00000	1.00000	0.00000
$DoE_{Bauru,R1}$	Linear R1	3.2579E-02	0.99289	0.98756	1.00047	2.75345
	Quadrático R1 <sup>a</sup>	3.2579E-02	0.99289	0.98756	1.00047	2.75345
	Quadrático R1 <sup>b</sup>	1.0127E-04	1.00000	1.00000	1.00000	0.00855
Planejamento	Metamodelo	$RMSE$	$R^2$	$R_{adj}^2$	$E_m$	$COV_{E_m}$ [%]
$DoE_{Bauru,FS2}$	Linear FS2	2.8213E-02	0.99424	0.99349	1.00043	2.24170
	Quadrático FS2 <sup>a</sup>	2.7618E-02	0.99448	0.99376	1.00037	2.18590
	Quadrático FS2 <sup>b</sup>	1.6155E-03	0.99998	0.99998	1.00000	0.12824
$DoE_{Bauru,Pf2}$	Linear Pf2	1.7982E-02	0.99477	0.99409	1.00028	1.88221
	Quadrático Pf2 <sup>a</sup>	1.7609E-02	0.99499	0.99433	1.00024	1.83872
	Quadrático Pf2 <sup>b</sup>	1.0257E-03	0.99998	0.99998	1.00000	0.10743
$DoE_{Bauru,R2}$	Linear R2	1.7053E-02	0.99499	0.99433	1.00024	1.76933
	Quadrático R2 <sup>a</sup>	1.6665E-02	0.99521	0.99459	1.00020	1.72571
	Quadrático R2 <sup>b</sup>	9.7002E-04	0.99998	0.99998	1.00000	0.10075
Planejamento	Metamodelo	$RMSE$	$R^2$	$R_{adj}^2$	$E_m$	$COV_{E_m}$ [%]
$DoE_{Bauru,FS3}$	Linear FS3	1.9991E-02	0.99560	0.99549	1.00024	1.62974
	Quadrático FS3 <sup>a</sup>	1.9406E-02	0.99585	0.99575	1.00020	1.57717
	Quadrático FS 3 <sup>b</sup>	1.1949E-03	0.99998	0.99998	1.00000	0.09690
$DoE_{Bauru,Pf3}$	Linear Pf3	1.2738E-02	0.99601	0.99591	1.00016	1.37310
	Quadrático Pf3 <sup>a</sup>	1.2372E-02	0.99624	0.99614	1.00013	1.33117
	Quadrático Pf3 <sup>b</sup>	7.5692E-04	0.99999	0.99999	1.00000	0.08129
$DoE_{Bauru,R3}$	Linear R3	1.2078E-02	0.99617	0.99607	1.00016	1.30137
	Quadrático R3 <sup>a</sup>	1.1617E-02	0.99646	0.99636	1.00012	1.24514
	Quadrático R3 <sup>b</sup>	7.1316E-04	0.99999	0.99999	1.00000	0.07616

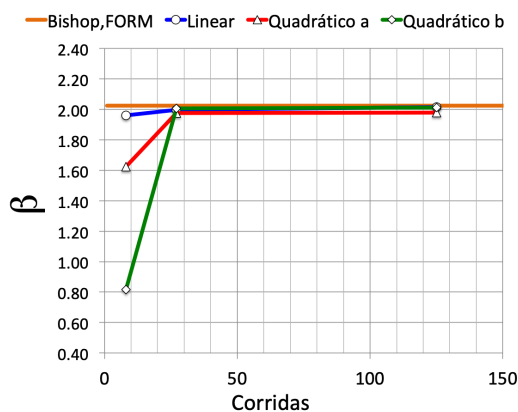
Quadrático ●<sup>a</sup>: metamodelo polinomial sem fatores de interação  
Quadrático ●<sup>b</sup>: metamodelo polinomial com fatores de interação

Fonte: elaborado pelo autor.

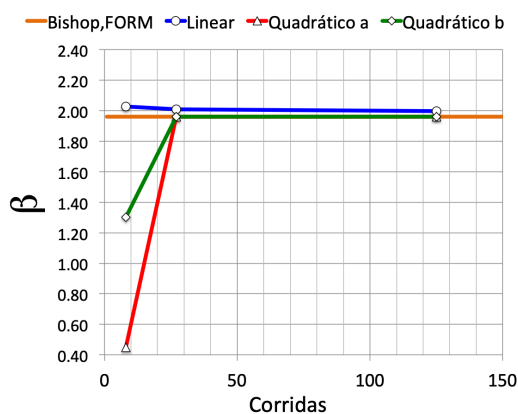
o nível de segurança do talude, a formulação do método de Bishop Simplificado foi substituída no acoplamento direto ao FORM pelo próprio metamodelo. Assim, considerando a variabilidade das variáveis aleatórias  $c'$ ,  $\phi'$  e  $\gamma$  dadas por seus respectivos coeficientes de variação, médias e funções densidade de probabilidades, os índices de confiabilidade são calculados e comparados aos valores obtidos através da análise de confiabilidade feita inicialmente. A convergência do  $\beta$  em função do refinamento dos planejamentos foi evidenciada, como mostra a Figura 17.

Os resultados mostram a importância de se elaborar planejamentos de experimentos que sejam suficientemente refinados para que possam ser representativos do problema físico estudado. Ao considerar planejamentos não tão refinados, como os planejamentos fatoriais  $2^k$  utilizados neste exemplo, o número de corridas foi insuficiente para representar uma variável contínua, como o índice de confiabilidade, por meio de dados discretos, como os valores de **FS**. No entanto, na verificação de sensibilidade das variáveis  $c'$ ,  $\phi'$  e  $\gamma$ ,

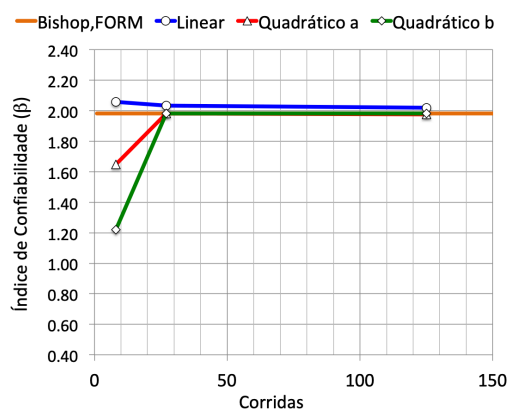
Figura 17: Comparativo dos  $\beta$  obtidos via metamodelos quadráticos  $\bullet^b$  e via método de Bishop simplificado acoplados ao FORM.



a) metamodelos referente à superfície de  $FS_{mín.}$



b) metamodelos referente à superfície de  $Pf_{máx.}$



c) metamodelos referente à superfície de  $Risco_{máx.}$

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 23: Superfícies de ruptura segundo os critérios de  $FS_{\min.}$ ,  $Pf_{\max.}$  e  $Risco_{\max.}$  definidas

Critério	Método de análise	Superfície crítica			$FS$	$\beta$	$Pf$	$Risco_{vol.} [m^3/m]$	$Risco_{Peso.} [kN/m]$
		$x_c [m]$	$y_c [m]$	$R [m]$					
$FS_{\min.}$	A	-8.80	27.00	28.37668	1.44870	2.26842	0.01165	1.76740	25.64873
$Pf_{\max.}$	B	-11.40	27.80	30.04286	1.45506	2.21643	0.01333	1.75916	25.50976
$Risco_{\max.}$	B	-10.00	27.40	29.15783	1.45259	2.22641	0.01299	1.85096	26.84736

Método de análise A:  $FS$  definido via método de Bishop simplificado  
Método de análise B:  $Pf$  e  $Risco$  definidos via método de Bishop simplificado diretamente acoplado ao FORM

Fonte: elaborado pelo autor.

mostrou-se tão eficaz quanto os demais planejamentos, já que os valores de  $R_j^2$  apresentaram variações praticamente desprezíveis em função dos planejamentos adotados para uma mesma superfície. O exemplo mostrou também a possibilidade de se quantificar incertezas, ou seja, de se definir probabilidades, a partir de metamodelos que substituem um modelo que seja geral para representação do problema. Essa possibilidade pode ser muito útil diante da necessidade de se analisar fenômenos que não possuem solução analítica simples e requerem modelos numéricos extremamente complexos. Além disso, a sensibilidade dos parâmetros  $c'$ ,  $\phi'$  e  $\gamma$  pôde ser confirmada por métodos distintos: pelos fatores de sensibilidade das análises de confiabilidade ( $\alpha_j^2$ ), pelos coeficientes de determinação das regressões lineares simples ( $R_j^2$ ) e também pelos resultados dos testes t-Student, onde a coesão foi o parâmetro que mais influenciou a estabilidade do talude, seguida pelo ângulo de atrito e depois, pelo peso específico do solo.

### 6.3 Exemplo 2: talude em Campinas-SP

Neste exemplo, o talude hipotético estudado é composto por dois horizontes de solo, com propriedades de resistência e pesos específicos distintos. Os parâmetros referem-se aos do solo de Campinas-SP, caracterizados por Albuquerque et al. (2011). Trata-se de um talude de maior altura em relação do exemplo anterior e também sem a presença de nível d'água. As análises determinística e probabilística foram realizadas com uso do programa RASS, que emprega o método de Bishop simplificado, diretamente acoplado ao FORM. Os dados das superfícies críticas identificadas são apresentados pela Tabela 24.

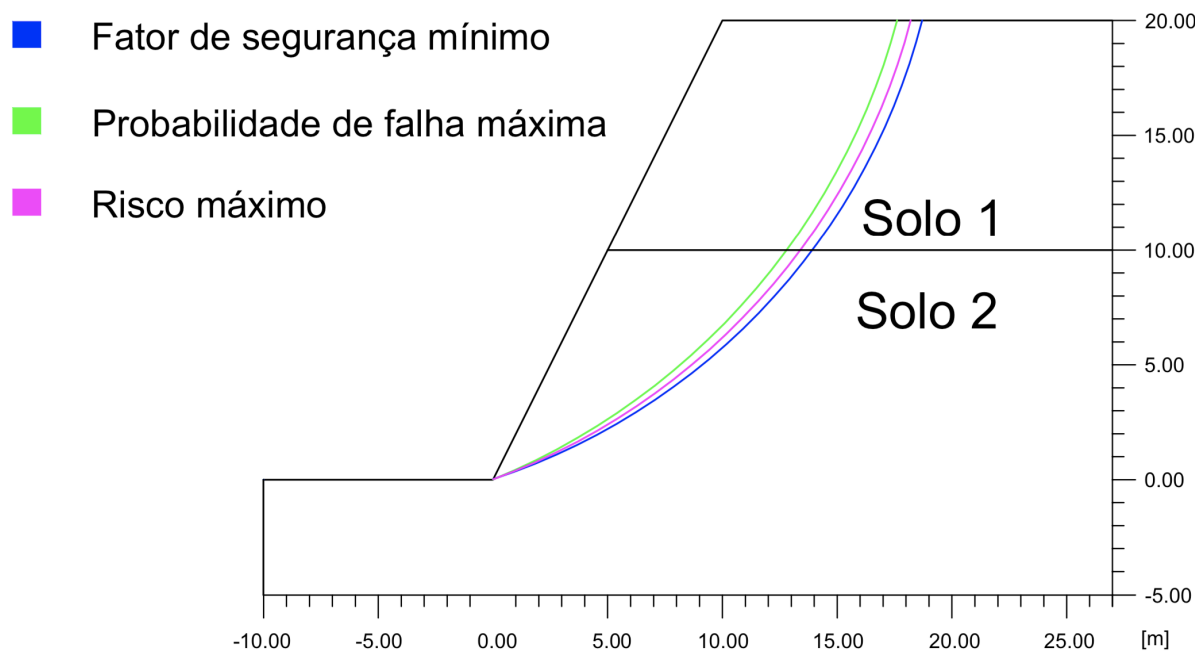
Nesta análises, as superfícies críticas determinística e probabilísticas não foram as mesmas, e a superfície de  $Pf_{\max.}$  também não coincide com a de  $Risco_{\max.}$ . As superfícies identificadas são ilustradas pela Figura 18.

Os planejamentos fatoriais completos foram construídos com base nos valores médios ( $\mu$ ) e assumidos no ponto de projeto ( $x^*$ ) assumidos pelas variáveis explicativas coesão do solo 1 ( $c'_1$ ), ângulo de atrito do solo 1 ( $\phi'_1$ ), peso específico do solo 1 ( $\gamma_1$ ), coesão do solo 2 ( $c'_2$ ), ângulo de atrito do solo 2 ( $\phi'_2$ ) e peso específico do solo 2 ( $\gamma_2$ ), conforme Tabela 24.

Os coeficientes de variação das coesões, ângulos de atrito e pesos específicos considerados



Figura 18: Talude de Campinas-SP: superfícies de críticas definidas pelos diferentes critérios adotados.



Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 24: Parâmetros geotécnicos do solo de Campinas, referentes aos pontos centrais dos planejamentos fatoriais completos  $2^k$ .

Critério	$c'_1$ [kPa]	$\phi'_1$ [°]	$\gamma_1$ [kN/m <sup>3</sup> ]	$c'_2$ [kPa]	$\phi'_2$ [°]	$\gamma_2$ [kN/m <sup>3</sup> ]	Planejamento
$FS_{mín.}$	28.00	30.00	13.60	60.00	22.00	15.50	$DoE_{Campinas,FS}$
$Pf_{máx.}$	22.56	29.53	13.80	31.85	20.55	15.61	$DoE_{Campinas,Pf}$
$Risco_{máx.}$	22.86	29.58	13.80	31.78	20.44	15.61	$DoE_{Campinas,R}$

Fonte: elaborado pelo autor.

foram 30%, 10% e 5%, respectivamente. Os valores foram definidos com base no estudo de Phoon e Kulhawy (1999).

Nove planejamentos fatoriais completos foram delineados, sendo eles do tipo  $2^k$ ,  $3^k$  e  $5^k$ , aplicados a cada uma das três superfícies críticas, como mostra a Tabela 25.

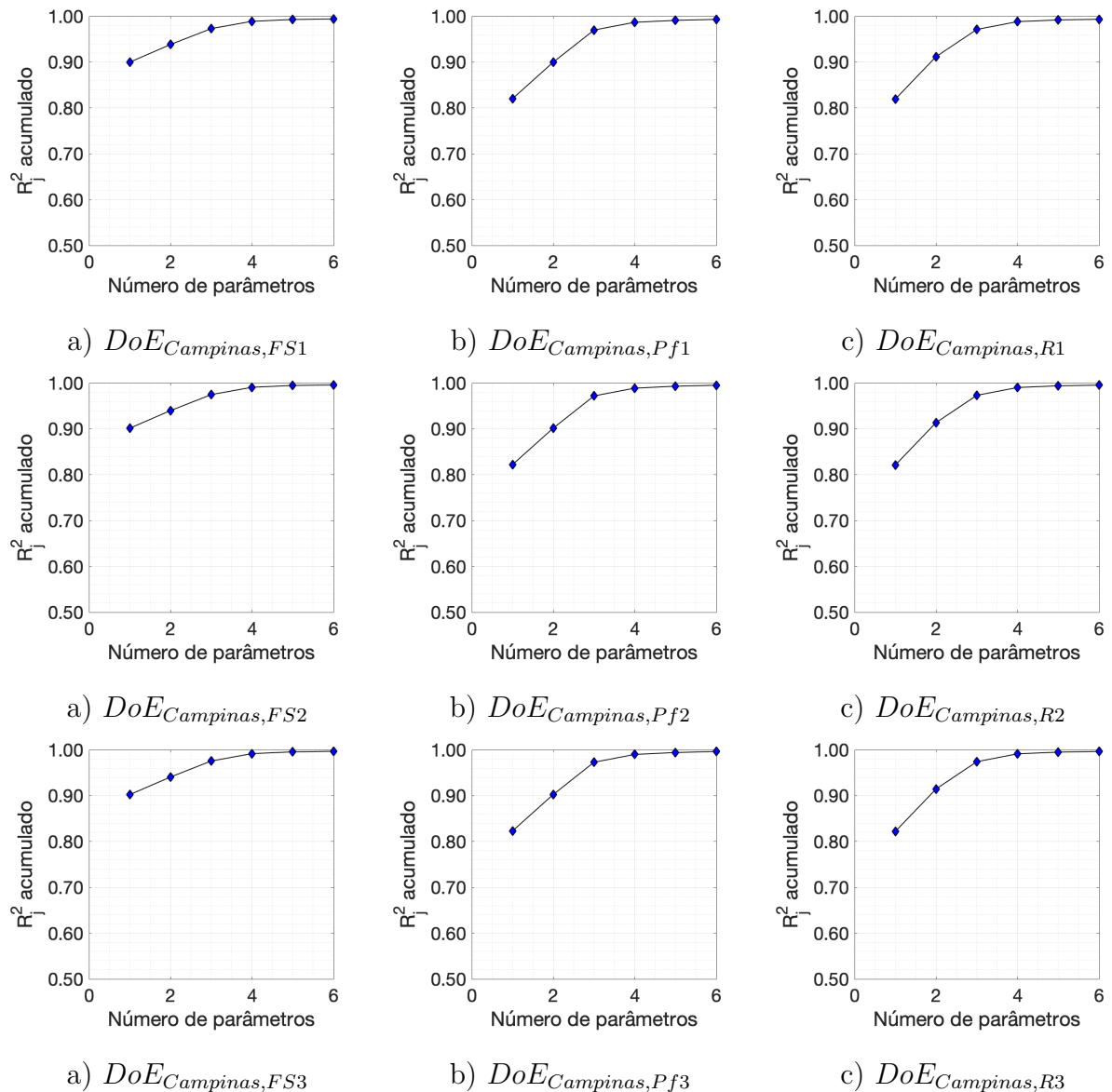
Os parâmetros de sensibilidade  $\alpha_j^2$  e  $R_j^2$ , resultantes da análise de confiabilidade e por meio dos modelos de regressão simples respectivamente, referentes às variáveis  $c'_1$ ,  $\phi'_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $c'_2$ ,  $\phi'_2$  e  $\gamma_2$  são apresentados pela Figura 19 e Tabela 26.

A análises de sensibilidade realizadas permitiram a classificação das variáveis por de importância, e em todos a ordenação foi a mesma. Os parâmetros de resistência  $c'_2$  e  $\phi'_2$ , relativos ao horizonte inferior de solo, mostraram-se os mais influentes sobre a variabilidade de **FS**. O terceiro parâmetros mais influente foi  $c'_1$ , seguido de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . O parâmetro de menor influencia identificado foi  $\phi'_1$ , que corresponde ao solo da parte superior do talude, o que sugere forte influência da geometria do problema sobre a determinação das variáveis

Tabela 25: Planejamentos empregados nas análises de sensibilidade dos parâmetros do solo de Campinas-SP.

Planejamento	Tipo	k	N
$DoE_{Campinas,FS1}$	Fatorial Completo $2^k$	6	64
$DoE_{Campinas,Pf1}$	Fatorial Completo $2^k$	6	64
$DoE_{Campinas,R1}$	Fatorial Completo $2^k$	6	64
$DoE_{Campinas,FS2}$	Fatorial Completo $3^k$	6	729
$DoE_{Campinas,Pf2}$	Fatorial Completo $3^k$	6	729
$DoE_{Campinas,R2}$	Fatorial Completo $3^k$	6	729
$DoE_{Campinas,FS3}$	Fatorial Completo $5^k$	6	15625
$DoE_{Campinas,Pf3}$	Fatorial Completo $5^k$	6	15625
$DoE_{Campinas,R3}$	Fatorial Completo $5^k$	6	15625

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 19:  $R_j^2$  acumulado referente aos parâmetros geotécnicos do solo de Campinas-SP.

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 26: Classificação dos parâmetros do solo de Campinas-SP por ordem decrescente de influência a partir dos valores de  $\alpha_j^2$  e  $R_j^2$ .

Superfície de $FS_{min.}$			Superfície de $Pf_{máx.}$			Superfície de $Risco_{máx.}$		
Parâmetro	$\alpha_j^2$	$\alpha_j^2$ acumulado	Parâmetro	$\alpha_j^2$	$\alpha_j^2$ acumulado	Parâmetro	$\alpha_j^2$	$\alpha_j^2$ acumulado
$c'_2$	0.808780	0.808780	$c'_2$	0.823063	0.823063	$c'_2$	0.821517	0.821517
$\phi'_2$	0.108504	0.917284	$\phi'_2$	0.082343	0.905406	$\phi'_2$	0.095865	0.917382
$c'_1$	0.059622	0.976906	$c'_1$	0.070578	0.975984	$c'_1$	0.059809	0.977191
$\gamma_1$	0.017534	0.994440	$\gamma_1$	0.017195	0.993179	$\gamma_1$	0.017267	0.994458
$\gamma_2$	0.003594	0.998034	$\gamma_2$	0.004389	0.997568	$\gamma_2$	0.003877	0.998335
$\phi'_1$	0.001966	1.000000	$\phi'_1$	0.002433	1.000000	$\phi'_1$	0.001664	1.000000
<i>DoE<sub>Campinas,FS1</sub></i>			<i>DoE<sub>Campinas,Pf1</sub></i>			<i>DoE<sub>Campinas,R1</sub></i>		
Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado	Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado	Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado
$c'_2$	0.899993	0.899993	$c'_2$	0.820421	0.820421	$c'_2$	0.819503	0.819503
$\phi'_2$	0.038539	0.938532	$\phi'_2$	0.079615	0.900036	$\phi'_2$	0.092505	0.912008
$c'_1$	0.034653	0.973185	$c'_1$	0.069994	0.970030	$c'_1$	0.059340	0.971349
$\gamma_1$	0.015938	0.989123	$\gamma_1$	0.016996	0.987027	$\gamma_1$	0.017085	0.988433
$\gamma_2$	0.003903	0.993025	$\gamma_2$	0.004154	0.991180	$\gamma_2$	0.003669	0.992103
$\phi'_1$	0.001097	0.994122	$\phi'_1$	0.002084	0.993264	$\phi'_1$	0.001421	0.993524
<i>DoE<sub>Campinas,FS2</sub></i>			<i>DoE<sub>Campinas,Pf2</sub></i>			<i>DoE<sub>Campinas,R2</sub></i>		
Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado	Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado	Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado
$c'_2$	0.901641	0.901641	$c'_2$	0.822303	0.822303	$c'_2$	0.821271	0.821271
$\phi'_2$	0.038415	0.940057	$\phi'_2$	0.079584	0.901887	$\phi'_2$	0.092552	0.913823
$c'_1$	0.034848	0.974904	$c'_1$	0.070127	0.972013	$c'_1$	0.059464	0.973287
$\gamma_1$	0.015973	0.990877	$\gamma_1$	0.017012	0.989026	$\gamma_1$	0.017102	0.990389
$\gamma_2$	0.003933	0.994810	$\gamma_2$	0.004191	0.993217	$\gamma_2$	0.003703	0.994092
$\phi'_1$	0.001160	0.995970	$\phi'_1$	0.002173	0.995390	$\phi'_1$	0.001484	0.995576
<i>DoE<sub>Campinas,FS3</sub></i>			<i>DoE<sub>Campinas,Pf3</sub></i>			<i>DoE<sub>Campinas,R3</sub></i>		
Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado	Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado	Parâmetro	$R_j^2$	$R_j^2$ acumulado
$c'_2$	0.902478	0.902478	$c'_2$	0.823249	0.823249	$c'_2$	0.822174	0.822174
$\phi'_2$	0.038350	0.940828	$\phi'_2$	0.079560	0.902809	$\phi'_2$	0.092564	0.914738
$c'_1$	0.034988	0.975816	$c'_1$	0.070260	0.973069	$c'_1$	0.059577	0.974316
$\gamma_1$	0.015990	0.991805	$\gamma_1$	0.017016	0.990084	$\gamma_1$	0.017105	0.991420
$\gamma_2$	0.003952	0.995758	$\gamma_2$	0.004213	0.994297	$\gamma_2$	0.003722	0.995142
$\phi'_1$	0.001193	0.996950	$\phi'_1$	0.002217	0.996515	$\phi'_1$	0.001515	0.996657

Fonte: elaborado pelo autor.

mais influentes, uma vez que a parcela das superfícies críticas que estão contidas no solo 1 tem um aspecto mais próximo de uma vertical, onde  $\phi'_1$  deveria oferecer uma menor contribuição e  $\gamma_1$ , uma contribuição mais significativa.

Os resultados dos testes F, os quais foram aplicados aos metamodelos lineares relativos às três superfícies críticas, confirmaram que ao menos uma das variáveis explicativas consideradas provoca efeito estatisticamente significativo sobre a variabilidade de **FS**, mesmo para os níveis de significância mais baixos adotados., comprovando o que já se esperava.

Para verificação da significância individual das variáveis  $c'_1$ ,  $\phi'_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $c'_2$ ,  $\phi'_2$  e  $\gamma_2$ , o teste t-Student foi aplicado e os resultados são apresentados pela Tabela 28.

Observa-se que em apenas dois casos uma única variável explicativa não teve sua hipótese nula rejeitada. Os casos referem-se ao *DoE<sub>Campinas,FS1</sub>*, onde a variável  $\phi'_1$  não apresentou significância estatística para os níveis de significância de 0.0010 e 0.0001, pois seu valor *P* resultou em valor maior que  $\alpha$ , o que impede a rejeição da hipótese nula.

Tabela 27: Resultados dos testes F referentes ao talude de Campinas-SP.

$DoE_{Campinas,FS1}$		$DoE_{Campinas,Pf1}$		$DoE_{Campinas,R1}$	
$F_0 = 1606.7215$		$F_0 = 1400.7609$		$F_0 = 1457.4503$	
valor $P = 0.00000$		valor $P = 0.00000$		valor $P = 0.00000$	
$\alpha$	Estatística F	$\alpha$	Estatística F	$\alpha$	Estatística F
0.1000	1.880151	0.1000	1.880151	0.1000	1.880151
0.0500	2.262532	0.0500	2.262532	0.0500	2.262532
0.0250	2.639445	0.0250	2.639445	0.0250	2.639445
0.0100	3.136357	0.0100	3.136357	0.0100	3.136357
0.0010	4.408321	0.0010	4.408321	0.0010	4.408321
0.0001	5.744894	0.0001	5.744894	0.0001	5.744894
$DoE_{Campinas,FS2}$		$DoE_{Campinas,Pf2}$		$DoE_{Campinas,R2}$	
$F_0 = 29737.9442$		$F_0 = 25981.4312$		$F_0 = 27080.0701$	
valor $P = 0.00000$		valor $P = 0.00000$		valor $P = 0.00000$	
$\alpha$	Estatística F	$\alpha$	Estatística F	$\alpha$	Estatística F
0.1000	1.782286	0.1000	1.782286	0.1000	1.782286
0.0500	2.111119	0.0500	2.111119	0.0500	2.111119
0.0250	2.425719	0.0250	2.425719	0.0250	2.425719
0.0100	2.826959	0.0100	2.826959	0.0100	2.826959
0.0010	3.791149	0.0010	3.791149	0.0010	3.791149
0.0001	4.720176	0.0001	4.720176	0.0001	4.720176
$DoE_{Campinas,FS3}$		$DoE_{Campinas,Pf3}$		$DoE_{Campinas,R3}$	
$F_0 = 850881.0634$		$F_0 = 744250.3344$		$F_0 = 776135.5968$	
valor $P = 0.00000$		valor $P = 0.00000$		valor $P = 0.00000$	
$\alpha$	Estatística F	$\alpha$	Estatística F	$\alpha$	Estatística F
0.1000	1.774484	0.1000	1.774484	0.1000	1.774484
0.0500	2.099175	0.0500	2.099175	0.0500	2.099175
0.0250	2.409035	0.0250	2.409035	0.0250	2.409035
0.0100	2.803132	0.0100	2.803132	0.0100	2.803132
0.0010	3.745170	0.0010	3.745170	0.0010	3.745170
0.0001	4.646271	0.0001	4.646271	0.0001	4.646271

Fonte: elaborado pelo autor.

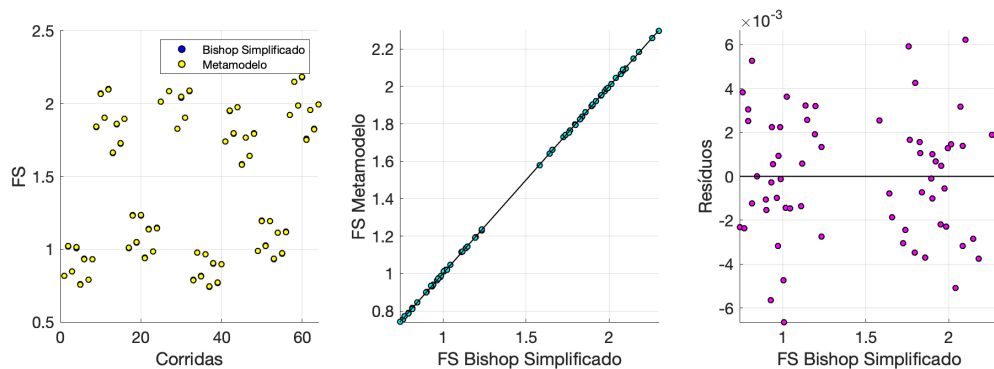
No entanto, acredita-se que o planejamento fatorial do tipo  $2^k$  não foi suficiente para identificar a significância estatística desta variável, assim como aconteceu no exemplo 1, referente ao talude de Bauru-SP.

As medidas de adequabilidade foram obtidas a fim de se verificar a variabilidade dos erros entre **FS** e  $\widehat{\mathbf{FS}}$ , proporcionados pelos metamodelos obtidos via MMQ. De modo geral, os metamodelos quadráticos com fatores de interação tiveram maior capacidade de estimar a variável resposta, fornecendo menores valores de  $RMSE$ ,  $E_m$  e  $COV_{E_m}$ , e valores de  $R^2$  e  $R_{adj}^2$  muito próximos a 1.00. Os resultados são apresentados pela Tabela 29.

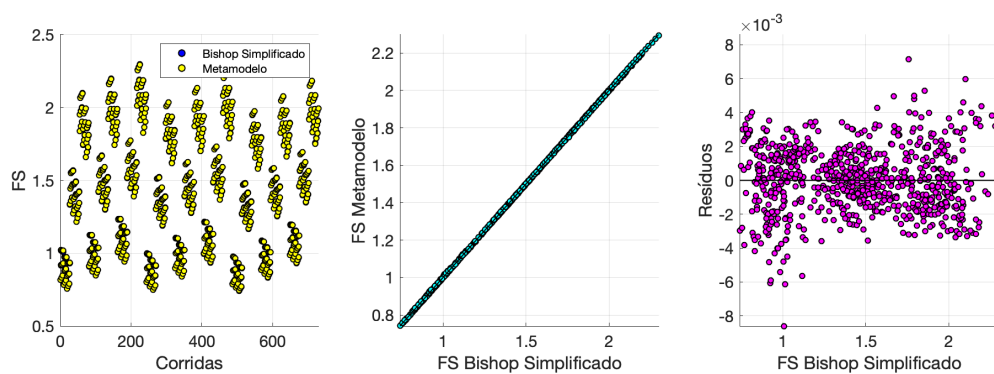
À medida que os níveis são incrementados para construção dos planejamentos mais refinados, a capacidade de representação de **FS** através dos metamodelos polinomiais da mesma ordem são empregados para a mesma superfície não aparenta ser tão influenciada, como mostram as Figuras 20, 21 e 22.

Sendo assim, uma avaliação complementar da capacidade dos metamodelos de estimar os valores de **FS** é feita através do acoplamento direto dessas funções polinomiais

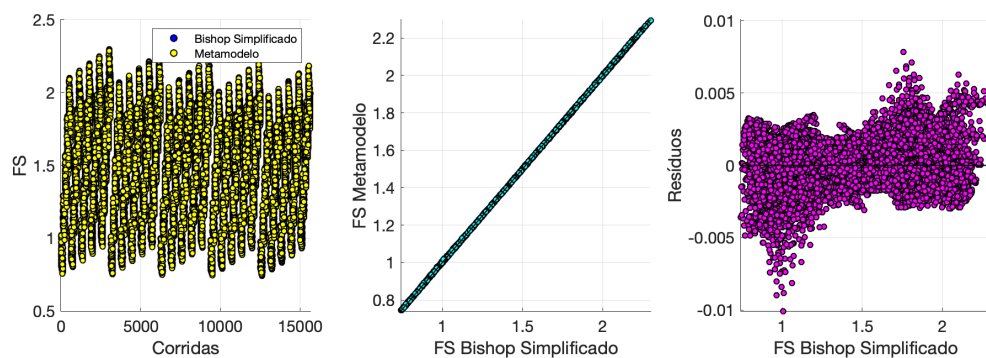
Figura 20: Talude de Campinas:  $FS$  versus  $\widehat{FS}$  e resíduos referentes à superfície crítica de  $FS_{\min}$  e metamodelos quadráticos com fatores de interação.



a) metamodelo quadrático  $FS1^b$



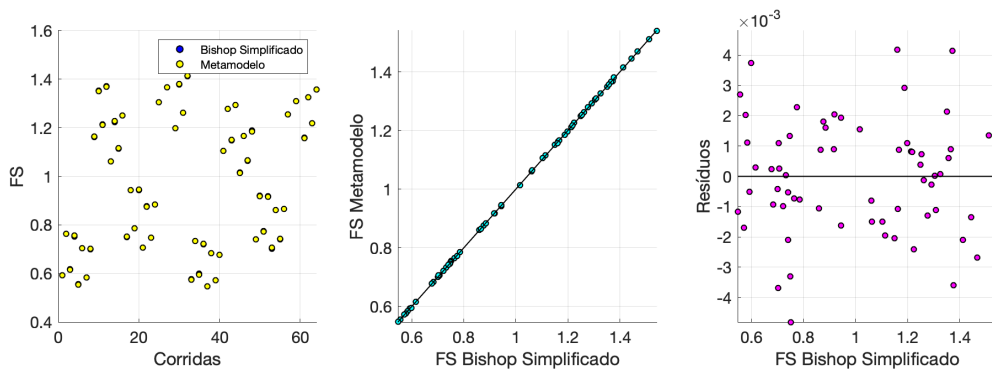
b) metamodelo quadrático  $FS2^b$



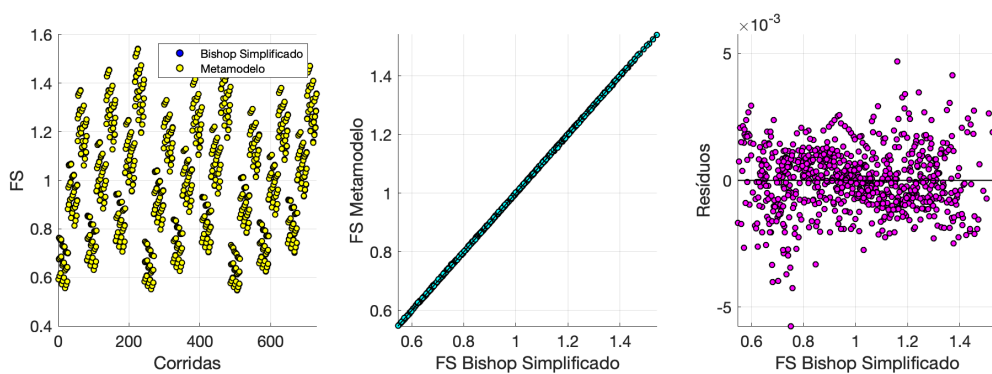
c) metamodelo quadrático  $FS3^b$

Fonte: elaborado pelo autor.

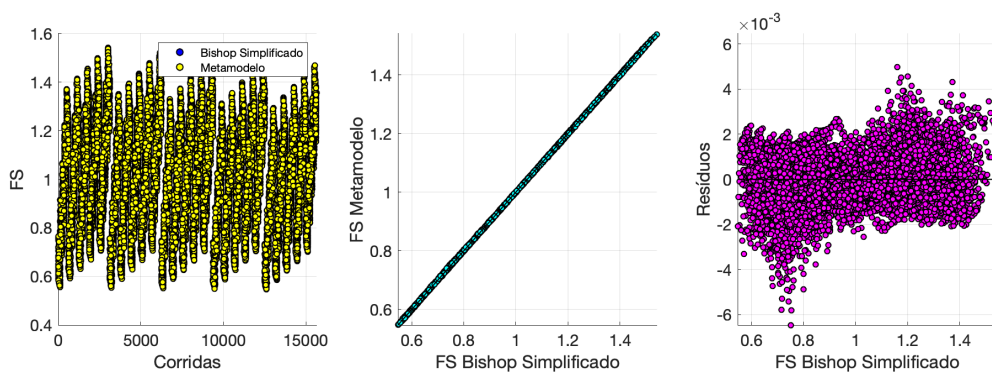
Figura 21: Talude de Campinas: **FS** versus  $\widehat{\text{FS}}$  e resíduos referentes à superfície crítica de  $Pf_{máx.}$  e metamodelos quadráticos com fatores de interação.



a) metamodelo quadrático  $Pf1^b$



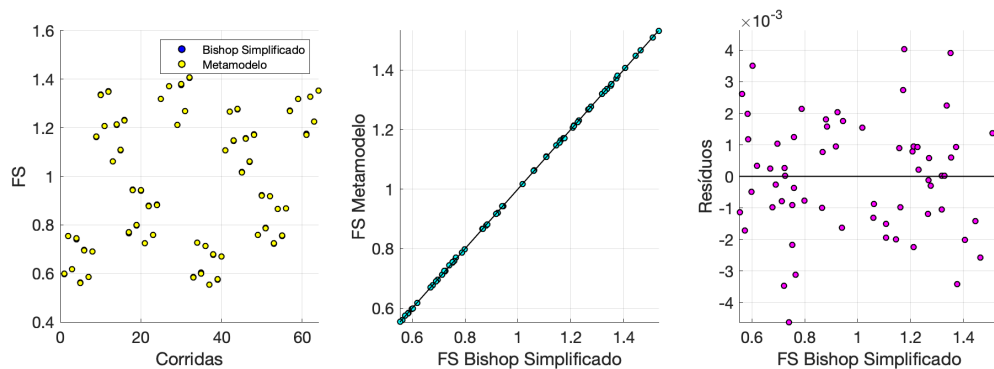
b) metamodelo quadrático  $Pf2^b$



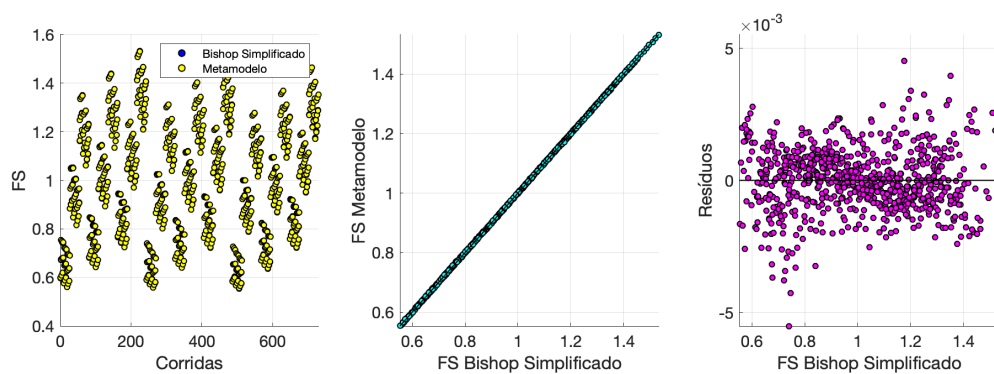
c) metamodelo quadrático  $Pf3^b$

Fonte: elaborado pelo autor.

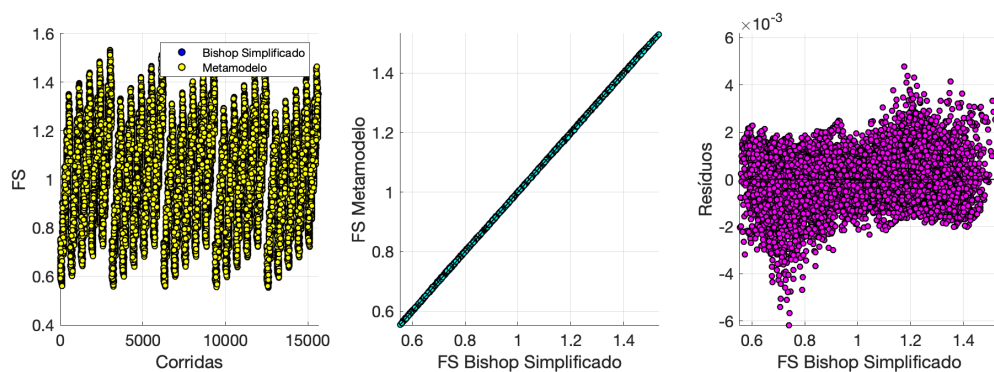
Figura 22: Talude de Campinas: **FS** versus  $\widehat{\text{FS}}$  e resíduos referentes à superfície crítica de  $Risco_{m\acute{a}x.}$  e metamodelos quadráticos com fatores de interação.



a) metamodelo quadrático  $R1^b$



b) metamodelo quadrático  $R3^b$



c) metamodelo quadrático  $R3^b$

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 28: Resultados dos testes t-Student referentes ao talude de Campinas-SP.

$DoE_{Campinas,FS1}$			$DoE_{Campinas,Pf1}$			$DoE_{Campinas,R1}$		
Parâmetro	Estatística $t$	valor $P$	Parâmetro	Estatística $t$	valor $P$	Parâmetro	Estatística $t$	valor $P$
(intercepto)	10.759868	0.000000	(intercepto)	10.196270	0.000000	(intercepto)	10.194657	0.000000
$c'_1$	18.331360	0.000000	$c'_1$	24.336374	0.000000	$c'_1$	22.853758	0.000000
$\phi'_1$	3.261122	0.001876	$\phi'_1$	4.198823	0.000095	$\phi'_1$	3.536834	0.000813
$\gamma_1$	-12.431915	0.000000	$\gamma_1$	-11.992343	0.000000	$\gamma_1$	-12.262745	0.000000
$c'_2$	93.421249	0.000000	$c'_2$	83.318957	0.000000	$c'_2$	84.929527	0.000000
$\phi'_2$	19.332005	0.000000	$\phi'_2$	25.955068	0.000000	$\phi'_2$	28.534217	0.000000
$\gamma_2$	-6.151973	0.000000	$\gamma_2$	-5.928370	0.000000	$\gamma_2$	-5.683070	0.000000
$DoE_{Campinas,FS2}$			$DoE_{Campinas,Pf2}$			$DoE_{Campinas,R2}$		
Parâmetro	Estatística $t$	valor $P$	Parâmetro	Estatística $t$	valor $P$	Parâmetro	Estatística $t$	valor $P$
(intercepto)	46.410885	0.000000	(intercepto)	44.025608	0.000000	(intercepto)	44.049147	0.000000
$c'_1$	79.012273	0.000000	$c'_1$	104.798000	0.000000	$c'_1$	98.512312	0.000000
$\phi'_1$	14.415881	0.000000	$\phi'_1$	18.446666	0.000000	$\phi'_1$	15.562292	0.000000
$\gamma_1$	-53.492781	0.000000	$\gamma_1$	-51.616932	0.000000	$\gamma_1$	-52.830873	0.000000
$c'_2$	401.906361	0.000000	$c'_2$	358.861160	0.000000	$c'_2$	366.105774	0.000000
$\phi'_2$	82.958377	0.000000	$\phi'_2$	111.640696	0.000000	$\phi'_2$	122.901125	0.000000
$\gamma_2$	-26.544589	0.000000	$\gamma_2$	-25.620333	0.000000	$\gamma_2$	-24.583211	0.000000
$DoE_{Campinas,FS3}$			$DoE_{Campinas,Pf3}$			$DoE_{Campinas,R3}$		
Parâmetro	Estatística $t$	valor $P$	Parâmetro	Estatística $t$	valor $P$	Parâmetro	Estatística $t$	valor $P$
(intercepto)	248.819367	0.000000	(intercepto)	236.121659	0.000000	(intercepto)	236.271624	0.000000
$c'_1$	423.283441	0.000000	$c'_1$	561.109517	0.000000	$c'_1$	527.609113	0.000000
$\phi'_1$	78.146115	0.000000	$\phi'_1$	99.680912	0.000000	$\phi'_1$	84.141779	0.000000
$\gamma_1$	-286.148181	0.000000	$\gamma_1$	-276.134264	0.000000	$\gamma_1$	-282.702049	0.000000
$c'_2$	2149.768054	0.000000	$c'_2$	1920.696959	0.000000	$c'_2$	1959.987821	0.000000
$\phi'_2$	443.157740	0.000000	$\phi'_2$	597.090098	0.000000	$\phi'_2$	657.646998	0.000000
$\gamma_2$	-142.261891	0.000000	$\gamma_2$	-137.398349	0.000000	$\gamma_2$	-131.871467	0.000000

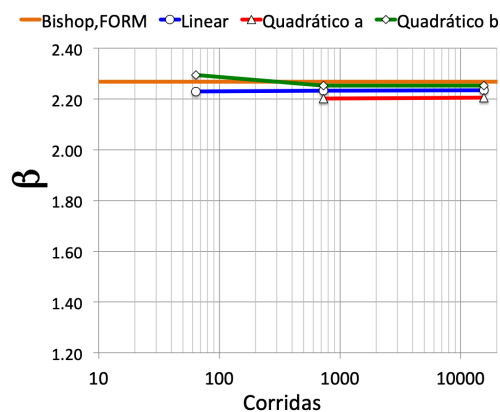
Fonte: elaborado pelo autor.

ao método de confiabilidade FORM. Desse modo, os valores dos índices de confiabilidade ( $\beta$ ) obtidos pelo acoplamento dos metamodelos são comparados aos valores de  $\beta$  obtidos por meio do acoplamento do método de Bishop simplificado ao FORM. Os valores de  $\beta$  obtidos para as diferentes superfícies críticas em função do número de corridas dos diferentes planejamentos fatoriais completos adotados são apresentados pela Figura 23.

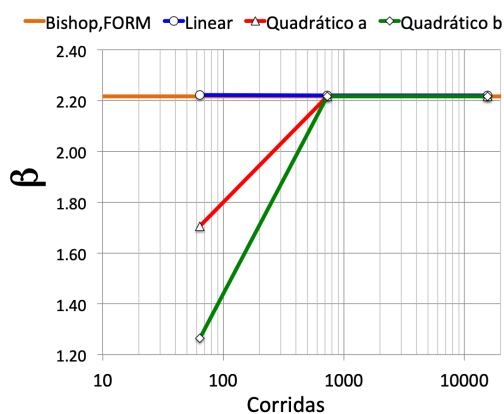
Ressalta-se que o FORM não garante convergência da resposta, o que pôde ser observado quando o metamodelo *Quadrática*, referente à superfície de  $FS_{min}$ . e planejamento com 64 corridas, foi utilizado no acoplamento direto para analisar a confiabilidade do talude. Os valores de  $\beta$  dados pelo acoplamento dos metamodelos se aproximaram da resposta de referência somente quando pelo menos três níveis foram considerados nos planejamento, correspondendo a 125 corridas. Além disso, as superfícies críticas probabilísticas possibilitaram a construção de metamodelos com maiores capacidades de quantificação de incertezas do problema quando comparadas às respostas dadas pelos metamodelos relativos à superfície determinística. Com isso, fica novamente evidente a coerência das técnicas estatísticas empregadas para avaliação da sensibilidade das respostas e também a necessidade de se definir planejamentos adequados para que essas análises sejam corretamente realizadas. Ademais, fortalece a possibilidade de se empregar metamodelos que sejam representativos do problema físico para se definir probabilidades de interesse quando os problemas físicos de interesse estudados pela engenharia possuem resposta



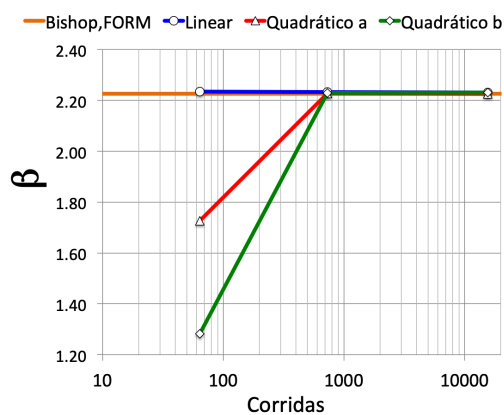
Figura 23: Comparativo dos  $\beta$  obtidos via metamodelos quadráticos  $\bullet^b$  e via método de Bishop simplificado acoplados ao FORM.



a) metamodelos referente à superfície de  $FS_{\min}$ .



b) metamodelos referente à superfície de  $Pf_{\max}$ .



c) metamodelos referente à superfície de  $Risco_{\max}$ .

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 29: Medidas de adequabilidade dos modelos de regressão lineares e quadráticos referentes ao talude de Campinas-SP.

Planejamento	Modelo	$RMSE$	$R^2$	$R_{adj}^2$	$E_m$	$COV_{E_m}$ [%]
$DoE_{Campinas,FS1}$	Linear FS1	4.0597E-02	0.99412	0.99350	1.00123	3.33839
	Quadrático $FS1^a$	4.0597E-02	0.99412	0.99350	1.00123	3.33839
	Quadrático $FS1^b$	2.9666E-03	0.99997	0.99997	1.00001	0.23848
$DoE_{Campinas,Pf1}$	Linear Pf1	2.5476E-02	0.99326	0.99255	1.00074	2.86071
	Quadrático $Pf1^a$	2.5476E-02	0.99326	0.99255	1.00074	2.86071
	Quadrático $Pf1^b$	1.9743E-03	0.99996	0.99996	1.00001	0.21862
$DoE_{Campinas,R1}$	Linear R1	2.4737E-02	0.99352	0.99284	1.00068	2.76758
	Quadrático $R1^a$	2.4737E-02	0.99352	0.99284	1.00068	2.76758
	Quadrático $R1^b$	1.8998E-03	0.99996	0.99996	1.00001	0.20936
Planejamento	Modelo	$RMSE$	$R^2$	$R_{adj}^2$	$E_m$	$COV_{E_m}$ [%]
$DoE_{Campinas,FS2}$	Linear FS2	2.5961E-02	0.99597	0.99594	1.00039	2.17189
	Quadrático $FS2^a$	2.5634E-02	0.99607	0.99604	1.00052	2.16154
	Quadrático $FS2^b$	1.9564E-03	0.99998	0.99998	1.00000	0.16055
$DoE_{Campinas,Pf2}$	Linear Pf2	1.6273E-02	0.99539	0.99535	1.00024	1.86198
	Quadrático $Pf2^a$	1.6081E-02	0.99550	0.99546	1.00031	1.84813
	Quadrático $Pf2^b$	1.2613E-03	0.99997	0.99997	1.00000	0.14338
$DoE_{Campinas,R2}$	Linear R2	1.5787E-02	0.99558	0.99554	1.00022	1.80157
	Quadrático $R2^a$	1.5614E-02	0.99567	0.99564	1.00028	1.78870
	Quadrático $R2^b$	1.2029E-03	0.99997	0.99997	1.00000	0.13663
Planejamento	Modelo	$RMSE$	$R^2$	$R_{adj}^2$	$E_m$	$COV_{E_m}$ [%]
$DoE_{Campinas,FS3}$	Linear FS3	1.9432E-02	0.99695	0.99695	1.00017	1.57804
	Quadrático $FS3^a$	1.9087E-02	0.99706	0.99706	1.00028	1.56209
	Quadrático $FS3^b$	1.4073E-03	0.99998	0.99998	1.00000	0.11436
$DoE_{Campinas,Pf3}$	Linear Pf3	1.2175E-02	0.99651	0.99651	1.00011	1.36297
	Quadrático $Pf3^a$	1.1973E-02	0.99663	0.99663	1.00016	1.34578
	Quadrático $Pf3^b$	8.8557E-04	0.99998	0.99998	1.00000	0.09991
$DoE_{Campinas,R3}$	Linear R3	1.1809E-02	0.99666	0.99666	1.00010	1.31903
	Quadrático $R3^a$	1.1627E-02	0.99676	0.99676	1.00015	1.30338
	Quadrático $R3^b$	8.4112E-04	0.99998	0.99998	1.00000	0.09473

Fonte: elaborado pelo autor.

analítica complexas.

## 7 CONCLUSÕES

O planejamento de experimentos e as técnicas estatísticas usadas para as análises de sensibilidade se mostraram capazes de identificar as variáveis explicativas mais influentes dos problemas estudados. No problema de fluxo em meios poroso fraturados, as fraturas mais importantes sobre a determinação da permeabilidade equivalente do meio, foram as de maior abertura que atravessaram completamente a altura da seção transversal da célula de simulação. Entretanto, há fraturas presentes no grupo de nove fraturas identificadas como as mais importantes que não transpassam a seção. Além disso, a fratura com a maior abertura de todas ( $F_{11}$ ) não foi selecionada como uma das mais influentes. Observando a posição dessas fraturas, foi possível concluir que há uma importante interação entre os grupos de fraturas que se conectam ou que estão muito próximas das fraturas mais importantes, resultando caminhos preferenciais de fluxo.

A respeito dos metamodelos, obtidos via Método dos Mínimos Quadrados, o modelo de regressão de primeira ordem foi muito útil para identificar os efeitos das principais variáveis explicativas sobre a variabilidade da resposta. Além disso, os modelos de regressão lineares de segunda ordem, sem fatores de interação, forneceram uma melhor estimativa da permeabilidade equivalente do meio poroso, mesmo quando apenas as fraturas mais influentes foram consideradas, o que pode ser muito útil no processo de quantificação de incertezas previsto como continuação desse estudo. Nas análises de estabilidade de taludes, onde o número de variáveis explicativas é reduzido, os metamodelos quadráticos com fatores de interação foram os mais capazes de estimar os fatores de segurança das superfícies críticas, com ajuste ainda melhor para as superfícies críticas probabilísticas.

As medidas de sensibilidade dos parâmetros dadas pelos coeficientes de determinação das regressões simples, pelos quadrados dos cossenos diretores que definem o ponto de projeto das análises de confiabilidade e pelos resultados dos teste t-Student definiram ordenações praticamente idênticas das variáveis explicativas, por ordem de importância. A comparação das análises feitas via planejamento de experimentos com as análises de confiabilidade ratificaram a eficácia da técnica adotada. Outra evidência foi notada nos resultados do exemplo numérico de fluxo em meio poroso, pois ao considerar apenas as 9 fraturas mais importantes de um total de 30 fraturas, a permeabilidade equivalente pôde ser muito bem representada.

A convergência dos índices de confiabilidade, em função do número de níveis dos planejamentos fatoriais completos, mostrou a importância de se definir planejamentos suficientemente refinados, pois nos casos de menor refinamento o índice de confiabilidade foi muito diferente da resposta de referência.

As análises de sensibilidade mostraram-se muito úteis na seleção das variáveis mais influentes. Em problemas em que a variável resposta é obtida por solução numérica, como no caso de fluxo em meios porosos, essas técnicas têm grande importância, pois permitem a construção de metamodelos representativos do problema para acoplamento direto aos métodos de confiabilidade.

## REFERÊNCIAS

- ABDULAI, M.; SHARIFZADEH, M. Uncertainty and reliability analysis of open pit rock slopes: A critical review of methods of analysis. **Geotechnical and Geological Engineering**, Springer, p. 1–25, 2018.
- ALBUQUERQUE, P. J. R.; MASSAD, F.; FONSECA, A. V.; CARVALHO, D.; SANTOS, J.; ESTEVES, E. C. Effects of the construction method on pile performance: evaluation by instrumentation. **Part**, v. 1, p. 35–50, 2011.
- ANG, A. H.-S.; TANG, W. H. **Probability concepts in engineering planning and design**. [S.l.: s.n.], 1984.
- ASSIS, H. B.; GIACON JUNIOR, A. J.; NOGUEIRA, C. G. Análise de estabilidade de taludes: desenvolvimento de um programa computacional com base em métodos de equilíbrio limite. **XIX Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica, Salvador-BA.**, 2018.
- BEAR, J. **Dynamics of fluids in porous media (Environmental science series)**. [S.l.]: American Elsevier Publishing, 1972.
- BECK, A. T.; OLIVEIRA, W. L. de; NARDIM, S. D.; ELDEBS, A. L. Reliability-based evaluation of design code provisions for circular concrete-filled steel columns. **Engineering Structures**, v. 31, n. 10, p. 2299 – 2308, 2009. ISSN 0141-0296. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029609001746>>.
- BIOT, M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. ii. higher frequency range. **The Journal of the acoustical Society of america**, ASA, v. 28, n. 2, p. 179–191, 1956.
- BOX, G. E.; BEHNKEN, D. W. Some new three level designs for the study of quantitative variables. **Technometrics**, Taylor & Francis, v. 2, n. 4, p. 455–475, 1960.
- CALAMAK, M.; YANMAZ, A. M. Uncertainty quantification of transient unsaturated seepage through embankment dams. **International Journal of Geomechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 17, n. 6, p. 04016125, 2016.
- CLETO, P. R. Simulação de fraturamento hidráulico usando elementos finitos de elevada razão de aspecto com acoplamento hidromecânico. Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", 2016.
- DYSON, A. P.; TOLOOIYAN, A. Prediction and classification for finite element slope stability analysis by random field comparison. **Computers and Geotechnics**, Elsevier, v. 109, p. 117–129, 2019.
- FAGUNDES, L. S. Avaliação da resistência ao cisalhamento de um solo tropical não saturado. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2014.
- GIACON JUNIOR, A. J. Análise probabilística da estabilidade de taludes via teoria da confiabilidade. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2018.

- GIACON JUNIOR, A. J.; ASSIS, H. B.; NOGUEIRA, C. G. Comparação entre abordagem determinística e probabilística na avaliação da estabilidade de taludes. **XIX Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica, Salvador-BA.**, 2018.
- GOSZ, M. R. **Finite element method: applications in solids, structures, and heat transfer**. [S.l.]: CRC Press, 2005.
- HELTON, J.; JOHNSON, J.; OBERKAMPF, W.; STORLIE, C. B. A sampling-based computational strategy for the representation of epistemic uncertainty in model predictions with evidence theory. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 196, n. 37-40, p. 3980–3998, 2007.
- HELTON, J. C.; JOHNSON, J. D.; SALLABERRY, C. J.; STORLIE, C. B. Survey of sampling-based methods for uncertainty and sensitivity analysis. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 91, n. 10-11, p. 1175–1209, 2006.
- JACOB, F.; TED, B. **A first course in finite elements**. [S.l.]: Wiley, 2007.
- KOKER, N. D.; DAY, P.; ZWIERS, A. Assessment of reliability-based design of stable slopes. **Canadian Geotechnical Journal**, NRC Research Press, n. 999, p. 1–10, 2018.
- LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. **Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.
- MANZOLI, O. L.; CLETO, P. R.; SÁNCHEZ, M.; GUIMARÃES, L. J.; MAEDO, M. A. On the use of high aspect ratio finite elements to model hydraulic fracturing in deformable porous media. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, 2019.
- MASSAD, F. Curso básico de geotecnia-obras de terra. **Oficina de Textos, S. Paulo, Brasil**, 2003.
- MONTGOMERY, D. C. **Design and analysis of experiments**. [S.l.]: John wiley & sons, 2017.
- MOORE, D. S.; NOTZ, W.; FLIGNER, M. A. **The basic practice of statistics**. [S.l.]: WH Freeman, 2013.
- NETO, B. B.; SCARMINIO, I. S.; BRUNS, R. E. **Planejamento e otimização de experimentos**. [S.l.]: Ed. da UNICAMP, 1996.
- NOGUEIRA, C. G. **Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado**. 2010. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2010.
- PEREIRA, L. C.; GUIMARÃES, L. J.; HOROWITZ, B.; SÁNCHEZ, M. Coupled hydro-mechanical fault reactivation analysis incorporating evidence theory for uncertainty quantification. **Computers and Geotechnics**, Elsevier, v. 56, p. 202–215, 2014.
- PEREIRA, L. C.; SÁNCHEZ, M.; GUIMARÃES, L. J. do N. Uncertainty quantification for reservoir geomechanics. **Geomechanics for Energy and the Environment**, Elsevier, v. 8, p. 76–84, 2016.

- PHOON, K.-K.; KULHAWY, F. H. Characterization of geotechnical variability. **Canadian geotechnical journal**, NRC Research Press, v. 36, n. 4, p. 612–624, 1999.
- PLACKETT, R. L.; BURMAN, J. P. THE DESIGN OF OPTIMUM MULTIFACTORIAL EXPERIMENTS. **Biometrika**, v. 33, n. 4, p. 305–325, 06 1946. ISSN 0006-3444.  
Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/biomet/33.4.305>>.
- ROSA, A. J.; CARVALHO, R. de S.; XAVIER, J. A. D. **Engenharia de reservatórios de petróleo**. [S.l.]: Interciência, 2006.
- SNOW, D. T. A parallel plate model of fractured permeable media. **Ph. D. Thesis, Univ. of California**, 1965.
- TAHERI-SHAKIB, J.; GHADERI, A.; KANANI, V.; RAJABI-KOCHI, M.; HOSSEINI, S. A. Numerical analysis of production rate based on interaction between induced and natural fractures in porous media. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, Elsevier, v. 165, p. 243–252, 2018.
- WITHERSPOON, P. A.; WANG, J. S.; IWAI, K.; GALE, J. E. Validity of cubic law for fluid flow in a deformable rock fracture. **Water resources research**, Wiley Online Library, v. 16, n. 6, p. 1016–1024, 1980.
- ZHANG, D.; DAI, Y.; MA, X.; ZHANG, L.; ZHONG, B.; WU, J.; TAO, Z. An analysis for the influences of fracture network system on multi-stage fractured horizontal well productivity in shale gas reservoirs. **Energies**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 11, n. 2, p. 414, 2018.
- ZHANG, J.; HUANG, H. Risk assessment of slope failure considering multiple slip surfaces. **Computers and Geotechnics**, Elsevier, v. 74, p. 188–195, 2016.

## **Apêndices**

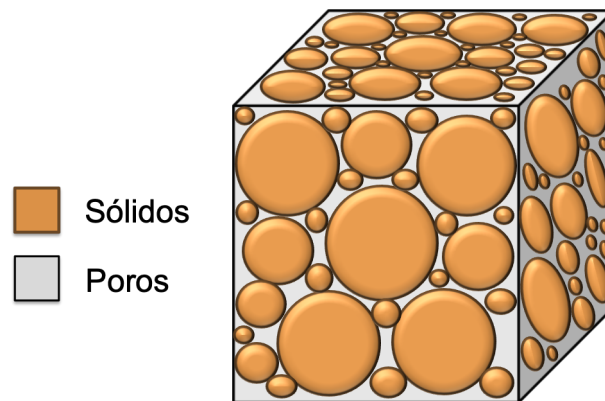


## APÊNDICE A – MODELAGEM DO PROBLEMA DE FLUXO EM MEIOS POROSOS

### A.1 Meios porosos

Um meio poroso é caracterizado por uma matriz sólida com espaços vazios ou poros, que podem conter fluidos em estado líquido, gasoso ou ambos. Os poros que estão interconectados e apresentam continuidade entre si possibilitam o escoamento dos fluidos (BEAR, 1972).

Figura 24: Volume elementar representativo.



Fonte: elaborado pelo autor.

Considere o volume elementar representativo, ilustrado pela Figura 24, o qual é definido como um volume reduzido capaz de representar o domínio do meio poroso, com número suficiente de poros que permita a representação estatística requerida pelo conceito de continuidade, de forma que os parâmetros a serem considerados pelo problema podem ser tratado considerando seus valores médios. Assim, a porosidade ( $P_t$ ) é o parâmetro físico definido pela razão entre o volume de poros ou vazios ( $V_v$ ) e o volume total ( $V_t$ ) e expressa a capacidade de armazenamento de fluidos nos poros do volume elementar representativo (BEAR, 1972).

$$P_t = \frac{V_v}{V_t}. \quad (\text{A.1})$$

A porosidade é influenciada principalmente pela textura e estrutura do meio poroso e tem valores  $0 \leq P_t \leq 1$ . Rochas porosas, concreto e ossos são alguns exemplos de meios porosos.

Quando os poros de um meio estão totalmente ocupados por um fluido em única fase, diz-se que o sistema é monofásico e saturado. Do contrário, o grau de saturação

proporcionado por uma fase ( $S_{fase}$ ) é escrito da seguinte forma:

$$S_{fase} = \frac{V_{fase}}{V_v}. \quad (\text{A.2})$$

onde  $V_{fase}$  é o volume ocupado por um fluido e representa uma fase. Este trabalho considerou como meio poroso um sistema formado por uma matriz de rocha travertina, saturada exclusivamente por água, em representação a um reservatório de petróleo monofásico. Portanto, para o sistema considerado a saturação pode ser escrita como:

$$S_w = \frac{V_w}{V_v}, \quad (\text{A.3})$$

onde o índice  $w$  refere-se à água. Como é monofásico e totalmente saturado, a  $S_w = 1$ .

## A.2 Lei de Darcy

Após um trabalho de investigação do fluxo de água em filtros verticais de areia em 1856 na França, Henry Darcy identificou relações de proporcionalidade entre a vazão ( $Q$ ), a área da seção transversal constante do filtro ( $A$ ), ao comprimento do filtro ( $L$ ) e à diferença de cargas piezométricas ( $h_1 - h_2$ ), conforme a Equação (A.4):

$$Q = KA \frac{(h_1 - h_2)}{L}, \quad (\text{A.4})$$

As aplicações da Lei de Darcy são amplas nas mais diversas áreas da engenharia, por exemplo, na hidrologia, no estudo de águas subterrâneas, na mecânica dos solos e na engenharia de petróleo. Rosa, Carvalho e Xavier (2006) apresenta em notação tensorial a Lei de Darcy para fluidos newtonianos e fluxo laminar na forma da Equação (A.5):

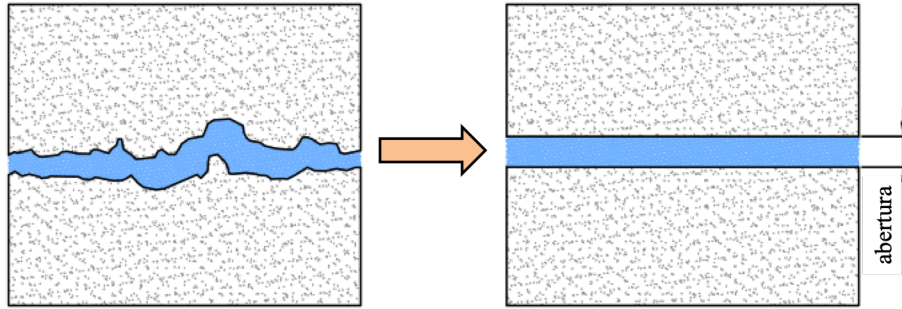
$$\mathbf{q}_w = -\frac{\mathbf{k}}{\mu_w} (\nabla p_w - \rho_w \mathbf{g}), \quad (\text{A.5})$$

onde  $\mathbf{q}_w$  é o vetor de fluxo de água,  $\mathbf{k}$  é o tensor de segunda ordem de permeabilidade da matriz rochosa,  $\mu_w$  é a viscosidade dinâmica da água,  $p_w$  é a pressão neutra,  $\rho_w$  é a massa específica da água e  $\mathbf{g}$  é o campo gravitacional.

A grandeza física que expressa a capacidade de penetração de um fluido em um meio poroso recebe o nome de permeabilidade. Em problemas bidimensionais de fluxo em meios porosos ortotrópicos, a permeabilidade  $\mathbf{k}$  é dada pelo tensor de segunda ordem conforme:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{yy} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Figura 25: Simplificação da fratura segundo o Modelo de Placas Paralelas.



Fonte: elaborado pelo autor.

onde  $k_{xx}$  e  $k_{yy}$  são as permeabilidades do meio nas direções principais  $x$  e  $y$ , respectivamente. Considerando o vetor de fluxo  $\mathbf{q}_w$  perpendicular ao campo gravitacional  $\mathbf{g}$ , segundo Rosa, Carvalho e Xavier (2006), a Equação (A.5) pode ser simplificada para fluidos incompressíveis e reescrita da seguinte forma:

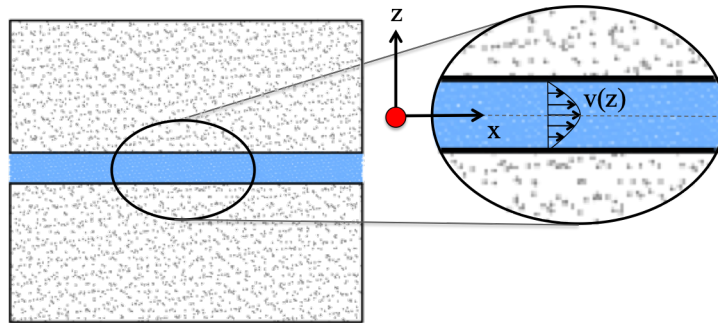
$$\mathbf{q}_w = -\frac{\mathbf{k}}{\mu_w} \nabla p_w. \quad (\text{A.7})$$

### A.3 Modelo de Placas Paralelas

Quando o meio poroso apresenta fraturas como, por exemplo, reservatórios de petróleo naturalmente fraturados, a permeabilidade das fraturas pode ser definida segundo o Modelo de Placas Paralelas (SNOW, 1965). Esse modelo simplifica a geometria das faces da fratura a planos lisos, paralelos e com abertura constante. A abertura da fratura ( $a_F$ ) refere-se então à distância constante entre suas paredes. Em problemas bidimensionais, essa simplificação pode ser ilustrada conforme a Figura 25.

A simplificação proposta por esse modelo permite que o fluxo através da fratura seja considerado laminar e com perfil de velocidades parabólico na seção transversal da fratura, conforme Figura 26.

Figura 26: Perfil de velocidades na seção transversal da fratura.



Fonte: elaborado pelo autor.

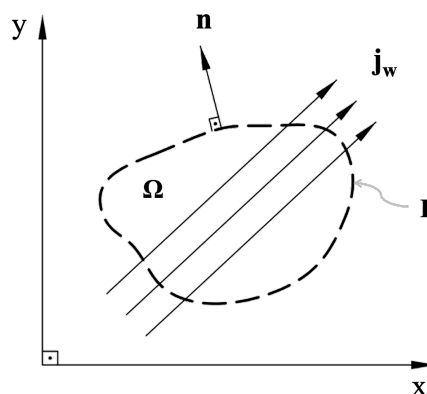
Considerando que o fluido é incompressível e que o escoamento acontece apenas na direção do eixo  $x$ , a permeabilidade de uma única fratura  $k_F$  é dada pela Lei Cúbica, que tem origem nas equações de Navier-Stokes (WITHERSPOON et al., 1980; BEAR, 1972), e pode ser escrita como:

$$k_F = \frac{a_F^2}{12}. \quad (\text{A.8})$$

#### A.4 Equações de conservação de massa

Considere um volume de controle arbitrário no sistema de referências Cartesiano  $(x, y)$ , fixo no espaço e no tempo, dado por  $\Omega$ , delimitado por uma superfície de contorno  $\Gamma$ , em que  $\mathbf{n}$  é o vetor normal a esse contorno, conforme a Figura 27.

Figura 27: Volume de controle.



Fonte: adaptado de Cleto (2016).

O fluxo de massa de água é representado por  $\mathbf{j}_w$ . Assim, a conservação de massa de água no volume de controle, na inexistência do termo de fonte ou sumidouro, é representada

matematicamente conforme a Equação (A.9):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} PtS_w\rho_w d\Omega = - \int_{\Gamma} \mathbf{j}_w \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (\text{A.9})$$

A inexistência do termo de fonte significa a igualdade entre a massa de água que entra e a massa de água que sai do volume de controle.

Utilizando o Teorema da Divergência, o termo do lado direito da equação (A.9) é reescrito como:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{j}_w \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{j}_w d\Omega. \quad (\text{A.10})$$

Como não há variação do volume de controle no espaço e no tempo, reescreve-se a Equação (A.10) na forma:

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial(PtS_w\rho_w)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_w \right] d\Omega = 0. \quad (\text{A.11})$$

Devido a arbitrariedade do volume do controle, a expressão anterior torna-se válida para qualquer volume e pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial(PtS_w\rho_w)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_w = 0, \quad (\text{A.12})$$

em que o primeiro termo da expressão é denominado termo de armazenamento e será desprezado neste trabalho. Essa desconsideração é oriunda das simplificação adotadas para realização das simulações numéricas. Portanto, considerou-se apenas o termo de transporte de massa, dado por  $\mathbf{j}_w$ .

Em todas as simulações realizadas a porosidade  $Pt$  foi considerada constante, assim como a massa específica da água,  $\rho_w$ , devido sua pequena variabilidade na condição isotérmica. Ademais, o meio foi considerado saturado com  $S_w = 1$ . Essas simplificações representam a desconsideração do regime transiente e consideração apenas do regime estacionário para o problema de fluxo em meio poroso.

Foram desconsideradas também quaisquer deformações da matriz sólida e, conseqüentemente, o fluxo de Biot, que representa a interação da entre as deformações da matriz sólida e o fluxo de fluidos (BIOT, 1956) foi desprezado. Dessa forma, o fluxo de massa de água é dado por:

$$\mathbf{j}_w = \rho_w \mathbf{q}_w. \quad (\text{A.13})$$

Substituindo (A.13) em (A.12), nota-se que a massa específica da água  $\rho_w$  está presente em todos os termos e pode ser cancelada. Dessa forma, a equação de conservação de massa pode ser reescrita na forma da Equação (A.14):

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_w = 0. \quad (\text{A.14})$$

Tornando explícita a Lei de Darcy, a equação de conservação de massa é então expressa por:

$$\left( \frac{\rho_w}{\mu_w} \right) \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla p_w) = 0. \quad (\text{A.15})$$

## A.5 Método dos Elementos Finitos

Muitos fenômenos físicos na engenharia e ciência podem ser descritos em termos de equações diferenciais parciais. Resolver essas equações de forma analítica pode não ser uma tarefa muito simples, sendo muitas vezes até impossível. O Método de Elementos Finitos (MEF) é uma poderosa ferramenta de análise numérica que permite solucionar de forma aproximada equações diferenciais parciais. Na engenharia, suas aplicações estão relacionadas à mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos, termodinâmica e eletromagnetismo por meio de simulações computacionais (JACOB; TED, 2007).

A ideia fundamental do MEF consiste em discretizar um domínio físico em subdomínios denominados elementos, de modo que esses elementos sejam representativos do domínio original. Um elemento é conectado aos elementos adjacente por nós, e o conjunto de elementos e nós de um determinado domínio recebe o nome de malha, como ilustra a Figura 28.

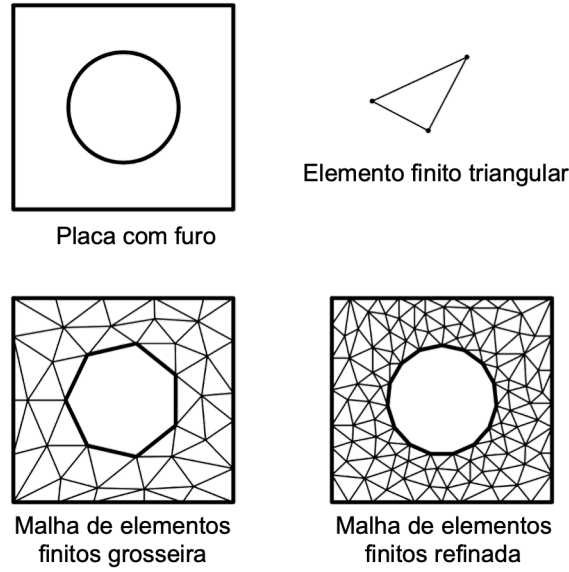
A cada elemento, adotando aproximações para as pressões e fluxos nodais, obtém-se um sistema de equações, que permite a montagem de um sistema de equações global. A partir da consideração das condições de contorno, esse sistema pode ser resolvido, e as respostas referem-se às pressões nos nós, que são pontos conhecidos do domínio (LEWIS; NITHIARASU; SEETHARAMU, 2004).

Considerando as simplificações adotadas para o problema de fluxo em meio poroso, onde apenas o termo de transporte é considerado na equação de conservação de massa, a forma fraca da equação governante pode ser obtida da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} W_i \nabla \cdot \left( \rho_w \frac{\mathbf{k}}{\mu_w} \nabla p_w \right) d\Omega = 0, \quad \forall W_i \in U_0, \quad (\text{A.16})$$

onde  $W_i$  é uma função arbitrária denominada função ponderadora e o índice  $i$  identifica o nó.

Figura 28: Exemplo de malha de elementos finitos.



Fonte: Adaptado de Jacob e Ted (2007).

A regra da derivada do produto é então aplicada à Equação (A.16), que pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} \nabla W_i \cdot \left( \rho_w \frac{\mathbf{k}}{\mu_w} \nabla p_w \right) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left[ W_i \left( \rho_w \frac{\mathbf{k}}{\mu_w} \nabla p_w \right) \right] d\Omega = 0, \quad \forall W_i \in U_0. \quad (\text{A.17})$$

O segundo termo pode ser escrito como uma integral de superfície, equivalente à aplicação do Teorema da Divergência, conforme Equação (A.18):

$$\int_{\Omega} \nabla W_i \cdot \left( \rho_w \frac{\mathbf{k}}{\mu_w} \nabla p_w \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \left[ W_i \left( \rho_w \frac{\mathbf{k}}{\mu_w} \nabla p_w \right) \right] d\Gamma = 0 \quad \forall W_i \in U_0. \quad (\text{A.18})$$

Com o uso da condição de contorno natural, substituindo a Equação (A.7) na Equação (A.18), tem-se:

$$\int_{\Omega} \nabla W_i \cdot \left( \rho_w \frac{\mathbf{k}}{\mu_w} \nabla p_w \right) d\Omega + \int_{\Gamma_q} W_i \rho_w q_w^* d\Gamma_q = 0 \quad \forall W_i \in U_0. \quad (\text{A.19})$$

Por fim, aplica-se o Método de Galerkin (JACOB; TED, 2007) é aplicado à Equação (A.19) conforme:

$$\int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \left( \rho_w \frac{\mathbf{k}}{\mu_w} \nabla p_w \right) d\Omega = - \int_{\Gamma} N_i \rho_w q_w^* d\Gamma. \quad (\text{A.20})$$

O Método de Galerkin consiste em considerar que as funções ponderadoras  $W_i$  sejam iguais às funções de forma  $N_i$ . (JACOB; TED, 2007; LEWIS; NITHIARASU; SEETHA-

RAMU, 2004; GOSZ, 2005) apresentam maiores detalhes a respeito da equacionamento demonstrado.

A Equação (A.20), correspondente ao termo de transporte da equação do balanço de massa, pode ser particularizada para um subdomínio o qual refere-se a um elemento finito. Assim, para cada elemento cujo domínio é representado por  $\Omega^e$ , o termo de transporte de massa é dado por:

$$\int_{\Omega^e} \nabla N_i \cdot \left( \rho_w \frac{\mathbf{k}}{\mu_w} \nabla p_w \right) d\Omega^e = \left( \frac{\rho_w}{\mu_w} \right) \mathbf{B}_p^T \mathbf{k} \mathbf{B}_p \mathbf{p} A_e, \quad (\text{A.21})$$

onde  $\mathbf{B}_p$  é a matriz das derivadas das funções de forma  $N_i$ , sendo  $\mathbf{B}_p^T$  sua transposta;  $\mathbf{p}$  é o vetor de pressões nodais, incógnita do problema; e  $A_e$  a área do elemento. Neste trabalho a ferramenta numérica empregada para resolver a integral foi a Quadratura de Gauss, com uso de ponto de integração por elemento triangular linear.

## A.6 Elemento de interface de elevada razão de aspecto

Nas simulações realizadas neste trabalho, considerou-se que o fluxo ocorre em meio poroso naturalmente fraturados, onde as fraturas são representadas explicitamente por pares de elementos de interface de elevada razão de aspecto (*high aspect ratio* - HAR) (MANZOLI et al., 2019), como mostra a Figura A.6.

Figura 29: Representação explícita das fraturas: a) malha sem fraturas; b) malha com duas fraturas representadas por elementos HAR.



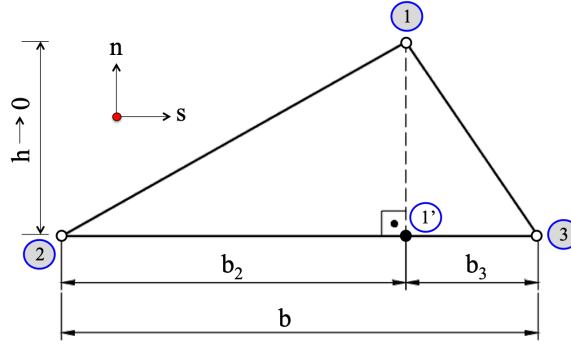
Fonte: elaborado pelo autor.

Considere um elemento finito sólido triangular com base  $b$  e altura  $h$ , conforme a Figura 30.

Tal elemento é denominado elemento de elevada razão de aspecto em função da razão entre suas dimensões (MANZOLI et al., 2019), dada por  $b/h$  sendo que  $b \gg h$ . Considerando



Figura 30: Elemento de interface de elevada razão de aspecto.



Fonte: adaptado de (MANZOLI et al., 2019).

$b_2 = \alpha b$ ,  $b_3 = (1 - \alpha)b$  e  $\alpha$  um fator de multiplicação, tal que  $\alpha \in [0, 1]$ , as coordenadas dos nós 1, 2 e 3 podem ser escritas na forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(1)} = (\alpha b, h) \\ \mathbf{x}^{(2)} = (0, 0) \\ \mathbf{x}^{(3)} = (b, 0) \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Conforme o sistema de referências  $(n, s)$  (30), pode-se descrever a aproximação para o gradiente do campo de pressão no interior do elemento como:

$$\nabla p_f = \mathbf{B}_p \mathbf{P} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} -X_n^{32} & X_n^{31} & -X_n^{21} \\ X_s^{32} & -X_s^{31} & X_s^{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p^{(1)} \\ p^{(2)} \\ p^{(3)} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.23})$$

em que  $p^{(1)}$ ,  $p^{(2)}$  e  $p^{(3)}$  correspondem, respectivamente, às pressões nos nós 1, 2 e 3;  $X_n^{ij} = X_n^i - X_n^j$  refere-se à distância entre os nós  $i$  e  $j$  na direção  $n$  e, de forma análoga,  $X_s^{ij}$  representa a distância entre os nós na direção  $s$ .

Desse modo, reescreve-se o gradiente do campo de pressão na forma (MANZOLI et al., 2019):

$$\nabla p_f = \frac{1}{bh} \begin{bmatrix} 0 & -h & h \\ b & -b_3 & -b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p^{(1)} \\ p^{(2)} \\ p^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{b}(p^{(3)} - p^{(2)}) \\ \frac{1}{h} \llbracket p \rrbracket \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

onde  $\llbracket p \rrbracket$  é denominado salto de pressão e corresponde à diferença entre as pressões do nó 1 e sua projeção na base do elemento. Desse modo, têm-se que:

$$\llbracket p \rrbracket = p^{(1)} - [(1 - \alpha)p^{(2)} + \alpha p^{(3)}] = p^{(1)} - p^{(1')}. \quad (\text{A.25})$$

Por fim, substituindo (A.25) em (A.7), o fluxo no elemento de interface é dado por:

$$\mathbf{q}_w = \tilde{\mathbf{q}}_w + \hat{\mathbf{q}}_w = -\frac{(k/\mu_w)}{b} \begin{Bmatrix} (p^{(3)} - p^{(2)}) \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{(k/\mu_w)}{h} \begin{Bmatrix} 0 \\ \llbracket p \rrbracket \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.26})$$

onde  $\tilde{\mathbf{q}}_w$  é a parcela do fluxo no elemento dependente da base  $b$  e  $\hat{\mathbf{q}}_w$ , dependente da altura  $h$ . Para que o fluxo no elemento não assuma valores extremamente altos quando  $h \rightarrow 0$ , é necessário que  $\llbracket p \rrbracket \rightarrow 0$ . Assim, o problema mantém-se fisicamente coerente. Note que  $\llbracket p \rrbracket \rightarrow 0$  significa que  $p^{(1)}$  e  $p^{(1')}$  tendem ao mesmo valor. Maiores detalhes a respeito da formulação hidráulica para o elemento de interface são apresentadas por Manzoli et al. (2019).