RESSALVA

Atendendo solicitação do autor,
o texto completo desta tese será
disponibilizado somente a partir
de 14/02/2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Fabricio Fernando Alves

Aspectos dinâmicos de operadores lineares

Tese de Doutorado

Pós-Graduação em Matemática

São José do Rio Preto

2020

Fabricio Fernando Alves

Aspectos dinâmicos de operadores lineares

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Ali Messaoudi.

São José do Rio Preto

2020

A474a

Alves, Fabricio Fernando
Aspectos dinâmicos de operadores lineares / Fabricio Fernando Alves. -- São José do Rio Preto, 2020
79 f.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto
Orientador: Ali Messaoudi

1. Matemática. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. Dinâmica linear. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Fabricio Fernando Alves

Aspectos dinâmicos de operadores lineares

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ali Messaoudi
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Nilson da Costa Bernardes Junior
UFRJ - Rio de Janeiro

Prof. Dr. José Régis Azevedo Varão Filho
UNICAMP - Campinas

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 14 de fevereiro de 2020.

À minha esposa, Nayara,

e à minha filha, Estela,

dedico.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, meu "refúgio e fortaleza, socorro bem presente na angústia"(Salmos 46:1), "minha rocha e a minha salvação; a minha defesa"(Salmos 62:6).

Agradeço ao meu orientador, Professor Doutor Ali Messaoudi, pela orientação precisa, pelo constante incentivo, pela paciência, disponibilidade e flexibilidade de horários, além das várias correções, ideias e sugestões que muito ajudaram a dar forma e conteúdo ao trabalho. Aos demais professores da comissão examinadora por aceitarem o convite para examinar este trabalho e também agradeço pelos inúmeros apontamentos e correções sugeridos, os quais, sem dúvida, enriqueceram a tese. Aproveito ainda o ensejo para agradecer os professores com quem convivi durante o período de cumprimento dos créditos em disciplinas: Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi, Dr. Claudio Gomes Pessoa, Dra. Maria Gorete Carreira Andrade, Dr. German Jesús Lozada Cruz e Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira.

Não há palavras suficientes para agradecer à minha esposa, Nayara, e à minha filha, Estela, pelo amor, apoio e compreensão, mesmo em face dos vários momentos de ausência, sempre me servindo de inspiração para prosseguir adiante. Agradeço ainda aos meus pais, Marilene e Aldinei, pelo apoio incondicional em todos os momentos e aos meus irmãos, Weslley e Danielle, pela amizade e incentivo. Sou muito grato também aos irmãos na fé pelas orações, intercessões e cuidado em meu favor.

Aos colegas de pós-graduação: Otávio, Junior, Heloísa, Laura, Rafael, Willian, Jarne, Alisson, Rafaela, Ana Lívia, Luiz Fernando e Eliton, pelo convívio agradável, pelas conversas e discussões sempre produtivas nas horas de estudo. Ao Douglas Cesaretti de Freitas, pela amizade de muitos anos, sempre solícito em me ajudar no que fosse preciso.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

Por último, mas não menos importante, agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo que, por meio de seu Programa de Afastamento para Qualificação, viabilizou a conclusão da tese.

"A fé é a roda mestra; ela põe em funcionamento todas as demais graças".
Thomas Watson, *A Body of Divinity*.
Banner of Truth, London, 1958, p.151

Resumo

Nessa tese, estudamos algumas propriedades dinâmicas no contexto de Dinâmica Linear em espaços de Banach de dimensão infinita, como transitividade por cadeia, transitividade por cadeia em média, sombreamento e sombreamento médio, entre outros. Vários resultados foram provados e muitas outras questões foram propostas. No que concerne à transitividade por cadeia, provamos que toda componente conexa do espectro de um operador transitivo por cadeia intersecta o círculo unitário. A recíproca desse resultado foi investigada em dimensão finita e para deslocamentos ponderados. Estabelecemos também critérios para que uma classe de deslocamentos ponderados unilaterais seja transitivo por cadeia. Quanto à transitividade por cadeia em média, provamos que a classe dos operadores transitivos por cadeia em média contém a classe dos operadores transitivos por cadeia e dos operadores hiperbólicos. Estudamos ainda a transitividade por cadeia para uma transformação esférica induzida por uma matriz inversível. Além disso, foi demonstrado que um operador hiperbólico possui sombreamento médio; que em dimensão finita hiperbolicidade e sombreamento médio coincidem; que, na presença de expansividade uniforme, a propriedade de sombreamento médio implica a de sombreamento. Introduzimos também o conceito de expansividade média e demonstramos que expansividade média mais sombreamento médio implicam expansividade uniforme e, em particular, hiperbolicidade.

Palavras-chave: Dinâmica linear. Transitividade por cadeia. Transitividade por cadeia em média. Sombreamento. Sombreamento em média.

Abstract

In this thesis, we studied some dynamical properties on the context of Linear Dynamics on infinite-dimensional Banach spaces, such as chain transitivity, average chain transitivity, shadowing and average shadowing, among others. Many results were proved and many other questions were proposed. Concerning chain transitivity, we proved that each connected component of the spectrum of a chain transitive operator intersects the unit circle. The converse was investigated for finite dimension and for weighted shifts. We also established criteria so that a class of unilateral weighted shifts may be chain transitive. For average chain transitivity, we proved that the class of average chain transitive operators contains the class of the chain transitive operators and the class of the hyperbolic ones. We studied yet the chain transitivity for the spherical transformation induced by an invertible matrix. Moreover, we showed that a hyperbolic operator has average shadowing property; in finite dimension, hyperbolicity and average shadowing coincide; under the presence of uniform expansivity, the average shadowing property implies the shadowing property. We also introduced the concept of average expansivity and then we proved that average expansivity plus average shadowing imply uniform expansivity and, in particular, hyperbolicity.

Keywords: Linear Dynamics. Chain transitivity. Average chain transitivity. Shadowing. Average shadowing.

Sumário

Introdução

A teoria dos sistemas dinâmicos se ocupa da análise do comportamento a longo prazo de sistemas em evolução. De modo geral, os possíveis estados de um determinado sistema são descritos através dos elementos de um dado conjunto X, enquanto a evolução do sistema é descrita por meio de uma aplicação $T : X \longrightarrow X$, ou seja, se $x_n \in X$ é o estado do sistema em um instante $n \geq 0$, então $x_{n+1} = T(x_n), n = 0, 1, 2, \ldots$.

Uma tal análise pode ser feita, por exemplo, do ponto de vista topológico, dotando-se o conjunto X de uma topologia e considerando T uma aplicação contínua; ou de modo probabilístico, munindo X de uma σ-álgebra e supondo T mensurável. Essas abordagens dão origem a dois ramos de estudo dos sistemas dinâmicos:

i A Dinâmica Topológica, que se ocupa de propriedades como transitividade topológica, minimalidade, sombreamento (*shadowing*), estabilidade estrutural, caos, entropia topológica, entre outras;

ii A Dinâmica Mensurável, que trata dos estudos probabilísticos (do ponto de vista de medida) dos sistemas dinâmicos, como existência de medidas invariantes, ergodicidade, mistura forte ou fraca (*strong or weak mixing*), entropia métrica, entre outras.

Atualmente, uma área dos Sistemas Dinâmicos que se encontra muito ativa é a Dinâmica Linear, cujo propósito é o estudo da dinâmica de operadores lineares contínuos sobre espaços vetoriais topológicos, principalmente espaços de Fréchet, de Banach e espaços de Hilbert. Esta área encontra-se na intersecção das grandes áreas de Sistemas Dinâmicos e Teoria dos Operadores, empregando métodos de ambas as áreas, além de apresentar conexões com outros ramos da Matemática, tais como Análise Complexa, Análise Funcional, Teoria da Medida, Teoria dos Números e Probabilidade. Têm sido encontradas aplicações da Dinâmica Linear em áreas diversas, tais como Dinâmica Celular, Dinâmica Populacional, Engenharia de Trânsito, Teoria da Difusão e Física Quântica. Os livros de Bayart e Matheron [5] e de Grosse-Erdmann e Peris [20], publicados por volta de 2010, fornecem amplo panorama da área, além de vasta bibliografia.

Algumas das noções investigadas em Dinâmica Linear são: hiperciclicidade (transitividade topológica), superciclicidade (densidade de uma órbita projetiva na esfera unitária), hiperciclicidade frequente (a órbita densa visita cada subconjunto aberto e não vazio com densidade positiva) e caos no sentido de Devaney (hiperciclicidade e densidade do conjunto dos pontos periódicos). É sabido que estas noções jamais ocorrem quando o espaço X tem dimensão finita (veja, por exemplo, [20], Teorema 2.58, ou [5], Proposição 1.1).

Neste trabalho, consideraremos as noções de transitividade por cadeia e sombreamento médio (*average shadowing*). A primeira noção é uma generalização do conceito de transitividade topológica. A transitividade por cadeia foi estudada por Hirsch et al [21] em dinâmica topológica com respeito a repulsores e persistência uniforme. Esta noção junto com a de recorrência por cadeia têm aplicações em Economia, Epidemiologia, Teoria dos Jogos e Biologia Matemática (veja-se, por exemplo, as citações e referências de [21]). Já o sombreamento médio é um dentre os vários tipos de sombreamento que têm sido estudados nos últimos anos, com importante papel em muitos ramos dos Sistemas Dinâmicos, como Dinâmica Topológica, Dinâmica Diferenciável e Teoria ergódica (veja [28], [2], [31]).

Para operadores lineares definidos em espaços de Banach, provamos que toda componente conexa do espectro de um operador transitivo por cadeia intersecta o círculo unitário, estendendo para os operadores transitivos por cadeia um resultado devido a Kitai [22] que havia sido provado para operadores hipercíclicos. Como consequência, operadores que são hiperbólicos (aqueles cuja intersecção do espectro com o círculo unitário é vazia) ou compactos (operadores cujo fecho da imagem da bola unitária é compacto no contradomínio) não possuem transitividade por cadeia (Teorema 2.12 e Corolário 2.20). Investigamos a recíproca do resultado em dimensão finita e para deslocamentos ponderados. Apresentamos ainda critérios para que uma classe de deslocamentos ponderados unilaterais tenha a transitividade por cadeia. Também demonstramos que a classe dos operadores transitivos por cadeia em média contém a classe dos operadores hiperbólicos a dos transitivos por cadeia.

Referente ao sombreamento médio, conseguimos provar que os operadores hiperbólicos possuem sombreamento médio. Provamos também que as noções de hiperbolicidade e sombreamento médio coincidem em dimensão finita. Mostramos ainda uma classe de deslocamentos bilaterais ponderados inversíveis que possuem sombreamento médio e que não são hiperbólicos e que, na presença de expansividade uniforme, sombreamento médio implica sombreamento. Além disso, introduzimos uma nova noção, a de expansividade média, e então demonstramos que operadores expansivos em média que possuem sombreamento médio são uniformemente expansivos e hiperbólicos.

Estudamos propriedades dinâmicas da aplicação esférica $\phi : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$, induzida por uma matriz inversível A, dada por $\phi(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|}$, a qual já foi caracterizada no que diz respeito à propriedade de sombreamento em termos dos módulos dos autovalores (veja [28], Teorema 3.2.2). Parece-nos que também é possível caracterizar tal aplicação no que se refere à transitividade por cadeia, o que nos levou a propor uma conjectura e apresentamos uma prova em um caso particular.

Organizamos a tese em três capítulo, distribuídos conforme a descrição seguinte.

O Capítulo 1 é destinado a apresentar os conceitos de hiperciclicidade, expansividade e hiperbolicidade, bem como alguns resultados clássicos, envolvendo esses conceitos, além de fixar a notação a ser empregada no restante do trabalho.

O Capítulo 2 trata da transitividade por cadeia, apresentando exemplos de operadores que possuem essa propriedade, a relação dessa noção com hiperciclicidade e hiperbolicidade. Faz-se ainda uma caracterização de operadores transitivos por cadeia através do seu espectro e propomos critérios de transitividade por cadeia para uma classe de deslocamentos ponderados (*weighted shifts*) para a esquerda. Finaliza-se o capítulo introduzindo uma variação do conceito, a saber, a transitividade por cadeia em média e discutimos sua relação com a transitividade por cadeia e a hiperbolicidade. Encerramos então o capítulo com um estudo das aplicações esféricas.

No Capítulo 3, inicia-se apresentando uma compilação de alguns resultados referentes ao sombreamento e ao sombreamento limite no contexto da Dinâmica Topológica e então são apresentados os resultados da nossa investigação no âmbito dos operadores lineares.

Considerações finais

Como vimos no Capítulo 2, a noção de transitividade por cadeia é mais geral que a de hiperciclicidade, pois esta só faz sentido para operadores definidos em espaços separáveis, enquanto que a primeira também pode ser considerada em espaços não separáveis, sendo o deslocamento para a esquerda definido em $\ell_\infty(\mathbb{N})$ um exemplo de um tal operador. Além disso, o Teorema 2.12 generaliza um resultado devido a Kitai [22], o qual afirma que toda componente conexa do espectro de um operador hipercíclico intersecta o círculo unitário $\mathbb{S}^1$ e, portanto, não pode ser hiperbólico. Como consequência, todo operador compacto, definido em um espaço de Banach de dimensão infinita, não pode ser transitivo por cadeia. Por outro lado, para operadores em espaços de dimensão finita, deve-se ter seu espectro contido em $\mathbb{S}^1$. Naturalmente, pode-se indagar se a recíproca desta última afirmação é válida, o que foi respondido parcialmente na Proposição 2.25. Foi visto ainda um critério de transitividade por cadeia para uma classe de deslocamentos ponderados unilaterais à esquerda. Há, entanto, várias questões para responder no que diz respeito à transitividade por cadeia, por exemplo:

- Se T é um operador transitivo por cadeia, então $T \times T$ é transitivo por cadeia? No caso particular em que T é uma rotação, a resposta é afirmativa (veja Proposição 2.22).

- Se $T \times T$ é transitivo por cadeia, então $T \times \cdots \times T$ é transitivo por cadeia? É sabido que se $T \times T$ topologicamente transitivo implica $T \times \cdots \times T$ topologicamente transitivo (veja [20], Teorema 1.51).

- É possível caracterizar os deslocamentos ponderados à esquerda que possuem transitividade por cadeia?

- Vale a recíproca do Corolário 2.21 para operadores definidos em $\mathbb{C}^n$ Esta questão foi respondida parcialmente pela Proposição 2.22.

- Será que existe que um critério (análogo ao da hiperciclicidade) que garanta que um operador é transitivo por cadeia?

- Será que existe alguma caracterização espectral de um operador T transitivo por cadeia (mas não topologicamente transitivo) que tenha alguma implicação sobre o espectro pontual do operador adjunto T^*?

Ainda no Capítulo 2, foi considerada a noção de transitividade por cadeia em média e, tal como foi definido, segue todo operador transitivo por cadeia também é transitivo por cadeia em média. E mais, provamos (Corolário 2.47) que um operador hiperbólico também pode possuir transitividade por cadeia em média e foi apresentado ainda um exemplo de um operador que tem essa propriedade, embora não seja transitivo por cadeia e nem hiperbólico. Duas perguntas importantes a serem consideradas nesse caso são:

- Existe algum operador que não seja transitivo por cadeia em média?

- Quão grande é a classe dos operadores transitivos por cadeia em média?

No que se refere às transformações esféricas, há algumas questões interessantes:

- A Proposição 2.58 permanece válida para aplicações esféricas em $\mathbb{S}^n$?

- Existe alguma caracterização para aplicações esféricas induzidas por operadores lineares definidos em espaços de Banach de dimensão infinita?

Por fim, no Capítulo 3 discorremos sobre a noções de sombreamento, sombreamento limite e sombreamento médio. Sabe-se que um operador inversível que seja expansivo e tenha sombreamento também tem sombreamento limite, pois é hiperbólico (veja [7], Teorema 1) e todo operador hiperbólico tem sombreamento limite [6]. Vimos ainda que se um deslocamento inversível ponderado para a esquerda tem a propriedade de sombreamento, então é transitivo por cadeia em média (Proposição 3.14). Foi provado ainda que em hiperbolicidade implica sombreamento médio e que em dimensão finita essas propriedades, bem como a propriedade de sombreamento, coincidem. Do mesmo modo, provamos que se um operador é uniformemente expansivo e possui sombreamento médio, então ele possui sombreamento. Assim, os resultados obtidos conduzem a alguns questionamentos, por exemplo:

- Quais são as relações entre sombreamento, sombreamento limite e sombreamento médio? Existe algum operador que possui sombreamento, mas não sombreamento limite ou médio? E vice-versa?

- Quando um operador T é normal, então sombreamento médio equivale à hiperbolicidade?

- Um operador que tenha sombreamento médio e seja expansivo também é hiperbólico?

- Sombreamento implica transitividade por cadeia em média? A resposta para esta pergunta é afirmativa no caso de deslocamentos ponderados à esquerda, como consequência dos resultados obtidos em [6] que caracterizam quais desses deslocamentos possuem sombreamento.

Referências

[1] Alves, J. Ferreira. *Hyperbolic isomorphisms in Banach spaces.* Disponível em: www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/pub/senegal.pdf. Acesso em 10 jan. 2020, 08:45.

[2] Aoki, N.; Hiraide, K. *Topological Theory of Dynamical Systems - Recent Advances*, North-Holland, Amsterdam, 1994.

[3] Banks, J.; Brooks, J.; Cairns, G.; Davis, G.; Stacey, P. *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly **99** (1992), no. 4, 332-334.

[4] Barwell, A. D.; Good, C.; Oprocha, P.; Raines, B. *Shadowing, expansivity, chain transitivity and ω-limit sets*, (2019), (arXiv:1701.05383v2).

[5] Bayart, F.; Matheron, É. *Dynamics of Linear Operators,* Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[6] Bernardes Jr, N. C.; Cirilo, P. R.; Darji, U. B.; Messaoudi, A.; Pujals, E. R. *Expansivity and shadowing in linear dynamics*, J. Math. Anal. Appl. **461** (2018), no. 1, 796-816.

[7] Bernardes Jr, N. C.; Messaoudi, A. *Shadowing and structural stability for operators*, Ergodic Theory and Dynamical Systems (2020)

[8] Birkhoff, G. D. *Surface transformations and their dynamical applications,* Acta Math., **43** (1922), 1 - 119.

[9] Bourhim, A. *Bounded point evaluations and local spectral theory,* Dissertation, Trieste, 2000 (arXiv:math/0008197v1).

[10] Brezis, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations,* Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg and London, 2011.

[11] Carvalho, B. *Hyperbolicity, transitivity and the two-sided shadowing property*, Proceedings of the American Mathematical Society **143** (2015), no. 2, 657-666.

[12] Carvalho, B.; Kwietniak, D. *On homeomorphisms with the two-limit shadowing property*, J. Math. Anal. Appl. **420** (2014), no. 1, 801-813.

[13] Das, R.; Garg, M. *Average chain transitivity and the almost average shadowing property*, Commun. Korean Math. Soc. **32** (2017), no. 1, 201-214.

[14] Dastjerdi, D. A.; Hosseini, M. *Shadowing with chain transitivity*, Topology and its applications **156** (2009), 2193-2195.

[15] Devaney, R. L. *An introduction to chaotic dynamical systems*, second edition, Addison-Wesley Studies in Nonlinearity, Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.

[16] Dowson, H.R *Spetral theory of linear operators,* Academic Press, London, New York and San Francisco, 1978.

[17] Eisenberg, M.; Hedlund, J.H. *Expansive automorphisms of Banach spaces*, Pacific Journal of Mathematics **34** (1970), no. 3, 647-656.

[18] Furstenberg, H. *Disjointness in ergodic theory, minimal sets and a problem of Diophantine approximation*, Math. Systems Theory. **1** (1967), 1-49.

[19] Godefroy, G; Shapiro, J. H. *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (1991), no. 2, 229-269.

[20] Grosse-Erdmann, K.; Peris Manguillot, A. *Linear Chaos,* Springer-Verlag, London, 2011.

[21] Hirsch, M.; Smith, H.L.; Zhao, X.Q. *Chain transitivity, attractivity and strong repellors for semidynamical systems*, J. Dynam. Differential Systems **13** (2001), no. 1, 107-131.

[22] Kitai, C. *Invariant closed sets for linear operators*, Ph.D. thesis, University of Toronto, Toronto, 1982.

[23] Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications,* John Wiley & Sons, 1989.

[24] Kulczycki, M.; Kwietniak, D.; Oprocha, P. *On almost specification and average shadowing properties*, Fundamenta Mathematicae **224** (2014), no. 3, 241-278.

[25] Lee, M. *The limit shadowing property and Li-Yorke's chaos*, Asian-European Journal of Mathematicas **9** (2016), no. 1, 7 pages (DOI: 10.1142/S1793557116500078).

[26] Li, R. *A note on shadowing with chain transitivity*, Commun. Nonlinear Sci. Num. Simulat. **17** (2012), 2815-2823.

[27] Ombach, J. *The shadowing lemma in the linear case*, Univ. Iagel. Acta Math. **31** (1994), 69-74.

[28] Pilyugin, S. Yu. *Shadowing in Dyanamical Systems,* Lecture Notes in Mathemtics, vol. 1706, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[29] Radjavi, H.; Rosenthal, P. *Invariant subspaces,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[30] Silverman, S. *On maps with dense orbits and the definition of chaos*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **22** (1992), no. 1, 353-375.

[31] Walters, P. *An Introduction to Ergodic Theory,* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1982.