

PAULO HENRIQUE GONÇALVES LEONEL DA SILVA

**CONTROLE CHAVEADO DE SISTEMAS COM  
INCERTEZAS UTILIZANDO OTIMIZADORES NÃO  
DERIVATIVOS**

Ilha Solteira - SP  
2020

PAULO HENRIQUE GONÇALVES LEONEL DA SILVA

**CONTROLE CHAVEADO DE SISTEMAS COM  
INCERTEZAS UTILIZANDO OTIMIZADORES NÃO  
DERIVATIVOS**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Câmpus de Ilha Solteira - UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira  
Orientador

Ilha Solteira - SP  
2020

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

S586c Silva, Paulo Henrique Gonçalves Leonel da.  
Controle chaveado de sistemas com incertezas utilizando otimizadores não  
derivativos / Paulo Henrique Gonçalves Leonel da Silva. -- Ilha Solteira: [s.n.],  
2020  
111 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia  
de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2020

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira  
Inclui bibliografia

1. Controle via busca extremal. 2. Otimizadores não derivativos. 3.  
Rastreamento do máximo ponto de potência. 4. Modelos fuzzy Takagi–Sugeno.  
5. Pêndulo invertido. 6. Sistemas chaveados.

  
Raiane da Silva Santos

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

TÍTULO DA TESE: Controle Chaveado de Sistemas com Incertezas Utilizando Otimizadores Não Derivativos.

**AUTOR: PAULO HENRIQUE GONÇALVES LEONEL DA SILVA**

**ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA**

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP



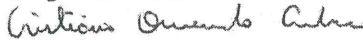
Prof. Dr. APARECIDO AUGUSTO DE CARVALHO  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP



Prof. Dr. EDSON ITALO MAINARDI JUNIOR  
Departamento de Eletroeletrônica / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnológica de Mato Grosso do Sul - IFMS



Prof. Dr. WALLYSSONN ALVES DE SOUZA  
Coordenação de Ciências Matemáticas e Naturais - CCMN / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO



Prof. Dr. CRISTIANO QUEVEDO ANDREA  
Departamento de Engenharias, Arquitetura, Urbanismo e Geografia / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Ilha Solteira, 06 de fevereiro de 2020

*À minha família, em especial aos meus pais Laurenci e José, e aos meus irmãos Renan e James, por todo amor, apoio, confiança e incentivo em todos os momentos.*

## AGRADECIMENTOS

A todos que de alguma forma contribuíram para a elaboração desse trabalho, em especial:

- À Deus, por me dar saúde e ser uma das minhas bases na vida;
- À minha família, pelos incentivos e confiança. Sem vocês essa etapa não seria vencida da forma que aconteceu. Muito obrigado por todo o apoio e suporte;
- Ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, pelos ensinamentos, orientação e conselhos. Muito obrigado por tudo!;
- Ao Prof. Dr. Jean Marcos de Souza Ribeiro e ao Prof. Dr. Rodrigo Cardim por terem aceitado participar do período de qualificação desta tese. Agradeço pelas importantes sugestões e propostas para a finalização do trabalho;
- Ao Prof. Dr. Aparecido Augusto de Carvalho, ao Prof. Dr. Edson Italo Mainardi Junior, ao Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza e ao Prof. Dr. Cristiano Quevedo Andrea por participarem da banca de defesa dessa tese de doutorado como membros titulares;
- Ao Prof. Dr. Uiliam Nelson Lenzion Tomaz Alves, por todos os auxílios durante todo o período do doutorado. Sempre disposto a ajudar. Um grande profissional e um grande ser humano. Foi um prazer poder trabalhar juntos. Um grande abraço!
- Ao aluno Marcos Henrique do Nascimento Sousa, com o qual pude trabalhar em seu projeto de iniciação científica. Um jovem de grande potencial e que com certeza terá um grande futuro. Tudo de bom.
- Agradeço com satisfação a todos os professores e membros do Laboratório de Pesquisa em Controle - LPC. Não vou citar o nome de todos que me lembrar agora, para não cometer o erro de me esquecer de alguém. Foi um prazer fazer parte desse grupo que é tão unido e onde sempre existe uma oportunidade de ajudar ou ser ajudado.
- Aos demais servidores, técnicos, funcionários e professores da Faculdade de Engenharia da UNESP de Ilha Solteira, que por algum motivo contribuíram ou fizeram parte desse período. Uma comunidade que sempre busca, cada um em sua função, pela excelência em todos os aspectos do ensino e pesquisa.

- O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 2011/17610–0.

## RESUMO

Nesta tese, utiliza-se um otimizador analógico não derivativo proposto por Teixeira & Žak em 1999 como principal ferramenta para os sistemas de controle dos projetos desenvolvidos. Tal otimizador é composto por blocos não lineares e pode ser classificado como um sistema neural artificial. Sistemas chaveados têm grande aplicação prática na otimização de sistemas e são caracterizados por possuírem subsistemas e uma lei de chaveamento que seleciona cada subsistema a cada momento. Deve-se definir condições para que seja possível projetar uma lei de chaveamento que atenda requisitos de projeto. O estudo de técnicas de controle extremal na solução de problemas de busca pelo rastreamento do máximo ponto de potência (do inglês: *Maximum Power Point Tracking* - MPPT), vem apresentando resultados interessantes na literatura e um tipo de sistema à qual essa técnica pode ser aplicada, é na geração fotovoltaica. Aplica-se o otimizador analógico citado na busca do MPPT de uma célula fotovoltaica, com o objetivo de observar o controle extremal atuando em um processo de otimização, estendendo o controle para quando existem variações de irradiação solar (cenário de uma possível passagem de nuvens). Também observa-se o comportamento do sistema quanto a manter seu correto funcionamento e estabilidade *ultimate bounded*. A contribuição principal desta tese foi uma nova proposta de utilização conjunta do otimizador de Teixeira & Žak no projeto de controladores chaveados baseados na minimização da derivada de uma função de Lyapunov. Os resultados obtidos possibilitam o projeto de controladores para plantas não lineares com um nível maior de incertezas do que tolerado com os métodos disponíveis, assegurando uma estabilidade *ultimate bounded*. A aplicação, através de simulações, desta metodologia em um sistema teórico e em um pêndulo invertido atestaram a validade do método.

**Palavras-chave:** Controle via busca extremal. Otimizadores não derivativos. Rastreamento do máximo ponto de potência. Modelos fuzzy Takagi–Sugeno. Pêndulo invertido. Sistemas chaveados. Incertezas politópicas. Desigualdades matriciais lineares (LMIs).



## ABSTRACT

On this thesis, a non-derivative analog optimizer, proposed by Teixeira & Žak in 1999, was used as the main tool for the proposed control system. Such optimizer is structured by non-linear blocks and can be classified as an artificial neural system. Switched systems have great theoretical and practical application in systems optimization and are characterized by having subsystems, and a switching law that selects each subsystem at each moment. It is necessary to define conditions so that it is possible to design a switching law for the desired performance of the controlled system. The study of Extremum Seeking Control techniques in the solution of problems of Maximum Power Point Tracking has presented interesting results, and one type of system which this technique can be applied is in the photovoltaic generation. The analog optimizer is applied in the Maximum Power Point Tracking of a photovoltaic cell, with the objective of observing the actuation of the extremal seeking control in an optimization process, extending the control when there are solar irradiation variations (a possible clouds passage scenario). And also observe the behavior of the system and how to maintain its correct functioning and ultimate bounded stability. The main contribution of this thesis was a new procedure for using the mentioned analog optimizer in the design of switched controllers based on the minimization of the derivative of a Lyapunov function. This method allows the relaxed design of controllers of uncertain nonlinear plants, for plants with great uncertainties, when compared with similar methods, assuring an ultimate bounded stability. Simulation results in a theoretical example and in an inverted pendulum illustrate the validity of the proposed results.

**Keywords:** Extremum seeking control. Non-derivative optimizers. Maximum power point tracking (MPPT). Takagi-Sugeno fuzzy models. Stick balancer. Switched Systems. Polytopic uncertainties. Linear matrix inequalities (LMIs).

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Diagrama de blocos - Otimizador analógico não derivativo Teixeira & Žak. . . . .	19
Figura 2	Sinais de entrada e saída de um detector de pico mínimo. . . . .	20
Figura 3	Trajetória típica do otimizador Teixeira & Žak. . . . .	23
Figura 4	Reiniciador do detector de pico mínimo. . . . .	25
Figura 5	Escolha do subsistema. (a) Lei de chaveamento dependente do estado. (b) Uso do otimizador analógico não derivativo. . . . .	30
Figura 6	Diagrama de teste do otimizador analógico não derivativo para o chaveamento dos subsistemas. . . . .	31
Figura 7	Resultados de malha aberta do sistema (22)-(24). . . . .	32
Figura 8	Resultados de malha fechada do sistema (22)-(24) com chaveamento realizado pelo otimizador. . . . .	33
Figura 9	Resultados de malha fechada do sistema (22)-(24) - Região de operação e parâmetros do otimizador. . . . .	34
Figura 10	Circuito equivalente de uma célula fotovoltaica. . . . .	38
Figura 11	Curvas características P-V variando-se a irradiação ( $T = 25^{\circ}C$ ). . . . .	40
Figura 12	Curvas características I-V variando-se a irradiação ( $T = 25^{\circ}C$ ). . . . .	41
Figura 13	Otimizador Teixeira & Žak com a modelagem matemática da célula voltaica. . . . .	42
Figura 14	Resposta do sistema proposto na busca do MPPT de uma célula fotovoltaica ( $G_a = 1000 W/m^2$ e $T_a = 25^{\circ}C$ ). . . . .	43
Figura 15	Resposta da célula fotovoltaica a mudança brusca de irradiação solar de $1000 W/m^2$ para $800 W/m^2$ . . . . .	44
Figura 16	O Pêndulo Invertido. . . . .	67
Figura 17	Diagrama de blocos para simulações do projeto. . . . .	83
Figura 18	Otimizador Teixeira & Žak associado ao controlador proposto. . . . .	84
Figura 19	Diagrama do sistema completo em malha fechada. . . . .	85
Figura 20	Características ideais para a função de Lyapunov - Sistema se direcionando para $V(x(\infty)) = 0$ . . . . .	86
Figura 21	Região de factibilidade para os teoremas 7 [+], 9 [o] e 10 [x]. . . . .	94
Figura 22	Resultados de projeto sem a aplicação do conjunto otimizador. . . . .	96
Figura 23	Resultados de projeto para o otimizador T-Z como elemento de escolha entre subsistemas. . . . .	97
Figura 24	Resultados de projeto - Sinal de controle e parâmetros do otimizador. . . . .	97

Figura 25	Resultados de projeto - Evolução da função de Lyapunov. . . . .	98
Figura 26	Resultados de projeto para o otimizador T-Z como elemento de escolha entre subsistemas - Detalhe da região de operação. . . . .	99
Figura 27	Detalhe da região de operação - Função de Lyapunov e parâmetros do otimizador. . . . .	99

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Parâmetros de simulação da célula fotovoltaica . . . . .	42
----------	--	----

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>O OTIMIZADOR ANALÓGICO NÃO DERIVATIVO</b>	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>CONTROLE DE SISTEMA CHAVEADO LINEAR COM GRANDES INCERTEZAS</b>	<b>27</b>
3.1	CHAVEAMENTO DE SUBSISTEMAS UTILIZANDO O OTIMIZADOR TEIXEIRA & ŽAK	28
<b>4</b>	<b>CONTROLE VIA BUSCA EXTREMAL APLICADO AO MPPT</b>	<b>36</b>
4.1	BUSCA PELO MPPT DO MODELO DE UMA CÉLULA FOTOVOLTAICA	37
<b>5</b>	<b>CONTROLADORES CHAVEADOS E ESTABILIDADE DE SISTEMAS FUZZY T-S VIA LMIs</b>	<b>46</b>
5.1	ESTABILIDADE DE SISTEMAS FUZZY TAKAGI-SUGENO VIA LMIs	50
<b>6</b>	<b>CONTROLADOR FUZZY CHAVEADO APLICADO AO PÊNDULO INVERTIDO</b>	<b>65</b>
6.1	O MODELO DO PÊNDULO INVERTIDO TEIXEIRA & ŽAK (1999)	66
6.2	MODELAGEM FUZZY TAKAGI-SUGENO EXATA PARA O PÊNDULO INVERTIDO	71
6.3	PROPOSTAS DE CONTROLADORES E LEIS DE CHAVEAMENTO	82
6.4	RESULTADOS DE FACTIBILIDADE E A REGIÃO DE OPERAÇÃO	90
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>101</b>
7.1	TRABALHOS FUTUROS	103
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>104</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Sistemas chaveados englobam uma classe de sistemas que apresentam um conjunto de subsistemas e uma regra que deve ser determinada de modo a orquestrar o chaveamento entre esses subsistemas, assegurando estabilidade assintótica e bom desempenho ao projeto em malha fechada (DEAECTO *et al.*, 2011). Uma das principais questões do controle chaveado é determinar sobre quais condições é possível estabilizar um sistema a partir da determinação de leis de chaveamento adequadas.

As técnicas comumente usadas para estudar esses tipos de sistemas surgem da escolha de classes distintas de funções de Lyapunov, de modo que a principal diferença entre elas é o nível de conservadorismo das condições promovidas (DEAECTO *et al.*, 2010).

Para existirem tais leis de chaveamento que resultem em características estabilizantes, são necessários fatores como por exemplo, a existência de combinações convexas entre as matrizes de subsistemas dinâmicos, onde primordialmente, todos os autovalores desta combinação convexa apresentem parte real negativa, para assim ser possível determinar uma lei de chaveamento dependente das variáveis de estado para estabilizar o sistema linear chaveado contínuo no tempo (WICKS *et al.*, 1994).

Por outro lado, o otimizador Teixeira & Žak é um sistema que proporciona robustez e eficiência ao projeto de busca pelo mínimo de uma função objetivo sem a necessidade de conhecer explicitamente a derivada de tal função (TEIXEIRA; ŽAK, 1999).

Revisões da bibliografia, como em Montanari (2016), citam alguns fatos importantes para a pesquisa e projeto de otimizadores, bem como as origens da otimização até o século XX, quando houve um grande aumento no desenvolvimento de otimizadores, principalmente por causa das guerras mundiais. Neste período, em 1917, ocorreu a publicação do primeiro livro sobre a otimização: “Teoria de mínimos e máximos de H. Hancock” (HANCOCK, 1917).

Já Dantzig & Neumann (DANTZIG, 1948), apresentam respectivamente o método Simplex, bem como a teoria da dualidade, no mesmo ano de 1947. Tais modelos são usados para buscar o ótimo global através de deslocamentos entre pontos extremos do limite da região viável (vértices), considerando que um desses pontos é a solução ótima. Kantorovich, apresentou o modelo *Linear Programming* e um algoritmo para resolvê-lo em 1975, garantindo a ele, junto com Koopmans, o prêmio Nobel de Economia. Este modelo consiste em buscar o melhor resul-

tado (como obter maior lucro e menor custo) em um modelo matemático descrito por meio de relações lineares.

Algumas contribuições e colaborações já apresentadas durante esse projeto de pesquisa consistem em duas aplicações do otimizador Teixeira & Žak a sistemas distintos mas com objetivos comuns para a busca da região ótima. No primeiro problema, utiliza-se a característica de que uma condição para se projetar uma lei de chaveamento para a estabilização de um sistema dinâmico chaveado é a existência de uma *combinação convexa Hurwitz* entre os subsistemas. Assim, estuda-se o caso no qual esta condição não é atendida, mesmo existindo uma lei de chaveamento que estabilize o sistema, como quando existem grandes incertezas na dinâmica da planta (SILVA *et al.*, 2017).

No segundo problema estudado pelo autor, a utilização de técnicas de controle extremal na solução da busca do máximo ponto de potência (do inglês: *Maximum Power Point Tracking - MPPT*), permitiu associar o otimizador analógico não derivativo Teixeira & Žak, à busca do ponto ótimo de um sistema pela aplicação da técnica de MPPT de uma célula fotovoltaica, visando aumentar o rendimento de geradores fotovoltaicos. A validação dos resultados foi feita através de simulações do sistema dinâmico do otimizador acrescentado da modelagem matemática de uma célula fotovoltaica (SOUSA, 2018).

Na literatura, já existem trabalhos que apresentam condições de estabilidade que não exigem um decrescimento uniforme da função de Lyapunov (GEROMEL; COLANELI, 2006). Além dos casos em que existe o chaveamento dos sistemas, também é explorado na literatura o chaveamento entre ganhos de realimentação para sistemas incertos (SOUZA *et al.*, 2013).

A partir do modelo fuzzy Takagi-Sugeno de algumas classes de plantas não lineares e com incertezas, resultados já demonstraram que é possível projetar sistemas de controle chaveados que utilizam a função de Lyapunov quadrática para obter um conjunto de ganhos de realimentação baseados em desigualdades matriciais lineares (do inglês: *Linear Matrix Inequalities - LMIs*). O ganho do controlador é escolhido pela lei de controle que seja capaz de retornar o menor valor da derivada no tempo da função de Lyapunov, tendo essa metodologia como diferencial, o fato de que é eliminada a necessidade de se encontrar expressões das funções de pertinência para implementar a lei de controle (SOUZA *et al.*, 2014).

A aplicação de otimizadores se deu no projeto de sistemas de controle avançados para *Antilock-Brake-System (ABS)* (LEE; ŽAK, 2002) em que um controlador de lógica fuzzy tinha o objetivo de, no caso de uma emergência, parar os veículos mais rapidamente procurando maximizar o atrito dos pneus com a pista, reduzindo assim os deslizamentos das rodas.

Quando há a presença de ruído, otimizadores analógicos baseados em redes neurais apresentam uma melhor resposta devido suas funções de histerese (CALLI *et al.*, 2012).

Utilizando o otimizador Teixeira & Žak, tem-se a aplicação no controle do fator de potência (CARDIM, 2003), no qual procurou-se manter o fator de potência em valores especificados na presença de mudanças de carga para evitar assim desperdícios de energia, já que a energia reativa não se transforma em trabalho útil para o consumidor e acaba sendo dissipada na rede de transmissão de energia. Nesse caso, também são apresentadas outras possibilidades de arranjos do otimizador Teixeira & Žak para estender as aplicações à sistemas de ordem maiores que uma entrada e uma saída.

No rastreamento de sistemas incertos não lineares com direção de controle desconhecida (OLIVEIRA, 2010), desenvolveu-se estratégias de controle via busca extremal (do inglês: *Extremum Seeking Control* - ESC) para o rastreamento semi global e global. O controle via busca extremal também já foi explorado visando otimizar o rendimento de geradores de energia elétrica e freios ABS em um mesmo trabalho (AMINDE, 2013). Sendo uma classe de sistemas não lineares incertos, demonstrou-se que é possível alcançar uma vizinhança arbitrariamente pequena do extremo ótimo desejado usando apenas realimentação de saída. Como contribuição, a estratégia proposta permitiu alcançar o extremo de uma função não linear desconhecida para todas as condições iniciais (convergência e estabilidade globais). Também foram apresentadas algumas técnicas de ajuste de parâmetros para alcançar a convergência para o extremo global mesmo na presença de extremos locais.

Na área médica, a utilização de estimulação elétrica neuromuscular (do inglês: *Neuromuscular Electrical Stimulation* - NMES) permitiu a ativação de nervos motores utilizando eletrodos, com o objetivo de realizar um recrutamento artificial de músculos de pacientes afetados, que sofreram de danos motores, sendo utilizada a aplicação de modos deslizantes como aproximação ao controle de movimento e deslocamento angular dos braços do paciente (OLIVEIRA *et al.*, 2017). Este estudo, resultou de modo qualitativo, em vantagens como redução de erros em comparação com o controle Proporcional Integral, mais explorado na literatura, já que o procedimento apresentado neste caso não necessitou do conhecimento da ordem relativa da planta e proporciona simplicidade de projeto.

Um algoritmo de busca extremal do tipo gradiente, baseado em preditores, para lidar com mapeamentos estáticos quadráticos, na presença de atrasos variantes no tempo (OLIVEIRA; SANTOS, 2018), utilizou estimativas baseadas em perturbação para a Hessiana, desconhecida do mapeamento não linear localmente quadrático. Tais estimativas foram introduzidas para acomodar a natureza variável do atraso, que pode surgir tanto nos sinais de atuação (entrada)



quanto de medição (saída medida). Esse resultado foi alcançado utilizando-se a transformação *backstepping* e a teoria de *averaging* para sistemas de dimensão infinita. Foram alcançadas estabilidade exponencial local do sistema em malha fechada e a convergência assintótica para uma vizinhança pequena do ponto de extremo desconhecido.

Um projeto de busca extremal baseado em Newton para mapeamentos estáticos escalares em cascata, com dinâmica de atuação governada por equações diferenciais parciais de difusão (OLIVEIRA; ALBUQUERQUE, 2018) apresentou que uma dinâmica de atuação deve ser conhecida, mas a taxa de convergência do algoritmo é independente dos parâmetros do mapeamento estático baseadas nas perturbações do gradiente e da inversa da Hessiana. O esquema de controle adaptativo proposto, primeiro anula os efeitos da dinâmica de atuação nos sinais de perturbação e depois, aplica um controle de fronteira para o processo de difusão via transformação *backstepping*. Garante-se a estabilidade exponencial local e a convergência para uma pequena vizinhança do extremo desejado.

Uma extensão do Controle Adaptativo Binário por Modelo de Referência (BMRAC) é uma estratégia adaptativa com bom desempenho transitório e robustez de controle por modos deslizantes, com a vantagem de utilizar um sinal de controle contínuo e sem *chattering* (BATTISTEL *et al.*, 2018), obtendo como resultado, um controlador de realimentação de saída que obtém rastreamento global e exato de maneira robusta sem a necessidade das condições de simetria usualmente necessárias em sistemas sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO).

Em outros estudos encontrados na literatura foram apresentadas técnicas de controle para o denominado supercapacitor, a fim de manter-se o nível de tensão do elo de corrente contínua (CC) do conversor *back-to-back* de um sistema de geração eólica dentro dos níveis adequados durante distúrbios (CARVALHO *et al.*, 2018). As técnicas são avaliadas e comparadas com base nas simulações da resposta do aerogerador frente à diferentes perturbações. Simulações em tempo real mostraram que o supercapacitor com o controlador baseado na lógica fuzzy obteve os melhores resultados e pôde aperfeiçoar a operação da unidade eólica, porque possibilitou aperfeiçoar a proteção do elo CC e contribuir para uma considerável redução nas variações de potência enviada à rede pelo aerogerador.

A técnica de Busca Extremal Estocástica (do inglês: *Stochastic Extremum Seeking* - ES) como em Paz & Oliveira (2018), foi aplicada para adaptar os ganhos de um controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) na estimulação elétrica neuromuscular (NMES). O esquema proposto foi aplicado no controle da posição do braço de pacientes com sequelas de Acidente Vascular Cerebral para coordenar os movimentos de flexão e extensão dos braços. Uma das vantagens está em poder eliminar os testes iniciais de sintonia, já que os parâmetros do controlador

são automaticamente computados em tempo real (PAZ; OLIVEIRA, 2018).

A contribuição principal desta tese foi uma nova proposta de utilização conjunta do otimizador de Teixeira & Žak (Otimizador T-Z) no projeto de controladores chaveados baseados na minimização da derivada de uma função de Lyapunov. Os resultados obtidos possibilitam o projeto de controladores para plantas não lineares com um nível maior de incertezas do que tolerado com os métodos disponíveis, assegurando uma estabilidade *ultimate bounded* (ALVES, 2017). A aplicação, através de simulações, desta metodologia em um sistema teórico e em um pêndulo invertido atestaram a validade do método.

Deste ponto em diante, esse trabalho foi organizado da seguinte forma quanto à sua estrutura geral:

- No **Capítulo 2** descreve-se o otimizador não derivativo bem como as particularidades do otimizador Teixeira & Žak (TEIXEIRA; ŽAK, 1999) utilizado neste projeto. São apresentadas cada parte do otimizador, bem como definidos os parâmetros que terão influência direta no processo de busca pelo ponto ótimo de um sistema.
- No **Capítulo 3** relembram-se os principais conceitos de sistemas chaveados que foram necessários para as implementações dos projetos apresentados. Ao se fixar as condições consideradas para que um sistema chaveado possa ser estabilizado, foi realizada uma discussão preliminar para a convergência das ideias e assuntos que foram propostos. Ainda no Capítulo 3, iniciam-se as apresentações das propostas mais específicas. O chaveamento de subsistemas utilizando o otimizador Teixeira & Žak é uma aproximação do estudo de otimizadores que se mostra possível e eficiente. No caso da configuração do otimizador T-Z, na forma unidimensional (quando se trabalha com uma variável de estado) de um sistema dinâmico chaveado, o emprego do otimizador pode ser realizado mesmo quando não há uma combinação convexa Hurwitz entre os subsistemas, mas existe um chaveamento que estabilize o sistema. Tais resultados são apresentados no capítulo em questão, além das características e valores dos parâmetros do otimizador, bem como algumas discussões sobre a busca pela estabilidade *ultimate bounded* do exemplo e o que se pode concluir sobre a região de ponto ótimo.
- No **Capítulo 4** seguem as apresentações das propostas mais específicas do trabalho quanto ao uso de otimizadores analógicos não derivativos na estabilidade de sistemas. Assim, apresenta-se uma estratégia de controle via busca extremal (ESC - *Extremum Seeking Control*) utilizando o otimizador Teixeira & Žak no processo de busca do *Maximum*

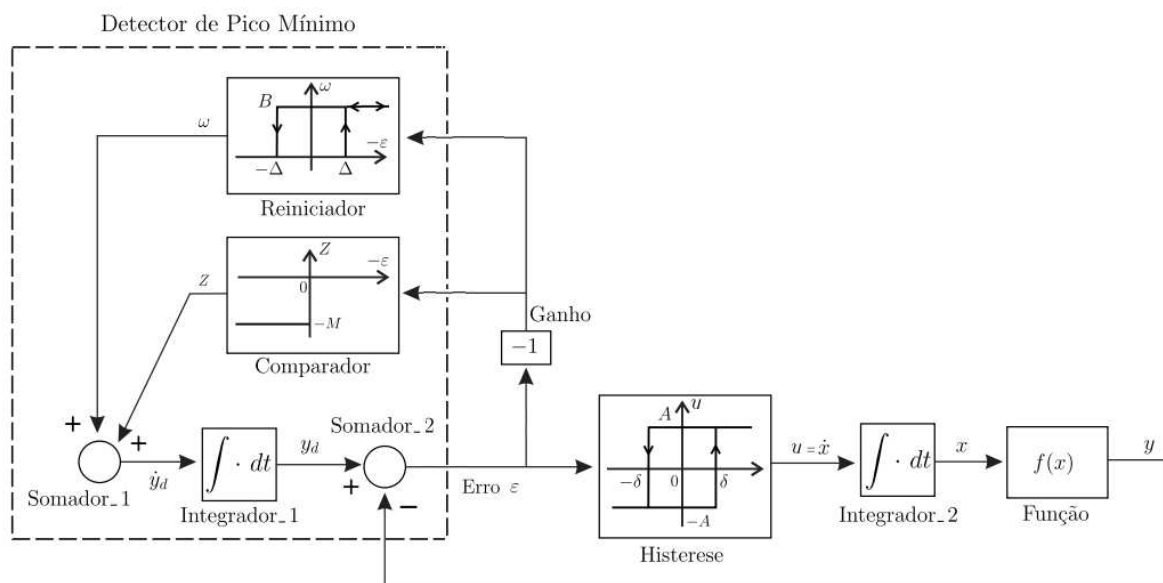
*Power Point Tracking* (MPPT) de uma célula fotovoltaica. Para tal, são lembrados conceitos de busca extremal e apresentada a modelagem matemática da célula, que junto ao sistema dinâmico do otimizador, permitiu simulações e obtenção de resultados. Finalizando o capítulo, com as conclusões sobre a busca pelo ponto ótimo, onde têm-se a máxima potência do processo de geração da célula fotovoltaica e discussões quanto a eficiência e responsividade do projeto.

- No **Capítulo 5**, são lembrados diversos conceitos de estabilidade de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) via LMIs, uma ferramenta que foi útil para a obtenção dos resultados mais a frente no Capítulo 6. Fazendo assim uma recapitulação de definições e apresentação de alguns teoremas já existentes na literatura e que são julgados úteis para as análises. Uma ideia de utilizar o modelo fuzzy Takagi-Sugeno de um pêndulo invertido é citada, junto a proposta de utilizar o otimizador Teixeira & Žak, associado aos conceitos de estabilidade e teoremas apresentados neste capítulo.
- No **Capítulo 6** é apresentado o principal resultado desta tese, que consiste da utilização conjunta do otimizador T-Z no projeto de controladores chaveados, baseados na minimização da derivada de uma função de Lyapunov, para plantas não lineares com grandes incertezas descritas por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Foi apresentada e detalhada uma aplicação da proposta mais recente do trabalho, que consiste na análise de estabilidade de um controlador chaveado para um pêndulo invertido com incertezas associado ao otimizador. Aqui a busca pela região de estabilidade do sistema requer uma modelagem exata do pêndulo invertido, com sua representação em sistema fuzzy Takagi-Sugeno, que foi descrita nessa etapa, antes de passar para as simulações e resultados. Lembrando que ainda é analisada a característica e potencial do otimizador T-Z de realizar a escolha e chaveamento de subsistemas, o que remete ao Capítulo 3, mas com uma diferente aproximação e abordagem do problema em si. Detalhes de factibilidade para estabilização, quanto ao uso dos teoremas escolhidos e simulações no domínio do tempo, para observar a região de ótimo do sistema do pêndulo, são fixadas nas seções do capítulo junto a diversos detalhes e parâmetros de projeto.
- No **Capítulo 7** tem-se a análise e conclusão a respeito dos resultados obtidos quanto a utilização de otimizadores analógicos não derivativos na busca pelo ótimo e chaveamento de subsistemas apresentados nesse trabalho. São consideradas propostas para trabalhos futuros.

## 2 O OTIMIZADOR ANALÓGICO NÃO DERIVATIVO

Neste capítulo, apresenta-se o otimizador não derivativo proposto por Teixeira & Žak, que foi adaptado, como será mostrado mais adiante no trabalho, para sintetizar uma lei de chaveamento entre subsistemas de uma planta linear contínua no tempo e com grandes incertezas. Este otimizador é composto por blocos não lineares como histerese e relés e pode ser classificado como um sistema neural artificial. Na Figura 1 é apresentado o diagrama de blocos do otimizador proposto por Teixeira & Žak para o caso unidimensional, ou seja, quando se trabalha com uma única variável de saída (TEIXEIRA; ŽAK, 1999).

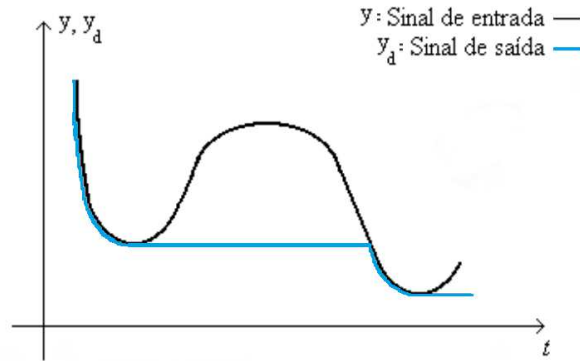
Figura 1 - Diagrama de blocos - Otimizador analógico não derivativo Teixeira & Žak.



Fonte: Teixeira & Žak (1999).

Um detector de pico mínimo pode ser implementado utilizando componentes de circuito convencionais como capacitores, diodos, e amplificadores operacionais que observa o sinal de entrada e retém o valor mínimo da sua saída, desde o último reiniciar, como ilustrado na Figura 2.

Figura 2 - Sinais de entrada e saída de um detector de pico mínimo.



Fonte: Montanari (2016).

A dinâmica de funcionamento do otimizador é tal que, no detector de pico, o sinal de entrada é continuamente comparado com o valor mínimo armazenado na saída, para determinar se o valor armazenado deve ser atualizado. Seja  $y = y(t)$  a forma de onda de entrada e  $y_d = y_d(t)$  a forma de onda de saída de um detector de pico mínimo. Então, um modelo matemático de uma classe de detectores de pico mínimo pode ser representada como:

$$\dot{y}_d = \begin{cases} 0, & \text{se } y_d - y \leq 0, \\ -M, & \text{se } y_d - y > 0, \end{cases} \quad (1)$$

sendo  $M > 0$ , o parâmetro de concepção de projeto. Na análise a seguir, será usada a função  $\text{sign}(\varepsilon)$ , que é igual a 1, se  $\varepsilon > 0$  e igual a  $-1$ , se  $\varepsilon < 0$ . Suponha que a derivada temporal da função  $y = y(t)$  seja delimitada por uma constante conhecida  $M > 0$ :

$$\left| \frac{d}{dt} y(t) \right| < M. \quad (2)$$

Então, uma possível equação desse detector de pico que satisfaz (1) é representada por  $\dot{y}_d = -\frac{M}{2}(\text{sign}(y_d - y) + 1)$  e pode-se então definir o erro  $\varepsilon$  como  $\varepsilon = y_d - y$ .

Note que, quando adotamos o modelo do detector de pico mínimo (1), são possíveis dois diferentes casos:

- **Caso 1** - Quando  $\varepsilon \leq 0$ , ou seja,  $y \geq y_d$ : A rede armazena o valor mínimo anteriormente detectado do sinal de entrada  $y$ , pois neste caso  $\dot{y}_d = -\frac{M}{2}(\text{sign}(y_d - y) + 1) = 0$ ;

- **Caso 2** - Quando  $\varepsilon > 0$ , ou seja,  $y < y_d$ : Nessa situação, usa-se um tipo de argumento baseado em funções de Lyapunov. Para a análise, demonstrando que o erro  $\varepsilon$  é limitado e  $\varepsilon \rightarrow 0$ , seja a candidata a função de Lyapunov a partir da medida da magnitude do erro:

$$v(t) = \frac{1}{2}\varepsilon^2(t). \quad (3)$$

A derivada de  $v(t)$  com relação ao tempo, usando a equação (1) com a condição  $\varepsilon > 0$ , é calculada como sendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) &= \varepsilon\dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon(\dot{y}_d - \dot{y}) = \varepsilon\left(-\frac{M}{2}[\text{sign}(\varepsilon) + 1] - \dot{y}\right), \\ &= \varepsilon(-M - \dot{y}). \end{aligned} \quad (4)$$

Considerando o fato de que  $\varepsilon > 0$  e a equação (2), pode-se concluir que observando a equação (4), obtem-se:

$$\frac{d}{dt}v(t) \leq \varepsilon(|\dot{y}| - M) < 0. \quad (5)$$

Logo,  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Adicionalmente, pode-se mostrar que  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  em um intervalo de tempo finito.

O valor da magnitude  $M$  indica a velocidade com que o erro vai para zero. Então a forma de onda da saída  $y_d(t)$  irá convergir para a forma de onda da entrada  $y(t)$  (MONTANARI, 2016).

Seguindo com a descrição do funcionamento do otimizador Teixeira & Žak, deve-se levar em conta que o otimizador realiza a “procura” do mínimo de uma função objetivo  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de uma variável  $x$  e que tal função deve ter um mínimo no interior de um intervalo fechado de interesse  $[a, b]$ . Supondo que a derivada com respeito a  $x$  de  $f$  no intervalo  $[a, b]$  seja limitada, então há uma constante finita  $L > 0$  tal que:

$$\left| \frac{df(x)}{dx} \right| \leq L, \quad x \in [a, b]. \quad (6)$$

Então o diagrama de blocos apresentado na Figura 1 é representado pela equação (DIENE, 2002):

$$\dot{x} = u(y_d - f(x)), \quad (7)$$

$$\dot{y}_d = \omega(y_d - f(x)) + z(y_d - f(x)),$$

sendo  $u(y_d - f(x))$ ,  $w(y_d - f(x))$  e  $z(y_d - f(x))$  todas funções descontínuas.

O otimizador Teixeira & Žak contém um detector de pico mínimo como componente que é capaz de operar em seu sinal de entrada  $y$  e no seu sinal de saída  $y_d$ . Além disso, existem dois elementos de histerese no otimizador que possuem os parâmetros:

$$0 < \delta < \Delta, \quad (8)$$

$$\text{sendo que } \Delta \geq 2\delta.$$

Ambos  $\delta$  e  $\Delta$  são parâmetros de projeto e tais parâmetros estão relacionados com a variação da saída  $y$  em torno do ponto de mínimo no regime. Mesmo sendo parâmetros que podem ser escolhidos para projetos e simulações em *softwares*, atenta-se que os valores de  $\delta$  e  $\Delta$  devem ser calculados ou escolhidos de acordo com as exigências de projeto (CARDIM, 2004).

É esperado que quanto menores forem os valores de  $\delta$  e  $\Delta$  no regime, melhor será a eficiência do otimizador, pois a variação da saída em torno do ponto mínimo no regime será menor.

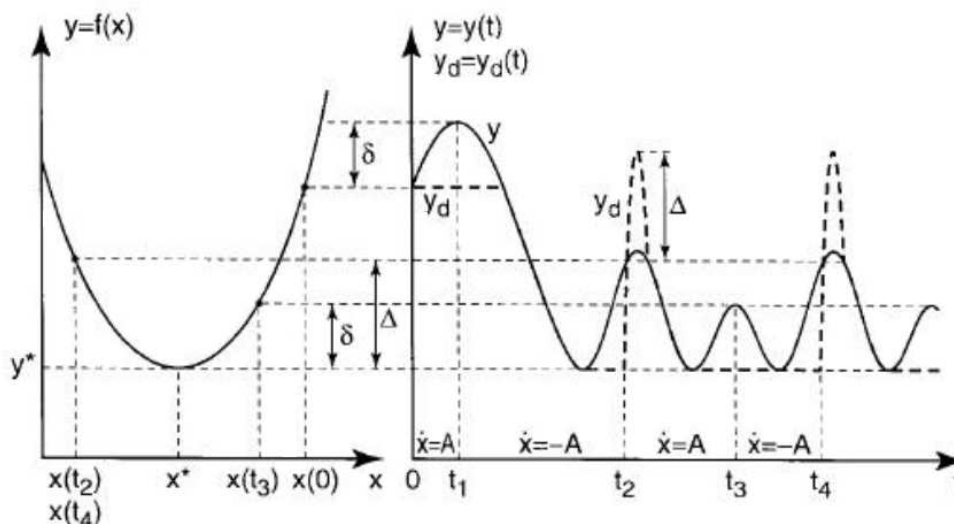
Uma possibilidade de implementação prática está no projeto utilizando eletrônica analógica, dispondo como elementos principais diversos amplificadores operacionais como um circuito integrado. São esperados que  $\delta$  e  $\Delta$  sejam os menores possíveis, porém, reduzir muito esses parâmetros, implica em um refinamento do projeto, ou seja, a utilização de maior quantidade ou até mesmo outros tipos de componentes eletrônicos mais sofisticados, o que provavelmente deve encarecer o projeto, caso se queira realizar uma implementação prática através de eletrônica analógica. (CARDIM, 2004).

Outros parâmetros de projeto são  $A$  e  $B$ . O parâmetro  $A$  é o passo da busca do mínimo da função objetivo e quanto maior for seu valor, maior será a velocidade de busca. O parâmetro também está relacionado com a capacidade de rejeição de distúrbios que o otimizador também comporta, sendo um sinal de distúrbio adicionado a saída do “Integrador\_2”. O parâmetro  $A$  deverá ter um valor maior que o módulo da derivada com relação ao tempo do sinal de distúrbio. O parâmetro  $B$  é o passo para reiniciar o detector de pico e deve respeitar a relação  $B > 2M$  e também ser maior que  $A$ . O parâmetro  $M$  indica a velocidade com que o erro vai para zero

e assim como  $B$  e  $A$ , devem ser calculados também de acordo com as exigências do projeto (CARDIM, 2004).

A Figura 3 apresenta mais detalhes desses conceitos e da dinâmica do otimizador relacionada aos seus parâmetros.

Figura 3 - Trajetória típica do otimizador Teixeira & Žak.



Fonte: Adaptado de Teixeira & Žak (1998).

Do projeto inicial para o otimizador, Teixeira & Žak definiram a condição inicial  $x_0 = x(0)$ , em que

$$\frac{df}{dx}(x(0)) > 0. \quad (9)$$

Pode ser observado da Figura 3 que o ponto  $x(0)$  está localizado ao lado direito do mínimo  $x^*$ .

Em seguida, faz-se  $\varepsilon = 0$ ,  $\omega = 0$  e  $u = A$ . Então, têm-se que  $\dot{x} = u$  para  $t > t_0 = 0$ ,

$$x(t) = -At + x(0). \quad (10)$$

Isto significa que, inicialmente,  $x$  estará se movendo à direita do ponto mínimo,  $x^*$ . A saída do detector de pico mínimo  $y_d$  será constante devido  $\dot{y}_d = 0$ . Como consequência, o erro



$\varepsilon = y_d - y$  se tornará negativo e decrescerá até o momento em que o tempo  $t_1$  atingir o valor  $\varepsilon = -\delta$ . Isto fará com que  $u$  mude de  $A$  para  $-A$  e para  $t > t_1$ ,

$$x(t) = -A(t - t_1) + x(t_1). \quad (11)$$

Isto significa que  $x$  começará a se mover para a esquerda na direção de  $x^*$  e o valor de  $y = f(x)$  vai começar a diminuir. Uma vez que  $\varepsilon = 0$  é atingido novamente, o sinal de saída do detector de pico mínimo muda seu valor de  $y_d = y(x(0))$  para seguir a trajetória de  $y(x(t))$ . O valor escolhido para o parâmetro  $M$  deve respeitar o seguinte:

$$|\dot{y}(t)| = \left| \frac{df(x)}{dx} \dot{x}(t) \right| \leq LA < M. \quad (12)$$

A saída  $y_d$  a partir do detector de pico mínimo irá rastrear  $y$  até  $x$  atingir  $x^*$ . Então, uma vez que  $\varepsilon$  ainda permanece em zero,  $x$  continuará se movendo para a esquerda. No entanto,  $y_d$  será bloqueado em  $(x, y) = (x^*, y^*)$  e o erro  $\varepsilon$  irá decrescer, assumindo valores negativos, até que se atinja o valor de  $\varepsilon = -\Delta$  em algum momento  $t = t_2$ . Neste momento, o sinal de  $\omega$  crescerá muito, isto é, assumirá o valor  $B$ . Isto implica que, para  $\varepsilon \leq 0$ , e da Figura 1, observando que neste caso  $z = 0$  e  $w = B$ :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{y}_d - \dot{y} = B - \dot{y} > 0, \quad (13)$$

pois de (12),  $|\dot{y}| < M$  e  $B > 2M$ . Logo  $\varepsilon$  crescerá até que fique positivo.

Agora para  $\varepsilon > 0$ , da Figura 1 e considerando que de (12) e  $|\dot{y}| < M$ , então

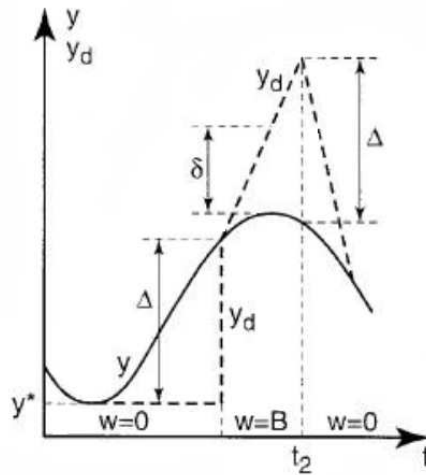
$$\dot{\varepsilon} = B - M - \dot{y} > 0, \quad (14)$$

pois

$$B > 2M. \quad (15)$$

A Figura 4 descreve os detalhes do processo no qual analisando (3) desde que  $\omega \neq 0$ , temos  $\varepsilon > 0$ , e isto acarretará com que o detector de pico mínimo seja reiniciado para um novo valor.

Figura 4 - Reiniciador do detector de pico mínimo.



Fonte: Adaptado de Teixeira & Žak (1998).

Para o intervalo de tempo em que  $\varepsilon$  está crescendo de  $-\Delta$  à  $\delta$ , observa-se que aí  $\dot{x} = -A$ , e, portanto,  $y$  crescerá. Quando  $\varepsilon$  atinge o valor de  $\delta$ , o sinal de entrada  $u$  terá o valor de  $A$ , que é  $\dot{x} = A$ , e  $y$  irá decrescer, enquanto  $\varepsilon$  continua a aumentar.

A trajetória de  $x$  começará a voltar para direção  $x^*$  porque agora  $\dot{x} = A$ . Quando  $\varepsilon$  alcança o valor de  $\Delta$ , o sinal  $\omega$  será configurado para zero, e  $\varepsilon$  vai começar a diminuir até que se torne zero.

A saída do detector de pico mínimo,  $y_d$ , irá rastrear  $y$  até  $x$  voltar para  $x^*$ .

Então,  $y_d$  vai assumir o valor  $y(x^*)$ , e  $z = 0$ . O erro  $\varepsilon$  decrescerá até atingir o valor de  $-\delta$ . No instante de tempo  $t = t_3$ , a trajetória  $x$  reverterá seu trajeto, porque agora  $\dot{x} = -A$ . O erro é negativo e aumentará até que se atinja o valor zero. A trajetória  $x$  ainda estará se movendo para a esquerda. O erro permanecerá em seus valores negativos até encontrar o valor de  $-\Delta$ , que irá ativar o sinal  $\omega$  no momento  $t_4$ , o mesmo que ocorre em  $t_2$ .

As oscilações de  $y$  em torno do valor mínimo de  $x^*$  serão repetidas, em períodos sendo  $t_4 - t_2$  e os valores de pico-a-pico aproximadamente igual a  $\Delta$ . E este pode ser tão pequeno quanto desejar desde que  $\Delta$  seja um parâmetro de projeto, reduzindo então a amplitude das oscilações de  $x$  em torno do minimizador  $x^*$ .

Caso mude a condição inicial, se por exemplo, uma condição inicial  $x(t_0)$  apresentar

$$\frac{df}{dx}(x(t_0)) > 0, \quad (16)$$

o ponto inicial  $x(t_0)$ , estará localizado ao lado direito de  $x^*$ , tendo o erro  $\varepsilon = 0$  e  $\omega = 0$ , com isso a trajetória resultante do otimizador terá a forma apresentada na Figura 4 com  $t_0 > t_2$  para o qual  $\varepsilon = 0$  e  $\omega = 0$  (MONTANARI, 2016).

Após tantas características apresentadas para o funcionamento do otimizador analógico não derivativo Teixeira & Žak, é perceptível que esse sistema apresenta uma complexidade que justifica sua já consolidada aplicação em diversos projetos de otimização e estabilidade.

Como resumo dos principais destaques apresentados em todo o capítulo, pode-se compreender que, de toda estrutura apresentada na Figura 1, o sinal de saída do detector de pico mínimo é  $y_d$ . Um bloco de histerese (“Histerese”) e um integrador (“Integrador\_2”) terão influência direta na busca do ponto ótimo, sendo que  $0 \leq \delta \leq \Delta$  com  $\Delta \geq 2\delta$ .  $\Delta$  e  $\delta$  são parâmetros de projeto. Vale destacar que quanto menor os valores de  $\Delta$  e  $\delta$ , menor é a variação da saída  $y$  em torno do ponto mínimo. Outros parâmetros são  $A$ ,  $M$  e  $B$ , sendo  $A$  o passo da busca do mínimo da função objetivo e quanto maior for seu valor, maior será a velocidade de busca. Para  $B$  temos o passo para reiniciar o detector de pico, de forma que respeite as restrições  $B \geq 2M$  e  $B \geq A$ . E finalmente, o parâmetro  $M$  está associado à velocidade com que o erro  $\varepsilon$  vai para zero (TEIXEIRA; ŽAK, 1998).

### 3 CONTROLE DE SISTEMA CHAVEADO LINEAR COM GRANDES INCERTEZAS

Um sistema linear chaveado contínuo no tempo pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), & x(0) = x_0, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (17)$$

com  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  sendo o vetor de estado do sistema,  $y(t) \in \mathfrak{R}^p$  a saída medida,  $\sigma(t)$  a lei de chaveamento,  $x_0$  a condição inicial, bem como  $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$  uma matriz de saída do sistema, constante, para todo  $t \geq 0$ . Considerando um grupo de matrizes  $A_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tem-se que a lei de chaveamento  $\sigma(t)$ , para cada  $t \geq 0$ , é tal que  $A_{\sigma(t)} \in \{A_1, \dots, A_N\}$  (DEAECTO *et al.*, 2010).

A seguir são apresentadas algumas notações utilizadas para esse estudo. O conjunto formado pelos  $N$  primeiros inteiros  $\{1, \dots, N\}$  é dado por  $\mathbb{K}_N$ . O conjunto de todos os vetores  $\lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_N]'$ , tais que  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i \in \mathbb{K}_N$  e  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N = 1$  é denotado por  $\Lambda$ . A combinação convexa de um conjunto de matrizes  $(A_1, \dots, A_N)$  será representada por  $A_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i$  sendo  $\lambda \in \Lambda$ .

Uma proposta de generalização para  $N$  subsistemas dinâmicos considera a existência de uma matriz  $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  positiva definida, e a seguinte função candidata de Lyapunov,

$$V(x) = x'Px. \quad (18)$$

**Teorema 1:** (DEAECTO *et al.*, 2010) *Suponha que o vetor de estado  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  está disponível para realimentação. Se existirem  $\lambda \in \Lambda$ , uma matriz  $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  positiva definida, tais que:*

$$A'_\lambda P + PA_\lambda < 0, \quad (19)$$

*então a estratégia de chaveamento*

$$\sigma(t) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (x' P A_i x), \quad (20)$$

torna o ponto de equilíbrio ( $x = 0$ ) do sistema (17) associado ao conjunto  $A_{\sigma(t)}$ , globalmente assintoticamente estável.

*Prova:* Para mais detalhes quanto à prova do teorema, vide referência Deaecto *et al.* (2010).

Considerando  $N = 2$  subsistemas, existirá uma regra de chaveamento estabilizante que depende das variáveis de estado do sistema linear chaveado (17), se existir uma combinação convexa das matrizes  $\{A_1, A_2\}$  dada por  $A_\lambda = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ , com  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2 \geq 0$ , Hurwitz, ou seja, que todos os autovalores  $A_\lambda$  apresentem parte real negativa (CARNIATO, 2016).

A generalização dessa proposta para  $N$  subsistemas dinâmicos propõe que, sendo  $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , tal que  $P = P'$ , uma matriz definida positiva e uma candidata a função de Lyapunov  $V(x) = x' P x$ , então a lei de chaveamento  $\sigma(t) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (x' P A_i x)$  torna o ponto de equilíbrio ( $x = 0$ ) do sistema (17) globalmente assintoticamente estável (DEAECTO, 2010) se existir  $\lambda \in \Lambda$  tal que

$$A'_\lambda P + P A_\lambda = \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i \right)' P + P \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i \right) < 0. \quad (21)$$

Quando (21) não é satisfeita, apesar de ser possível definir uma regra de chaveamento  $\sigma(t)$ , que torne a origem um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável (GAE), pode-se então propor a aplicação do otimizador analógico não derivativo, como será visto na seção seguinte, para a elaboração de uma lei de controle com o objetivo de tornar estável o sistema controlado.

### 3.1 CHAVEAMENTO DE SUBSISTEMAS UTILIZANDO O OTIMIZADOR TEIXEIRA & ŽAK

Considere o sistema chaveado abaixo:

$$\dot{x}(t) = a_{\sigma(t)} x(t), \quad x(0) = x_0, \quad \sigma(t) \in \{1, 2\}, \quad (22)$$

$$a_1(t) = \text{sen}(t), \quad a_2(t) = -0,5 + \varphi(t)(-\text{sen}(t)), \quad (23)$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0,5 & \text{se } k\pi \leq t < (k+1)\pi, \\ 1,5 & \text{se } (k+1)\pi \leq t < (k+2)\pi, \end{cases} \quad (24)$$

para  $k = 0, 2, 4, \dots$ . Observando (22)-(24) e a Figura 7 note que para  $t \geq 0$ ,  $a_1(t)$  ou  $a_2(t)$  é negativo. Então existe uma lei de chaveamento  $\sigma(t)$  que torna a origem um ponto de equilíbrio GAE. Para projetar a lei de chaveamento, suponha que  $a_1(t)$  e  $a_2(t)$  são desconhecidas (sistemas com incertezas) e apenas é conhecido que  $|a_1(t)|$  e  $|a_2(t)|$  são menores ou iguais a 1.

Para determinar uma lei de chaveamento dependente da variáveis de estado que estabilize este sistema é preciso que existam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tais que  $\lambda_1 a_1(t) + \lambda_2 a_2(t) < 0$ . Neste caso, o esquema de chaveamento é mostrado na Figura 5(a).

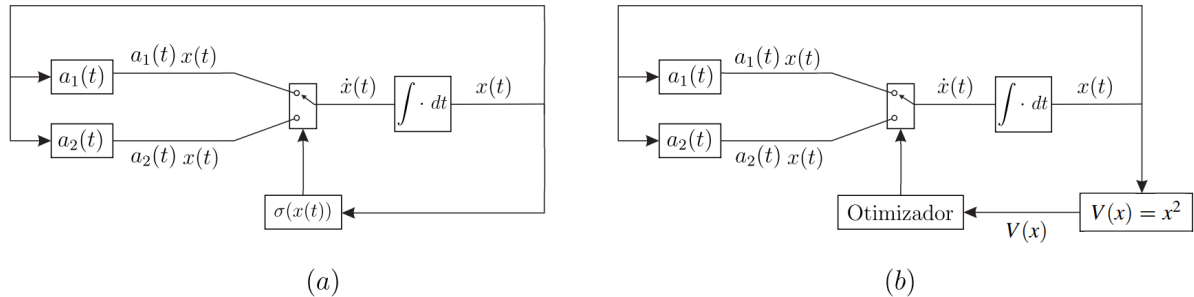
Observe que, com  $a_1(t)$  e  $a_2(t)$  apresentados em (23) e (24),

$$\begin{cases} \text{para } t = \frac{\pi}{2} \rightarrow \lambda_1 a_1(t) + \lambda_2 a_2(t) = \lambda_1 - \lambda_2 < 0, \\ \text{para } t = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \lambda_1 a_1(t) + \lambda_2 a_2(t) = -\lambda_1 + \lambda_2 < 0. \end{cases} \quad (25)$$

Então, sendo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  constantes, uma lei de chaveamento  $\sigma(t) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (x' P A_i x)$  com base no Teorema 1, que escolha entre os subsistemas não pode ser determinada. Ainda mais,  $a_1(t)$  e  $a_2(t)$  não são disponíveis para a implementação da lei de chaveamento (são incertas).

Para este exemplo, propõe-se a adaptação do otimizador Teixeira & Žak (TEIXEIRA; ŽAK, 1999) de modo que ele sintetize uma lei de controle para este sistema, como apresentado na Figura 5(b).

Figura 5 - Escolha do subsistema. (a) Lei de chaveamento dependente do estado. (b) Uso do otimizador analógico não derivativo.

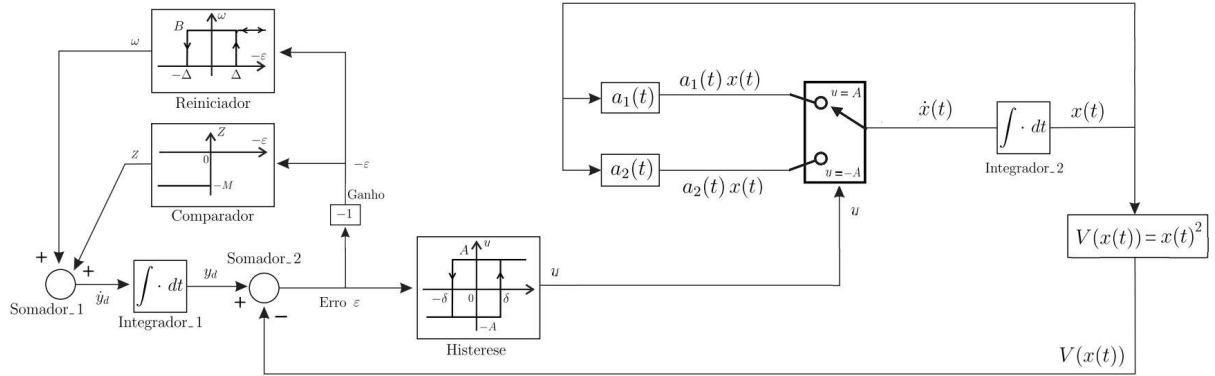


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Na Figura 6, ilustra-se a estrutura proposta neste estudo para associar o otimizador Teixeira & Žak ao controle chaveado, servindo como elemento de escolha entre os subsistemas. Note que, comparando as Figuras 1 e 6, o sistema chaveado foi ligado à saída do bloco “Histerese” do modelo do otimizador e que, dessa forma, o “Integrador\_2”, do modelo original é substituído pela bloco proposto.

Observe que, a função a ser minimizada é  $V(x) = x^2$  e que existe uma correspondência entre o valor de saída do bloco de “Histerese” e o subsistema escolhido na planta. Quando a “Histerese” assume o valor  $A$  escolhe-se o subsistema  $a_1(t)$  e quando assume o valor  $-A$  escolhe-se o subsistema  $a_2(t)$ , sendo para este caso  $A > 0$  arbitrário.

Figura 6 - Diagrama de teste do otimizador analógico não derivativo para o chaveamento dos subsistemas.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

É possível associar os parâmetros do otimizador ( $B$ ,  $\Delta$ ,  $M$  e  $\delta$ ) ao sistema chaveado proposto na Figura 6.

Têm-se que para

$$V(x) = x^2, \tag{26}$$

$$\dot{V}(x) = 2x\dot{x} = 2xa_{\sigma}(t)x = 2x^2a_{\sigma}(t).$$

Note que, quando o erro  $\varepsilon = 0$ :

$$\varepsilon = y_d - V(x) = 0, \tag{27}$$

$$\dot{y}_d = \dot{V}(x) = 2x^2a_{\sigma}(t).$$

Dessa forma, para

$$|x| \leq x_M, \tag{28}$$

$$|\dot{y}_d| = |2x^2a_{\sigma}(t)|.$$



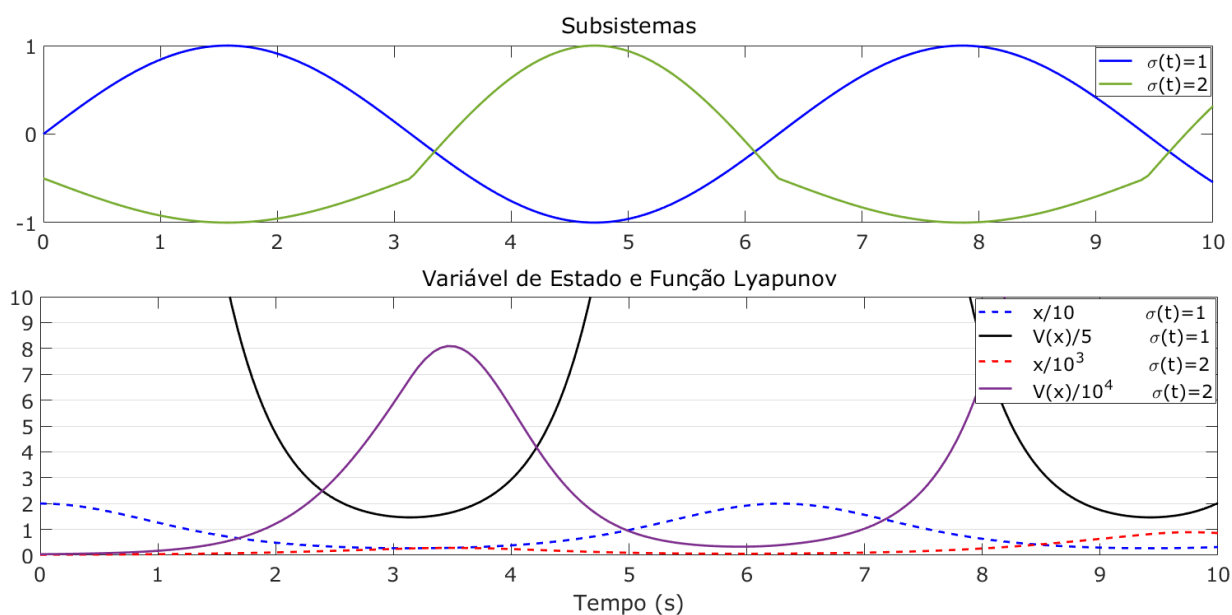
E seguindo com as análises da proposta, pode-se associar então da Figura 6 e (TEIXEIRA; ŽAK, 1998)

$$M > \max |\dot{y}_d| = 2x_M^2\beta, \quad (29)$$

$$|a_\sigma(t)| < \beta.$$

Lembrando que  $\beta$  é conhecido (da Figura 7, sendo que  $|a_\sigma(t)| \leq 1$ ,  $\sigma = 1, 2$ ),  $\Delta$  e  $\delta$  estão relacionados com os valores máximos de  $V(x)$  em torno da origem, sendo escolhidos pelo projetista e  $B \gg M$ . No regime,  $V(x) \in [0, \Delta]$ . Para realizar a proposição desse projeto como também as diversas simulações, foi utilizada a ferramenta *Simulink* do software *Matlab*.

Figura 7 - Resultados de malha aberta do sistema (22)-(24).



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

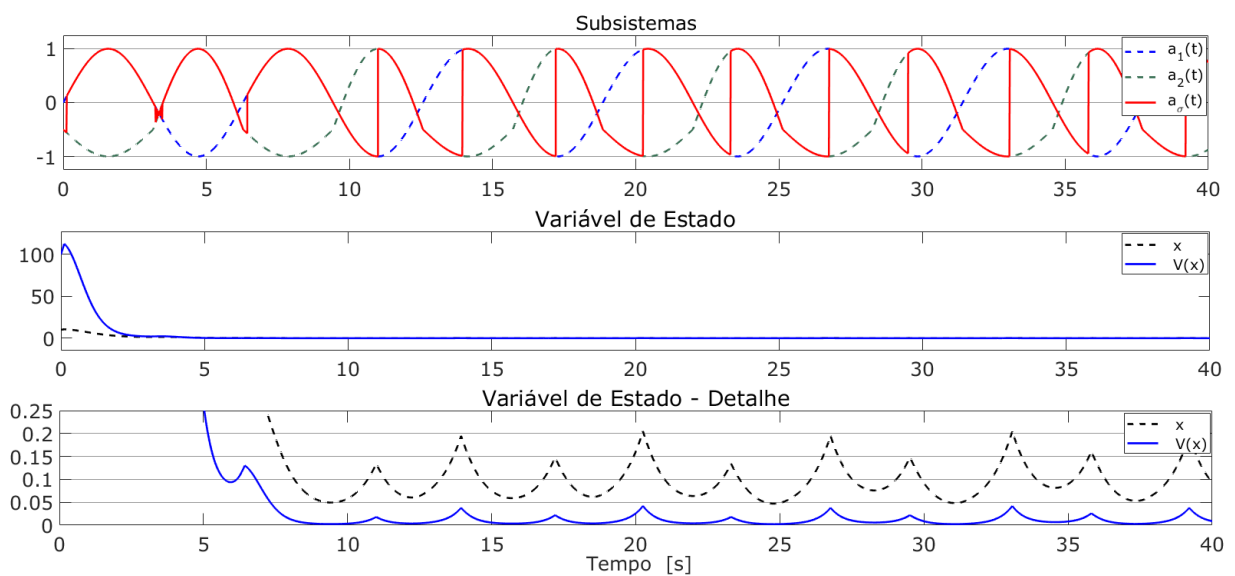
Fixando  $x(0) = 10$ , na Figura 7 apresentam-se os resultados de simulação do sistema (22)-(24), em malha aberta, com  $\sigma(t) = 1$  e 2. Nota-se, pelos resultados presentes nessa figura, que o sistema em malha aberta não apresenta um comportamento adequado.

Na Figura 8, expõe-se resultados do chaveamento da malha com o otimizador como apresentado no diagrama da Figura 6. Os parâmetros escolhidos para o otimizador que satisfazem as restrições do controle chaveado neste projeto foram  $B = 1000$ ,  $\Delta = 0,04$ ,  $M = 400$ ,  $A = 2$  e  $\delta = 0,02$ , sendo  $x(0) = 10$ .

Observa-se que a tomada de decisões, sobre qual dos subsistemas,  $a_1(t)$  ou  $a_2(t)$  foi escolhido, é realizada pelo otimizador de forma bem sucedida, já que no detalhamento do sinal da variável de estado, ilustrado na Figura 8, é mostrado que a dinâmica de funcionamento do otimizador analógico não derivativo leva tal variável de estado até uma região muito próxima ao ponto de equilíbrio  $x_e = 0$ .

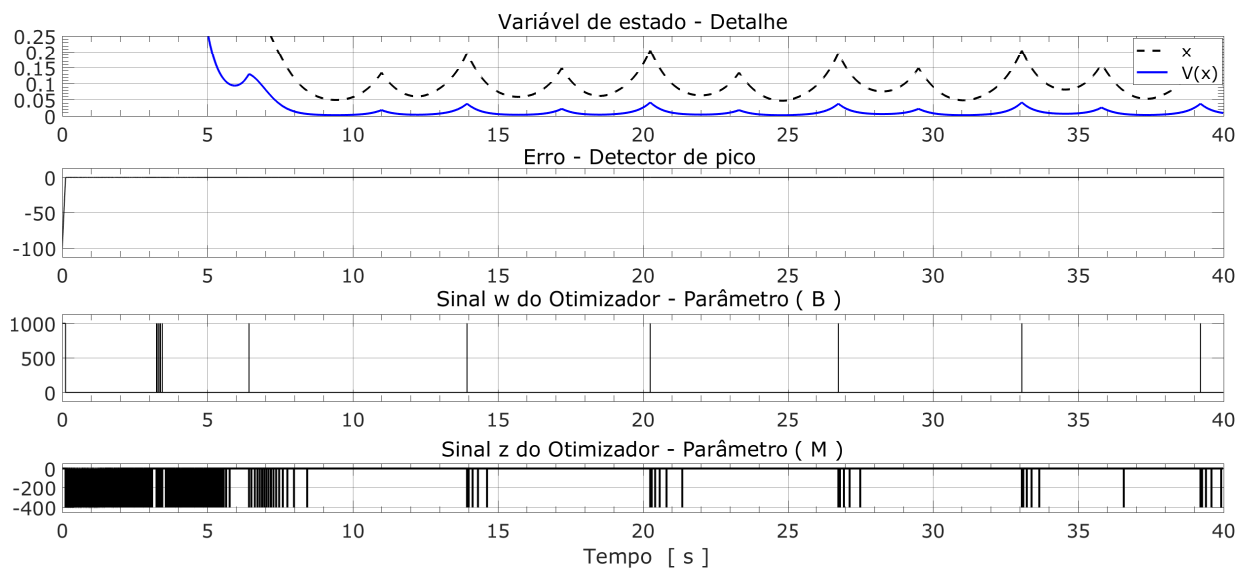
Finalizando, a Figura 9 ilustra outro detalhamento da região de operação do sistema, apresentando a evolução no tempo dos sinais da variável de estado e da função de Lyapunov, associadas à parâmetros do otimizador.

Figura 8 - Resultados de malha fechada do sistema (22)-(24) com chaveamento realizado pelo otimizador.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 9 - Resultados de malha fechada do sistema (22)-(24) - Região de operação e parâmetros do otimizador.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Assim, já que o otimizador foi capaz de levar o estado do sistema para uma região muito próxima ao ponto de equilíbrio, descrito então de forma completa de acordo com os parâmetros escolhidos para as simulações como  $x_e = 0$  ( $V(x) \in [0; 0,04]$  e  $x = \sqrt{V(x)} \in [0; 0,2]$ ), nota-se que existe uma característica de estabilidade *ultimate bounded* (ALVES, 2017).

O subsistema escolhido  $a_\sigma(t)$  ao longo do tempo é destacado na Figura 8 em vermelho. Após um estudo das principais características de sistemas chaveados lineares, pôde ser proposto um projeto em que utiliza-se um otimizador analógico não derivativo no chaveamento de subsistemas para um planta que apresente grandes incertezas (SILVA *et al.*, 2017), resultados estes que foram apresentados como publicação nos anais da Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações - DINCON 2017. Foi possível com essa proposta, uma nova abordagem para a utilização de um otimizador analógico não derivativo como elemento de decisão para o controle de um sistema linear contínuo no tempo, chaveado e com grandes incertezas.

O chaveamento alcançado pela técnica proposta foi capaz de decidir pela escolha entre dois subsistemas, estabilizando o sistema linear chaveado. Importante notar que, como visto no exemplo, o emprego do otimizador pode ser realizado mesmo quando não há uma *combinação convexa Hurwitz* entre os subsistemas, mas existe um chaveamento que estabilize o sistema. Além disso, o otimizador assegura características de estabilidade *ultimate bounded*, já que a variável de estado tende e posteriormente fica confinada em uma região próxima ao ponto de

equilíbrio.

#### 4 CONTROLE VIA BUSCA EXTREMAL APLICADO AO MPPT

Quando se consideram sistemas nos quais se tem a intenção de aplicar algum tratamento com o objetivo de adaptar um processo, ou mesmo estudar suas características quanto à estabilidade ou o comportamento das suas variáveis de entrada e saída, é fundamental a procura do ponto de operação desse sistema.

Algumas vezes, o ponto de operação desejado ou o ponto ótimo de um determinado processo ocorre no extremo de uma não-linearidade que está relacionada à eficiência do sistema. A não-linearidade pode estar na planta, ser uma não-linearidade física quando ligada ao hardware do projeto, ou pode estar na formulação do problema pela modelagem de um sistema via software, associada ao sistema através de uma função objetivo de um problema não otimizado (OLIVEIRA *et al.*, 2012).

Devido à crescente necessidade de otimizar a saída de plantas em malha fechada, com o intuito de reduzir os custos operacionais e adequar as especificações do produto, fica claro o porquê da estratégia *Extremum Seeking Control* (ESC) ter se tornado uma área importante na teoria de controle (SOUSA, 2018). À medida que melhores controladores são desenvolvidos para regular adequadamente uma planta, o foco pode ser deslocado para a solução de projetos de controle que garantam o ótimo desempenho da mesma (ADETOLA; GUAY, 2006).

Na literatura, os algoritmos de controle extremal podem ser segmentados em cinco grupos conforme (CALLI *et al.*, 2012): ESC por modos deslizantes, por redes neurais, por aproximação, por perturbação e adaptativo. No Capítulo 1 foram apresentadas algumas revisões bibliográficas que utilizaram algoritmos de busca extremal aplicados a vários processos.

Nesse capítulo têm-se como objetivo demonstrar uma aplicação, a partir de um modelo matemático de uma célula fotovoltaica, onde se optou por utilizar o controle extremal na busca do *Maximum Power Point Tracking* (MPPT), visando manter o sistema sempre próximo de seu ponto de operação, mesmo quando existem condições externas desfavoráveis, como por exemplo, a passagem temporária de nuvens no céu.

A busca pelo extremo é uma abordagem para otimização *on-line* que lida com situações incertas, mas assume-se que os sinais de entrada e saída da planta estão disponíveis. Utilizando os sinais disponíveis, o objetivo é projetar um controlador que forneça as entradas da planta visando otimizar o desempenho do sistema realimentado.

Para formalizar o *Extremum Seeking Control*, o problema de rastrear uma entrada  $x$  que otimiza uma função variante no tempo, geralmente desconhecida  $y(x)$ , sendo:

$$y_{max} = y(x^*), \quad x \in \mathbb{R},$$

ou

(30)

$$y_{min} = y(x^*), \quad x \in \mathbb{R},$$

em que  $x^*$  é o argumento que maximiza ou minimiza a função  $y(x)$ . E supondo ainda que existe apenas um ponto de máximo ou mínimo na função  $y(x)$ , ou seja, que  $y(x)$  é uma função côncava ou convexa (LALLA *et al.*, 2007).

O algoritmo ESC utilizado neste projeto é o otimizador analógico não derivativo Teixeira & Žak (TEIXEIRA; ŽAK, 1998), que se enquadra no método ESC baseado em redes neurais, devido à presença de blocos não lineares tais como relés e histerese.

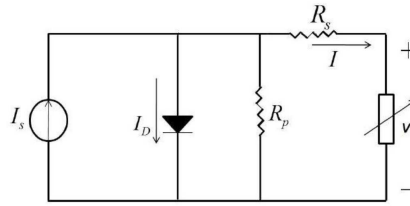
#### 4.1 BUSCA PELO MPPT DO MODELO DE UMA CÉLULA FOTOVOLTAICA

Com os conceitos iniciais de *Extremum Seeking Control* justificando aqui a escolha do otimizador Teixeira & Žak, na busca pelo *Maximum Power Point Tracking* de uma célula voltaica se mostra uma possibilidade, porque aqui procura-se otimizar (maximizar) uma função objetivo, com apenas um ponto de máximo em um intervalo fechado, sem conhecer perfeitamente esta função. Nesta situação, os otimizadores analógicos não derivativos são muito úteis, pois não utilizam o gradiente da função objetivo (SOUSA, 2018). Sabe-se também que o otimizador Teixeira & Žak não se restringe apenas na busca do ponto ótimo, o mesmo pode ser adaptado conforme a necessidade da função objetivo com o intuito de atingir resultados satisfatórios.

Dessa forma, para a validação do projeto foram feitas simulações do sistema dinâmico do otimizador acrescentado da modelagem matemática de uma célula fotovoltaica. Nas simulações fez-se uso da ferramenta *Simulink* do software *Matlab*, e os resultados obtidos foram avaliados analisando a resposta do otimizador na busca do ponto ótimo da aplicação.

O modelo matemático de uma célula fotovoltaica é descrito seguindo referências Aminde (2013) e Sousa (2018) de forma a cobrir todas as características importantes para esse projeto.

Figura 10 - Circuito equivalente de uma célula fotovoltaica.



Fonte: Aminde, 2013.

Aplicando a lei dos nós de Kirchhoff no circuito da Figura 10, é obtida a equação característica da corrente versus tensão I-V da célula fotovoltaica:

$$I = I_S - I_{sat} \left[ e^{((V+IR_S)/(AV_T))} - 1 \right] - (V + IR_S)/(R_P), \quad (31)$$

em que:  $I_{sat}$  é a corrente máxima de saturação do diodo;  $V$  é a tensão nos terminais da célula,  $A$  é o fator de idealidade do diodo ( $A = 1$ : ideal,  $A > 1$ : real),  $V_T$  é o potencial térmico ( $V_T = kT_C/q$ ),  $k$  é a constante de Boltzmann ( $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ ),  $q$  é a carga elétrica do elétron ( $q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ).

A fonte de corrente  $I_S$  está relacionada com irradiação solar  $G_a \text{ [W/m}^2\text{]}$  e a temperatura ambiente  $T_a \text{ [K]}$ , sendo descrita por:

$$I_S = I_0 + K_I(T_C - T_r), \quad (32)$$

sendo que  $I_0$  é dada por:

$$I_0 = (G_a I_{SC} / G_0). \quad (33)$$

Em (33)  $I_{SC}$  é a corrente de curto-circuito da célula a  $25^\circ\text{C}$  e  $1000 \text{ W/m}^2$ ,  $K_I$  o coeficiente da temperatura de corrente de curto-circuito,  $T_C$  é a temperatura da célula em Kelvin ( $K$ ) ( $0^\circ\text{C} = 273,16 \text{ K}$ ),  $T_r$  é a temperatura de referência da célula ( $K$ ),  $G_0$ : é a referência da irradiação solar, cujo valor é dado por  $1000 \text{ W/m}^2$  e  $G_a$  é a irradiação solar em  $\text{W/m}^2$ .

A característica da curva I-V depende diretamente da irradiação solar  $G_a \text{ [W/m}^2\text{]}$ , que por

sua vez influencia na temperatura da célula  $T_C$  [K] é descrita por:

$$T_C = T_a + \frac{G_a(NOCT - 20^\circ C)}{800W/m^2}. \quad (34)$$

O parâmetro NOCT (do inglês: *Normal Operating Cell Temperature*) geralmente é fornecido pelo fabricante da célula. O NOCT geralmente assume valores em torno de  $45^\circ C$  e  $49^\circ C$ , sendo definido como a temperatura da célula  $T_C$  quando a temperatura ambiente  $T_a$  for  $20^\circ C$ , a irradiação solar  $G_a$  for  $800 W/m^2$  e a velocidade do vento for  $1,0 m/s$  (AMINDE, 2013), (TAVARES, 2009). A corrente  $I_D$  que percorre o diodo é descrita como:

$$I_D = I_{sat} \left[ e^{((q/AKT_C)(V+R_S I))} - 1 \right], \quad (35)$$

em que

$$I_{sat} = I_{or} \left( \frac{T_C}{T_r} \right)^3 e^{\left[ \frac{qE_g}{KA} \left( \frac{1}{T_r} - \frac{1}{T_c} \right) \right]}. \quad (36)$$

O parâmetro  $I_{or}$  indica a corrente de saturação reversa da célula:

$$I_{or} = \frac{I_{SC}}{e^{(qV_{OC}/KAT_C)} - 1}, \quad (37)$$

sendo,  $V_{oc}$  a tensão de circuito aberto [V],  $E_g$  a banda proibida ou *gap* de energia. Analisando uma situação ideal, onde não há perdas ou correntes de fuga, é considerado  $R_S = 0$  e  $R_p = \infty$ . Logo, as equações (31) e (35) são reduzidas em:

$$I = I_S - I_{sat} \left[ e^{(V/AV_T)} - 1 \right], \quad (38)$$

$$I_D = I_{sat} \left[ e^{(V/AV_T)} - 1 \right].$$

Nas simulações foi utilizado o modelo real, levando em consideração todos os parâmetros descritos anteriormente. A potência produzida por uma célula fotovoltaica varia entre valores inferiores à  $1 W$ , sendo insuficiente na alimentação de circuitos de potência. Desta forma, para aplicações de potência são agrupadas células em série e paralelo (*shunt*) resultando nos painéis solares como em geral são reconhecidos.

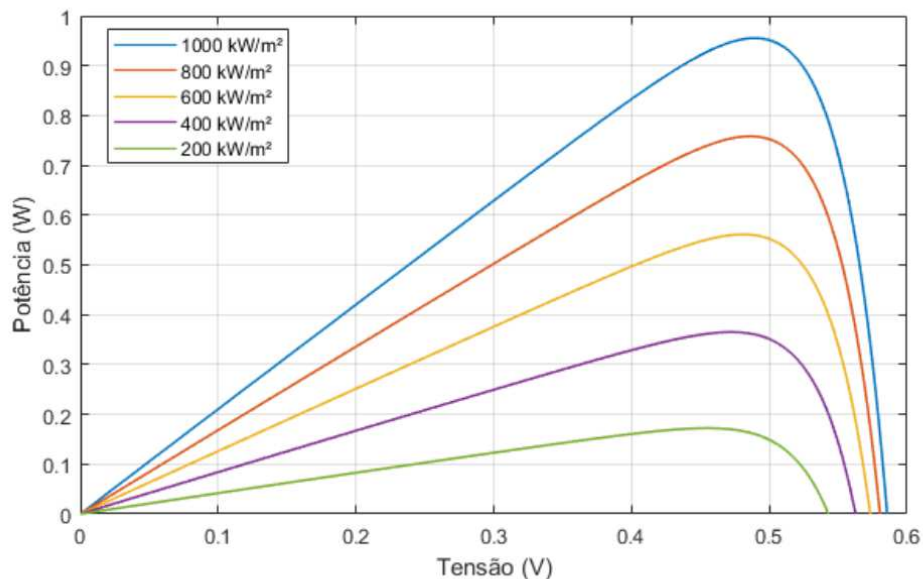


Lembrando que na implementação computacional do otimizador analógico não derivativo utilizado neste projeto (TEIXEIRA; ŽAK, 1998), preocupa-se em assegurar que a função que se deseja otimizar é contínua e possui um único ponto de mínimo em um intervalo fechado. Essa é uma condição necessária para a possibilidade do projeto. Assim, se uma curva apresenta um único ponto de mínimo, pode-se utilizar o otimizador analógico para determinar esse ponto.

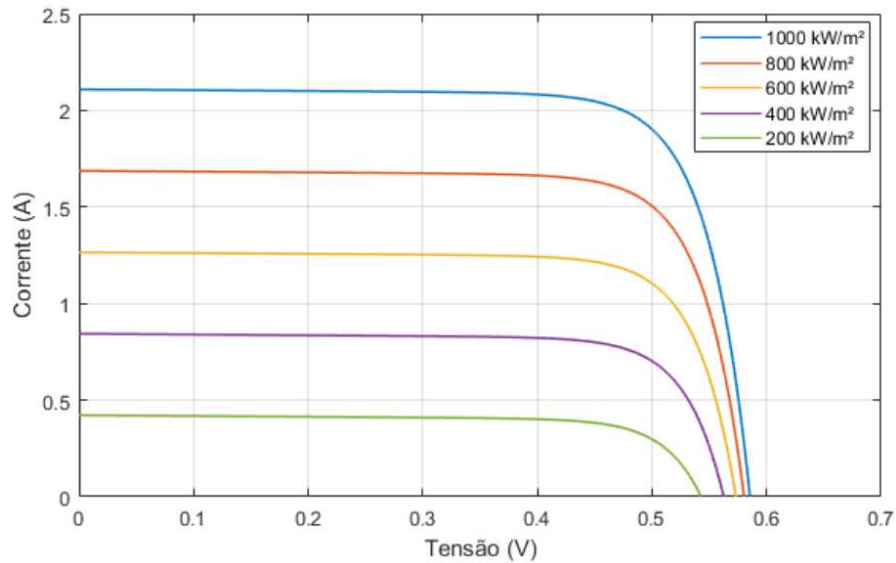
Analogamente, para a curva P-V de uma célula fotovoltaica, as curvas características da célula podem ser obtidas através de simulações da modelagem matemática descrita em diagrama de blocos na ferramenta *Simulink* do software *Matlab*, que faz uso das equações (31)-(38) descritas anteriormente, e dependem não linearmente da temperatura e irradiância.

Analisando a dependência não linear da célula solar com relação à irradiância  $G_a$ , foram realizadas simulações para diferentes valores de incidência solar. Em seguida, foram obtidas as curvas características P-V e I-V para cada uma dessas irradiâncias, como é possível observar na Figura 11 e Figura 12, respectivamente.

Figura 11 - Curvas características P-V variando-se a irradiação ( $T = 25^\circ C$ ).



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 12 - Curvas características I-V variando-se a irradiação ( $T = 25^{\circ}\text{C}$ ).

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

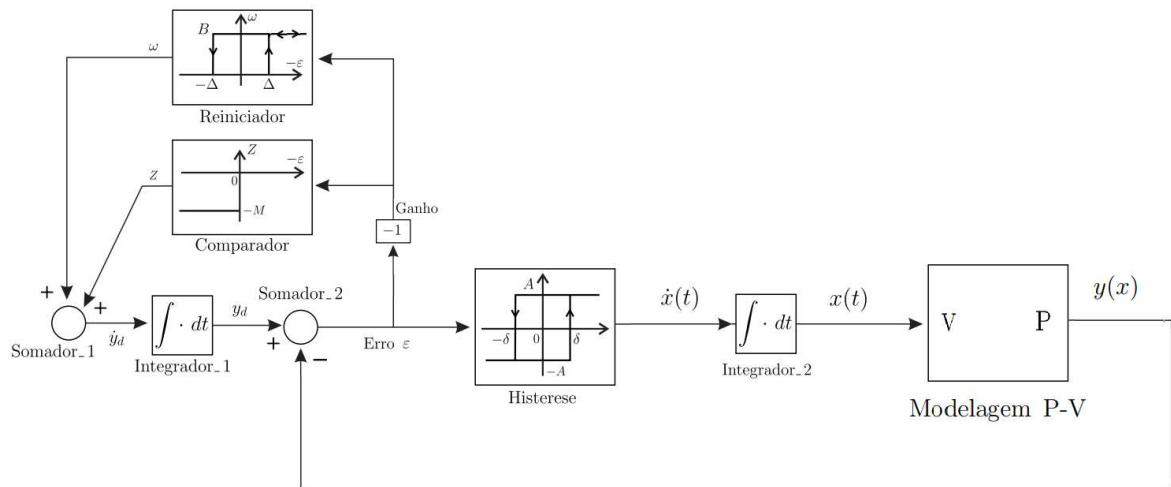
Observa-se na Figura 11 e na Figura 12 que tanto a potência como a corrente crescem com a incidência da irradiação solar. É possível notar que a curva característica P-V de uma célula solar é uma função contínua e que possui um único ponto de máximo em um intervalo fechado. Dessa forma, para tornar viável a aplicação do otimizador Teixeira & Žak, é proposta a aplicação de um ganho negativo na curva de potência gerada pela célula. O intuito é obter a curva característica P-V invertida, com apenas um ponto mínimo, e assim, permitir o uso do otimizador na busca do ponto ótimo.

A Figura 13 apresenta a modelagem da célula fotovoltaica representada por diagrama de blocos e associada ao otimizador analógico não derivativo.

Para a simulação do sistema dinâmico utilizou-se os seguintes parâmetros no otimizador:

$$\begin{aligned} \delta &= 0,06 \quad \text{e} \quad \Delta = 0,12 \\ B &= 7000, \quad M = 3000 \quad \text{e} \quad A = 2 \\ x(0) &= 0,1 \quad \text{e} \quad y_d = 0. \end{aligned}$$

Figura 13 - Otimizador Teixeira & Žak com a modelagem matemática da célula voltaica.



Fonte: Adaptado de Sousa (2018).

A Tabela 1 apresenta os parâmetros de simulação da célula fotovoltaica no qual tais parâmetros são determinados através das características de construção da célula fotovoltaica considerada.

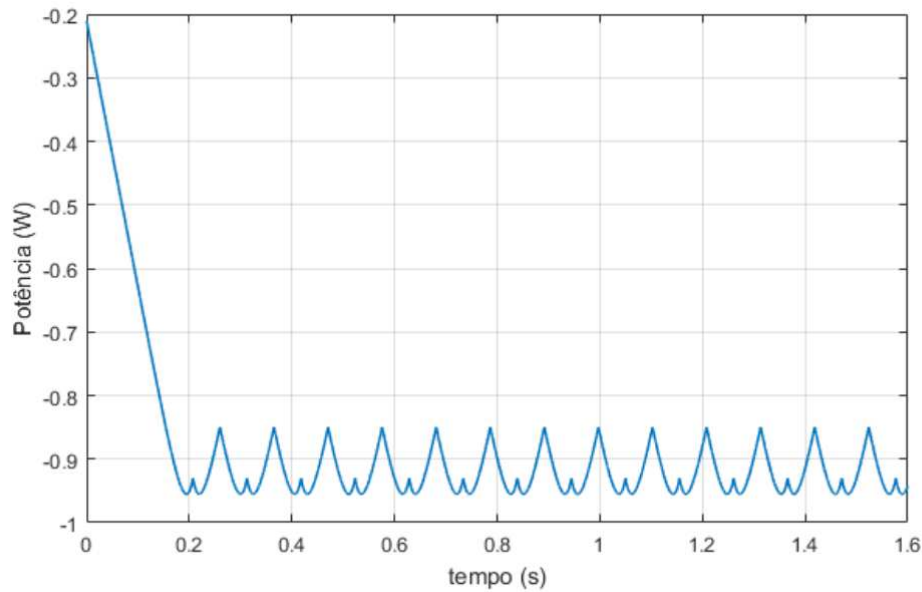
Tabela 1 - Parâmetros de simulação da célula fotovoltaica

Constante	Valor	Definição
q	$1,6 \times 10^{-19} C$	Carga do elétron
k	$1,38 \times 10^{-23} J/K$	Constante de Boltzman
$V_{oc}$	0,596 V	Tensão de circuito aberto
$E_g$	1,12 eV	Gap de energia
A	1,2	Fator de identidade do diodo
$T_r$	298,16 V	Temperatura de referência ( $25^\circ C$ )
$K_I$	$3 \times 10^{-3}$	Coef. de temperatura da corrente de curto circuito
$G_0$	1000 W/m <sup>2</sup>	Irradiação incidente de referência
NOCT	49°C	Temperatura nominal de operação da célula

Fonte: Sousa, 2018.

A Figura 14 apresenta a simulação do sistema dinâmico para essas condições, observando que o ponto ótimo é atingido em torno de 0,2 segundos e a potência gerada pelo sistema permanece oscilando em torno deste ponto. Deve-se salientar, que como a curva característica P-V do sistema foi invertida com um ganho negativo, os valores apresentados também possuem valores negativos.

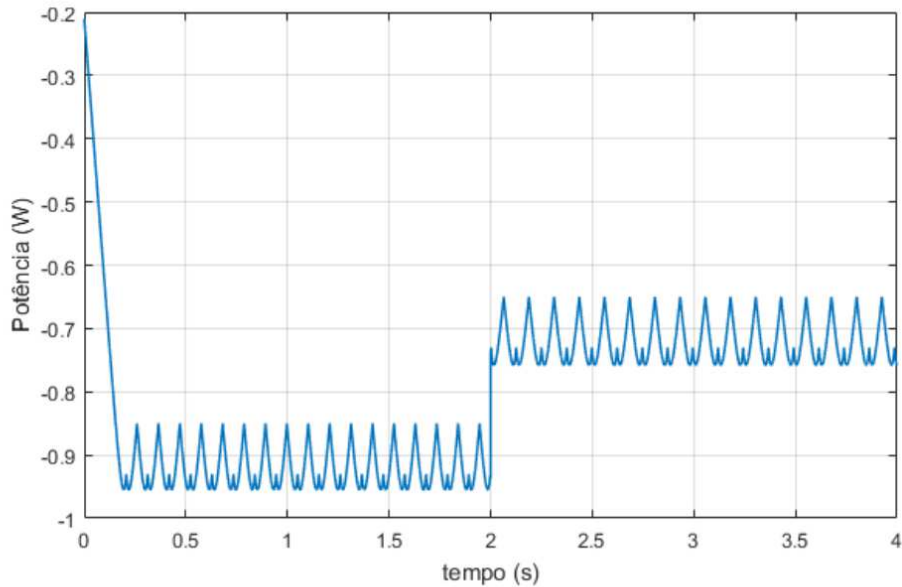
Figura 14 - Resposta do sistema proposto na busca do MPPT de uma célula fotovoltaica ( $G_a = 1000 \text{ W/m}^2$  e  $T_a = 25^\circ\text{C}$ ).



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Por fim, foi feita uma análise do desempenho do otimizador para mudanças bruscas de irradiação solar, descrevendo a presença de nuvens passageiras, por exemplo. Para implementar esta mudança, foi aplicado um degrau em  $t = 2s$ , alterando a irradiância de  $1000 \text{ w/m}^2$  para  $800 \text{ w/m}^2$ . Percebe-se na Figura 15 que o otimizador busca o ponto de ótimo quase que instantaneamente, obtendo uma ótima resposta a mudanças repentinas de incidência solar.

Figura 15 - Resposta da célula fotovoltaica a mudança brusca de irradiação solar de  $1000 \text{ W/m}^2$  para  $800 \text{ W/m}^2$ .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Portanto, nesse capítulo foi apresentada uma nova aplicação para o otimizador analógico não-derivativo (TEIXEIRA; ŽAK, 1998) com resultados satisfatórios para o que se propôs, quanto à busca do *Maximum Power Point Tracking* de uma célula fotovoltaica, utilizando tal otimizador como algoritmo de controle via busca extremal ou *Extremum Seeking Control*. O objetivo é propor novas opções de controle, visando aumentar o rendimento de geradores fotovoltaicos.

Na literatura, constatou-se que métodos de *Extremum Seeking Control* (ESC) que utilizam diferenciadores não são recomendados na solução de problemas que envolvem a busca do MPPT, visto que algumas complicações decorrentes do uso destes sensores de gradiente implicam na ampliação de ruídos e instabilidade a altas frequências (SOUSA, 2018).

O otimizador Teixeira & Žak, sendo um otimizador analógico não derivativo, não utiliza o gradiente da função objetivo, de modo que já existiam boas expectativas desse projeto apresentar melhores respostas na solução do problema proposto para a busca do ponto de operação e máxima potência de uma célula fotovoltaica.

Com a modelagem matemática da célula foram realizadas simulações com intuito de obter

características de não linearidade para variação de valores de irradiância, sendo o software *Simulink* o ambiente de simulações escolhido. As curvas características P-V da Figura 11 e I-V da Figura 12 apresentam comportamento similar a de uma célula fotovoltaica real, demonstrando a fidelidade do modelo matemático utilizado.

Os resultados para as simulações dos sistemas dinâmicos apresentados nas Figuras 14 e 15, também se mostraram interessantes. O otimizador atinge o ponto de máxima potência em aproximadamente 0,2 segundos, quando de irradiância igual a  $1000 \text{ W/m}^2$  e temperatura  $25^\circ\text{C}$  (veja a Figura 14), constatando a eficiência do otimizador, pois observou-se que tal ponto de máximo é o mesmo observado na Figura 11.

Ainda vale destacar que para na operação em torno no MPPT, oscilações do sistema decorrentes do mecanismo de busca do otimizador analógico podem ser diminuídas alterando (diminuindo) os parâmetros de projeto  $\Delta$  e  $\delta$ , seguindo suas restrições de projeto.

Como último resultado, a análise da eficiência do otimizador com relação a mudanças bruscas de irradiação solar, ou seja, adicionou-se uma característica de perturbação ao projeto de MPPT. Nesse caso, para uma irradiação solar que muda de  $1000 \text{ W/m}^2$  para  $800 \text{ W/m}^2$ , observa-se pela Figura 15 que o otimizador permite o conjunto alcançar o ponto de máximo para ambas as incidências, de acordo com a Figura 11, apresentando assim uma boa resposta, sendo tais resultados satisfatórios.

## 5 CONTROLADORES CHAVEADOS E ESTABILIDADE DE SISTEMAS FUZZY T-S VIA LMIS

O crescente interesse pelos estudos de Desigualdades Matriciais Lineares ou Linear Matrix Inequalities (LMIs) se mostra bastante justificável pela capacidade dessa ferramenta matemática na obtenção de novas condições que garantam a estabilidade de sistemas lineares, como também propostas de novas condições de estabilidade para sistemas definidos mais recentemente, ou com novos desafios de complexidade.

A história das LMIs na análise de sistemas dinâmicos tem por volta de 100 anos, quando Lyapunov publicou seu trabalho introduzindo o que hoje chamamos de teoria de Lyapunov (BOYD, 1994). Naquela época, o teorema de Lyapunov, adaptado para sistemas lineares contínuos no tempo, poderia ser formulado diretamente em termos de LMIs.

Principalmente na década de 1980 foram abertos caminhos para que problemas de controle pudessem ser convertidos em problemas convexos (BERNUSSOU *et al.*, 1989) que permitiram a afirmação fundamental de que garantir que um sistema linear realimentado é estável, é o equivalente a encontrar um ganho de realimentação do vetor de estado  $K$  e uma matriz de Lyapunov  $P$  simétrica positiva definida (BERNUSSOU *et al.*, 1989).

Daí em diante surgiram diversas novas condições baseadas em LMIs que garantiam a estabilidade assintótica global de sistemas não lineares, destacando-se aqui as que se utilizam principalmente de modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998). Também foram concebidas condições, baseadas em LMIs, que garantam a estabilidade de sistemas chaveados, resultando em um crescente interesse e possibilidade de explorar uma grande quantidade de problemas teóricos e de implementações práticas. Tais aplicações tem atraído muita atenção da comunidade científica especializada.

Estudos foram propostos tanto nos projetos de controladores chaveados para sistemas lineares (WICKS; PELETIES; DECARLO, 1994); (DECARLO *et al.*, 2000) e (HESPANHA; MORSE, 2002) quanto para sistemas não lineares utilizando modelos fuzzy (TANAKA; IWASAKI; WANG, 2000a); (TANAKA; IWASAKI; WANG, 2000b); (FENG, 2004) e (FANG, 2006).

A lei de chaveamento estabelece regiões nas quais os diferentes subsistemas são ativados, resultando em um sistema linear chaveado que é exponencialmente estável. Estudos de resul-

tados sobre a análise de estabilidade e estabilização de sistemas chaveados já mostraram que é possível apresentar condições necessárias e suficientes para a estabilidade assintótica, quando a lei de chaveamento é arbitrária (LIN; ANTSAKLIS, 2009), o que permite investigar em quais condições é possível estabilizar um sistema chaveado projetando leis de controle chaveadas. Para o caso geral, a literatura apresenta apenas condições suficientes para sistemas de tempo contínuo, e para o caso discreto recentemente foram estabelecidas condições necessárias e suficientes (FIACCHINI; JUNGERS, 2013).

Um tipo de aproximação de estabilidade de sistemas chaveados que compõem umas das bases das ideias que serão aprofundadas adiante nesse trabalho, está nas já determinadas condições necessárias e suficientes para que sistemas lineares chaveados com incertezas politópicas, com apenas dois subsistemas, sejam quadraticamente estabilizáveis, via realimentação das variáveis de estado (OTSUKA; SOGA, 2010).

De modo a estabilizar sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno pode-se utilizar o conceito de *Compensação Distribuída Paralela* (CDP), em que cada regra de controle é projetada a partir de uma regra do modelo fuzzy T-S correspondente da planta (SANTIM *et al.*, 2012) sendo possível o projeto de um compensador para cada regra do modelo fuzzy aproveitando técnicas de projeto similares às empregadas no controle linear. Em resumo, a combinação fuzzy linear individual resulta em um regulador fuzzy não linear, pois o regulador fuzzy projetado compartilha os mesmos conjuntos de regras com o modelo fuzzy nas partes premissas.

Considere o modelo fuzzy descrito a seguir:

Regra  $i$ : Se  $z_1(t)$  é  $M_1^i$ , ...,  $z_p(t)$  é  $M_p^i$ ,

$$\text{Então} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \quad (39)$$

sendo  $i = 1, 2, \dots, r$  em que  $r$  é o número de modelos locais,  $M_j^i = 1, 2, \dots, p$  é o conjunto fuzzy  $j$  da regra  $i$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada,  $y \in \mathbb{R}^q$  é o vetor de saída,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$  e  $z_1(t), \dots, z_p(t)$  são as variáveis premissas, ou nesse caso, as variáveis de estado (SANTIM *et al.*, 2012).

Seja  $M_j^i(z_j(t))$  denominada como o “peso” do conjunto fuzzy  $M_j^i$  associado à variável premissa  $z_j(t)$  e considerando que



$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_j^i(z_j(t)), \quad z(t) = [z_1(t) \quad z_2(t) \quad \dots \quad z_p(t)], \quad (40)$$

sendo  $M_j^i(z_j(t)) \geq 0$ , tem-se para  $i = 1, 2, \dots, r$  que

$$w_i(z(t)) \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0. \quad (41)$$

De  $x(t)$ ,  $u(t)$  e  $z(t)$  obtém-se o sistema fuzzy resultante pelo método do centro da gravidade para a defuzificação (TANIGUCHI *et al.*, 2001). Sendo  $M_j^i(z_j(t)) \geq 0$ , tem-se para  $i = 1, 2, \dots, r$  que

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (42)$$

Então, para

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) [(A_i x(t) + B_i u(t))]}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \quad (43)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)).$$

$$\dot{x}(t) = (\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A_i) x(t) + (\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) B_i) u(t) = A(\alpha) x(t) + B(\alpha) u(t). \quad (44)$$

Vale destacar uma importante observação de que o mesmo modelo, que aqui é definido no contexto de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno, pode ser utilizado para representar sistemas lineares incertos, com  $\alpha_i$  constantes mas com as mesmas propriedades (BERNUSSOU; PERES; GEROMEL, 1989).

Note que em (42), com  $\alpha_i(z(t))$  como sendo a função de pertinência normalizada de cada modelo de regra, ou também conhecida como função de pertinência de modelo local  $i$ , tal que  $i = 1, 2, \dots, r$ , é utilizada para definir o sistema não forçado ( $u(t) = 0$ ) (SANTIM *et al.*, 2012) como sendo:

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))(A_i x(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \quad (45)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))(A_i x(t)) = A(\alpha)x(t).$$

Seguindo o mesmo princípio, pode-se determinar a saída para os casos do sistema forçado e não forçado:

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))(C_i x(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))(C_i x(t)), \quad (46)$$

$$y(t) = C(\alpha)x(t).$$

É muito importante observar que, para  $i = 1, 2, \dots, r$ , a combinação linear convexa dos modelos fornece a relação

$$\alpha_i(z(t)) \geq 0 \quad e \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1, \quad (47)$$

sendo que para a obtenção do modelo fuzzy T-S para sistemas não lineares, é conveniente que se adote  $z(t) = x(t)$ , pois assim,  $x(t)$  é o vetor de estado do sistema não linear.

Dessa forma, com a descrição dos sistemas fuzzy Takagi-Sugeno, pode-se associar os conceitos de estabilidade às desigualdades matriciais lineares (LMIs) de modo a utilizar tal ferramenta na análise de estabilidade do projeto. Assim, de (40)-(42), as equações (44) e (46) ficam representadas da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)] = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) C_i x(t) = C(\alpha)x(t) \end{array} \right. \quad (48)$$

sendo  $\alpha_i(z(t)) \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1$  para todo  $i \in \mathbb{K}_r$ .

Considerando o modelo fuzzy (39), os reguladores fuzzy de realimentação de estado via compensação distribuída paralela possuem a seguinte estrutura (SOUZA *et al.*, 2013):

$$\text{Regra } i: \text{ Se } z_1(t) \text{ é } M_1^i, \dots, z_p(t) \text{ é } M_p^i, \quad (49)$$

$$\text{Então } u(t) = -K_i x(t).$$

De modo que

$$u(t) = - \sum_{j=1}^r \alpha_j(z(t)) K_j x(t). \quad (50)$$

Substituindo (50) em (48), para  $z(t) = x(t)$  e  $\sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) = 1$ , o resultado a seguir é alcançado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) \left[ A_i x(t) - B_i (\sum_{j=1}^r \alpha_j(x(t)) K_j x(t)) \right], \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) \left[ \sum_{j=1}^r \alpha_j(x(t)) A_i x(t) - \sum_{j=1}^r \alpha_j(x(t)) B_i K_j x(t) \right], \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) [A_i - B_i K_j] x(t), \\ \dot{x}(t) &= [A(\alpha) - B(\alpha)K(\alpha)] x(t). \end{aligned} \quad (51)$$

Assim, é possível apresentar as relações estabelecidas na literatura, baseadas em LMIs que relacionam tal ferramenta com a garantia de estabilidade assintótica global para um modelo fuzzy Takagi-Sugeno representando localmente as relações de entrada e vetor de estado de um sistema não linear.

## 5.1 ESTABILIDADE DE SISTEMAS FUZZY TAKAGI-SUGENO VIA LMIs

A seguir, destacam-se alguns resultados da literatura que demonstram como foi possível estabelecer condições baseadas em LMIs que, quando factíveis, garantem a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (51).

Ao se levar em consideração as condições LMIs para a garantia de estabilidade assintótica, taxa de decaimento e restrições na entrada para o sinal de controle, quando são apresentados sistemas lineares com incertezas politópicas ou sistemas não lineares utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno, foi utilizada como referência o seguinte conjunto de definições e abreviaturas

(SOUZA, 2013):

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_r &= \{1, 2, \dots, r\}, \quad r \in \mathbb{N}; \\ x(t) &= x, \quad \alpha_i(x(t)) = \alpha_i, \quad V(x(t)) = V, \quad \|x\|_2 = \sqrt{x^T x}; \\ (A, B, C, K) (\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i, B_i, C_i, K_i), \quad \alpha_i \geq 0; \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i &= 1, \quad \alpha^T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]. \end{aligned} \tag{52}$$

Sistemas lineares com incertezas podem ser descritos por equações diferenciais lineares que apresentem parâmetros conhecidos dentro de um domínio limitado e pré-definido. Tal domínio limitado tem relação com os valores nominais de tais parâmetros das equações lineares.

Para sistemas lineares, “s” representa o número de parâmetros incertos distintos, sendo  $r = 2^s$ , ao passo que para sistemas não lineares, “s” representa o número de funções não lineares que dependem das variáveis de estado dos sistema.

Para relacionar a estabilidade de sistemas lineares via LMIs com resultados de estabilidade já obtidos na literatura, pode-se apresentar alguns teoremas descritos abaixo.

**Teorema 2:** (BERNUSSOU; PERES; GEROMEL, 1989) *O sistema linear com incertezas politópicas dado em (44) é quadraticamente estabilizável se, e somente se, existem matrizes  $X = X^T > 0$  e  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tais que, para todo  $i \in \mathbb{K}_r$ ,*

$$XA_i^T + A_i X - B_i M - M^T B_i^T < 0. \tag{53}$$

*Quando (53) são factíveis, para  $i \in \mathbb{K}_r$ , o ganho do controlador é dado por  $K = MX^{-1}$ .*

*Prova:* A prova desse teorema, bem como outros detalhes e condições necessárias e suficientes para problemas de otimização, podem ser encontradas em Bernussou, Peres & Geromel (1989).

O teorema a seguir garante a estabilidade assintótica da origem do sistema (51) de modo a utilizar conceitos de estabilidade de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno via LMIs:

**Teorema 3:** (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998) *O ponto de equilíbrio  $x = 0$  dos sistema de controle fuzzy contínuo no tempo dado em (51) é assintoticamente estável se existe uma matriz simétrica positiva definida  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $M_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tais que, para todo  $i, j \in \mathbb{K}_r$ , as seguintes LMIs são satisfeitas:*

$$XA_i^T + A_iX - B_iM_i - M_i^T B_i^T < 0, \quad (54)$$

$$(A_i + A_j)X + X(A_i + A_j)^T - B_iM_j - B_jM_i - M_i^T B_j^T - M_j^T B_i^T \leq 0, \quad i < j,$$

*exceto os pares  $(i, j)$  tais que  $\alpha_i \alpha_j = 0$ , para todo  $x$ . Se (54) forem factíveis, os ganhos do controlador podem ser dados por  $K_i = M_i X^{-1}$ ,  $i \in \mathbb{K}_r$ .*

*Prova:* A prova desse teorema, corolários e relações para condições relaxadas de estabilidade podem ser encontradas em Tanaka, Ikeda & Wang (1998).

*Observação 1:* Por simplicidade, tal técnica para projeto dos ganhos do controlador baseada no Teorema 3 pode ser utilizada como apresentada, mas isso não exclui a possibilidade de utilização de outras metodologias de projeto mais relaxadas, também baseadas em desigualdades matriciais lineares, para plantas descritas por modelos fuzzy Takagi-Sugeno.

**Corolário 4:** *Se  $B_1 = B_2 = \dots = B_r = B$  então o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema linear como dado em (51) é globalmente assintoticamente estável se existem uma matriz simétrica positiva definida  $X$  e matrizes  $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tais que, para todo  $i \in \mathbb{K}_r$ .*

$$XA_i^T + A_iX - BM_i - M_i^T B^T < 0. \quad (55)$$

*Se (55) são factíveis, para  $i \in \mathbb{K}_r$ , os ganhos do controlador são dados por  $K_i = M_i X^{-1}$ ,  $i \in \mathbb{K}_r$ .*

*Demonstração:* Pode ser encontrada em Souza (2013), com as análises para o corolário utilizando  $V = x^T P x$  e fixando  $B_i = B$ ,  $i \in \mathbb{K}_r$ .

Assim, para demonstrar esse teorema, no caso em que  $B(\alpha) = B$  é uma matriz constante, ou seja  $B_1 = B_2 = \dots = B_r = B$ , é possível caracterizar o ponto de equilíbrio  $x = 0$  para sistemas de controle fuzzy contínuo no tempo (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998).

Um projeto de um controlador chaveado para o sistema fuzzy Takagi-Sugeno (48) é proposto assumindo  $B(\alpha) = B$  como uma matriz constante, nesse caso dada por:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bu(t). \quad (56)$$

Suponha que (54) são factíveis e calcule  $K_i = M_i X^{-1}$ ,  $i \in \mathbb{K}_r$ , os ganhos do controlador dado por (50), sendo que  $P = X^{-1}$  e  $M_i$ ,  $i \in \mathbb{K}_r$  são obtidas pelas condições do Corolário 4. Então define-se um controlador chaveado como

$$u(t) = u_\sigma = -K_\sigma x, \quad \sigma = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_r} (-x^T P B K_i x). \quad (57)$$

Assim de (47), o sistema controlado (56) e (57) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bu_\sigma = \sum_{i=1}^r \alpha_i [A_i - B K_\sigma] x(t). \quad (58)$$

**Teorema 5:** (SOUZA *et al.*, 2013) *Suponha as condições do Teorema 3 relativas ao sistema (56) com a lei de controle (50), pode-se obter  $K_i = M_i X^{-1}$ ,  $i \in \mathbb{K}_r$  e  $P = X^{-1}$ . Então, a lei de controle (57) torna o ponto de equilíbrio  $x = 0$ , do sistema (56), globalmente assintoticamente estável.*

*Prova:* Considere uma candidata a função Lyapunov quadrática  $V = x^T P x$ . Definindo  $\dot{V}_{u_\alpha}$  e  $\dot{V}_{u_\sigma}$  como as derivadas em função do tempo de  $V$  para o sistema (56), com as leis de controle (50) e (57), respectivamente. Então, de (58),

$$\dot{V}_{u_\sigma} = 2x^T P \dot{x} = 2x^T P (A(\alpha)x + Bu_\sigma), \quad (59)$$

$$\dot{V}_{u_\sigma} = 2x^T P A(\alpha)x + 2x^T P B (-K_\sigma)x.$$

Portanto, note que, de (52) e (57),

$$\min_{i \in \mathbb{K}_r} \{x^T P B (-K_i)x\} \leq x^T P B \left( -\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i \right) x. \quad (60)$$

Assim, de (59) e das leis dadas em (50) e (57) observe que:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{u\sigma} &= 2x^T PA(\alpha)x + 2 \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{x^T PB(-K_i)x\} \\
&\leq 2x^T PA(\alpha)x + 2x^T PB(-\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i)x \\
&= 2x^T P(A(\alpha) - BK(\alpha))x \\
\dot{V}_{u\sigma} &\leq 2x^T P(A(\alpha)x + Bu_\alpha) = \dot{V}_{u\alpha}.
\end{aligned} \tag{61}$$

Então,  $\dot{V}_{u\sigma} \leq \dot{V}_{u\alpha}$ . Sendo assim, do Corolário 4,  $\dot{V}_{u\alpha} \leq 0$  para  $x \neq 0$ . Sendo a prova concluída.

*Observação 2:* O Teorema 5 mostra que se as condições do Teorema 3 forem satisfeitas, então  $\dot{V}_{u\alpha}(x(t)) < 0$  para todo  $x \neq 0$  e portanto  $\dot{V}_{u\sigma}(x(t)) < 0$  para  $x \neq 0$ , assegurando que o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema controlado (56) e (57) seja globalmente assintoticamente estável. Então, o Teorema 3 pode ser usado para projetar os ganhos  $K_1, K_2, \dots, K_r$  bem como a matriz  $P = X^{-1}$  da lei de controle chaveada (57). Além disso, note que a lei de controle chaveada (57) não se utiliza de funções de pertinência  $\alpha_i, i \in \mathbb{K}_r$ , que poderiam ser necessárias para implementar a lei de controle (51), sendo então esta, uma alternativa relativamente mais simples para implementar controladores.

Em projetos de sistemas de controle é importante considerar não somente a estabilidade, mas também outros índices de desempenho do sistema controlado tais como a velocidade de resposta e restrições na entrada e saída do sinal de controle. Com relação por exemplo à velocidade de resposta do projeto, outros índices de desempenho de grande importância em sistemas de controle e que estão ligados à tal velocidade de resposta, são a taxa de decaimento ( $\beta$ ) bem como as restrições na entrada e saída do sinal de controle.

A taxa de decaimento, definida como sendo  $\beta \geq 0$  é também conhecida como o maior expoente Lyapunov, de modo que, para todas as trajetórias  $x(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\beta t} \|x(t)\| = 0. \tag{62}$$

A função Lyapunov quadrática  $V = x(t)^T P x(t)$  estabelece um limite inferior para a taxa de decaimento do sistema (46), já que a condição  $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t))$ , para todas as trajetórias

$x(t)$ , retorna uma definição de taxa de decaimento maior ou igual a  $\beta$  (BOYD, 1994).

**Teorema 6:** (BOYD *et al.*, 1994) *O sistema linear com incertezas politópicas como em (44) é quadraticamente estabilizável, com taxa de decaimento maior ou igual a  $\beta$  se, e somente se, existem uma matriz simétrica positiva definida  $X$  e  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tais que, para todo  $i \in \mathbb{K}_r$ , as seguintes LMIs são factíveis:*

$$XA_i^T + A_iX - B_iM - M^T B_i^T + 2\beta X < 0. \quad (63)$$

Dessa forma, sendo (63) factíveis, para  $i \in \mathbb{K}_r$ , o ganho do controlador é dado por  $K = MX^{-1}$ , sendo que a demonstração desse teorema parte do caso onde considera-se  $\dot{V} \leq -2\beta V$ .

*Prova:* Mais detalhes da demonstração completa e prova desse teorema podem ser encontrados em Boyd *et al.* (1994).

A seguir, é apresentado um teorema que será mais importante e destacado à frente, que relaciona as características do ponto de equilíbrio de um sistema de controle fuzzy contínuo no tempo utilizando LMIs.

**Teorema 7:** (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998) *O ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema de controle fuzzy contínuo no tempo como em (44) é globalmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento maior ou igual a  $\beta$ , se existem uma matriz simétrica positiva definida  $X (X > 0)$  e matrizes  $M_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tais que, para todo  $i, j \in \mathbb{K}_r$  as seguintes LMIs são factíveis:*

$$XA_i^T + A_iX - B_iM_i - M_i^T B_i^T + 2\beta X < 0. \quad (64)$$

$$(A_i + A_j)X + X(A_i + A_j)^T - B_iM_j - B_jM_i - M_i^T B_j^T - M_j^T B_i^T + 4\beta X \leq 0, \quad i < j, \quad (65)$$

exceto para os pares  $(i, j)$ , com  $\alpha_i(x(t))\alpha_j(x(t)) = 0$  para todo  $x(t)$ , se (64) e (65) forem factíveis, então os ganhos do controlador são dados por  $K_i = M_iX^{-1}$ ,  $i \in \mathbb{K}_r$ .

*Prova:* Para a prova do teorema e mais detalhes das LMIs e factibilidade vide a referência Tanaka, Ikeda & Wang (1998).



Ainda é necessário apresentar alguns índices de desempenho importantes para o projeto. A análise das ferramentas e características mais específicas para sistemas de controle segue apresentando uma forma indireta para restringir a entrada do sinal de controle, utilizando o conceito de limitação na norma dos ganhos do controlador (ŠILJAK; STIPANOVIĆ, 2000).

Definindo as constantes  $\eta > 0$  e  $\eta_x > 0$  e impondo que  $M_i^T M_i < \eta I_n$ ,  $i \in \mathbb{K}_r$  e  $X^{-1} < \eta_x I_n$ , assim, tal forma indireta de restrição sobre os ganhos do controlador pode ser dado por:

**Teorema 8:** (ŠILJAK; STIPANOVIĆ, 2000) *A restrição na norma dos ganhos do controlador pode ser estabelecida quando  $K_i K_i^T \leq \eta \eta_x^2 I_m$  e  $i \in \mathbb{K}_r$  estando impostas, se existem constantes  $\eta > 0$  e  $\eta_x > 0$ , tais que as LMIs dos Teoremas 3 ou 7 (como no Teorema 2, substituindo  $K_i = K$  e  $M_i = M$ ), contanto que as LMIs abaixo organizadas sejam factíveis*

$$\begin{bmatrix} \eta_x I_n & I_n \\ I_n & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \eta I_n & M_i^T \\ M_i & I_m \end{bmatrix} \geq 0, \quad i \in \mathbb{K}_r. \quad (66)$$

*Prova:* Vide referência Šiljak & Stipanović (2000).

Dessa forma, tem-se ferramentas muito importantes para o projeto porque ficam estabelecidos e apresentados resultados preliminares que são condições, baseadas em LMIs, que garantem a estabilidade assintótica, taxa de decaimento e restrições na entrada do sinal de controle de sistemas lineares com incertezas politópicas e não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno.

Seguindo com as revisões de resultados existentes e análises, serão apresentados um controlador chaveado (CHEN *et al.*, 2012) para um sistema fuzzy inicial (TANIGUCHI *et al.*, 2001) que servirá como base para justificar a utilização de outro teorema importante para o projeto, proposto em (SOUZA *et al.*, 2013).

Propostas de projetos de controle de sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno podem trazer para a análise do sistema não linear  $\dot{x} = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t)$ , condições onde a matriz  $B(\alpha)$  é constante,  $B(\alpha) = B$  ou quando  $B(\alpha)$  é incerta, por exemplo, ou ainda considerar que sistemas lineares apresentem incertezas no sinal de controle (SOUZA *et al.*, 2013).

Apesar de todas essas possibilidades de análises, é importante fixar um conjunto de características e índices que apresentem conjuntos com elementos auxiliares antes de propor qualquer

lei de controle, que será utilizada mais à frente e pode ser observada a seguir na forma de uma definição.

**Definição 1:** (SOUZA *et al.*, 2014)

*Considerando o conjunto de índices*

$$\Omega_H(t) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \{x(t)^T H_i x(t)\} = \{j \in \mathbb{K}_N : x^T(t) H_j x(t) = \min_{i \in \mathbb{K}_N} \{x^T(t) H_i x(t)\}\},$$

sendo  $H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i \in \mathbb{K}_N$ , e  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ . O menor índice  $j \in \Omega_H(t)$  será denotado por:

$$\arg \min^*_{i \in \mathbb{K}_N} \{x(t)^T H_i x(t)\} = \min_{j \in \Omega_H(t)} \{j\}.$$

Note também que o conjunto  $\Omega_H(t)$  pode conter mais de um elemento, assim, sempre que se observar  $\arg \min^*$  significa que foi estabelecida uma forma de selecionar apenas o menor dos elementos desse conjunto.

O controlador fuzzy chaveado (CHEN *et al.*, 2012) proposto para o sistema fuzzy Takagi-Sugeno (43) é então reescrito como rerepresentado a seguir:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) = A(\alpha) x(t) + B(\alpha) u(t), \quad (67)$$

e uma *candidata a função de Lyapunov quadrática por partes* do tipo mínimo:

$$V(x) = \min_{k \in \mathbb{K}_N} \{x^T(t) P_k x(t)\}, \quad (68)$$

sendo  $P_k, k \in \mathbb{K}_N$ , matrizes positivas definidas.

Para a função Lyapunov quadrática (68), o controlador fuzzy chaveado pode ser escrito da forma (CHEN *et al.*, 2012):

$$u(t) = u_\sigma(t) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) K_{i\sigma} x(t), \quad (69)$$

$$\text{sendo, } \sigma = \arg \min^*_{k \in \mathbb{K}_N} \{x(t)^T P_k x(t)\}.$$

Então, do resultado da Definição 1 com o *sistema controlado* (67) e (69) têm-se:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u_\sigma(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j (A_i - B_i K_{j\sigma})x(t). \quad (70)$$

Tal controlador chaveado como em (69), proposto em Chen *et al.* (2012) não se aplica a sistemas incertos, ao passo que em Souza *et al.* (2014) propõe-se um controlador que pode operar mesmo quando da existência de incerteza na referência do sinal de controle. Dessa forma, os resultados se tornam mais gerais que o sistema (56) porque não exigem que a matriz  $B(\alpha)$  seja constante e utiliza funções de Lyapunov quadráticas por partes.

Em Chen *et al.* (2012) considerou-se a função de Lyapunov como em (68) e o controlador fuzzy chaveado (69) para propor teoremas que apresentassem critérios de estabilidade relaxados. No entanto, algumas dessas condições tinham características de desigualdades do tipo BMIs (do inglês: *Bilinear Matrix Inequalities*).

Um tipo especial de BMIs apresenta um formato na qual as condições de estabilidade contêm termos na forma do produto de uma matriz completa por um escalar (SOUZA *et al.*, 2014). Como opção para lidar com as características das BMIs, um caso particular é o método path-following, sendo tal procedimento mais amplamente utilizado para resolver tais desigualdades (HASSIB; HOW; BOYD, 1999).

Em (SOUZA *et al.*, 2013) tal método path-following foi utilizado para simulação e aplicação de controle para um levitador magnético, considerando que a massa da bola que será levitada como sendo incerta, mas é possível estender tais técnicas para outros exemplos de controle de sistemas não-lineares como proposta de relaxamento de critérios de estabilização de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (CHEN *et al.*, 2012).

Um controlador chaveado que utiliza-se dois estágios (SOUZA *et al.*, 2013) pode ser proposto para o sistema fuzzy Takagi-Sugeno (67).

Nesse caso, para determinar os ganhos de realimentação, o primeiro estágio, baseado em (CHEN *et al.*, 2012), seleciona um índice  $\sigma = \arg \min_{k \in \mathbb{K}_N}^* \{x^T P_k x\}$ , sendo  $P_k, k \in \mathbb{K}_N$ , matrizes simétricas positivas definidas. Sendo assim, a função de Lyapunov dada em (68) se torna  $V(x) = x^T P_\sigma x$ .

O segundo estágio é a minimização da derivada temporal da função de Lyapunov (68) por meio da seleção do ganho do controlador, que pertence ao conjunto de ganhos  $\{K_{j\sigma}, j \in \mathbb{K}_r\}$  sendo  $\sigma$  obtido do primeiro estágio. Neste estágio, também se utiliza de matrizes simétricas auxiliares  $Q_{jk}, j \in \mathbb{K}_r, k \in \mathbb{K}_N$ , que associadas ao índice  $\sigma$ , escolhe um índice  $v = \arg \min_{j \in \mathbb{K}_r}^* \{x^T Q_{j\sigma} x\}$ .

De modo que, considerados os índices  $\nu$  e  $\sigma$  obtidos e utilizando a Definição 1, o controlador chaveador para essa proposta é definido como:

$$u(t) = u_{\sigma\nu}(t) = -K_{\nu\sigma}x(t), \quad (71)$$

$$\sigma = \arg \min_{k \in \mathbb{K}_N} \{x^T P_k x\}, \quad \nu = \arg \min_{j \in \mathbb{K}_r} \{x^T Q_j x\}.$$

E portanto, admitindo (71), o sistema controlado (67) e (71) pode ser finalmente apresentado como:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u_{\nu\sigma}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i - B_i K_{\nu\sigma} x(t). \quad (72)$$

Para esse controlador chaveado (71), considerando a função Lyapunov por partes (68) é apresentado o seguinte teorema:

**Teorema 9:** (SOUZA, 2013) *Suponha a existência de matrizes simétricas positivas definidas  $X_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes simétricas  $Z_{ik}, R_{ik}, Y_{ik} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $M_{ik} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e escalares  $\lambda_{isk} > 0$ ,  $\beta < 0$  tais que, para todo  $i, j \in \mathbb{K}_r$  e  $k, s \in \mathbb{K}_N$ :*

$$-B_i M_{jk} - M_{jk}^T B_i^T - Z_{ik} - R_{jk} < 0, \quad Y_{ik} < 0. \quad (73)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{ik} & * & * & \cdots & * \\ \lambda_{i1k} X_k & -\lambda_{i1k} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{i2k} X_k & 0 & -\lambda_{i2k} X_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \lambda_{iNk} X_k & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_{iNk} X_N \end{bmatrix} < 0. \quad (74)$$

sendo  $Q_{ik} = X_k A_i^T + A_i X_k + Z_{ik} + R_{ik} - \beta X_k - \sum_{s=1}^N \lambda_{isk} X_k - Y_{ik}$ . Então a lei de controle chaveada (71) torna o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (67) globalmente assintoticamente estável, sendo  $Q_{jk} = X_k^{-1} R_{jk} X_k^{-1}$ ,  $P_k = X_k^{-1}$  e os ganhos do controlador serão dados por  $K_{jk} = M_{jk} X_k^{-1}$ ,  $j \in \mathbb{K}_r$  e  $k \in \mathbb{K}_N$ .

Reescrevendo as condições do Teorema 9 considerando  $N = 1$  aproxima-se dos formatos

das LMIs utilizadas nas posteriores simulações propostas nesse trabalho, que se apresentam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} -B_i M_{j1} - M_{j1}^T B_i^T - Z_{i1} - R_{j1} &< 0, \\ Y_{i1} &< 0, \end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{i1} & * \\ \lambda_{i11} X_1 & -\lambda_{i11} X_1 \end{bmatrix} < 0, \quad i, j \in \mathbb{K}_r.$$

onde  $Q_{i1} = X_1 A_i^T + A_i X_1 + Z_{i1} + R_{i1} - \beta X_1 - \lambda_{i11} X_1 - Y_{i1}$ .

E assim, as condições simplificadas para as expressões do Teorema 7 podem ser obtidas aplicando o complemento de Schur na terceira desigualdade de (75), onde se obtém (SOUZA *et al.*, 2013):

$$\begin{aligned} -B_i M_{j1} - M_{j1}^T B_i^T - Z_{i1} - R_{j1} &< 0, \\ Y_{i1} &< 0, \end{aligned} \tag{76}$$

$$X_1 A_i^T + A_i X_1 + Z_{i1} + R_{i1} - \beta X_1 - Y_{i1} < 0.$$

Portanto, para o caso em que  $B(\alpha) = B$  é uma matriz constante, as condições que caracterizam o ponto de equilíbrio  $x = 0$  para sistemas fuzzy contínuos no tempo, como apresentado no Corolário 4, é associada às condições do Teorema 9. Tal associação proporciona o seguinte conjunto de LMIs no projeto de um controlador chaveado para o sistema fuzzy Takagi-Sugeno com  $B(\alpha) = B$ , como dado em (56), que resulte no sistema controlado (58).

Então, as desigualdades matriciais lineares (LMIs) reunindo todas as características anteriormente citadas e considerando índices de desempenho, como a taxa de decaimento ( $\beta$ ), são apresentadas a seguir:

$$-B_i M_j - M_j^T B_i^T - Z_i - R_j < 0, \tag{77}$$

$$X A_i^T + A_i X + Z_i + R_i + 2\beta X < 0.$$

A seguinte discussão, abrange referências para o relaxamento de critérios de estabilização de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (LIU; ZHANG, 2003a), (LIU; ZHANG, 2003b).

Já existem resultados na literatura (FENG *et al.*, 1997), (CAO *et al.*, 1996) que mostraram que sistemas fuzzy T-S podem aproximar quaisquer funções contínuas na precisão que for necessária, bem como é possível aplicar métodos baseados na teoria de sistemas com incertezas para converter a análise de estabilidade de um sistema de controle fuzzy à análise de estabilidade de um conjunto de subsistemas "extremos" variantes no tempo.

Mesmo assim ainda existem resultados mais conservativos, que optam por desconsiderar as interações entre os subsistemas fuzzy, usando sistemas lineares convencionais para analisar e projetar sistemas de controle fuzzy (TAKAGI; SUGENO, 1993).

O objetivo dessa etapa é reunir ferramentas, como por exemplo os resultados particulares apresentados em Liu & Zhang (2003a) e Liu & Zhang (2003b), que se mostram interessantes opções na modelagem e projeto de sistemas de controle fuzzy, já que são apresentadas condições de estabilidade quadrática mais simples junto a teoremas que são associados aos conceitos de desigualdades matriciais lineares, compostas pelos coeficientes de todos os subsistemas fuzzy.

Aqui considera-se então as interações entre os subsistemas fuzzy para definir duas condições suficientes nos moldes das LMIs que garantem a existência do controle do sistema fuzzy Takagi-Sugeno por realimentação de estados.

Os resultados a seguir também apresentam que os sistemas fuzzy T-S resultantes, se caracterizam por serem diretamente influenciados pelas suas entradas e seus estados, ao passo que em outros resultados conhecidos (CAO *et al.*, 1996), (FENG *et al.*, 1996) os sistemas fuzzy T-S são apenas influenciados pelos estados e não diretamente pelas entradas, sendo propostas menos gerais.

Outra característica importante é a de que as condições de existência do controlador podem ser relaxadas, já que não existem as restrições para as quais exige que a parte esquerda das desigualdades matriciais deve ser negativa definida.

Já que o modelo construtivo das matrizes são uma representação das matrizes de cada subsistema fuzzy, então as interações de cada subsistema do projeto são consideradas em uma única matriz negativa definida e as soluções são resultados das interações entre todos os subsistemas que foram disparados no processo, então o projeto do controlador também considera essas interações.

Resultados da literatura (TANAKA; IKEDA; WANG, 1996), (CHEN *et al.*, 2000) apresentam desigualdades matriciais lineares que só consideram interações entre dois subsistemas ao

passo que é sabido que vários subsistemas fuzzy podem ser ativados ao mesmo tempo em uma planta de um processo.

Considere o modelo dinâmico Takagi-Sugeno descrito pelas regras SE-ENTÃO a seguir:

*Regra i:* Se  $\xi_1$  sendo  $M_{1i}$  e  $\dots$  e  $\xi_p$  sendo  $M_{pi}$ ,

$$\text{Então} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_{1i} w(t) + B_{2i} u(t) \\ z(t) = C_i x(t) + D_i u(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \end{array} \right. \quad (78)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $z \in \mathbb{R}^q$  é a saída,  $w \in \mathbb{R}^l$  pode ser um distúrbio,  $u \in \mathbb{R}^m$  é a entrada,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_{1i} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $B_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $D_i \in \mathbb{R}^{q \times m}$ ,  $\xi_1, \dots, \xi_p$  são as variáveis premissas. Definindo  $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_p]^T$ . Assume-se que as variáveis premissas não dependem das variáveis de controle ou distúrbios, então a equação em espaço de estados e a saída são dados por:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(\xi) (A_i x(t) + B_{1i} w(t) + B_{2i} u(t)) \quad (79)$$

$$z(t) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(\xi) (C_i x(t) + D_i u(t)) \quad (80)$$

onde

$$\lambda_i(\xi(t)) = \frac{\beta_i(\xi(t))}{\sum_{j=1}^r \beta_j(\xi(t))}, \quad \beta_j(\xi(t)) = \prod_{k=1}^p M_{kj}(\xi(t)), \quad (81)$$

$M_{kj}(\cdot)$  é a função de pertinência para o conjunto fuzzy  $M_{kj}$ . Fixando as características que se assumem

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i(\xi(t)) = 1, \quad \lambda_k(\xi(t)) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad \forall t. \quad (82)$$

Pode-se então definir como segue:

**Definição 2:** (LIU; ZHANG, 2003a)(LIU; ZHANG, 2003b)

Para o sistema fuzzy Takagi-Sugeno (79) - (80), quando  $w(t) \equiv 0$ ,  $u(t) \equiv 0$ , se existem

um  $\alpha > 0$  e uma matriz positiva definida  $X$  tal que  $\dot{V}(x(t)) \leq -\alpha x(t)^T x(t)$ , onde  $V(x(t)) = x(t)^T X x(t)$  então o sistema (79) - (80) é chamado de quadraticamente estável (TANIGUCHI; TANAKA; WANG, 2001).

Além disso, se existem matrizes  $F_i, i = 1, 2, \dots, r$  e uma matriz  $X$  positiva definida como:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & \cdots & Q_{rr} \end{bmatrix} \leq -\alpha I, \quad \alpha > 0,$$

onde

$$Q_{ii} = (A_i + B_{2i}F_i)^T X + X(A_i + B_{2i}F_i), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$Q_{ij} = X(A_i + B_{2i}F_j + A_j + B_{2j}F_i), \quad Q_{ji} = Q_{ij}^T, \quad i < j,$$

então para o sistema fuzzy Takagi-Sugeno (79) - (80), quando  $w(t) \equiv 0$ , a realimentação de estados

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(\xi(t)) F_i x(t),$$

estabiliza o sistema em malha fechada.

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r \lambda_i(\xi) \lambda_j(\xi) (A_i + B_{2i}F_j) x(t).$$

Assim, é possível referenciar um resultado presente na literatura (LIU, ZHANG, 2003b) que propõe uma relaxação das condições de estabilidade, sendo essa uma linha de estudos que já vinha sendo seguida pela comunidade científica e capaz de tornar resultados como em Tanaka *et al.* (1998), Kim & Lee (2000) e outros teoremas cada vez menos conservativos quanto a tais critérios de estabilidade.

Têm-se então o teorema a seguir:

**Teorema 10:** (LIU; ZHANG, 2003b) *Suponha a existência de matrizes  $M_i, Z, Y_{ij}$ , onde  $Z$  seja uma matriz simétrica positiva definida,  $Y_{ii}$  são simétricas e para  $i \neq j$ ,  $Y_{ji} = Y_{ij}^T$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, r$  que satisfazem as seguintes LMIs:*

$$Z A_i^T + A_i Z + M_i^T B_{2i}^T + B_{2i} M_i < Y_{ii}, \quad (83)$$



$$A_i Z + Z A_i^T + A_j Z + Z A_j^T + B_{2i} M_j + M_j^T B_{2i}^T + B_{2j} M_i + M_i^T B_{2j}^T \leq Y_{ij} + Y_{ij}^T, \quad (84)$$

$$[Y_{ij}]_{r \times r} = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{r1} & \cdots & Y_{rr} \end{bmatrix} < 0. \quad (85)$$

*Prova:* Fazendo  $X = Z^{-1}$ ,  $F_i = M_i Z^{-1}$ . Pré e pós multiplicando (83) e (84) com  $X$  e pré e pós multiplicando (85) por uma matriz diagonal definida como  $\text{diag}(X, \dots, X)$  a prova do Teorema pôde ser apresentada em Liu & Zhang (2003b).

Então as desigualdades matriciais lineares que reúnem todas as características do Teorema 10 e que serão utilizadas para projeto, considerando a taxa de decaimento ( $\beta$ ) como índice de desempenho, serão:

$$Z A_i^T + A_i Z + M_i^T B_{2i}^T + B_{2i} M_i - Y_{ii} + 2\beta X < 0, \quad (86)$$

$$A_i Z + Z A_i^T + A_j Z + Z A_j^T + B_{2i} M_j + M_j^T B_{2i}^T + B_{2j} M_i + M_i^T B_{2j}^T - Y_{ij} - Y_{ij}^T + 4\beta X \leq 0, \quad (87)$$

$$[Y_{ij}]_{r \times r} < 0. \quad (88)$$

Como resumo das ferramentas matemáticas obtidas, tem-se que as condições premissas do Teorema 10 estão em termos de LMIs. Note também que de (85) observa-se que os blocos fora da diagonal principal  $Y_{ij}$  podem ser não simétricos, ao passo que os outros teoremas apresentados nesse trabalho não permitem essa situação e são mais conservativos.

Por fim, pode-se observar que, já que  $Y_{ij}$  podem ser não simétricas, temos possíveis  $n^2$  variáveis em cada bloco  $Y_{ij}$ . Condições de estabilidade quadrática se tornam mais simples e relaxadas que em resultados encontrados para outras referências (KIM; LEE, 2000), em que existe a necessidade dos blocos de matrizes do tipo  $Y_{ij}$  serem simétricos. Sendo assim, as condições LMIs do Teorema 10 permitem muito mais liberdade, ou seja, maior dimensão, além de garantir estabilidade ao controle de sistemas fuzzy.

## 6 CONTROLADOR FUZZY CHAVEADO APLICADO AO PÊNDULO INVERTIDO

A fim de expandir as análises de sistemas não lineares baseados em modelos fuzzy Takagi-Sugeno, pode-se encontrar diversos trabalhos na literatura que abordam as mais diversas técnicas de aproximação e modelagem de controladores para essa classe de sistemas. De fato, é necessário não somente saber como é representada a modelagem matemática de um sistema escolhido como posteriormente construir um modelo de simulação do sistema dinâmico a ser controlado.

Após obter o modelo de simulação do sistema dinâmico, o passo seguinte é obter o modelo de projeto do sistema. Este modelo local linear deve ser mais simples que o modelo de simulação e deve considerar apenas as características essenciais do projeto. Uma forma de se obter o modelo de projeto é por meio da técnica de linearização de Taylor.

O resultado de uma linearização de Taylor de um modelo não linear em seu ponto de equilíbrio resulta em um modelo afim e não em um modelo linear, mesmo que o ponto de operação seja um ponto de equilíbrio. Desse modo, para linearizar pontos distantes da origem (ou que não são pontos de equilíbrio) se faz necessário obter outras formas de linearização que não seja a de Taylor (TEIXEIRA; ŽAK, 1999).

Apesar disso, quando se propõe a obter o modelo local linear para um sistema no formato  $\dot{x} = A_1x + B_1u$ , caso seja conhecido que o *ponto de equilíbrio* apresenta o formato  $(x_0^T, u_0^T) = (0^T, 0^T)$ , então a técnica de linearização de Taylor é indicada para tal modelagem do sistema em  $x$  e  $u$ . Métodos para a construção de modelos locais lineares para sistemas a serem controlados são baseados, para esse projeto, nas técnicas desenvolvidas em Teixeira & Žak (1999) e Machado (2003), sendo apresentadas no decorrer do capítulo.

Para as últimas séries de simulações e análises deste trabalho, o sistema dinâmico não linear escolhido para ilustrar a teoria desenvolvida foi o pêndulo invertido, um sistema amplamente utilizado na literatura para análises de estabilidade e projetos de controladores fuzzy.

Neste projeto propõe-se a associação do otimizador analógico não derivativo Teixeira & Žak à modelagem exata do sistema fuzzy Takagi-Sugeno para o pêndulo invertido, de modo que o otimizador analógico seja utilizado como elemento de decisão para uma lei de chaveamento para o controlador do sistema.

Como já foi observado no Capítulo 3, para o chaveamento de subsistemas utilizando o otimizador T-Z, uma boa resposta é obtida, mas para explorar essa potencialidade de outras formas, adota-se utilizar o otimizador como elemento de decisão dentro da estrutura do controlador do sistema.

A partir da matriz de vetor de estado e de uma série de ganhos do controlador (16 ganhos), o otimizador deve auxiliar na busca dinâmica pela estabilidade do sistema, escolhendo qual dos ganhos do controlador  $K_{\sigma_1}$  ou  $K_{\sigma_2}$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2 \in \mathbb{K}_r$ , tais que  $-K_{\sigma_1}x(t) \leq -K_i x(t)$  e  $-K_{\sigma_2}x(t) \geq -K_j x(t)$  para todo  $i, j \in \mathbb{K}_r$  que devem ser escolhidos, sendo o modelo do pêndulo, não linear e com incertezas.

Nota-se aqui as características de controle via busca extremal para o processo de caracterização da estabilidade do sistema, já que o esforço de escolha entre 16 ganhos ( $2^n$ ,  $n = 4$  não linearidades) para o controlador, é reduzido para apenas 2 ganhos, sendo tais os valores máximo e mínimo de cada conjunto de modelos locais.

Modelos que representam o comportamento de sistemas não lineares por meio de modelos locais lineares devem representar todas as características que possam ser obtidas do sistema físico (TANIGUCHI *et al.*, 2001).

Um modelo não linear em quatro dimensões para um sistema representado por um pêndulo invertido, pode ser descrito através das leis de Newton como em (OGATA, 1998), em que tal modelo foi desenvolvido utilizando uma aproximação linear. A partir do sistema apresentado será possível o desenvolvimento do modelo fuzzy, de forma que simulações e testes possam indicar posteriormente se controladores projetados são capazes de manter o sistema em condições favoráveis de operação.

Outras técnicas de modelagem de sistemas não lineares podem ser encontradas na literatura como por exemplo a proposta feita por Cannon (1967) que utiliza o método de D'Alembert como alternativa de ferramenta matemática.

Na seção a seguir, seguem todas as descrições detalhadas do modelo matemático do pêndulo invertido.

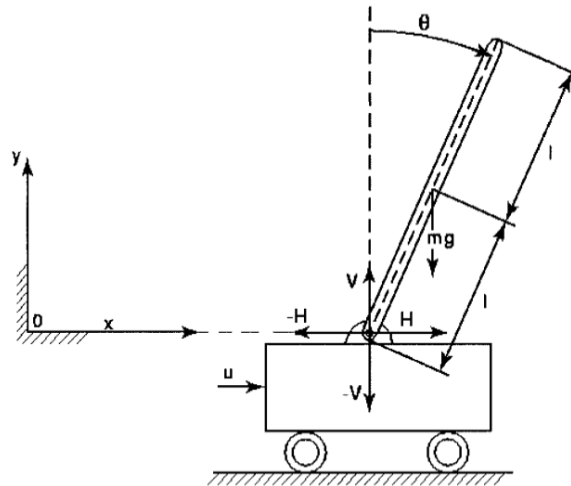
## 6.1 O MODELO DO PÊNULO INVERTIDO TEIXEIRA & ŽAK (1999)

O modelo do pêndulo invertido é o escolhido para o projeto deste capítulo. Com o modelo completo do pêndulo será possível construir o modelo de projeto fuzzy Takagi-Sugeno.

No diagrama de corpo livre no qual um pêndulo invertido é representado como na Figura

16, têm-se  $H = H(t)$  e  $V = V(t)$  como forças de reação na horizontal e vertical respectivamente, sendo  $x$  e  $y$  as coordenadas para um eixo de coordenadas  $xy$  não rotativo.

Figura 16 - O Pêndulo Invertido.



Fonte: Teixeira & Žak (1999).

Dispõe-se a haste da estrutura, de forma que a posição da haste em relação à posição vertical é dada por  $\theta$ , sendo esta variável o deslocamento angular da haste na posição vertical.

A massa da estrutura móvel que sustenta o conjunto é dada por  $M$ , enquanto que a massa da haste em si é dada por  $m$  e o comprimento da haste, dado por  $l$  de modo que o centro de gravidade da haste  $a$  pode ser determinado, sendo esse seu centro geométrico.

A força de controle aplicada ao conjunto móvel é  $u$ , assumindo que a força de atrito entre as rodas do conjunto e a superfície seja

$$f_c = \mu_c \text{sign}(\dot{x}), \quad (89)$$

de modo que  $\mu_c$  é o coeficiente de atrito, já que o modelo do atrito pode ser descrito pelo modelo clássico de atrito de Coulumb, pois sendo  $(x_G, y_G)$  as coordenadas do centro de gravidade da haste, então

$$\begin{cases} x_G = x + l \sin(\theta), \\ y_G = l \cos(\theta). \end{cases} \quad (90)$$

Para ser possível modelar o sistema com as diversas equações características, têm-se que a equação que descreve o movimento de rotação da haste com relação ao seu centro de gravidade pode ser obtida com a aplicação da segunda lei de Newton na forma rotacional, ou seja, somando os valores dos momentos com relação ao centro de gravidade da haste, obtendo assim

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = Vl \sin(\theta) - Hl \cos(\theta). \quad (91)$$

Para uma haste longa, cuja massa é  $m$  e comprimento  $l$ , em que seu eixo de rotação está em uma de suas extremidades. Tal objeto rotaciona no plano  $xy$  com relação ao eixo  $z$  e as coordenadas de seu centro de gravidade  $(x_G; y_G)$ . Considerando que o elemento de massa  $dm$  tenha coordenadas  $xy$  (SERWAY, 2004), a relação  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  representa a distância de tal elemento  $dm$  ao eixo  $z$ . Então o momento de inércia da haste com relação ao seu centro de gravidade será

$$J = \int_{-l}^l r^2 dm = \int_{-l}^l (x^2 + y^2) dm = \frac{ml^2}{3}. \quad (92)$$

Para descrever o movimento horizontal da haste com relação ao centro de gravidade, a segunda lei de Newton também se aplica ao longo do eixo  $x$  sendo possível realizar uma diferenciação resultando nas equações

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin(\theta)) = H, \quad (93)$$

e desenvolvendo essa diferenciação

$$m(\ddot{x} + l(-\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \ddot{\theta} \cos(\theta))) = H. \quad (94)$$

A equação que descreve o movimento vertical da haste com relação ao seu centro de gravidade também pode ser obtida aplicando a segunda lei de Newton ao longo do eixo  $y$ , onde, realizando uma diferenciação, obtêm-se

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos(\theta)) = V - mg, \quad (95)$$

e desenvolvendo essa equação obtêm-se

$$ml(-\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - \ddot{\theta} \sin(\theta)) = V - mg. \quad (96)$$

Aplicando a segunda lei de Newton ao conjunto móvel do sistema (carrinho), tem-se então

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = u - H - f_c, \quad (97)$$

e substituindo (97) em (94) tem-se

$$m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + f_c = u - M\ddot{x}. \quad (98)$$

Substituindo (97) e (98) em (91) obtêm-se

$$J\ddot{\theta} = (mg - ml\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - ml\ddot{\theta} \sin(\theta))l \sin(\theta) + f_c l \cos(\theta) - (u - M\ddot{x})l \cos(\theta). \quad (99)$$

Realizando uma substituição de  $u - M\ddot{x}$  de (98) em (99), com algumas manipulações obtêm-se

$$J\ddot{\theta} = mgl \sin(\theta) - ml^2 \ddot{\theta} - m\ddot{x}l \cos(\theta). \quad (100)$$

Tem-se,

$$a = \frac{1}{m + M}. \quad (101)$$

Então é possível representar (98) como

$$\ddot{x} = -mal\ddot{\theta} \cos(\theta) + mal\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - af_c + au. \quad (102)$$

Ao substituir (102) na equação (99) é possível obter a equação a seguir

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl \sin(\theta) - m^2 l^2 a \dot{\theta}^2 \sin(2\theta)/2 + mal \cos(\theta) f_c - mal \cos(\theta) u}{J - m^2 l^2 a \cos^2(\theta) + ml^2}. \quad (103)$$

Quando se considera  $x_1 = \theta$  e  $x_2 = \dot{\theta}$  é possível representar a equação (92), dada por  $J$  em (103), no formato de espaço de estados

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \operatorname{sen}(x_1) - mlax_2^2 \operatorname{sen}(2x_1)/2 + a \cos(x_1) f_c}{4l/3 - mla \cos^2(x_1)} - \frac{mal \cos(x_1) u}{4ml^2/3 - m^2 l^2 a \cos^2(x_1)}. \end{aligned} \quad (104)$$

Na sequência é possível substituir  $\ddot{\theta}$  obtido em (103) na equação (102) para obter

$$\ddot{x} = \frac{-mag \operatorname{sen}(2x_1)/2 + ax_2^2 \operatorname{sen}(x_1)4ml/3 + (u - f_c)4a/3}{4/3 - ma \cos^2(x_1)}. \quad (105)$$

Agora, fixando  $x_3 = x$  e  $x_4 = \dot{x}$ , ou seja, a posição e velocidade do carrinho, e assim relacionando (104) com (105) obtêm-se finalmente o modelo em espaço de estados do pêndulo invertido sobre um carro, apresentado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g \operatorname{sen}(x_1) - mlax_2^2 \operatorname{sen}(2x_1)/2}{4l/3 - mla \cos^2(x_1)} \\ x_4 \\ \frac{-mag \operatorname{sen}(2x_1)/2 + ax_2^2 \operatorname{sen}(x_1)4m/3}{4/3 - ma \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a \cos(x_1)}{4l/3 - mla \cos^2(x_1)} \\ 0 \\ \frac{4a/3}{4/3 - ma \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} (u - f_c). \quad (106)$$

Finalmente, para que seja possível o projeto do controlador para o sistema que representa o pêndulo invertido, pode-se representar a equação (106) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g \operatorname{sen}(x_1)}{4l/3 - mla \cos^2(x_1)} \\ x_4 \\ \frac{-mag \operatorname{sen}(2x_1)/2}{4/3 - ma \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a \cos(x_1)}{4l/3 - mla \cos^2(x_1)} \\ 0 \\ \frac{4a/3}{4/3 - ma \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} u_p. \quad (107)$$

Para os exemplos considerados neste projeto, é definido  $u_p = (u - f_c + mlx_2^2 \operatorname{sen}(x_1))$  e serão fixados os valores de  $M$  [kg],  $m$  [kg] e  $l$  [m] sendo  $m$  e  $l$  incertas dentro de limites que serão

definidos em seções posteriores, lembrando que  $g = 9,8 \text{ m/s}$ .

## 6.2 MODELAGEM FUZZY TAKAGI-SUGENO EXATA PARA O PÊNDULO INVERTIDO

Seguindo com o projeto, será representada a modelagem fuzzy Takagi-Sugeno (modelagem fuzzy T-S) exata (TANIGUCHI *et al.*, 2001) de modo que é possível representar exatamente uma grande classe de sistemas não-lineares com um número finito de modelos locais (MACHADO, 2003).

A busca pela forma generalizada do sistema fuzzy Takagi-Sugeno é um método de construção já consolidado na literatura, como em Taniguchi *et al.* (2001) que apresentou que os modelos locais podem ser obtidos em função de uma região de operação e tais modelos correspondem aos valores máximos e mínimos das funções não lineares do sistema.

Já que o número de modelos está ligado diretamente ao número de funções não-lineares, então tal técnica de construção permite a modelagem de uma grande variedade de sistemas que compreendam o intervalo de operação.

Nessa proposta de construção, apenas são considerados os valores extremos das funções não-lineares, não se interessando por quaisquer outras particularidades do comportamento de tais funções. Sendo nos extremos o foco, o método de representação exata é conhecido como forma generalizada (TANIGUCHI *et al.*, 2001).

No método proposto por Taniguchi *et al.* (2001), os modelos locais puderam ser determinados considerando a seguinte classe de sistemas não-lineares

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_{ij}(x(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^m g_{ik}(x(t))u_k(t), \quad (108)$$

sendo que  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $r$  é o número de regras,  $n$  e  $m$  são respectivamente, o número de variáveis estado e entradas e  $\tilde{f}_{ij}(x(t))$  e  $g_{ik}(x(t))$  são funções de  $x(t)$ , sendo  $x(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$ .

Considerando a função  $\tilde{f}_{ij}(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo que, de (108) têm-se  $\tilde{f}_{ij}(x(t)) \in [a_{ij_2}, a_{ij_1}]$ ,  $g_{ij}(x(t)) \in [b_{ij_2}, b_{ij_1}]$  com  $a_{ij_2} \neq a_{ij_1}$ , ou seja, isso quer dizer que  $a_{ij_1} \geq a_{ij_2}$ . Da mesma forma  $b_{ij_2} \neq b_{ij_1}$ , onde  $b_{ij_1} \geq b_{ij_2}$ .

Para obter a forma generalizada deste método, foram consideradas as seguintes variáveis



$$\begin{aligned}
a_{ij_1} &\equiv \max_{x(t)} \{\tilde{f}_{ij}(x(t))\} & a_{ij_2} &\equiv \min_{x(t)} \{\tilde{f}_{ij}(x(t))\}, \\
b_{ik_1} &\equiv \max_{x(t)} \{g_{ik}(x(t))\} & b_{ik_2} &\equiv \min_{x(t)} \{g_{ik}(x(t))\}.
\end{aligned} \tag{109}$$

Dessa forma, pode-se obter  $\sigma_{ij_1}(x(t))$ ,  $\sigma_{ij_2}(x(t))$ ,  $\xi_{ij_1}(x(t))$  e  $\xi_{ij_2}(x(t))$ , tais que:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{ij}(x(t)) &= \sigma_{ij_1}(x(t))a_{ij_1} + \sigma_{ij_2}(x(t))a_{ij_2}, \\
g_{ij}(x(t)) &= \xi_{ij_1}(x(t))b_{ij_1} + \xi_{ij_2}(x(t))b_{ij_2}, \quad \text{com} \\
\sigma_{ij_1}(x(t)) + \sigma_{ij_2}(x(t)) &= 1, \quad \xi_{ij_1}(x(t)) + \xi_{ij_2}(x(t)) = 1, \quad \text{e} \\
\sigma_{ij_1}(x(t)) \geq 0, \quad \sigma_{ij_2}(x(t)) \geq 0, \quad \xi_{ij_1}(x(t)) \geq 0, \quad \xi_{ij_2}(x(t)) \geq 0.
\end{aligned} \tag{110}$$

Portanto, para representar o sistema de simulação na forma generalizada são necessários 2<sup>s</sup> modelos locais, sendo  $s$  o número de não-linearidades existentes no sistema (TANIGUCHI *et al.*, 2001).

Com o sistema e os parâmetros da planta definidos é possível iniciar o projeto do regulador utilizando o seguinte domínio, a fim de obter-se a aproximação do sistema utilizando o modelo fuzzy Takagi-Sugeno na região de operação (MACHADO, 2003):

$$D = \left\{ [x_1 \quad x_2]^T \in \mathbb{R}^2 : -\pi/3 \leq x_1 \leq \pi/3, \quad -\pi \leq x_2 \leq \pi \right\}. \tag{111}$$

Sendo definidas como as variáveis que descrevem a dinâmica do pêndulo invertido em que  $x_1(t)$ , é a posição angular da haste,  $x_2(t)$  a velocidade angular da haste,  $x_3(t)$  a posição do conjunto móvel (carrinho) e  $x_4(t)$  a velocidade do conjunto móvel.

Tudo começa por colocar as equações definidas em (107) na forma (112):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g \operatorname{sen}(x_1)}{x_1(4l/3 - mla \cos^2(x_1))} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mag \operatorname{sen}(2x_1)}{2x_1(4/3 - macos^2(x_1))} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a \cos(x_1)}{(4l/3 - mla \cos^2(x_1))} \\ 0 \\ \frac{4a/3}{(4/3 - macos^2(x_1))} \end{bmatrix} u_p. \quad (112)$$

Em seguida, de (110) e (112), é possível obter as funções  $\tilde{f}_{ij}(x(t))$  e  $g_{ik}(x(t))$ :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{21}(x(t)) &= \frac{g \operatorname{sen}(x_1)}{x_1(4l/3 - mla \cos^2(x_1))}, \\ \tilde{f}_{41}(x(t)) &= \frac{-mag \operatorname{sen}(2x_1)}{2x_1(4/3 - macos^2(x_1))}, \\ g_{21}(x(t)) &= \frac{-a \cos(x_1)}{(4l/3 - mla \cos^2(x_1))}, \\ g_{41}(x(t)) &= \frac{4a/3}{(4/3 - macos^2(x_1))}. \end{aligned} \quad (113)$$

Então, a equação (107) é reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \tilde{f}_{21}(x(t))x_1 + g_{21}(x(t))u_p, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \tilde{f}_{41}(x(t))x_1 + g_{41}(x(t))u_p. \end{aligned} \quad (114)$$

Seguindo com o projeto, é necessário calcular os valores máximos e mínimos das funções (109), no domínio  $D$  descrito em (111), para que seja possível encontrar a forma generalizada do sistema (113). Como resultados, temos os valores máximos e mínimos  $a_{ij_1}$ ,  $a_{ij_2}$ ,  $b_{ik_1}$  e  $b_{ik_2}$  como os fixados a seguir:

$$\begin{aligned}
a_{21_1} &= \max_{x_1 \in D} \{\tilde{f}_{21}(x_1)\} \\
a_{21_2} &= \min_{x_1 \in D} \{\tilde{f}_{21}(x_1)\} \\
a_{41_1} &= \max_{x_1 \in D} \{\tilde{f}_{41}(x_1)\} \\
a_{41_2} &= \min_{x_1 \in D} \{\tilde{f}_{41}(x_1)\} \\
b_{21_1} &= \max_{x_1 \in D} \{g_{21}(x_1)\} \\
b_{21_2} &= \min_{x_1 \in D} \{g_{21}(x_1)\} \\
b_{41_1} &= \max_{x_1 \in D} \{g_{41}(x_1)\} \\
b_{41_2} &= \min_{x_1 \in D} \{g_{41}(x_1)\}.
\end{aligned} \tag{115}$$

Como o sistema possui quatro não linearidades, então para obter uma descrição exata do sistema (108) com os modelos fuzzy Takagi-Sugeno, são necessários dezesseis ( $2^4$ ) modelos locais (MACHADO, 2003) do tipo:

$$A_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41q} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_g = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21q} \\ 0 \\ b_{41q} \end{bmatrix}, \tag{116}$$

sendo assim possível constatar que no sistema (116) existem termos não lineares nos elementos  $A(2, 1)$ ,  $A(4, 1)$ ,  $B(2, 1)$  e  $B(4, 1)$  das matrizes  $A_g$  e  $B_g$  definidas.

O modelo fuzzy T-S para a função  $\tilde{f}_{21}(x(t))$  (TANIGUCHI *et al.*, 2001) pode ser representado quando se consideram os modelos locais  $a_{21_1}$  e  $a_{21_2}$ , de forma que, relacionados a  $\sigma_{21_1}(x(t))$  e  $\sigma_{21_2}(x(t))$ , obtêm-se:

$$\tilde{f}_{21}(x(t)) = \sigma_{21_1}(x(t))a_{21_1} + \sigma_{21_2}(x(t))a_{21_2}, \tag{117}$$

sendo

$$\sigma_{21_1}(x(t)) \geq 0, \quad \sigma_{21_2}(x(t)) \geq 0, \tag{118}$$

$$\sigma_{21_1}(x(t)) + \sigma_{21_2}(x(t)) = 1.$$

Ainda, de (117) e (118), nota-se que:

$$\sigma_{21_1}(x(t)) = \frac{\tilde{f}_{21}(x(t)) - a_{21_2}}{a_{21_1} - a_{21_2}}, \quad (119)$$

$$\sigma_{21_2}(x(t)) = 1 - \sigma_{21_1}(x(t)).$$

De modo similar, é possível encontrar o modelo fuzzy T-S para a função  $\tilde{f}_{41}(x(t))$  (TANIGUCHI *et al.*, 2001) a partir de (110) considerando os modelos locais  $a_{41_1}$  e  $a_{41_2}$ , que relacionados a  $\sigma_{41_1}(x(t))$  e  $\sigma_{41_2}(x(t))$ . Assim:

$$\tilde{f}_{41}(x(t)) = \sigma_{41_1}(x(t))a_{41_1} + \sigma_{41_2}(x(t))a_{41_2}. \quad (120)$$

ainda

$$\sigma_{41_1}(x(t)) \geq 0, \quad \sigma_{41_2}(x(t)) \geq 0, \quad (121)$$

$$\sigma_{41_1}(x(t)) + \sigma_{41_2}(x(t)) = 1.$$

E de (120) e (121):

$$\sigma_{41_1}(x(t)) = \frac{\tilde{f}_{41}(x(t)) - a_{41_2}}{a_{41_1} - a_{41_2}}, \quad (122)$$

$$\sigma_{41_2}(x(t)) = 1 - \sigma_{41_1}(x(t)).$$

Também é importante representar a função  $g_{21}(x(t))$  por um modelo fuzzy T-S, já que pode-se considerar  $\xi_{21_1}(x(t))$  e  $\xi_{21_2}(x(t))$  relacionados de modo

$$g_{21}(x(t)) = \xi_{21_1}(x(t))b_{21_1} + \xi_{21_2}(x(t))b_{21_2}, \quad (123)$$

sendo

$$\xi_{21_1}(x(t)) \geq 0, \quad \xi_{21_2}(x(t)) \geq 0, \quad (124)$$

$$\xi_{21_1}(x(t)) + \xi_{21_2}(x(t)) = 1.$$

Portanto, de (123) e (124):

$$\xi_{21_1}(x(t)) = \frac{g_{21}(x(t)) - b_{21_2}}{b_{21_1} - b_{21_2}}, \quad (125)$$

$$\xi_{21_2}(x(t)) = 1 - \xi_{21_1}(x(t)).$$

Finalizando as representações de modelos fuzzy Takagi-Sugeno locais, têm-se a função  $g_{41}(x(t))$  e que pode-se considerar  $\xi_{41_1}(x(t))$  e  $\xi_{41_2}(x(t))$  relacionados como

$$g_{41}(x(t)) = \xi_{41_1}(x(t))b_{41_1} + \xi_{41_2}(x(t))b_{41_2}, \quad (126)$$

sendo

$$\xi_{41_1}(x(t)) \geq 0, \quad \xi_{41_2}(x(t)) \geq 0, \quad (127)$$

$$\xi_{41_1}(x(t)) + \xi_{41_2}(x(t)) = 1,$$

que resulta em

$$\xi_{41_1}(x(t)) = \frac{g_{41}(x(t)) - b_{41_2}}{b_{41_1} - b_{41_2}}, \quad (128)$$

$$\xi_{41_2}(x(t)) = 1 - \xi_{41_1}(x(t)).$$

Ainda é possível representar os modelos locais nas seguintes formas, quando se lembra que  $\xi_{21_1}(x(t)) + \xi_{21_2}(x(t)) = 1$  associando com (117) para obter a relação

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{21}(x(t)) &= (\xi_{21_1}(x(t)) + \xi_{21_2}(x(t)))(\sigma_{21_1}(x(t))a_{21_1} + \sigma_{21_2}(x(t))a_{21_2}) \\ \tilde{f}_{21}(x(t)) &= \sigma_{21_1}(x(t))\xi_{21_1}(x(t))a_{21_1} + \sigma_{21_1}(x(t))\xi_{21_2}(x(t))a_{21_1} + \dots \\ &\dots + \sigma_{21_2}(x(t))\xi_{21_1}(x(t))a_{21_2} + \sigma_{21_2}(x(t))\xi_{21_2}(x(t))a_{21_2}.\end{aligned}\tag{129}$$

Quando associa-se  $\xi_{41_1}(x(t)) + \xi_{41_2}(x(t)) = 1$  com (120) tem-se a seguinte relação para  $\tilde{f}_{41}(x(t))$ :

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{41}(x_1) &= (\xi_{41_1}(x(t)) + \xi_{41_2}(x(t)))(\sigma_{41_1}(x(t))a_{41_1} + \sigma_{41_2}(x(t))a_{41_2}) \\ \tilde{f}_{41}(x(t)) &= \sigma_{41_1}(x(t))\xi_{41_1}(x(t))a_{41_1} + \sigma_{41_1}(x(t))\xi_{41_2}(x(t))a_{41_1} + \dots \\ &\dots + \sigma_{41_2}(x(t))\xi_{41_1}(x(t))a_{41_2} + \sigma_{41_2}(x(t))\xi_{41_2}(x(t))a_{41_2}.\end{aligned}\tag{130}$$

Seguindo então de modo similar, com a associação da relação  $\sigma_{21_1}(x(t)) + \sigma_{21_2}(x(t)) = 1$  com (123) obtêm-se a relação para  $g_{21}(x(t))$ :

$$\begin{aligned}g_{21}(x(t)) &= (\sigma_{21_1}(x(t)) + \sigma_{21_2}(x(t)))(\xi_{21_1}(x(t))b_{21_1} + \xi_{21_2}(x(t))b_{21_2}) \\ g_{21}(x(t)) &= \sigma_{21_1}(x(t))\xi_{21_1}(x(t))b_{21_1} + \sigma_{21_1}(x(t))\xi_{21_2}(x(t))b_{21_2} + \dots \\ &\dots + \sigma_{21_2}(x_1)\xi_{21_1}(x(t))b_{21_1} + \sigma_{21_2}(x(t))\xi_{21_2}(x(t))b_{21_2}.\end{aligned}\tag{131}$$

E finalizando, quando associa-se  $\xi_{41_1}(x(t)) + \xi_{41_2}(x(t)) = 1$  com (126) temos a seguinte relação para  $g_{41}(x(t))$ :

$$\begin{aligned}g_{41}(x_1) &= (\xi_{41_1}(x(t)) + \xi_{41_2}(x(t)))(\sigma_{41_1}(x(t))a_{41_1} + \sigma_{41_2}(x(t))a_{41_2}) \\ g_{41}(x(t)) &= \sigma_{41_1}(x(t))\xi_{41_1}(x(t))a_{41_1} + \sigma_{41_1}(x(t))\xi_{41_2}(x(t))a_{41_1} + \dots \\ &\dots + \sigma_{41_2}(x(t))\xi_{41_1}(x(t))a_{41_2} + \sigma_{41_2}(x(t))\xi_{41_2}(x(t))a_{41_2}.\end{aligned}\tag{132}$$

Como última sequência de deduções, a forma generalizada do sistema fuzzy Takagi-Sugeno pode ser apresentada a partir da classe de sistemas generalizado (108) proposta em Taniguchi *et al.* (2001) e descrita em Machado (2003).

A forma generalizada é obtida expressando as variáveis  $\tilde{f}_{ij}(x(t))$  e  $g_{ij}(x(t))$  na represen-

tação em modelos fuzzy. Então, utilizando as variáveis apresentadas em (109),  $\tilde{f}_{ij}(x(t))$  e  $g_{ik}(x(t))$  podem ser representadas como

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{ij}(x(t)) &= \sum_{l_{(i,j)}^a=1}^2 \sigma_{ijl_{(i,j)}^a}(x(t)) a_{ijl_{(i,j)}^a}, \\ g_{ik}(x(t)) &= \sum_{l_{(i,k)}^b=1}^2 \xi_{ikl_{(i,k)}^b}(x(t)) b_{ikl_{(i,k)}^b},\end{aligned}\tag{133}$$

sendo que  $\sigma_{ij_1}(x(t))$ ,  $\sigma_{ij_2}(x(t))$ ,  $\xi_{ik_1}(x(t))$  e  $\xi_{ik_2}(x(t))$  foram definidas previamente em (110), de modo que seja possível condensar as relações para o formato como apresentado a seguir

$$\begin{aligned}\sum_{l_{(i,j)}^a=1}^2 \sigma_{ijl_{(i,j)}^a}(x(t)) &= 1, & \sum_{l_{(i,k)}^b=1}^2 \xi_{ikl_{(i,k)}^b}(x(t)) &= 1, \\ \sigma_{ij_1}(x(t)) &= \frac{\tilde{f}_{ij}(x(t)) - a_{ij_2}}{a_{ij_1} - a_{ij_2}}, \\ \sigma_{ij_2}(x(t)) &= \frac{a_{ij_1} - \tilde{f}_{ij}(x(t))}{a_{ij_1} - a_{ij_2}}, \\ \xi_{ik_1}(x(t)) &= \frac{g_{ik}(x(t)) - b_{ik_2}}{b_{ik_1} - b_{ik_2}}, \\ \xi_{ik_2}(x(t)) &= \frac{b_{ik_1} - g_{ik}(x(t))}{b_{ik_1} - b_{ik_2}}.\end{aligned}\tag{134}$$

Os elementos  $l_{(i,j)}^a$  e  $l_{(i,k)}^b$  estão relacionados com os limites de máximo e mínimo das funções  $\tilde{f}_{ij}(x(t))$  e  $g_{ik}(x(t))$ , assumindo valores 1, relacionado ao máximo, ou 2 relacionado ao mínimo (MACHADO, 2003).

Utilizando a representação por modelos fuzzy, o conjunto de expressões (108) é reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \sum_{j=1}^n \tilde{f}_{ij}(x(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^m g_{ik}(x(t))u_k(t), \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{l_{(i,j)}^a=1}^2 \sigma_{ijl_{(i,j)}^a}(x(t))a_{ijl_{(i,j)}^a}x_j(t) + \sum_{k=1}^m \sum_{l_{(i,k)}^b=1}^2 \xi_{ikl_{(i,k)}^b}(x(t))b_{ikl_{(i,k)}^b}u_k(t). \end{aligned} \quad (135)$$

Então, a forma generalizada do sistema fuzzy Takagi-Sugeno na forma matricial é representada por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l_{(i,j)}^a=1}^2 \sigma_{ijl_{(i,j)}^a}(x(t))a_{ijl_{(i,j)}^a} \mathbf{U}_{ij}^A \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l_{(i,k)}^b=1}^2 \xi_{ikl_{(i,k)}^b}(x(t))b_{ikl_{(i,k)}^b} \mathbf{U}_{ik}^B \mathbf{u}(t), \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l_{(i,j)}^a=1}^2 \sigma_{ijl_{(i,j)}^a}(x(t))\mathbf{A}_{ijl_{(i,j)}^a} \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l_{(i,k)}^b=1}^2 \xi_{ikl_{(i,k)}^b}(x(t))\mathbf{B}_{ikl_{(i,k)}^b} \mathbf{u}(t), \end{aligned} \quad (136)$$

sendo

$$\mathbf{U}_{ij}^A = i \begin{matrix} & & j & & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & & & \end{matrix} \quad \mathbf{U}_{ik}^B = i \begin{matrix} & & k & & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & & & \end{matrix}, \quad (137)$$

$$\mathbf{A}_{ij}^a = i \begin{matrix} & & j & & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ijl_{(i,j)}^a} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & & & \end{matrix} \quad \mathbf{B}_{ik}^b = i \begin{matrix} & & k & & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ikl_{(i,k)}^b} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & & & \end{matrix},$$

para  $l_{(i,j)}^a = 1, 2$  e  $l_{(i,k)}^b = 1, 2$  sendo que  $\mathbf{U}_{ij}^A \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$  e  $\mathbf{U}_{ik}^B \in \mathbb{R}^{(n \times m)}$ . Os elementos  $a_{ijl_{(i,j)}^a}$  e  $b_{ikl_{(i,k)}^b}$  desempenham um importante papel na redução de regras. A forma generalizada (136)



é uma estrutura conveniente para a redução do número de regras (MACHADO, 2003).

Similarmente, a forma generalizada a seguir pode ser definida a partir de um sistema não linear como em (114) e que resulta em

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{l_{(i,j)}^a=1}^2 \sigma_{ijl_{(i,j)}^a}(x(t)) a_{ijl_{(i,j)}^a} \mathbf{U}_{ij}^A \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{l_{(i,k)}^b=1}^2 \xi_{ikl_{(i,k)}^b}(x(t)) b_{ikl_{(i,k)}^b} \mathbf{U}_{ik}^B \mathbf{u}(t), \quad (138)$$

sendo que em (138), as variáveis  $a_{21_1}$ ,  $a_{41_1}$ ,  $b_{21_1}$  e  $b_{41_1}$  são dadas como em (115). Portanto, a forma generalizada (138) pode ser convertida no modelo fuzzy a seguir:

$$\dot{x}(t) = \sum_{g=1}^{16} h_g(x(t)) (\mathbf{A}_g x(t) + \mathbf{B}_g \mathbf{u}(t)), \quad (139)$$

sendo  $\mathbf{A}_g$  e  $\mathbf{B}_g$ ,  $g = 1, \dots, 16$  definidos como em (116).

É possível então obter-se as funções de pertinência  $h_g(x(t))$  que fazem parte de (139) e serão definidas pela expressão (MACHADO, 2003):

$$\sigma_{21_{(2,1)}^a}(x(t)) \sigma_{41_{(4,1)}^a}(x(t)) \xi_{21_{(2,1)}^b}(x(t)) \xi_{41_{(4,1)}^b}(x(t)), \quad (140)$$

sendo  $l_{(i,j)}^a = 1, 2$  e  $l_{(i,k)}^b = 1, 2$  e

$$\begin{aligned} \sigma_{21_1}(x) &= \frac{\tilde{f}_{21}(x) - a_{21_2}}{a_{21_1} - a_{21_2}} & \sigma_{21_2}(x) &= \frac{a_{21_1} - \tilde{f}_{21}(x)}{a_{21_1} - a_{21_2}}, \\ \sigma_{41_1}(x) &= \frac{\tilde{f}_{41}(x) - a_{41_2}}{a_{41_1} - a_{41_2}} & \sigma_{41_2}(x) &= \frac{a_{41_1} - \tilde{f}_{41}(x)}{a_{41_1} - a_{41_2}}, \\ \xi_{21_1}(x) &= \frac{g_{21}(x) - b_{21_2}}{b_{21_1} - b_{21_2}} & \xi_{21_2}(x) &= \frac{b_{21_1} - g_{21}(x)}{b_{21_1} - b_{21_2}}, \\ \xi_{41_1}(x) &= \frac{g_{41}(x) - b_{41_2}}{b_{41_1} - b_{41_2}} & \xi_{41_2}(x) &= \frac{b_{41_1} - g_{41}(x)}{b_{41_1} - b_{41_2}}. \end{aligned} \quad (141)$$

Note que o sistema (112) tem termos não lineares em  $A(2, 1)$ ,  $A(4, 1)$ ,  $B(2, 1)$  e  $B(4, 1)$ , sendo que, por exemplo,  $A(2, 1)$  denota o elemento  $(2, 1)$  da matriz  $\mathbf{A}$ . Além disso, nota-se que

as funções  $\tilde{f}_{21}(x)$ ,  $\tilde{f}_{41}(x)$ ,  $g_{21}(x)$  e  $g_{41}(x)$  definidas em (114) são dependentes apenas da variável de estado  $x_1$ .

Então, com todas essas definições é possível representar as funções de pertinência  $h_g(x(t))$  definidas a partir do conjunto de expressões (MACHADO, 2003) do sistema (113), como segue:

$$\begin{aligned}
h_1(x(t)) &= \sigma_{21_1}(x(t))\sigma_{41_1}(x(t))\xi_{21_1}(x(t))\xi_{21_1}(x(t)) \\
h_2(x(t)) &= \sigma_{21_2}(x(t))\sigma_{41_1}(x(t))\xi_{21_1}(x(t))\xi_{21_1}(x(t)) \\
h_3(x(t)) &= \sigma_{21_1}(x(t))\sigma_{41_2}(x(t))\xi_{21_1}(x(t))\xi_{21_1}(x(t)) \\
h_4(x(t)) &= \sigma_{21_2}(x(t))\sigma_{41_2}(x(t))\xi_{21_1}(x(t))\xi_{21_1}(x(t)) \\
h_5(x(t)) &= \sigma_{21_1}(x(t))\sigma_{41_1}(x(t))\xi_{21_2}(x(t))\xi_{21_1}(x(t)) \\
h_6(x(t)) &= \sigma_{21_2}(x(t))\sigma_{41_1}(x(t))\xi_{21_2}(x(t))\xi_{21_1}(x(t)) \\
h_7(x(t)) &= \sigma_{21_1}(x(t))\sigma_{41_2}(x(t))\xi_{21_2}(x(t))\xi_{21_1}(x(t)) \\
h_8(x(t)) &= \sigma_{21_2}(x(t))\sigma_{41_2}(x(t))\xi_{21_2}(x(t))\xi_{21_1}(x(t)) \\
h_9(x(t)) &= \sigma_{21_1}(x(t))\sigma_{41_1}(x(t))\xi_{21_1}(x(t))\xi_{21_2}(x(t)) \\
h_{10}(x(t)) &= \sigma_{21_2}(x(t))\sigma_{41_1}(x(t))\xi_{21_1}(x(t))\xi_{21_2}(x(t)) \\
h_{11}(x(t)) &= \sigma_{21_1}(x(t))\sigma_{41_2}(x(t))\xi_{21_1}(x(t))\xi_{21_2}(x(t)) \\
h_{12}(x(t)) &= \sigma_{21_2}(x(t))\sigma_{41_2}(x(t))\xi_{21_1}(x(t))\xi_{21_2}(x(t)) \\
h_{13}(x(t)) &= \sigma_{21_1}(x(t))\sigma_{41_1}(x(t))\xi_{21_2}(x(t))\xi_{21_2}(x(t)) \\
h_{14}(x(t)) &= \sigma_{21_2}(x(t))\sigma_{41_1}(x(t))\xi_{21_2}(x(t))\xi_{21_2}(x(t)) \\
h_{15}(x(t)) &= \sigma_{21_1}(x(t))\sigma_{41_2}(x(t))\xi_{21_2}(x(t))\xi_{21_2}(x(t)) \\
h_{16}(x(t)) &= \sigma_{21_2}(x(t))\sigma_{41_2}(x(t))\xi_{21_2}(x(t))\xi_{21_2}(x(t)).
\end{aligned} \tag{142}$$

Como o sistema apresenta 4 não linearidades a modelagem fuzzy Takagi-Sugeno exata demonstrou que os dezesseis  $2^4$  modelos locais são obtidos realizando as seguintes combinações:

$$\begin{array}{ll}
a_{21_1}a_{41_1}b_{21_1}b_{41_1} & a_{21_1}a_{41_1}b_{21_1}b_{41_2} \\
a_{21_2}a_{41_1}b_{21_1}b_{41_1} & a_{21_2}a_{41_1}b_{21_1}b_{41_2} \\
a_{21_1}a_{41_2}b_{21_1}b_{41_1} & a_{21_1}a_{41_2}b_{21_1}b_{41_2} \\
a_{21_2}a_{41_2}b_{21_1}b_{41_1} & a_{21_2}a_{41_2}b_{21_1}b_{41_2} \\
a_{21_1}a_{41_1}b_{21_2}b_{41_1} & a_{21_1}a_{41_1}b_{21_2}b_{41_2} \\
a_{21_2}a_{41_1}b_{21_2}b_{41_1} & a_{21_2}a_{41_1}b_{21_2}b_{41_2} \\
a_{21_1}a_{41_2}b_{21_2}b_{41_1} & a_{21_1}a_{41_2}b_{21_2}b_{41_2} \\
a_{21_2}a_{41_2}b_{21_2}b_{41_1} & a_{21_2}a_{41_2}b_{21_2}b_{41_2}.
\end{array} \tag{143}$$

Seguindo a proposta, bem como as relações (115)–(116), é possível obter os modelos locais do sistema pêndulo invertido para o domínio  $D$  durante a operação:

$$A_1 = A_5 = A_9 = A_{13} \quad A_2 = A_6 = A_{10} = A_{14}, \quad (144)$$

$$A_3 = A_7 = A_{11} = A_{15} \quad A_4 = A_8 = A_{12} = A_{16},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (145)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 \quad B_5 = B_6 = B_7 = B_8, \quad (146)$$

$$B_9 = B_{10} = B_{11} = B_{12} \quad B_{13} = B_{14} = B_{15} = B_{16},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & b_{21_1} & 0 & b_{41_1} \end{bmatrix}^T \quad B_5 = \begin{bmatrix} 0 & b_{21_2} & 0 & b_{41_1} \end{bmatrix}^T, \quad (147)$$

$$B_9 = \begin{bmatrix} 0 & b_{21_1} & 0 & b_{41_2} \end{bmatrix}^T \quad B_{13} = \begin{bmatrix} 0 & b_{21_2} & 0 & b_{41_2} \end{bmatrix}^T.$$

### 6.3 PROPOSTAS DE CONTROLADORES E LEIS DE CHAVEAMENTO

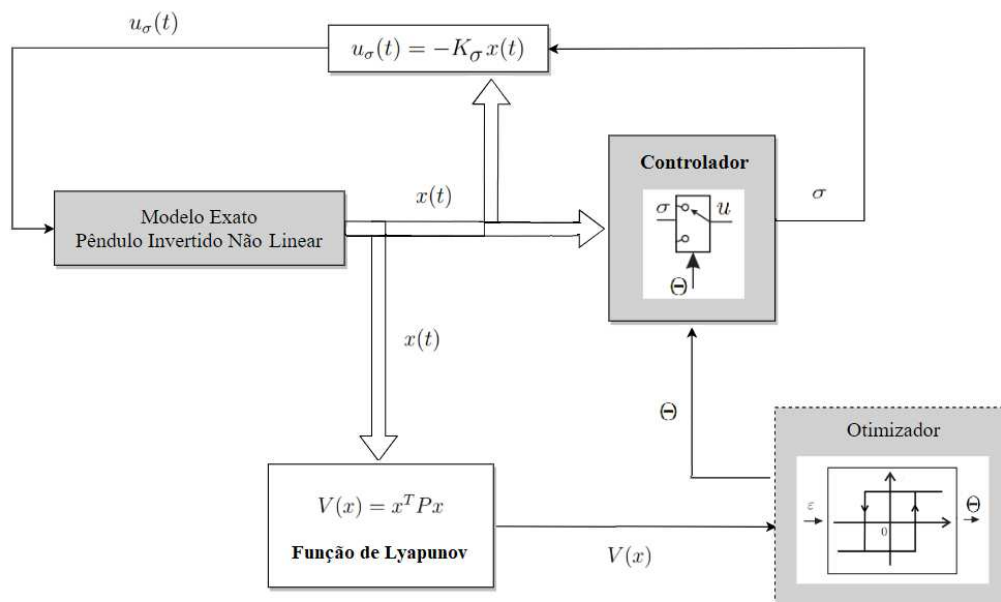
Diversas aproximações dentro da teoria de controladores chaveados podem ser encontradas na literatura, mas para este projeto, é importante seguir explorando as proposições de propostas de controladores chaveados para sistemas fuzzy Takagi-Sugeno, através da determinação dos ganhos de realimentação.

Nos projetos e simulações descritos a seguir, foi considerada a modelagem exata do pêndulo

invertido do sistema (112), adotando-se como entrada  $u_p(t)$ . Como pode ser visto após a equação (107),  $u_p(t) = u(t) - f_c + mlx_2^2 \text{sen}(x_1)$ . Quando o termo  $-f_c + mlx_2^2 \text{sen}(x_1)$  é conhecido, pode-se adotar  $u(t) = u_N(t) - [-f_c + mlx_2^2 \text{sen}(x_1)]$ , obtendo-se  $u_p(t) = u_N(t)$  e assim,  $u_N(t)$  pode ser facilmente projetado utilizando as técnicas descritas anteriormente. Já quando o termo  $-f_c + mlx_2^2 \text{sen}(x_1)$  possui incertezas, este procedimento não pode ser usado, mas é possível reformular a lei de controle para obter um sistema controlado adequado, com base nos resultados propostos em Alves (2017). Nesta tese, foi feito um estudo mais simplificado, visando analisar a viabilidade do método proposto e com base na modelagem matemática do pêndulo invertido, considerando que o termo  $-f_c + mlx_2^2 \text{sen}(x_1)$  possui incertezas, mas que é possível projetar  $u_p(t)$  diretamente. Futuramente será estudado o caso real, com base nos teoremas descritos em Alves (2017). Estudos iniciais indicaram a viabilidade desta generalização.

Na Figura 17, apresentam-se os principais blocos de simulação projetados para o *Simulink* do software *Matlab*, bem como as variáveis de entrada e saída de cada bloco e como elas se relacionam entre as partes do sistema completo. Note que todas as partes do projeto de um controlador fuzzy expostas no decorrer desse trabalho e nas seções desse capítulo são resumidas nesse diagrama de blocos para as simulações do projeto.

Figura 17 - Diagrama de blocos para simulações do projeto.

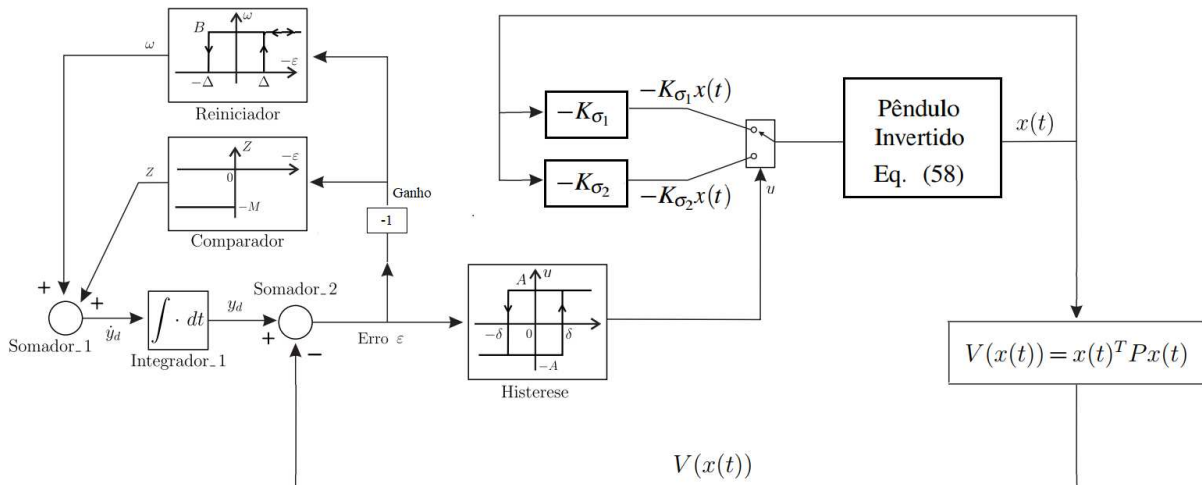


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A apresentação do método de controle proposto será ilustrada na aplicação do controle de um pêndulo invertido. Partindo do modelo exato para o pêndulo invertido não linear, a variável de estado  $x(t)$  compõe o processo de minimização de uma função Lyapunov realizada pelo bloco otimizador, que por sua vez, gera como referência um sinal  $\Theta$  para o bloco controlador utilizar como elemento de decisão em conjunto da lei de chaveamento  $\sigma$  para então gerar como saída um sinal de controle  $u$ . Esse projeto completo foi auxiliado por rotinas em *script do Matlab* para que sejam realizadas as simulações.

Na Figura 18, apresenta-se mais especificamente e internamente, o bloco do controlador, pois é aqui em que o projeto para um controlador chaveado utilizando um otimizador fuzzy Takagi-Sugeno se justifica. Observe que o otimizador Teixeira & Żak se relaciona com as variáveis de saída do controlador (série de ganhos  $K$ ) pelo vetor de estado.

Figura 18 - Otimizador Teixeira & Żak associado ao controlador proposto.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

O projeto de um controlador chaveado para o sistema fuzzy Takagi-Sugeno de um pêndulo invertido é proposto como no caso em que o sistema é dado por:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t). \quad (148)$$

Para um controlador definido como segue

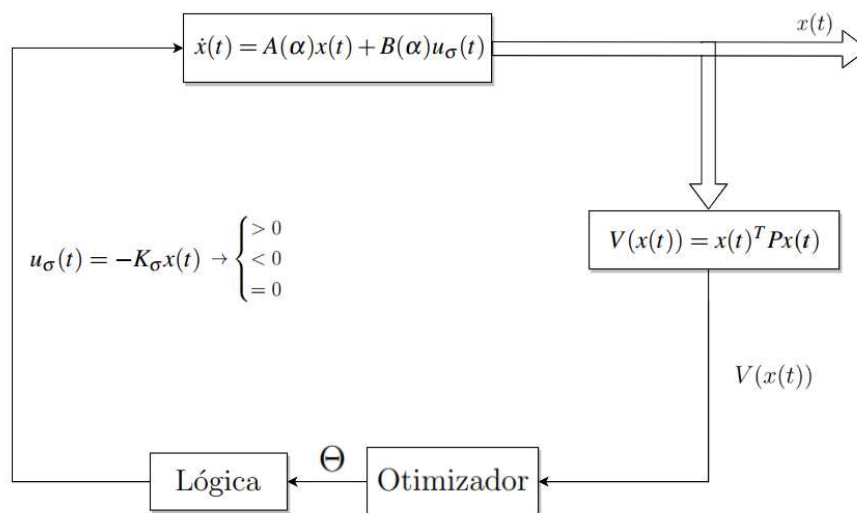
$$u(t) = u_{\sigma}(t) = -K_{\sigma}x(t), \quad (149)$$

de modo que, a descrição do sistema em malha aberta (148) que será controlado por meio de realimentação dos estados, associado ao controlador (149) resulta na seguinte relação:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u_{\sigma}(t) = A(\alpha)x(t) - B(\alpha)K_{\sigma}x(t). \quad (150)$$

A Figura 19 a seguir, apresenta o diagrama completo da proposta para o sistema em malha fechada, de modo que cada bloco será detalhado gradualmente nessa seção:

Figura 19 - Diagrama do sistema completo em malha fechada.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

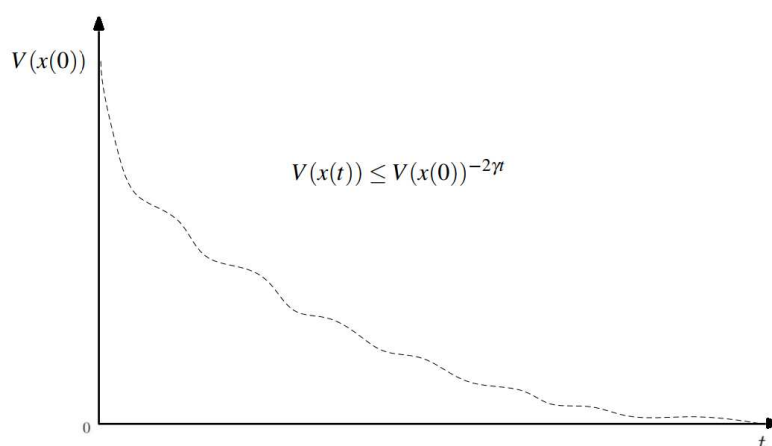
Considere uma candidata a função Lyapunov quadrática  $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ . Utilizando as derivadas em função do tempo de  $V$ , foi definido um controlador  $u(t) = -K_{\sigma}x(t)$ , que é um escalar capaz de assumir um valor positivo, negativo ou nulo. Para essa proposta, foi realizada a elaboração de um controlador fuzzy Takagi-Sugeno chaveado.

Para o controle de um sistema não linear de um pêndulo invertido com seu modelo fuzzy Takagi-Sugeno exato, a ideia principal consiste em utilizar o otimizador Teixeira & Žak como fonte do sinal de controle, sendo um  $u(t)$  definido como a saída do bloco “Histerese” do otimizador da Figura 1.

Sendo assim, a saída do sistema em malha fechada a ser determinada é a função de Lyapunov  $V$  de modo a atender a condição de que, para a existência de uma matriz  $P$ , positiva definida têm-se que  $P = P^T > 0$ . Considerando as características de funcionamento de um otimizador ideal, a derivada com relação ao tempo da função de Lyapunov deve se manter com valores negativos  $\dot{V}(x(t)) < 0$  quando  $x(t) \neq 0$ , se o objetivo é assegurar que o sistema em malha fechada tenda idealmente, assintoticamente ao ponto de equilíbrio  $x = 0$ .

Isso pode ser verificado medindo os valores do vetor de estado  $x = x(t)$ , para  $t \geq 0$  do sistema em malha fechada, fixado na Figura 20, onde espera-se que a função de Lyapunov evolua com o tempo, até atingir idealmente  $V(x(\infty)) = V(0) = 0$ , ou  $V(x(\infty)) \leq \Delta$ , no caso de estabilidade *ultimate bounded*.

Figura 20 - Características ideais para a função de Lyapunov - Sistema se direcionando para  $V(x(\infty)) = 0$ .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Sendo assim, pode-se escrever

$$V(x) = x^T P x,$$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (A(\alpha)x + B(\alpha)u)^T P x + x^T P (A(\alpha)x + B(\alpha)u), \quad (151)$$

$$\dot{V}(x) = x^T [P A(\alpha) + A(\alpha)^T P] + 2x^T P B(\alpha)u,$$

sendo que, para uma situação ótima no processo de minimização de uma função para um oti-

mizador, o sinal da parcela  $\{x^T PB(\alpha)\}$  é o inverso do sinal de  $u$ , ou seja  $\text{sgn}\{x^T PB(\alpha)\} = -\text{sgn}\{u\}$ . Dessa forma observa-se que  $\{2x^T PB(\alpha)u\} < 0$  colabora para garantir que  $\dot{V}(x(t)) < 0$  para  $x(t) \neq 0$ .

Para o projeto, de acordo com as expectativas de funcionamento de um otimizador ideal, o sistema deve apresentar as características das parcelas da derivada da função de Lyapunov como segue:

$$x^T PB(\alpha)u < 0 \quad \rightarrow \quad x^T PB(\alpha)u = -|x^T PB(\alpha)(-K_{\sigma}x)|, \quad (152)$$

$$\text{sendo : } u = \begin{cases} -K_{\sigma_1}x, & \text{ou} \\ -K_{\sigma_2}x, \end{cases}$$

apresentando que, como na Figura 19, propõe-se observar a magnitude de um sinal na saída do bloco “Histerese”  $\Theta$  do otimizador, para compor a lógica de escolha de  $u$ , utilizado para o processo dos ganhos de realimentação adequados.

Para tal,  $\Theta$  na saída do otimizador ideal, poderá assumir os valores  $+1$  ou  $-1$  e dessa forma, pode-se relacionar tal definição com a proposta (152) e encontrar outras expressões para as características das parcelas da derivada da função de Lyapunov.

Então, será utilizada a seguinte lógica, para a escolha da lei de controle chaveada, descrita em (152):

$$\Theta = 1, \quad \text{saída da histerese igual a } +A, \quad u = -K_{\sigma_1}x, \quad (153)$$

$$\Theta = -1, \quad \text{saída da histerese igual a } -A, \quad u = -K_{\sigma_2}x. \quad (154)$$

Como será visto a seguir,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2 \in \mathbb{K}_r$ , serão escolhidos de modo que, dado  $x(t)$  e com os vetores incertos  $\alpha(t)$  e  $B(\alpha)$ :

$$-x^T PB(\alpha(t))K_{\sigma_1}x(t) \leq -x^T PB(\alpha(t))K_i x(t), \quad \text{para todo } i \in \mathbb{K}_r, \quad (155)$$

$$-x^T PB(\alpha(t))K_{\sigma_2}x(t) \geq -x^T PB(\alpha(t))K_i x(t), \quad \text{para todo } i \in \mathbb{K}_r. \quad (156)$$



A proposta apresentada nesse trabalho utiliza-se das características do resultado para as expressões (153)-(156) de forma a realizar a obtenção e monitoramento da variável de estado  $x(t)$  bem como o sinal de saída do otimizador Teixeira & Žak representado por  $\Theta$  de modo a ser possível projetar uma lei de chaveamento que leve o sistema para o modelo fuzzy Takagi-Sugeno de um pêndulo invertido para uma condição de estabilidade uniforme, de acordo com as características e parâmetros utilizados no otimizador.

Uma proposta de lei de chaveamento para o caso onde têm-se o sistema (148), com o controlador (149), de modo que o sistema controlado pode ser escrito como em (150). Definindo  $u(t) = -K_{\sigma}x$ , como um controlador cujo valor no decorrer do tempo é um escalar representado por:

$$u(t) = -K_{\sigma}x(t) \rightarrow \begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{cases} \quad (157)$$

sendo a derivada da função de Lyapunov

$$\dot{V} = x^T [P(A(\alpha) - B(\alpha)K_{\sigma}) + (A(\alpha) - B(\alpha)K_{\sigma})^T P] x. \quad (158)$$

Então, se:

$$u(t) = -K_{\sigma}x(t); \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{K}_r,$$

$$\sigma = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_r} (x(t)^T PB(\alpha)K_i x(t)), \quad (159)$$

$$\therefore 2x^T PB(\alpha)(-K_{\sigma}x) \leq -2(x^T PB(\alpha)K(\alpha))x.$$

O problema é que como  $B(\alpha)$  é incerto, não é possível calcular  $\sigma$  dado em (159). Entretanto, para todo  $x(t)$  e  $\alpha(t)$  existem  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{K}_r$  tais que:

$$x^T PB(\alpha)(-K_{\sigma_1}x) \leq x^T PB(\alpha)(-K_i x) \quad \forall i \in \mathbb{K}_r,$$

e

(160)

$$x^T PB(\alpha)(-K_{\sigma_2}x) \geq x^T PB(\alpha)(K_j x) \quad \forall j \in \mathbb{K}_r.$$

Define-se então a lei de chaveamento para os casos:

Caso (i):

$$\text{Se: } x^T PB(\alpha) > 0; \quad x^T PB(\alpha)(-K_{\sigma_1}x) \leq x^T PB(\alpha)(-K(\alpha)x)$$

$$\text{Então: } \sigma_1 = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_r} (-K_i x), \quad K_\sigma = K_{\sigma_1};$$
(161)

Caso (ii):

$$\text{Se: } x^T PB(\alpha) < 0; \quad x^T PB(\alpha)(-K_{\sigma_2}x) \leq -x^T PB(\alpha)(K(\alpha)x)$$

$$\text{Então: } \sigma_2 = \arg \max_{i \in \mathbb{K}_r} (-K_i x), \quad K_\sigma = K_{\sigma_2};$$
(162)

Caso (iii):

$$\text{Se: } x^T PB(\alpha) = 0,$$
(163)

Então: O controlador mantém o subsistema escolhido anteriormente.

Sendo assim, a cada instante, a lei de chaveamento busca escolher entre dois valores de  $\sigma \in \mathbb{K}_\sigma = \{\sigma_1; \sigma_2\}$  que seja capaz de garantir uma tendência de minimizar a função de Lyapunov, levando o sistema para a sua condição de equilíbrio.

Têm-se então, de (161)-(163), já que  $\max\{a, b\} = -\min\{-a, -b\}$  os resultados para a lei de chaveamento projetada:

$$-K_{\sigma_1}x(t) = \min_{i \in \mathbb{K}_r}(-K_i x(t)) = -\max_{i \in \mathbb{K}_r}(K_i x(t)) \rightarrow K_{\sigma_1}x(t) = \max_{i \in \mathbb{K}_r}(K_i x(t)), \quad (164)$$

$$-K_{\sigma_2}x(t) = \max_{i \in \mathbb{K}_r}(-K_i x(t)) = -\min_{i \in \mathbb{K}_r}(K_i x(t)) \rightarrow K_{\sigma_2}x(t) = \min_{i \in \mathbb{K}_r}(K_i x(t)).$$

Como  $B(\alpha)$  depende de  $\alpha$  que é um vetor incerto, tal escolha entre sistemas (ganhos), nada mais serão que uma reafirmação das capacidades do otimizador quanto ao controle por busca extremal (Extremum Seeking Control) para sistemas incertos, como no *Capítulo 3*. Vale ressaltar da Figura 18 como o otimizador trabalha para minimizar a função de Lyapunov ( $V(x)$ ), ao passo que gera o sinal de controle utilizado, após decidir por um subsistema  $\sigma_{min}$  ou  $\sigma_{max}$ , sendo  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{K}_r$ .

Observe que utilizando uma escolha conveniente de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , da forma descrita em (161)–(163), de (151) note que  $\dot{V}(x) \leq x^T [P(A(\alpha) - B(\alpha)K(\alpha)) + (A(\alpha) - B(\alpha)K(\alpha))^T P] x$ . Assim, pode-se usar os Teoremas 7, 9 ou 10 para projetar os ganhos  $K_i, i \in \mathbb{K}_r$ .

#### 6.4 RESULTADOS DE FACTIBILIDADE E A REGIÃO DE OPERAÇÃO

Esta seção segue com as diversas características do projeto do otimizador, associado ao modelo do pêndulo invertido. A ferramenta *simulink* do software *Matlab* foi utilizada para projetar o sistema com suas características e parâmetros.

No *simulink* pôde ser implementada por diagrama de blocos, a parte dinâmica do modelo do pêndulo invertido, bem como projetar o controlador que será associado ao diagrama de blocos do otimizador não derivativo Teixeira & Žak. Já no ambiente de programação (*script editor*) do *Matlab* foi possível carregar as rotinas auxiliares como a parte da modelagem do pêndulo invertido que engloba suas equações características da representação exata e a definição dos principais teoremas revisados, ou seja, escrever as desigualdades matriciais lineares (LMIs) que darão as respostas preliminares quanto à estabilidade, bem como as indicações de factibilidade de acordo com o cenário escolhido com os diversos dados de projeto, como parâmetros incertos e região de operação, restrição da norma do controlador, os valores dos parâmetros do otimizador ( $\delta, \Delta, A, M, B$ ), taxa de decaimento, entre outros.

Lembrando que, nesse projeto, a partir da matriz de vetor de estado e de uma série de ganhos do controlador, o otimizador deve auxiliar toda a busca dinâmica pela região de estabilidade do sistema, escolhendo qual dos ganhos do controlador ( $K_{\sigma_1}$  ou  $K_{\sigma_2}$ ,  $\{\sigma_1; \sigma_2\} \in \mathbb{K}_r$ , tais que  $-K_{\sigma_1}x(t) \leq -K_i x(t)$  e  $-K_{\sigma_2}x(t) \geq -K_j x(t)$ , para todo  $\{i; j\} \in \mathbb{K}_r$ ) devem ser usados, sendo o

modelo do pêndulo, não linear e com incertezas.

Dessa forma, as simulações para o problema do equilíbrio e balanço de um pêndulo invertido podem ser realizadas. As implementações computacionais foram realizadas utilizando o *YALMIP* (LOFBERG, 2004), com o solver *SeDuMi* (STURM, 1999) com o *Matlab*.

Sendo  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ,  $M = 8,0 \text{ kg}$ ,  $m = 1,5 \text{ kg}$ ,  $l = 0,45 \text{ m}$  a aceleração da gravidade, a massa do conjunto móvel do pêndulo (carrinho), a massa da haste e o comprimento da haste, respectivamente. Neste projeto optou-se por considerar incertezas para a massa da haste bem como seu comprimento, além da massa do conjunto móvel (carrinho) com uma incerteza de  $\pm 10\%$  em sua massa, de forma que todos os parâmetros incertos do pêndulo invertido ficam definidos nos intervalos como descrito a seguir:

$$7,2 < M \leq 8,8 \quad 1,0 < m \leq 2,0 \quad 0,30 < l \leq 0,50.$$

O sistema que descreve as equações dinâmicas, como descrito na Seção 6.1 permitiu que o sistema fuzzy T-S pudesse ser construído a partir da equação (107). Considera-se uma região de operação, para  $x_1 = \theta$  o deslocamento angular da haste na posição vertical,  $x_2 = \dot{\theta}$  a velocidade angular da haste, além de  $x_3 = x$  o deslocamento linear no conjunto móvel da base do pêndulo invertido (carrinho) na horizontal e  $x_4 = \dot{x}$  a respectiva velocidade de deslocamento desse conjunto. O sinal de controle é  $u_p$ .

O projeto no domínio do tempo deve demonstrar a eficiência do otimizador analógico de escolher entre subsistemas, para levar a trajetória do sistema às proximidades do ponto de equilíbrio  $x = 0$ . Foi considerada a região de operação

$$D = \{[x_1 \quad x_2]^T \in \mathbb{R}^2 : \\ -\pi/3 \leq x_1 \leq \pi/3 \quad -\pi \leq x_2 \leq \pi \\ 7,2 < M \leq 8,8 \quad 1,0 < m \leq 2,0 \quad 0,30 < l \leq 0,50\}.$$

Para os resultados da modelagem fuzzy Takagi-Sugeno exata para o modelo do pêndulo (115), têm-se com segue:

$$\begin{aligned}
a_{21_1} &= \max_{x \in D} \{ \tilde{f}_{21}(x(t)) \} = 17,3118, \\
a_{21_2} &= \min_{x \in D} \{ \tilde{f}_{21}(x(t)) \} = 12,6433, \\
a_{41_1} &= \max_{x \in D} \{ \tilde{f}_{41}(x(t)) \} = -1,3156, \\
a_{41_2} &= \min_{x \in D} \{ \tilde{f}_{41}(x(t)) \} = -4,2043, \\
b_{21_1} &= \max_{x \in D} \{ g_{21}(x(t)) \} = -0,0811, \\
b_{21_2} &= \min_{x \in D} \{ g_{41}(x(t)) \} = -0,2143, \\
b_{41_1} &= \max_{x \in D} \{ g_{21}(x(t)) \} = 0,1176, \\
b_{41_2} &= \min_{x \in D} \{ g_{41}(x(t)) \} = 0,1039,
\end{aligned}$$

com os modelos locais para o domínio  $D$  têm-se como resultados as relações apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned}
A_1 &= A_5 = A_9 = A_{13} & A_2 &= A_6 = A_{10} = A_{14}, \\
A_3 &= A_7 = A_{11} = A_{15} & A_4 &= A_8 = A_{12} = A_{16},
\end{aligned}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17,3118 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1,3156 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12,6433 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1,3156 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17,3118 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4,2043 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12,6433 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4,2043 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= B_2 = B_3 = B_4 & B_5 &= B_6 = B_7 = B_8, \\
B_9 &= B_{10} = B_{11} = B_{12} & B_{13} &= B_{14} = B_{15} = B_{16},
\end{aligned}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0,0811 & 0 & 0,1176 \end{bmatrix}^T \quad B_5 = \begin{bmatrix} 0 & -0,2143 & 0 & 0,1176 \end{bmatrix}^T,$$

$$B_9 = \begin{bmatrix} 0 & -0,0811 & 0 & 0,1039 \end{bmatrix}^T \quad B_{13} = \begin{bmatrix} 0 & -0,2143 & 0 & 0,1039 \end{bmatrix}^T.$$

A fim de escolher o melhor conjunto de LMIs para o projeto final, são escolhidas algumas das LMIs do Capítulo 5 que foram apresentadas em teoremas. As LMIs oferecem regiões onde o sistema pode ser estabilizável, ou regiões factíveis de acordo com as especificações de cada projeto e é claro da capacidade de cada LMIs de apresentar maiores ou menores regiões factíveis dependendo das suas características.

Para os testes de factibilidade desde projeto, foram escolhidas três LMIs principais, de teoremas apresentados no Capítulo 5, para os testes de factibilidade.

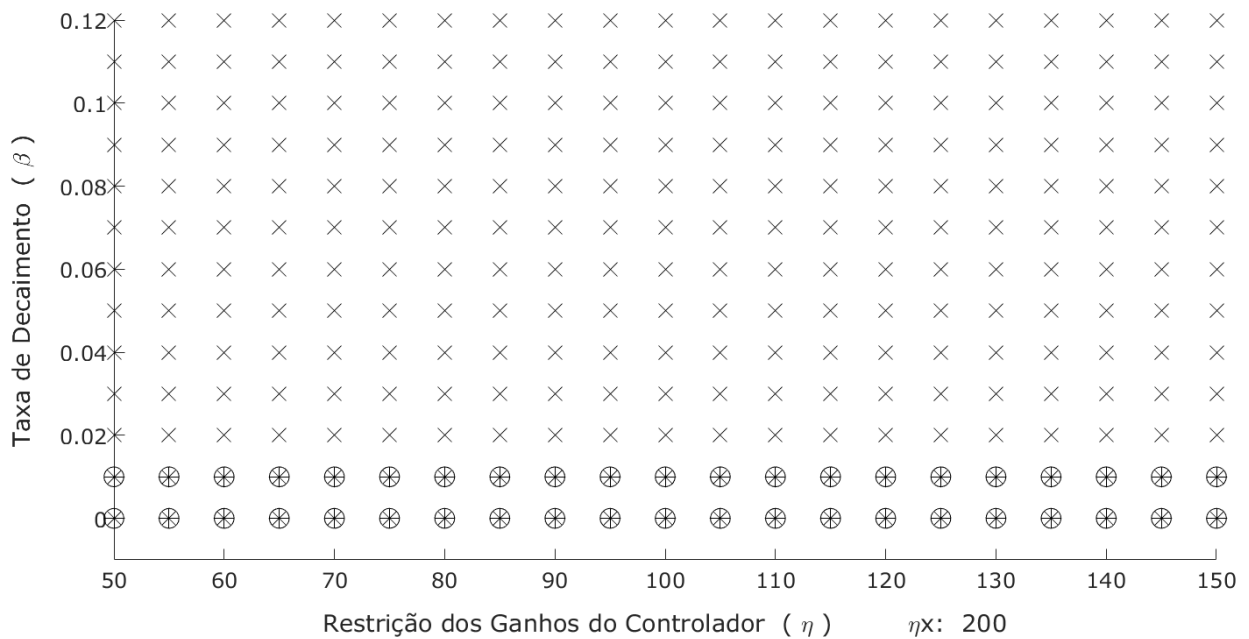
É importante ressaltar que em todos os casos, os testes de factibilidade foram realizados em conjunto com as condições do Teorema 8 (ŠILJAK; STIPANOVIĆ, 2000) porque o objetivo é garantir que as condições baseadas em LMIs abranjam e garantem a estabilidade assintótica, taxa de decaimento ( $\beta \geq 0$ ) e restrições na entrada do sinal de controle ( $\eta > 0$  e  $\eta_x > 0$ ) para o sistema não linear proposto com incertezas politópicas, descrito por um modelo fuzzy Takagi-Sugeno.

Sendo assim, as ferramentas principais para os testes de factibilidade basearam-se nos três teoremas seguintes:

- Teorema 7: (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998)
- Teorema 9: (SOUZA, 2013)
- Teorema 10: (LIU; ZHANG, 2003)

A Figura 21 a seguir é um resultado da simulação de factibilidade para os três teoremas considerados, onde no eixo das abscissas ( $x$ ), têm-se a variação da restrição da norma do controlador  $50 < \eta \leq 150$ , com  $\eta_x = 200$  e no eixo das ordenadas ( $y$ ) têm-se a variação da taxa de decaimento  $0 < \beta \leq 0,12$ .

Figura 21 - Região de factibilidade para os teoremas 7 [+], 9 [o] e 10 [x].



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Conclui-se então que o teorema que apresentou a maior região factível para este modelo matemático do sistema do pêndulo invertido, foi o Teorema 10.

Vale esclarecer, que para esta comparação foi utilizada apenas uma função de Lyapunov.

É muito importante destacar também que os resultados do Teorema 10 não poderiam ser utilizados de maneira direta, já que a proposição feita por Liu & Zhang (2003b) é clara ao demonstrar que o Teorema não se aplica a casos em que existem incertezas nas funções de pertinência. Apesar disso, o projeto aqui proposto não faz necessidade do uso de funções de pertinência na representação numérica do sistema fuzzy e posterior projeto de um controlador para esse sistema, característica que elimina a restrição para o uso do teorema.

Sendo assim, os resultados de factibilidade do Teorema 10 é utilizado para as conclusões dos testes para o projeto no domínio do tempo.

Escolhe-se então os parâmetros  $\eta = 100$ ,  $\eta_x = 200$  e  $\beta = 0,10$ , para resolução do sistema com as LMIs do Teorema 10. Escolhendo  $x(0) = [0,698 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  como condições iniciais e  $x_1(0) = \theta(0) = 0,698$  [rad] ou  $40^\circ$  em relação ao eixo vertical da haste.

Os ganhos do controlador e a matriz P obtidos foram os seguintes:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \begin{bmatrix} -999,5015 & -262,7704 & -19,9827 & -133,0706 \end{bmatrix} \\
K_2 &= 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -1,0100 & -0,2661 & -0,0202 & -0,1348 \end{bmatrix} \\
K_3 &= 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -1,0356 & -0,2723 & -0,0208 & -0,1382 \end{bmatrix} \\
K_4 &= \begin{bmatrix} -953,6895 & -250,2692 & -18,9604 & -126,2869 \end{bmatrix} \\
K_5 &= \begin{bmatrix} -712,9432 & -185,5465 & -13,7214 & -91,4780 \end{bmatrix} \\
K_6 &= \begin{bmatrix} -705,5570 & -183,5190 & -13,5623 & -90,4140 \end{bmatrix} \\
K_7 &= \begin{bmatrix} -707,0490 & -183,6839 & -13,5693 & -90,5187 \end{bmatrix} \\
K_8 &= \begin{bmatrix} -653,2922 & -169,0640 & -12,3972 & -82,6668 \end{bmatrix} \\
K_9 &= 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -1,0914 & -0,2877 & -0,0220 & -0,1464 \end{bmatrix} \\
K_{10} &= 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -1,0650 & -0,2807 & -0,0214 & -0,1426 \end{bmatrix} \\
K_{11} &= 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -1,0882 & -0,2863 & -0,0219 & -0,1457 \end{bmatrix} \\
K_{12} &= 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -1,0221 & -0,2686 & -0,0204 & -0,1361 \end{bmatrix} \\
K_{13} &= \begin{bmatrix} -720,9789 & -187,5810 & -13,8801 & -92,5436 \end{bmatrix} \\
K_{14} &= \begin{bmatrix} -693,8383 & -180,4444 & -13,2954 & -88,6474 \end{bmatrix} \\
K_{15} &= \begin{bmatrix} -682,6006 & -177,0341 & -13,0212 & -86,8143 \end{bmatrix} \\
K_{16} &= \begin{bmatrix} -510,9790 & -130,6772 & -9,2829 & -61,9727 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$P = \begin{bmatrix} 182,5951 & 48,5618 & 3,8682 & 25,6481 \\ 48,5618 & 13,7365 & 1,0892 & 7,2816 \\ 3,8682 & 1,0892 & 0,1445 & 0,7024 \\ 25,6481 & 7,2816 & 0,7024 & 4,6694 \end{bmatrix}.$$

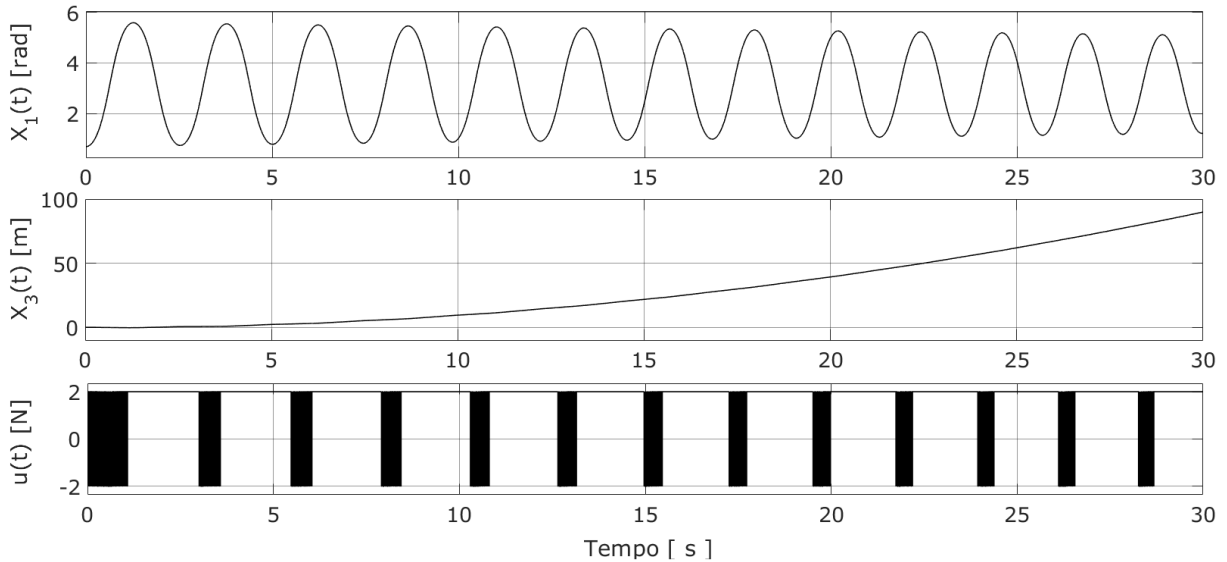
A Figura 22 mostra um teste sem o otimizador integrado a modelagem no *simulink*. O controle ainda é chaveado mas o otimizador não participa do processo de escolha dos ganhos do controlador, assim têm-se que esse chaveamento fica apenas dependente da escolha do mínimo valor entre os ganhos do controlador.

Note que, sem o conjunto do otimizador no projeto, as variáveis de estado  $x_1 = \theta$  do deslocamento angular da haste na posição vertical bem como  $x_3 = x$  para o deslocamento do conjunto móvel (carrinho) na posição horizontal, não convergem para uma região próxima ao ponto de



equilíbrio esperado para um pêndulo invertido  $x_e = [\theta \ \dot{\theta} \ x \ \dot{x}]^T = 0$ . Sendo assim, foi demonstrado que o sistema não convergiria para o equilíbrio sem o conjunto do otimizador.

Figura 22 - Resultados de projeto sem a aplicação do conjunto otimizador.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

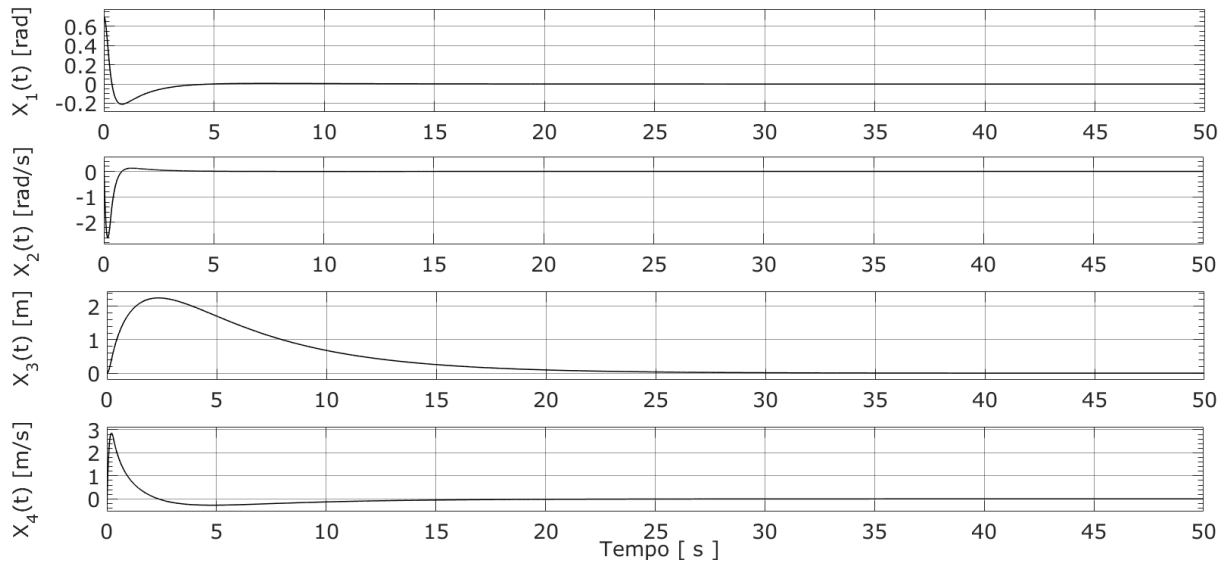
Para os parâmetros do otimizador escolheu-se:

$$\delta = 1 \times 10^{-4} \quad \text{e} \quad \Delta = 2 \times 10^{-4}$$

$$B = 40000, \quad M = 2000 \quad \text{e} \quad A = 2.$$

A Figura 23 apresenta o sistema completo com resultados no domínio do tempo, para a região de operação  $D$ , com a análise de uma aplicação do otimizador analógico não derivativo Teixeira & Žak no chaveamento de subsistemas, para um projeto de controle fuzzy Takagi-Sugeno chaveado, aplicado ao modelo de um pêndulo invertido. Como esperado, a região de operação fica em torno do ponto de equilíbrio  $x_e = [\theta \ \dot{\theta} \ x \ \dot{x}]^T = 0$ .

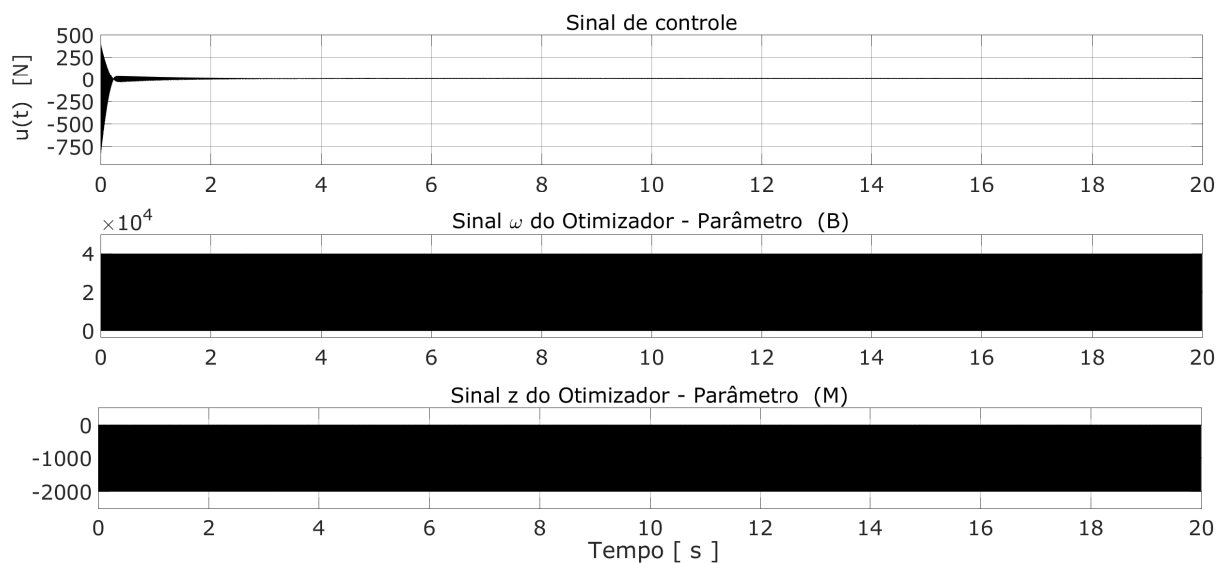
Figura 23 - Resultados de projeto para o otimizador T-Z como elemento de escolha entre subsistemas.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Pelas características do otimizador, a Figura 24 apresenta o comportamento do sinal de controle para o projeto, bem como os comportamentos dos sinais de acordo com a Figura 18, para os sinais de saída  $\omega$  (bloco “Reiniciador”) e  $z$  (bloco “Comparador”) do otimizador, que tem relação com os parâmetros  $B$  e  $M$  respectivamente.

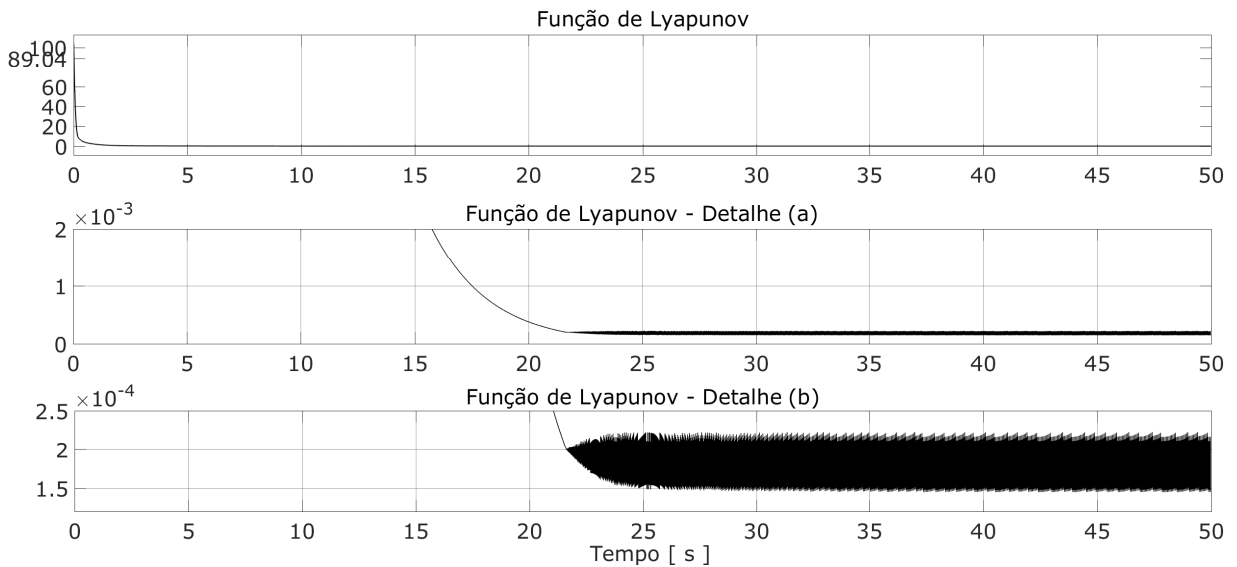
Figura 24 - Resultados de projeto - Sinal de controle e parâmetros do otimizador.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A seguir, são fixados os resultados com a Figura 25 que apresenta os sinais da evolução da função de Lyapunov  $V(x)$ , bem como suas características no tempo, já que as Figuras 25 em detalhe (a) e (b) apresentam alguns comportamentos esperados de acordo com as características do otimizador, já que a característica de estabilidade uniforme tende a levar a função de Lyapunov próximo do parâmetro  $\Delta$  para o otimizador Teixeira & Žak.

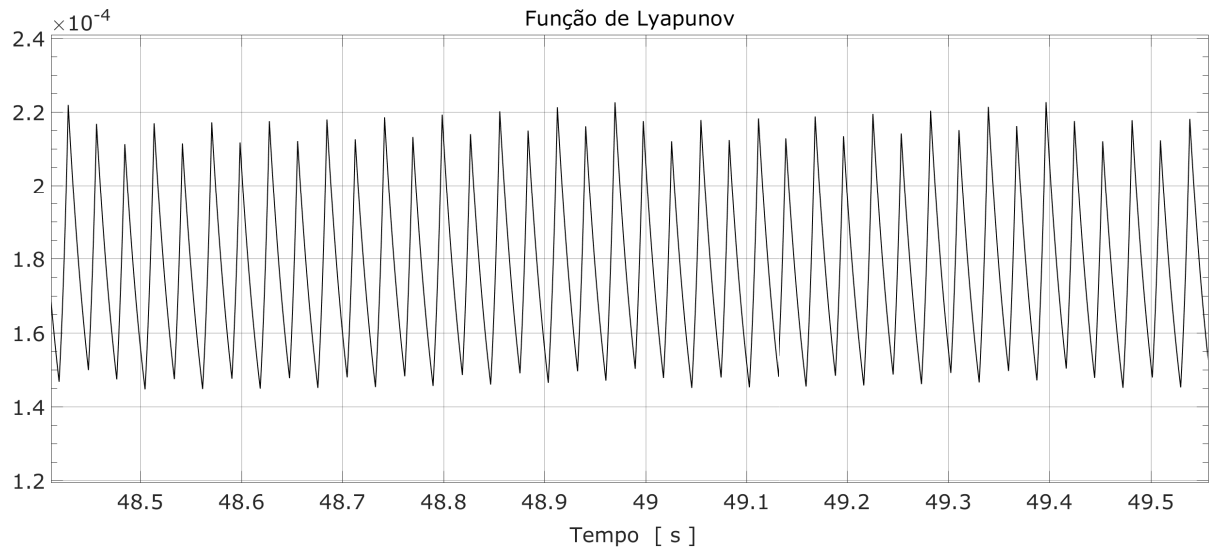
Figura 25 - Resultados de projeto - Evolução da função de Lyapunov.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Já que na Figura 25 observou-se que o otimizador está levando o sistema à condição de estabilidade uniforme, a Figura 26 apresenta o detalhamento do sinal da função de Lyapunov na região de operação, onde é possível observar como o sistema tende até uma situação onde permanece variando, próximo ao valor do parâmetro  $\Delta$  do otimizador.

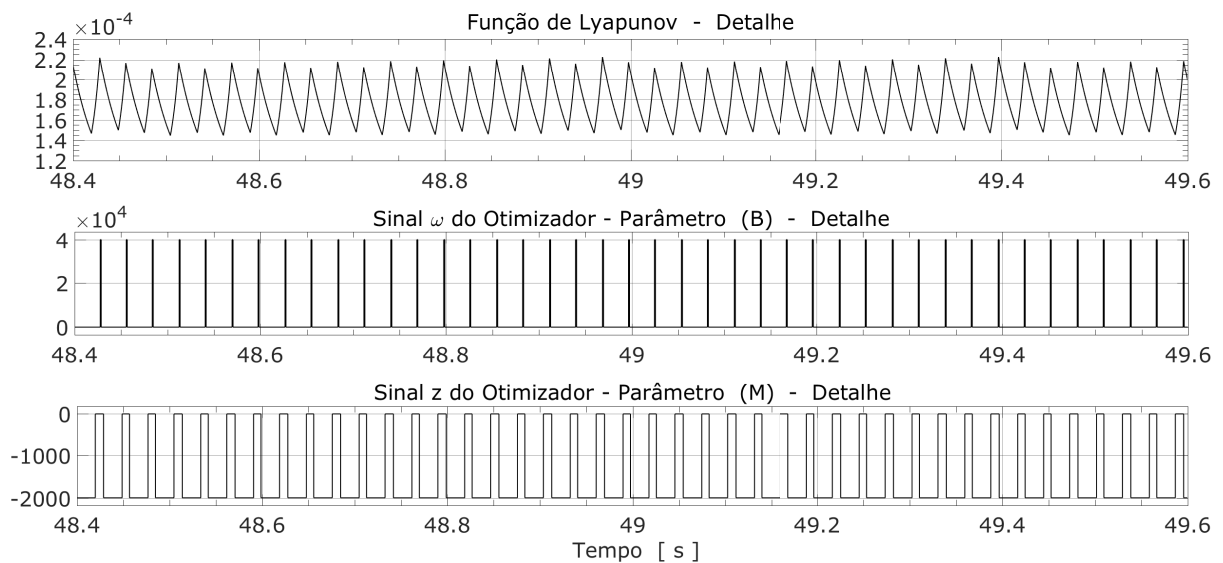
Figura 26 - Resultados de projeto para o otimizador T-Z como elemento de escolha entre subsistemas - Detalhe da região de operação.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

E finalmente, na Figura 27 são apresentados os detalhes relativos à evolução da função de Lyapunov, especificamente na região de operação, com as variações dos sinais de saída  $\omega$  (bloco “Reiniciador”) e  $z$  (bloco “Comparador”) do otimizador, que tem relação com os parâmetros  $B$  e  $M$ .

Figura 27 - Detalhe da região de operação - Função de Lyapunov e parâmetros do otimizador.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Portanto, após uma vasta revisão de diversos conceitos de modelos ótimos de sistemas não lineares, bem como as utilidades das LMIs nas propostas de factibilidade de sistemas de controle, foi possível associar o otimizador Teixeira & Žak (TEIXEIRA; ŽAK, 1999) a um projeto de controle chaveado em que são observadas incertezas, para ser uma opção de ferramenta para na geração do sinal de controle. Para obter um melhor cenário para as simulações, foi utilizado um conjunto de LMIs de teorema com mais ampla região de factibilidade (LIU; ZHANG, 2003), via o software *Yalmpi* e solver *SeDumi*.

O otimizador Teixeira & Žak, mais uma vez se mostrou eficiente na busca do mínimo de uma função Lyapunov, ao passo que decide entre subsistemas do projeto, escolhendo qual dos ganhos do controlador ( $K_{\sigma_1}$  ou  $K_{\sigma_2}$ ,  $\{\sigma_1; \sigma_2\} \in \mathbb{K}_r$ ) devem ser escolhidos.

Os resultados das simulações feitas em *simulink* mostraram que o otimizador é capaz de auxiliar o sistema para ser levado à região de operação, apesar de que um detalhamento da função de Lyapunov em tal região, apresenta que, o quão próximo do ponto de equilíbrio o sistema ficará oscilando, dependerá dos parâmetros escolhidos para o otimizador ( $\delta$ ,  $\Delta$ ,  $A$ ,  $M$  e  $B$ ), sendo assim resultante em um sistema controlado que apresenta características de estabilidade uniforme (*ultimate bounded*).

## 7 CONCLUSÕES

Neste trabalho explora-se as capacidades do otimizador analógico não derivativo, bem como as particularidades de tal sistemas baseado em Teixeira & Žak (1999). Para tal, são propostos três projetos que utilizam o otimizador de alguma forma, seja como elemento principal pela busca do ótimo de uma função, seja como elemento auxiliar de um sistemas maior.

Apresentando cada parte do projeto e todos os parâmetros do otimizador, foi possível observar com a simulações, que esses parâmetros têm bastante influência no correto funcionamento do processo de otimização, bem como pelas características da região de operação.

Aplicando o otimizador no Capítulo 3, foi necessário relembrar os principais conceitos de sistemas chaveados utilizados para as implementações de projetos de controladores. Fixa-se as relações necessárias para que um sistema chaveado possa ser estabilizado, como a existência de uma combinação convexa Hurwitz.

Assim, na primeira aplicação proposta, têm-se o chaveamento de subsistemas utilizando o otimizador Teixeira & Žak quando se trabalha com uma variável de estado (sistema unidimensional). O sistema linear é incerto, já que o emprego do otimizador pode ser realizado mesmo quando não há uma combinação convexa Hurwitz entre os subsistemas. Demonstrou-se que apesar da incerteza, existe um chaveamento adequado que estabilize o sistema. A utilização do otimizador se mostrou possível como também, a resposta do sistema (Figura 9) foi condizente com os comportamentos esperados do otimizador T-Z de acordo com a escolha dos seus parâmetros. O otimizador tem a característica de busca por uma estabilidade uniforme (*ultimate bounded*).

Um segundo projeto utilizando o otimizador não derivativo T-Z se deu em uma estratégia de controle via busca extremal ou *extremum seeking control* no processo de determinação do *maximum power point tracking* de uma célula fotovoltaica. Foi possível demonstrar toda a modelagem matemática da célula, que junto ao sistema dinâmico do otimizador, permitiu simulações que tiveram resultados satisfatórios para uma nova proposta de aplicação para o otimizador Teixeira & Žak.

Como pôde ser observado nos resultados da Figura 14 e Figura 15, na região de ponto ótimo (onde têm-se a máxima transferência potência), o sistema responde muito bem quanto à característica de estabilização, bem como para a velocidade de resposta quando acontecem

mudanças bruscas de irradiação solar, já que mesmo nessas situações o conjunto não perde sua capacidade de otimização, apresentando reações rápidas para esse tipo de eventualidade.

O último projeto proposto no trabalho necessitou de ainda mais aprofundamento nos conceitos teóricos, como sistemas não lineares com incertezas e controle via busca extremal.

Para concluir as simulações, o projeto de controladores chaveados na estabilidade de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno é uma teoria que engloba diversos aspectos físicos e matemáticos para a descrição e modelagem de sistemas. Nesse caso foi aplicada a modelagem exata de um sistema para um pêndulo invertido.

A estabilidade de sistemas fuzzy via LMIs foi muito útil para determinar se uma modelagem é factível de acordo com parâmetros de simulação escolhidos, sendo então escolhidas algumas relações apresentadas em teoremas que pudessem garantir não somente estabilidade mas também serem adicionados índices de desempenho, como a taxa de decaimento e restrição na entrada e saída do sinal de controle.

Para ilustrar o método de controle proposto, um modelo exato de um sistema não linear completo do pêndulo invertido foi descrito, bem como outras características e parâmetros que garantissem que tal sistema funcionasse de acordo com suas definições e particularidades. O otimizador Teixeira & Žak realizou a minimização da função de Lyapunov, ao passo que foi capaz de gerar um sinal de controle para um controlador fuzzy de um sistema não linear com incertezas.

O otimizador auxiliou na definição da lei de controle chaveada, porque fica encarregado de fazer escolhas entre os ganhos do controlador, sempre entre  $(K_{\sigma_1}$  ou  $K_{\sigma_2}, \{\sigma_1; \sigma_1\} \in \mathbb{K}_r)$ , que representa uma característica de busca extremal e que manteve o sistema sempre tendendo para o ponto de equilíbrio.

Esta metodologia permitiu o projeto com grandes incertezas na planta, quando comparada com resultados provenientes de procedimentos similares. Assim, o otimizador associado ao sistema não linear foi capaz de fazer a melhor opção de escolha entre dois subsistemas de modo contínuo, e os resultados dessas buscas pela região de ótimo se mostraram bastante satisfatórios ( Figuras 23 e 24 ) pois a característica de estabilidade *ultimate bounded* foi observada, demonstrando que o otimizador Teixeira & Žak pôde ser utilizado para três aplicações diferentes neste trabalho.

---

## 7.1 TRABALHOS FUTUROS

Como possibilidades para projetos futuros, têm-se:

- (i) Propor mais projetos que utilizem o otimizador Teixeira & Žak associado a algum processo ou modelo matemático, a fim de buscar uma região de operação;
- (ii) Propor mais análises das limitações dos parâmetros do otimizador quanto as possíveis implementações práticas, pois não se explorou completamente até onde pode-se diminuir os valores dos parâmetros para fazer a região de operação ficar pequena o suficiente e extremamente próxima ao ponto ótimo.
- (iii) Explorar outras capacidades do otimizador que já são conhecidas da literatura, como a capacidade de rejeição de distúrbios ou o trabalho com sistemas de ordem superior, por exemplo.



## REFERÊNCIAS

ADETOLA, V.; GUAY, M. Adaptive output feedback extremum seeking receding horizon control of linear systems. **Journal of Process Control**, London, v. 16, n. 5, p. 521—533, 2006.

ALVES, U. N. L. T. **Controle chaveado e chaveado suave de sistemas não lineares incertos via modelos fuzzy T-S**. 2017. 104 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2017.

Disponível em: [https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/152448/alves\\_unlt\\_dr\\_ilha.pdf?sequence=3&isAllowed=y](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/152448/alves_unlt_dr_ilha.pdf?sequence=3&isAllowed=y).

Acesso em: 12 fev. 2020.

AMINDE, N. O. **Controle extremal via funções de monitoração e realimentação de saída**. 2013. 94 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Instituto Alberto Luiz de Coimbra de Pós Graduação e Pesquisa em Engenharia (COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

Disponível em: <http://www.pee.ufrj.br/index.php/pt/producao-academica/dissertacoes-de-mestrado/2013-1/2013073001-2013073001/file>.

Acesso em: 13 fev. 2020.

BATTISTEL, A.; OLIVEIRA, T. R.; RODRIGUES, V. H. P. BMRAC multivariável utilizando diferenciadores exatos e globais baseados em HOSM com Ganhos dinâmicos. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 22, 2018, João Pessoa. **Anais [...]**. João Pessoa: SBA, 2018.

Disponível em: <https://ssl4799.websiteseuro.com/swge5/PROCEEDINGS/PDF/CBA2018-1433.pdf>.

Acesso em: 12 fev. 2020.

BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v. 13, n. 1, p. 65–72, 1989.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. 2. ed. Philadelphia: Society For Industrial And Applied Mathematics – SIAM, 1994. 193 p. (SIAM Studies in Applied Mathematics, v. 15).

CALLI, B.; CAARLS, W.; JONKER, P.; WISSE, M. Comparison of extremum seeking control algorithms for robotic applications. *In: IEEE/RSJ INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT ROBOTS AND SYSTEMS 2012*, Vilamoura. **Proceedings of the [...]**. Vilamoura: IEEE, 2012. p. 3195–3202.

CANNON, J. R. H. **Dynamics of physical systems**. New York: McGraw–Hill, 1967.

CAO, G.; REES, W.; FENG, G.  $H_\infty$  control of nonlinear continuous–time systems based on dynamical fuzzy models. **International Journal of Systems Science**, Sheffield, v. 27, n. 9, p. 821–830, 1996.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. Utilização de um otimizador analógico não—derivativo para a correção do fator de potência. *In: CONFEÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES*, 2, 2003, Rio Claro. **Anais [...]**. Rio Claro: IGCE, 2003. p. 1474–1483. CD-ROM.

CARDIM, R. **Simulação de controladores automáticos de sistemas não lineares**. 2004. 71 f. Iniciação Científica (Graduação em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2004.

CARNIATO, A. A. **Controle de sistemas lineares chaveados incertos com acesso à saída**. 2016. 133 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2016.

Disponível em: [https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/148812/caniato\\_aa\\_dr\\_ilha.pdf?sequence=3&isAllowed=y](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/148812/caniato_aa_dr_ilha.pdf?sequence=3&isAllowed=y).

Acesso em: 12 fev. 2020.

CARVALHO, W. C.; MENEZES, T. S.; COURRY, D. V. Aplicação do supercapacitor e lógica fuzzy para a proteção do elo CC e suavização de potência da geração eólica. *In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA*, 22, 2018, João Pessoa. **Anais [...]**. João Pessoa: SBA, 2018.

Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/329618313\\_Aplicacao\\_do\\_Supercapacitor\\_Logica\\_Fuzzy\\_para\\_a\\_Protecao\\_do\\_Elo\\_CC\\_e\\_a\\_Suavizacao\\_de\\_Potencia\\_da\\_Geracao\\_Eolica](https://www.researchgate.net/publication/329618313_Aplicacao_do_Supercapacitor_Logica_Fuzzy_para_a_Protecao_do_Elo_CC_e_a_Suavizacao_de_Potencia_da_Geracao_Eolica).

Acesso em: 12 fev. 2020.

CHEN, B. S.; TSENG, C. S.; UANG, H. J. Mixed  $H_2 = H_\infty$  fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems: an LMI approach. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 8, n. 3, p. 249–265, 2000.

- CHEN, Y. J.; OHTAKE, H.; TANAKA, K.; WANG, W. J.; WANG, H. Relaxed stabilization criterion for T–S fuzzy systems by minimum–type piecewise–lyapunov–function–based switching fuzzy controller. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 20, n. 6, p. 1166–1173, 2012.
- DANTZIG, G. B. **Linear programming, in problems for the numerical analysis of the future, proceedings of symposium on modern calculating machinery and numerical methods**. Los Angeles: UCLA, National Bureau of Standards, 1948. v. 15. p. 29–31. Appl. Math Series.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; GARCIA, F. S.; POMILIO, J. A. Switched affine systems control design with application to DC–DC converters. **IET Control Theory Applications**, New York, v. 4, n. 7, p. 1201–1210, 2010.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Switched state–feedback control for continuous time–varying polytopic systems. **International Journal Of Control**, Abingdon, v. 84, n. 9, p. 1500–1508, 2011.
- DECARLO, R. A.; BRANICKY, M. S.; PETTERSSON, S.; LENNARTSON, B. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. **Proceedings of the IEEE**, Piscataway, v. 88, n. 7, p. 1069–1082, 2000.
- DIENE, O. **Otimizadores neurais analógicos não derivativos**. 2002. 99 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Elétrica) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.
- FANG, C. H.; LIU, Y. S.; KAU, S. W.; HONG, L.; LEE, C. H. A new LMI–based approach to relaxed quadratic stabilization of T–S fuzzy control systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 14, n. 3, p. 386–397, 2006.
- FENG, G.; CAO, G.; REES, W. An approach to  $H_\infty$  control of a class of nonlinear systems. **Automatica**, Oxford, v. 32, p. 1469–1474, 1996.
- FENG, G.; CAO, S. G.; REES, N. W.; CHAK, C. K. Design of fuzzy control systems with guaranteed stability. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 85, n. 1, p. 1–10, 1997.
- FENG, G.  $H_\infty$  controller design of fuzzy dynamic systems based on Piecewise Lyapunov functions. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics**, Piscataway, v. 34, n. 1, p. 283–292, 2004.

- FIACCHINI, M.; JUNGERS, M. Necessary and sufficient condition for stabilizability of discrete-time linear switched systems: a set. theory approach. *In: SYMPOSIUM ON SYSTEM STRUCTURE AND CONTROL*, 5, 2013, Grenoble. **Proceedings of the [...]** Grenoble: International Federation of Automatic Control, 2013. v. 5, p. 196–201.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. **Journal on Control & Optimization – SIAM**, Philadelphia, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006.
- HANCOCK, H. **Theory of maxima and minima**. Cincinnati: University of Cincinnati, 1917.
- HASSIBI, A.; HOW, J.; BOYD, S. A path-Following method for solving BMI problems in control. *In: PROCEEDINGS OF THE 1999 AMERICAN CONTROL CONFERENCE*, 2, 1999, San Diego. **Proceedings of the [...]**. San Diego: [s.n.], 1999, v. 2, p. 1385–1389.
- HESPANHA, J. P.; MORSE, A. S. Switching between stabilizing controllers. **Automatica**, Amsterdam, v. 38, n. 11, p. 1905–1917, 2002.
- KIM, E.; LEE, H. New Approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 8, n. 5, p. 523–534, 2000.
- LEE, Y.; ZAK, S. H. Designing a genetic neural fuzzy antilock-brake system controller. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, Piscataway, v. 6, n. 2, p. 198–211, 2002.
- LIU, X.; ZHANG, Q. New approaches to  $H_\infty$  controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI. [s.l.]: **Automatica**, Amsterdam, v. 39, n. 9, p. 1571–1582, 2003, 2003a.
- LIU, X.; ZHANG, Q. Approaches to quadratic stability conditions and  $H_\infty$  control designs for T-S fuzzy systems. New York, **IEEE Transactions On Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 11, n. 6, p. 830–839, 2003, 2003b.
- LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. New York, **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 54, n. 2, p. 308–322, 2009.
- LOFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEM DESIGN*, 1, 2004, Zurich. **Proceedings of the [...]** Taipei:IEEE, v. 1, p. 284–289, 2004.

MACHADO, E. R. M. D. **Modelagem e controle de sistemas fuzzy Takagi–Sugeno**. 2003. 209 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2003.

Disponível em: [https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/101978/machado\\_ermd\\_dr\\_ilha.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/101978/machado_ermd_dr_ilha.pdf?sequence=1&isAllowed=y).

Acesso em: 02 fev. 2020.

MONTANARI, L. A. **Aplicação do otimizador analógico não derivativo Teixeira & Žak junto ao controle chaveado em sistemas lineares chaveados com direção incerta no sinal de realimentação**. 2016. 73 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2016.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1998.

OLIVEIRA, T. R. **Rastreamento para sistemas incertos fortemente não-lineares com direção de controle desconhecida**. 2010. 182 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

Disponível em: <http://pct.capes.gov.br/teses/2010/31001017029P6/TES.PDF>.

Acesso em: 13 fev. 2020.

OLIVEIRA, T. R.; COSTA L. R.; CATUNDA . M. Y.; PINO A. V.; BARBOSA W.; SOUZA M. G. Time–scaling based sliding mode control for neuromuscular electrical stimulation under uncertain relative degrees. **Medical Engineering and Physics**, London, v. 44, p. 53–62, 2017.

OLIVEIRA, T. R.; SANTOS G. C. Busca extremal com atrasos variantes no tempo.

*In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 22, 2018, João Pessoa, **Anais [...]**. João Pessoa: SBA, 2018.

Disponível em: <https://ssl4799.websiteseuro.com/swge5/PROCEEDINGS/PDF/CBA2018-0499.pdf>.

Acesso em: 12 fev. 2020.

OLIVEIRA, T. R.; ALBUQUERQUE P. Z. Busca extremal baseada no algoritmo de newton para uma classe de equações diferenciais parciais de difusão. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 22, 2018, João Pessoa. **Anais [...]**. João Pessoa: SBA, 2018.

Disponível em: <https://ssl4799.websiteseuro.com/swge5/PROCEEDINGS/PDF/CBA2018-0421.pdf>.

Acesso em: 13 fev. 2020.

OTSUKA, N.; SOGA, T. Quadratic stabilizability for polytopic uncertain continuous–time switched linear systems composed of two subsystems. **International Journal of Control and Automation**, Sandy Bay, v. 3, n. 1, p. 35–42, 2010.

PAZ, P.; OLIVEIRA, T. R. Busca extremal estocástica à estimulação elétrica neuromuscular em pacientes com AVC. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 22, 2018, João Pessoa. **Anais [...]**. João Pessoa: SBA, 2018.

Disponível em: <https://ssl4799.websiteseuro.com/swge5/PROCEEDINGS/PDF/CBA2018-0726.pdf>.

Acesso em: 12 fev. 2020.

SANTIM, M. P. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SOUZA, W. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Design of a Takagi–Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v. 2012, 2012.

SERWAY R. A. **Physics for Scientists and Engineers**. 6. ed. Pomona: Saunders College Publishing, 2004.

ŠILJAK, D. D.; STIPANOVIĆ, D. M. Robust stabilization of nonlinear systems: The LMI approach. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v. 6, n. 5, p. 461–493, 2000.

Disponível em: <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2000/810975/abs/>

Acesso em: 15 dez. 2019.

SILVA, P. H. G. L.; TEIXEIRA, M. C. M.; ALVES, U. N. L. T.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Controle de sistemas chaveados lineares com grandes incertezas utilizando um otimizador analógico não derivativo. *In*: CONFEÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, 36, 2017, São José do Rio Preto, **Anais [...]**. São José do Rio Preto: SBMAC, 2017.

Disponível em: <https://ssl4799.websiteseuro.com/swge5/PROCEEDINGS/PDF/DINCON2017-0133.pdf>.

Acesso em: 12 fev. 2020.

SLOTINE, J. J.; Li, W. **Applied nonlinear control**. Englewood Cliffs: Prentice–Hall, 1991.

SOUSA, M. H. N. **Estudo de novas aplicações de otimizadores analógicos não derivativos**. 2018. Iniciação Científica (Graduação em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2018.

- SOUZA, W. A. **Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi–Sugeno**. 2013. 92 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2013. Disponível em: [https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/100294/souza\\_wa\\_dr\\_ilha.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/100294/souza_wa_dr_ilha.pdf?sequence=1&isAllowed=y). Acesso em: 12 fev. 2020.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time–invariant systems with polytopic uncertainties. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v. 2013, p. 10, 2013.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Robust switched control design for nonlinear systems using fuzzy models. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v. 2014, p. 11, 2014.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi–Sugeno fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, 2014.
- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, A MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, Essex, v. 11, n. 1–4, p. 625–653, 1998.
- TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability,  $H_\infty$  control theory, and linear matrix inequalities. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 4, n. 1, p. 1–13, 1996.
- TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI–based designs. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998.
- TANAKA, K.; IWASAKI, M.; WANG, H. O. Stability and smoothness conditions for switching fuzzy systems. *In*: PROCEEDINGS OF THE 2000 AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 4, 2000, Chicago. **Proceedings of the [...]**. Chicago: [s.l.], 2000a. v. 4, p. 2474–2478.
- TANAKA, K.; IWASAKI, M.; WANG, H. O. Stable switching fuzzy control and its application to a hovercraft type vehicle. *In*: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 9, 2000, San Antonio. **Proceedings of the [...]**. San Antonio IEEE, 2000b. v. 2, p. 804–809.

- TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H.O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi–Sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 525–537, 2001.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, Piscataway, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.
- TANAKA, K.; SUGENO, M. Stability analysis and design of fuzzy control systems. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 45, n. 2, p. 135–156, 1993.
- TEIXEIRA, M. C. M.; ŽAK, S. H. Analog neural nonderivative optimizers. **IEEE Transactions on Neural Networks**, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 629–638, 1998.
- TEIXEIRA, M. C. M.; ŽAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, York, v. 7, n. 2, p. 133–142, 1999.
- WICKS, M. A.; PELETIES, P.; DECARLO, R. A. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. *In*: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33, 1994, Lake Buena Vista. **Proceedings of the [...]**. Lake Buena Vista: IEEE, 1994. v. 4, p. 3492–3497.