



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

João Vinicius Miron Aquino

**Operadores quase setoriais e uma classe de equações
diferenciais neutras**

São José do Rio Preto
2020

João Vinicius Miron Aquino

**Operadores quase setoriais e uma classe de equações
diferenciais neutras**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientadora: Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita

São José do Rio Preto
2020

A657o Aquino, João Vinicius Miron
Operadores quase setoriais e uma classe de equações
diferenciais neutras / João Vinicius Miron Aquino. -- São
José do Rio Preto, 2020
133 f.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
(Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas,
São José do Rio Preto
Orientadora: Andréa Cristina Prokopczyk Arita

1. Operadores quase setoriais. 2. Semigrupos de
crescimento. 3. Equação neutra. 4. Solução fraca. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados
fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

João Vinicius Miron Aquino

**Operadores quase setoriais e uma classe de equações
diferenciais neutras**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
UNESP - Câmpus de Rio Claro

São José do Rio Preto
01 de junho de 2020

*Dedico à minha
família.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à Deus, por ter me dado paciência e sabedoria para enfrentar os desafios deste trabalho.

Agradeço, também, à minha família, por todo apoio e confiança, desde o período do curso de graduação, até o presente momento.

Agradeço ao Departamento de Matemática da Unesp, campus de São José do Rio Preto - IBILCE e, em especial, à Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita, pela orientação no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos da Moradia Estudantil, Luan Viana, Jéssica Santos, Giovanna Ferreira e Guilherme Henrique, que se tornaram minha família nesta cidade.

Aos meus queridos, Amanda Ribeiro, Plínio Sicuti, Daniel Ferreira, Leonardo, Isabela Mendes, Karina Rampazzi, Lucas Costa, Livea Esteves, Marta Cruz e Juninho, pelos momentos de descontração e apoio nos momentos mais difíceis. Ao meu parceiro de estudo, Vinicius Vitório, pela contribuição no início deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“A vida é a ruína dos nossos planos”.
(THE SHAPE of Water, 2018)

RESUMO

Neste trabalho estudamos algumas propriedades dos operadores quase setoriais e, utilizando a teoria de semigrupos, discutimos a existência de soluções para uma classe de equações diferenciais funcionais neutras abstratas, utilizando teoremas de ponto fixo.

Palavras-chave: Operadores quase setoriais. Semigrupos de crescimento α . Equação neutra. Solução fraca.

ABSTRACT

In this paper we study some properties of almost sectorial operators and, using semigroup theory, we discuss about the existence of solutions for a class of abstract neutral functional differential equations by means of fixed point theorems.

Keywords: Almost sectorial operator. Semigroup of growth α . Neutral equation. Mild solution.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Curva Γ .	34
Figura 2.2	Curva γ_2 .	36
Figura 2.3	Curva γ_3 .	37
Figura 2.4	λ' à direita de Γ .	52
Figura 2.5	Contorno R_r .	54
Figura 2.6	λ situado no interior da região delimitada pela curva R_r .	56
Figura 2.7	Curva Γ_R^r .	58
Figura 2.8	Região limitada por $\Gamma_R^r \cup C_r$.	62
Figura 2.9	Decomposição da curva Γ_R .	63

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES LIMITADOS	12
2.1	Semigrupos uniformemente contínuos	12
2.2	Semigrupos fortemente contínuos	13
2.3	O Teorema de Hille - Yosida	21
2.4	Semigrupos de operadores compactos e semigrupos diferenciáveis	29
2.5	Semigrupos analíticos	32
2.6	Semigrupos de crescimento de ordem α	49
2.6.1	A singularidade do semigrupo em $t = 0$	68
3	UMA CLASSE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS NEUTRAS ABSTRATAS	72
3.1	Preliminares	72
3.2	Existência de soluções	73
3.3	Aplicação	112
	REFERÊNCIAS	127
	APÊNDICE A - Resultados auxiliares	130

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudamos, via teoria de semigrupos, a existência de soluções fracas, para uma classe de equações diferenciais funcionais abstratas do tipo neutro, com retardo finito, descritas na forma

$$\frac{d}{dt}[x(t) + g(t, x_t)] = Ax(t) + f(t, x_t), \quad t \in [0, a], \quad (1.1)$$

$$x_0 = \varphi \in \Omega \subset \mathcal{B}, \quad (1.2)$$

onde $a, r > 0$, $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador quase setorial, $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, $\mathcal{B} = C([-r, 0], X)$ é o espaço de fase formado pelas funções contínuas de $[-r, 0]$ com valores em X , $\Omega \subset \mathcal{B}$ é um aberto, a história x_t , para $t \in [0, a]$ é dada por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-r, 0]$ e $f, g : [0, a] \times \Omega \rightarrow X$ são funções apropriadas. Para este estudo nos baseamos no trabalho de Hernández, Pierri e Prokopczyk, o qual referimos em (2).

Na literatura matemática, existe um grande número de trabalhos sobre equações diferenciais neutras abstratas no caso em que A é um operador setorial. Para estes casos podemos citar, por exemplo, as referências (3–10) e suas referências. Operadores setoriais aparecem frequentemente em aplicações, já que muitos operadores diferenciais elípticos são setoriais quando considerados em espaços de Lebesgue (L^p - espaços) ou no espaço das funções contínuas, veja (11). Entretanto, quando olhamos para espaços mais regulares, como os espaços das funções Hölder contínuas, obtemos que estes operadores elípticos não são setoriais, por exemplo, podemos citar (11, Example 3.1.33).

Uma das características que nos permite associar uma família de operadores lineares limitados $(T(t))_{t \geq 0}$ a um operador setorial está relacionada com os conjuntos resolvente e espectro deste operador, bem como uma limitação da forma

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Delta(\phi),$$

onde $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\sigma(A) \subset \Delta(\phi) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; |\arg z| < \phi\} \cup \{0\}$. Neste caso, dizemos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo analítico.

No caso dos operadores quase setoriais, esta estimativa se torna

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Delta(\phi),$$

onde $\alpha \in (0, 1)$, $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\sigma(A) \subset \Delta(\phi) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; |\arg z| < \phi\} \cup \{0\}$, e, apesar da potência $1 - \alpha$, em $|\lambda|$, ser menor que um, ainda podemos relacionar o operador A com uma família de operadores lineares limitados, a qual recebe o nome de semigrupo de crescimento de ordem α .

Desse modo, com o objetivo de utilizarmos a teoria de semigrupos para estudarmos a

existência de soluções para o problema (1.1) – (1.2), dedicamos o segundo capítulo deste trabalho para o desenvolvimento dos principais resultados sobre semigrupos de operadores lineares limitados.

Mais especificamente, dividimos o Capítulo 2 em seis seções, sendo que as quatro primeiras estão baseadas no livro do Pazy, referenciado em (12). As duas primeiras seções tratam dos conceitos iniciais e dos dois tipos mais comuns de semigrupos: os semigrupos uniformemente contínuos e os semigrupos fortemente contínuos. A Seção 2.3 apresenta um importante resultado de geração de semigrupos, o Teorema de Hille - Yosida, que nos dá condições para que um operador linear A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo. Já a Seção 2.4 trata dos semigrupos compactos e diferenciáveis. Como nosso foco está nos operadores quase setoriais omitimos muitas demonstrações nas seções iniciais, fazendo apenas aquelas que consideramos relevantes.

Ainda sobre o Capítulo 2, a Seção 2.5 está baseada no livro do Gomes, o qual é referenciado em (13), e aborda a relação entre operadores setoriais e os semigrupos analíticos. Por último, na Seção 2.6, consideramos os resultados sobre operadores quase setoriais que serão utilizados no estudo do problema neutro. Neste caso utilizamos as referências (14–21).

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo da existência de soluções para a classe de equações diferenciais funcionais abstratas do tipo neutro, com retardo finito, descrita em (1.1) – (1.2). Para isso, usamos a abordagem tradicional por meio de teoremas de ponto fixo, mais especificamente utilizamos os Teoremas do ponto fixo de Sadovskii, Banach e Schauder e, como ferramenta, a teoria de semigrupos desenvolvida no Capítulo 2.

Ainda no Capítulo 3, na Seção 3.3, apresentamos um exemplo de aplicação dos resultados obtidos, o qual pode ser encontrada em (2), onde consideramos $C^\eta(\bar{\mathfrak{U}})$, $\eta \in (0, 1)$, que representa o espaço formado pelas funções η - Hölder contínuas de $\bar{\mathfrak{U}}$ em \mathbb{R}^n , com $\mathfrak{U} \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, limitado e com fronteira suave. Além disso, consideramos o operador $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ definido por $Au = \Delta u$, com $\mathcal{D}(A) = \{u \in C^{2+\eta}(\bar{\mathfrak{U}}); u|_{\partial\mathfrak{U}} \equiv 0\}$. Por (14) sabemos que A é um operador quase setorial que verifica a condição

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}}, \quad \lambda \in (\Delta(\theta))^c = \{\lambda \in \mathbb{C}; \theta \leq |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}\},$$

$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, com $\alpha = \frac{\eta}{2}$. Além disso, A não é setorial.

Por fim, apresentamos um apêndice onde se encontram alguns resultados utilizados ao longo do trabalho.

2 SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES LIMITADOS

Neste capítulo trazemos uma breve apresentação sobre a teoria de semigrupos de operadores lineares limitados em espaços de Banach, que será utilizada como ferramenta para o estudo de equações diferenciais no Capítulo 3.

Ao longo de todo este capítulo, X representará um espaço de Banach, munido da norma $\|\cdot\|$. Dessa maneira, $\mathcal{L}(X) = \{F : X \rightarrow X; F \text{ é uma transformação linear limitada}\}$ é um espaço de Banach com norma definida por $\|F\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|F(x)\|$.

2.1 Semigrupos uniformemente contínuos

Nesta seção apresentamos a definição de semigrupos de operadores lineares limitados e dissertamos sobre os semigrupos uniformemente contínuos. Como nosso foco são os semigrupos de crescimento de ordem α , que se assemelham aos semigrupos analíticos, omitimos a demonstração dos resultados desta seção.

Definição 2.1. *Uma família a um parâmetro $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em $\mathcal{L}(X)$ é um semigrupo se são satisfeitos os itens abaixo:*

- (i) $T(0) = I$, onde I é o operador identidade em X ;
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$ (chamada de propriedade exponencial do semigrupo).

Definição 2.2. *Um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo se $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$, isto é, a função $t \mapsto T(t)$ é contínua em $t = 0$.*

A propriedade (ii) da Definição 2.1 garante que a função $t \mapsto T(t)$ é contínua em $[0, \infty)$.

Definição 2.3. *O operador $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ definido por $Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$, onde $x \in \mathcal{D}(A) = \{y \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)y - y}{t} \text{ existe}\}$, é chamado de gerador infinitesimal do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$.*

Observação 2.4. (i) $\mathcal{D}(A) \neq \emptyset$.

(ii) $\mathcal{D}(A)$ é um subespaço vetorial de X .

(iii) Fixado $x \in \mathcal{D}(A)$, seja $f : [0, \infty) \rightarrow X$ dada por $f(t) = T(t)x$. Então, $Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'(0)$, isto é, $Ax = \left. \frac{d}{dt} T(t)x \right|_{t=0}$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$.

O próximo resultado relaciona um operador linear limitado com o fato dele ser o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo.

Teorema 2.5. *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado.*

Demonstração. (12, Teorema 1.2, p. 2). □

Nas condições do Teorema 2.5, o semigrupo obtido é dado por

$$T(t)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n x}{n!},$$

com $x \in X$ e $t \in [0, \infty)$.

Teorema 2.6. *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$ semigrupos uniformemente contínuos com o mesmo gerador A . Então $T(t) = S(t)$, $\forall t \geq 0$.*

Demonstração. (12, Teorema 1.3, p. 3). □

Combinando os resultados dos Teoremas 2.5 e 2.6, obtém-se as propriedades do corolário a seguir.

Corolário 2.7. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo, então:*

- (i) *Existe um único operador linear e limitado A tal que $T(t) = e^{tA}$, $\forall t \geq 0$;*
- (ii) *O operador A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$;*
- (iii) *Existe $w > 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, $\forall t \geq 0$;*
- (iv) *A função $t \mapsto T(t)$ é diferenciável em norma e*

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A, \quad t \geq 0.$$

2.2 Semigrupos fortemente contínuos

Nesta seção damos enfoque aos semigrupos fortemente contínuos, que são semigrupos que satisfazem uma condição de continuidade especificada na definição dada a seguir.

Definição 2.8. *Um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em $\mathcal{L}(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo se $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$, para todo $x \in X$, ou seja, a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua em $t = 0$ para todo $x \in X$. Chamamos um semigrupo fortemente contínuo de C_0 -semigrupo, ou ainda, semigrupo de classe C_0 .*

Teorema 2.9. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo, então existem constantes $M \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. A demonstração será feita via contra positiva do Princípio da limitação uniforme (Lema A.3).

Mostramos, inicialmente, que existem $M \geq 1$ e $\eta > 0$ tais que $\|T(t)\| \leq M$, para todo $t \in [0, \eta]$. Para tanto, suponha, por absurdo, que para todo $M \geq 1$ e todo $\eta > 0$, exista $t_{\eta, M} \in [0, \eta]$, tal que $\|T(t_{\eta, M})\| > M$. Assim, tomando $\eta = \frac{1}{n}$ e $M = n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, existe $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ tal que $\|T(t_n)\| > n$. Dessa forma, obtemos uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ e $\|T(t_n)\| > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Fazendo $n \rightarrow \infty$, concluímos que $t_n \rightarrow 0$ e $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T(t_n)x_0\| = \infty$. Logo, pela contra positiva do Lema A.3, existe $x_0 \in X$ tal que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T(t_n)x_0\| = \infty$.

Por outro lado, como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x_0 = x_0$, e então, $\lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_0 = x_0$, pois $t_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim, a sequência $(T(t_n)x_0)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em X e, portanto, limitada, ou seja, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T(t_n)x_0\| < \infty$, que é uma contradição.

Portanto, existe $M \geq 1$ e $\eta > 0$ tais que $\|T(t)\| \leq M$, para todo $t \in [0, \eta]$. Agora, considerando $t > \eta$, pelo algoritmo da divisão, existem $k \in \mathbb{N}$ e $r \in [0, \eta]$ tais que $t = k\eta + r$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(k\eta + r)\| \\ &\leq \|T(\eta)\|^k \|T(r)\| \\ &\leq M^k M = M^{\frac{t-r}{\eta}} M \leq M M^{\frac{1}{\eta}t} = M e^{wt}, \end{aligned}$$

com $w = \frac{\ln M}{\eta}$.

Portanto, $\|T(t)\| \leq M e^{wt}$, para todo $t \geq 0$. □

Corolário 2.10. *Se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo então, para cada $x \in X$, a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua em $[0, \infty)$.*

Demonstração. Pela definição de C_0 -semigrupo temos que a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua à direita em $t = 0$. Mostramos, agora, que para cada $t_0 > 0$ fixo a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua à direita em t_0 . Temos, para $h > 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| = \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t_0)\| \|T(h)x - Ix\| = 0.$$

Dessa forma, $t \mapsto T(t)x$ é contínua à direita para todo $t \geq 0$. Agora, seja $h > 0$ tal que $t_0 - h > 0$, então

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t_0 - h)x - T(t_0)x\| &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t_0 - h)x - T(t_0 - h + h)x\| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t_0 - h)\| \|Ix - T(h)x\| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} M e^{w(t_0 - h)} \|Ix - T(h)x\| = 0. \end{aligned}$$

Assim, a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua à esquerda para todo $t > 0$. Portanto $t \mapsto T(t)x$ é contínua para todo $t \in [0, \infty)$. □

Teorema 2.11. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo com gerador infinitesimal A . Então, para todo $t, \tau \in [0, \infty)$:*

(i) *Para $x \in X$,*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x;$$

(ii) *Para $x \in X$,*

$$\int_0^t T(s)x \, ds \in \mathcal{D}(A) \text{ e } A \left(\int_0^t T(s)x \, ds \right) = T(t)x - x;$$

(iii) *Para $x \in \mathcal{D}(A)$, $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e*

$$\frac{d}{dt} T(t)x = A T(t)x = T(t)Ax;$$

(iv) *Para $x \in \mathcal{D}(A)$,*

$$T(t)x - T(\tau)x = \int_\tau^t T(s) Ax \, ds = \int_\tau^t A T(s)x \, ds.$$

Demonstração. (i) *Sejam $x \in X$ e $t \in [0, \infty)$. Considere $a > t$ tal que $t \in [0, a]$ e seja $h > 0$ de modo que $t + h \in [0, a]$.*

Como $s \mapsto T(s)x$ é contínua e $[0, a]$ é um conjunto compacto, segue que $s \mapsto T(s)x$ é uma função uniformemente contínua. Desse modo, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(\xi)x - T(\eta)x\| < \epsilon, \quad \forall \xi, \eta \in [0, a], \text{ com } |\xi - \eta| < \delta.$$

Logo, se $0 < h < \delta$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - T(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t)x \, ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\| \, ds \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \epsilon \, ds = \frac{\epsilon}{h} \int_t^{t+h} 1 \, ds = \epsilon, \end{aligned}$$

pois $0 \leq s - t \leq h < \delta$.

Portanto, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x$.

(ii) *Sejam $x \in X$ e $t \in [0, \infty)$. Inicialmente, mostramos que $\int_0^t T(s)x \, ds \in \mathcal{D}(A)$. Para*

tanto, usando o item (i), note que

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) \left(\int_0^t T(s)x \, ds \right) - \int_0^t T(s)x \, ds}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\int_0^t T(s+h)x \, ds - \int_0^t T(s)x \, ds \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\int_h^{t+h} T(u)x \, du - \int_0^t T(s)x \, ds \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\int_h^t T(s)x \, ds + \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - \int_0^h T(s)x \, ds - \int_h^t T(s)x \, ds \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x \, ds \\
&= T(t)x - T(0)x = T(t)x - x.
\end{aligned}$$

Dessa forma, como o limite acima existe, concluímos que $\int_0^t T(s)x \, ds \in \mathcal{D}(A)$ e

$$A \left(\int_0^t T(s)x \, ds \right) = T(t)x - x.$$

(iii) Sejam $x \in \mathcal{D}(A)$ e $t \geq 0$, mostramos que $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$. Para isso, observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h+t)x - T(t)x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t)[T(h)x - x]}{h} \\
&= T(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = T(t)Ax,
\end{aligned}$$

o que garante que $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$.

Além disso, obtemos que

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax.$$

Por outro lado,

$$\frac{d^-}{dt} T(t)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h},$$

e assim, dado $h > 0$ tal que $t - h > 0$, temos

$$\left\| \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right\| = \left\| T(t-h) \left[\frac{T(h)x - x}{h} \right] - T(t-h)Ax \right\|$$

$$\begin{aligned}
& + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\| \\
\leq & \|T(t-h)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\
& + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\| \\
\leq & M e^{w(t-h)} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\
& + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right\| & \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} M e^{w(t-h)} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\
& + \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\| \\
& = M e^{wt} 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\frac{d}{dt}T(t)x = \frac{d^+}{dt}T(t)x = \frac{d^-}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x.$$

- (iv) Dado $x \in \mathcal{D}(A)$, pelo item anterior, $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$. Logo, do Teorema fundamental do cálculo, concluímos que

$$T(t)x - T(0)x = \int_0^t \frac{d}{ds}T(s)x ds = \int_0^t AT(s)x ds = \int_0^t T(s)Ax ds.$$

□

Corolário 2.12. *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, então $\mathcal{D}(A)$ é denso em X , isto é, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ e, além disso, A é um operador fechado.*

Demonstração. (1) Primeiro, mostramos que $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Sabemos que $\overline{\mathcal{D}(A)} \subset X$, restando, apenas, mostrarmos que $X \subset \overline{\mathcal{D}(A)}$. Para tanto, seja $x \in X$, do item (ii) do Teorema 2.11, $\int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}(A)$. Além disso, se $t > 0$, $\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}(A)$, pois $\mathcal{D}(A)$ é um subespaço vetorial de X .

Mais ainda, do item (i) do mesmo teorema, obtemos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds = T(0)x = x$. Assim, fazendo $t = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definida por $x_n = n \int_0^{\frac{1}{n}} T(s)x ds$, $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo:

- (i) $x_n \in \mathcal{D}(A), \forall n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\frac{1}{n}} T(s)x ds = x$.

Portanto, $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ e, então, $X \subset \overline{\mathcal{D}(A)}$.

(2) Agora, mostramos que A é fechado. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{D}(A)$ tal que

- (i) $x_n \rightarrow x$, para algum $x \in X$;
- (ii) $Ax_n \rightarrow y$, para algum $y \in X$.

Provamos que $x \in \mathcal{D}(A)$ e $Ax = y$. Para isso, note que:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ e, então, como $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \geq 0$, segue que
 $\lim_{n \rightarrow \infty} T(t)x_n = T(t)x$.
- (b) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|Ax_n - y\| < \epsilon, \forall n \geq n_0$. Então, para $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t T(s)Ax_n ds - \int_0^t T(s)y ds \right\| &\leq \int_0^t \|T(s)Ax_n - T(s)y\| ds \\ &\leq \int_0^t \|T(s)\| \|Ax_n - y\| ds \\ &\leq \int_0^t M e^{ws} \|Ax_n - y\| ds \\ &= \|Ax_n - y\| \int_0^t M e^{ws} ds \\ &< \epsilon \left(\frac{M e^{wt} - M}{w} \right). \end{aligned}$$

Além disso, pelo item (iv) do Teorema 2.11, temos $T(t)x_n - x_n = T(t)x_n - T(0)x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $x_n \in \mathcal{D}(A), \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, $T(t)x - x = \lim_{n \rightarrow \infty} [T(t)x_n - x_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t T(s)Ax_n ds = \int_0^t T(s)y ds$. Dessa maneira concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y ds = T(0)y = y.$$

Portanto, $x \in \mathcal{D}(A)$ e $Ax = y$, isto é, A é um operador fechado.

□

Teorema 2.13. *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$ C_0 -semigrupos com geradores infinitesimais A e B , respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Suponha que $A = B$ e sejam $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ e $t > 0$. Defina $\psi_t : [0, t] \rightarrow X$ por $\psi_t(s) = T(t-s)S(s)x$. Dessa forma

$$\begin{aligned}\psi_t'(s) &= \frac{d}{ds} [T(t-s)S(s)x] \\ &= T(t-s) \left[\frac{d}{ds} S(s)x \right] + \frac{d}{ds} (T(t-s))S(s)x \\ &= T(t-s)BS(s)x - AT(t-s)S(s)x \\ &= T(t-s)BS(s)x - T(t-s)AS(s)x = 0.\end{aligned}$$

Assim, $\psi_t'(s) = 0, \forall s \in [0, t]$, garantindo que ψ_t é constante em $[0, t]$. Em particular,

$$T(t)x = T(t-0)S(0)x = \psi_t(0) = \psi_t(t) = T(t-t)S(t)x = S(t)x,$$

ou seja, $T(t)x = S(t)x, \forall t \geq 0$ e $\forall x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$.

Agora, dado $x \in X$, como $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Pelo que fizemos anteriormente, $T(t)x_n = S(t)x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, $T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t)x_n = S(t)x, \forall t \geq 0$. \square

A seguir apresentamos um exemplo de C_0 -semigrupo.

Exemplo 2.14. Seja $X = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é limitada e uniformemente contínua}\}$, com a norma dada por $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Dessa forma, para cada $t \geq 0$ definimos $T(t) : X \rightarrow X$ tal que, a cada $f \in X$, temos $T(t)f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $(T(t)f)(s) = f(t+s)$. Sobre essa família podemos concluir:

- (i) $T(t)$ está bem definido para todo $t \geq 0$, ou seja $T(t)f \in X, \forall f \in X$.
- (ii) $T(t)$ é um operador linear para todo $t \geq 0$.
- (iii) $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \geq 0$, ou seja, $T(t)$, é limitado, $\forall t \geq 0$. Com efeito,

$$\|T(t)f\| = \sup_{s \in \mathbb{R}} |T(t)f(s)| = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(t+s)| \leq \sup_{\rho \in \mathbb{R}} |f(\rho)| = \|f\|, \forall f \in X.$$

- (iv) $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo. De fato:

(I) $T(0) = I$. Para isso, mostramos que $T(0)f = f, \forall f \in X$. Assim, considere $f \in X$ e note que $T(0)f(x) = f(0+x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, ou seja $T(0)f = f$.

(II) $T(t+s) = T(t)T(s)$. Sejam $f \in X, t, s \in [0, \infty)$ e $x \in X$, então $(T(t)T(s)f)(x) = T(t)[T(s)f(x)] = f(t+s+x) = f((t+s)+x) = T(t+s)f(x)$, isto é, $T(t)T(s)f = T(t+s)f, \forall f \in X$.

- (v) $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, isto é, visto que vale o item (iv), basta garantir que $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)f = f, \forall f \in X$, o que, de fato, ocorre pois f é uniformemente contínua.

(vi) Agora, verificamos o gerador infinitesimal A de $(T(t))_{t \geq 0}$. Por definição $\mathcal{D}(A) = \{f \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)f - f}{t} \text{ existe}\}$. Mostramos que, na verdade, $\mathcal{D}(A) = \{f \in X; f' \text{ existe e } f' \in X\}$ e, além disso, $Af = f', \forall f \in \mathcal{D}(A)$.

Seja $f \in X$ tal que f' existe e $f' \in X$. Provamos, a seguir, que $f \in \mathcal{D}(A)$. Para tanto, seja $t > 0$ e note que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\| &= \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \left(\frac{T(t)f - f}{t} \right)(s) - f'(s) \right| \\ &= \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \frac{f(t+s) - f(s)}{t} - f'(s) \right| \\ &= \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{t} \int_s^{s+t} f'(\tau) d\tau - \frac{1}{t} \int_s^{s+t} f'(s) d\tau \right| \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{t} \int_s^{s+t} |f'(\tau) - f'(s)| d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Como f' é uniformemente contínua, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f'(\xi) - f'(\eta)| < \epsilon$, $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}$, com $|\xi - \eta| < \delta$. Dessa forma, fazendo $t < \delta$, temos $s \leq \tau \leq s+t \Rightarrow 0 \leq \tau - s \leq t < \delta$. Assim,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\| &\leq \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{t} \int_s^{s+t} |f'(\tau) - f'(s)| d\tau \right\} \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{t} \int_s^{s+t} \epsilon d\tau \right\} = \epsilon. \end{aligned}$$

Isto mostra que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)f - f}{t} = f'$, ou seja, $f \in \mathcal{D}(A)$ e $Af = f'$.

Por outro lado, seja $f \in \mathcal{D}(A)$ e mostramos que f' existe e $f' \in X$. Como $f \in \mathcal{D}(A)$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)f - f}{t}$ existe e, considerando $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)f - f}{t} = g$, temos

$$\left| \frac{T(t)f(s) - f(s)}{t} - g(s) \right| \leq \left\| \frac{T(t)f - f}{t} - g \right\|, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Assim, como $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{T(t)f - f}{t} - g \right\| = 0$, concluímos que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{T(t)f(s) - f(s)}{t} - g(s) \right| = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) - f(s)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)f(s) - f(s)}{t} = g(s).$$

Logo, existe $f'_+(s)$ e $f'_+(s) = g(s)$. Mais ainda, como $g \in X$, segue que g é contínua e, então, pelo Lema de Dini (Lema A.2), f' existe e $f'(s) = f'_+(s) = g(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Finalmente, como $g \in X$, segue que $f' \in X$, concluindo o desejado.

2.3 O Teorema de Hille - Yosida

Nesta seção apresentamos o Teorema de Hille - Yosida, que caracteriza o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo. Para isso, precisamos de algumas definições e resultados auxiliares, cuja demonstração será omitida por não ser o foco deste trabalho.

Do Teorema 2.9 sabemos que para um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, existem constantes $M \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, $\forall t \geq 0$. A seguir, vejamos algumas definições que tratam de casos particulares sobre as constantes M e w .

Definição 2.15. Um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é chamado uniformemente limitado se, na limitação $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, tivermos $w = 0$, isto é, temos $\|T(t)\| \leq M$, $\forall t \geq 0$.

Definição 2.16. Um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é chamado semigrupo de contrações quando, $\|T(t)\| \leq 1$, $\forall t \geq 0$, ou seja, na limitação $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, $M = 1$ e $w = 0$.

Os próximos resultados se referem à teoria espectral de um operador A , mais especificamente, sobre o resolvente deste operador.

Definição 2.17. Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. O conjunto resolvente de A é dado por

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A)^{-1} \text{ é um operador linear limitado}\}.$$

O espectro de A , denotado por $\sigma(A)$, é o complementar do conjunto resolvente, isto é, $\sigma(A) = \rho(A)^c$.

Definição 2.18. A família $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, para $\lambda \in \rho(A)$, é chamada família resolvente de A . O operador $R(\lambda : A)$ é chamado de operador resolvente.

Lema 2.19. Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ linear e fechado com $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Suponha que $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$. Então $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x$, $\forall x \in X$.

Demonstração. (12, Lema 3.2, p. 9). □

Definição 2.20. Suponha que $(0, \infty) \subset \rho(A)$ com $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Para cada $\lambda > 0$, definimos a aproximação de Yosida de A por

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I.$$

Observação 2.21. 1. O operador linear A_λ é limitado, para todo $\lambda > 0$.

2. A igualdade na Definição 2.20 se verifica pois, como $I = (\lambda I - A)R(\lambda : A) = \lambda R(\lambda : A) - AR(\lambda : A)$, segue que $\lambda I = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda AR(\lambda : A)$ e, portanto, $\lambda AR(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I$.

3. A e $R(\lambda : A)$, $\lambda \in \rho(A)$, comutam, ou seja, $AR(\lambda : A) = R(\lambda : A)A$, $\forall \lambda \in \rho(A)$.

4. $R(\lambda : A)$ e $R(\mu : A)$ comutam, $\forall \lambda, \mu \in \rho(A)$. De fato, temos

$$\begin{aligned} R(\lambda : A) R(\mu : A)(\mu I - A)(\lambda I - A) &= I \\ \Rightarrow R(\lambda : A) R(\mu : A)(\mu I - A) &= R(\lambda : A) \\ \Rightarrow (\mu I - A) R(\lambda : A) R(\mu : A) &= R(\lambda : A) \\ \Rightarrow R(\mu : A)(\mu I - A) R(\lambda : A) R(\mu : A) &= R(\mu : A) R(\lambda : A) \\ \Rightarrow R(\lambda : A) R(\mu : A) &= R(\mu : A) R(\lambda : A). \end{aligned}$$

5. A_λ e A_μ comutam, $\forall \lambda, \mu \in \rho(A)$.

Lema 2.22. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado com $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Suponha que $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$.*

Demonstração. (12, Lema 3.3, p. 10). □

Pelo fato de A_λ ser um operador linear limitado, para todo $\lambda \in \rho(A)$, podemos definir

$$e^{A_\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA_\lambda)^n}{n!}, \quad \forall t \geq 0.$$

Lema 2.23. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado com $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Suponha que $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e $R(\lambda : A) \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações uniformemente contínuo $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$, onde $T_\lambda(t) = e^{A_\lambda t}$, $t \geq 0$. Além disso, para todo $x \in X$ e para todo $\lambda, \mu \in (0, \infty)$, temos*

$$\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| = \|e^{A_\lambda t} - e^{A_\mu t}\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Demonstração. (12, Lema 3.4, p. 10). □

Agora, apresentamos o principal teorema deste capítulo, que trata de condições necessárias e suficientes para um operador linear gerar um C_0 -semigrupo de contrações.

Teorema 2.24 (Teorema de Hille - Yosida). *Um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$ se, e somente se,*

(i) A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$;

(ii) $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$.

Demonstração. Seja \mathbb{K} o corpo de escalares de X . Assumimos que um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$. Pelo Corolário 2.12, concluímos que A é um operador linear fechado e que $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, ou seja, o item (i) já está provado.

Resta mostrar, apenas, o item (ii). Para tanto, seja $\lambda > 0$ e, para $x \in X$, defina

$$R(\lambda)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt.$$

Dividimos a demonstração em alguns itens para facilitar o raciocínio:

(1) $R(\lambda)x$ está bem definida, uma vez que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| &\leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \|T(t)\| \|x\| dt \\ &\leq \|x\| \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \\ &= \|x\| \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[\frac{-e^{-\lambda \xi}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right] = \frac{\|x\|}{\lambda} < \infty. \end{aligned}$$

(2) $R(\lambda) : X \rightarrow X$ é um operador linear. De fato, sejam $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então,

$$\begin{aligned} R(\lambda)(\alpha x + y) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)(\alpha x + y) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} [\alpha T(t)x + T(t)y] dt \\ &= \alpha \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)y dt = \alpha R(\lambda)x + R(\lambda)y. \end{aligned}$$

(3) $R(\lambda)$ é um operador linear limitado. Pelo item (1), temos

$$\|R(\lambda)x\| = \left\| \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| \leq \frac{\|x\|}{\lambda}, \quad \forall x \in X,$$

ou seja, $R(\lambda)$ é limitado. Dessa forma, como $R(\lambda)$ é linear, segue que $R(\lambda)$ é limitado.

(4) Mostramos que $R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$, $\forall x \in X$. Para tanto, dado $x \in X$, note que

$$\begin{aligned} \frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} &= \frac{T(h) \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t+h)x dt - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_h^{\infty} e^{-\lambda(u-h)} T(u)x du - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} \left[\int_h^0 e^{-\lambda t} e^{\lambda h} T(t)x \, dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{\lambda h} T(t)x \, dt \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \right] \\
&= -e^{\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \\
&\quad + \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \right).
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} -e^{\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) R(\lambda)x \\
&= -e^0 T(0)x + \left(\frac{d e^{\lambda t}}{dt} \Big|_{t=0} \right) R(\lambda)x = -x + \lambda R(\lambda)x.
\end{aligned}$$

Portanto, $R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$ e $A R(\lambda)x = -x + \lambda R(\lambda)x$.

Observe que, pelo item (4), $x = \lambda R(\lambda)x - A R(\lambda)x = (\lambda I - A)R(\lambda)x$, $\forall x \in X$. Logo, $R(\lambda)$ é a inversa à direita de $(\lambda I - A)$.

Mostramos que $R(\lambda)$ também é a inversa à esquerda de $(\lambda I - A)$. Para isso, seja $x \in \mathcal{D}(A)$, então

$$\begin{aligned}
R(\lambda)(\lambda I - A)x &= \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)Ax \\
&= \lambda R(\lambda)x - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)Ax \, dt \\
&= \lambda R(\lambda)x - A \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \\
&= \lambda R(\lambda)x - A R(\lambda)x \\
&= (\lambda I - A)R(\lambda)x = x,
\end{aligned}$$

isto é, $R(\lambda)(\lambda I - A)x = x$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$.

Assim, $R(\lambda)$ é a inversa à esquerda de $(\lambda I - A)$ e, dessa forma, $R(\lambda)$ é a inversa de $(\lambda I - A)$, com $R(\lambda)$ sendo um operador linear limitado.

Portanto, $\lambda \in \rho(A)$ e $R(\lambda : A) = R(\lambda)$. Consequentemente, $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| = \|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$, o que garante a validade do item (ii).

Agora, assumimos que um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ satisfaz as condições (i) e (ii) e mostramos que A gera um C_0 -semigrupo de contrações.

Seja A_λ , $\lambda > 0$, a aproximação de Yosida de A . Então, para cada $\lambda > 0$, A_λ é o gerador

infinitesimal do semigrupo de contrações $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$, com $T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$. Como A_λ é um operador linear limitado, o Teorema 2.5 garante que $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo. Além disso, pelos Lemas 2.22 e 2.23 como $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$, e $\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|$, $\forall x \in X$. Logo, dados $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \in [0, a]$ e $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|A_\lambda x - Ax\| < \frac{\epsilon}{2a}$, $\forall \lambda > N$. Desse modo, se $\lambda, \mu > N$, temos

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \\ &\leq a\left[\|A_\lambda x - Ax\| + \|A_\mu x - Ax\|\right] \\ &< a\left[\frac{\epsilon}{2a} + \frac{\epsilon}{2a}\right] = \epsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $(T_\lambda(t)x)_{\lambda \in (0, \infty)}$ pode ser vista como uma sequência de Cauchy em X .

Como X é um espaço de Banach, a sequência $(T_\lambda(t)x)_{\lambda \in (0, \infty)}$ converge para um elemento de X . Defina $T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x$, com $t \in [0, a]$ e $x \in \mathcal{D}(A)$. Na verdade, este limite existe para todo $t \geq 0$, mas a convergência é uniforme apenas em subconjuntos limitados de $[0, \infty)$. Assim, para $t \geq 0$, defina $T(t) : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$, com $T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x$.

No caso em que $x \in X$, pelo fato de $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(A)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Por outro lado, para cada $\lambda > 0$ fixo, $T_\lambda(t) \in \mathcal{L}(X)$ e então, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x_n = T_\lambda(t)x$. Dessa forma, para λ, μ suficientemente grandes e x_n fixo, tal que $\|x_n - x\|$ seja suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| &\leq \|T_\lambda(t)x - T_\lambda(t)x_n\| + \|T_\lambda(t)x_n - T_\mu(t)x_n\| + \|T_\mu(t)x_n - T_\mu(t)x\| \\ &\leq \|T_\lambda(t)\| \|x_n - x\| + \|T_\lambda(t)x_n - T_\mu(t)x_n\| + \|T_\mu(t)\| \|x_n - x\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x$ existe para todo $x \in X$. Então, defina $T(t) : X \rightarrow X$, por $T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x$. Mostramos, a seguir, que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações. Novamente dividimos esta parte da demonstração em alguns itens

(a) $T(t)$ é um operador linear, $\forall t \geq 0$. De fato, dados $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, obtemos

$$\begin{aligned} T(t)(\alpha x + y) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)(\alpha x + y) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\alpha T_\lambda(t)x + T_\lambda(t)y) \\ &= \alpha T(t)x + T(t)y. \end{aligned}$$

(b) $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, $\forall t \geq 0$. Com efeito, para $x \in X$, temos

$$\|T(t)x\| = \left\| \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x \right\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|T_\lambda(t)\| \|x\| = \|x\|.$$

Portanto, $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ e, além disso,

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(t)x\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| = 1, \quad \forall t \geq 0.$$

(c) $T(0)X = I$, pois $T(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} x = x, \forall x \in X$.

(d) Sejam $x \in X, t, s \in [0, \infty)$. Então,

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(t)T_\lambda(s)x - T(t)T(s)x\| &\leq \|T_\lambda(t)T_\lambda(s)x - T_\lambda(t)T(s)x\| \\ &\quad + \|T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x\| \\ &\leq \|T_\lambda(t)\| \|T_\lambda(s)x - T(s)x\| \\ &\quad + \|T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x\|. \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|T_\lambda(t)T_\lambda(s)x - T(t)T(s)x\| = 0$. Logo,

$$T(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)T_\lambda(s)x = T(t)T(s)x.$$

Portanto, $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \in [0, \infty)$. Assim, de (b), (c) e (d), concluímos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações.

(e) $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, isto é, a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua em $t = 0$, para todo $x \in X$ fixo. De fato, dado $x \in X$, para todo $\lambda > 0$, a função $t \mapsto T_\lambda(t)x$ é contínua em $t = 0$. Além disso, para $t \in [0, a]$, a convergência $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x = T(t)x$ é uniforme. Consequentemente, a função limite $t \mapsto T(t)x$ é contínua em $t = 0$.

(f) Por fim, mostramos que A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$. Para tanto, suponha que o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$ seja $B : \mathcal{D}(B) \subset X \rightarrow X$. Provamos que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ e que $A = B$. Seja $x \in \mathcal{D}(A)$, então

$$\begin{aligned} \frac{T(h)x - x}{h} &= \frac{1}{h} \left[\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(h)x - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(0)x \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (T_\lambda(h)x - T_\lambda(0)x) \right] \\ &= \frac{1}{h} \left(\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^h A_\lambda T_\lambda(s)x \, ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^h T_\lambda(s)A_\lambda x \, ds \right) = \frac{1}{h} \int_0^h T(s)Ax \, ds, \end{aligned}$$

uma vez que, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(s)A_\lambda x = T(s)Ax$, pois, do Lema 2.22,

$$\|T_\lambda(s)A_\lambda x - T(s)Ax\| \leq \|T_\lambda(s)\| \|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax\| \rightarrow 0,$$

quando $\lambda \rightarrow \infty$, com a convergência sendo uniforme para $s \in [0, a]$.

Desse modo, do item (i) do Teorema 2.11, segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^h T(s)Ax \, ds = T(0)Ax = Ax.$$

Logo, $x \in \mathcal{D}(B)$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = Ax$. Assim, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ e $A = B$ em $\mathcal{D}(A)$.

Por outro lado, aplicando ao gerador B a parte do Teorema de Hille - Yosida que já foi demonstrada, obtemos que $(0, \infty) \subset \rho(B)$. Em particular, $1 \in \rho(B)$ e, então, $(I - B)^{-1} = R(1 : B)$ existe e é um operador linear limitado. Por hipótese $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e, então, $1 \in \rho(A)$. Assim, $(I - A)^{-1}$ existe e também é um operador linear limitado. Logo, $(I - A)\mathcal{D}(A) = X$, e mais, como $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ e $A = B$ em $\mathcal{D}(A)$, $X = (I - A)\mathcal{D}(A) = (I - B)\mathcal{D}(A)$.

Portanto,

$$\mathcal{D}(A) = (I - B)^{-1}(I - A)\mathcal{D}(A) = (I - B)^{-1}X = \mathcal{D}(B)$$

e A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$, o que conclui a demonstração do teorema. □

Corolário 2.25. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$. Então, $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re} \lambda > 0$.*

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re} \lambda > 0$ e, para $x \in X$, considere o operador

$$R(\lambda)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt.$$

Mostramos que, neste caso, $R(\lambda)$ também está bem definido. De fato, note que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \right\| &\leq \int_0^{\infty} |e^{-\lambda t}| \|T(t)\| \|x\| \, dt \\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-\operatorname{Re} \lambda t} \|x\| \, dt \\ &= \|x\| \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^{\xi} e^{-\operatorname{Re} \lambda t} \, dt = \frac{\|x\|}{\operatorname{Re} \lambda} < \infty. \end{aligned}$$

Além disso, procedendo da mesma maneira que na demonstração do Teorema de Hille - Yosida, obtemos que $R(\lambda)$ é um operador linear limitado, com $R(\lambda) = R(\lambda : A)$ e

$$\|R(\lambda)x\| = \left\| \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \right\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda} \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Portanto, $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re} \lambda > 0$. □

Observação 2.26. 1. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo tal que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, $\forall t \geq 0$ e algum $w > 0$. Tomando a família $(S(t))_{t \geq 0}$ tal que $S(t) = e^{-wt}T(t)$, $\forall t \geq 0$. Então:

(a) $(S(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações. De fato, verificamos se são satisfeitas as propriedades necessárias:

(i) $S(t) \in \mathcal{L}(X)$, pois $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ e $e^{-wt} \in \mathbb{R}$, para todo $t \geq 0$.

(ii) $S(0) = e^{-w \cdot 0}T(0) = I$.

(iii) $S(t+s) = e^{-w(t+s)}T(t+s) = e^{-wt}e^{-ws}(T(t)T(s))$
 $= e^{-wt}T(t)e^{-ws}T(s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in [0, \infty)$.

(iv) $\|S(t)\| = \|e^{-wt}T(t)\| \leq e^{-wt}\|T(t)\| \leq e^{-wt}e^{wt} = 1$, $\forall t \geq 0$.

(b) Se A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$, então $(A - wI)$ é o gerador infinitesimal de $(S(t))_{t \geq 0}$. Com efeito, sejam $x \in \mathcal{D}(A)$ e $t > 0$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-wt}T(t)x - x}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-wt}T(t)x - e^{-wt}x + e^{-wt}x - x}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-wt} \left[\frac{T(t)x - x}{t} \right] + \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{-wt} - 1}{t} \right) x \\ &= e^{-w \cdot 0} Ax + \left(\left. \frac{d}{dt} e^{-wt} \right|_{t=0} \right) x \\ &= Ax - we^{-w \cdot 0} x = (A - wI)x. \end{aligned}$$

Assim, $(A - wI)$ é o gerador infinitesimal do semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$.

2. Analogamente ao item anterior, se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$, então $(A + wI)$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$, com $\|S(t)\| \leq e^{wt}$, para todo $t \geq 0$ (basta considerar $S(t) = e^{wt}T(t)$, para todo $t \leq 0$).

Corolário 2.27. Um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, com $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, para todo $t \geq 0$ e algum $w > 0$ se, e somente se,

(i) A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$;

(ii) $(w, \infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - w}$, para todo $\lambda > w$.

Demonstração. Primeiramente, suponha que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, com $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, para todo $t \geq 0$ e algum $w > 0$. Pelo Corolário 2.12, sabemos que A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Resta mostrar apenas o item (ii). Para tanto, considere $S(t) = e^{-wt}T(t)$, para todo $t \geq 0$. Pela Observação 2.26, $(S(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de

contrações com gerador infinitesimal $B = A - wI$. Assim, do Teorema de Hille - Yosida, $(0, \infty) \subset \rho(B)$ e $\|R(\lambda : B)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$.

Agora, seja $\mu \in (w, \infty)$. Como $\mu > w$, segue que existe $\beta > 0$ tal que $\mu = w + \beta$. Assim,

$$(\mu I - A) = ((w + \beta)I - A) = (\beta I - (A - wI)) = (\beta I - B).$$

Dessa forma, como $\beta > 0$, $\beta \in \rho(B)$ e, então, $(\beta I - B)$ tem inversa limitada. Consequentemente, $(\mu I - A)$ possui inversa e portanto, $\mu \in \rho(A)$. Além disso, para $\mu > w$,

$$\|R(\mu : A)\| = \|(\mu I - A)^{-1}\| = \|(\beta I - B)^{-1}\| = \|R(\beta : B)\| \leq \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\mu - w}.$$

Reciprocamente, suponha que as condições (i) e (ii) são satisfeitas. Mostramos que A gera um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, com $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, para todo $t \geq 0$.

Considere $B = A - wI$. Para $\lambda > 0$, temos

$$(\lambda I - B) = (\lambda I - A + wI) = ((\lambda + w)I - A).$$

Como $\lambda + w > w$, a hipótese (ii) garante que $((\lambda + w)I - A)^{-1}$ existe e é limitado. Dessa forma, $(\lambda I - B)^{-1}$ também existe e é limitado. Logo, $\lambda \in \rho(B)$, com

$$\begin{aligned} \|R(\lambda : B)\| &= \|(\lambda I - B)^{-1}\| \\ &= \|((\lambda + w)I - A)^{-1}\| \\ &= \|R(\lambda + w : A)\| \\ &\leq \frac{1}{(\lambda + w) - w} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Mais ainda, como $B = (A - wI) : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$, com $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, segue que $\overline{\mathcal{D}(B)} = X$ e, sendo A fechado, B também o é. Desse modo são satisfeitas as hipóteses (i) e (ii) do Teorema de Hille - Yosida para o operador B . Assim, B é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(S(t))_{t \geq 0}$.

Portanto, da Observação 2.26, segue que $A = B + wI$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, com $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, para todo $t \geq 0$, onde $T(t) = e^{wt}S(t)$, para todo $t \geq 0$.

□

2.4 Semigrupos de operadores compactos e semigrupos diferenciáveis

Nesta seção apresentamos dois tipos especiais de semigrupos: os semigrupos de operadores compactos e semigrupos diferenciáveis. Como este não é o foco principal deste trabalho, trataremos apenas dos resultados sobre esses tipos semigrupos que serão utilizados posteriormente.

Definição 2.28. Um operador $T : X \longrightarrow Y$ é dito um operador compacto se, para todo $B \subset X$ limitado, $T(B)$ é relativamente compacto, ou seja, $\overline{T(B)}$ é compacto.

Definição 2.29. Um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é compacto para $t > t_0$, $t_0 > 0$, se, para todo $t > t_0$, $T(t)$ é um operador compacto. Dizemos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é compacto se $T(t)$ é compacto para todo $t > 0$.

Observação 2.30. 1. Se $T(t_0)$ é compacto para algum $t_0 > 0$, então $T(t)$ é compacto para todo $t > t_0$. De fato, dado $t > t_0$, segue que $t = t_0 + \delta$, com $\delta > 0$. Dessa forma, dado $B \subset X$ limitado,

$$T(t)B = T(t_0 + \delta)B = T(t_0)T(\delta)B.$$

Considere $\hat{B} = T(\delta)B$, então \hat{B} é limitado, pois, como B é limitado, existe uma constante $K > 0$ tal que $\|x\| \leq K$, para todo $x \in B$. Assim, se $y \in \hat{B}$, então $y = T(\delta)x_0$, para algum $x_0 \in B$ e, desse modo,

$$\|y\| = \|T(\delta)x_0\| \leq \|T(\delta)\| \|x_0\| \leq \|T(\delta)\| K = \hat{K}.$$

Assim, como $T(t_0)$ é compacto, segue $T(t_0)\hat{B}$ é relativamente compacto, ou seja, $\overline{T(t_0)\hat{B}} = \overline{T(t)B}$ é compacto. Portanto, $T(t)$ é compacto para todo $t > t_0$.

2. Um C_0 -semigrupo é compacto para $t \geq 0$ se, e somente se, X tem dimensão finita. Para ver isto lembremos que $B_1(0) = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ é compacta se, e somente se, $\dim X < \infty$.

Dessa forma, se $(T(t))_{t \geq 0}$ é compacto, para $t \geq 0$, então $T(0) = I$ é compacto e assim, visto que $B_1(0)$ é limitado, $\overline{T(0)B_1(0)} = \overline{B_1(0)} = B_1(0)$ é compacto. Então, $\dim X < \infty$. Por outro lado, suponha que $\dim X < \infty$. Sejam $t \geq 0$ e $B \subset X$ limitado. Logo, $T(t)B$ é limitado, e então $\overline{T(t)B}$ é limitado. Como $\overline{T(t)B}$ também é fechado, o fato de $\dim X < \infty$ garante que $\overline{T(t)B}$ é compacto.

3. Seja $\mathcal{L}_C(X) = \{T : X \longrightarrow X; T \in \mathcal{L}(X), \text{ e } T \text{ é compacto}\}$. Então $\mathcal{L}_C(X)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{L}(X)$. Assim, obtemos as seguintes propriedades:

- (a) a soma (finita) de operadores compactos é compacto;
- (b) a multiplicação de um operador compacto por um escalar também é um operador compacto;
- (c) o limite, na norma de $\mathcal{L}(X)$, de operadores compactos é um operador compacto.

Teorema 2.31. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo. Se $T(t)$ é compacto para $t > t_0$, então $t \mapsto T(t)$ é contínua de (t_0, ∞) em $\mathcal{L}(X)$.

Demonstração. Como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, existem constantes $\hat{M} \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq \hat{M}e^{wt}$, para todo $t \geq 0$. Em particular, se $t \in [0, 1]$, $\|T(t)\| \leq \hat{M}e^w$. Assim, se $M = \hat{M}e^w$, então $\|T(t)\| \leq M$, para todo $t \in [0, 1]$.

Sejam $t > t_0$ e $\epsilon > 0$. Como $T(t)$ é compacto, o conjunto $U_t = T(t)B_1(0) = \{T(t)x; x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ é relativamente compacto. Mais ainda,

$$U_t \subset \bigcup_{x \in B_1(0)} \overset{\circ}{B}_{\frac{\epsilon}{4(M+1)}}(T(t)x),$$

onde $\overset{\circ}{B}_{\frac{\epsilon}{4(M+1)}}(T(t)x)$ denota o interior da bola $B_{\frac{\epsilon}{4(M+1)}}(T(t)x)$. Ou seja, $\overset{\circ}{B}_{\frac{\epsilon}{4(M+1)}}(T(t)x)$, $x \in B_1(0)$, é uma cobertura aberta de U_t . Em particular, o mesmo vale para \overline{U}_t . Logo, da compacidade de \overline{U}_t existem $x_1, x_2, \dots, x_n \in B_1(0)$ tais que

$$U_t \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{\epsilon}{4(M+1)}}(T(t)x_i).$$

Por outro lado, como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, temos que $t \mapsto T(t)x_i$ é contínua de $[0, \infty)$ em X , para $i = 1, 2, \dots, n$. Assim, fixado $x_i \in B_1(0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, existe $\delta_i > 0$ tal que, se $h \in \mathbb{R}$, com $t + h > 0$ e $0 < h < \delta_i$, então $\|T(t+h)x_i - T(t)x_i\| < \frac{\epsilon}{4}$. Dessa forma, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, 1\}$, dado $x \in B_1(0)$, segue que $T(t)x \in U_t$ e então existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ de modo que $T(t)x \in B_{\frac{\epsilon}{4(M+1)}}(T(t)x_j)$, isto é, $\|T(t)x - T(t)x_j\| \leq \frac{\epsilon}{4(M+1)}$. Assim, para $h \in \mathbb{R}$, tal que $t + h > 0$ e $0 < h < \delta$, segue que

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t)x\| &\leq \|T(t+h)x - T(t+h)x_j\| + \|T(t+h)x_j - T(t)x_j\| \\ &\quad + \|T(t)x_j - T(t)x\| \\ &< \|T(h)[T(t)x - T(t)x_j]\| + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4(M+1)} \\ &\leq M \frac{\epsilon}{4(M+1)} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4(M+1)} = \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

ou seja, $\|T(t+h)x - T(t)x\| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $x \in B_1(0)$, com $0 < h < \delta$. Logo,

$$\|T(t+h) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{x \in B_1(0)} \|T(t+h)x - T(t)x\| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

garantindo a continuidade à direita da função $s \mapsto T(s)$, para todo $s \in (t_0, \infty)$. Um argumento análogo garante a continuidade à esquerda, concluindo a demonstração do resultado. \square

Teorema 2.32. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então $(T(t))_{t \geq 0}$ é compacto se, e somente se, $t \mapsto T(t)$ é contínua de $(0, \infty)$ em $\mathcal{L}(X)$ e $R(\lambda : A)$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.*

Demonstração. (12, Teorema 3.3, p. 48). \square

Definição 2.33. *Um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é chamado diferenciável para $t > t_0$, $t_0 > 0$, se, para todo $x \in X$, a função $t \mapsto T(t)x$ é diferenciável para $t > t_0$. Caso $t_0 = 0$, dizemos, simplesmente, que o semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é diferenciável.*

Teorema 2.34. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo diferenciável para $t > t_0$ e seja A seu gerador infinitesimal. Então:*

- (i) *para $t > n t_0$, $n = 1, 2, \dots$, $T(t) : X \rightarrow \mathcal{D}(A^n)$ e $T^{(n)}(t) = A^n T(t)$ é um operador linear limitado, onde $T^{(n)}(t)$ denota a n -ésima derivada de $t \mapsto T(t)$;*
- (ii) *para $t > n t_0$, $n = 1, 2, \dots$, $t \mapsto T^{(n-1)}(t)$ é contínua de $(n t_0, \infty)$ em $\mathcal{L}(X, \mathcal{D}(A^{n-1}))$.*

Demonstração. (12, Lema 4.2, p. 52). □

Proposição 2.35. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo diferenciável e A seu gerador infinitesimal. Então*

$$T^{(n)}(t) = \left(AT\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n = \left(T'\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Demonstração. (12, Lema 4.5, p. 53). □

2.5 Semigrupos analíticos

Nesta seção estudamos os semigrupos analíticos, que são uma generalização dos C_0 -semigrupos para um setor do plano complexo. Este tipo de semigrupo é frequentemente utilizado no estudo de certas equações diferenciais quando utilizamos como ferramenta a teoria de semigrupos. Também apresentamos a definição de operadores setoriais e o semigrupo analítico gerado por esta classe de operadores.

Seja X um espaço de Banach e $0 < \alpha < \pi$. Denotamos por $\Delta(\alpha)$ o seguinte setor aberto do plano complexo

$$\Delta(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; |\arg z| < \alpha\}.$$

Definição 2.36. *Uma família $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ de operadores lineares limitados, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, é um semigrupo analítico em $\Delta(\alpha)$ se:*

- (i) $T(0) = I$;
- (ii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, $\forall z_1, z_2 \in \Delta(\alpha)$;
- (iii) $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$, para todo $x \in X$, $z \in \Delta(\alpha)$;
- (iv) a função $z \mapsto T(z)$ é analítica em $\Delta(\alpha)$.

Note que, da definição de semigrupos analíticos, um semigrupo analítico restrito ao semi-eixo real positivo $[0, \infty)$ é um C_0 -semigrupo. Como veremos no próximo teorema, a relação inversa, ou seja, o fato de um C_0 -semigrupo admitir uma extensão analítica em um setor do plano complexo, também é válida sob certas circunstâncias.

Teorema 2.37. Um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ admite uma extensão analítica em $\Delta(\alpha)$, $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$, para algum $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ se, e somente se, $(T(t))_{t \geq 0}$ for diferenciável e existir uma constante $N \geq 1$ tal que

$$\|t AT(t)\| \leq N, \quad 0 < t \leq 1,$$

onde A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$.

Demonstração. (13, Teorema 1.8.2, p. 68). □

Proposição 2.38. Se $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é um semigrupo analítico, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então existem constantes $M \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que

$$\|T(z)\| \leq M e^{w \operatorname{Re} z}, \quad \forall z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}.$$

Demonstração. A argumentação desta demonstração é análoga à utilizada na prova do Teorema 2.9 e por isso será suprimida. □

A seguir apresentamos a definição de operadores setoriais. Para isso, usamos a notação padrão da teoria espectral, apresentada na Seção 2.3.

Definição 2.39. Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado e densamente definido. Dizemos que A é um operador setorial se existem constantes $M > 0$ e $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ tais que:

$$(i) \quad \sigma(A) \subset \Delta(\phi) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; |\arg z| < \phi\} \cup \{0\};$$

$$(ii) \quad \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Delta(\phi).$$

No que segue, vamos mostrar que se A é um operador setorial então $-A$ gera um semigrupo analítico. Apenas por questão de notação definimos, abaixo, operadores de classe (θ, M) .

Definição 2.40. Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado e densamente definido. Dizemos que A é de classe (θ, M) , onde $M > 0$ e $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, e escrevemos $A \in (\theta, M)$, se:

$$(i) \quad \Delta(\theta) = \{z \in \mathbb{C}; |\arg z| \leq \theta\} \subset \rho(A);$$

$$(ii) \quad \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \Delta(\theta) \setminus \{0\}.$$

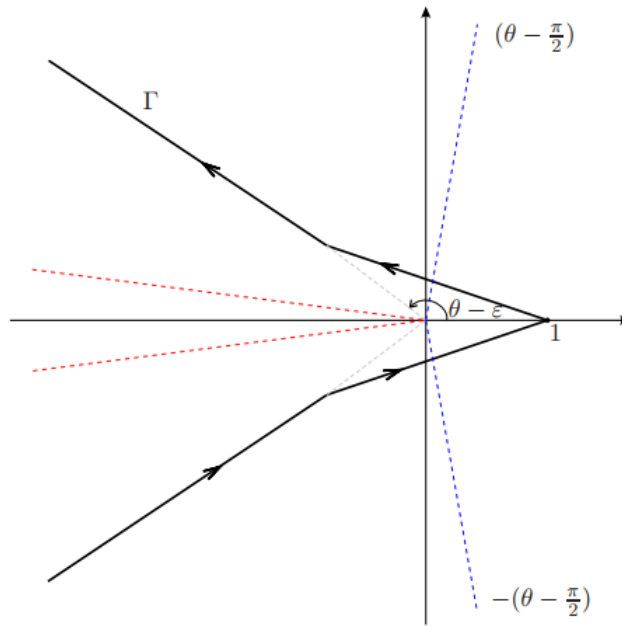
Observação 2.41. Se A é um operador setorial, então $-A$ é um operador de classe (θ, M) , onde $\theta = \pi - \phi$. De fato, como A é um operador fechado, segue que $-A$ também é fechado. Além disso, como $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(-A)$, $-A$ é densamente definido. Mais ainda, existe $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $\sigma(A) \subset \Delta(\phi) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; |\arg z| < \phi\}$, e, como $\sigma(A) = (\rho(A))^c$, segue que $\rho(A) \supset (\Delta(\phi))^c = \{z \in \mathbb{C}; \phi \leq |\arg z| \leq \pi\}$. Além disso, se $\lambda \in \rho(A)$, então $-\lambda \in \rho(-A)$,

ou seja, $\rho(-A) \supset \{z \in \mathbb{C}; |\arg z| \leq \pi - \phi\} = \Delta(\theta)$. Por fim, dado $\mu \in \Delta(\theta)$, segue que $\mu = -\lambda$, para algum $\lambda \in \rho(A)$, e $\|(\mu - (-A))^{-1}\| = \| -(\mu - (-A))^{-1}\| = \|(-1)(A - \lambda)^{-1}\| = \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} = \frac{M}{|\mu|}$. Desse modo, $-A$ satisfaz as condições da Definição 2.40 e então, $-A \in (\theta, M)$.

Como nosso objetivo é mostrar que $-A$ é o gerador de um semigrupo analítico, sempre que A é setorial, a partir de agora vamos tomar $A \in (\theta, M)$, já que, da observação anterior, ele é exatamente o operador que estamos interessados.

Seja $A \in (\theta, M)$ e escolha $\epsilon > 0$ tal que $0 < 2\epsilon < \theta < \theta - \frac{\pi}{2}$. Considere a curva Γ , no plano complexo, dada pelas semirretas $r e^{i(\theta-\epsilon)}$ e $r e^{-i(\theta-\epsilon)}$, onde $r \in [1, \infty)$, e os segmentos de reta que ligam os pontos $e^{i(\theta-\epsilon)}$ e $e^{-i(\theta-\epsilon)}$ ao ponto $z = 1$, orientada de forma que a parte imaginária seja crescente. Veja a Figura 2.1.

Figura 2.1 – Curva Γ .



Fonte: (22, Figura 1.3, p. 29).

Considere ainda $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\epsilon$, então $0 < \alpha < \pi$. Dessa forma, $\Delta(\alpha) = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |\arg z| < \alpha\} \subset \Delta(\theta) \subset \rho(A)$.

Definindo a curva $\Gamma_r = \{\lambda \in \Gamma; |\lambda| < r\}$, com $r \geq 1$, obtemos que $\Gamma_r \subset \Gamma \subset \Delta(\theta) \subset \rho(A)$ e as funções $\lambda \mapsto e^{\lambda z}$ e $\lambda \mapsto R(\lambda : A)$, com $z \in \Delta(\theta)$ e $\lambda \in \Gamma_r$, são contínuas. De fato, no caso da função $\lambda \mapsto R(\lambda : A)$, pela identidade do resolvente, temos,

$$R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda)R(\lambda : A)R(\mu : A),$$

para todo $\lambda, \mu \in \Gamma_r$. Assim,

$$\|R(\lambda : A) - R(\mu : A)\| \leq |\mu - \lambda| \|R(\lambda : A)\| \|R(\mu : A)\| \leq |\mu - \lambda| \frac{M}{|\lambda|} \frac{M}{|\mu|}.$$

Desse modo, fazendo $\mu \rightarrow \lambda$, obtemos que $\|R(\lambda : A) - R(\mu : A)\| \rightarrow 0$, garantindo a continuidade da função $\lambda \mapsto R(\lambda : A)$ em Γ_r . Assim, podemos definir, para cada $r \geq 1$ e $z \in \Delta(\alpha)$, o operador $T_r(z) : X \rightarrow X$ por

$$T_r(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda.$$

Logo, $T_r(z)$ é um operador linear para todo $z \in \Delta(\alpha)$. Na verdade, mostramos que $T_r(z) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $z \in \Delta(\alpha)$, ou seja, mostramos que existe $C_r > 0$ tal que $\|T_r(z)x\| \leq C_r \|x\|$, para todo $x \in X$. Para tanto, utilizamos os seguintes fatos:

$$(i) \|e^{\lambda z} R(\lambda : A)\| = |e^{\lambda z}| \|R(\lambda : A)\| \leq e^{Re(\lambda z)} \frac{M}{|\lambda|};$$

$$(ii) \lambda z = |\lambda z| e^{i(arg \lambda + arg z)} \text{ e assim, } Re(\lambda z) = |\lambda z| \cos(arg \lambda + arg z), \forall \lambda, z \in \mathbb{C}.$$

Agora, para facilitar a análise de $\|T_r(z)x\|$, dividimos a curva Γ em quatro partes, denotadas por $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e γ_4 tais que

$$T_r(z)x = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\gamma_1} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda + \int_{\gamma_2} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda + \int_{\gamma_3} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda + \int_{\gamma_4} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda \right].$$

Dessa maneira, temos os casos a seguir:

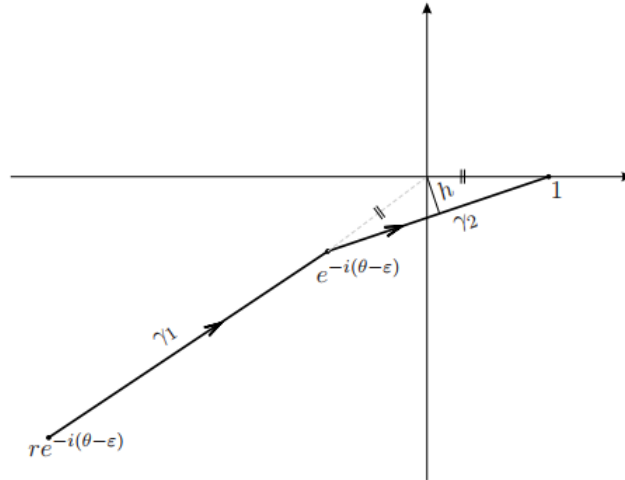
- (1) Seja $\overline{\gamma_1} : [1, r] \rightarrow \Gamma_r$ a curva definida por $\overline{\gamma_1}(t) = t e^{-i(\theta-\epsilon)}$ e considere a curva γ_1 como sendo a curva $\overline{\gamma_1}$ percorrida no sentido contrário, ou seja, percorrida de $r e^{-i(\theta-\epsilon)}$ para $e^{-i(\theta-\epsilon)}$. Assim,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_1} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right\| &= \left\| - \int_{\overline{\gamma_1}} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right\| \\ &= \left\| - \int_1^r e^{t e^{-i(\theta-\epsilon)} z} R(t e^{-i(\theta-\epsilon)} : A)x e^{-i(\theta-\epsilon)} dt \right\| \\ &\leq \int_1^r e^{Re(t e^{-i(\theta-\epsilon)} z)} \frac{M}{|t e^{-i(\theta-\epsilon)}|} \|x\| dt \\ &\leq M \|x\| \int_1^r \frac{e^{t e^{-i(\theta-\epsilon)} |z|}}{|t e^{-i(\theta-\epsilon)}|} dt \\ &= M \|x\| \int_1^r \frac{e^{t |z|}}{t} dt \leq M \|x\| \int_1^r e^{t |z|} dt = C_1 \|x\|, \end{aligned}$$

$$\text{onde } C_1 = M \left[\frac{e^{r |z|} - e^{|z|}}{|z|} \right].$$

- (2) Seja γ_2 a curva dada pelo segmento de reta de extremos $e^{-i(\theta-\epsilon)}$ e 1, orientada de $e^{-i(\theta-\epsilon)}$ para 1, como na figura abaixo.

Figura 2.2 – Curva γ_2 .



Fonte: (22, Figura 1.4, p. 31).

Desse modo,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_2} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x \, d\lambda \right\| &\leq \int_{\gamma_2} |e^{\lambda z}| \|R(\lambda : A)\| \|x\| \, d|\lambda| \\ &\leq \int_{\gamma_2} e^{Re(\lambda z)} \frac{M}{|\lambda|} \|x\| \, d|\lambda| \\ &\leq M \|x\| \int_{\gamma_2} \frac{e^{|\lambda||z|}}{|\lambda|} \, d|\lambda| \leq M \|x\| \int_{\gamma_2} \frac{e^{|z|}}{h} \, d|\lambda|, \end{aligned}$$

onde h é a altura do triângulo de vértices nos pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $e^{-i(\theta-\epsilon)}$.

Assim,

$$\left\| \int_{\gamma_2} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x \, d\lambda \right\| \leq \frac{M e^{|z|}}{h} \|x\| \int_{\gamma_2} d|\lambda| < C_2 \|x\|,$$

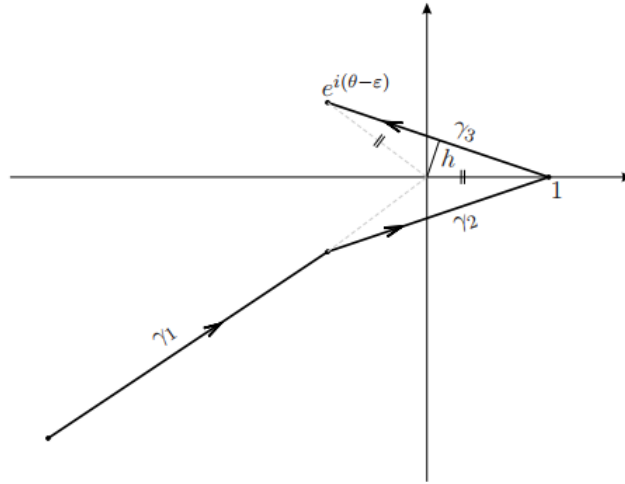
onde $C_2 = \left[2 \frac{M e^{|z|}}{h} \right]$ e $\int_{\gamma_2} d|\lambda|$ é o comprimento da curva γ_2 , o qual é menor que o diâmetro da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1.

- (3) Seja γ_3 a curva dada pelo segmento de reta de extremos 1 e $e^{i(\theta-\epsilon)}$, orientada de 1 para $e^{i(\theta-\epsilon)}$. Dessa forma, procedendo como no caso anterior, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\gamma_3} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x \, d\lambda \right\| &\leq \int_{\gamma_3} e^{|\lambda||z|} \frac{M}{|\lambda|} \|x\| \, d|\lambda| \\
&\leq M \|x\| \int_{\gamma_3} \frac{e^{|\lambda||z|}}{h} \, d|\lambda| \\
&= \left[\frac{M e^{|\lambda||z|}}{h} \int_{\gamma_3} d|\lambda| \right] \|x\| = C_3 \|x\|,
\end{aligned}$$

onde $C_3 = \left[2 \frac{M e^{|\lambda||z|}}{h} \right]$, h é a altura do triângulo de vértices nos pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $e^{i(\theta-\epsilon)}$, como ilustrado na figura a seguir e $\int_{\gamma_3} d|\lambda|$ é o comprimento da curva γ_3 .

Figura 2.3 – Curva γ_3 .



Fonte: (22, Figura 1.5, p. 32).

(4) Seja $\gamma_4 : [1, r] \rightarrow \Gamma_r$ a curva definida por $\gamma_4(t) = t e^{i(\theta-\epsilon)}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\gamma_4} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x \, d\lambda \right\| &= \left\| \int_1^r e^{t e^{i(\theta-\epsilon)} z} R(t e^{i(\theta-\epsilon)} : A)x e^{i(\theta-\epsilon)} \, dt \right\| \\
&\leq \int_1^r \left| e^{t e^{i(\theta-\epsilon)} z} \right| \frac{M}{|t e^{i(\theta-\epsilon)}|} \|x\| \left| e^{i(\theta-\epsilon)} \right| dt \\
&\leq \int_1^r e^{|t| |e^{i(\theta-\epsilon)} z|} \frac{M}{t} \|x\| dt \\
&= M \|x\| \int_1^r \frac{e^{t|z|}}{t} dt \\
&\leq M \|x\| \int_1^r e^{t|z|} dt = C_4 \|x\|,
\end{aligned}$$

onde $C_4 = M \left[\frac{e^{r|z|} - e^{|z|}}{|z|} \right]$.

Como $C_1 = C_4$ e $C_2 = C_3$, tomando $C_r = \max\{\frac{C_j}{4\pi}; j = 1, 2\}$, obtemos que

$$\|T_r(z)x\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x \, d\lambda \right\| \leq C_r \|x\|,$$

para todo $x \in X$. Portanto, $T_r(z) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $z \in \Delta(\alpha)$.

Por fim, considere a família de operadores $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$, definida por

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) \, d\lambda, \quad \forall z \in \Delta(\alpha)$$

e $T(0) = I$.

Note que, para $z \in \Delta(\alpha)$, $T(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} T_r(z)$. Assim, como $T_r(z) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $r \geq 1$ e a convergência anterior é uniforme, segue que $T(z) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $z \in \Delta(\alpha)$.

Agora, nos concentramos em mostrar que $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é um semigrupo analítico gerado pelo operador A . Para isso, precisamos de alguns resultados sobre integração no conjunto dos números complexos, que são consequências do Teorema e da Fórmula integral de Cauchy. Nesta seção omitimos a demonstração de tais resultados, porém, na próxima seção apresentamos resultados semelhantes, cujas demonstrações são apresentadas. Veja Lemas 2.50 e 2.51.

Lema 2.42. *Sejam $z \in \Delta(\alpha)$, $A \in (\theta, M)$ e Γ a curva descrita anteriormente, então os seguintes itens são satisfeitos:*

$$(i) \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} \, d\lambda = 0, \text{ para todo } \lambda' \text{ situado à direita de } \Gamma;$$

$$(ii) \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} \, d\lambda = 2\pi i;$$

$$(iii) \int_{\Gamma} e^{\lambda z} \, d\lambda = 0;$$

$$(iv) \int_{\Gamma} \frac{R(\lambda : A)}{\lambda} \, d\lambda = 0;$$

$$(v) \int_{|z|\Gamma} \frac{e^{\lambda \eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) \, d\lambda = \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda \eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) \, d\lambda, \text{ onde } \eta = \frac{z}{|z|}.$$

Demonstração. (13, Lema 1.8.5, p. 70). □

Lema 2.43. *Dado $\delta > 0$, seja Γ' a curva no plano complexo definida por*

$$\Gamma' = \{\lambda' \in \mathbb{C}; \lambda' = \lambda + \delta, \lambda \in \Gamma\}$$

com a orientação induzida por Γ . Então, para todo $z \in \Delta(\alpha)$, valem os seguintes itens:

$$(i) \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) \, d\lambda = \int_{\Gamma'} e^{\lambda z} R(\lambda : A) \, d\lambda;$$

$$(ii) \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda'z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda z}, \text{ para todo } \lambda \text{ situado à esquerda de } \Gamma'.$$

Demonstração. (13, Lema 1.8.6, p. 73). □

Finalmente estamos em condições de provar o principal resultado desta seção. O teorema a seguir especifica quando um operador A é o gerador de um semigrupo analítico.

Teorema 2.44. *Seja $A \in (\theta, M)$. Então, para cada $\epsilon > 0$ tal que $2\epsilon < \theta - \frac{\pi}{2}$, A é o gerador de um semigrupo analítico no setor $\Delta\left(\theta - \frac{\pi}{2} - 2\epsilon\right)$.*

Demonstração. Mostramos que a família $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ dada por

$$\begin{cases} T(0) &= I, \\ T(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda, \quad z \in \Delta(\alpha), \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\epsilon$ e Γ é a curva descrita anteriormente, é um semigrupo analítico cujo gerador infinitesimal é o operador A .

Iniciamos mostrando que $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ satisfaz as propriedades de semigrupo. Pela definição, $T(0) = I$. Agora, para $\rho \in \Delta(\alpha)$, pelo item (i) do Lema 2.43 e a identidade do resolvente, segue que

$$T(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda \rho} R(\lambda : A) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\lambda \rho} R(\lambda : A) d\lambda.$$

Assim, para $z, \eta \in \Delta(\alpha)$ e todo $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} T(z)T(\eta)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\lambda' \eta} R(\lambda' : A)x d\lambda' \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda z} R(\lambda : A) e^{\lambda' \eta} R(\lambda' : A)x d\lambda' d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda z} e^{\lambda' \eta} \left(\frac{R(\lambda : A) - R(\lambda' : A)}{\lambda' - \lambda} \right) x d\lambda' d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' \eta}}{\lambda' - \lambda} x d\lambda' d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} e^{\lambda' \eta} R(\lambda' : A) \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} x d\lambda d\lambda'. \end{aligned}$$

Assim, novamente pelo Lema 2.43, agora pelo item (ii), $\int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' \eta}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda \eta}$, visto que $\lambda \in \Gamma$ e Γ está à esquerda de Γ' . Mais ainda, pelo item (i) do Lema 2.42, segue que

$\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = 0$. Logo,

$$T(z)T(\eta)x = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) 2\pi i e^{\lambda \eta} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda(z+\eta)} R(\lambda : A)x d\lambda = T(z+\eta)x,$$

para todo $x \in X$, ou seja, $T(z+\eta) = T(z)T(\eta)$, para todo $z, \eta \in \Delta(\alpha)$.

Pela discussão anterior a este teorema, vimos que $T(z) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}$. Além disso, mostramos a seguir que a família $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é uniformemente limitada em $\Delta(\alpha) \cup \{0\}$.

Fazendo a mudança de variável $\mu = |z|\lambda$, com $z \in \Delta(\alpha)$, a curva Γ se transforma na curva $|z|\Gamma$ e assim, pelo item (v) do Lema 2.42, segue que

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu,$$

onde $\eta = \frac{z}{|z|} = e^{i(\arg z)}$. Ademais, como $A \in (\theta, M)$, temos $\left\| R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) \right\| \leq \frac{M|z|}{|\mu|}$. Logo,

$$\begin{aligned} \|T(z)\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|e^{\mu\eta}|}{|z|} \left\| R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) \right\| d|\mu| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|z|} \frac{M|z|}{|\mu|} d|\mu| \\ &= \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|\mu|} d|\mu| + \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|\mu|} d|\mu|, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde Γ_1 é a curva $\Gamma_r = \{\lambda \in \Gamma; |\lambda| < r\}$, quando $r = 1$. Note que, se $\mu \in \Gamma_1$, então $|\mu| \leq 1$ e assim,

$$Re(\mu\eta) = |\mu| |\eta| \cos(\arg(\mu\eta)) \leq 1,$$

implicando que

$$\frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|\mu|} d|\mu| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{e}{r_0} d|\mu| = \frac{M e}{2\pi r_0} |\Gamma_1|, \quad (2.3)$$

em que $r_0 = \inf\{|\lambda|; \lambda \in \Gamma_1\}$ e $|\Gamma_1| = \int_{\Gamma_1} d|\mu|$ é o comprimento da curva Γ_1 .

Além disso, como a curva $\Gamma \setminus \Gamma_1$ é formada pelas semirretas σ_1 e σ_2 , onde $\sigma_1(r) = r e^{i(\theta-\epsilon)}$, com $1 \leq r < \infty$, e σ_2 é a curva $\overline{\sigma_2}(r) = r e^{-i(\theta-\epsilon)}$, com $1 \leq r < \infty$, percorrida no sentido contrário, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|\mu|} d|\mu| &= \int_{\sigma_1} \frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|\mu|} d|\mu| + \int_{\sigma_2} \frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|\mu|} d|\mu| \\ &= \int_{\sigma_1} \frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|\mu|} d|\mu| - \int_{\overline{\sigma_2}} \frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|\mu|} d|\mu| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^\infty \frac{e^{Re(re^{i(\theta-\epsilon)}\eta)}}{r} |e^{i(\theta-\epsilon)}| dr - \int_1^\infty \frac{e^{Re(re^{-i(\theta-\epsilon)}\eta)}}{r} |e^{-i(\theta-\epsilon)}| dr \\
&= \int_1^\infty \frac{e^{Re(re^{i(\theta-\epsilon)}\eta)}}{r} dr - \int_1^\infty \frac{e^{Re(re^{-i(\theta-\epsilon)}\eta)}}{r} dr.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$Re(re^{i(\theta-\epsilon)}\eta) = |re^{i(\theta-\epsilon)}| |\eta| \cos((\theta - \epsilon) + \arg \eta) = r \cos((\theta - \epsilon) + \arg \eta),$$

com $-\alpha < \arg z < \alpha$, $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\epsilon$ e $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, ou seja,

$$\frac{\pi}{2} + \epsilon \leq \theta - \epsilon + \arg z \leq \frac{3\pi}{2} - 3\epsilon \leq \frac{3\pi}{2} - \epsilon,$$

implicando que $Re(re^{i(\theta-\epsilon)}\eta) \leq r \cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon)$, com $\cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon) < 0$. Assim, visto que $\frac{1}{r} \leq 1$, temos

$$\int_1^\infty \frac{e^{Re(re^{i(\theta-\epsilon)}\eta)}}{r} dr \leq \int_1^\infty e^{r \cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon)} dr = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{r \cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon)}}{\cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon)} \Big|_1^t \right] = -\frac{e^{\cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon)}}{\cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon)}.$$

Da mesma forma, obtemos que $Re(re^{-i(\theta-\epsilon)}\eta) = r \cos((-\theta + \epsilon) + \arg z)$, com

$$-\frac{3\pi}{2} + \epsilon \leq -\frac{3\pi}{2} + 3\epsilon \leq -\theta + \epsilon + \arg z \leq -\frac{\pi}{2} - \epsilon.$$

Desse modo, visto que $-\frac{1}{r} \leq 0 < 1$, segue que

$$-\int_1^\infty \frac{e^{Re(re^{-i(\theta-\epsilon)}\eta)}}{r} dr \leq \int_1^\infty e^{r \cos(-\frac{\pi}{2} - \epsilon)} dr = \int_1^\infty e^{r \cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon)} dr.$$

Consequentemente,

$$\int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|\mu|} d|\mu| \leq -\frac{2e^{\cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon)}}{\cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon)}. \quad (2.4)$$

Finalmente, de (2.2), (2.3) e (2.4), concluimos que

$$\|T(z)\| \leq \frac{M e}{2\pi r_0} |\Gamma_1| - \frac{M e^{\cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon)}}{\pi \cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon)} = M_0, \quad \forall z \in \Delta(\alpha),$$

ou seja, $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é uniformemente limitado em $z \in \Delta(\alpha)$.

Agora, mostramos que $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é fortemente contínuo, ou seja, provamos que $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$, para todo $x \in X$. Note, primeiramente, que

$$\begin{aligned}
R(\lambda : A)(\lambda - A) = I &\Leftrightarrow \lambda R(\lambda : A) - R(\lambda : A)A = I \\
&\Leftrightarrow \lambda R(\lambda : A) - I = R(\lambda : A)A \\
&\Leftrightarrow R(\lambda : A) - \lambda^{-1} = \frac{R(\lambda : A)A}{\lambda}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Sejam $z \in \Delta(\alpha)$, com $|z| < 1$, e $x \in \mathcal{D}(A)$. Pelo item (ii) do Lema 2.42, e de (2.5), obtemos

$$\begin{aligned}
T(z)x - x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x \, d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} x \, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x - \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} x \, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} (R(\lambda : A) - \lambda^{-1})x \, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z} R(\lambda : A)Ax}{\lambda} d\lambda,
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{e^{\lambda z} R(\lambda : A)Ax}{\lambda} \right\| &\leq \left\| \frac{e^{\lambda z} R(\lambda : A)}{\lambda} \right\| \|Ax\| \leq \frac{|e^{\lambda z}| \|R(\lambda : A)\|}{|\lambda|} \|Ax\| \leq \frac{e^{\operatorname{Re}(\lambda z)} M}{|\lambda|} \|Ax\| \\
&\leq \frac{M}{|\lambda|^2} \|Ax\|,
\end{aligned}$$

pois $2\pi - (\theta - \epsilon) < \arg \lambda < \theta - \epsilon$ e $-\theta + \frac{\pi}{2} + 2\epsilon < \arg z < \theta - \frac{\pi}{2} - 2\epsilon$, implicando que

$$\frac{\pi}{2} + \epsilon < \arg(\lambda z) < \frac{3\pi}{2},$$

com $\cos(\arg(\lambda z)) \leq 0$.

Além disso, como a função $\lambda \mapsto \frac{M}{|\lambda|^2} \|Ax\|$ é integrável sobre a curva Γ e

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda z} R(\lambda : A)}{\lambda} Ax = \frac{R(\lambda : A)}{\lambda} Ax,$$

com $\left\| \frac{e^{\lambda z} R(\lambda : A)}{\lambda} Ax \right\| \leq \frac{M}{|\lambda|^2} \|Ax\|$, pelo Teorema da convergência dominada e o item (iv) do Lema 2.42, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 0} (T(z)x - x) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z} R(\lambda : A)Ax}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda z} R(\lambda : A)Ax}{\lambda} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R(\lambda : A)Ax}{\lambda} d\lambda = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$.

Agora, seja $x \in X$. Assim, como $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$, ou seja, dado $\xi > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x\| < \frac{\xi}{2(M_0 + 1)}, \forall n > n_0.$$

Além disso, se $n_1 \in \mathbb{N}$ é tal que $n_1 > n_0$, então $x_{n_1} \in \mathcal{D}(A)$ e assim, $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x_{n_1} = x_{n_1}$. Deste modo, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |z| < \delta$, então $\|T(z)x_{n_1} - x_{n_1}\| < \frac{\xi}{2}$, o que nos permite concluir que, para $0 < |z| < \delta$,

$$\begin{aligned} \|T(z)x - x\| &\leq \|T(z)x - T(z)x_{n_1}\| + \|T(z)x_{n_1} - x_{n_1}\| + \|x_{n_1} - x\| \\ &\leq \|T(z)\| \|x - x_{n_1}\| + \|T(z)x_{n_1} - x_{n_1}\| + \|x_{n_1} - x\| \\ &\leq M_0 \frac{\xi}{2(M_0 + 1)} + \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2(M_0 + 1)} = \xi. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$, para todo $x \in X$.

A seguir, mostramos que $z \mapsto T(z)$ é uma função analítica em $\Delta(\alpha)$. Para tanto, vamos mostrar que $T(z)$ é o limite uniforme de uma sequência de funções analíticas.

Considerando, novamente, a mudança de variável $\mu = |z|\lambda$ em (2.1), com $z \in \Delta(\alpha)$, $\eta = \frac{z}{|z|}$ e $r \geq 1$, usando o item (v) do Lema 2.42 e separando a curva Γ em duas partes, temos

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_r} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu. \end{aligned}$$

Como $\Gamma \setminus \Gamma_r = \sigma_1 \cup \sigma_2$, onde $\sigma_1(\rho) = \rho e^{i(\theta - \epsilon)}$, com $r \leq \rho < \infty$, e σ_2 é a curva $\overline{\sigma_2}(\rho) = \rho e^{-i(\theta - \epsilon)}$, com $r \leq \rho < \infty$, percorrida no sentido contrário, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| T(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \right\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_r} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\sigma_1} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu + \int_{\sigma_2} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \right] \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left[\left\| \int_r^\infty \frac{e^{\rho e^{i(\theta-\epsilon)}\eta} e^{i(\theta-\epsilon)}}{|z|} R\left(\frac{\rho e^{i(\theta-\epsilon)}}{|z|} : A\right) d\rho \right\| \right. \\
&\quad \left. + \left\| - \int_r^\infty \frac{e^{\rho e^{-i(\theta-\epsilon)}\eta} e^{-i(\theta-\epsilon)}}{|z|} R\left(\frac{\rho e^{-i(\theta-\epsilon)}}{|z|} : A\right) d\rho \right\| \right] \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left[\int_r^\infty \frac{e^{Re(\rho e^{i(\theta-\epsilon)}\eta)}}{|z|} \frac{M|z|}{\rho} d\rho + \int_r^\infty \frac{e^{Re(\rho e^{-i(\theta-\epsilon)}\eta)}}{|z|} \frac{M|z|}{\rho} d\rho \right] \\
&\leq \frac{M}{2\pi} \left[\int_r^\infty e^{\rho \cos(\theta-\epsilon+\arg z)} d\rho + \int_r^\infty e^{\rho \cos(-\theta+\epsilon+\arg z)} d\rho \right] \\
&\leq \frac{M}{2\pi} \left[\int_r^\infty e^{\rho \cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon)} d\rho + \int_r^\infty e^{\rho \cos(-\frac{\pi}{2}-\epsilon)} d\rho \right] \\
&= \frac{M}{\pi} \int_r^\infty e^{\rho \cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon)} d\rho = \frac{M}{\pi} \frac{e^{r \cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}}{(-\cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon))} = \frac{M}{\pi} \frac{e^{-r \operatorname{sen} \epsilon}}{\operatorname{sen} \epsilon}.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| T(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \right\| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M}{\pi} \frac{e^{-r \operatorname{sen} \epsilon}}{\operatorname{sen} \epsilon} = 0.$$

Consequentemente, para todo $z \in \Delta(\alpha)$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda$ converge uniformemente para $T(z)$. Além disso, como Γ_r é uma curva simples de classe C^1 e a função $\lambda \mapsto e^{\lambda z} R(\lambda : A)$ é analítica em $\Delta(\theta)$, concluímos que a função $z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda$ é analítica em $\Delta(\alpha)$, para todo $r \geq 1$.

Portanto, como $T(z)$ é o limite uniforme de funções analíticas, concluímos que $z \mapsto T(z)$ é uma função analítica em $\Delta(\alpha)$.

Pelo que fizemos até agora, podemos concluir que $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$ é um semigrupo analítico, restando mostrar que A é seu gerador infinitesimal quando nos restringimos ao intervalo $[0, \infty)$.

Seja $x \in \mathcal{D}(A)$. Por (2.5) e do item (iii) do Lema 2.42, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} T(z)x &= \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} [e^{\lambda z} R(\lambda : A)x] d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} \lambda R(\lambda : A)x d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} (R(\lambda : A)A + I)x d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A)Ax d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} x d\lambda = T(z)Ax,
\end{aligned}$$

ou seja, $\frac{d}{dz}T(z)x = T(z)Ax$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. Logo,

$$\frac{1}{h} \int_0^h T(t)Ax dt = \frac{T(t)x}{h} \Big|_0^h = \frac{T(h)x - x}{h}. \quad (2.6)$$

Pelo fato de $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$, quando restrito a $[0, \infty)$ ser um C_0 -semigrupo, seja $B : \mathcal{D}(B) \subset X \rightarrow X$ seu gerador infinitesimal e mostramos que $B = A$. De fato, de (2.6), temos

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(t)Ax dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = Bx,$$

para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. Assim, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ e $A = B$ em $\mathcal{D}(A)$. Como, $\rho(A) \cap \rho(B) \neq \emptyset$, seja $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Desse modo, dado $x \in \mathcal{D}(B)$, considere $y = (\lambda - A)^{-1}(\lambda - B)x$. Então, $y \in \mathcal{D}(A)$ e

$$(\lambda - A)y = (\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}(\lambda - B)x = (\lambda - B)x,$$

o que implica que $(\lambda - B)(y - x) = 0$ e então, $x = y$, pois $(\lambda - B)$ é injetor.

Portanto, $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$ e assim, $A = B$, o que termina a demonstração do resultado. \square

No corolário a seguir apresentamos algumas propriedades adicionais do semigrupo $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$.

Corolário 2.45. *Seja $A \in (\theta, M)$. O semigrupo analítico $(T(z))_{z \in \Delta(\alpha) \cup \{0\}}$, obtido no teorema anterior e gerado por A , com $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\epsilon$, satisfaz as seguintes condições:*

- (i) *para todo $n \geq 1$, $T(z)x \in \mathcal{D}(A^n)$, para todo $x \in X$ e todo $z \in \Delta(\alpha)$;*
- (ii) *para todo $n \geq 1$ existe uma constante $M_n(\epsilon)$, que só depende de ϵ , tal que*

$$\|A^n T(z)\| \leq \frac{M_n(\epsilon)}{|z|^n}, \text{ para todo } z \in \Delta(\alpha).$$

Demonstração. (i) Note que, para $x \in X$, $z \in \Delta(\alpha)$ e $h \in (0, \infty)$, temos

$$\frac{T(h) - I}{h} T(z)x = \frac{T(h+z)x - T(z)x}{h}.$$

Mais ainda, se $v = h + z$, obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} T(z)x = \lim_{v \rightarrow z^+} \frac{T(v)x - T(z)x}{v - z}. \quad (2.7)$$

Pelo fato da função $z \mapsto T(z)$ ser analítica em $\Delta(\alpha)$, concluímos que o limite (2.7) existe e então, $T(z)x \in \mathcal{D}(A)$, para todo $x \in X$ e todo $z \in \Delta(\alpha)$. Além disso,

$$A^n T(z) = A^n T\left(\frac{z}{n} + \frac{z}{n} + \cdots + \frac{z}{n}\right) = A^n \left[T\left(\frac{z}{n}\right)\right]^n = \left[AT\left(\frac{z}{n}\right)\right]^n, \quad \forall n \geq 1.$$

Dessa forma, $T(z)x \in \mathcal{D}(A^n)$, para todo $x \in X$, $z \in \Delta(\alpha)$ e $n \geq 1$.

(ii) Já vimos na demonstração do teorema anterior que, fazendo a mudança de variável $\mu = |z|\lambda$,

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu,$$

onde $\eta = \frac{z}{|z|}$. Em adição, pelas igualdades (2.5) e pelo fato de A ser um operador fechado, obtemos

$$AT(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} AR\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} \left[\frac{\mu}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) - I \right] d\mu,$$

para todo $z \in \Delta(\alpha)$. Logo,

$$\begin{aligned} \|AT(z)\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|z|} \left[\frac{|\mu|}{|z|} \left\| R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) \right\| + \|I\| \right] d|\mu| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|z|} \left[\frac{|\mu|}{|z|} \frac{M|z|}{|\mu|} + 1 \right] d|\mu| \\ &= \frac{(M+1)}{2\pi|z|} \int_{\Gamma} e^{Re(\mu\eta)} d|\mu| \\ &= \frac{(M+1)}{2\pi|z|} \left[\int_{\Gamma_1} e^{Re(\mu\eta)} d|\mu| + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} e^{Re(\mu\eta)} d|\mu| \right] \\ &\leq \frac{(M+1)}{2\pi|z|} \left[e^{|\Gamma_1|} + 2 \int_1^{\infty} e^{r \cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon)} dr \right] \\ &= \frac{(M+1)}{2\pi|z|} \left[e^{|\Gamma_1|} + 2 \int_1^{\infty} e^{-r \text{sene}\epsilon} dr \right] \\ &= \frac{(M+1)}{2\pi|z|} \left[e^{|\Gamma_1|} + \frac{2e^{-r \text{sene}\epsilon}}{\text{sene}\epsilon} \right] = \frac{M_1(\epsilon)}{|z|}, \quad \forall z \in \Delta(\alpha), \end{aligned}$$

com $M_1(\epsilon) = \frac{(M+1)}{2\pi} \left[e^{|\Gamma_1|} + \frac{2e^{-r \text{sene}\epsilon}}{\text{sene}\epsilon} \right]$, o que justifica o item (ii) para o caso $n = 1$. Para $n > 1$, usando o item (i), temos

$$\begin{aligned} \|A^n T(z)\| &= \left\| \left[AT\left(\frac{z}{n}\right) \right]^n \right\| \leq \left\| AT\left(\frac{z}{n}\right) \right\|^n \\ &\leq \left(\frac{M_1(\epsilon)}{\left|\frac{z}{n}\right|} \right)^n = \frac{n^n M_1(\epsilon)^n}{|z|^n} \\ &= \frac{M_n(\epsilon)}{|z|^n}, \quad \forall z \in \Delta(\alpha), \end{aligned}$$

onde $M_n(\epsilon) = n^n M_1(\epsilon)$, o que conclui a demonstração do corolário.

□

Operadores setoriais aparecem frequentemente em aplicações, já que muitos operadores diferenciais elípticos são setoriais quando considerados em espaços L^p de Lebesgue ou em espaços de funções contínuas, veja, por exemplo (11, Theorem 3.1.3, p. 73) e (11, Theorem 3.1.7, p. 78). Entretanto, quando olhamos para espaços de funções mais regulares, como o espaços das funções Hölder contínuas, obtemos que estes operadores não são setoriais, veja (11, Example 3.1.33, p. 110). Nestes casos a teoria para operadores setoriais não pode ser utilizada. A seguir apresentamos um exemplo de um operador que não é setorial, mas que também apresenta uma estimativa do resolvente.

Exemplo 2.46. Considere $X = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ o espaço das funções contínuas de \mathbb{R} em \mathbb{C}^2 que se anulam no infinito. Dessa forma, para cada $f \in X$, existem $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, tais que $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$. O espaço X dotado da norma $\|f\|_X = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_1(t)| + \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_2(t)|$ é um espaço de Banach.

Fixando $\alpha \in (0, 1)$, considere $\gamma = \alpha - 1$. Para $t \in \mathbb{R}$ considere a matriz

$$q(t) = \begin{bmatrix} 1 + t^2 + i(1 + t^2) & t^{4+2\gamma} \\ 0 & 1 + t^2 - i(1 + t^2) \end{bmatrix}$$

e defina $\mathcal{D}(A) = \{f \in X; qf \in X\}$ e o operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ tal que $A(f)(t) = q(t)f(t)$. Neste caso A é um operador fechado. De fato, para ver isto note, antes, que A é inversível, com $A^{-1}(f)(t) = q^{-1}(t)f(t)$, e

$$q^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2(1+t^2)} & \frac{-t^{4+2\gamma}}{2(1+t^2)^2} \\ 0 & \frac{1+i}{2(1+t^2)} \end{bmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Desse modo, dado $f \in X$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, $t \in \mathbb{R}$, temos $\|A^{-1}(f)\|_X = \|q^{-1}f\|_X = \|g\|_X$, em que $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$, $t \in \mathbb{R}$, com $g_1(t) = \frac{(1-i)}{2(1+t^2)}f_1(t) - \frac{t^{4+2\gamma}}{2(1+t^2)^2}f_2(t)$ e $g_2(t) = \frac{(1+i)}{2(1+t^2)}f_2(t)$. Observe ainda que, como $1 \leq 1+t^2$, $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\left| \frac{1-i}{2(1+t^2)}f_1(t) \right| \leq \frac{|1-i|}{2}|f_1(t)| \text{ e } |g_2(t)| \leq \frac{|1+i|}{2}|f_2(t)|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Também, a função $t \mapsto \frac{t^{4+2\gamma}}{(1+t^2)^2}$ é contínua em \mathbb{R} e

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{t^{4+2\gamma}}{(1+t^2)^2} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{t^{2\gamma}}{\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1} = 0,$$

o que garante que esta função é limitada em \mathbb{R} .

Seja $C_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{t^{4+2\gamma}}{(1+t^2)^2}$. Então,

$$\begin{aligned} |g_1(t)| &\leq \left| \frac{(1-i)}{2(1+t^2)} f_1(t) \right| + \left| \frac{t^{4+2\gamma}}{2(1+t^2)^2} f_2(t) \right| \\ &\leq \frac{|1-i|}{2} |f_1(t)| + \frac{1}{2} C_1 |f_2(t)| \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_1(t)| + \frac{C_1}{2} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_2(t)| \\ &\leq C \left[\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_1(t)| + \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_2(t)| \right] = C \|f\|_X, \end{aligned}$$

onde $C = \max \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{C_1}{2} \right\}$. Isto é, mostramos que $|g_1(t)| \leq C \|f\|_X$, $\forall t \in \mathbb{R}$, e consequentemente, obtemos $\sup_{t \in \mathbb{R}} |g_1(t)| \leq C \|f\|_X$.

Analogamente, temos

$$\begin{aligned} |g_2(t)| &\leq \left| \frac{(1+i)}{2(1+t^2)} f_2(t) \right| \leq \frac{|1+i|}{2} |f_2(t)| \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_2(t)| \leq C_1 \left[\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_2(t)| + \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_1(t)| \right] \\ &= C_1 \|f\|_X, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

e então, $\sup_{t \in \mathbb{R}} |g_2(t)| \leq C \|f\|_X$.

Portanto, para todo $f \in X$,

$$\begin{aligned} \|A^{-1}(f)\|_X &= \|g\|_X = \sup_{t \in \mathbb{R}} |g_1(t)| + \sup_{t \in \mathbb{R}} |g_2(t)| \\ &\leq 2C \|f\|_X, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

garantindo que $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Dessa forma, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{D}(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$, para algum $x \in X$, e $Ax_n \rightarrow y$, para algum $y \in X$. A fim de mostrarmos que A é fechado, basta provarmos que $x \in \mathcal{D}(A)$ e $Ax = y$. Com efeito, como $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\|A^{-1}y - x\|_X \leq \|A^{-1}y - x_n\|_X + \|x_n - x\|_X.$$

Além disso, como $\|A^{-1}y - x_n\|_X = \|A^{-1}y - A^{-1}Ax_n\|_X \leq \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|y - Ax_n\|_X$, obtemos

$$\|A^{-1}y - x\|_X \leq \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|y - Ax_n\|_X + \|x_n - x\|_X.$$

Aplicando o limite de ambos os lados concluímos que $\|A^{-1}y - x\|_X = 0$ e, conseqüentemente, $A^{-1}y = x$, ou seja, $x \in \mathcal{D}(A)$ e $Ax = y$. Portanto, A é fechado.

Agora, vamos mostrar que $\sigma(A) = \{x \pm ix; x > 1\}$. Como A é fechado, para verificar que $z \in \sigma(A)$ basta verificar que $zI - A$ não é bijetor, o que é equivalente a mostrar que

$$\begin{vmatrix} z - a & -t^{4+2\gamma} \\ 0 & z - \bar{a} \end{vmatrix} = 0,$$

onde $a = 1 + t^2 + i(1 + t^2)$, o que ainda é equivalente a igualdade $z^2 - 2\operatorname{Re}(a)z + |a|^2 = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} z &= \frac{2\operatorname{Re}(a) \pm \sqrt{4(\operatorname{Re}(a))^2 - 4|a|^2}}{2} = \frac{2(1 + t^2) \pm \sqrt{4(1 + t^2)^2 - 4(2(1 + t^2))^2}}{2} \\ &= \frac{2(1 + t^2) \pm \sqrt{-4(1 + t^2)^2}}{2} \\ &= (1 + t^2) \pm i(1 + t^2). \end{aligned}$$

Dessa forma $\sigma(A) = \{z \in \mathbb{C}; z = x \pm ix, x > 1\}$, o que garante a existência de $\phi \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ tal que $\sigma(A) \subset \Delta(\phi)$.

Além disso, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta(\phi)$,

$$(zI - A)^{-1}(f)(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z - a} & \frac{t^{4+2\gamma}}{(z - a)(z - \bar{a})} \\ 0 & \frac{1}{z - \bar{a}} \end{bmatrix} f(t)$$

e existe $M > 0$, com $M = M(\phi, \gamma)$, tal que

$$\|(zI - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M |z|^\gamma = \frac{M}{|z|^{1-\alpha}}.$$

Portanto, como $\alpha \in (0, 1)$, segue que $1 - \alpha \neq 1$ e então, A não é um operador setorial. Mais detalhes deste exemplo podem ser encontrados em (14, Example 2.4, p. 44).

Este fato motiva a definição de operadores quase setoriais, que são operadores que possuem uma certa deficiência na estimativa do resolvente. Na próxima seção apresentamos tal definição e mostramos que estes operadores, de uma certa forma, geram um semigrupo.

2.6 Semigrupos de crescimento de ordem α

Iniciamos esta seção com a definição de operadores quase setoriais. Este tipo de operadores, bem como algumas propriedades que apresentamos na sequência, serão utilizados no próximo capítulo.

Definição 2.47. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado. Dizemos que A é um operador quase setorial se existirem constantes $M > 0$, $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\alpha \in (0, 1)$, tais que:*

$$(i) \quad \sigma(A) \subset \Delta(\phi) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; |\arg z| < \phi\} \cup \{0\};$$

$$(ii) \quad \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Delta(\phi).$$

Dizemos que a estimativa do resolvente que aparece na definição anterior é deficiente, pois $1 - \alpha < 1$. Neste sentido, é impossível aplicar os resultados de geração para semigrupos fortemente contínuos para um operador quase setorial. De fato, nesta seção mostramos que se A é um operador quase setorial, então o operador $-A$ gera um semigrupo onde a condição de continuidade da função $t \mapsto T(t)x$ falha em $t = 0$.

Contudo, baseados na teoria de operadores setoriais, veremos em quais condições podemos associar a um operador quase setorial uma família de operadores lineares limitados. Com este intuito, apresentamos os semigrupos de crescimento de ordem α .

Este tipo de semigrupos foram investigados primeiramente por Da Prato, veja (16), para o caso em que α é um inteiro não negativo. Em (18) o autor estende a teoria para o caso em que α é um número real positivo. A seguir apresentamos a definição de semigrupo de crescimento de ordem α , inspirada na definição apresentada por Periago e Straub, em (14).

Definição 2.48. *Seja $\alpha > 0$. Uma família $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados é dito um semigrupo de crescimento de ordem α se:*

$$(i) \quad T(0) = I, \text{ onde } I \text{ é o operador identidade em } X;$$

$$(ii) \quad T(t+s) = T(t)T(s), \text{ para todo } t, s > 0;$$

$$(iii) \quad t \mapsto T(t)x \text{ é contínua para } t > 0 \text{ e } x \in X;$$

$$(iv) \quad \text{Se } T(t)x = 0 \text{ para todo } t > 0, \text{ então } x = 0;$$

$$(v) \quad \|t^\alpha T(t)\| \text{ é limitado quando } t \text{ tende a zero.}$$

Como estamos interessados no operador $-A$, com o intuito de simplificar a notação, definimos, a seguir, operadores de classe (α, θ, M) .

Definição 2.49. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado. Dizemos que A é de classe (α, θ, M) , onde $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, e escrevemos $A \in (\alpha, \theta, M)$, se:*

$$(i) \quad \Delta(\theta) = \{z \in \mathbb{C}; |\arg z| \leq \theta\} \subset \rho(A);$$

$$(ii) \quad \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}}, \quad \forall \lambda \in \Delta(\theta) \setminus \{0\}.$$

Por meio de uma argumentação análoga à realizada na Observação 2.41, concluímos que se A é um operador quase setorial, então o operador $-A \in (\alpha, \theta, M)$, onde $\theta = \pi - \phi$. Dessa maneira, a partir de agora, trabalhamos com um operador $A \in (\alpha, \theta, M)$, em que $\theta = \pi - \phi$, para algum $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, já que ele é exatamente o operador que estamos interessados, e mostramos que A é o gerador de um semigrupo de crescimento de ordem α .

Denotamos por Γ a fronteira do setor $\Delta(\theta)$, orientada de modo que a parte imaginária é crescente, e definimos

$$\begin{cases} T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, & \text{se } t > 0, \\ T(0) = I. \end{cases} \quad (2.8)$$

A integral (2.8) converge para todo $t > 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_0^{\infty} e^{re^{i\theta}t} R(re^{i\theta} : A) e^{i\theta} dr - \int_0^{\infty} e^{re^{-i\theta}t} R(re^{-i\theta} : A) e^{-i\theta} dr \right\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} |e^{re^{i\theta}t}| \|R(re^{i\theta} : A)\| |e^{i\theta}| dr \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} |e^{re^{-i\theta}t}| \|R(re^{-i\theta} : A)\| |e^{-i\theta}| dr \right] \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{Re(re^{i\theta}t)} \frac{M}{|re^{i\theta}|^{1-\alpha}} dr + \int_0^{\infty} e^{Re(re^{-i\theta}t)} \frac{M}{|re^{-i\theta}|^{1-\alpha}} dr \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{rt \cos \theta} \frac{M}{r^{1-\alpha}} dr + \int_0^{\infty} e^{rt \cos \theta} \frac{M}{r^{1-\alpha}} dr \right] \\ &= \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} e^{rt \cos \theta} r^{\alpha-1} dr = \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} e^{rt \cos(\pi-\phi)} r^{\alpha-1} dr = \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-rt \cos \phi} r^{\alpha-1} dr. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $u = rt \cos \phi$, obtemos

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &\leq \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-rt \cos \phi} r^{\alpha-1} dr \\ &= \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{t \cos \phi} \right)^{\alpha-1} \frac{du}{t \cos \phi} \\ &= \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} t^{-\alpha} (\cos \phi)^{-\alpha} du \\ &= \frac{M (\cos \phi)^{-\alpha} t^{-\alpha}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du = \frac{\Gamma(\alpha) M (\cos \phi)^{-\alpha} t^{-\alpha}}{\pi} < \infty. \end{aligned}$$

Dessa forma, para $t > 0$ e $x \in X$, obtemos

$$\|T(t)x\| \leq \frac{\Gamma(\alpha) M \cos^{-\alpha} \phi t^{-\alpha}}{\pi} \|x\|,$$

ou seja $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t > 0$. Mais ainda, fazendo $C = \frac{\Gamma(\alpha)M \cos^{-\alpha} \phi}{\pi}$, concluímos que para todo $t > 0$,

$$\|T(t)\| \leq Ct^{-\alpha}.$$

Nosso objetivo é mostrar que a família $(T(t))_{t \geq 0}$, com $T(0) = I$, é um semigrupo de crescimento de ordem α . Para tanto, necessitamos de alguns resultados auxiliares.

Lema 2.50. *Sejam $t > 0$, $A \in (\alpha, \theta, M)$ e Γ a curva descrita anteriormente. Então:*

$$(i) \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = 0, \text{ para todo } \lambda' \text{ à direita de } \Gamma;$$

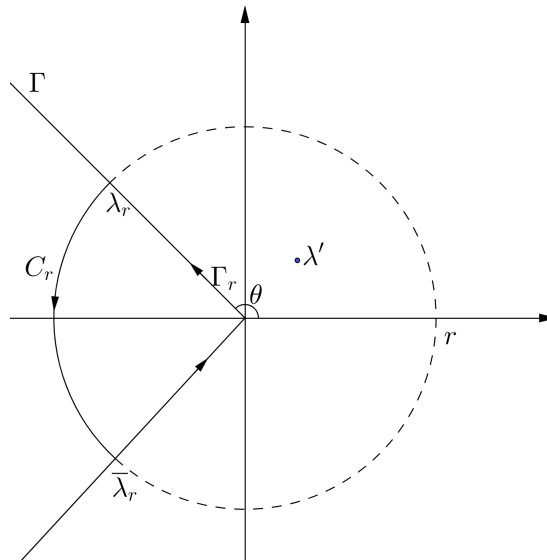
$$(ii) \int_{\Gamma} \lambda^n e^{\lambda t} d\lambda = 0, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Demonstração. (i) De forma análoga à feita na seção anterior, considere a curva $\Gamma_r = \{\lambda \in \Gamma; |\lambda| < r\}$, $r > 0$, e os pontos $\lambda_r = re^{i\theta}$ e $\bar{\lambda}_r = re^{-i\theta}$. Além disso, considere

$$C_r = \{\eta \in \mathbb{C}; |\eta| = r, \text{ com } \eta \text{ à esquerda de } \Gamma_r \text{ e com extremos } \lambda_r \text{ e } \bar{\lambda}_r\},$$

orientada de λ_r para $\bar{\lambda}_r$, veja a figura a seguir.

Figura 2.4 – λ' à direita de Γ .



Fonte: elaborado pelo autor.

Dessa forma, como a função $\lambda \mapsto \frac{e^{\lambda t}}{\lambda' - \lambda}$ é analítica sobre a curva Γ_r e na região à esquerda de Γ_r , o Teorema de Cauchy (Teorema A.10) garante que

$$\int_{\Gamma_r \cup C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = 0,$$

$$\text{ou seja, } \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = - \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \lambda'} d\lambda.$$

Assim, considerando $m_r = \inf_{\lambda \in C_r} |\lambda - \lambda'|$, como $\theta \leq \arg \lambda \leq 2\pi - \theta$, para todo $\lambda \in C_r$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \lambda'} d\lambda \right| &\leq \left| \int_{\theta}^{2\pi-\theta} \frac{e^{re^{i\varphi}t} ire^{i\varphi}}{e^{re^{i\varphi}} - \lambda'} d\varphi \right| \\ &\leq \int_{\theta}^{2\pi-\theta} \frac{e^{Re(re^{i\varphi}t)} r}{m_r} d\varphi \\ &= \int_{\theta}^{2\pi-\theta} \frac{e^{rt \cos \varphi} r}{m_r} d\varphi \\ &\leq \int_{\theta}^{2\pi-\theta} \frac{e^{rt \cos \theta} r}{m_r} d\varphi \\ &= \frac{r e^{rt \cos \theta}}{m_r} (2\pi - \theta - \theta) = \frac{2r(\pi - \theta) e^{-rt \cos \phi}}{m_r} = \frac{2r(\pi - \theta)}{m_r e^{rt \cos \phi}}. \end{aligned}$$

Como $m_r \rightarrow \infty$, quando $r \rightarrow \infty$, concluímos que $\frac{2r(\pi - \theta)}{m_r e^{rt \cos \phi}} \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$ e assim,

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \lambda'} d\lambda = 0.$$

(ii) Como no item anterior, considere as curvas Γ_r e C_r . Assim, como a função $\lambda \mapsto \lambda^n e^{\lambda t}$ é analítica sobre a curva $\Gamma_r \cup C_r$ e no interior da região delimitada por $\Gamma_r \cup C_r$, pelo Teorema de Cauchy (Teorema A.10),

$$\int_{\Gamma_r} \lambda^n e^{\lambda t} d\lambda = - \int_{C_r} \lambda^n e^{\lambda t} d\lambda.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left| - \int_{C_r} \lambda^n e^{\lambda t} d\lambda \right| &= \left| \int_{\theta}^{2\pi-\theta} (re^{i\varphi})^n e^{re^{i\varphi}t} ire^{i\varphi} d\varphi \right| \\ &\leq \int_{\theta}^{2\pi-\theta} r^{n+1} e^{rt \cos \varphi} d\varphi \\ &\leq \int_{\theta}^{2\pi-\theta} r^{n+1} e^{rt \cos \theta} d\varphi \\ &= r^{n+1} e^{rt \cos \theta} (2\pi - 2\theta) = \frac{2r^{n+1}(\pi - \theta)}{e^{rt \cos \phi}}. \end{aligned}$$

Como $\frac{2r^{n+1}(\pi - \theta)}{e^{rt \cos \phi}} \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$, concluímos que

$$\int_{\Gamma} \lambda^n e^{\lambda t} d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \lambda^n e^{\lambda t} d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} \lambda^n e^{\lambda t} d\lambda = 0.$$

□

Lema 2.51. Dado $\delta > 0$, seja Γ' a curva do plano complexo definida por

$$\Gamma' = \{\lambda' \in \mathbb{C}; \lambda' = \lambda + \delta, \lambda \in \Gamma\},$$

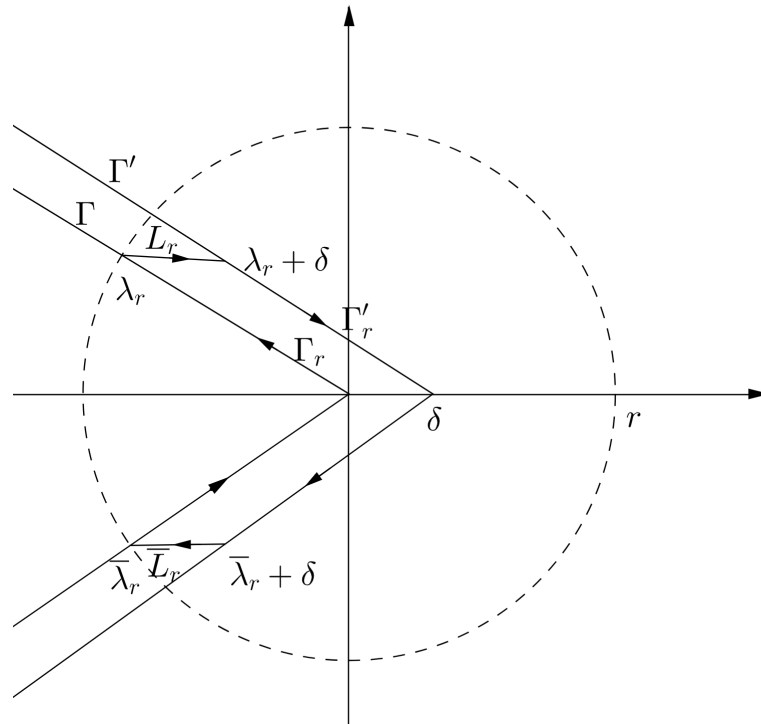
com orientação induzida por Γ . Então, para todo $t > 0$, temos:

$$(i) \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = \int_{\Gamma'} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda;$$

$$(ii) \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda t}, \text{ para todo } \lambda \text{ situado à esquerda de } \Gamma'.$$

Demonstração. (i) Assim como no Lema 2.50, para $r > 0$, consideramos os pontos λ_r e $\bar{\lambda}_r$ na curva Γ_r e, além disso, consideramos a curva Γ'_r contida em Γ' , com extremos $\lambda_r + \delta$ e $\bar{\lambda}_r + \delta$. Mais ainda, sejam L_r o segmento de extremos λ_r e $\lambda_r + \delta$ e \bar{L}_r o segmento de extremos $\bar{\lambda}_r$ e $\bar{\lambda}_r + \delta$. Observe a figura abaixo.

Figura 2.5 – Contorno R_r .



Fonte: elaborado pelo autor.

Dessa forma, como a função $\lambda \mapsto e^{\lambda t} R(\lambda : A)$ é analítica no contorno $R_r = \Gamma_r \cup L_r \cup \Gamma'_r \cup \bar{L}_r$ e no interior da região delimitada por R_r , pelo Teorema de Cauchy (Teorema A.10), temos

$$\int_{R_r} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = 0, \quad (2.9)$$

ou seja,

$$\int_{\Gamma_r} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda + \int_{\overline{L_r}} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = - \int_{L_r} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda + \int_{\Gamma'_r} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda.$$

Observe que, para r suficientemente grande, $Re(\lambda) < 0$ e $|\lambda| \geq |\lambda_r + \delta|$, para todo $\lambda \in L_r$. E mais,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{L_r} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda \right\| &\leq \int_{L_r} e^{Re(\lambda t)} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \\ &\leq \int_{L_r} e^{t Re(\lambda)} \frac{M}{|\lambda_r + \delta|^{1-\alpha}} d|\lambda| \\ &\leq \frac{M}{|\lambda_r + \delta|^{1-\alpha}} \int_{L_r} d|\lambda| = \frac{M \delta}{|\lambda_r + \delta|^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Dessa forma, quando $r \rightarrow \infty$, obtemos $\frac{1}{|\lambda_r + \delta|^{1-\alpha}} \rightarrow 0$, ou seja,

$$\int_{L_r} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda \rightarrow 0, \text{ quando } r \rightarrow \infty.$$

De modo análogo, obtemos que

$$\int_{\overline{L_r}} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda \rightarrow 0, \text{ quando } r \rightarrow \infty.$$

Portanto, por (2.9), fazendo $r \rightarrow \infty$, concluimos que

$$\int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = \int_{\Gamma'} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda.$$

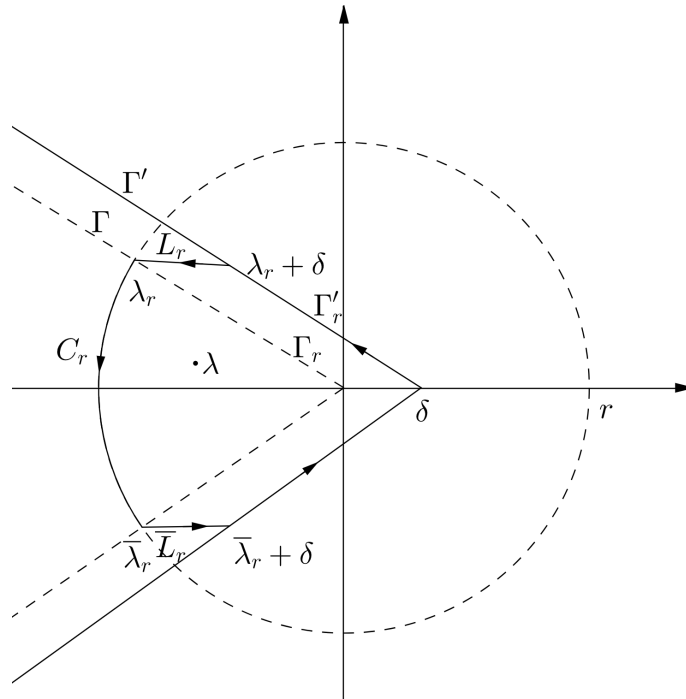
- (ii) Dado λ à esquerda de Γ' , escolha $r > 0$ suficientemente grande de modo que λ esteja no interior da região delimitada pela curva fechada $R_r = \Gamma'_r \cup L_r \cup C_r \cup \overline{L_r}$, onde L_r e $\overline{L_r}$ são os segmentos descritos no item (i) e a curva C_r é a mesma descrita no item (i) do Lema 2.50, como representado na figura 2.6.

Desse modo, a aplicação $\lambda' \mapsto e^{\lambda' t}$ é analítica nesta região e então, pela Fórmula integral de Cauchy (Teorema A.9), temos

$$\int_{R_r} \frac{e^{\lambda' t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda t}.$$

Agora, seja $m_r = \inf\{|\lambda' - \lambda|, \lambda' \in L_r\}$. Então, $\frac{1}{m_r} \geq \frac{1}{|\lambda' - \lambda|}$, para todo $\lambda' \in L_r$, e assim,

Figura 2.6 – λ situado no interior da região delimitada pela curva R_r .



Fonte: elaborado pelo autor.

$$\left| \int_{L_r} \frac{e^{\lambda' t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \right| \leq \int_{L_r} \frac{e^{Re(\lambda' t)}}{|\lambda' - \lambda|} d|\lambda'| \leq \frac{1}{m_r} \int_{L_r} e^{t Re(\lambda')} d|\lambda'| \leq \frac{\delta}{m_r},$$

ou seja, $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{L_r} \frac{e^{\lambda' t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 0$. De modo análogo obtemos que $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{L}_r} \frac{e^{\lambda' t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 0$. Além disso, usando uma argumentação semelhante à usada na demonstração do item (i) do Lema 2.50, concluímos que $\int_{C_r} \frac{e^{\lambda' t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$.

Portanto, como

$$\begin{aligned} 2\pi i e^{\lambda t} &= \int_{R_r} \frac{e^{\lambda' t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \\ &= \int_{C_r} \frac{e^{\lambda' t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' + \int_{\bar{L}_r} \frac{e^{\lambda' t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' + \int_{\Gamma'_r} \frac{e^{\lambda' t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' + \int_{L_r} \frac{e^{\lambda' t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda', \end{aligned}$$

obtemos

$$2\pi i e^{\lambda t} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{R_r} \frac{e^{\lambda' t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda' t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda'.$$

□

O teorema a seguir traz algumas propriedades da família $(T(t))_{t \geq 0}$ definida em (2.8).

Teorema 2.52. A família $(T(t))_{t \geq 0}$, definida em (2.8), satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s > 0$;

(ii) $AT(t)x = T(t)Ax, \forall t > 0$ e cada $x \in \mathcal{D}(A)$;

(iii) $T(\cdot) \in C^1((0, \infty), \mathcal{L}(X))$ e $\frac{d}{dt}T(t) = AT(t), \forall t > 0$;

(iv) para todo $n \geq 0$, $A^n T(\cdot) \in C((0, \infty), \mathcal{L}(X))$ e existe $C_n > 0$ tal que $\|A^n T(t)\| \leq \frac{C_n}{t^{n+\alpha}}, \forall t > 0$.

Demonstração. (i) Pelo item (i) do Lema 2.51, para todo $u > 0$ e $x \in X$,

$$T(u)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda u} R(\lambda : A) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\lambda' u} R(\lambda' : A) d\lambda'.$$

Assim, dados $t, s > 0$ e $x \in X$, usando a identidade do resolvente, temos

$$\begin{aligned} T(t)T(s)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\lambda' s} R(\lambda' : A) x d\lambda' \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda t} R(\lambda : A) e^{\lambda' s} R(\lambda' : A) x d\lambda' d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda t} e^{\lambda' s} \left(\frac{R(\lambda : A) - R(\lambda' : A)}{\lambda' - \lambda} \right) x d\lambda' d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' s}}{\lambda' - \lambda} x d\lambda' d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} e^{\lambda' s} R(\lambda' : A) \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda' - \lambda} x d\lambda d\lambda'. \end{aligned}$$

Note ainda que se $\lambda \in \Gamma$, segue que λ está situado à esquerda de Γ' e então, pelo item (ii) do Lema 2.51, $\int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' s}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda s}$. Além disso, se $\lambda' \in \Gamma'$, λ' está à direita de Γ e assim, pelo item (i) do Lema 2.50, $\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda' - \lambda} d\lambda = 0$. Logo, concluímos que

$$\begin{aligned} T(t)T(s)x &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) 2\pi i e^{\lambda s} x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda(t+s)} R(\lambda : A) x d\lambda = T(t+s)x, \end{aligned}$$

para todo $x \in X$ e $\forall t, s > 0$.

(ii) Sejam $t > 0$ e $x \in \mathcal{D}(A)$. Como A é um operador fechado, segue que

$$AT(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} A e^{\lambda t} R(\lambda : A) x d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) A x d\lambda = T(t)Ax,$$

ou seja, $AT(t)x = T(t)Ax, \forall t > 0$ e $x \in \mathcal{D}(A)$.

(iii) Primeiramente, considerando a curva $\Gamma_R = \{\lambda \in \Gamma; |\lambda| > R\} \cup \{\eta \in \mathbb{C}; |\eta| = R \text{ e } |\arg \eta| \leq \theta\}$, com $R > 0$, note que

$$\int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda - \int_{\Gamma_R} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = \int_{\Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \bar{C}_R} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda,$$

onde Γ^1 é o segmento de reta unindo os pontos $Re^{-i\theta}$ e zero, Γ^2 é o segmento unindo zero e $Re^{i\theta}$ e \bar{C}_R é a curva $C_R = \{\eta \in \mathbb{C}; |\eta| = R \text{ e } |\arg \eta| \leq \theta\}$ percorrida no sentido contrário. Desse modo, como $\Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \bar{C}_R$ é uma curva fechada e a função $\lambda \mapsto e^{\lambda t} R(\lambda : A)$ é analítica na região delimitada por esta curva, o Teorema de Cauchy (Teorema A.10), nos garante que

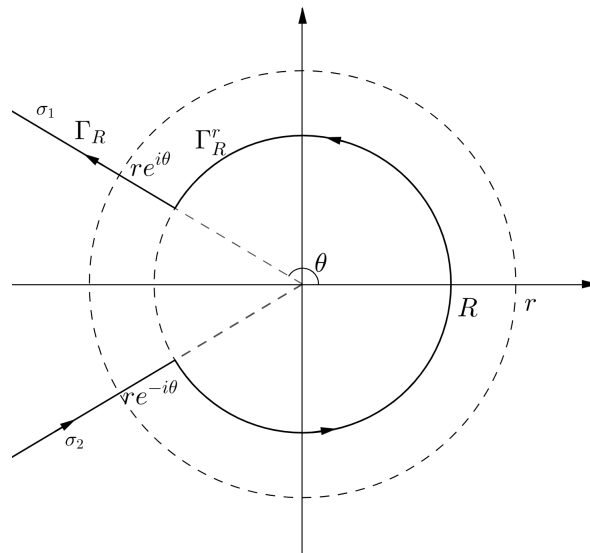
$$\int_{\Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \bar{C}_R} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = 0$$

e assim,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda.$$

Mais ainda, para $r > R$, consideramos a curva $\Gamma_R^r = \{\lambda \in \Gamma_R; |\lambda| \leq r\}$, observe a figura a seguir.

Figura 2.7 – Curva Γ_R^r .



Fonte: elaborado pelo autor.

Dessa maneira, mostramos que, para cada $t > 0$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^r} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = T(t).$$

De fato, fazendo a mudança de variável $\mu = \lambda t$, obtemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{t\Gamma_R} \frac{e^\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) d\mu,$$

e novamente pelo Teorema de Cauchy (Teorema A.10),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{t\Gamma_R} \frac{e^\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) d\mu, \quad (2.10)$$

pois, neste caso,

$$\int_{t\Gamma_R} \frac{e^\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) d\mu - \int_{\Gamma_R} \frac{e^\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) d\mu = \int_{C_{tR} \cup \overline{\Gamma_R^{tR}}} \frac{e^\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) d\mu,$$

em que $C_{tR} = \{\eta \in \mathbb{C}; |\eta| = tR \text{ e } |\arg \eta| \leq \theta\}$ e Γ_R^{tR} é a curva $\Gamma_R^{tR} = \{\lambda \in \Gamma_R; |\lambda| \leq tR\}$ percorrida no sentido contrário.

Observe que $C_{tR} \cup \overline{\Gamma_R^{tR}}$ é uma curva fechada e a função $\mu \mapsto \frac{\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right)$ é analítica na região delimitada por esta curva. Então, pelo Teorema de Cauchy (Teorema A.10), temos

$$\int_{C_{tR} \cup \overline{\Gamma_R^{tR}}} \frac{e^\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) d\mu = 0,$$

garantindo a igualdade (2.10).

Assim, escrevendo $\Gamma_R \setminus \Gamma_R^r$ como a união $\sigma_1 \cup \sigma_2$, onde $\sigma_1(\rho) = \rho e^{i\theta}$, $r \leq \rho < \infty$, e σ_2 é a curva $\overline{\sigma_2}(\rho) = \rho e^{-i\theta}$, $r \leq \rho < \infty$, percorrida no sentido contrário, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| T(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) d\mu \right\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R \setminus \Gamma_R^r} \frac{e^\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) d\mu \right\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left[\left\| \int_{\sigma_1} \frac{e^\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) d\mu \right\| + \left\| \int_{\sigma_2} \frac{e^\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) d\mu \right\| \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\left\| \int_r^\infty \frac{e^{\rho e^{i\theta}} e^{i\theta}}{t} R\left(\frac{\rho e^{i\theta}}{t} : A\right) d\rho \right\| + \left\| \int_r^\infty \frac{e^{\rho e^{-i\theta}} e^{-i\theta}}{t} R\left(\frac{\rho e^{-i\theta}}{t} : A\right) d\rho \right\| \right] \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left[\int_r^\infty \frac{e^{\rho \cos \theta}}{t} \frac{M}{\left|\frac{\rho}{t}\right|^{1-\alpha}} d\rho + \int_r^\infty \frac{e^{\rho \cos \theta}}{t} \frac{M}{\left|\frac{\rho}{t}\right|^{1-\alpha}} d\rho \right] \\ &= \frac{M}{\pi} \int_r^\infty \frac{e^{\rho \cos \theta}}{t} \frac{t^{1-\alpha}}{\rho^{1-\alpha}} d\rho \leq \frac{M t^{-\alpha}}{\pi} \left[\frac{e^{\rho \cos \theta}}{\cos \theta} \Big|_r^\infty \right] = \frac{M t^{-\alpha}}{\pi} \frac{e^{-r \cos \theta}}{\cos \theta}. \end{aligned}$$

Logo, quando $r \rightarrow \infty$, segue que $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^r} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda \rightarrow T(t)$. Além disso, como a curva Γ_R^r é uma curva simples de classe C^1 e a função $t \mapsto e^{\lambda t} R(\lambda : A)$ é diferenciável

para todo $t > 0$, com $\frac{d}{dt}e^{\lambda t}R(\lambda : A) = \lambda e^{\lambda t}R(\lambda : A)$, segue que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda.$$

Assim, para cada $t > 0$, $T(t)$ é o limite uniforme, para subconjuntos compactos de $(0, \infty)$, de um sequência de aplicações diferenciáveis, ou seja, $T(t)$ é diferenciável e mais, usando uma igualdade do resolvente e o item (ii) do Lema 2.50, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} [AR(\lambda : A) + I] d\lambda \\ &= A \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = AT(t). \end{aligned}$$

Portanto, $t \mapsto T(t)$ é derivável para $t > 0$. Além disso, usando que $\frac{d}{dt}T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda$, concluímos que $T(t) \in C^1((0, \infty), \mathcal{L}(X))$.

(iv) Inicialmente, utilizando o item (ii) do Lema 2.50, mostramos que, para todo $t > 0$ e $x \in X$,

$$A^n T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^n e^{\lambda t} R(\lambda : A)x d\lambda, \quad \forall n \geq 0.$$

De fato, para $n = 1$, basta usarmos o item (iii) que acabamos de provar.

Agora, para $n = 2$, usando o caso $n = 1$, uma igualdade do resolvente e o item (ii) do Lema 2.50, temos

$$\begin{aligned} A^2 T(t)x &= A(AT(t)x) \\ &= \frac{1}{2\pi i} A \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda : A)x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} AR(\lambda : A)x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} (\lambda R(\lambda : A) - I)x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^2 e^{\lambda t} R(\lambda : A)x d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^2 e^{\lambda t} R(\lambda : A)x d\lambda. \end{aligned}$$

Desse modo, por um argumento indutivo e o item (ii) do Lema 2.50, obtemos

$$\begin{aligned}
A^n T(t)x &= A[A^{n-1}T(t)x] \\
&= A\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{n-1} e^{\lambda t} R(\lambda : A)x d\lambda\right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{n-1} e^{\lambda t} AR(\lambda : A)x d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{n-1} e^{\lambda t} [\lambda R(\lambda : A) - I]x d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^n e^{\lambda t} R(\lambda : A)x d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{n-1} e^{\lambda t} x d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^n e^{\lambda t} R(\lambda : A)x d\lambda.
\end{aligned}$$

Assim, $t \mapsto A^n T(\cdot) \in C((0, \infty), \mathcal{L}(X))$ e, para todo $t > 0$ e $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\|A^n T(t)\| &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Gamma} \lambda^n e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda \right\| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_0^{\infty} (re^{i\theta})^n e^{re^{i\theta}t} R(re^{i\theta} : A) e^{i\theta} dr \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (re^{-i\theta})^n e^{re^{-i\theta}t} R(re^{-i\theta} : A) e^{-i\theta} dr \right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} r^n e^{rt \cos \theta} \frac{M}{r^{1-\alpha}} dr + \int_0^{\infty} r^n e^{rt \cos \theta} \frac{M}{r^{1-\alpha}} dr \right] \\
&= \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} r^{n-1+\alpha} e^{-rt \cos \phi} dr.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $u = rt \cos \phi$, obtemos $dr = \frac{du}{t \cos \phi}$ e $r = \frac{u}{t \cos \phi}$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\|A^n T(t)\| &\leq \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{t \cos \phi}\right)^{n-1+\alpha} e^{-u} \frac{du}{t \cos \phi} \\
&= \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u^{n-1+\alpha}}{t^{n+\alpha} (\cos \phi)^{n+\alpha}} e^{-u} du \\
&= \frac{M (\cos \phi)^{-n-\alpha}}{\pi t^{n+\alpha}} \int_0^{\infty} u^{n-1+\alpha} e^{-u} du = \frac{M (\cos \phi)^{-n-\alpha} \Gamma(n+\alpha)}{\pi t^{n+\alpha}} = \frac{C_n}{t^{n+\alpha}},
\end{aligned}$$

onde $C_n = \frac{M (\cos \phi)^{-n-\alpha} \Gamma(n+\alpha)}{\pi}$.

□

Note que, como mencionamos no início da seção, semigrupos de crescimento de ordem α apresentam uma falha na condição de continuidade para a função $t \mapsto T(t)x$, com $x \in X$, em $t = 0$. Desse modo, exceto em casos com condições suficientemente suaves, tais semigrupos

não são fortemente contínuos em $t = 0$. Tal fato será exemplificado na próxima subseção. Dessa forma denotamos por Λ_A o conjunto onde essa propriedade é verificada, ou seja,

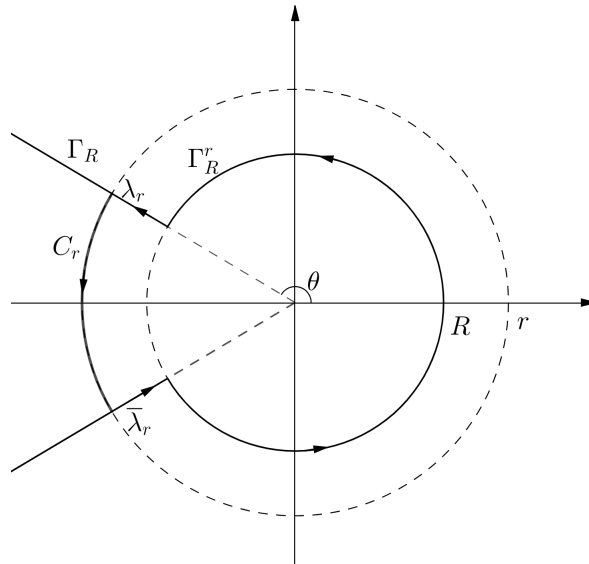
$$\Lambda_A = \{x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x\},$$

e mostramos que $\mathcal{D}(A) \subset \Lambda_A$. Antes, porém, precisamos de um lema.

Lema 2.53. *Seja Γ_R a curva definida na demonstração do Teorema 2.52, então para todo $x \in X$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} x d\lambda = x$.*

Demonstração. Sejam $R > 0$ e $r > R$. Consideramos, novamente, a curva $\Gamma_R^r = \{\lambda \in \Gamma_R; |\lambda| < r\}$ e o arco $C_r = \{\eta \in \mathbb{C}; |\eta| = r, \text{ com } \eta \text{ à esquerda de } \Gamma_r, \text{ com extremos } \lambda_r = re^{i\theta} \text{ e } \bar{\lambda}_r = re^{-i\theta}\}$. Veja a figura a seguir.

Figura 2.8 – Região limitada por $\Gamma_R^r \cup C_r$.



Fonte: elaborado pelo autor.

Dessa forma, pela Fórmula integral de Cauchy (Teorema A.9), $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^r \cup C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda = 1$, ou seja,

$$\int_{\Gamma_R^r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda = 2\pi i - \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda,$$

com

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda \right| &= \left| \int_{\theta}^{2\pi-\theta} \frac{e^{re^{i\varphi}t} r i e^{i\varphi}}{r e^{i\varphi}} d\varphi \right| \\ &\leq \int_{\theta}^{2\pi-\theta} \frac{e^{rt \cos \varphi} r}{r} d\varphi \\ &\leq \int_{\theta}^{2\pi-\theta} e^{rt \cos \theta} d\varphi = e^{-rt \cos \theta} 2(\pi - \theta) = \frac{2(\pi - \theta)}{e^{rt \cos \theta}}. \end{aligned}$$

Como $\frac{2(\pi - \theta)}{e^{rt \cos \phi}} \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$, segue que

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda = 2\pi i,$$

ou seja, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} x d\lambda = x$, para todo $x \in X$. □

Proposição 2.54. Se $x \in \mathcal{D}(A)$ então $\|T(t)x - x\| \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0$.

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{D}(A) \subset X$. Então, $x = A^{-1}y$, para algum $y \in X$. Dessa forma, pelo que fizemos na demonstração do item (iii) do Teorema 2.52 e pelo Lema 2.53, temos

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} e^{\lambda t} R(\lambda : A)x d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} e^{\lambda t} [R(\lambda : A) - \lambda^{-1}I]x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} e^{\lambda t} \left[\frac{AR(\lambda : A)}{\lambda} \right] x d\lambda, \end{aligned}$$

com

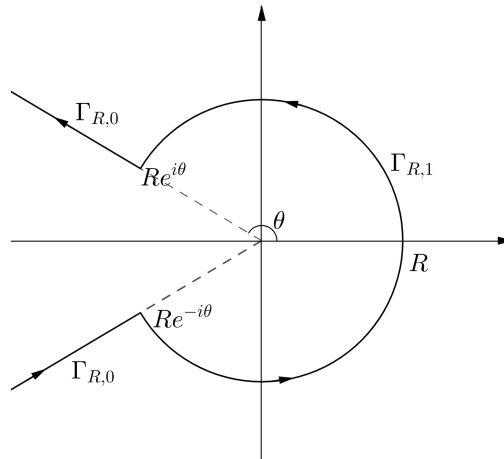
$$\left\| \frac{AR(\lambda : A)}{\lambda} x \right\| = \frac{\|AR(\lambda : A)A^{-1}y\|}{|\lambda|} = \frac{\|R(\lambda : A)\| \|y\|}{|\lambda|} \leq \frac{1}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} \|y\|.$$

Assim,

$$\|T(t)x - x\| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\Gamma_R} \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \right) \|y\|.$$

Além disso, para cada $R > 0$, a curva Γ_R pode ser expressa pela união de duas curvas, $\Gamma_R = \Gamma_{R,0} \cup \Gamma_{R,1}$, onde $\Gamma_{R,0} = \{z \in \mathbb{C}; |\arg z| = \theta, |z| > R\}$ e $\Gamma_{R,1} = \{z \in \mathbb{C}; |\arg z| \leq \theta, |z| = R\}$, como na figura abaixo.

Figura 2.9 – Decomposição da curva Γ_R .



Fonte: elaborado pelo autor.

Dessa forma, para $R > 0$ fixo, $|e^{\lambda t}| \leq 1$, para todo $\lambda \in \Gamma_{R,0}$ e todo $t > 0$, pois $|e^{\lambda t}| = e^{Re(\lambda t)} = e^{|\lambda|t \cos \theta}$, e $|e^{\lambda t}| \rightarrow 1$, quando $t \rightarrow 0$, para todo $\lambda \in \Gamma_{R,1}$, visto que $|e^{\lambda t}| \leq e^{Rt \cos \theta} \leq e^{Rt}$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0} \|T(t)x - x\| &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sup_{0 < t < \epsilon} \|T(t)x - x\| \right] \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sup_{0 < t < \epsilon} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \|y\| \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sup_{0 < t < \epsilon} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{R,0} \cup \Gamma_{R,1}} \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \|y\| \right] \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sup_{0 < t < \epsilon} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{R,0}} \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \|y\| \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 < t < \epsilon} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{R,1}} \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \|y\| \right] \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sup_{0 < t < \epsilon} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{R,0}} \frac{1}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \|y\| \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 < t < \epsilon} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{R,1}} \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \|y\| \right]. \end{aligned}$$

Note que, para $\lambda \in \Gamma_{R,1}$, como $R > 0$ é fixo, $|e^{\lambda t}| \leq e^{Rt}$, para todo $0 < t < \epsilon$ e mais ainda, a função $t \mapsto e^{Rt}$ é crescente. Desse modo, segue que

$$\frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} \leq \frac{e^{\lambda t}}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} \leq \frac{e^{R\epsilon}}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}}.$$

Assim,

$$\sup_{0 < t < \epsilon} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{R,1}} \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \|y\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{R,1}} \frac{e^{R\epsilon}}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \|y\|.$$

Além disso, como $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{R\epsilon} = 1$ e, tomando $\epsilon < 1$,

$$\frac{e^{R\epsilon}}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} \leq \frac{e^R}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}},$$

com a função $\lambda \mapsto \frac{e^R}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}}$ integrável em $\Gamma_{R,1}$, pois

$$\int_{\Gamma_{R,1}} \frac{e^R}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{e^R}{|Re^{i\varphi}|} \frac{M}{|Re^{i\varphi}|^{1-\alpha}} |Rie^{i\varphi}| d\varphi = \int_{-\theta}^{\theta} e^R \frac{M}{R^{1-\alpha}} d\varphi = \frac{e^R M}{R^{1-\alpha}} 2\theta.$$

Logo, pelo Teorema da convergência dominada, obtemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow 0} \|T(t)x - x\| &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sup_{0 < t < \epsilon} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{R,0}} \frac{1}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \|y\| \right. \\
&\quad \left. + \sup_{0 < t < \epsilon} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{R,1}} \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \|y\| \right] \\
&\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{R,0}} \frac{1}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \|y\| \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{R,1}} \frac{e^{R\epsilon}}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \|y\| \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{R,0}} \frac{1}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \|y\| \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{R,1}} \frac{1}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \|y\| \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \|y\|.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \|T(t)x - x\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \|y\|, \quad (2.11)$$

para todo $R > 0$.

Observe também que

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{R,0}} \frac{1}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| &= \int_R^\infty \frac{1}{|\rho e^{i\theta}|} \frac{M}{|\rho e^{i\theta}|^{1-\alpha}} |e^{i\theta}| d\rho - \int_R^\infty \frac{1}{|\rho e^{-i\theta}|} \frac{M}{|\rho e^{-i\theta}|^{1-\alpha}} |e^{-i\theta}| d\rho \\
&= \int_R^\infty \frac{M}{\rho^{2-\alpha}} d\rho - \int_R^\infty \frac{M}{\rho^{2-\alpha}} d\rho = 0
\end{aligned}$$

e

$$\int_{\Gamma_{R,1}} \frac{1}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| = \int_{-\theta}^\theta \frac{1}{|R e^{i\varphi}|} \frac{M}{|R e^{i\varphi}|^{1-\alpha}} |R i e^{i\varphi}| d\varphi = \int_{-\theta}^\theta \frac{M}{R^{1-\alpha}} d\varphi = \frac{M}{R^{1-\alpha}} 2\theta.$$

Consequentemente, fazendo $R \rightarrow \infty$ em (2.11), temos

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow 0} \|T(t)x - x\| &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{R,0}} \frac{1}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{R,1}} \frac{1}{|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} d|\lambda| \right] \|y\| \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{M}{R^{1-\alpha}} 2\theta \right] \|y\| = 0,
\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que $\limsup_{t \rightarrow 0} \|T(t)x - x\| = 0$. Por outro lado, como $\|T(t)x - x\| \geq 0$, segue que

$$0 \leq \liminf_{t \rightarrow 0} \|T(t)x - x\| \leq \limsup_{t \rightarrow 0} \|T(t)x - x\| = 0,$$

ou seja, $\liminf_{t \rightarrow 0} \|T(t)x - x\| = \limsup_{t \rightarrow 0} \|T(t)x - x\| = 0$.

Portanto, $\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t)x - x\|$ existe e $\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t)x - x\| = 0$, garantindo que $\mathcal{D}(A) \subset \Lambda_A$. \square

Observação 2.55. Note que $T(t)$ e $R(\xi : A)$ comutam. De fato, como $R(\xi : A) \in \mathcal{L}(X)$ e $R(\xi : A)$ e $R(\lambda : A)$ comutam para quaisquer $\xi, \lambda \in \rho(A)$, temos

$$\begin{aligned} R(\xi : A)T(t)x &= R(\xi : A) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A)x \, d\lambda \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\xi : A)R(\lambda : A)x \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A)R(\xi : A)x \, d\lambda = T(t)R(\xi : A)x, \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Corolário 2.56. Se $T(t)x = 0$, para todo $t > 0$, então $x = 0$.

Demonstração. Como $T(t)x = 0$, para todo $t > 0$, segue que $R(\lambda : A)T(t)x = 0$, para todo $\lambda \in \rho(A)$. Assim, como $R(\lambda : A)x \in \mathcal{D}(A)$ e $R(\lambda : A)$ é um operador linear limitado, para todo $\lambda \in \rho(A)$, pela Proposição 2.54, temos

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} R(\lambda : A)T(t)x = \lim_{t \rightarrow 0} T(t)R(\lambda : A)x = R(\lambda : A)x.$$

Dessa forma, como $R(\lambda : A)$ é injetivo, segue que $x = 0$. \square

Pelo que já fizemos nesta seção, podemos concluir que a família $(T(t))_{t \geq 0}$ definida em (2.8), é um semigrupo de crescimento de ordem α .

Agora, mostramos que, de uma certa forma, o operador A é o gerador de $(T(t))_{t \geq 0}$.

Lema 2.57. Se $A \in (\alpha, \theta, M)$, então

$$\|\lambda R(\lambda : A)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \tilde{M}, \quad \forall \lambda \in \Delta(\theta)$$

e

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)A^{-1}x = A^{-1}x,$$

para todo $x \in X$.

Demonstração. Seja $\lambda \in \Delta(\theta)$, como $(\lambda - A)R(\lambda : A) = I$, segue que $\lambda R(\lambda : A) - I = R(\lambda : A)A$ e então, $\lambda R(\lambda : A)A^{-1} = R(\lambda : A) + A^{-1}$. Dessa forma,

$$\|\lambda R(\lambda : A)A^{-1}\| = \|R(\lambda : A) + A^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} + \|A^{-1}\|.$$

Como $0 \in \rho(A)$, segue que $\|A^{-1}\| \in \mathcal{L}(X)$ e então, sendo $\tilde{M} = \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} + \|A^{-1}\|$, obtemos $\|\lambda R(\lambda : A)A^{-1}\| \leq \tilde{M}$.

Além disso, para cada $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda : A)A^{-1}x - A^{-1}x\| &\leq \|A^{-1}(\lambda R(\lambda : A) - I)\| \|x\| \\ &= \|A^{-1}(R(\lambda : A)A)\| \|x\| \\ &= \|R(\lambda : A)\| \|x\| \leq \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}} \|x\|. \end{aligned}$$

Dessa forma, quando $|\lambda| \rightarrow \infty$, obtemos $\|\lambda R(\lambda : A)A^{-1}x - A^{-1}x\| \rightarrow 0$. \square

Proposição 2.58. *Seja $x \in \mathcal{D}(A^2)$. Então $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = Ax$.*

Demonstração. Considerando a curva $\Gamma_{\frac{1}{t}}$, em que $\Gamma_{\frac{1}{t}}$ é a curva Γ_R da demonstração da Proposição 2.54, com $R = \frac{1}{t}$, para cada $t > 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{T(t)x - x}{t} &= \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\frac{1}{t}}} e^{\lambda t} R(\lambda : A)x \, d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\frac{1}{t}}} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} x \, d\lambda \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\frac{1}{t}}} e^{\lambda t} \frac{1}{t} [R(\lambda : A) - \lambda^{-1}I]x \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\frac{1}{t}}} e^{\lambda t} \frac{1}{t} \left[\frac{R(\lambda : A)A}{\lambda} \right] x \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\frac{1}{t}}} \frac{e^{\lambda t} R(\lambda : A)Ax}{\lambda t} \, d\lambda. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\mu = \lambda t$, obtemos que a curva $\Gamma_{\frac{1}{t}}$ é transformada na curva Γ_1 e assim,

$$\begin{aligned} \frac{T(t)x - x}{t} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\mu} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) \frac{1}{t} Ax \, d\mu}{\mu} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^{\mu} \frac{1}{\mu^2} \frac{\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) Ax \, d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^{\mu} \frac{1}{\mu^2} \frac{\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) A^{-1} A^2 x \, d\mu, \end{aligned}$$

cujo integrando é limitado por

$$\left\| e^{\mu} \frac{1}{\mu^2} \frac{\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) A^{-1} A^2 x \right\| \leq \tilde{M} |e^{\mu}| \frac{1}{|\mu|^2} \|A^2 x\|,$$

que é integrável sobre a curva Γ_1 . Além disso, pelo Lema 2.57, $\frac{\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) Ax \rightarrow Ax$, quando $t \rightarrow 0$. Assim, pelo Teorema da convergência dominada temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^\mu \frac{1}{\mu^2} \frac{\mu}{t} R\left(\frac{\mu}{t} : A\right) Ax \, d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^\mu \frac{1}{\mu^2} Ax \, d\mu = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^\mu \frac{1}{\mu^2} d\mu \right) Ax.$$

Para analisarmos o valor de $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^\mu \frac{1}{\mu^2} d\mu$ utilizaremos a teoria de resíduos. Seja $r > 1$ e considere as curvas Γ_1^r e C_r , como já definidas anteriormente nesta seção. Note que a função $\frac{e^\mu}{\mu^2}$ é analítica em todo o plano complexo exceto em $\mu = 0$. Mais ainda, $\mu = 0$ é um polo de ordem 2 da função $f(\mu) = \frac{e^\mu}{\mu^2}$. Assim, pela Proposição A.11, sendo $g(\mu) = (\mu - 0)^2 \frac{e^\mu}{\mu^2}$, obtemos $res(f, 0) = \frac{g'(0)}{1!} = e^0 = 1$. Assim, o Teorema dos Resíduos (Teorema A.12) nos permite concluir que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r \cup \Gamma_1^r} \frac{e^\mu}{\mu^2} d\mu = res(f, 0) = 1.$$

Dessa forma,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^\mu}{\mu^2} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1^r} \frac{e^\mu}{\mu^2} d\mu = 1,$$

com

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} \frac{e^\mu}{\mu^2} d\mu \right| &= \left| \int_{\theta}^{2\pi-\theta} \frac{e^{re^{i\varphi}} r i e^{i\varphi}}{(re^{i\varphi})^2} d\varphi \right| \\ &\leq \int_{\theta}^{2\pi-\theta} \frac{e^{r \cos \varphi}}{r} d\varphi \\ &\leq \int_{\theta}^{2\pi-\theta} \frac{1}{r} d\varphi = \frac{2(\pi - \theta)}{r}, \end{aligned}$$

ou seja, $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^\mu}{\mu^2} d\mu \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$. Logo,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^\mu}{\mu^2} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1^r} \frac{e^\mu}{\mu^2} d\mu \right] = 1 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{e^\mu}{\mu^2} d\mu = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{e^\mu}{\mu^2} d\mu \right) Ax = Ax,$$

o que conclui a demonstração da proposição. \square

2.6.1 A singularidade do semigrupo em $t = 0$

Nesta subseção, faremos uma breve discussão a respeito da singularidade do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$. Os detalhes que serão suprimidos nesta parte do trabalho podem ser encontrados em (15). Como mencionado anteriormente, vamos estudar a singularidade do semigrupo por meio de um exemplo. Antes, porém, ressaltamos que utilizamos uma definição equivalente

a apresentada inicialmente para operadores quase setoriais, no sentido que nesta subsecção, um operador $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é quase setorial se, para algum $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, tivermos $\Delta(\phi) \subset \rho(-A)$, onde

$$\Delta(\phi) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; |\arg|\lambda|| \leq \pi - \phi\} \cup \{0\},$$

e para algum $\alpha \in (0, 1)$, tivermos a estimativa

$$\|R(\lambda : -A)\| \leq \frac{C}{|\lambda|^\alpha + 1}, \quad \forall \lambda \in \Delta(\phi).$$

Além disso, faz-se necessário considerarmos as seguintes definições e notações específicas. Considere uma equação parabólica da forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u = f(u), & x \in \Omega_\epsilon, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega_\epsilon, \end{cases}$$

onde $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, é um típico domínio de dumbbell consistindo de dois domínios desconexos, denotados por Ω , unidos por um fino canal, R_ϵ , o qual é degenerado a um segmento de reta quando o parâmetro ϵ se aproxima de zero.

O domínio limite consistirá do conjunto aberto Ω e o segmento de reta R_0 que, sem perda de generalidade, será considerado como $R_0 = \{(x, 0, 0, \dots, 0); 0 < x < 1\}$. A equação limite é dada por

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + w = f(w), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, \\ v_t - \frac{1}{g}(g v_x)_x + v = f(v), & x \in (0, 1), \\ v(0) = w(P_0), v(1) = w(P_1), \end{cases}$$

onde w é uma função definida em Ω , v é definida no segmento de reta R_0 e os pontos $P_0 = (0, 0, \dots, 0)$, $P_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ são os pontos da junção do segmento de reta com o conjunto aberto Ω . A função g está relacionada com o modo que o canal R_ϵ colapsa para o segmento R_0 .

Para $0 < \epsilon \leq 1$, seja $U_0^p = L^p(\Omega_\epsilon)$, com a norma

$$\|u_\epsilon\|_{U_\epsilon^p}^p = \int_\Omega |u|^p + \frac{1}{\epsilon^{N-1}} \int_{R_\epsilon} |u_\epsilon|^p.$$

Para $\epsilon = 0$, seja $U_0^p = L^p(\Omega) \oplus L_g^p(0, 1)$, ou seja, $(w, v) \in U_0^p$ se $w \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^p(0, 1)$, com norma dada por

$$\|(w, v)\|_{U_0^p}^p = \int_\Omega |w|^p + \int_0^1 g |v|^p.$$

Defina o operador $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset U_0^p \longrightarrow U_0^p$, dado por $A_0(w, \nu) = \left(-\Delta w + w, -\frac{1}{g}(g\nu_x)_x + \nu \right)$, onde $\mathcal{D}(A_0) = \{(w, \nu) \in U_0^p; w \in D(\Delta_N^p), (g\nu_x)_x \in L_g^p(0, 1), \nu(0) = w(P_0), \nu(1) = w(P_1)\}$ e Δ_N^p é o operador Laplaciano com condições de fronteira de Neumann homogêneas em $L^p(\Omega)$.

Em (15) verifica-se a validade da limitação

$$\|(\lambda + A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_0^p)} \leq \frac{C}{|\lambda|^\alpha + 1}$$

e o fato do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ associado a A_0 satisfazer a desigualdade $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(U_0^p)} \leq C t^{1-\alpha}$, com $0 < \alpha < 1 - \frac{N}{2p}$.

A fim de mostrarmos que a singularidade do semigrupo em $t = 0$ não é removível para o caso $p = 2$, consideramos uma condição inicial $u_0 \in U_0^2$ e mostramos que $\|T(t)u_0\| \geq C t^{-\delta}$, quando $t \rightarrow 0$, para alguma constante $\delta > 0$. Para isso, escolhemos $0 < \alpha < \frac{N}{2}$ e consideramos a função radialmente simétrica

$$w_0(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha}, & x \in \mathcal{B}(P_0, \frac{\rho}{2}), \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{B}(P_0, \frac{\rho}{2}), \end{cases}$$

com $\rho > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\mathcal{B}(P_0, \rho) \cap \Omega = \{x \in \mathcal{B}(P_0, \rho); x_1 < 0\}$. Assumimos que Ω é dado pela união de dois domínios desconexos, Ω_0^L e Ω_0^R e consideramos $g \equiv 1$. Como $0 < \alpha < \frac{N}{2}$, $w_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Lema 2.59. *Para a condição inicial w_0 acima, a solução $\tilde{w}(t, x)$ do problema*

$$\begin{cases} \tilde{w}_t = \Delta \tilde{w}, & \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} = 0, & \partial\Omega, \\ \tilde{w}(0, x) = w_0(x), & \partial\Omega \end{cases}$$

satisfaz

$$0 < c_1 t^{-\frac{\alpha}{2}} \leq \tilde{w}(t, P_0) \leq c_2 t^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad 0 < t < t_0,$$

para algumas constantes $c_1, c_2 > 0$ e algum $t_0 > 0$ pequeno.

Demonstração. (15, Lemma 3.3, p. 191). □

Agora, considerando o seguinte problema no segmento $R_0 = (0, 1)$,

$$\begin{cases} \tilde{v}_t - \tilde{v}_{xx} = 0, & x \in (0, 1), \\ \tilde{v}(t, 0) = \tilde{w}(t, P_0), \quad \tilde{v}(1) = \tilde{w}(t, P_1) = 0, \\ \tilde{v}(0, x) = 0, & x \in (0, 1), \end{cases}$$

mostra-se o lema enunciado a seguir.

Lema 2.60. $\|\tilde{v}(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)} \geq C t^{\frac{1}{2}-\alpha}$, para $0 < t < t_0$ para algum $t_0 > 0$ pequeno.

Demonstração. (15, Lemma 3.5, p. 192). □

Com estes dois lemas é possível mostrar o resultado a seguir, que garante o que o semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ gerado por A_0 não é contínuo em $t = 0$ em L^2 .

Proposição 2.61. *Se consideramos a condição inicial $(w_0, 0) \in L^2(\Omega) \times L^2(0, 1)$, onde w_0 é a função vinda do Lema 2.59, então, se $(T(t))_{t \geq 0}$ é o semigrupo gerado pelo operador A_0 , ou seja, $(w(t, \cdot), v(t, \cdot)) = T(t)(w_0, 0)$ é a solução de*

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + w = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, \\ w(0, x) = w_0(x), \\ v_t - v_{xx} + v = 0, & x \in (0, 1), \\ v(0) = w(P_0), v(1) = w(P_1), \\ v(0, x) = 0, \end{cases}$$

então,

$$\|T(t)(w_0, 0)\|_{U^2} \geq C t^{\frac{1}{2}-\alpha} \rightarrow \infty, \text{ quando } t \rightarrow 0.$$

Demonstração. (15, Proposition 3.6, p. 194). □

3 UMA CLASSE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS NEUTRAS ABSTRATAS

Neste capítulo estudaremos, via teoria de semigrupos e teoremas de ponto fixo, a existência de soluções para uma classe de equações diferenciais neutras da forma

$$\frac{d}{dt}[x(t) + g(t, x_t)] = Ax(t) + f(t, x_t), \quad t \in [0, a], \quad (3.1)$$

$$x_0 = \varphi \in \Omega \subset \mathcal{B}, \quad (3.2)$$

onde $a, r > 0$, $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador de classe (α, θ, M) , $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, $\mathcal{B} = C([-r, 0], X)$, em que $C([-r, 0], X)$ é o conjunto de todas as funções contínuas com domínio $[-r, 0]$ e assumindo valores em X , $\Omega \subset \mathcal{B}$ é um aberto, a história $x_t : [-r, 0] \rightarrow X$ é definida por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ e $f, g : [0, a] \times \Omega \rightarrow X$ são funções apropriadas.

Equações diferenciais neutras aparecem em muitas áreas da matemática aplicada, por exemplo, na teoria de condução de calor para materiais com memória amortecida, onde a energia interna e o fluxo de calor são descritos como funcionais da temperatura u e de u_x , como descrita a seguir

$$\frac{d}{dt} \left[u(t, x) + \int_{-\infty}^t k_1(t-s)u(s, x) ds \right] = c\Delta u(t, x) + \int_{-\infty}^t k_2(t-s)\Delta u(t, x) ds,$$

$$u(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, limitado e com fronteira suave, $(t, x) \in (0, \infty) \times \Omega$, $u(t, x)$ representa a temperatura em x no tempo t , c é uma constante física e $k_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, são a energia interna e o relaxamento do calor, respectivamente. Sob condições específicas podemos reduzir este problema para a forma (3.1)-(3.2).

Para o desenvolvimento deste estudo o conhecimento de alguns conceitos faz-se necessário. Tais conceitos são apresentados na próxima seção.

3.1 Preliminares

Iniciamos introduzindo algumas notações específicas que serão utilizadas ao longo deste capítulo.

Sejam $(Z, \|\cdot\|_Z)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ espaços de Banach, então $\mathcal{L}(Z, W)$ denota o espaço de todos os operadores lineares limitados de Z em W , dotado da norma usual denotada por $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(Z, W)}$, e escrevemos $\mathcal{L}(Z)$, com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(Z)}$, quando $Z = W$. Além disso, $B_l(z, Z)$ denota a bola fechada de centro em $z \in Z$ e raio $l > 0$ no espaço $(Z, \|\cdot\|_Z)$. Para cada operador linear $S : \mathcal{D}(S) \subset X \rightarrow X$, denotamos por $[S]$ o domínio de S com a norma do gráfico, dada por

$\|x\|_{[S]} = \|x\|_Z + \|Sx\|_Z$, e por $\rho(S)$ o conjunto resolvente do operador S . O espaço formado por todas as funções contínuas e limitadas do intervalo $I \subset \mathbb{R}$ em Z é denotado por $C(I, Z)$ e vamos muni-lo com a norma do supremo, indicada por $\|\cdot\|_{C(I, Z)}$. O espaço formado por todas as classes de funções de I em Z Lebesgue - integráveis, para $p \geq 1$, será denotado por $L^p(I, Z)$, com a norma $\|h\|_{L^p(I, Z)}$ dada por

$$\|h\|_{L^p(I, Z)} = \left(\int_I \|h(s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Antes de iniciarmos a próxima seção, apresentamos o conceito de solução para o problema de Cauchy abstrato dado a seguir

$$x'(t) = Ax(t) + \xi(t), \quad t \in [0, a], \quad (3.3)$$

$$x(0) = x \in X, \quad (3.4)$$

onde $\xi \in L^q([0, a], X)$ e $q > \frac{1}{1-\alpha}$.

Definição 3.1. Uma função $u : [0, b] \rightarrow X$, $0 < b \leq a$ é dita uma solução fraca de (3.3)-(3.4) em $[0, b]$ se

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\xi(s) ds, \quad \forall t \in [0, b],$$

onde $(T(t))_{t \geq 0}$ é o semigrupo gerado pelo operador A .

Definição 3.2. Uma função $u \in C([0, b], X)$, $0 < b \leq a$, é uma solução clássica de (3.3)-(3.4) em $[0, b]$ se $u \in C^1([0, b], X)$, $u(0) = x$ e $u(\cdot)$ é solução de (3.3) em $[0, b]$.

3.2 Existência de soluções

Nesta seção vamos investigar a existência de soluções fracas para o sistema neutro (3.1)-(3.2). Para isso, fixamos mais algumas notações que serão utilizadas ao longo desta seção.

Dado $Y \subset X$, denotamos por i_c a aplicação inclusão de Y em X , $\varphi \in \Omega$ e $y : [-r, a] \rightarrow X$ é tal que $y_0 = \varphi$ e $y(t) = T(t)\varphi(0)$, para todo $t \geq 0$. Pelo Teorema 2.52, C_n , $n \in \mathbb{N}$, é uma constante positiva tal que $\|A^n T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_n}{t^{n+\alpha}}$, para todo $t \in (0, a]$. Para um conjunto limitado $B \subset X$, $Diam_X(B)$ denota o diâmetro de B em X , com $Diam_X(B) = \sup\{\|a - b\|; a, b \in B\}$. Dado $p \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, denotamos por p' o expoente conjugado de p , ou seja, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Como no capítulo anterior, indicamos por Λ_A o conjunto $\Lambda_A = \{x \in X; T(\cdot)x \in C([0, \infty), X)\}$. Assim, como já mostramos, $\mathcal{D}(A) \subset \Lambda_A$.

Lema 3.3. Suponha que $x \in X$ é tal que $AT(\cdot)x \in L^1([0, b], X)$, para algum $b > 0$. Então as seguintes afirmações são satisfeitas:

$$(i) \int_0^t T(s)x \, ds \in \mathcal{D}(A);$$

$$(ii) T(t)x - x = \int_0^t AT(s)x \, ds, \forall t > 0;$$

$$(iii) x \in \Lambda_A.$$

Demonstração. (i) Primeiramente, mostramos que $\int_0^t T(s)x \, ds \in \mathcal{D}(A)$.

Para tanto, sejam $0 < \epsilon < t < b$ e $\xi \in \rho(A)$. Pelo Teorema 2.52, $T(\cdot) \in C([\epsilon, t], \mathcal{L}(X))$ e, para $y = R(\xi : A)x \in \mathcal{D}(A)$, $\frac{d}{ds}T(s)R(\xi : A)x = AT(s)R(\xi : A)x$, para todo $s > 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^t T(s)x \, ds &= \int_{\epsilon}^t (\xi I - A)R(\xi : A)T(s)x \, ds \\ &= \int_{\epsilon}^t [\xi R(\xi : A)T(s)x - AR(\xi : A)T(s)x] \, ds \\ &= \int_{\epsilon}^t \xi R(\xi : A)T(s)x \, ds - \int_{\epsilon}^t AR(\xi : A)T(s)x \, ds \\ &= \xi \int_{\epsilon}^t R(\xi : A)T(s)x \, ds - \int_{\epsilon}^t \frac{d}{ds}R(\xi : A)T(s)x \, ds \\ &= \xi \int_{\epsilon}^t R(\xi : A)T(s)x \, ds - [T(t)R(\xi : A)x - T(\epsilon)R(\xi : A)x]. \end{aligned}$$

Dessa forma, como $\int_{\epsilon}^t T(s)x \, ds = \int_0^t T(s)x \, ds - \int_0^{\epsilon} T(s)x \, ds$ e $R(\xi : A)$ é um operador linear limitado, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^t T(s)x \, ds &= \xi \int_{\epsilon}^t R(\xi : A)T(s)x \, ds - [T(t)R(\xi : A)x - T(\epsilon)R(\xi : A)x] \\ &= \xi R(\xi : A) \left[\int_0^t T(s)x \, ds - \int_0^{\epsilon} T(s)x \, ds \right] \\ &\quad - [T(t)R(\xi : A)x - T(\epsilon)R(\xi : A)x], \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \int_0^t T(s)x \, ds - \int_0^{\epsilon} T(s)x \, ds &= \xi R(\xi : A) \left[\int_0^t T(s)x \, ds - \int_0^{\epsilon} T(s)x \, ds \right] \\ &\quad - [T(t)R(\xi : A)x - T(\epsilon)R(\xi : A)x]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Note ainda, pelo Teorema 2.52, que $\|T(s)\| \leq \frac{C_0}{s^\alpha}$ e assim,

$$\int_0^t \|T(s)x\| ds \leq \int_0^t \|T(s)\| \|x\| ds \leq \|x\| C_0 \int_0^t \frac{1}{s^\alpha} ds = \|x\| C_0 \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Como $\alpha \in (0, 1)$, segue que $1 - \alpha > 0$. Logo, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon T(s)x ds = 0$ e, como $\mathcal{D}(A) \subset \Lambda_A$, temos $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(\epsilon)R(\xi : A)x = R(\xi : A)x$, uma vez que $R(\xi : A)x \in \mathcal{D}(A)$. Consequentemente, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ em (3.5), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t T(s)x ds &= \xi R(\xi : A) \int_0^t T(s)x ds - [T(t)R(\xi : A)x - R(\xi : A)x] \\ &= R(\xi : A) \left[\xi \int_0^t T(s)x ds - (T(t)x - x) \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

ou seja,

$$R(\xi : A) \left[\xi \int_0^t T(s)x ds - (T(t)x - x) \right] = \int_0^t T(s)x ds.$$

Como $R(\xi : A) : X \rightarrow \mathcal{D}(A)$, concluímos que $\int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}(A)$.

(ii) Agora, mostramos que $T(t)x - x = \int_0^t T(s)x ds$, para todo $t > 0$.

De (3.6) temos

$$\int_0^t T(s)x ds - \xi R(\xi : A) \int_0^t T(s)x ds = -R(\xi : A)[T(t)x - x],$$

ou seja,

$$[I - \xi R(\xi : A)] \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = -R(\xi : A)[T(t)x - x]. \quad (3.7)$$

Além disso, $I = R(\xi : A)(\xi I - A) = R(\xi : A)\xi - R(\xi : A)A$, logo, $I - \xi R(\xi : A) = -R(\xi : A)A$, e então, de (3.7) obtemos

$$\begin{aligned} -R(\xi : A)A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) &= -R(\xi : A)[T(t)x - x] \\ \Rightarrow -(\xi I - A)(-R(\xi : A)A) \left(\int_0^t T(s)x ds \right) &= -(\xi I - A)(-R(\xi : A))[T(t)x - x] \\ \Rightarrow A \int_0^t T(s)x ds &= T(t)x - x. \end{aligned}$$

Dessa forma, como A é um operador fechado, segue que

$$\int_0^t AT(s)x ds = T(t)x - x.$$

(iii) Resta mostrar que $x \in \Lambda_A$, isto é, $T(\cdot)x$ é contínua em $[0, \infty)$.

Como $AT(\cdot)x \in L^1([0, b], X)$, por hipótese, usando o item (ii) obtemos que $\lim_{t \rightarrow 0} [T(t)x - x] = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t AT(s)x \, ds = 0$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x$, o que implica que $T(\cdot)x$ é contínua em $t = 0$.

Agora, seja $t \in (0, \infty)$ e $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ de modo que $t + h > 0$. Então,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} [T(t+h)x - T(t)x] &= \lim_{h \rightarrow 0} [T(t+h)x - x - T(t)x + x] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_0^{t+h} AT(s)x \, ds - \int_0^t AT(s)x \, ds \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_t^{t+h} AT(s)x \, ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h AT(u+t)x \, du = 0, \end{aligned}$$

pois, $AT(\cdot)x \in L^1([0, b], X)$.

Portanto, $T(\cdot)x$ é contínua em $[0, \infty)$, o que garante que $x \in \Lambda_A$ e a demonstração está concluída. □

A seguir, baseados na definição de solução fraca para o problema de Cauchy, apresentamos a definição de solução fraca para o sistema neutro (3.1)-(3.2).

Definição 3.4. Uma função $u : [-r, b] \rightarrow X$, $0 < b \leq a$, é dita solução fraca do sistema neutro (3.1)-(3.2) em $[-r, b]$ se $u_0 = \varphi$, $u|_{(0,b]} \in C((0, b], X)$, as funções $s \mapsto AT(t-s)g(s, u_s)$ e $s \mapsto T(t-s)f(s, u_s)$ são integráveis em $[0, t)$, para todo $t \in [0, b]$, e

$$u(t) = T(t)[\varphi(0) + g(0, \varphi)] - g(t, u_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s) \, ds + \int_0^t T(t-s)f(s, u_s) \, ds,$$

para todo $t \in (0, b]$.

Observação 3.5. Exceto em casos triviais o operador $AT(\cdot)$ não é integrável na topologia do operador uniforme em $[0, b]$, para $b > 0$. De fato, se assumirmos que $AT(\cdot) \in L^1([a, b], \mathcal{L}(X))$, do Lema 3.3, para todo $x \in X$, temos

$$\|T(t)x - x\| = \left\| \int_0^t AT(s)x \, ds \right\| \leq \int_0^t \|AT(s)x\| \, ds \leq \int_0^t \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\| \, ds.$$

Por outro lado, como $AT(\cdot) \in L^1([0, b], \mathcal{L}(X))$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |t| < \delta$, então $\int_0^t \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \, ds < \epsilon$. Assim,

$$\begin{aligned} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} &= \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|T(t)x - x\|\} \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \left\{ \int_0^t \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\| ds \right\} \\ &\leq \int_0^t \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(X)} ds < \epsilon. \end{aligned}$$

Dessa forma, $T(\cdot)$ é contínua para $t = 0$. Além disso, pelo Teorema 2.52, sabemos que $T(\cdot) \in C^1((0, \infty), \mathcal{L}(X))$, e assim $T(\cdot) \in C([0, \infty), \mathcal{L}(X))$, ou seja, $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo. Denotamos por B seu gerador infinitesimal, pelo que apresentamos na Seção 2.1, temos $B \in \mathcal{L}(X)$ e então, dado $x \in \mathcal{D}(B) = X$, obtemos que

$$Bx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t AT(s)x ds = \lim_{t \rightarrow 0^+} A \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds.$$

Como $x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}(A)$, $\forall t > 0$, $x_t \rightarrow x$ e A é um operador linear fechado com $Ax_t \rightarrow Bx$, segue que $x = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t AT(s)x ds \in \mathcal{D}(A)$ e $Ax = Bx$. Assim, concluímos que $X \subset \mathcal{D}(A)$, ou seja, $\mathcal{D}(A) = X$ e $A \in \mathcal{L}(X)$.

Para evitar estes casos triviais vamos supor, a partir de agora, a validade da condição \mathbf{H}_1 abaixo.

\mathbf{H}_1 : Existe um espaço de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$, continuamente incluso em X , tal que $AT(\cdot) \in L^1([0, a], \mathcal{L}(Y, X))$.

Supondo a validade de \mathbf{H}_1 e assumindo que $g \in C([0, b] \times \mathcal{B}, Y)$ e $h \in C([0, b], \mathcal{B})$, concluímos que a função $s \mapsto AT(t-s)g(s, h(s)) \in L^1([0, t], X)$, para todo $t \in [0, b]$. De fato, note que

$$\begin{aligned} \|AT(t-s)g(s, h(s))\| &\leq \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|g(s, h(s))\|_Y \\ &\leq \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \sup_{s \in [0, b]} \|g(s, h(s))\|_Y. \end{aligned}$$

Dessa forma, como $\sup_{s \in [0, b]} \|g(s, h(s))\|_Y$ é constante e $s \mapsto AT(t-s) \in L^1([0, t], \mathcal{L}(Y, X))$ segue, do critério de Bochner para funções integráveis (Teorema A.16), que $s \mapsto AT(t-s)g(s, h(s))$ é integrável.

Agora, apresentamos alguns resultados relacionados às potências fracionárias de operadores quase setoriais, as quais serão utilizadas posteriormente. As demonstrações serão suprimidas e podem ser encontradas em (14).

Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ consideramos a função

$$\phi_\alpha(z) = z^\alpha, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Mostra-se de forma rigorosa que a função ϕ_α é uma generalização de z^α para certos espaços de funções definidos com detalhes em (14) e, assim, satisfaz várias propriedades específicas, as quais permitem apresentar a seguinte definição.

Definição 3.6. *Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ e A um operador quase setorial. Definimos a potência complexa A^α como o operador*

$$A^\alpha = \phi_\alpha(A).$$

Teorema 3.7. *Seja A um operador quase setorial. Então, para todo $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$, valem as seguintes afirmações:*

- (i) o operador A^{β_1} é fechado;
- (ii) $A^{\beta_1} A^{\beta_2} \subseteq A^{\beta_1 + \beta_2}$. Se $\mathcal{D}(A^{\beta_1 + \beta_2}) \subseteq \mathcal{D}(A^{\beta_2})$, então $A^{\beta_1} A^{\beta_2} = A^{\beta_1 + \beta_2}$;
- (iii) A^{β_1} é injetivo e $(A^{\beta_1})^{-1} = A^{-\beta_1}$;
- (iv) $A^n = A \cdots A$, n vezes, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $A^0 = I$.

Proposição 3.8. *Seja A um operador quase setorial. Então para todo $\beta \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re} \beta > \alpha$, a potência complexa $A^{-\beta}$ é limitada.*

Demonstração. (14, Proposition 3.4, p. 53). □

Observação 3.9. Sendo $A \in (\alpha, \theta, M)$, a condição \mathbf{H}_1 pode ser verificada, por exemplo, quando consideramos $Y = [\mathcal{D}(A^n)]$, $n \geq 1$, ou $Y = [\mathcal{D}(-A)^\beta]$, onde $(-A)^\beta$ é uma potência fracionária de $-A$ e $1 - \alpha < \beta$.

A partir de agora fixamos $q > \frac{1}{1 - \alpha}$ e introduzimos condições adicionais através das três hipóteses abaixo.

\mathbf{H}_2 : A função $f(\cdot)$ é contínua, e para todo $l > 0$ com $[0, l] \times B_l(\varphi, \mathcal{B}) \subset [0, a] \times \Omega$, existe $L_{f,l} \in L^q([0, a], [0, \infty))$ tal que

$$\|f(s, \psi_1) - f(s, \psi_2)\| \leq L_{f,l}(s) \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}},$$

para todo $(s, \psi_i) \in [0, l] \times B_l(\varphi, \mathcal{B})$, com $i = 1, 2$.

\mathbf{H}_3 : A função g pertence a $C([0, a] \times \Omega, Y)$ e existe uma função não decrescente $L_g^i \in C([0, a], [0, \infty))$, $i = 1, 2$, e uma função $W \in C([0, a] \times [0, a], [0, \infty))$, tal que $W(t, t) = 0$, para todo $t \in [0, a]$, e

$$\|g(t, \psi_1) - g(s, \psi_2)\|_Y \leq L_g^1(l) W(t, s) + L_g^2(l) \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}},$$

para todo $t, s \in [0, l]$, $\psi_i \in B_l(\varphi, \mathcal{B})$, $i = 1, 2$, e todo $l > 0$ tal que $[0, l] \times B_l(\varphi, \mathcal{B}) \subset [0, a] \times \Omega$.

H₄: A função $f(\cdot, \psi)$ é fortemente mensurável em $[0, a]$, qualquer que seja $\psi \in \Omega$, e $f(t, \cdot) \in C(\Omega, X)$, para todo $t \in [0, a]$. Além disso, existem $m_f \in L^q([0, a], [0, \infty))$ e uma função não decrescente $W_f \in C([0, \infty), (0, \infty))$ tais que

$$\|f(t, \psi)\| \leq m_f(t)W_f(\|\psi\|_{\mathcal{B}}),$$

para todo $(t, \psi) \in [0, a] \times \Omega$.

Vejam os ainda um resultado de continuidade para a função $t \mapsto y_t$.

Lema 3.10. *Suponha que $\varphi(0) \in \Lambda_A$, então a função $t \mapsto y_t$, onde $y : [-r, a] \rightarrow X$ é tal que $y_0 = \varphi$ e $y(t) = T(t)\varphi(0)$, para todo $t \geq 0$, é contínua em $[0, a]$.*

Demonstração. Como $\varphi(0) \in \Lambda_A$, segue que $T(\cdot)\varphi(0)$ é uniformemente contínua em $[0, a]$. Além disso, φ é uniformemente contínua em $[-r, 0]$, uma vez que $\varphi \in \mathcal{B} = C([-r, 0], X)$.

Mostramos, inicialmente, a continuidade de y_t em $(0, a]$. Para tanto, seja $t \in (0, a]$ e $h \in \mathbb{R}$ tal que $t + h \in (0, a]$. Para analisarmos $\|y(t + \theta) - y(t + h + \theta)\|$ dividimos esta parte da demonstração em alguns casos. Dado $\epsilon > 0$,

(I) se $t + \theta, t + h + \theta \geq 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que, se $0 < |h| < \delta_1$, então

$$\|y(t + \theta) - y(t + h + \theta)\| = \|T(t + \theta)\varphi(0) - T(t + h + \theta)\varphi(0)\| < \frac{\epsilon}{4},$$

uma vez que $T(\cdot)\varphi$ é uniformemente contínua em $[0, a]$ e $|(t + \theta) - (t + h + \theta)| = |h| < \delta_1$;

(II) se $t + \theta, t + h + \theta < 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que, se $0 < |h| < \delta_2$, então

$$\|y(t + \theta) - y(t + h + \theta)\| = \|\varphi(t + \theta) - \varphi(t + h + \theta)\| < \frac{\epsilon}{4},$$

pois $|(t + \theta) - (t + h + \theta)| = |h| < \delta_2$ e φ é uniformemente contínua em $[-r, 0]$;

(III) se $t + \theta < 0$ e $t + h + \theta \geq 0$, existe $\delta > 0$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tal que, se $0 < |h| < \delta$, então

$$\|y(t + \theta) - y(t + h + \theta)\| \leq \|\varphi(t + \theta) - \varphi(0)\| + \|\varphi(0) - T(t + h + \theta)\varphi(0)\| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2},$$

pois $|t + \theta| = -t - \theta \leq h \leq |h| < \delta \leq \delta_2$ e $|(t + h + \theta) - 0| = t + h + \theta = h + (t + \theta) < h \leq |h| < \delta \leq \delta_1$;

(IV) se $t + \theta \geq 0$ e $t + h + \theta < 0$, existe $\delta > 0$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tal que, se $0 < |h| < \delta$, então

$$\|y(t + \theta) - y(t + h + \theta)\| \leq \|T(t + \theta)\varphi(0) - \varphi(0)\| + \|\varphi(0) - \varphi(t + h + \theta)\| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2},$$

visto que $|t - \theta| = t + \theta < -h \leq |h| < \delta \leq \delta_1$ e $|(t + h + \theta)| = -t - h - \theta = -h - (t + \theta) \leq -h \leq |h| < \delta \leq \delta_2$.

Dessa forma,

$$\|y(t + \theta) - y(t + h + \theta)\| < \begin{cases} \frac{\epsilon}{4}, & \text{se } t + \theta, t + h + \theta \geq 0, \\ \frac{\epsilon}{2}, & \text{se } t + \theta < 0 \text{ e } t + h + \theta \geq 0, \\ \frac{\epsilon}{2}, & \text{se } t + \theta \geq 0 \text{ e } t + h + \theta < 0, \\ \frac{\epsilon}{4}, & \text{se } t + \theta, t + h + \theta < 0, \end{cases}$$

ou seja, $\|y(t + \theta) - y(t + h + \theta)\| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $\theta \in [-r, 0]$ e $h \in \mathbb{R}$, com $0 < |h| < \delta$, o que implica que $\|y_t - y_{t+h}\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\theta \in [-r, 0]} \{\|y(t + \theta) - y(t + h + \theta)\|\} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Logo, a função $t \mapsto y_t$ é contínua em $(0, a]$. Agora, mostramos a continuidade desta função em $t = 0$. Seja $h > 0$, novamente dividimos a demonstração em casos para analisarmos $\|y(\theta) - y(h + \theta)\|$. Dado $\epsilon > 0$ e $\theta \in [-r, 0]$,

(a) se $h + \theta < 0$, existe $\delta > 0$ (o mesmo tomado anteriormente) tal que, se $0 < h < \delta$, então

$$\|y(\theta) - y(h + \theta)\| = \|\varphi(\theta) - \varphi(h + \theta)\| < \frac{\epsilon}{4},$$

uma vez que $|\theta - (h + \theta)| = h < \delta \leq \delta_2$;

(b) se $h + \theta \geq 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < h < \delta$, então

$$\|y(\theta) - y(h + \theta)\| = \|\varphi(\theta) - \varphi(0)\| + \|\varphi(0) - T(h + \theta)\varphi(0)\| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2},$$

já que $|\theta - 0| = -\theta \leq h < \delta \leq \delta_2$ e $|0 - (h + \theta)| = h + \theta < h < \delta \leq \delta_1$.

Assim,

$$\|y(\theta) - y(h + \theta)\| < \begin{cases} \frac{\epsilon}{4}, & \text{se } h + \theta < 0, \\ \frac{\epsilon}{2}, & \text{se } h + \theta \geq 0, \end{cases}$$

garantindo que $\|y_0 - y_h\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\theta \in [-r, 0]} \{\|y(\theta) - y(h + \theta)\|\} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Portanto, a função $t \mapsto y_t$ é contínua em $[0, a]$. Mais ainda, como $[0, a]$ é compacto, segue que $t \mapsto y_t$ é uniformemente contínua em $[0, a]$. \square

Agora podemos enunciar o primeiro resultado sobre existência de solução para a equação (3.1)-(3.2).

Teorema 3.11. *Suponha a validade das condições \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_3 e \mathbf{H}_4 . Se $T(t)$ é compacto para todo $t > 0$, $\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)}L_g^2(0) < 1$ e $\varphi(0) \in \Lambda_A$, então existe uma solução fraca de (3.1) - (3.2) em $[-r, b]$, para algum $b \in (0, a]$.*

Demonstração. De (3.1) - (3.2) temos que $\varphi \in \Omega$, onde Ω é um subconjunto aberto de \mathcal{B} . Assim, existe $r_1 > 0$ tal que $B_{r_1}(\varphi, \mathcal{B}) \subset \Omega$. Além disso, como assumimos que $\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)}L_g^2(0) < 1$, pelo fato de $L_g^2(\cdot)$ ser contínua, existe $r_2 > 0$ tal que $\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)}L_g^2(s) < 1$, para todo $s \in [0, r_2]$, em particular, $\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)}L_g^2(r_2) < 1$. Dessa forma, tomando $b_1 = \min\{r_1, r_2\}$, segue que $b_1 > 0$, $B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B}) \subset \Omega$ e $\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)}L_g^2(b_1) < 1$.

Mais ainda, como \mathbf{H}_3 e \mathbf{H}_4 são válidas, para $(t, \psi) \in [0, b_1] \times B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B})$, segue que $g(\cdot) \in C([0, b_1] \times B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B}), Y)$ e como W_f é não decrescente, $W_f(\|\psi\|_{\mathcal{B}}) \leq W_f(\|\psi - \varphi\|_{\mathcal{B}} + \|\varphi\|_{\mathcal{B}}) \leq W_f(b_1 + \|\varphi\|_{\mathcal{B}})$. Assim,

- (i) $\|g(t, \psi)\|_Y \leq \|g(t, \psi) - g(t, \varphi)\|_Y + \|g(t, \varphi)\|_Y \leq L_g^1(b_1)W(t, t) + L_g^2(b_1)\|\psi - \varphi\|_{\mathcal{B}} + \|g(t, \varphi)\|_Y$
 $\Rightarrow \|g(t, \varphi)\|_Y \leq L_g^2(b_1)b_1 + \|g(t, \varphi)\|_Y.$
- (ii) $\|g(t, \psi)\| \leq \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\|g(t, \psi)\|_Y \leq \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)}L_g^2(b_1)b_1 + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\|g(t, \varphi)\|_Y$, uma vez que, por \mathbf{H}_1 , a inclusão $i_c : Y \rightarrow X$ é contínua.

Consequentemente, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sup \{ \|g(t, \psi)\|, \|g(t, \psi)\|_Y, W_f(\|\psi\|_{\mathcal{B}}); t \in [0, b_1] \times B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B}) \} \leq C. \quad (3.8)$$

Agora determinamos um intervalo onde valem certas desigualdades, construídas através dos casos a seguir.

- (I) Como $t \mapsto y_t$ é contínua em $[0, a]$, existe $\delta_1^* > 0$, com $\delta_1^* < b_1$, de modo que $\sup_{s \in [0, \delta_1^*]} \{\|y_s - \varphi\|_{\mathcal{B}}\} \leq \frac{(1 - \mu)b_1}{15}$, onde $\mu = \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)}L_g^2(b_1) < 1$. Além disso, como $W \in C([0, a] \times [0, a], [0, \infty))$, para $\frac{(1 - \mu)b_1}{15\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)}L_g^1(b_1)} > 0$, existe $\delta_2^* > 0$ tal que, se $0 < s < \delta_2^*$, então

$$|W(0, s) - W(0, 0)| < \frac{(1 - \mu)b_1}{15\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)}L_g^1(b_1)}.$$

Sabemos que $g(t, \psi) \in Y$, para todo $(t, \psi) \in [0, a] \times \Omega$, então, de \mathbf{H}_1 , segue que $AT(\cdot)g(t, \psi) \in L^1([0, a], X)$, para todo $(t, \psi) \in [0, a] \times \Omega$. Mais ainda, do Lema 3.3, obtemos que $g(t, \psi) \in \Lambda_A$, para todo $(t, \psi) \in [0, a] \times \Omega$. Logo, a função $s \mapsto T(s)g(t, \psi)$ é contínua para todo $s \geq 0$ e $(t, \psi) \in [0, a] \times \Omega$. Em particular, como $\varphi \in \Omega$, segue que a função $s \mapsto T(s)g(0, \varphi)$ é contínua para todo $s \geq 0$. Assim, dado $\frac{(1 - \mu)b_1}{15} > 0$, existe $\delta_3^* > 0$ tal que, se $0 \leq s < \delta_3^*$, então $\|T(s)g(0, \varphi) - T(0)g(0, \varphi)\| < \frac{(1 - \mu)b_1}{15}$.

Dessa forma, tomando $\delta^* = \min\{\delta_1^*, \delta_2^*, \delta_3^*\}$ e $s \geq 0$ tal que $0 \leq s < \delta^*$, então

$$\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)} L_g^1(b_1) W(0, s) + \mu \|y_s - \varphi\|_{\mathcal{B}} + \|T(s)g(0, \varphi) - g(0, \varphi)\| < \frac{(1-\mu)b_1}{5}.$$

(II) Como $AT(\cdot) \in L^1([0, a], \mathcal{L}(Y, X))$, para $\frac{1-\mu}{L_g^2(b_1)} > 0$, existe $\hat{\delta} > 0$ tal que

$$\int_0^{\hat{\delta}} \|AT(s)\| ds < \frac{1-\mu}{L_g^2(b_1)}. \text{ Dessa forma,}$$

$$L_g^2(b_1) \left(\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)} + \int_0^{\hat{\delta}} \|AT(s)\| ds \right) < 1.$$

(III) Para $\frac{(1-\mu)b_1}{10C} > 0$, em que C é a constante obtida em 3.8, existe $\delta'_1 > 0$ tal que $\|AT(\cdot)\|_{L^1([0, \delta'_1], \mathcal{L}(Y,X))} < \frac{(1-\mu)b_1}{10C}$. Além disso, como $q > \frac{1}{1-\alpha}$, segue que $1 - q'\alpha > 0$ implicando que, para $\frac{(1-\mu)b_1}{10CC_0} (1 - q'\alpha)^{\frac{1}{q'}} > 0$, onde C_0 é a constante proveniente do Teorema 2.52, existe $\delta'_2 > 0$ tal que $\|m_f\|_{L^q([0, \delta'_2], [0, \infty))} < \frac{(1-\mu)b_1}{10CC_0} (1 - q'\alpha)^{\frac{1}{q'}}$. Mais ainda, existe $\delta'_3 > 0$ tal que $\delta'_3^{\frac{1}{q'} - \alpha} < 1$.

Dessa forma, tomando $\delta' = \min\{\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3\}$, obtemos que

$$C \|AT(\cdot)\|_{L^1([0, \delta'], \mathcal{L}(Y,X))} + CC_0 \frac{\|m_f\|_{L^q([0, \delta'], [0, \infty))} \delta'^{\frac{1}{q'} - \alpha}}{(1 - q'\alpha)^{\frac{1}{q'}}} < \frac{(1-\mu)b_1}{5}.$$

Finalmente, tomando $b = \min\{\delta^*, \hat{\delta}, \delta'\}$, com $0 < b < \delta_1^*$, temos a validade das três desigualdades a seguir

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{s \in [0, b]} \{ \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)} L_g^1(b_1) W(0, s) + \mu \|y_s - \varphi\|_{\mathcal{B}} + \|(T(s) - I)g(0, \varphi)\| \} < \frac{(1-\mu)b_1}{4}; \\ L_g^2(b_1) \left(\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)} + \int_0^b \|AT(s)\| ds \right) < 1; \\ C \left[\|AT(\cdot)\|_{L^1([0, b], \mathcal{L}(Y,X))} + C_0 \frac{\|m_f\|_{L^q([0, b], [0, \infty))} b^{\frac{1}{q'} - \alpha}}{(1 - q'\alpha)^{\frac{1}{q'}}} \right] < \frac{(1-\mu)b_1}{4}. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Seja $S(b, \frac{b_1}{2}) = \{u \in C([-r, b], X); u_0 \equiv 0, \|u\|_{C([0, b], X)} \leq \frac{b_1}{2}\}$, munido da norma $\|\cdot\|_{C([0, b], X)}$.

Note que $S(b, \frac{b_1}{2})$ é um subespaço fechado de $C([-r, b], X)$, visto que dada uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S(b, \frac{b_1}{2})$ tal que $u_n \rightarrow u$, com $u \in C([-r, b], X)$, obtemos que $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$. De fato, como $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente, ela é uma sequência de Cauchy no espaço

de Banach $C([-r, b], X)$, logo $u \in C([-r, b], X)$. Além disso, $u_0(\theta) = u(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)_0(\theta) = 0$, para todo $\theta \in [-r, 0]$ e, visto que $\|u_n\|_{C([0, b], X)} \leq \frac{b_1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a convergência é na norma $\|\cdot\|_{C([0, b], X)}$, temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{C([0, b], X)} &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right\|_{C([0, b], X)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{C([0, b], X)} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1}{2} = \frac{b_1}{2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$ e, então, $S(b, \frac{b_1}{2})$ é um subespaço fechado do espaço de Banach $C([-r, b], X)$. Portanto, $S(b, \frac{b_1}{2})$ também é um espaço de Banach.

Definimos a aplicação $\Gamma : S(b, \frac{b_1}{2}) \rightarrow C([-r, b], X)$ por $(\Gamma u)_0 \equiv 0$ e, para todo $t \in [0, b]$,

$$(\Gamma u)(t) = T(t)g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s)ds + \int_0^t T(t-s)f(s, u_s + y_s)ds.$$

Mostramos que Γ , como definida acima, está bem definida, no sentido de que as integrais que a compõem existem e $\Gamma u \in C([-r, b], X)$.

Considere $(t, u) \in [0, b] \times S(b, \frac{b_1}{2})$, então, da definição de $S(b, \frac{b_1}{2})$ e da estimativa em (I), temos

$$\begin{aligned} \|u_t + y_t - \varphi\|_{\mathcal{B}} &\leq \|u_t\|_{\mathcal{B}} + \|y_t - \varphi\|_{\mathcal{B}} \\ &= \sup_{\theta \in [-r, 0]} \{\|u(t + \theta)\|\} + \|y_t - \varphi\|_{\mathcal{B}} \\ &= \sup_{\theta \in [-r, 0]; t + \theta \geq 0} \{\|u(t + \theta)\|\} + \|y_t - \varphi\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq \sup_{s \in [0, b]} \{\|u(s)\|\} + \sup_{s \in [0, b]} \{\|y_s - \varphi\|_{\mathcal{B}}\} \\ &\leq \frac{b_1}{2} + \frac{(1 - \mu)b_1}{2} < \frac{b_1}{2} + \frac{b_1}{2} = b_1, \end{aligned}$$

ou seja, $u_t + y_t \in B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B})$. Assim, pelo que fizemos no início da demonstração, segue que $\|g(t, u_t + y_t)\| \leq C$, $\|g(t, u_t + y_t)\|_Y \leq C$ e $W_f(\|u_t + y_t\|_{\mathcal{B}}) \leq C$. Dessa forma, pelo critério de Bochner para funções integráveis (Teorema A.16), segue que as integrais que compõem Γ existem, visto que

(i)

$$\begin{aligned} \int_0^t \|AT(t-s)g(s, u_s + y_s)\| ds &\leq \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|g(s, u_s + y_s)\|_Y ds \\ &\leq C \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} ds < \infty, \end{aligned}$$

pois, como $t-s \in [0, a]$, para todo $0 \leq s \leq t$, segue de \mathbf{H}_1 que $s \mapsto AT(t-s)$ é integrável

para $s \in [0, t]$.

(ii)

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|T(t-s)f(s, u_s + y_s)\| ds &\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \|f(s, u_s + y_s)\| ds \\
&\leq \int_0^t \frac{C_0}{(t-s)^\alpha} m_f(s) W_f(\|u_s + y_s\|_{\mathcal{B}}) ds \\
&\leq \int_0^t \frac{C_0}{(t-s)^\alpha} m_f(s) C ds \\
&\leq CC_0 \left[\left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha q'} ds \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_0^t (m_f(s))^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\leq CC_0 \left[\left(\frac{t^{1-\alpha q'}}{1-\alpha q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \|m_f\|_{L^q([0,a],[0,\infty))} \right] < \infty,
\end{aligned}$$

pois $m_f \in L^q([0, a], [0, \infty))$, com $t \leq b < a$, e $1 - \alpha q' > 0$.

Além das integrais que compõem Γ existirem, como $g(0, \varphi) \in Y \subset X$, segue de \mathbf{H}_1 que $AT(\cdot)g(0, \varphi)$ é integrável em $[0, b]$ e assim, pelo Lema 3.3, $g(0, \varphi) \in \Lambda_A$, implicando que a função $t \mapsto T(t)g(0, \varphi)$ é contínua para todo $t \in [0, b]$. Mais ainda, a função $t \mapsto g(t, u_t + y_t)$ é contínua para todo $t \in [0, b]$. De fato, dado $s \in [-r, b]$, como $u \in C([-r, b], X)$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|h| < \delta$ e $t+h \in [-r, b]$, então $\sup_{s \in [-r, b]} \|u(s) - u(s+h)\| < \frac{\epsilon}{2}$. Desse modo, para $t \in [0, b]$ e $0 < |h| < \delta$, tal que $t+h \in [0, b]$,

$$\|u_t - u_{t+h}\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|u(t+\theta) - u(t+h+\theta)\| \leq \sup_{s \in [-r, b]} \|u(s) - u(s+h)\| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Dessa forma, $t \mapsto u_t$ é contínua em $[0, b]$ e, como $t \mapsto y_t$ também é contínua em $[0, b]$ (Lema 3.10) e $g(\cdot) \in C([0, a] \times \Omega, Y)$, segue que a função composta $t \mapsto g(t, u_t + y_t)$ é contínua para todo $t \in [0, b]$. Portanto, Γ está bem definida.

Consideramos a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, onde $(\Gamma_i u)_0 \equiv 0$, $i = 1, 2$, e

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 u(t) &= T(t)g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds, \quad t \in [0, b]; \\
\Gamma_2 u(t) &= \int_0^t T(t-s)f(s, u_s + y_s) ds, \quad t \in [0, b].
\end{aligned}$$

Logo, pelo que acabamos de argumentar, $\Gamma_1, \Gamma_2 : S(b, \frac{b_1}{2}) \longrightarrow C([-r, b], X)$, estão bem definidas.

Nosso objetivo é usar o Teorema do ponto fixo de Sadovskii (Teorema A.21) para garantir que Γ tem um ponto fixo em $S(b, \frac{b_1}{2})$, o qual dará uma solução fraca para (3.1)-(3.2). Para isso, provamos a seguir que $\Gamma(S(b, \frac{b_1}{2})) \subset S(b, \frac{b_1}{2})$ e Γ é um operador condensante (Definição A.20).

$$(1) \Gamma\left(S(b, \frac{b_1}{2})\right) \subset S(b, \frac{b_1}{2}).$$

De fato, seja $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$, então $(\Gamma_u)(t) = 0$, para todo $t \in [-r, 0]$, e, para $t \in [0, b]$, temos

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t)\| &= \|\Gamma_1 u(t) + \Gamma_2 u(t)\| \leq \|\Gamma_1 u(t)\| + \|\Gamma_2 u(t)\| \\
&\leq \|T(t)g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t)\| + \int_0^t \|AT(t-s)g(s, u_s + y_s)\| ds \\
&\quad + \int_0^t \|T(t-s)f(s, u_s + y_s)\| ds \\
&\leq \|T(t)g(0, \varphi) - g(0, \varphi)\| + \|g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t)\| \\
&\quad + \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|g(s, u_s + y_s)\|_Y ds \\
&\quad + \int_0^t \|T(t-s)\| \|f(s, u_s + y_s)\| ds \\
&\leq \|T(t)g(0, \varphi) - g(0, \varphi)\| + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t)\|_Y \\
&\quad + C \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} ds + \int_0^t \frac{C_0}{(t-s)^\alpha} m_f(s) W_f(\|u_s + y_s\|_{\mathcal{B}}) ds \\
&\leq \|T(t)g(0, \varphi) - g(0, \varphi)\| + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} [L_g^1(b)W(0, t) \\
&\quad + L_g^2(b)\|\varphi - u_t - y_t\|_{\mathcal{B}}] + C \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} ds \\
&\quad + \int_0^t \frac{CC_0 m_f(s)}{(t-s)^\alpha} ds \\
&\leq \|T(t)g(0, \varphi) - g(0, \varphi)\| + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} [L_g^1(b_1)W(0, t) + L_g^2(b_1)\|u_t\|_{\mathcal{B}} \\
&\quad + L_g^2(b_1)\|\varphi - y_t\|_{\mathcal{B}}] + C \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} ds \\
&\quad + CC_0 \int_0^t (t-s)^{-\alpha} m_f(s) ds \\
&\leq \left[\| [T(t) - I]g(0, \varphi) \| + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} L_g^1(b_1)W(0, t) \right. \\
&\quad \left. + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} L_g^2(b_1)\|\varphi - y_t\|_{\mathcal{B}} \right] \\
&\quad + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} L_g^2(b_1) \frac{b_1}{2} + C \int_0^b \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} ds \\
&\quad + CC_0 \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha q'} ds \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_0^b (m_f(s))^q ds \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{t \in [0, b]} \left\{ \| [T(t) - I]g(0, \varphi) \| + \| i_c \|_{\mathcal{L}(Y, X)} L_g^1(b_1) W(0, t) + \mu \| \varphi - y_t \|_{\mathcal{B}} \right\} \\
&\quad + \mu \frac{b_1}{2} + C \| AT(\cdot) \|_{L^1([0, b], \mathcal{L}(Y, X))} ds + CC_0 \| m_f \|_{L^q([0, b], [0, \infty))} \left(\frac{t^{1-\alpha q'}}{1-\alpha q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\leq \frac{(1-\mu)b_1}{4} + \frac{\mu b_1}{2} + C \left[\| AT(\cdot) \|_{L^1([0, b], \mathcal{L}(Y, X))} \right. \\
&\quad \left. + C_0 \| m_f \|_{L^q([0, b], [0, \infty))} \frac{b^{\frac{1}{q'} - \alpha}}{(1-\alpha q')^{\frac{1}{q'}}} \right] \\
&\leq \frac{(1-\mu)b_1}{4} + \frac{\mu b_1}{2} + \frac{(1-\mu)b_1}{4} = \frac{b_1}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, $\Gamma u \in C([-r, b], X)$, $(\Gamma u)_0 \equiv 0$ e

$$\| \Gamma u \|_{C([0, b], X)} = \sup_{t \in [0, b]} \| \Gamma u(t) \| \leq \sup_{t \in [0, b]} \frac{b_1}{2} = \frac{b_1}{2}.$$

Portanto, $\Gamma \left(S(b, \frac{b_1}{2}) \right) \subset S(b, \frac{b_1}{2})$.

Para provar que Γ é um operador condensante, mostramos que Γ_1 é uma contração e Γ_2 é um operador completamente contínuo.

(2) Γ_1 é uma contração em $S(b, \frac{b_1}{2})$.

Com efeito, sejam $u, v \in S(b, \frac{b_1}{2})$. Para $t \in [0, b]$, temos

$$\begin{aligned}
\| \Gamma_1 u(t) - \Gamma_1 v(t) \| &= \left\| T(t)g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds \right. \\
&\quad \left. - T(t)g(0, \varphi) + g(t, v_t + y_t) + \int_0^t AT(t-s)g(s, v_s + y_s) ds \right\| \\
&\leq \| g(t, u_t + y_t) - g(t, v_t + y_t) \| + \left\| \int_0^t [AT(t-s)g(s, u_s + y_s) \right. \\
&\quad \left. - g(s, v_s + y_s)] ds \right\| \\
&\leq \| i_c \|_{\mathcal{L}(Y, X)} \| g(t, u_t + y_t) - g(t, v_t + y_t) \|_Y \\
&\quad + \int_0^t \left[\| AT(t-s) \|_{\mathcal{L}(Y, X)} \| g(s, u_s + y_s) - g(s, v_s + y_s) \|_Y \right] ds \\
&\leq \| i_c \|_{\mathcal{L}(Y, X)} [L_g^1(b)W(t, t) + L_g^2(b)\|u_t - v_t\|_{\mathcal{B}}] \\
&\quad + \int_0^t \| AT(t-s) \|_{\mathcal{L}(Y, X)} [L_g^1(b)W(s, s) + L_g^2(b)\|u_s - v_s\|_{\mathcal{B}}] ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)} L_g^2(b_1) \|u_t - v_t\|_{\mathcal{B}} \\
&\quad + L_g^2(b_1) \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|u_s - v_s\|_{\mathcal{B}} ds \\
&\leq \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)} L_g^2(b_1) \|u - v\|_{C([0,b],X)} \\
&\quad + L_g^2(b_1) \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|u - v\|_{C([0,b],X)} ds \\
&\leq L_g^2(b_1) \left(\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)} + \int_0^b \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds \right) \|u - v\|_{C([0,b],X)}.
\end{aligned}$$

Pelas desigualdades em (3.9), segue que

$$L_g^2(b_1) \left(\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)} + \int_0^b \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds \right) < 1,$$

então, fazendo $K = L_g^2(b_1) \left(\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)} + \int_0^b \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds \right)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_1 u - \Gamma_1 v\|_{C([0,b],X)} &= \sup_{t \in [0,b]} \{ \|\Gamma_1 u(t) - \Gamma_1 v(t)\| \} \\
&\leq \sup_{t \in [0,b]} \{ K \|u - v\|_{C([0,b],X)} \} = K \|u - v\|_{C([0,b],X)}.
\end{aligned}$$

Portanto, Γ_1 é uma contração em $S(b, \frac{b_1}{2})$.

(3) Γ_2 é completamente contínua em $S(b, \frac{b_1}{2})$, ou seja, Γ_2 é contínua e compacta em $S(b, \frac{b_1}{2})$.

(3.1) Γ_2 é contínua em $S(b, \frac{b_1}{2})$.

Mostramos a continuidade uniforme de Γ_2 , uma vez que estamos trabalhando com a norma de $C([0, b], X)$. Porém, antes disso, note que se $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $S(b, \frac{b_1}{2})$ tal que $u_n \rightarrow u$, então $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$. Além disso, por \mathbf{H}_4 , $f(s, \cdot) \in C(\Omega, X)$, para todo $s \in [0, a]$ e

$$\begin{aligned}
\|(u_n)_s - u_s\|_{\mathcal{B}} &= \sup_{\theta \in [-r, 0]} \{ \|u_n(s+\theta) - u(s+\theta)\| \} \\
&= \sup_{\theta \in [-r, 0], s+\theta \geq 0} \{ \|u_n(s+\theta) - u(s+\theta)\| \} \\
&\leq \sup_{t \in [0, b]} \{ u_n(t) - u(t) \} = \|u_n - u\|_{C([0,b],X)},
\end{aligned}$$

ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, $(u_n)_s \rightarrow u_s$, para todo $s \in [0, b]$. Dessa forma, $f(s, (u_n)_s + y_s) \rightarrow f(s, u_s + y_s)$, para todo $s \in [0, b]$ e, como $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \geq 0$, segue que $T(t-s)f(s, (u_n)_s + y_s) \rightarrow T(t-s)f(s, u_s + y_s)$, quando $n \rightarrow \infty$, para todo $s \in [0, b]$.

Mais ainda, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \|T(t-s)f(s, (u_n)_s + y_s)\| &\leq \|T(t-s)\| \|f(s, (u_n)_s + y_s)\| \\ &\leq \frac{C_0}{(t-s)^\alpha} m_f(s) W_f(\|(u_n)_s + y_s\|_{\mathcal{B}}) \\ &\leq CC_0(t-s)^{-\alpha} m_f(s). \end{aligned}$$

Assim, como $CC_0(t-s)^{-\alpha} m_f(s)$ é uma função integrável, pelo Teorema da convergência dominada, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\Gamma_2 u_n)(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t T(t-s)f(s, (u_n)_s + y_s) ds \\ &= \int_0^t T(t-s)f(s, u_s + y_s) ds = (\Gamma_2 u)(t), \end{aligned} \quad (3.10)$$

para todo $t \in [0, b]$.

Antes de prosseguirmos com a justificativa da continuidade de Γ_2 , mostramos que o conjunto $\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2})) = \{\Gamma_2 u; u \in S(b, \frac{b_1}{2})\}$ é equicontínuo.

Pelo Teorema 2.52, sabemos que $T(\cdot) \in C((0, \infty), \mathcal{L}(X))$. Assim, para todo $0 < \epsilon < b$, a função $t \mapsto T(t)$, restrita ao compacto $[\epsilon, b]$, é uniformemente contínua e então, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < h < \delta$, com $t, t+h \in [\epsilon, b]$, temos $\|T(t+h) - T(t)\| < \epsilon$.

Em particular, dados $t \in (a, b)$ e $\tilde{\epsilon} > 0$, tomamos $\epsilon > 0$ de modo que $\epsilon < 1$, $0 < 2\epsilon < t$ e $\epsilon < \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{18b_1}\right)^{\frac{q'}{1-\alpha q'}}$. Assim, como argumentamos acima, existe $\delta > 0$ de modo que $\|T(s+h) - T(s)\| < \epsilon$, para todo $s \in [\epsilon, b]$ e $h \in \mathbb{R}$, com $0 < h < \delta$ e $s+h \in [\epsilon, b]$.

Seja $\tilde{\delta} = \min\{\delta, \epsilon\}$. Então, para $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$ e $h \in \mathbb{R}$, com $0 < h < \tilde{\delta}$, temos

$$\begin{aligned} \|\Gamma_2 u(t+h) - \Gamma_2 u(t)\| &= \left\| \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s, u_s + y_s) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t T(t-s)f(s, u_s + y_s) ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_0^{t-2\epsilon} T(t+h-s)f(s, u_s + y_s) ds - \int_0^{t-2\epsilon} T(t-s)f(s, u_s + y_s) ds \right\| \\ &\quad + \left\| \int_{t-2\epsilon}^{t+h} T(t+h-s)f(s, u_s + y_s) ds - \int_{t-2\epsilon}^t T(t-s)f(s, u_s + y_s) ds \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| \int_0^{t-2\epsilon} T(\epsilon+t+h-s-\epsilon) f(s, u_s + y_s) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t-2\epsilon} T(\epsilon+t-s-\epsilon) f(s, u_s + y_s) ds \right\| \\
&+ \int_{t-2\epsilon}^{t+h} \|T(t+h-s)\| \|f(s, u_s + y_s)\| ds + \int_{t-2\epsilon}^t \|T(t-s)\| \|f(s, u_s + y_s)\| ds \\
&\leq \left\| [T(\epsilon+h) - T(\epsilon)] \int_0^{t-2\epsilon} T(t-s-\epsilon) f(s, u_s + y_s) ds \right\| \\
&+ CC_0 \int_{t-2\epsilon}^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha} m_f(s) ds + CC_0 \int_{t-2\epsilon}^t (t-s)^{-\alpha} m_f(s) ds \\
&\leq \epsilon CC_0 \int_0^{t-2\epsilon} (t-s-\epsilon)^{-\alpha} m_f(s) ds \\
&+ CC_0 \int_{t-2\epsilon}^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha} m_f(s) ds + CC_0 \int_{t-2\epsilon}^t (t-s)^{-\alpha} m_f(s) ds \\
&\leq CC_0 \left[\epsilon \left(\int_0^{t-2\epsilon} (t-s-\epsilon)^{-\alpha q'} ds \right)^{\frac{1}{q'}} \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))} \right. \\
&\quad + \left(\int_{t-2\epsilon}^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha q'} ds \right)^{\frac{1}{q'}} \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))} \\
&\quad \left. + \left(\int_{t-2\epsilon}^t (t-s)^{-\alpha q'} ds \right)^{\frac{1}{q'}} \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))} \right] \\
&= CC_0 \left[\epsilon \left(\frac{-(\epsilon)^{1-\alpha q'} + (t-\epsilon)^{1-\alpha q'}}{1-\alpha q'} \right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\frac{(2\epsilon+h)^{1-\alpha q'}}{1-\alpha q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{(2\epsilon)^{1-\alpha q'}}{1-\alpha q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \right] \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))} \\
&\leq \frac{CC_0}{(1-\alpha q')^{\frac{1}{q'}}} \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))} \left[\epsilon b^{\frac{1}{q'}-\alpha} + (3\epsilon)^{\frac{1}{q'}-\alpha} + (2\epsilon)^{\frac{1}{q'}-\alpha} \right] \\
&\leq \frac{CC_0}{(1-\alpha q')^{\frac{1}{q'}}} \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))} \left[\epsilon b^{\frac{1}{q'}-\alpha} + 2(3\epsilon)^{\frac{1}{q'}-\alpha} \right].
\end{aligned}$$

Agora, considerando as limitações que determinamos anteriormente e o fato de $1 + \frac{1}{q'} - \alpha < 2$ e $b \leq \delta' \leq \delta'_3$, com $(\delta'_3)^{\frac{1}{q'}-\alpha} < 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{CC_0}{(1-\alpha q')^{\frac{1}{q'}}} \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))} \left[\epsilon b^{\frac{1}{q'}-\alpha} + 2(3\epsilon)^{\frac{1}{q'}-\alpha} \right] \\
& \leq \frac{CC_0}{(1-\alpha q')^{\frac{1}{q'}}} \frac{(1-\mu)b_1}{CC_0} (1-\alpha q')^{\frac{1}{q'}} \left[\epsilon + 2 \cdot 3^{\frac{1}{q'}-\alpha} \epsilon^{\frac{1}{q'}-\alpha} \right] \\
& \leq (1-\mu)b_1 \left[\epsilon + 3 \cdot 3^{\frac{1}{q'}-\alpha} \epsilon^{\frac{1}{q'}-\alpha} \right] = (1-\mu)b_1 \left[\epsilon + 3^{1+\frac{1}{q'}-\alpha} \epsilon^{\frac{1}{q'}-\alpha} \right] \\
& \leq (1-\mu)b_1 \left[\epsilon + 3^2 \epsilon^{\frac{1}{q'}-\alpha} \right] < b_1 \left[9\epsilon + 9\epsilon^{\frac{1}{q'}-\alpha} \right] = 9b_1 \left[\epsilon + \epsilon^{\frac{1}{q'}-\alpha} \right] \\
& \leq 9b_1 \left[\epsilon^{\frac{1}{q'}-\alpha} + \epsilon^{\frac{1}{q'}-\alpha} \right] = 18b_1 \epsilon^{\frac{1}{q'}-\alpha} < 18b_1 \left[\left(\frac{\tilde{\epsilon}}{18b_1} \right)^{\frac{q'}{1-\alpha q'}} \right]^{\frac{1}{q'}-\alpha} = \tilde{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Assim, $\Gamma_2\left(S(b, \frac{b_1}{2})\right)$ é equicontínuo à direita de t , para todo $t \in (0, b)$.

Usando um argumento semelhante, mostramos que $\Gamma_2\left(S(b, \frac{b_1}{2})\right)$ é equicontínuo à esquerda de $t \in (0, b]$. De fato, usando novamente o Teorema 2.52, dado $0 < \epsilon < b$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(t-h) - T(t)\| < \epsilon$, para todo $t \in [\epsilon, b]$ e $h \in \mathbb{R}$ tal que $0 < h < \delta$ e $t-h \in [\epsilon, b]$. Logo, dados $t \in (0, b]$ e $\tilde{\epsilon} > 0$, tomamos $\epsilon > 0$ de modo que $\epsilon < 1$, $0 < 2\epsilon < t$ e $\epsilon < \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{8b_1}\right)^{\frac{q'}{1-\alpha q'}}$. Então, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $\|T(s-h) - T(s)\| < \epsilon$, para todo $s \in [\epsilon, b]$ e $h \in \mathbb{R}$ com $0 < h < \delta$ e $s-h \in [\epsilon, b]$.

Tomamos $\tilde{\delta} = \min\{\delta, \epsilon\}$. Para $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$ e $h \in \mathbb{R}$ com $0 < h < \tilde{\delta}$, temos $\epsilon < 2\epsilon - h < 2\epsilon < t < b$, $0 < t - 2\epsilon < t - h$ e

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_2 u(t-h) - \Gamma_2 u(t)\| &= \left\| \int_0^{t-h} T(t-h-s) f(s, u_s + y_s) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t T(t-s) f(s, u_s + y_s) ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^{t-2\epsilon} T(t-h-s) f(s, u_s + y_s) ds - \int_0^{t-2\epsilon} T(t-s) f(s, u_s + y_s) ds \right\| \\
&\quad + \left\| \int_{t-2\epsilon}^{t-h} T(t-h-s) f(s, u_s + y_s) ds - \int_{t-2\epsilon}^t T(t-s) f(s, u_s + y_s) ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^{t-2\epsilon} T(2\epsilon+t-h-s-2\epsilon) f(s, u_s + y_s) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t-2\epsilon} T(2\epsilon+t-s-2\epsilon) f(s, u_s + y_s) ds \right\| \\
&\quad + \int_{t-2\epsilon}^{t-h} \|T(t-h-s)\| \|f(s, u_s + y_s)\| ds - \int_{t-2\epsilon}^t \|T(t-s)\| \|f(s, u_s + y_s)\| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| \left[T(2\epsilon - h) - T(2\epsilon) \right] \int_0^{t-2\epsilon} T(t-s-2\epsilon) f(s, u_s + y_s) ds \right\| \\
&+ CC_0 \int_{t-2\epsilon}^{t-h} (t-h-s)^{-\alpha} m_f(s) ds + CC_0 \int_{t-2\epsilon}^t (t-s)^{-\alpha} m_f(s) ds \\
&\leq \epsilon CC_0 \int_0^{t-2\epsilon} (t-s-2\epsilon)^{-\alpha} m_f(s) ds \\
&+ CC_0 \int_{t-2\epsilon}^{t-h} (t-h-s)^{-\alpha} m_f(s) ds + CC_0 \int_{t-2\epsilon}^t (t-s)^{-\alpha} m_f(s) ds \\
&\leq CC_0 \left[\epsilon \left(\int_0^{t-2\epsilon} (t-s-2\epsilon)^{-\alpha q'} ds \right)^{\frac{1}{q'}} \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))} \right. \\
&\quad + \left(\int_{t-2\epsilon}^{t-h} (t-h-s)^{-\alpha q'} ds \right)^{\frac{1}{q'}} \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))} \\
&\quad \left. + \left(\int_{t-2\epsilon}^t (t-s)^{-\alpha q'} ds \right)^{\frac{1}{q'}} \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))} \right] \\
&= CC_0 \left[\epsilon \left(\frac{(t-2\epsilon)^{1-\alpha q'}}{1-\alpha q'} \right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\frac{(2\epsilon-h)^{1-\alpha q'}}{1-\alpha q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{(2\epsilon)^{1-\alpha q'}}{1-\alpha q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \right] \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))} \\
&\leq \frac{CC_0}{(1-\alpha q')^{\frac{1}{q'}}} \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))} \left[\epsilon b^{\frac{1}{q'}-\alpha} + (2\epsilon)^{\frac{1}{q'}-\alpha} + (2\epsilon)^{\frac{1}{q'}-\alpha} \right] \\
&\leq \frac{CC_0}{(1-\alpha q')^{\frac{1}{q'}}} \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))} \left[\epsilon b^{\frac{1}{q'}-\alpha} + 2(2\epsilon)^{\frac{1}{q'}-\alpha} \right] \\
&\leq (1-\mu)b_1 \left[\epsilon + 2 \cdot 2^{\frac{1}{q'}-\alpha} \epsilon^{\frac{1}{q'}-\alpha} \right] = (1-\mu)b_1 \left[\epsilon + 2^{1+\frac{1}{q'}-\alpha} \epsilon^{\frac{1}{q'}-\alpha} \right] \\
&\leq (1-\mu)b_1 \left[4\epsilon + 4\epsilon^{\frac{1}{q'}-\alpha} \right] \leq 4b_1 \left[\epsilon^{\frac{1}{q'}-\alpha} + \epsilon^{\frac{1}{q'}-\alpha} \right] \\
&= 8b_1 \epsilon^{\frac{1}{q'}-\alpha} < 8b_1 \left[\left(\frac{\tilde{\epsilon}}{8b_1} \right)^{\frac{q'}{1-\alpha q'}} \right]^{\frac{1}{q'}-\alpha} = \tilde{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Logo, $\Gamma_2\left(S(b, \frac{b_1}{2})\right)$ é equicontínuo à esquerda de $t \in (0, b]$. Portanto, como $\Gamma_2 u(t) = 0$ para todo $t \in [-r, 0]$ e o conjunto $[-r, b]$ é compacto, o Teorema A.7 garante que $\Gamma_2\left(S(b, \frac{b_1}{2})\right)$ é equicontínuo.

Agora, voltamos a considerar a continuidade da função Γ_2 . Como $\Gamma_2\left(S(b, \frac{b_1}{2})\right)$ é equicontínuo, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, se $0 < |h| < \delta$, então $\|\Gamma_2 u(t+h) - \Gamma_2 u(t)\| < \frac{\epsilon}{4}$, para todo $t \in [-r, b]$ e todo $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$. Dessa forma, como $[0, b]$ é compacto, segue que $[0, b] \subset \bigcup_{i=1}^k B_\delta(t_i, \mathbb{R})$, onde $t_i \in [0, b]$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Logo, dado $t \in [0, b]$, existe $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $|t - t_j| < \delta$. Então,

$$\begin{aligned} \|\Gamma_2 u_n(t) - \Gamma_2 u(t)\| &\leq \|\Gamma_2 u_n(t) - \Gamma_2 u_n(t_j)\| + \|\Gamma_2 u_n(t_j) - \Gamma_2 u(t_j)\| \\ &\quad + \|\Gamma_2 u(t_j) - \Gamma_2 u(t)\|. \end{aligned}$$

Note que, de (3.10), para cada $t_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$, existe $n_i \in \mathbb{N}$, tal que $\|\Gamma_2 u_n(t_i) - \Gamma_2 u(t_i)\| < \frac{\epsilon}{4}$, para todo $n > n_i$. Assim, tomando $n_0 = \max\{n_i, i = 1, 2, \dots, k\}$, temos $\|\Gamma_2 u_n(t) - \Gamma_2 u(t)\| < \frac{3\epsilon}{4}$, para todo $t \in [0, b]$ e para todo $n > n_0$, pois $|t - t_j| < \delta$.

Desse modo,

$$\|\Gamma_2 u_n - \Gamma_2 u\| = \sup_{t \in [0, b]} \{\|\Gamma_2 u_n(t) - \Gamma_2 u(t)\|\} \leq \frac{3\epsilon}{4} < \epsilon.$$

Portanto, Γ_2 é contínua em $S(b, \frac{b_1}{2})$.

(3.2) Γ_2 é compacta em $S(b, \frac{b_1}{2})$.

Como $S(b, \frac{b_1}{2})$ é limitado, é suficiente mostrarmos que $\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2}))$ é relativamente compacto, uma vez que se B é um subconjunto limitado de $S(b, \frac{b_1}{2})$, $\overline{\Gamma_2(B)} \subset \overline{\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2}))}$ e então, se o conjunto maior é compacto, concluímos que $\overline{\Gamma_2(B)}$ é compacto. Para garantir a compacidade de Γ_2 , visto que $\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2})) \subset C([-r, b], X)$, basta mostrarmos que $\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2}))$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Arzelà - Ascoli (Teorema A.8). No item anterior já mostramos que $\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2}))$ é equicontínuo, restando mostrar, apenas, que $\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2}))(t) = \{\Gamma_2 u(t); u \in S(b, \frac{b_1}{2})\}$ é relativamente compacto para todo $t \in [-r, b]$. Para isso, note que, se $t \in [-r, 0]$, $\Gamma_2 u(t) = 0$, para todo $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$, ou seja, $\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2}))(t) = \{0\}$, para todo $t \in [-r, 0]$. Então, suponha que $t \in (0, b]$. Dado $\tilde{\epsilon} > 0$ tome $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $0 < 2\epsilon < t \leq b$ e $\frac{CC_0(2\epsilon)^{\frac{1}{q'} - \alpha} \|m_f\|_{L^q[0, b]}}{(1 - \alpha q')^{\frac{1}{q'}}} < \tilde{\epsilon}$. Dessa forma, dado $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_2 u(t) &= \int_0^t T(t-s) f(s, u_s + y_s) ds = \int_0^t T(\epsilon + t - s - \epsilon) f(s, u_s + y_s) ds \\ &= T(\epsilon) \int_0^{t-2\epsilon} T(t-s-\epsilon) f(s, u_s + y_s) ds + \int_{t-2\epsilon}^t T(t-s) f(s, u_s + y_s) ds, \end{aligned}$$

onde $t - s - \epsilon > 0$, já que $0 < s < t - 2\epsilon$, o que garante que $-t + \epsilon < s - t + \epsilon < -\epsilon$ e então, $0 < \epsilon < t - s - \epsilon$. Além disso, note que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^{t-2\epsilon} T(t-s-\epsilon) f(s, u_s + y_s) ds \right\| &\leq \int_0^{t-2\epsilon} \|T(t-s-\epsilon)\| \|f(s, u_s + y_s)\| ds \\
&\leq \int_0^{t-2\epsilon} \frac{C_0}{(t-s-\epsilon)^\alpha} m_f(s) W_f(\|u_s + y_s\|_{\mathcal{B}}) ds \\
&\leq CC_0 \left(\int_0^{t-2\epsilon} (m_f(s))^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{t-2\epsilon} (t-s-\epsilon)^{-\alpha q'} ds \right)^{\frac{1}{q'}} \\
&= CC_0 \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))} \left(\frac{-(\epsilon)^{1-\alpha q'} + (t-\epsilon)^{1-\alpha q'}}{1-\alpha q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\leq CC_0 \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))} \left(\frac{(t-\epsilon)^{1-\alpha q'}}{1-\alpha q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \leq CC_0 \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))} \frac{b^{\frac{1}{q'}-\alpha}}{(1-\alpha q')^{\frac{1}{q'}}}.
\end{aligned}$$

Assim, se $r^1 = \frac{CC_0 b^{\frac{1}{q'}-\alpha} \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))}}{(1-\alpha q')^{\frac{1}{q'}}}$, então

$$T(\epsilon) \int_0^{t-2\epsilon} T(t-s-\epsilon) f(s, u_s + y_s) ds \in T(\epsilon) \left(B_{r^1}(0, X) \right).$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{t-2\epsilon}^t T(t-s) f(s, u_s + y_s) ds \right\| &\leq \int_{t-2\epsilon}^t \|T(t-s)\| \|f(s, u_s + y_s)\| ds \\
&\leq \int_{t-2\epsilon}^t \frac{C_0}{(t-s)^\alpha} m_f(s) W_f(\|u_s + y_s\|_{\mathcal{B}}) ds \\
&\leq CC_0 \left(\int_{t-2\epsilon}^t (t-s)^{-\alpha q'} ds \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{t-2\epsilon}^t (m_f(s))^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{CC_0 (2\epsilon)^{\frac{1}{q'}-\alpha} \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))}}{(1-\alpha q')^{\frac{1}{q'}}}
\end{aligned}$$

e, fazendo $r_\epsilon^2 = \frac{CC_0 (2\epsilon)^{\frac{1}{q'}-\alpha} \|m_f\|_{L^q([0,b],[0,\infty))}}{(1-\alpha q')^{\frac{1}{q'}}}$, obtemos que $\int_{t-2\epsilon}^t T(t-s) f(s, u_s + y_s) ds \in B_{r_\epsilon^2}(0, X)$.

Portanto, $(\Gamma_2 u)(t) \in T(\epsilon) \left(B_{r^1}(0, X) \right) + B_{r_\epsilon^2}(0, X) \subset \overline{T(\epsilon) \left(B_{r^1}(0, X) \right) + B_{r_\epsilon^2}(0, X)}$. Como $T(t)$ é compacto para todo $t > 0$, segue que $T(\epsilon)$ é compacto, o que implica que $T(\epsilon) \left(B_{r^1}(0, X) \right)$ é relativamente compacto, ou seja $\overline{T(\epsilon) \left(B_{r^1}(0, X) \right)}$ é compacto. Assim,

$\Gamma_2\left(S\left(b, \frac{b_1}{2}\right)\right)(t) \subset K_\epsilon + C_\epsilon$, com K_ϵ compacto e $\text{diam}(C_\epsilon) \rightarrow 0$, quando $\epsilon \rightarrow 0$. Dessa forma, pela Proposição A.19, concluímos que $\Gamma_2\left(S\left(b, \frac{b_1}{2}\right)\right)(t)$ é relativamente compacto para todo $t \in (0, b]$. Portanto, $\Gamma_2\left(S\left(b, \frac{b_1}{2}\right)\right)(t)$ é relativamente compacto para todo $t \in [-r, b]$, uma vez que como já argumentamos $\Gamma_2\left(S\left(b, \frac{b_1}{2}\right)\right)(t) = \{0\}$ para $t \in [-r, 0]$.

Dessa forma, pelo Teorema de Arzelá - Ascoli segue que $\Gamma_2\left(S\left(b, \frac{b_1}{2}\right)\right)$ é relativamente compacto, o que garante que Γ_2 é compacta.

Finalmente, visto que $\Gamma : S\left(b, \frac{b_1}{2}\right) \rightarrow S\left(b, \frac{b_1}{2}\right)$, onde $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, com Γ_1 uma contração e Γ_2 completamente contínua, e $S\left(b, \frac{b_1}{2}\right)$ é um espaço de Banach, concluímos que Γ é um operador condensante.

Além disso, mostramos que $S\left(b, \frac{b_1}{2}\right)$ é um conjunto convexo. De fato, dados $u, v \in S\left(b, \frac{b_1}{2}\right)$, para cada $t \in [0, 1]$ verificamos que $w = (1-t)u + tv \in S\left(b, \frac{b_1}{2}\right)$. Como $t \in \mathbb{R}$ e $u, v \in C([-r, b], X)$, segue que $w \in C([-r, b], X)$ e $w_0 = (1-t)u_0 + tv_0 \equiv 0$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \|w\|_{C([-r, b], X)} &= \sup_{s \in [0, b]} \{\|w(s)\|\} \\ &= \sup_{s \in [0, b]} \{\|(1-t)u(s) + tv(s)\|\} \\ &\leq \sup_{s \in [0, b]} \{\|(1-t)u(s)\|\} + \sup_{s \in [0, b]} \{\|tv(s)\|\} \\ &= (1-t) \sup_{s \in [0, b]} \{\|u(s)\|\} + t \sup_{s \in [0, b]} \{\|v(s)\|\} \\ &\leq (1-t) \frac{b_1}{2} + t \frac{b_1}{2} = \frac{b_1}{2}, \end{aligned}$$

ou seja, $w \in S\left(b, \frac{b_1}{2}\right)$. Portanto, $S\left(b, \frac{b_1}{2}\right)$ é convexo.

Como $\Gamma : S\left(b, \frac{b_1}{2}\right) \rightarrow S\left(b, \frac{b_1}{2}\right)$ é um operador condensante com $S\left(b, \frac{b_1}{2}\right)$ convexo, fechado e limitado, segue do Teorema do ponto fixo para operadores condensantes (Teorema A.21) que Γ admite um ponto fixo em $S\left(b, \frac{b_1}{2}\right)$. Seja $u \in S\left(b, \frac{b_1}{2}\right)$ tal que $\Gamma u = u$ e considere a função $x : [-r, b] \rightarrow X$ dada por $x(t) = u(t) + y(t)$. Dessa forma, para $t \in [-r, 0]$, $x(t) = 0 + y(t) = \varphi(t)$, pois $y_0 = \varphi$, e para $t \in (0, b]$,

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + y(t) = \Gamma u(t) + T(t)\varphi(0) \\ &= T(t)g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)f(s, u_s + y_s) ds + T(t)\varphi(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T(t) [g(0, \varphi) + \varphi(0)] - g(t, x_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, x_s) ds \\
&\quad + \int_0^t T(t-s)f(s, x_s) ds.
\end{aligned}$$

Portanto, x é uma solução fraca do sistema (3.1) – (3.2) em $[0, b]$. \square

O próximo resultado apresenta condições par a existência e a unicidade de uma solução fraca para (3.1)-(3.2). Neste caso, procedemos de modo semelhante à demonstração do Teorema 3.11 porém, usamos o Teorema do ponto fixo de Banach (Teorema A.5).

Teorema 3.12. *Suponha que as condições \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 e \mathbf{H}_3 são satisfeitas, $\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)}L_g^2(0) < 1$ e $\varphi(0) \in \Lambda_A$. Então, existe uma única solução fraca para (3.1) – (3.2) em $[-r, b]$, para algum $0 < b \leq a$.*

Demonstração. Pelo mesmo argumento utilizado na demonstração do Teorema 3.11, existe $0 < b_1 \leq a$ tal que $B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B}) \subset \Omega$ e $\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)}L_g^2(b_1) < 1$. Além disso, como as condições assumidas sobre a função $g(\cdot)$ são as mesmas assumidas no Teorema 3.11 e, por \mathbf{H}_2 , $f(\cdot)$ é contínua em $[0, l] \times B_l(\varphi, \mathcal{B})$, para todo $l > 0$ tal que $[0, l] \times B_l(\varphi, \mathcal{B}) \subset [0, a] \times \Omega$, tomando, primeiramente $l = b_1$, dado $\epsilon > 0$ qualquer, sabemos que existe $\delta > 0$, $\delta = \delta(\epsilon, \varphi)$, de modo que $\|f(t, \psi) - f(t, \varphi)\| < \epsilon$, para todo $t \in [0, b_1]$ e $\psi \in B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B})$ com $\|\psi - \varphi\|_{\mathcal{B}} < \delta$.

Assim, diminuindo o valor de b_1 , se necessário, para que $b_1 < \delta$, e usando que, como a função $t \mapsto f(t, \varphi)$ é contínua no compacto $[0, a]$, ela é limitada, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|f(t, \psi)\| &\leq \|f(t, \psi) - f(t, \varphi)\| + \|f(t, \varphi)\| \\
&\leq \epsilon + \sup_{t \in [0, a]} \|f(t, \varphi)\|,
\end{aligned}$$

para todo $(t, \psi) \in [0, b_1] \times B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B})$.

Portanto, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sup\{\|g(t, \psi)\|, \|g(t, \psi)\|_Y, \|f(t, \psi)\|; (t, \psi) \in [0, b_1] \times B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B})\} \leq C. \quad (3.11)$$

Da mesma forma como feito na demonstração do Teorema 3.11, precisamos estabelecer algumas limitações.

(I) Pelo Lema 3.10, a função $t \mapsto y_t$ é uniformemente contínua em $[0, a]$. Mais ainda, por \mathbf{H}_3 e uma argumentação análoga à feita na demonstração do Teorema 3.11, existe $\delta > 0$, o qual podemos supor $\delta < b_1$, tal que, se $0 < s < \delta$, obtemos

$$\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y,X)}L_g^2(b_1)W(0, s) + \mu\|y_s - \varphi\|_{\mathcal{B}} + \|T(s)g(0, \varphi) - g(0, \varphi)\| \leq \frac{(1 - \mu)b_1}{5}.$$

Por outro lado, como $[0, \delta]$ é compacto, temos a continuidade uniforme dessas funções e assim,

$$\sup_{s \in [0, \delta]} \{ \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} L_g^2(b_1) W(0, s) + \mu \|y_s - \varphi\|_{\mathcal{B}} + \|T(s)g(0, \varphi) - g(0, \varphi)\| \} < \frac{(1 - \mu)b_1}{4}.$$

(II) Para $\frac{(1 - \mu)b_1}{10C} > 0$, existe $\delta'_1 > 0$ tal que $\|AT(\cdot)\|_{L^1([0, \delta'_1], \mathcal{L}(Y, X))} < \frac{(1 - \mu)b_1}{10C}$. Além disso, como $1 - \alpha > 0$, existe $\delta'_2 > 0$ tal que $(\delta'_2)^{1-\alpha} < \frac{(1 - \mu)b_1(1 - \alpha)}{10CC_0}$. Assim, tomando $\delta' = \min\{\delta'_1, \delta'_2\}$, obtemos

$$C\|AT(\cdot)\|_{L^1([0, \delta'], \mathcal{L}(Y, X))} + \frac{CC_0(\delta')^{1-\alpha}}{1 - \alpha} < \frac{(1 - \mu)b_1}{5} < \frac{(1 - \mu)b_1}{4}.$$

(III) Por fim, por \mathbf{H}_2 , existe $L_{f, b_1} \in L^q([0, a], [0, \infty))$ tal que

$$\|f(s, \psi_1) - f(s, \psi_2)\| \leq L_{f, b_1}(s) \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}},$$

$\forall (t, \psi_i) \in [0, b_1] \times B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B})$, $i = 1, 2$. Além disso, existe $\hat{\delta}_1 > 0$ tal que

$$\|AT(\cdot)\|_{L^1([0, \hat{\delta}_1], \mathcal{L}(Y, X))} < \frac{(1 - \mu)}{L_g^2(b_1)},$$

ou seja,

$$L_g^2(b_1) \left(\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} + \|AT(\cdot)\|_{L^1([0, \hat{\delta}_1], \mathcal{L}(Y, X))} \right) < 1.$$

Assim, fazendo $D = L_g^2(b_1) \left(\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} + \|AT(\cdot)\|_{L^1([0, \hat{\delta}_1], \mathcal{L}(Y, X))} \right)$, obtemos $1 - D > 0$

e, como $\frac{1}{q'} - \alpha > 0$, visto que $q > \frac{1}{1 - \alpha}$, existem $\hat{\delta}_2, \hat{\delta}_3 > 0$ tais que $(\hat{\delta}_2)^{\frac{1}{q'} - \alpha} < 1$

e $\|L_{f, b_1}\|_{L^q([0, \hat{\delta}_3], \mathcal{L}(Y, X))} < \frac{(1 - D)(1 - \alpha q')}{C_0}$. Logo, tomando $\hat{\delta} = \min\{\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \hat{\delta}_3\}$, obtemos

$$L_g^2(b_1) \left(\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} + \|AT(\cdot)\|_{L^1([0, \hat{\delta}], \mathcal{L}(Y, X))} \right) + \frac{C_0 \|L_{f, b_1}\|_{L^q([0, \hat{\delta}], [0, \infty))} (\hat{\delta})^{\frac{1}{q'} - \alpha}}{1 - \alpha q'} < 1.$$

Portanto, tomando $b = \min\{\delta, \delta', \hat{\delta}\}$, temos a validade das seguintes limitações

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{s \in [0, b]} \{ \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} L_g^2(b_1) W(0, s) + \mu \|y_s - \varphi\|_{\mathcal{B}} \\ \quad + \|T(s)g(0, \varphi) - g(0, \varphi)\| \} \leq \frac{(1 - \mu)b_1}{4}; \\ C \left[\|AT(\cdot)\|_{L^1([0, b], \mathcal{L}(Y, X))} + \frac{C_0(b)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \right] \leq \frac{(1 - \mu)b_1}{4}; \\ \Theta = L_g^2(b_1) \left(\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} + \|AT(\cdot)\|_{L^1([0, b], \mathcal{L}(Y, X))} \right) + \frac{C_0 \|L_{f, b_1}\|_{L^q([0, b], [0, \infty))} b_1^{\frac{1}{q'} - \alpha}}{1 - \alpha q'} < 1. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Ainda como na demonstração do Teorema 3.11, definimos o conjunto

$$S(b, \frac{b_1}{2}) = \{u \in C([-r, b], X); u_0 \equiv 0, \|u\|_{C([0, b], X)} \leq \frac{b_1}{2}\},$$

e consideramos a aplicação $\Gamma : S(b, \frac{b_1}{2}) \rightarrow C([-r, b], X)$ dada por $(\Gamma u)_0 \equiv 0$ e, para todo $t \in [0, b]$,

$$\Gamma u(t) = T(t)g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s)ds + \int_0^t T(t-s)f(s, u_s + y_s)ds.$$

Como as aplicações $t \mapsto y_t$ e $t \mapsto u_t$ são contínuas em $[0, b]$, por uma argumentação já realizada, obtemos que $u_t + y_t \in B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B}) \subset \Omega$. Assim, por (3.11), concluímos que $\|g(t, u_t + y_t)\| \leq C$, $\|g(t, u_t + y_t)\|_Y \leq C$ e $\|f(t, u_t + y_t)\| \leq C$, para todo $(t, u) \in [0, b] \times S(b, \frac{b_1}{2})$.

Assim, por \mathbf{H}_1 , $AT(\cdot) \in L^1([0, a], \mathcal{L}(Y, X))$, e então, obtemos que a aplicação $s \mapsto AT(t-s)g(s, u_s + y_s)$ é integrável em $[0, t]$, com $0 < t \leq b$. Além disso,

$$\begin{aligned} \int_0^t \|T(t-s)f(s, u_s + y_s)\| ds &\leq \int_0^t \frac{CC_0}{(t-s)^\alpha} ds = CC_0 \int_0^t (t-s)^{-\alpha} ds \\ &= CC_0 \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

Assim, pelo critério de Bochner para funções integráveis (Teorema A.16), segue que as integrais que compõem Γ existem e, além disso, novamente utilizando o fato de as condições sobre a função $g(\cdot)$ serem as mesmas assumidas no Teorema 3.11, concluímos que $\Gamma u \in C([-r, b], X)$, uma vez que $(\Gamma u)_0 \equiv 0$.

Agora, mostramos que $\Gamma(S(b, \frac{b_1}{2})) \subset S(b, \frac{b_1}{2})$. De fato, dado $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$, como $\Gamma u \in C([-r, b], X)$ e $(\Gamma u)_0 \equiv 0$, resta mostrarmos que $\|\Gamma u\|_{C([0, b], X)} \leq \frac{b_1}{2}$. Para tanto, considere $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$ e $t \in [0, b]$, temos

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t)\| &= \left\| T(t)g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t T(t-s)f(s, u_s + y_s) ds \right\| \\
&\leq \|T(t)g(0, \varphi) - g(0, \varphi)\| + \|g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t)\| \\
&\quad + \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|g(s, u_s + y_s)\|_Y ds + \int_0^t \|T(t-s)\| \|f(s, u_s + y_s)\| ds \\
&\leq \|[T(t) - I]g(0, \varphi)\| + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t)\|_Y \\
&\quad + \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} C ds + \int_0^t \frac{C_0}{(t-s)^\alpha} C ds \\
&\leq \|[T(t) - I]g(0, \varphi)\| + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} (L_g^1(b_1)W(0, t) + L_g^2(b_1)) \|\varphi - (u_t + y_t)\|_{\mathcal{B}} \\
&\quad + C \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} ds + CC_0 \int_0^t (t-s)^{-\alpha} ds \\
&= \|[T(t) - I]g(0, \varphi)\| + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} L_g^1(b_1)W(0, t) + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} L_g^2(b_1) \|\varphi - y_t\|_{\mathcal{B}} \\
&\quad + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} L_g^2(b_1) \|u_t\|_{\mathcal{B}} + C \|AT(\cdot)\|_{L^1([0, t], \mathcal{L}(Y, X))} + CC_0 \left[\frac{-(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_0^t \right] \\
&\leq \|[T(t) - I]g(0, \varphi)\| + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} L_g^1(b_1)W(0, t) + \mu \|\varphi - y_t\|_{\mathcal{B}} \\
&\quad + \frac{\mu b_1}{2} + C \|AT(\cdot)\|_{L^1([0, b], \mathcal{L}(Y, X))} + CC_0 \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\
&\leq \sup_{s \in [0, b]} \{ \|[T(s) - I]g(0, \varphi)\| + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} L_g^1(b_1)W(0, s) + \mu \|\varphi - y_s\|_{\mathcal{B}} \} + \frac{\mu b_1}{2} \\
&\quad + C \left[\|AT(\cdot)\|_{L^1([0, b], \mathcal{L}(Y, X))} + C_0 \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] \leq \frac{(1-\mu)b_1}{4} + \frac{\mu b_1}{2} + \frac{(1-\mu)b_1}{4} = \frac{b_1}{2}.
\end{aligned}$$

Logo, $\|\Gamma u(t)\| \leq \frac{b_1}{2}$, para todo $t \in [0, b]$, garantindo que

$$\|\Gamma u\|_{C([0, b], X)} = \sup_{s \in [0, b]} \|\Gamma u(s)\| \leq \frac{b_1}{2}.$$

Assim, $\Gamma u \in S(b, \frac{b_1}{2})$, para todo $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$, ou seja, $\Gamma(S(b, \frac{b_1}{2})) \subset S(b, \frac{b_1}{2})$.

Nosso objetivo é utilizar o Teorema do ponto fixo de Banach (Teorema A.5) para garantir que Γ admite um único ponto fixo em $S(b, \frac{b_1}{2})$. Mostramos, então, que Γ é uma contração. Com efeito, sejam $u, v \in S(b, \frac{b_1}{2})$ e $t \in [0, b]$, então

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| &= \left\| T(t)g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds \right. \\
&\quad + \int_0^t T(t-s)f(s, u_s + y_s) ds - T(t)g(0, \varphi) + g(t, v_t + y_t) \\
&\quad \left. + \int_0^t AT(t-s)g(s, v_s + y_s) ds - \int_0^t T(t-s)f(s, v_s + y_s) ds \right\| \\
&\leq \|g(t, u_t + y_t) - g(t, v_t + y_t)\| \\
&\quad + \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|g(s, u_s + y_s) - g(s, v_s + y_s)\|_Y ds \\
&\quad + \int_0^t \|T(t-s)\| \|f(s, u_s + y_s) - f(s, v_s + y_s)\| ds \\
&\leq \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|g(t, u_t + y_t) - g(t, v_t + y_t)\|_Y \\
&\quad + \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} [L_g^1(b_1)W(s, s) + L_g^2(b_1)\|u_s + y_s - v_s - y_s\|_{\mathcal{B}}] ds \\
&\quad + \int_0^t \frac{C_0}{(t-s)^\alpha} L_{f, b_1}(s) \|u_s + y_s - v_s - y_s\|_{\mathcal{B}} ds \\
&\leq \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} [L_g^1(b_1)W(t, t) + L_g^2(b_1)\|u_t + y_t - v_t - y_t\|_{\mathcal{B}}] \\
&\quad + \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} L_g^2(b_1) \|u_s - v_s\|_{\mathcal{B}} ds \\
&\quad + \int_0^t \frac{C_0}{(t-s)^\alpha} L_{f, b_1}(s) \|u_s - v_s\|_{\mathcal{B}} ds \\
&\leq L_g^2(b_1) \left[\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} + \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} ds \right] \|u - v\|_{C([0, b], X)} \\
&\quad + \|u - v\|_{C([0, b], X)} \int_0^t \frac{C_0}{(t-s)^\alpha} L_{f, b_1}(s) ds \\
&\leq L_g^2(b_1) \left[\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} + \int_0^b \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} ds \right] \|u - v\|_{C([0, b], X)} \\
&\quad + \|u - v\|_{C([0, b], X)} C_0 \left[\left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha q'} ds \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_0^t (L_{f, b_1}(s))^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\leq L_g^2(b_1) \left[\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} + \|AT(\cdot)\|_{L^1([0, b], \mathcal{L}(Y, X))} \right] \|u - v\|_{C([0, b], X)} \\
&\quad + \|u - v\|_{C([0, b], X)} C_0 \left[\left(\frac{t^{1-\alpha q'}}{1-\alpha q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \|L_{f, b_1}(\cdot)\|_{L^q([0, b], [0, \infty))} \right] \\
&\leq \left[L_g^2(b_1) \left(\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} + \|AT(\cdot)\|_{L^1([0, b], \mathcal{L}(Y, X))} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{C_0 b^{\frac{1}{q'} - \alpha} \|L_{f, b_1}(\cdot)\|_{L^q([0, b], [0, \infty))}}{(1-\alpha q')^{\frac{1}{q'}}} \right] \|u - v\|_{C([0, b], X)} = \Theta \|u - v\|_{C([0, b], X)}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, como $(\Gamma u)_0 \equiv 0 \equiv (\Gamma v)_0$, segue que

$$\|\Gamma u - \Gamma v\|_{C([-r,b],X)} = \sup_{t \in [0,b]} \|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| \leq \sup_{t \in [0,b]} \Theta \|u - v\|_{C([0,b],X)} = \Theta \|u - v\|_{C([0,b],X)}.$$

Portanto, como $\Theta < 1$, concluímos que Γ é uma contração. Além disso, como observado na demonstração do Teorema 3.11, $S(b, \frac{b_1}{2})$ é um espaço de Banach. Assim, pelo Teorema do ponto fixo de Banach (Teorema A.5), a aplicação $\Gamma : S(b, \frac{b_1}{2}) \rightarrow S(b, \frac{b_1}{2})$ admite um único ponto fixo em $S(b, \frac{b_1}{2})$.

Seja $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$ tal que $\Gamma u = u$ e tome $x : [-r, b] \rightarrow X$ como sendo $x = u + y$. Mostramos que x é a única solução fraca do sistema (3.1)-(3.2) em $[-r, b]$. De fato, como $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$ e $y : [-r, b] \rightarrow X$ é tal que $y_0 = \varphi$ e $y(t) = T(t)\varphi(0)$, para $t \geq 0$, obtemos $x_0 = u_0 + y_0 = 0 + \varphi = \varphi$. Mais ainda, visto que u e y são contínuas, segue que x é uma função contínua em $(0, b]$ e, para todo $t \in (0, b]$, temos

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + y(t) = \Gamma u(t) + T(t)\varphi(0) = T(t)\varphi(0) + T(t)g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t) \\ &\quad - \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds + \int_0^t T(t-s)f(s, u_s + y_s) ds \\ &= T(t)[\varphi(0) - g(0, \varphi)] - g(t, x_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, x_s) ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)f(s, x_s) ds, \end{aligned}$$

ou seja, x é uma solução fraca de (3.1)-(3.2) em $[-r, b]$. Para a unicidade desta solução, suponha que exista $z : [-r, b] \rightarrow X$ tal que z é solução fraca de (3.1)-(3.2) em $[-r, b]$. Assim, $z_0 = \varphi$, e para $t \in (0, b]$, segue que

$$\begin{aligned} z(t) &= T(t)[\varphi(0) + g(0, \varphi)] - g(t, z_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, z_s) ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)f(s, z_s) ds = T(t)\varphi(0) + T(t)g(0, \varphi) - g(t, z_t - y_t + y_t) \\ &\quad - \int_0^t AT(t-s)g(s, z_s - y_s + y_s) ds + \int_0^t T(t-s)f(s, z_s - y_s + y_s) ds \\ &= y(t) + \Gamma(z - y)(t). \end{aligned}$$

Dessa forma, $\Gamma(z - y)(t) = z(t) - y(t) = (z - y)(t)$, para todo $t \in (0, b]$. Mais ainda, $(z - y)_0 = z_0 - y_0 = \varphi - \varphi = 0 = \Gamma(z - y)_0$ e então, $\Gamma(z - y) = z - y$, ou seja, $z - y$ é um ponto fixo de Γ . Logo, pela unicidade do ponto fixo de Γ , concluímos que $u = z - y$ e então, $z(t) = u(t) + y(t) = x(t)$, para todo $t \in (0, b]$. Além disso, $z_0 = u_0 + y_0 = \varphi = x_0$. Portanto, x é a única solução fraca de (3.1)-(3.2) em $[-r, b]$.

□

A seguir apresentamos um resultado auxiliar que será utilizado no teorema seguinte.

Lema 3.13. *Suponha que a condição \mathbf{H}_1 é satisfeita e que $T(t)$ é compacto para todo $t > 0$. Então, a aplicação $i_c : Y \rightarrow X$ é completamente contínua.*

Demonstração. Pela validade de \mathbf{H}_1 , obtemos que Y está continuamente incluso em X , ou seja, i_c é contínua. Assim, basta mostrarmos que a aplicação i_c é compacta.

Dado $\tilde{\epsilon} > 0$, consideramos a bola $B_1(0, Y) = \{x \in Y \subset X; \|x\|_Y \leq 1\}$ e seja $x \in B_1(0, Y)$. Por \mathbf{H}_1 , $AT(\cdot)x \in L^1([0, a], X)$ e então, $AT(\cdot)x \in L^1([0, b], X)$, $b \in (0, a]$. Assim, como a aplicação $s \mapsto \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)}$ é integrável em $[0, b]$, seja $\epsilon > 0$ tal que $l_\epsilon = \int_0^\epsilon \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} ds$ satisfaça a relação $l_\epsilon < \tilde{\epsilon}$.

Pelo Lema 3.3, temos $T(t)x - x = \int_0^t AT(s)x ds$, para todo $t > 0$. Em particular, para $t = \epsilon$, obtemos $T(\epsilon)x - x = \int_0^\epsilon AT(s)x ds$, ou seja, $x = T(\epsilon)x - \int_0^\epsilon AT(s)x ds$, onde $T(\epsilon)x \in T(\epsilon)(B_l(0, X))$ e $\int_0^\epsilon AT(s)x ds \in B_{l_\epsilon}(0, X)$, pois:

$$(i) \|x\| = \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)}\|x\|_Y \leq \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} = l;$$

$$(ii) \left\| \int_0^\epsilon AT(s)x ds \right\| \leq \int_0^\epsilon \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)}\|x\|_Y ds \leq \int_0^\epsilon \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} ds = l_\epsilon.$$

Agora, note que, como $T(t)$ é compacto para todo $t > 0$, segue que $T(\epsilon)$ é compacto, e então, $T(\epsilon)(B_l(0, X))$ é relativamente compacto, ou seja, $\overline{T(\epsilon)(B_l(0, X))}$ é compacto. Por outro lado, como $\overline{T(\epsilon)(B_l(0, X))}$ é um subconjunto fechado de um espaço de Banach, segue que $T(\epsilon)(B_l(0, X))$ é totalmente limitado. Assim, dado $\delta > 0$, existem $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tais que $T(\epsilon)(B_l(0, X)) \subset \overline{T(\epsilon)(B_l(0, X))} \subset \bigcup_{i=1}^n B_\delta(x_i, X)$.

Dessa forma, seja $y \in T(\epsilon)(B_l(0, X)) + B_{l_\epsilon}(0, X)$, então $y = y_1 + y_2$. Assim, $y_1 \in T(\epsilon)(B_l(0, X))$ e $y_2 \in B_{l_\epsilon}(0, X)$. Logo, tomando $0 < \delta^* < \tilde{\epsilon} - l_\epsilon$, existem $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k \in X$ tais que $T(\epsilon)(B_l(0, X)) \subset \overline{T(\epsilon)(B_l(0, X))} \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\delta^*}(\hat{x}_i, X)$, ou seja, existe \hat{x}_j , $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, tal que $y_1 \in B_{\delta^*}(\hat{x}_j, X)$ e, além disso,

$$\|y - \hat{x}_j\| = \|y_1 + y_2 - \hat{x}_j\| \leq \|y_1 - \hat{x}_j\| + \|y_2\| \leq \delta^* + l_\epsilon \leq \tilde{\epsilon} - l_\epsilon + l_\epsilon = \tilde{\epsilon}.$$

Logo, $y \in B_{\tilde{\epsilon}}(\hat{x}_j, X)$, ou seja, $y \in \bigcup_{i=1}^k B_{\tilde{\epsilon}}(\hat{x}_i, X)$, implicando que $T(\epsilon)(B_l(0, X)) + B_{l_\epsilon}(0, X) \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\tilde{\epsilon}}(\hat{x}_i, X)$. Dessa maneira, obtemos

$$\overline{i_c(B_1(0, Y))} \subset \overline{T(\epsilon)(B_l(0, X)) + B_{l_\epsilon}(0, X)} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^k B_{\tilde{\epsilon}}(\hat{x}_i, X)} = \bigcup_{i=1}^k B_{\tilde{\epsilon}}(\hat{x}_i, X).$$

Portanto, como $\overline{i_c(B_1(0, Y))}$ é um subconjunto fechado de um espaço de Banach, segue que $\overline{i_c(B_1(0, Y))}$ é compacto e então, i_c é compacta, concluindo a demonstração. \square

Teorema 3.14. *Assuma que as condições \mathbf{H}_1 e \mathbf{H}_4 são satisfeitas, $T(t)$ é compacto para todo $t > 0$, $g \in C([0, a] \times \Omega, Y)$, $\varphi(0) \in \Lambda_A$ e a seguinte condição adicional é satisfeita:*

(a) *Seja $0 < \hat{b} \leq a$ e $S(\hat{b}) = \{x : [-r, \hat{b}] \rightarrow X; x_0 \equiv 0, x|_{[0, \hat{b}]} \in C([0, \hat{b}], X)\}$ munido da norma $\|\cdot\|_{C([0, \hat{b}], X)}$. Para todo subconjunto limitado $Q \subset S(\hat{b})$, o conjunto das funções $\{t \mapsto g(t, x_t + y_t); x \in Q\}$ é equicontínuo em $[0, \hat{b}]$.*

Então, existe uma solução fraca de (3.1)-(3.2) em $[-r, b]$, para algum $0 < b \leq a$.

Demonstração. Iniciamos a demonstração determinando algumas limitações. Como $\varphi \in \Omega$ e Ω é um conjunto aberto, existe $0 < b_1 \leq a$ tal que $B_{b_1}(\varphi) \subset \Omega$. Além disso, reduzindo b_1 , se necessário, dado $\epsilon > 0$ e usando a continuidade das funções $(t, \psi) \mapsto g(t, \psi)$ em $\varphi \in \mathcal{B}$ e $t \mapsto g(t, \varphi)$, obtemos que

$$\|g(t, \psi)\|_Y \leq \|g(t, \psi) - g(t, \varphi)\| + \|g(t, \varphi)\| \leq \epsilon + \sup_{t \in [0, a]} \|g(t, \varphi)\|,$$

e então, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $\|g(t, \psi)\|_Y \leq C_1$. Mais ainda, existe $C_2 > 0$ tal que $\|g(t, \psi)\| \leq \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|g(t, \psi)\|_Y \leq C_2$ e, por \mathbf{H}_4 , como $W_f \in C([0, \infty), [0, \infty))$ e W_f é não decrescente, obtemos

$$W_f(\|\psi\|_{\mathcal{B}}) \leq W_f(\|\psi - \varphi\|_{\mathcal{B}} - \|\varphi\|_{\mathcal{B}}) \leq W_f(b_1 - \|\varphi\|_{\mathcal{B}}) = C_3,$$

para todo $\psi \in B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B})$.

Logo, tomando $C = \max\{C_1, C_2, C_3\}$, como $[0, b_1] \subset [0, a]$ é compacto, obtemos

$$\sup\{\|g(t, \psi)\|, \|g(t, \psi)\|_Y, W_f(\|\psi\|_{\mathcal{B}}); (t, \psi) \in [0, b_1] \times B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B})\} \leq C. \quad (3.13)$$

Agora, observe que, por \mathbf{H}_1 e pelo mesmo argumento apresentado na demonstração do Teorema 3.11, $T(\cdot)g(0, \varphi) \in C([0, \infty), X)$. Logo, existe $\delta_1 > 0$ tal que, se $0 < t < \delta_1$, então

$$\|T(t)g(0, \varphi) - T(0)g(0, \varphi)\| = \|T(t)g(0, \varphi) - g(0, \varphi)\| < \frac{b_1}{8}.$$

Além disso, como $[0, \delta_1]$ é compacto, segue que

$$\sup_{t \in [0, \delta_1]} \|T(t)g(0, \varphi) - g(0, \varphi)\| \leq \frac{b_1}{8}.$$

Em adição, considere $u \in C([-r, b_1], X)$ com $u_0 \equiv 0$ e $\|u\|_{C([-r, b_1], X)} \leq \frac{b_1}{2}$. Assim, pela condição adicional (a), existe $\delta_2 > 0$ tal que $\|g(t, u_t + y_t) - g(0, u_0 + y_0)\| = \|g(t, u_t + y_t) - g(0, \varphi)\| \leq \frac{b_1}{8}$, para todo $t \in [0, \delta_2]$. Assim,

$$\sup_{s \in [0, \delta_2]} \|g(s, u_s + y_s) - g(0, \varphi)\| \leq \frac{b_1}{8}.$$

Dessa forma, tomando $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, obtemos

$$\sup_{s \in [0, \delta_3]} \{ \|(T(t) - I)g(0, \varphi)\| + \|g(s, u_s + y_s) - g(0, \varphi)\| \} \leq \frac{b_1}{4}.$$

Por fim, de \mathbf{H}_1 , sabemos que $AT(\cdot) \in L^1([0, a], \mathcal{L}(Y, X))$ e então, existe $\hat{\delta}_4 > 0$ tal que $\|AT(\cdot)\|_{L^1([0, \hat{\delta}_4], \mathcal{L}(Y, X))} < \frac{b_1}{8C}$. Mais ainda, por \mathbf{H}_4 e pelo fato de $q > \frac{1}{1-\alpha}$, o que garante $1 - q'\alpha > 0$, obtemos a existência de $\tilde{\delta}_4 > 0$ de modo que $\|m_f\|_{L^q([0, \tilde{\delta}_4], [0, \infty))} \leq \frac{b_1(1 - \alpha q')^{\frac{1}{q'}}}{8CC_0}$. Por fim, existe $\delta_4^* > 0$ tal que $(\delta_4^*)^{\frac{1}{q'} - \alpha} < 1$. Dessa forma, tomando $\delta_4 = \min\{\hat{\delta}_4, \tilde{\delta}_4, \delta_4^*\}$, concluimos que

$$C \left[\|AT(\cdot)\|_{L^1([0, \delta_4], \mathcal{L}(Y, X))} + \frac{C_0 \|m_f\|_{L^q([0, \delta_4], [0, \infty))} \delta_4^{\frac{1}{q'} - \alpha}}{(1 - \alpha q')^{\frac{1}{q'}}} \right] \leq C \left[\frac{b_1}{8C} + \frac{C_0 b_1 (1 - \alpha q')^{\frac{1}{q'}}}{8CC_0 (1 - \alpha q')^{\frac{1}{q'}}} \right] = \frac{b_1}{4}.$$

Assim, tomando $b = \min\{\delta_2, \delta_4\}$ e ajustando, se necessário, de modo que $0 < b \leq b_1$, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{s \in [0, b]} \{ \|(T(s) - I)g(0, \varphi)\| + \|g(s, u_s + y_s) - g(0, \varphi)\| \} \leq \frac{b_1}{4}; \\ C \left[\|AT(\cdot)\|_{L^1([0, b], \mathcal{L}(Y, X))} + \frac{C_0 \|m_f\|_{L^q([0, b], [0, \infty))} b^{\frac{1}{q'} - \alpha}}{(1 - \alpha q')^{\frac{1}{q'}}} \right] \leq \frac{b_1}{4}, \end{array} \right. \quad (3.14)$$

para todo $u \in C([-r, b], X)$, com $u_0 \equiv 0$ e $\|u\|_{C([0, b], X)} \leq \frac{b_1}{2}$.

Dessa maneira, consideramos o conjunto

$$S(b, \frac{b_1}{2}) = \{u \in C([-r, b], X); u_0 \equiv 0, \text{ e } \|u\|_{C([0, b], X)} \leq \frac{b_1}{2}\},$$

munido da norma $\|\cdot\|_{C([0, b], X)}$, e definimos o operador $\Gamma : S(b, \frac{b_1}{2}) \rightarrow C([-r, b], X)$ por $(\Gamma u)_0 \equiv 0$ e, para todo $t \in [0, b]$,

$$\Gamma u(t) = T(t)g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s)ds + \int_0^t T(t-s)f(s, u_s + y_s)ds.$$

Afim de utilizarmos o Teorema do ponto fixo de Schauder (Teorema A.4) para garantir que Γ admite um ponto fixo em $S(b, \frac{b_1}{2})$, mostramos que Γ é um operador completamente contínuo. Para tanto, consideramos a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$, onde $(\Gamma_i u)_0 \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$, e

$$\Gamma_1 u(t) = T(t)g(0, \varphi) - g(t, u_s + y_s), \quad t \in [0, b];$$

$$\begin{aligned}\Gamma_2 u(t) &= - \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds, \quad t \in [0, b]; \\ \Gamma_3 u(t) &= \int_0^t T(t-s)f(s, u_s + y_s) ds, \quad t \in [0, b].\end{aligned}$$

Dividimos esta parte da demonstração em alguns itens.

(1) $\Gamma_i, i = 1, 2, 3$ está bem definida.

De fato, por \mathbf{H}_1 e pelo Lema 3.3, já argumentamos que $T(t)g(0, \varphi) \in C([0, b], X)$. Além disso, pelo Lema 3.10, a aplicação $t \mapsto y_t$ é contínua em $[0, b]$ e, então, podemos uniformizar b de modo que $\sup_{s \in [0, b]} \|y_s - \varphi\| \leq \frac{b_1}{2}$. Assim, por uma argumentação já realizada, a aplicação $t \mapsto u_t$ é contínua em $[0, b]$, o que nos permite concluir que $u_t + y_t \in B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B}) \subset \Omega$, para todo $t \in [0, b]$, ou seja, pela hipótese, $g \in C([0, b] \times B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B}), Y)$. Além disso, $t \mapsto u_t + y_t$ é contínua em $[0, b]$ e, então, $g(t, u_t + y_t) \in C([0, b], X)$. Dessa forma $\Gamma_1 u \in C([-r, b], X)$ uma vez que $(\Gamma_1 u)_0 \equiv 0$.

Para Γ_2 , por (3.13), concluímos que $\|g(t, u_t + y_t)\| \leq C$ e $\|g(t, u_t + y_t)\|_Y \leq C$, para todo $(t, u) \in [0, b] \times S(b, \frac{b_1}{2})$. Assim, como $AT(\cdot) \in L^1([0, a], \mathcal{L}(Y, X))$, obtemos

$$\int_0^t \|AT(t-s)g(s, u_s + y_s)\| ds \leq C \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} ds < \infty.$$

Logo, pelo critério de Bochner para funções integráveis (Teorema A.16) e pelo fato de $(\Gamma_2 u)_0 \equiv 0$, concluímos que a função $s \mapsto AT(t-s)g(s, u_s + y_s)$ é integrável em $[0, t]$, e assim, $\Gamma_2 u \in C([-r, b], X)$.

Como as condições sobre a função f são as mesmas impostas no Teorema 3.11, também concluímos que Γ_3 está bem definida. Dessa maneira, concluímos que Γ esta bem definida.

(2) $\Gamma\left(S(b, \frac{b_1}{2})\right) \subset S(b, \frac{b_1}{2})$.

Como $\Gamma u \in C([-r, b], X)$ e $(\Gamma u)_0 \equiv 0$, resta mostrarmos que $\|\Gamma u\|_{C([0, b], X)} \leq \frac{b_1}{2}$, para todo $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$. Neste caso, usando as estimativas em (3.14), temos

$$\begin{aligned}\|\Gamma u(t)\| &= \left\| T(t)g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t T(t-s)f(s, u_s + y_s) ds \right\| \\ &\leq \|T(t)g(0, \varphi) - g(0, \varphi)\| + \|g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t)\| \\ &\quad + \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|g(s, u_s + y_s)\|_Y ds + \int_0^t \|T(t-s)\| \|f(s, u_s + y_s)\| ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{b_1}{4} + C \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds + \int_0^t \frac{C_0}{(t-s)^\alpha} m_f(s) W_f(\|u_s + y_s\|_{\mathcal{B}}) ds \\
&\leq \frac{b_1}{4} + C \int_0^b \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds + CC_0 \int_0^t (t-s)^{-\alpha} m_f(s) ds \\
&\leq \frac{b_1}{4} + C \|AT(\cdot)\|_{L^1([0,b], \mathcal{L}(Y,X))} + CC_0 \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha q'} ds \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_0^t (m_f(s))^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{b_1}{4} + C \|AT(\cdot)\|_{L^1([0,b], \mathcal{L}(Y,X))} + \frac{CC_0 t^{\frac{1}{q'} - \alpha}}{(1 - \alpha q')^{\frac{1}{q'}}} \|m_f\|_{L^q([0,b], [0, \infty))} \\
&\leq \frac{b_1}{4} + C \left[\|AT(\cdot)\|_{L^1([0,b], \mathcal{L}(Y,X))} + \frac{C_0 b^{\frac{1}{q'} - \alpha} \|m_f\|_{L^q([0,b], [0, \infty))}}{(1 - \alpha q')^{\frac{1}{q'}}} \right] \leq \frac{b_1}{4} + \frac{b_1}{4} = \frac{b_1}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, $\|\Gamma u\|_{C([0,b], X)} = \sup_{t \in [0,b]} \|\Gamma u(t)\| \leq \sup_{t \in [0,b]} \frac{b_1}{2} = \frac{b_1}{2}$. Logo, $\Gamma u \in S(b, \frac{b_1}{2})$, para todo $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$, ou seja, $\Gamma(S(b, \frac{b_1}{2})) \subset S(b, \frac{b_1}{2})$.

(3) Agora, mostramos que Γ_i , $i = 1, 2, 3$, são completamente contínuas, ou seja, são contínuas em $S(b, \frac{b_1}{2})$ e compactas.

(3.1) Γ_1 é completamente contínua. De fato, para garantir a compacidade de Γ_1 , visto que $S(b, \frac{b_1}{2})$ é um conjunto limitado, é suficiente mostrar que $\Gamma_1(S(b, \frac{b_1}{2}))$ é relativamente compacto. Para tanto, utilizaremos o Teorema de Arzelá - Ascoli (Teorema A.8).

Dado $t \in [-r, b]$, $\Gamma_1(S(b, \frac{b_1}{2}))(t) = \{\Gamma_1 u(t); u \in S(b, \frac{b_1}{2})\}$ é relativamente compacto em X . Com efeito, note que $(\Gamma_1)_0 \equiv 0$ e assim, $\Gamma_1(S(b, \frac{b_1}{2}))(t) = \{0\}$, que é relativamente compacto. Além disso, para $t \in (0, b]$, $\Gamma_1(t) = T(t)g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t)$, com $\|g(0, \varphi)\| \leq C$. Logo, $T(t)g(0, \varphi) \in T(t)B_C(0, X)$. Mais ainda, como $T(t)$ é compacto para todo $t > 0$, segue que $T(t)B_C(0, X)$ é relativamente compacto. Por outro lado, $\|g(t, u_t + y_t)\|_Y \leq C$, para todo $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$, pois $u_t + y_t \in B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B}) \subset \Omega$ e, então, $\{g(t, u_t + y_t); u \in S(b, \frac{b_1}{2})\} \subset B_C(0, Y)$. Pelo Lema 3.13 segue que $i_c(B_C(0, Y))$ é relativamente compacto e, então, $(\Gamma_1 u)(t) = T(t)g(0, \varphi) + g(t, u_t + y_t) \in T(t)B_C(0, X) + i_c(B_C(0, Y))$, para todo $t \in (0, b]$ e todo $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$. Logo, $\{\Gamma_1 u(t); u \in S(b, \frac{b_1}{2})\} \subset T(t)B_C(0, X) + i_c(B_C(0, Y))$ e assim, é relativamente compacto em X .

O conjunto $\Gamma_1(S(b, \frac{b_1}{2}))$ é equicontínuo. Com efeito, pelo Lema 3.3, como $g(0, \varphi) \in Y$ e $AT(\cdot) \in L^1([0, b], \mathcal{L}(Y, X))$, obtemos que $AT(\cdot)g(0, \varphi) \in L^1([0, b], X)$ e $g(0, \varphi) \in \Lambda_A$. Logo, a função $t \mapsto T(t)g(0, \varphi) \in C([0, \infty), X)$ e, assim, é uniformemente contínua em $[0, b]$. Dessa forma, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo $t \in [0, b]$ e $0 < |h| < \delta_1$,

com $t + h \in [0, b]$, obtemos

$$\|T(t+h)g(0, \varphi) - T(t)g(0, \varphi)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Além disso, da condição adicional (a), existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|g(t+h, u_{t+h} + y_{t+h}) - g(t, u_t + y_t)\| < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $t \in [0, b]$ e $0 < |h| < \delta_2$, com $t+h \in [0, b]$, e todo $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$. Logo, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, e $0 < |h| < \delta$, com $t+h \in [0, b]$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1 u(t+h) - \Gamma_1 u(t)\| &= \|T(t+h)g(0, \varphi) - g(t+h, u_{t+h} + y_{t+h}) - T(t)g(0, \varphi) \\ &\quad + g(t, u_t + y_t)\| \\ &\leq \|T(t+h)g(0, \varphi) - T(t)g(0, \varphi)\| \\ &\quad + \|g(t+h, u_{t+h} + y_{t+h}) - g(t, u_t + y_t)\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$ e $t \in [0, b]$. Dessa forma, como $(\Gamma_1 u)_0 \equiv 0$, concluímos que $\Gamma_1(S(b, \frac{b_1}{2}))$ é equicontínuo em $[-r, b]$.

Consequentemente, pelo Teorema de Arzelá - Ascoli (Teorema A.8), $\Gamma_1(S(b, \frac{b_1}{2}))$ é relativamente compacto, ou seja, Γ_1 é compacta.

Para a continuidade de Γ_1 em $S(b, \frac{b_1}{2})$, considere $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $S(b, \frac{b_1}{2})$ tal que $u_n \rightarrow u$, quando $n \rightarrow \infty$, para algum $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$, pois, como já argumentamos nas demonstrações anteriores, este conjunto é fechado. A seguir mostramos que $\Gamma_1 u_n \rightarrow \Gamma_1 u$. Note, primeiramente que

$$\begin{aligned} \|(u_n)_t - u_t\|_{\mathcal{B}} &= \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|u_n(t+\theta) - u(t+\theta)\| \\ &\leq \sup_{s \in [0, b]} \|u_n(s) - u(s)\|_{C([0, b], X)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$, ou seja, $(u_n)_t \rightarrow u_t$, quando $n \rightarrow \infty$, para todo $t \in [0, b]$. Assim, pelo fato de $g \in C([0, a] \times \Omega, Y)$, concluímos que

$$(\Gamma_1 u_n)(t) = T(t)g(0, \varphi) - g(t, (u_n)_t + y_t) \rightarrow T(t)g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t) = \Gamma_1 u(t),$$

para todo $t \in [0, b]$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, da equicontinuidade de $\Gamma_1(S(b, \frac{b_1}{2}))$, existe $\delta > 0$, tal que $\|\Gamma_1 u_n(t+h) - \Gamma_1 u_n(t)\| < \frac{\epsilon}{6}$, sempre que $0 < |h| < \delta$, com $t+h \in$

$[0, b]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, como $[0, b]$ é compacto, existem $t_1, t_2, \dots, t_m \in [0, b]$ de modo que $[0, b] \subset \bigcup_{i=1}^m B_\delta(t_i, \mathbb{R})$ e então, dado $t \in [0, b]$, existe $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que $t \in B_{\delta^*}(t_j, \mathbb{R})$, ou seja, $|t - t_j| < \delta$. Mais ainda, como $\Gamma_1 u_n(t) \rightarrow \Gamma_1 u(t)$, quando $n \rightarrow \infty$, para cada $t_i, i \in \{1, 2, \dots, m\}$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_i$, $\|\Gamma_1 u_n(t_i) - \Gamma_1 u(t_i)\| < \frac{\epsilon}{6}$. Logo, tomando $n_0 = \max\{n_i; i = 1, 2, \dots, m\}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1 u_n(t) - \Gamma_1 u(t)\| &\leq \|\Gamma_1 u_n(t) - \Gamma_1 u_n(t_j)\| + \|\Gamma_1 u_n(t_j) - \Gamma_1 u(t_j)\| \\ &\quad + \|\Gamma_1 u(t_j) - \Gamma_1 u(t)\| < \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

para todo $n > n_0$. Assim,

$$\|\Gamma_1 u_n - \Gamma_1 u\|_{C([0, b], X)} = \sup_{t \in [0, b]} \|\Gamma_1 u_n(t) - \Gamma_1 u(t)\| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

ou seja, Γ_1 é contínua em $S(b, \frac{b_1}{2})$. Portanto, Γ_1 é completamente contínua.

(3.2) Γ_2 é completamente contínua. Assim como para o operador Γ_1 , vamos mostrar que $\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2}))$ é relativamente compacto via Teorema de Arzelá - Ascoli (Teorema A.8).

O conjunto $\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2}))(t) = \{\Gamma_2 u(t); u \in S(b, \frac{b_1}{2})\}$ é relativamente compacto em X , para todo $t \in [-r, b]$. De fato, note que $(\Gamma_2)_0 \equiv 0$ e então, $\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2}))(t) = \{0\}$ é relativamente compacto, para todo $t \in [-r, 0]$. Assim, sejam $t \in (0, b]$, $\epsilon > 0$ tal que $0 < 2\epsilon < t \leq b$ e $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$. Nessas condições, temos

$$\begin{aligned} (\Gamma_2 u)(t) &= - \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds \\ &= - \int_0^{t-2\epsilon} AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds - \int_{t-2\epsilon}^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds \\ &= -T(\epsilon) \int_0^{t-2\epsilon} AT(t-s-\epsilon)g(s, u_s + y_s) ds - \int_{t-2\epsilon}^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^{t-2\epsilon} AT(t-s-\epsilon)g(s, u_s + y_s) ds \right\| \\ &\leq \int_0^{t-2\epsilon} \|AT(t-s-\epsilon)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|g(s, u_s + y_s)\|_Y ds \\ &\leq C \int_0^{t-2\epsilon} \|AT(t-s-\epsilon)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} \|AT(\tau)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} d\tau \leq C \int_0^b \|AT(\tau)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} d\tau \\
&= C \|AT(\cdot)\|_{L^1([0,b],\mathcal{L}(Y,X))},
\end{aligned}$$

ou seja, fazendo $l = C \|AT(\cdot)\|_{L^1([0,b],\mathcal{L}(Y,X))}$, concluímos que

$$\int_0^{t-2\epsilon} AT(t-s-\epsilon)g(s, u_s + y_s) ds \in B_l(0, X).$$

Mais ainda, também temos

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{t-2\epsilon}^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds \right\| &\leq \int_{t-2\epsilon}^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|g(s, u_s + y_s)\|_Y ds \\
&\leq C \int_{t-2\epsilon}^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds \\
&= C \int_0^{2\epsilon} \|AT(\tau)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} d\tau = C \|AT(\cdot)\|_{L^1([0,2\epsilon],\mathcal{L}(Y,X))},
\end{aligned}$$

ou seja, fazendo $l_\epsilon = C \|AT(\cdot)\|_{L^1([0,2\epsilon],\mathcal{L}(Y,X))}$, obtemos que

$$(\Gamma_2 u)(t) \in T(\epsilon)B_l(0, X) + B_{l_\epsilon}(0, X) \subset \overline{T(\epsilon)B_l(0, X)} + B_{l_\epsilon}(0, X),$$

para todo $t \in [0, b]$ e todo $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$. Consequentemente, temos $\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2}))(t) \subset \overline{T(\epsilon)B_l(0, X)} + B_{l_\epsilon}(0, X)$.

Por outro lado, como $T(t)$ é compacto para todo $t > 0$, segue que $K_\epsilon = \overline{T(\epsilon)B_l(0, X)}$ é compacto e mais, $\text{diam}(C_\epsilon) \rightarrow 0$, quando $\epsilon \rightarrow 0$, onde $C_\epsilon = B_{l_\epsilon}(0, X)$. Então, pela Proposição A.19, segue que $\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2}))(t)$ é relativamente compacto em X , para todo $t \in (0, b]$.

Agora, mostramos que $\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2})) = \{\Gamma_2 u; u \in S(b, \frac{b_1}{2})\}$ é equicontínuo em $[-r, b]$. Pelo Teorema 2.52, sabemos que $T(\cdot) \in C((0, \infty), \mathcal{L}(X))$ e então, para todo $0 < \epsilon < b$, a função $t \mapsto T(t)$ é uniformemente contínua em $[\epsilon, b]$. Em particular, dados $t \in (0, b)$ e $\tilde{\epsilon} > 0$, tomamos $\epsilon > 0$ tal que $0 < 2\epsilon < t$, $\epsilon < \frac{\tilde{\epsilon}}{2C \|AT(\cdot)\|_{L^1([0,b],\mathcal{L}(Y,X))}}$ e

$\int_0^{3\epsilon} \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds < \frac{\tilde{\epsilon}}{4C}$. Desse modo, pelo que argumentamos inicialmente, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(s+h) - T(s)\| < \epsilon$, para todo $s \in [\epsilon, b]$ e $h \in \mathbb{R}$, com $0 < h < \delta$ e $s+h \in [\epsilon, b]$.

Seja $\tilde{\delta} = \min\{\delta, \epsilon\}$. Então, para $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$ e $h \in \mathbb{R}$, com $0 < h < \tilde{\delta}$, temos

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_2 u(t+h) - \Gamma_2 u(t)\| &= \left\| - \int_0^{t+h} AT(t+h-s)g(s, u_s + y_s) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^{t-2\epsilon} AT(t+h-s)g(s, u_s + y_s) ds + \int_{t-2\epsilon}^{t+h} AT(t+h-s)g(s, u_s + y_s) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t-2\epsilon} AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds - \int_{t-2\epsilon}^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^{t-2\epsilon} AT(t+h-s)g(s, u_s + y_s) ds - \int_0^{t-2\epsilon} AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds \right\| \\
&\quad + \left\| \int_{t-2\epsilon}^{t+h} AT(t+h-s)g(s, u_s + y_s) ds \right\| + \left\| \int_{t-2\epsilon}^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds \right\| \\
&\leq \left\| [T(\epsilon+h) - T(\epsilon)] \int_0^{t-2\epsilon} AT(t-s-\epsilon)g(s, u_s + y_s) ds \right\| \\
&\quad + \int_{t-2\epsilon}^{t+h} \|AT(t+h-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|g(s, u_s + y_s)\|_Y ds \\
&\quad + \int_{t-2\epsilon}^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|g(s, u_s + y_s)\|_Y ds \\
&\leq \|T(\epsilon+h) - T(\epsilon)\| \int_0^{t-2\epsilon} \|AT(t-s-\epsilon)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|g(s, u_s + y_s)\|_Y ds \\
&\quad + C \int_{t-2\epsilon}^{t+h} \|AT(t+h-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds + C \int_{t-2\epsilon}^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds \\
&\leq \epsilon C \int_0^{t-2\epsilon} \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds + C \int_0^{h+2\epsilon} \|AT(\tau)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} d\tau \\
&\quad + C \int_0^{2\epsilon} \|AT(\tau)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} d\tau \\
&\leq \epsilon C \int_0^b \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds + C \int_0^{3\epsilon} \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds \\
&\quad + C \int_0^{3\epsilon} \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds \\
&= \epsilon C \|AT(\cdot)\|_{L^1([0,b], \mathcal{L}(Y,X))} + 2C \|AT(\cdot)\|_{L^1([0,3\epsilon], \mathcal{L}(Y,X))} < \frac{\tilde{\epsilon}}{2} + \frac{\tilde{\epsilon}}{2} = \tilde{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Logo, $\Gamma_2\left(S(b, \frac{b_1}{2})\right)$ é equicontínuo à direita de t , para todo $t \in (0, b)$. Por meio de um argumento análogo mostramos a equicontinuidade de $\Gamma_2\left(S(b, \frac{b_1}{2})\right)$ à esquerda de $t \in (0, b]$.

Da mesma forma, para $t \in (0, b]$ e $\tilde{\epsilon} > 0$, consideramos $\epsilon > 0$ de modo que $0 < 2\epsilon < t$ e $\epsilon < \frac{\tilde{\epsilon}}{2C \|AT(\cdot)\|_{L^1([0,b], \mathcal{L}(Y,X))}} e \int_0^{2\epsilon} \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds < \frac{\tilde{\epsilon}}{4C}$. Como a função $T(\cdot) \in C((0, \infty), \mathcal{L}(X))$, $T(\cdot)$ é uniformemente contínua em $[\epsilon, b]$ e então, existe $\delta > 0$ tal que

$\|T(s-h) - T(s)\| < \epsilon$, para todo $s \in [\epsilon, b]$ e $h \in \mathbb{R}$ com $0 < h < \delta$ e $s-h \in [\epsilon, b]$.

Assim, tomando $\tilde{\delta} = \min\{\delta, \epsilon\}$, para $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$ e $h \in \mathbb{R}$ com $0 < h < \tilde{\delta}$, temos $\epsilon < 2\epsilon - h < 2\epsilon < t < b$, $0 < t - 2\epsilon < t - h$ e

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_2 u(t-h) - \Gamma_2 u(t)\| &= \left\| - \int_0^{t-h} AT(t-h-s)g(s, u_s + y_s) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds \right\| \\
&= \left\| - \int_0^{t-2\epsilon} AT(t-h-s)g(s, u_s + y_s) ds - \int_{t-2\epsilon}^{t-h} AT(t-h-s)g(s, u_s + y_s) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{t-2\epsilon} AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds + \int_{t-2\epsilon}^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^{t-2\epsilon} AT(t-h-s)g(s, u_s + y_s) ds - \int_0^{t-2\epsilon} AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds \right\| \\
&\quad + \int_{t-2\epsilon}^{t-h} \|AT(t-h-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|g(s, u_s + y_s)\|_Y ds \\
&\quad + \int_{t-2\epsilon}^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|g(s, u_s + y_s)\|_Y ds \\
&\leq [T(2\epsilon-h) - T(2\epsilon)] \int_0^{t-2\epsilon} \|AT(t-s-2\epsilon)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|g(s, u_s + y_s)\|_Y ds \\
&\quad + C \int_{t-2\epsilon}^{t-h} \|AT(t-h-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds + C \int_{t-2\epsilon}^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds \\
&\leq \epsilon C \int_0^{t-2\epsilon} \|AT(t-h-s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds + C \int_0^{2\epsilon-h} \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds \\
&\quad + C \int_0^{2\epsilon} \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds \\
&\leq \epsilon C \int_0^{t-2\epsilon} \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds + 2C \int_0^{2\epsilon} \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds \\
&\leq \epsilon C \|AT(\cdot)\|_{L^1([0,b], \mathcal{L}(Y,X))} + 2C \int_0^{2\epsilon} \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds < \frac{\tilde{\epsilon}}{2} + \frac{\tilde{\epsilon}}{2} = \tilde{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Logo, $\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2}))$ é equicontínuo à esquerda de $t \in (0, b]$.

Desse modo, lembrando que $(\Gamma_2 u)_0 \equiv 0$ e usando o Teorema A.7, concluímos que $\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2}))$ é equicontínuo em $[-r, b]$. Assim, pelo Teorema de Arzelá - Ascoli (Teorema A.8), obtemos que $\Gamma_2(S(b, \frac{b_1}{2}))$ é relativamente compacto e, então, Γ_2 é uma aplicação compacta.

Para a continuidade de Γ_2 em $S(b, \frac{b_1}{2})$, seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $S(b, \frac{b_1}{2})$ tal que $u_n \rightarrow u$, para algum $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$, quando $n \rightarrow \infty$. Mostramos que $\Gamma_2 u_n \rightarrow \Gamma_2 u$.

Como já observado anteriormente, $(u_n)_t \rightarrow u_t$, quando $n \rightarrow \infty$, para todo $t \in [0, b]$

e como $g : [0, a] \times \Omega \rightarrow Y$, por \mathbf{H}_1 e pelo Lema 3.3, $AT(t) \in \mathcal{L}(Y, X)$, para todo $t \in [0, a]$, o que garante que $AT(t-s)g(s, (u_n)_s + y_s) \rightarrow AT(t-s)g(s, u_s + y_s)$ e mais,

$$\begin{aligned} \|AT(t-s)g(s, (u_n)_s + y_s)\| &\leq \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|g(s, (u_n)_s + y_s)\|_Y \\ &\leq C \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y, X)}, \end{aligned}$$

com $AT(\cdot) \in L^1([0, b], \mathcal{L}(Y, X))$. Assim, pelo Teorema da convergência dominada (Teorema A.14), segue que

$$\int_0^t AT(t-s)g(s, (u_n)_s + y_s) ds \rightarrow \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Dessa forma, como $\int_0^t AT(t-s)g(s, (u_n)_s + y_s) ds = -\Gamma_2 u_n(t)$ e $\int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds = -\Gamma_2 u(t)$, concluímos que $\Gamma_2 u_n(t) \rightarrow \Gamma_2 u(t)$, quando $n \rightarrow \infty$, para todo $t \in [0, b]$.

Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, da equicontinuidade de $\Gamma_2\left(S(b, \frac{b_1}{2})\right)$, existe $\delta > 0$, tal que $\|\Gamma_2 u_n(t-h) - \Gamma_2 u_n(t)\| < \frac{\epsilon}{6}$, sempre que $0 < |h| < \delta$, com $t, t-h \in [0, b]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, pelo fato de $[0, b]$ ser um conjunto compacto, existem $t_1, t_2, \dots, t_m \in [0, b]$ tais que $[0, b] \subset \bigcup_{i=1}^m B_\delta(t_i, \mathbb{R})$ e então, dado $t \in [0, b]$, existe $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que $t \in B_\delta(t_j, \mathbb{R})$, ou seja, $|t - t_j| < \delta$. Dessa forma, como $\Gamma_2 u_n(t) \rightarrow \Gamma_2 u(t)$, quando $n \rightarrow \infty$, para cada $t_i, i \in \{1, 2, \dots, m\}$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_i$, $\|\Gamma_2 u_n(t_i) - \Gamma_2 u(t_i)\| < \frac{\epsilon}{6}$. Logo, tomando $n_0 = \max\{n_i; i = 1, 2, \dots, m\}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma_2 u_n(t) - \Gamma_2 u(t)\| &\leq \|\Gamma_2 u_n(t) - \Gamma_2 u_n(t_j)\| + \|\Gamma_2 u_n(t_j) - \Gamma_2 u(t_j)\| \\ &\quad + \|\Gamma_2 u(t_j) - \Gamma_2 u(t)\| < \frac{3\epsilon}{6} = \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

para todo $n > n_0$. Assim,

$$\|\Gamma_2 u_n - \Gamma_2 u\|_{C([0, b], X)} = \sup_{t \in [0, b]} \|\Gamma_2 u_n(t) - \Gamma_2 u(t)\| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

ou seja, Γ_2 é contínua em $S(b, \frac{b_1}{2})$. Portanto, Γ_2 é completamente contínua.

(3.3) Por fim, Γ_3 é completamente contínua. Neste caso, como as condições impostas sobre a função f são as mesmas impostas no Teorema 3.11, obtemos que Γ_3 é completamente contínua da mesma maneira que na demonstração do Teorema 3.11.

Dessa forma, dos itens (3.1), (3.2) e (3.3), obtemos que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ é completamente contínua. Além disso, como já vimos em resultados anteriores, $S(b, \frac{b_1}{2})$ é fechado, limitado e

convexo, o que nos permite aplicar o Teorema do ponto fixo de Schauder (Teorema A.4). Então, existe $u \in S(b, \frac{b_1}{2})$ tal que $\Gamma u = u$.

Finalmente, tomando $x : [-r, b] \rightarrow X$ por $x(t) = u(t) + y(t)$, $t \in [-r, b]$, obtemos que x é contínua, uma vez que u e y o são, para $t \in [-r, 0]$, $x(t) = 0 + y(t) = \varphi(t)$, pois $y_0 = \varphi$, e, para $t \in [0, b]$,

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + y(t) = \Gamma u(t) + y(t) \\ &= T(t)\varphi(0) + T(t)g(0, \varphi) - g(t, u_s + y_s) - \int_0^t AT(t-s)g(s, u_s + y_s) ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)f(s, u_s + y_s) ds \\ &= T(t)[\varphi(0) + g(0, \varphi)] - g(t, x_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, x_s) ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)f(s, x_s) ds. \end{aligned}$$

Portanto, x é uma solução fraca de (3.1) - (3.2) em $[-r, b]$.

□

3.3 Aplicação

Nesta seção apresentamos uma aplicação concreta da teoria abstrata apresentada anteriormente, a qual pode ser encontrada em (2). Para isso, iniciamos introduzindo algumas notações técnicas que serão necessárias para o desenvolvimento desta parte do trabalho.

Consideramos $\mathfrak{U} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado e com fronteira $\partial\mathfrak{U}$ suave, $\eta \in (0, 1)$ e $X = C^\eta(\overline{\mathfrak{U}})$, onde $C^\eta(\overline{\mathfrak{U}})$ representa o espaço formado pelas funções η -Hölder contínuas de $\overline{\mathfrak{U}}$ em \mathbb{R}^n , munido da norma

$$\|\xi\|_{C^\eta(\overline{\mathfrak{U}})} = \|\xi\|_{C(\overline{\mathfrak{U}})} + [|\xi|]_{C^\eta(\overline{\mathfrak{U}})},$$

com $\|\cdot\|_{C(\overline{\mathfrak{U}})}$ sendo a norma do supremo, $[|\xi|]_{C^\eta(\overline{\mathfrak{U}})} = \sup_{x,y \in \overline{\mathfrak{U}}, x \neq y} \frac{|\xi(x) - \xi(y)|}{|x - y|^\eta}$ e $|\cdot|$ a norma euclidiana em \mathbb{R}^n .

Além disso, consideramos o operador $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ definido por $Au = \Delta u$, com $\mathcal{D}(A) = \{u \in C^{2+\eta}(\overline{\mathfrak{U}}); u|_{\partial\mathfrak{U}} \equiv 0\}$. Por (14) sabemos que A é um operador quase setorial que verifica a condição

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|^{1-\alpha}}, \quad \lambda \in (\Delta(\theta))^c = \{\lambda \in \mathbb{C}; \theta \leq |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}\},$$

$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, com $\alpha = \frac{\eta}{2}$. Além disso, A não é setorial. Assim, denotamos por $(T(t))_{t \geq 0}$ o semigrupo de crescimento de ordem α associado ao operador A .

Nosso objetivo é analisar a existência de soluções fracas para a seguinte equação diferencial parcial neutra

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[u(t, \xi) + \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} b_1(t, s, \nu, \xi) u(t+s, \nu) dv ds \right], \\ = \Delta u(t, \xi) + \int_{t-r}^t b_2(s-t) u(s, \xi) ds, \quad (t, \xi) \in [0, a] \times \mathfrak{U}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$u(t, \cdot)|_{\partial \bar{\mathfrak{U}}} \equiv 0, \quad \forall t \in [0, a] \quad (3.16)$$

$$u(\tau, \xi) = \psi(\tau, \xi), \quad \forall \tau \in [-r, 0], \xi \in \mathfrak{U}, \quad (3.17)$$

onde $\psi : [-r, 0] \times \bar{\mathfrak{U}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função, $b_1 \in C([0, a] \times [-r, 0] \times \bar{\mathfrak{U}} \times \bar{\mathfrak{U}}, \mathbb{R})$ e $b_2 \in C([-r, 0], \mathbb{R})$.

A fim de expressarmos o sistema (3.15) – (3.17) na forma abstrata, como em (3.1) – (3.2), introduzimos as aplicações $f, g : [0, a] \times \mathcal{B} \rightarrow X$, onde $\mathcal{B} = C([-r, 0], X)$, dadas por

$$\begin{aligned} f(t, \psi)(\xi) &= \int_{-r}^0 b_2(s) \psi(s, \xi) ds, \\ g(t, \psi)(\xi) &= \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} b_1(t, s, \nu, \xi) \psi(s, \nu) dv ds. \end{aligned}$$

No próximo resultado, diremos que a função $u : [-r, b] \times \bar{\mathfrak{U}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução fraca de (3.15) – (3.17) em $[-r, b]$ se a função $u : [-r, b] \rightarrow X$, dada por $u(t)(\xi) = u(t, \xi)$, for uma solução fraca do sistema abstrato associado a (3.1) – (3.2) em $[-r, b]$. Além disso, para $\theta \in [-r, 0]$, denotamos por $\varphi(\theta) : \bar{\mathfrak{U}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a função dada por $\varphi(\theta)(\xi) = \psi(\theta, \xi)$ e por i_c a aplicação inclusão de $[\mathcal{D}(A)]$ em X .

Proposição 3.15. *Suponha que $\varphi \in C([-r, 0], X)$, $T(\cdot)\varphi(0, \cdot) \in C([0, a], X)$, a função $b_1 : [0, a] \times [-r, 0] \times \bar{\mathfrak{U}} \times \bar{\mathfrak{U}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja suficientemente suave, $b_1(t, s, \nu, \cdot) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $(t, s, \nu) \in [0, a] \times [-r, 0] \times \bar{\mathfrak{U}}$ e*

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \sup_{t \in [0, a], \xi \in \bar{\mathfrak{U}}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} \left| \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} b_1(t, s, \nu, \xi) \right| dv ds \\ &\quad + \sup_{t \in [0, a]} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} [|Ab_1(t, s, \nu, \cdot)|]_{C^\eta(\bar{\mathfrak{U}}, \mathbb{R}^n)} dv ds \\ \Theta_2 &= \sup_{t \in [0, a], \xi \in \bar{\mathfrak{U}}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} |b_1(t, s, \nu, \xi)| dv ds + \sup_{t \in [0, a]} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} [|b_1(t, s, \nu, \cdot)|]_{C^\eta(\bar{\mathfrak{U}}, \mathbb{R}^n)} dv ds \end{aligned}$$

são finitos e $\|i_c\|_{\mathcal{L}([\mathcal{D}(A)], X)} (\Theta_1 + \Theta_2) < 1$.

Então, existe uma única solução fraca de (3.15) – (3.17) em $[-r, b]$, para algum $0 < b \leq a$.

Demonstração. Primeiramente, escrevemos o sistema (3.15) – (3.17) na forma abstrata (3.1) –

(3.2). Note que, para $u : [-r, a] \longrightarrow X$, como $u(t) \in X = C^n(\bar{\mathfrak{U}})$, escrevemos $u(t)(\xi) = u(t, \xi)$, para todo $\xi \in \bar{\mathfrak{U}}$. Assim, visto que $-r \leq s \leq 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} b_1(t, s, v, \xi) u(t+s, v) dv ds &= \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} b_1(t, s, v, \xi) u(t+s)(v) dv ds \\ &= \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} b_1(t, s, v, \xi) u_t(s)(v) dv ds = g(t, u_t)(\xi), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{t-r}^t b_2(s-t) u(s, \xi) ds &= \int_{-r}^0 b_2(\tau) u(\tau+t, \xi) d\tau = \int_{-r}^0 b_2(\tau) u(\tau+t)(\xi) d\tau \\ &= \int_{-r}^0 b_2(\tau) u_t(\tau)(\xi) d\tau \\ &= f(t, u_t)(\xi), \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \bar{\mathfrak{U}}$.

Dessa forma, como $Au = \Delta u$, ou ainda, $Au(t)(\xi) = \Delta u(t, \xi)$, obtemos de (3.15) a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} [u(t)(\xi) + g(t, u_t)(\xi)] = Au(t)(\xi) + f(t, u_t)(\xi), \quad \forall \xi \in \bar{\mathfrak{U}},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} [u(t) + g(t, u_t)] = Au(t) + f(t, u_t).$$

Além disso, $u(t)(\xi) = u(t, \xi) = \psi(t, \xi) = \varphi(t)(\xi)$, para todo $\xi \in \bar{\mathfrak{U}}$, $t \in [-r, 0]$, ou seja, $u(t) = \varphi(t)$, para todo $t \in [-r, 0]$. Logo, $u_0 = \varphi$. Mais ainda, como $\varphi \in C([-r, 0], X)$, obtemos que $\varphi \in \mathcal{B}$.

Dessa maneira, o sistema (3.15) – (3.17) pode ser reescrito na seguinte forma abstrata

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [u(t) + g(t, u_t)] &= Au(t) + f(t, u_t), \quad t \in [0, a], \\ u_0 &= \varphi \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

A fim de garantirmos a existência e unicidade de uma solução fraca para o sistema (3.15) – (3.17), verificamos que as hipóteses do Teorema 3.12 são satisfeitas. De início, mostramos que as condições $\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_3$ são verificadas.

(I) Condição \mathbf{H}_1 : Seja $Y = [\mathcal{D}(A)] = (\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_{[\mathcal{D}(A)]})$, onde $\|x\|_{[\mathcal{D}(A)]} = \|x\|_X + \|Ax\|_X$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. Como X é um espaço de Banach e A é um operador fechado, segue que Y é, também, um espaço de Banach. Além disso, considerando $i_c : Y \longrightarrow X$ e o fato de

$\|i_c(x)\|_X = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Ax\|_X = \|x\|_Y$, podemos concluir que i_c é contínua, uma vez que esta é linear e limitada. Mais ainda, dados $y \in Y$, $t \in [0, a]$ e $s \in [0, t]$, temos $T(s)y \in \mathcal{D}(A)$ e $\|AT(s)y\|_X = \|T(s)Ay\|$, com $Ay \in X$. Assim,

$$\|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \sup_{y \in Y, \|y\|_Y \leq 1} \|AT(s)y\|_X = \sup_{y \in Y, \|y\|_Y \leq 1} \|T(s)Ay\|_X.$$

Note que, se $y \in Y$ e $\|y\|_Y \leq 1$, então $\|Ay\|_X \leq \|y\|_X + \|Ay\|_X = \|y\|_Y \leq 1$ e $\|y\|_X \leq \|y\|_Y \leq 1$. Desse modo, $\{y \in Y; \|y\|_Y \leq 1\} \subset \{x \in X; \|x\|_X \leq 1\}$. Logo,

$$\|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \sup_{y \in Y, \|y\|_Y \leq 1} \|T(s)Ay\|_X \leq \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|T(s)x\|_X = \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

Pelo Teorema 2.52, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_0}{t^\alpha}$, para todo $t > 0$ e, então,

$$\int_0^a \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} ds \leq \int_0^a \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)} ds \leq \int_0^a C_0 s^{-\alpha} ds = \frac{C_0 a^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \infty,$$

pois $\alpha = \frac{\eta}{2}$, com $\eta \in (0, 1)$, ou seja, $1 - \alpha > 0$. Assim, $AT(\cdot) \in L^1([0, a], \mathcal{L}(Y, X))$ e a condição \mathbf{H}_1 está satisfeita.

(II) Condição \mathbf{H}_2 : Começamos verificando que a função $f : [0, a] \times \mathcal{B} \rightarrow X$ está bem definida, ou seja, $f(t, \psi) \in X$, para todo $(t, \psi) \in [0, a] \times \mathcal{B}$ e a integral que define f existe e é finita para todo $\psi \in \mathcal{B}$. De fato, como $b_2 \in C([-r, 0], \mathbb{R})$, com $[-r, 0]$ compacto, e $\psi(s) \in C^\eta(\overline{\mathfrak{U}})$, para todo $s \in [-r, 0]$, existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2(s) > 0$ tais que $|b_2(s)| \leq C_1$, para todo $s \in [-r, 0]$ e $\|\psi(s)(\xi) - \psi(s)(\nu)\| \leq C_2(s)\|\xi - \nu\|^\eta$, para todo $\xi, \nu \in \overline{\mathfrak{U}}$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-r}^0 \|b_2(s)\psi(s)(\xi)\| ds &\leq \int_{-r}^0 |b_2(s)| \|\psi(s)(\xi)\| ds \\ &\leq \int_{-r}^0 |b_2(s)| \sup_{\xi \in \overline{\mathfrak{U}}} \|\psi(s)(\xi)\| ds \\ &= C_1 \int_{-r}^0 \|\psi(s)\|_{C(\overline{\mathfrak{U}})} ds \\ &\leq C_1 \int_{-r}^0 [\|\psi(s)\|_{C(\overline{\mathfrak{U}})} + \|\psi(s)\|_{C^\eta(\overline{\mathfrak{U}})}] ds \\ &= C_1 \int_{-r}^0 \|\psi(s)\|_X ds \\ &\leq C_1 \int_{-r}^0 \|\psi\|_{C([-r, 0], X)} ds = C_1 \|\psi\|_{\mathcal{B}r} < \infty, \end{aligned}$$

implicando que a integral que define f existe e é finita. Além disso, mostramos que $f(t, \psi) \in X$,

para todo $(t, \psi) \in [0, a] \times \mathcal{B}$. Como $\psi \in \mathcal{B} = C([-r, 0], X)$ e $[-r, 0]$ é compacto segue que ψ é uniformemente contínua, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|\psi(t) - \psi(s)\|_X < \epsilon$, para todo $t, s \in [-r, 0]$, com $|t - s| < \delta$. Assim, tomando $\epsilon = 1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{|\psi(t)(\xi) - \psi(t)(\nu)| - |\psi(s)(\xi) + \psi(s)(\nu)|}{|\xi - \nu|^\eta} \leq \frac{|\psi(t)(\xi) - \psi(t)(\nu) - \psi(s)(\xi) + \psi(s)(\nu)|}{|\xi - \nu|^\eta} \\ & \leq \sup_{\xi, \nu \in \overline{\mathfrak{U}}, \xi \neq \nu} \frac{|\psi(t)(\xi) - \psi(t)(\nu) - \psi(s)(\xi) + \psi(s)(\nu)|}{|\xi - \nu|^\eta} \leq \|\psi(t) - \psi(s)\|_X < \epsilon = 1, \end{aligned}$$

para todo $\xi, \nu \in \overline{\mathfrak{U}}$, com $\xi \neq \nu$ e $t, s \in [-r, 0]$, com $|t - s| < \delta_1$. Logo,

$$|\psi(t)(\xi) - \psi(t)(\nu)| < |\xi - \nu|^\eta + |\psi(s)(\xi) - \psi(s)(\nu)|. \quad (3.18)$$

Por outro lado, como $[-r, 0]$ é compacto em \mathbb{R} , segue que ele é um conjunto totalmente limitado, então, para o mesmo $\delta_1 > 0$ acima, existem $s_1, s_2, \dots, s_k \in [-r, 0]$ tais que $[-r, 0] \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\delta_1}(s_i, \mathbb{R})$. Dessa forma, dado $t \in [-r, 0]$, existe $s_j \in \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ tal que $t \in B_{\delta_1}(s_j, \mathbb{R})$, ou seja, $|t - s_j| < \delta_1$. Consequentemente, de (3.18), temos

$$\begin{aligned} |\psi(t)(\xi) - \psi(t)(\nu)| & < |\xi - \nu|^\eta + |\psi(s_j)(\xi) - \psi(s_j)(\nu)| \\ & \leq |\xi - \nu|^\eta + C_2(s_j)|\xi - \nu|^\eta \\ & \leq C|\xi - \nu|^\eta, \quad \forall \xi, \nu \in \overline{\mathfrak{U}}, \xi \neq \nu, \end{aligned}$$

onde $C = 2 \max\{1, C_2(s_i), i = 1, 2, \dots, k\}$. Para $\xi = \nu$, então $0 \leq |\psi(t)(\xi) - \psi(t)(\nu)| \leq C|\xi - \nu|^\eta = 0$ e, então, a desigualdade também se verifica para este caso. Logo, $|\psi(t)(\xi) - \psi(t)(\nu)| \leq C|\xi - \nu|^\eta$, para todo $t \in [-r, 0]$ e todo $\xi, \nu \in \overline{\mathfrak{U}}$. Dessa forma, sejam $(t, \psi) \in [0, a] \times \mathcal{B}$ e $\xi, \nu \in \overline{\mathfrak{U}}$, então

$$\begin{aligned} \|f(t, \psi)(\xi) - f(t, \psi)(\nu)\| & = \left\| \int_{-r}^0 b_2(s)\psi(s, \xi) ds - \int_{-r}^0 b_2(s)\psi(s, \nu) ds \right\| \\ & \leq \int_{-r}^0 |b_2(s)| \|\psi(s, \xi) - \psi(s, \nu)\| ds \\ & \leq \int_{-r}^0 |b_2(s)| C|\xi - \nu|^\eta ds = C|\xi - \nu|^\eta \int_{-r}^0 |b_2(s)| ds \\ & \leq C|\xi - \nu|^\eta \int_{-r}^0 C_1 ds = CC_1 r |\xi - \nu|^\eta = \tilde{C} |\xi - \nu|^\eta, \end{aligned}$$

onde $\tilde{C} = CC_1 r$. Assim, $f(t, \psi) \in X$, para todo $(t, \psi) \in [0, a] \times \mathcal{B}$.

Agora, mostramos que a função f é contínua de $[0, a] \times \mathcal{B}$ em X . Mais que isso, mostramos que $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, X)$, para todo $t \in [0, a]$. De fato, dados $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$ e α um escalar, temos

$$\begin{aligned}
f(t, \alpha\psi_1 + \psi_2)(\xi) &= \int_{-r}^0 b_2(s) [\alpha\psi_1 + \psi_2](s, \xi) ds = \int_{-r}^0 b_2(s) [\alpha\psi_1(s, \xi) + \psi_2(s, \xi)] ds \\
&= \alpha \int_{-r}^0 b_2(s) \psi_1(s, \xi) ds + \int_{-r}^0 b_2(s) \psi_2(s, \xi) ds \\
&= \alpha f(t, \psi_1)(\xi) + f(t, \psi_2)(\xi), \quad \forall \xi \in \bar{\mathfrak{U}}.
\end{aligned}$$

Logo, $f(t, \alpha\psi_1 + \psi_2) = \alpha f(t, \psi_1) + f(t, \psi_2)$. Além disso, para todo $\psi \in \mathcal{B}$ e $\xi \in \bar{\mathfrak{U}}$,

$$\begin{aligned}
\|f(t, \psi)(\xi)\| &= \left\| \int_{-r}^0 b_2(s) \psi(s, \xi) ds \right\| \leq \int_{-r}^0 |b_2(s)| \sup_{\xi \in \bar{\mathfrak{U}}} \|\psi(s)(\xi)\| ds \\
&= \int_{-r}^0 |b_2(s)| \|\psi(s)\|_{C(\bar{\mathfrak{U}})} ds \leq \int_{-r}^0 |b_2(s)| \|\psi(s)\|_X ds \\
&\leq \int_{-r}^0 |b_2(s)| \sup_{s \in [-r, 0]} \|\psi(s)\|_X ds = \int_{-r}^0 |b_2(s)| \|\psi\|_{\mathcal{B}} ds \quad (3.19) \\
&= \|\psi\|_{\mathcal{B}} \int_{-r}^0 |b_2(s)| ds = \|b_2\|_{L^1([-r, 0])} \|\psi\|_{\mathcal{B}},
\end{aligned}$$

uma vez que $\|b_2(s)\| \leq C_1$ e, então, $\int_{-r}^0 |b_2(s)| ds \leq C_1 r < \infty$, o que nos garante que $b_2 \in L^1([-r, 0])$. Mais ainda, para $\xi, \nu \in \bar{\mathfrak{U}}$, $\xi \neq \nu$,

$$\begin{aligned}
\frac{\|f(t, \psi)(\xi) - f(t, \psi)(\nu)\|}{|\xi - \nu|^\eta} &= \frac{\left\| \int_{-r}^0 b_2(s) \psi(s)(\xi) ds - \int_{-r}^0 b_2(s) \psi(s)(\nu) ds \right\|}{|\xi - \nu|^\eta} \\
&= \left\| \int_{-r}^0 b_2(s) \frac{[\psi(s)(\xi) - \psi(s)(\nu)]}{|\xi - \nu|^\eta} ds \right\| \\
&\leq \int_{-r}^0 |b_2(s)| \frac{\|\psi(s)(\xi) - \psi(s)(\nu)\|}{|\xi - \nu|^\eta} ds \quad (3.20) \\
&\leq \int_{-r}^0 |b_2(s)| \sup_{\xi, \nu \in \bar{\mathfrak{U}}, \xi \neq \nu} \frac{\|\psi(s)(\xi) - \psi(s)(\nu)\|}{|\xi - \nu|^\eta} ds \\
&\leq \int_{-r}^0 |b_2(s)| \|\psi(s)\|_X ds \leq \int_{-r}^0 |b_2(s)| \sup_{s \in [-r, 0]} \|\psi(s)\|_X ds \\
&= \int_{-r}^0 |b_2(s)| \|\psi\|_{\mathcal{B}} ds = \|b_2\|_{L^1([-r, 0])} \|\psi\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, de (3.19) e (3.20), obtemos

$$\begin{aligned}
\|f(t, \psi)\|_X &= \sup_{\xi \in \bar{\mathbf{U}}} \|f(t, \psi)(\xi)\| + \sup_{\xi, \nu \in \bar{\mathbf{U}}, \xi \neq \nu} \frac{\|f(t, \psi)(\xi) - f(t, \psi)(\nu)\|}{|\xi - \nu|^\eta} \\
&\leq \sup_{\xi \in \bar{\mathbf{U}}} \{\|b_2\|_{L^1([-r, 0])} \|\psi\|_{\mathcal{B}}\} + \sup_{\xi, \nu \in \bar{\mathbf{U}}, \xi \neq \nu} \{\|b_2\|_{L^1([-r, 0])} \|\psi\|_{\mathcal{B}}\} \\
&= 2\|b_2\|_{L^1([-r, 0])} \|\psi\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, X)$ e

$$\|f(t, \cdot)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}, X)} = \sup_{\|\psi\| \leq 1} \|f(t, \psi)\|_X \leq \sup_{\|\psi\| \leq 1} 2\|b_2\|_{L^1([-r, 0])} \|\psi\|_{\mathcal{B}} = 2\|b_2\|_{L^1([-r, 0])}.$$

Assim, como f não depende de $t \in [0, a]$, obtemos $f \in C([0, a], \mathcal{L}(\mathcal{B}, X))$.

Dessa maneira, sendo $l > 0$ tal que $[0, l] \times B_l(\varphi, \mathcal{B}) \subset [0, a] \times \mathcal{B}$, segue da linearidade de f que

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\|_X = \|f(t, \psi_1 - \psi_2)\|_X \leq 2\|b_2\|_{L^1([-r, 0])} \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}},$$

para todo $(t, \psi_i) \in [0, l] \times B_l(\varphi, \mathcal{B})$, $i = 1, 2$. Logo, existe $L_{f, l} \in L^q([0, a], \mathbb{R}^+)$, com $L_{f, l}(s) = 2\|b_2\|_{L^1([-r, 0])}$ tal que

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\|_X \leq L_{f, l}(s) \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \quad \forall (t, \psi_i) \in [0, l] \times B_l(\varphi, \mathcal{B}), \quad i = 1, 2,$$

ou seja, \mathbf{H}_2 é satisfeita.

(III) Condição \mathbf{H}_3 : Começamos mostrando que a função $g : [0, a] \times \mathcal{B} \rightarrow Y$ também está bem definida, no sentido de $g(t, \psi) \in Y$, para todo $(t, \psi) \in [0, a] \times \mathcal{B}$, e a integral que define g existe e é finita para todo $(t, \psi) \in [0, a] \times \mathcal{B}$.

Como $\psi(s) \in X$, para todo $s \in [-r, 0]$ e $\psi \in \mathcal{B}$, procedendo como no caso (II), concluímos que existe $C > 0$ tal que

$$|\psi(s)(\xi) - \psi(s)(\nu)| \leq C|\xi - \nu|^\eta, \quad \forall \xi, \nu \in \bar{\mathbf{U}}, \quad \forall s \in [-r, 0].$$

Além disso, como $b_1 \in C([0, a] \times [-r, 0] \times \bar{\mathbf{U}} \times \bar{\mathbf{U}}, \mathbb{R})$, com $[0, a] \times [-r, 0] \times \bar{\mathbf{U}} \times \bar{\mathbf{U}}$ compacto, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$|b_1(t, s, \xi, \nu)| \leq C_3, \quad \forall (t, s, \xi, \nu) \in [0, a] \times [-r, 0] \times \bar{\mathbf{U}} \times \bar{\mathbf{U}}.$$

Logo, para $\psi \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} b_1(t, s, \nu, \xi) \psi(s, \xi) \, dv ds \right\| &\leq \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} |b_1(t, s, \nu, \xi)| \|\psi(s)(\xi)\| \, dv ds \\
&\leq \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} C_3 \sup_{\xi \in \bar{\mathfrak{U}}} \|\psi(s)(\xi)\| \, dv ds \\
&\leq \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} C_3 \|\psi(s)\|_X \, dv ds \\
&= C_3 \int_{-r}^0 \|\psi(s)\|_X \int_{\bar{\mathfrak{U}}} \, dv ds = C_3 |\bar{\mathfrak{U}}| \int_{-r}^0 \|\psi(s)\|_X \, ds \\
&\leq C_3 |\bar{\mathfrak{U}}| \int_{-r}^0 \sup_{s \in [-r, 0]} \|\psi(s)\|_X \, ds = C_3 |\bar{\mathfrak{U}}| \int_{-r}^0 \|\psi\|_{\mathcal{B}} \, ds \\
&= C_3 |\bar{\mathfrak{U}}| r \|\psi\|_{\mathcal{B}} < \infty,
\end{aligned}$$

ou seja, a integral que define g existe e é finita.

Agora, se $(t, \psi) \in [0, a] \times \mathcal{B}$ e $\xi, \mu \in \bar{\mathfrak{U}}$, temos

$$\begin{aligned}
\|g(t, \psi)(\xi) - g(t, \psi)(\mu)\| &= \left\| \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} b_1(t, s, \nu, \xi) \psi(s, \nu) \, dv ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} b_1(t, s, \nu, \mu) \psi(s, \nu) \, dv ds \right\| \\
&= \left\| \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} [b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(t, s, \nu, \mu)] \psi(s, \nu) \, dv ds \right\| \quad (3.21) \\
&\leq \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} |b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(t, s, \nu, \mu)| \|\psi(s, \nu)\| \, dv ds.
\end{aligned}$$

Mais ainda, por hipótese, $b_1(t, s, \nu, \cdot) \in \mathcal{D}(A)$, ou seja, $b_1(t, s, \nu, \cdot) \in C^{2+\eta}(\bar{\mathfrak{U}})$. Assim, como $b_1 \in C([0, a] \times [-r, 0] \times \bar{\mathfrak{U}} \times \bar{\mathfrak{U}}, \mathbb{R})$ e $[0, a] \times [-r, 0] \times \bar{\mathfrak{U}} \times \bar{\mathfrak{U}}$ é compacto, procedendo de forma análoga a caso (II), obtemos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(t, s, \nu, \mu)| \leq C |\xi - \mu|^{2+\eta}, \quad \forall \xi, \mu \in \bar{\mathfrak{U}}.$$

Dessa forma, voltando a (3.21), temos

$$\begin{aligned}
\|g(t, \psi)(\xi) - g(t, \psi)(\mu)\| &\leq \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} C |\xi - \mu|^{2+\eta} \|\psi(s, \nu)\| \, dv ds \\
&\leq C |\xi - \mu|^{2+\eta} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} \|\psi(s)\|_X \, dv ds \\
&\leq C |\xi - \mu|^{2+\eta} \int_{-r}^0 \|\psi\|_{\mathcal{B}} |\bar{\mathfrak{U}}| \, ds = C r \|\psi\|_{\mathcal{B}} |\bar{\mathfrak{U}}| |\xi - \mu|^{2+\eta},
\end{aligned}$$

implicando que $g(t, \psi) \in C^{2+\eta}(\bar{\mathfrak{U}})$. Além disso, se $\xi \in \partial\bar{\mathfrak{U}}$, então

$$g(t, \psi)(\xi) = \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} b_1(t, s, \nu, \xi) \psi(s, \nu) \, d\nu ds = 0.$$

Logo, como $g \in C^{2+\eta}(\bar{\mathfrak{U}})$ e $g(t, \psi)|_{\partial\bar{\mathfrak{U}}} \equiv 0$, obtemos que $g(t, \psi) \in \mathcal{D}(A) = Y$. Portanto, g está bem definida.

Mostramos, também, que $g \in C([0, a] \times \mathcal{B}, Y)$. Sejam $t, \tau \in [0, a]$ e $\phi, \psi \in \mathcal{B}$, então

$$\begin{aligned} \|g(t, \psi) - g(\tau, \phi)\|_Y &= \|g(t, \psi) + g(t, \phi) - g(t, \phi) - g(\tau, \phi)\|_Y \\ &\leq \|g(t, \psi) - g(t, \phi)\|_Y + \|g(t, \phi) - g(\tau, \phi)\|_Y. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Vamos analisar os termos da expressão (3.22) separadamente. Note que

$$\|g(t, \psi) - g(t, \phi)\|_Y = \|g(t, \psi) - g(t, \phi)\|_X + \|Ag(t, \psi) - Ag(t, \phi)\|_X$$

e mais, mostramos que $g(t, \cdot) : \mathcal{B} \rightarrow Y$ é linear, para todo $t \in [0, a]$. De fato, para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$ e α um escalar, obtemos

$$\begin{aligned} g(t, \alpha\psi_1 + \psi_2) &= \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} b_1(t, s, \nu, \xi) (\alpha\psi_1 + \psi_2)(s, \nu) \, d\nu ds \\ &= \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} b_1(t, s, \nu, \xi) [\alpha\psi_1(s, \nu) + \psi_2(s, \nu)] \, d\nu ds \\ &= \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} [b_1(t, s, \nu, \xi) \alpha\psi_1(s, \nu) + b_1(t, s, \nu, \xi) \psi_2(s, \nu)] \, d\nu ds \\ &= \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} b_1(t, s, \nu, \xi) \alpha\psi_1(s, \nu) \, d\nu ds + \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} b_1(t, s, \nu, \xi) \psi_2(s, \nu) \, d\nu ds \\ &= \alpha g(t, \psi_1)(\xi) + g(t, \psi_2)(\xi), \quad \forall \xi \in \bar{\mathfrak{U}}. \end{aligned}$$

Logo, $g(t, \alpha\psi_1 + \psi_2) = \alpha g(t, \psi_1) + g(t, \psi_2)$. Além disso, verificamos que $g(t, \cdot)$ é limitada.

Com efeito, note que $\|g(t, \psi)\|_Y = \|g(t, \psi)\|_X + \|Ag(t, \psi)\|_X$, com

$$\begin{aligned} \|g(t, \psi)(\xi)\| &= \left\| \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} b_1(t, s, \nu, \xi) \psi(s, \nu) \, d\nu ds \right\| \leq \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} |b_1(t, s, \nu, \xi)| \|\psi(s, \nu)\| \, d\nu ds \\ &\leq \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} |b_1(t, s, \nu, \xi)| \sup_{\nu \in \bar{\mathfrak{U}}} \|\psi(s)(\nu)\| \, d\nu ds \\ &\leq \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} |b_1(t, s, \nu, \xi)| \|\psi(s)\|_X \, d\nu ds \quad (3.23) \\ &\leq \int_{-r}^0 |b_1(t, s, \nu, \xi)| \sup_{s \in [-r, 0]} \|\psi(s)\| \, d\nu ds = \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} |b_1(t, s, \nu, \xi)| \|\psi\|_{\mathcal{B}} \, d\nu ds \\ &= \|\psi\|_{\mathcal{B}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} |b_1(t, s, \nu, \xi)| \, d\nu ds. \end{aligned}$$

e, note que, se $u \in C^{2+\eta}(\bar{\mathbf{U}})$, segue que $\|u(\xi) - u(\mu)\| \leq C\|\xi - \mu\|^{2+\eta}$, para todo $\xi, \mu \in \bar{\mathbf{U}}$, então $\|u(\xi) - u(\mu)\| \leq C[\text{diam}(\bar{\mathbf{U}})]^2\|\xi - \mu\|^\eta$, ou seja, $u \in C^\eta(\bar{\mathbf{U}})$. Dessa forma, como $b_1(t, s, \nu, \cdot) \in \mathcal{D}(A)$, obtemos que $b_1(t, s, \nu, \cdot) \in C^\eta(\bar{\mathbf{U}})$ e, então,

$$\begin{aligned}
\frac{\|g(t, \psi)(\xi) - g(t, \psi)(\mu)\|}{|\xi - \mu|^\eta} &= \frac{1}{|\xi - \mu|^\eta} \left\| \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathbf{U}}} b_1(t, s, \nu, \xi) \psi(s, \nu) \, dv ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathbf{U}}} b_1(t, s, \nu, \mu) \psi(s, \nu) \, dv ds \right\| \\
&= \frac{1}{|\xi - \mu|^\eta} \left\| \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathbf{U}}} [b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(t, s, \nu, \mu)] \psi(s, \nu) \, dv ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{|\xi - \mu|^\eta} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathbf{U}}} |b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(t, s, \nu, \mu)| \|\psi(s, \nu)\| \, dv ds \\
&\leq \|\psi\|_{\mathcal{B}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathbf{U}}} \frac{|b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(t, s, \nu, \mu)|}{|\xi - \nu|^\eta} \, dv ds \quad (3.24) \\
&\leq \|\psi\|_{\mathcal{B}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathbf{U}}} \sup_{\xi, \mu \in \bar{\mathbf{U}}, \xi \neq \mu} \frac{|b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(t, s, \nu, \mu)|}{|\xi - \nu|^\eta} \, dv ds \\
&\leq \|\psi\|_{\mathcal{B}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathbf{U}}} [|b_1(t, s, \nu, \cdot)|]_{C^\eta(\bar{\mathbf{U}}, \mathbb{R}^n)} \, dv ds.
\end{aligned}$$

Logo, de (3.23) e (3.24), obtemos

$$\begin{aligned}
\|g(t, \psi)\|_X &= \sup_{\xi \in \bar{\mathbf{U}}} \|g(t, \psi)(\xi)\| + \sup_{\xi, \mu \in \bar{\mathbf{U}}} \frac{\|g(t, \psi)(\xi) - g(t, \psi)(\mu)\|}{|\xi - \mu|^\eta} \\
&\leq \sup_{\xi \in \bar{\mathbf{U}}} \|\psi\|_{\mathcal{B}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathbf{U}}} |b_1(t, s, \nu, \xi)| \, dv ds \\
&\quad + \sup_{\xi, \mu \in \bar{\mathbf{U}}, \xi \neq \mu} \|\psi\|_{\mathcal{B}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathbf{U}}} [|b_1(t, s, \nu, \cdot)|]_{C^\eta(\bar{\mathbf{U}}, \mathbb{R}^n)} \, dv ds \\
&= \left[\sup_{\xi \in \bar{\mathbf{U}}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathbf{U}}} |b_1(t, s, \nu, \xi)| \, dv ds + \sup_{\xi, \mu \in \bar{\mathbf{U}}, \xi \neq \mu} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathbf{U}}} [|b_1(t, s, \nu, \cdot)|]_{C^\eta(\bar{\mathbf{U}}, \mathbb{R}^n)} \, dv ds \right] \|\psi\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Dessa maneira, tomando

$$\Theta_2 = \sup_{t \in [0, a], \xi \in \bar{\mathbf{U}}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathbf{U}}} |b_1(t, s, \nu, \xi)| \, dv ds + \sup_{t \in [0, a]} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathbf{U}}} [|b_1(t, s, \nu, \cdot)|]_{C^\eta(\bar{\mathbf{U}}, \mathbb{R}^n)} \, dv ds,$$

obtemos $\|g(t, \psi)\|_X \leq \Theta_2 \|\psi\|_{\mathcal{B}}$.

De modo análogo, temos

$$\begin{aligned}
\|Ag(t, \psi)(\xi)\| &= \left\| A \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} b_1(t, s, v, \xi) \psi(s, v) \, dv ds \right\| \\
&\leq \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} |Ab_1(t, s, v, \xi)| \|\psi(s, v)\| \, dv ds \\
&= \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} \left| \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} b_1(t, s, v, \xi) \right| \|\psi\|_{\mathcal{B}} \, dv ds
\end{aligned} \tag{3.25}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\|Ag(t, \psi)(\xi) - Ag(t, \psi)(\mu)\|}{|\xi - \mu|^\eta} &= \frac{\left\| A \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} [b_1(t, s, v, \xi) - b_1(t, s, v, \mu)] \psi(s, v) \, dv ds \right\|}{|\xi - \mu|^\eta} \\
&\leq \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} \frac{|Ab_1(t, s, v, \xi) - Ab_1(t, s, v, \mu)|}{|\xi - \mu|^\eta} \, dv ds \\
&\leq \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} [|Ab_1(t, s, v, \cdot)|]_{C^\eta(\bar{u}, \mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{\mathcal{B}} \, dv ds.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Logo, de (3.25) e (3.26), obtemos

$$\begin{aligned}
\|Ag(t, \psi)\|_X &= \sup_{\xi \in \bar{u}} \|Ag(t, \psi)(\xi)\| + \sup_{\xi, \mu \in \bar{u}, \xi \neq \mu} \frac{\|Ag(t, \psi)(\xi) - Ag(t, \psi)(\mu)\|}{|\xi - \mu|^\eta} \\
&\leq \left[\sup_{\xi \in \bar{u}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} \left| \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} b_1(t, s, v, \xi) \right| \, dv ds \right. \\
&\quad \left. + \sup_{\xi, \mu \in \bar{u}, \xi \neq \mu} \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} [|Ab_1(t, s, v, \cdot)|]_{C^\eta(\bar{u}, \mathbb{R}^n)} \, dv ds \right] \|\psi\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Assim, tomando

$$\Theta_1 = \sup_{t \in [0, a]} \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} \left| \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} b_1(t, s, v, \xi) \right| \, dv ds + \sup_{t \in [0, a]} \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} [|Ab_1(t, s, v, \cdot)|]_{C^\eta(\bar{u}, \mathbb{R}^n)} \, dv ds,$$

obtemos $\|Ag(t, \psi)\|_X \leq \Theta_1 \|\psi\|_{\mathcal{B}}$.

Portanto,

$$\|g(t, \psi)\|_Y = \|g(t, \psi)\|_X + \|Ag(t, \psi)\|_X \leq \Theta_2 \|\psi\|_{\mathcal{B}} + \Theta_1 \|\psi\|_{\mathcal{B}} = (\Theta_1 + \Theta_2) \|\psi\|_{\mathcal{B}},$$

para todo $\psi \in \mathcal{B}$ e todo $t \in [0, a]$, o que garante que $g(t, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, Y)$, para todo $t \in [0, a]$. Consequentemente, o primeiro termo da expressão (3.22) é limitado por

$$\|g(t, \psi) - g(t, \phi)\|_Y = \|g(t, \psi - \phi)\|_Y \leq (\Theta_1 + \Theta_2) \|\psi - \phi\|_{\mathcal{B}}.$$

Para o segundo termo da expressão (3.22), note que

$$\|g(t, \phi) - g(\tau, \phi)\|_Y = \|g(t, \phi) - g(\tau, \phi)\|_X + \|Ag(t, \phi) - Ag(\tau, \phi)\|_X,$$

e mais,

$$\begin{aligned} \|g(t, \phi)(\xi) - g(\tau, \phi)(\xi)\| &= \left\| \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} b_1(t, s, \nu, \xi) \phi(s, \nu) d\nu ds \right. \\ &\quad \left. - \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} b_1(\tau, s, \nu, \xi) \phi(s, \nu) d\nu ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} [b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(\tau, s, \nu, \xi)] \phi(s, \nu) d\nu ds \right\| \\ &\leq \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} |b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(\tau, s, \nu, \xi)| \|\phi(s, \nu)\| d\nu ds \\ &\leq \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} |b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(\tau, s, \nu, \xi)| \|\phi\|_{\mathcal{B}} d\nu ds \\ &\leq \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} \sup_{\xi \in \bar{\mathfrak{U}}} |b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(\tau, s, \nu, \xi)| \|\phi\|_{\mathcal{B}} d\nu ds. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} &\|g(t, \phi)(\xi) - g(\tau, \phi)(\xi) - g(t, \phi)(\mu) + g(\tau, \phi)(\mu)\| \\ &= \left\| \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} [b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(\tau, s, \nu, \xi) - b_1(t, s, \nu, \mu) + b_1(\tau, s, \nu, \mu)] \phi(s, \nu) d\nu ds \right\| \\ &\leq \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} \|b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(\tau, s, \nu, \xi) - b_1(t, s, \nu, \mu) + b_1(\tau, s, \nu, \mu)\| \|\phi\|_{\mathcal{B}} d\nu ds. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \|g(t, \phi)(\xi) - g(\tau, \phi)(\xi)\| &+ \frac{\|g(t, \phi)(\xi) - g(\tau, \phi)(\xi) - g(t, \phi)(\mu) + g(\tau, \phi)(\mu)\|}{|\xi - \mu|^\eta} \\ &\leq \|\phi\|_{\mathcal{B}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} \|b_1(t, s, \nu, \cdot) - b_1(\tau, s, \nu, \cdot)\|_X d\nu ds. \end{aligned}$$

Seja $\tilde{W} : [0, a] \times [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$\tilde{W}(t, \tau) = \int_{-r}^0 \int_{\bar{\mathfrak{U}}} \|b_1(t, s, \nu, \cdot) - b_1(\tau, s, \nu, \cdot)\|_X d\nu ds,$$

então \tilde{W} é contínua. De fato, como $[0, a] \times [-r, 0] \times \bar{\mathfrak{U}} \times \bar{\mathfrak{U}}$ é compacto, segue que b_1 é uniformemente contínua, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|(t_1, s, \nu, \xi_1) -$

$(t_2, s, \nu, \xi_2) | < \delta$, então $|b_1(t, s, \nu, \xi_1) - b_1(t_2, s, \nu, \xi_2)| < \frac{\epsilon}{6}$. Assim, para $|t - \tau| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} \|b_1(t, s, \nu, \cdot) - b_1(\tau, s, \nu, \cdot)\|_X &= \sup_{\xi \in \bar{u}} \|b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(\tau, s, \nu, \xi)\| \\ &\quad + \sup_{\xi, \mu \in \bar{u}, \xi \neq \mu} \frac{\|b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(\tau, s, \nu, \xi) - b_1(t, s, \nu, \mu) + b_1(\tau, s, \nu, \mu)\|}{|\xi - \mu|^\eta} \\ &\leq \sup_{\xi \in \bar{u}} \frac{\epsilon}{6} + \sup_{\xi, \mu \in \bar{u}, \xi \neq \mu} \frac{\|b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(\tau, s, \nu, \xi)\|}{|\xi - \mu|^\eta} \\ &\quad + \sup_{\xi, \mu \in \bar{u}, \xi \neq \mu} \frac{\|b_1(t, s, \nu, \mu) - b_1(\tau, s, \nu, \mu)\|}{|\xi - \mu|^\eta} \leq \frac{3\epsilon}{6} < \epsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $b : [0, a] \rightarrow X$ é uniformemente contínua, implicando que \tilde{W} é contínua e $\lim_{t \rightarrow \tau} \tilde{W}(t, \tau) = 0$.

Resumindo, obtemos

$$\begin{aligned} \|g(t, \phi) - g(\tau, \phi)\|_X &= \sup_{\xi \in \bar{u}} \|g(t, \phi)(\xi) - g(\tau, \phi)(\xi)\| \\ &\quad + \sup_{\xi, \mu \in \bar{u}, \xi \neq \mu} \frac{\|g(t, \phi)(\xi) - g(\tau, \phi)(\xi) - g(t, \phi)(\mu) + g(\tau, \phi)(\mu)\|}{|\xi - \mu|^\eta} \\ &\leq \|\phi\|_{\mathcal{B}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} \left[\sup_{\xi \in \bar{u}} |b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(\tau, s, \nu, \xi)| dv ds \right. \\ &\quad \left. + \sup_{\xi, \mu \in \bar{u}, \xi \neq \mu} \frac{\|b_1(t, s, \nu, \xi) - b_1(\tau, s, \nu, \xi) - b_1(t, s, \nu, \mu) + b_1(\tau, s, \nu, \mu)\|}{|\xi - \mu|^\eta} \right] dv ds \\ &= \|\phi\|_{\mathcal{B}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} \|b_1(t, s, \nu, \cdot) - b_1(\tau, s, \nu, \cdot)\|_X dv ds = \|\phi\|_{\mathcal{B}} \tilde{W}(t, \tau). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Além disso, de modo semelhante, obtemos

$$\begin{aligned} \|Ag(t, \phi)(\xi) - Ag(\tau, \phi)(\xi)\| &= \left\| \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} [Ab_1(t, s, \nu, \xi) - Ab_1(\tau, s, \nu, \xi)] \phi(s, \nu) dv ds \right\| \\ &\leq \|\phi\|_{\mathcal{B}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} |Ab_1(t, s, \nu, \xi) - Ab_1(\tau, s, \nu, \xi)| dv ds \\ &\leq \|\phi\|_{\mathcal{B}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} \sup_{\xi \in \bar{u}} |Ab_1(t, s, \nu, \xi) - Ab_1(\tau, s, \nu, \xi)| dv ds, \end{aligned}$$

e mais,

$$\begin{aligned}
& \frac{\|Ag(t, \phi)(\xi) - Ag(\tau, \phi)(\xi) - Ag(t, \phi)(\mu) + Ag(\tau, \phi)(\mu)\|}{|\xi - \mu|^\eta} \\
& \leq \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} \frac{|Ab_1(t, s, \nu, \xi) - Ab_1(\tau, s, \nu, \xi) - Ab_1(t, s, \nu, \mu) + Ab_1(\tau, s, \nu, \mu)|}{|\xi - \mu|^\eta} \|\phi\|_{\mathcal{B}} dv ds \\
& \leq \|\phi\|_{\mathcal{B}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} \left[\sup_{\xi, \mu \in \bar{u}, \xi \neq \mu} \frac{1}{|\xi - \mu|^\eta} |Ab_1(t, s, \nu, \xi) - Ab_1(\tau, s, \nu, \xi) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - Ab_1(t, s, \nu, \mu) + Ab_1(\tau, s, \nu, \mu) \right] dv ds.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|Ag(t, \phi) - Ag(\tau, \phi)\|_X &= \sup_{\xi \in \bar{u}} \|Ag(t, \phi)(\xi) - Ag(\tau, \phi)(\xi)\| \\
&+ \sup_{\xi, \mu \in \bar{u}} \frac{\|Ag(t, \phi)(\xi) - Ag(\tau, \phi)(\xi) - Ag(t, \phi)(\mu) + Ag(\tau, \phi)(\mu)\|}{|\xi - \mu|^\eta} \\
&\leq \|\phi\|_{\mathcal{B}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} \left[\sup_{\xi \in \bar{u}} |Ab_1(t, s, \nu, \xi) - Ab_1(\tau, s, \nu, \xi)| \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \sup_{\xi, \mu \in \bar{u}, \xi \neq \mu} \frac{|Ab_1(t, s, \nu, \xi) - Ab_1(\tau, s, \nu, \xi) - Ab_1(t, s, \nu, \mu) + Ab_1(\tau, s, \nu, \mu)|}{|\xi - \mu|^\eta} \right] dv ds \\
&= \|\phi\|_{\mathcal{B}} \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} \|Ab_1(t, s, \nu, \cdot) - Ab_1(\tau, s, \nu, \cdot)\|_X dv ds = \|\phi\|_{\mathcal{B}} \hat{W}(t, \tau),
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde $\hat{W}(t, \tau) = \int_{-r}^0 \int_{\bar{u}} \|Ab_1(t, s, \nu, \cdot) - Ab_1(\tau, s, \nu, \cdot)\|_X dv ds$. Note que $\hat{W} : [0, a] \times [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^+$ é contínua, visto que $Au = \Delta u$ e B_1 é suficientemente suave, a qual podemos supor de classe C^2 e, então, por um raciocínio análogo ao feito para \tilde{W} , segue a continuidade. Além disso, $\lim_{t \rightarrow \tau} \hat{W}(t, \tau) = 0$.

Finalmente, por (3.27) e (3.28), obtemos

$$\begin{aligned}
\|g(t, \phi) - g(\tau, \phi)\|_Y &= \|g(t, \phi) - g(\tau, \phi)\|_X + \|Ag(t, \phi) - Ag(\tau, \phi)\|_X \\
&\leq \|\phi\|_{\mathcal{B}} \tilde{W}(t, \tau) + \|\phi\|_{\mathcal{B}} \hat{W}(t, \tau) = W(t, \tau) \|\phi\|_{\mathcal{B}},
\end{aligned}$$

onde $W(t, \tau) = \tilde{W}(t, \tau) + \hat{W}(t, \tau)$ e $W : [0, a] \times [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua tal que $\lim_{t \rightarrow \tau} W(t, \tau) = 0$.

Portanto, pelo que fizemos até aqui, concluímos que

$$\begin{aligned} \|g(t, \psi) - g(\tau, \phi)\|_Y &\leq \|g(t, \psi) - g(t, \phi)\|_Y + \|g(t, \phi) - g(\tau, \phi)\|_Y \\ &\leq (\Theta_1 + \Theta_2)\|\psi - \phi\|_{\mathcal{B}} + W(t, \tau)\|\phi\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $(t, \psi) \rightarrow (\tau, \phi)$. Garantindo a continuidade de g , para todo ponto $(\tau, \phi) \in [0, a] \times \mathcal{B}$.

Agora, seja $l > 0$ tal que $[0, l] \times B_l(\varphi, \mathcal{B}) \subset [0, a] \times \mathcal{B}$. Assim, para todo $t, s \in [0, l]$ e $\psi, \phi \in B_l(\varphi, \mathcal{B})$, temos

$$\begin{aligned} \|g(t, \psi) - g(s, \phi)\|_Y &\leq W(s, t)\|\phi\|_{\mathcal{B}} + (\Theta_1 + \Theta_2)\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq W(t, s)(\|\phi - \varphi\|_{\mathcal{B}} + \|\varphi\|_{\mathcal{B}}) + (\Theta_1 + \Theta_2)\|\psi - \phi\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq W(t, s)(l + \|\varphi\|_{\mathcal{B}}) + (\Theta_1 + \Theta_1)\|\psi - \phi\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Dessa forma, sendo $L_g^1(l) = l + \|\varphi\|_{\mathcal{B}}$ e $L_g^2(l) = \Theta_1 + \Theta_2$, como $W(t, t) = 0$, concluímos que a condição \mathbf{H}_3 está satisfeita.

Observe, ainda, que por hipótese,

$$\|i_c\|_{\mathcal{L}(Y, X)} L_g^2(0) = \|i_c\|_{\mathcal{L}([\mathcal{D}(A)], X)} L_g^2(l) = \|i_c\|_{\mathcal{L}([\mathcal{D}(A)], X)} (\Theta_1 + \Theta_2) < 1$$

e $T(\cdot)\varphi(0, \cdot) \in C([0, a], X)$, ou seja, $\varphi(0) \in \Lambda_A$.

Portanto, pelo Teorema 3.12, concluímos que existe uma única solução fraca de (3.15) - (3.17) em $[-r, b]$, para algum $0 < b \leq a$. \square

REFERÊNCIAS

- 1 THE SHAPE of Water = A Forma da Água. Direção: Guillermo del Toro. Produção: Guillermo del Toro, J. Miles Dale. São Paulo: Fox Film do Brasil, 2018. 1 DVD (123 min).
- 2 HERNÁNDEZ, E.; PIERRI, M.; PROKOPCZYK, A. On a class of abstract neutral functional differential equations. *Nonlinear Analysis*, Elmsford, v. 74, n. 11, p. 3633–3643, 2011. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/journal/nonlinear-analysis/vol/74/issue/11>. Acesso em: 28 jan. 2020.
- 3 DATKO, R. Linear autonomous neutral differential equations in a banach space. *Journal of Differential Equations*, São Carlos, v. 25, n. 2, p. 258–274, 1977.
- 4 BALACHANDRAN, K.; HERNÁNDEZ, E. Existence results for abstract degenerate neutral functional differential equations. *Bulletin/Australian Mathematical Society*, St. Lucia, v. 81, n. 2, p. 328–342, 2010. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/bulletin-of-the-australian-mathematical-society/issue/7E1BC8468F6087487D13233D73039D13>. Acesso em: 28 jan. 2020.
- 5 HENRÍQUEZ, H.; HERNÁNDEZ, E. Existence results for partial neutral functional differential equation with unbounded delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, New York, v. 221, n. 2, p. 452–475, 1998. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/journal/journal-of-mathematical-analysis-and-applications/vol/221/issue/2>. Acesso em: 28 jan. 2020.
- 6 HERNÁNDEZ, E. Existence results for partial neutral integro - differential equations with unbounded delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, New York, v. 292, n. 1, p. 194–210, 2004. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/journal/journal-of-mathematical-analysis-and-applications/vol/292/issue/1>. Acesso em: 28 jan. 2020.
- 7 NTOUYAS, S. K.; O'REGAN, D. Existence results for semilinear neutral functional differential inclusions via analytic semigroups. *Acta applicandae mathematicae*, Dordrecht, v. 98, n. 3, p. 223–253, 2007. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10440-007-9157-3>. Acesso em: 28 jan. 2020. Acesso mediante assinatura.
- 8 ADIMY, M.; EZZINBI, K. A class of linear partial neutral functional - differential equations with nondense domain. *Journal of Differential Equations*, New York, v. 147, n. 2, p. 285–332, 1998. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/journal/journal-of-differential-equations/vol/147/issue/2>. Acesso em: 28 jan. 2020.
- 9 HERNÁNDEZ, E.; O'REGAN, D. C^α - Hölder classical solutions for non - autonomous neutral differential equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, Springfield, Md., US, v. 29, n. 1, p. 241–260, 2011. Disponível em: <https://www.aims.org/journal/1078-0947/2011/29/1>. Acesso em: 28 jan. 2020. Acesso mediante assinatura.
- 10 HENRÍQUEZ, H.; HERNÁNDEZ, E.; RABELLO, M. Existence of solutions for impulsive partial neutral functional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, New York, v. 331, n. 2, p. 1135–1158, 2007. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/journal/journal-of-mathematical-analysis-and-applications/vol/331/issue/2>. Acesso em: 29 jan. 2020.

- 11 LUNARDI, A. *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*. 16. ed. New York: Springer Basel, 1995. Reprint of the 1995 Edition by Birkhäuser Verlag, Switzerland.
- 12 PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. 44. ed. New York: Springer - Verlag, 1983.
- 13 GOMES, A. M. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*. 2. ed. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012.
- 14 PERIAGO, F.; STRAUB, B. A functional calculus for almost sectorial operators and applications to abstract evolution equations. *Journal of Evolution Equations*, Basel, v. 2, n. 1, p. 41–68, 2002. Disponível em: <https://link.springer.com/journal/28/2/1>. Acesso em: 29 jan. 2020. Acesso mediante assinatura.
- 15 ARRIETA, J. M.; CARVALHO, A. N.; LOZADA-CRUZ, G. Dynamics in dumbbell domains II: The limiting problem. *Journal of Differential Equations*, New York, v. 247, n. 1, p. 174–202, 2009. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/journal/journal-of-differential-equations/vol/247/issue/1>. Acesso em: 29 jan. 2020.
- 16 PRATO, G. D. Semigrupperi di crescita n . *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa . Classe di scienze*, Pisa, v. 20, p. 753–782, 1966.
- 17 DLOTKO, T. Semilinear cauchy problems with almost sectorial operators. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics*, Warsaw, v. 55, n. 4, p. 333–346, 2007. Disponível em: <https://www.impan.pl/en/publishing-house/journals-and-series/bulletin-polish-acad-sci-math/all/55/4>. Acesso em: 28 jan. 2020.
- 18 OKAZAWA, N. A generation theorem for semigroups of growth order α . *Tohoku mathematical journal*, Campinas, v. 26, p. 39–51, 1974.
- 19 TAIRA, K. The theory of semigroups with weak singularity and its applications to partial differential equations. *Tsukuba Journal of Mathematics*, Rio de Janeiro, v. 13, n. 2, p. 513–562, 1989.
- 20 PERIAGO, F. Global existence, uniqueness, and continuous dependence for a semilinear initial value problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, New York, v. 280, n. 2, p. 413–423, 2003. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/journal/journal-of-mathematical-analysis-and-applications/vol/280/issue/2>. Acesso em: 28 jan. 2020.
- 21 FAVARON, A. Optimal time and space regularity for solutions of degenerate differential equations. *Central European Journal of Mathematics*, Warsaw, v. 7, n. 2, p. 249–271, 2009. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.2478/s11533-009-0018-3>. Acesso em: 28 jan. 2020. Acesso mediante assinatura.
- 22 ANDRADE, F. G. *Controlabilidade para sistemas de equações diferenciais*. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2014.
- 23 KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1978.
- 24 BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Textos Universitários).

- 25 LIMA, E. L. *Curso de análise*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978. v. 1.
- 26 HONIG, C. S. *Análise Funcional e Aplicações*. São Paulo: Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1970.
- 27 SOARES, M. G. *Cálculo em uma variável complexa*. 2. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001.
- 28 SAXE, K. *Beginning functional analysis*. New York: Springer - Verlag, 2002. (Undergraduate Texts in Mathematics).
- 29 BARTLE, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- 30 ALIPRANTIS, C. D.; BORDER, K. *Infinite Dimensional Analysis*. 3. ed. New York: Springer, 2006.
- 31 GUO, D.; CHO, Y. J.; ZHU, J. *Partial ordering methods in nonlinear problems*. Hauppauge, New York: Nova Science Publishers, 2004.
- 32 SADOVSKII, B. N. A fixed-point principle. *Functional analysis and its applications*, New York, v. 1, n. 2, p. 151–153, 1967. Disponível em: <https://link.springer.com/journal/10688/1/2>. Acesso em: 29 jan. 2020. Acesso mediante assinatura.

APÊNDICE A - Resultados auxiliares

Lema A.1. *Sejam X um espaço de Banach e $G \in \mathcal{L}(X)$. Se $\|G\| < 1$, então G é inversível e $(I - G)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.*

Demonstração. Defina o operador $f(G) = \sum_{n=0}^{\infty} G^n$. Note que para $k, m \in \mathbb{N}$, $k < m$, temos

$$\left\| \sum_{n=0}^k G^n - \sum_{n=0}^m G^n \right\| = \left\| \sum_{n=k+1}^m G^n \right\| \leq \sum_{n=k+1}^m \|G\|^n.$$

Assim, como $\sum_{n=0}^{\infty} \|G\|^n$ converge, pois $\|G\| < 1$, segue que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|G\|^n < \epsilon$. Assim se escolhermos $k, m \in \mathbb{N}$ de modo que $n_0 < k < m$ temos

$$\left\| \sum_{n=0}^k G^n - \sum_{n=0}^m G^n \right\| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \|G\|^n < \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|G\|^n < \epsilon.$$

Logo, a sequência $(S_k)_{k \in \mathbb{N}} = \sum_{n=0}^k G^n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(X)$ e, como X é um espaço de Banach, segue que $\mathcal{L}(X)$ também o é e, portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} G^n \in \mathcal{L}(X)$.

Além disso, como G comuta com suas potências, obtemos $(I - G)f(G) = f(G)(I - G) = I$. Portanto, $I - G$ é inversível e $(I - G)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. \square

Lema A.2 (Lema de Dini). *Se $f : (a, b) \rightarrow X$ é contínua em (a, b) e possui derivada à direita, f'_+ , contínua em (a, b) , então f é continuamente diferenciável em (a, b) .*

Demonstração. (13, Lema A.3.2, p. 149). \square

Lema A.3 (Princípio da limitação uniforme). *Sejam X um espaço de Banach e Y um espaço normado. Dado uma família $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ em $\mathcal{L}(X, Y)$, se $\sup_{\alpha \in \Lambda} \|T_\alpha x\| < \infty$, para todo $x \in X$, então $\sup_{\alpha \in \Lambda} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \infty$.*

Demonstração. (23, 4.7-3 Uniform Boundedness Theorem, p. 249). \square

Teorema A.4 (Teorema do ponto fixo de Schauder). *Sejam E um espaço de Banach, $C \subset E$ um conjunto fechado, limitado e convexo e $f : C \rightarrow C$ uma aplicação completamente contínua. Então f tem pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração. (24, Teorema 9.5.8, p. 270). \square

Teorema A.5 (Teorema do ponto fixo de Banach). *Sejam M um espaço métrico completo e $\Phi : M \rightarrow M$ uma contração. Então existe um único ponto $x_0 \in M$ tal que $\Phi(x_0) = x_0$.*

Demonstração. (24, Teorema 9.4.2, p. 263). \square

Definição A.6. *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um conjunto E de funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se uniformemente equicontínuo quando, para cada $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in X$ e $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, para todo $f \in E$.*

Teorema A.7. *Seja $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Todo conjunto equicontínuo de funções $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente equicontínuo.*

Demonstração. (25, Teorema 19, p. 327). □

Teorema A.8 (Teorema de Arzelá - Ascoli). *Sejam E um espaço compacto e F um espaço métrico completo. Um subconjunto $H \subset C(E, F)$ é relativamente compacto se, e somente se,*

(i) *H é equicontínuo;*

(ii) *para todo $x \in E$ o conjunto $H(x) = \{f(x); f \in H\}$ é relativamente compacto em F .*

Demonstração. (26, Teorema 2.1, p. 297). □

Teorema A.9 (Fórmula Integral de Cauchy). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa definida no domínio $U \subset \mathbb{C}$. Sejam $\overline{D}(z_0, r_0)$ um disco fechado inteiramente contido em U e Γ sua fronteira, orientada compativelmente. Se z é um ponto qualquer no interior de $\overline{D}(z_0, r_0)$ então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Demonstração. (27, V.2.6 Teorema, p. 123). □

Teorema A.10 (Teorema de Cauchy). *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Seja $V \subset U$ um subconjunto fechado e limitado, cuja fronteira ∂V consiste de um número finito de curvas de Jordan suaves por partes, $\partial V = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$, e tal que $V \setminus \partial V$ é um domínio. Tome V e ∂V com orientação compatível. Então*

$$\int_{\partial V} f(z) dz = 0.$$

Demonstração. (27, V.2.13 Teorema de Cauchy, p. 137). □

Proposição A.11. *Seja f uma função holomorfa no anel $\mathcal{A}(a, 0, \rho)$ e suponha que a é um polo de ordem $k > 1$ de f . Considere a função $g(z) = (z - a)^k f(z)$. Então,*

$$\text{res}(f, a) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}.$$

Demonstração. (27, VI.3.4 Proposição, p. 166). □

Teorema A.12 (Teorema dos Resíduos). *Seja f uma função holomorfa num domínio $\mathcal{U} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Suponha que $\gamma \subset \mathcal{U} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ é uma curva de Jordan suave*

por partes, orientada no sentido anti-horário, tal que a região fechada e limitada por ela determinada está contida em \mathcal{U} e contém todos os pontos a_1, a_2, \dots, a_m . Então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \text{res}(f, a_1) + \text{res}(f, a_2) + \dots + \text{res}(f, a_m).$$

Demonstração. (27, VI.3.2 Teorema dos Resíduos, p. 165). □

Teorema A.13 (Teorema da convergência monótona de Lebesgue). *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis tais que*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \dots$$

em quase todo ponto. Se $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, então f é integrável e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int f_n d\mu \right) = \int f d\mu.$$

Demonstração. (28, Theorem 3.13, p. 50). □

Teorema A.14 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue). *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis que converge, em quase todo ponto, para uma função real mensurável f . Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n , então f é integrável e,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int f_n d\mu \right) = \int f d\mu.$$

Demonstração. (29, 5.6 Lebesgue Dominated Convergence Theorem, p. 44). □

Definição A.15. *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida, X um espaço de Banach e $f : \Omega \rightarrow X$ uma função vetorial. Dizemos que f é fortemente mensurável se existe uma sequência de funções simples (φ_n) tal que $\|f(t) - \varphi_n(t)\| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, μ -quase sempre.*

Teorema A.16. *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida finito, X um espaço de Banach e $f : \Omega \rightarrow X$ uma função μ -mensurável. Então f é Bochner integrável se, e somente se, $\|f\|$ é Lebesgue integrável, ou seja, $\int \|f\| d\mu < \infty$.*

Demonstração. (30, 11.44 Theorem, p. 426). □

Seja E um espaço de Banach, para um subconjunto arbitrário $\Omega \subset E$ introduzimos a noção de medida de não - compacidade de Ω .

Definição A.17. *Denotamos por $Q(\Omega)$ o conjunto de todos os $\epsilon > 0$, tais que o conjunto Ω pode ser coberto por um número finito de conjuntos cujo diâmetro é menor ou igual a ϵ . A medida de não-compacidade de Ω é o valor:*

$$\chi(\Omega) = \inf Q(\Omega).$$

Lema A.18. *Sejam $A, B \subset E$. A medida de não - compacidade satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $0 \leq \chi(B) < \infty$;
- (ii) $\chi(B) = 0 \Leftrightarrow \overline{B}$ é compacto;
- (iii) $A \subset B \Rightarrow \chi(A) \leq \chi(B)$;
- (iv) $\chi(\overline{B}) = \chi(B)$;
- (v) $\chi(A \cup B) = \max\{\chi(A), \chi(B)\}$;
- (vi) $\chi(\lambda B) = |\lambda|\chi(B)$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda B = \{\lambda b; b \in B\}$;
- (vii) $\chi(A + B) \leq \chi(A) + \chi(B)$.

Demonstração. (31, Theorem 1.2.1, p. 4). □

Proposição A.19. *Seja X um espaço de Banach e $A \subset X$. Se $A \subset K_\epsilon + C_\epsilon$, onde K_ϵ é compacto e $\text{diam}(C_\epsilon) \rightarrow 0$, quando $\epsilon \rightarrow 0$, então A é um conjunto relativamente compacto.*

Demonstração. Faremos a prova deste resultado utilizando a medida de não - compacidade. Como $A \subset K_\epsilon + C_\epsilon$, pelos itens (iii) e (vii) do Lema A.18, temos

$$\chi(A) \leq \chi(K_\epsilon + C_\epsilon) \leq \chi(K_\epsilon) + \chi(C_\epsilon).$$

Como K_ϵ é compacto, segue que este é fechado e então, $\overline{K_\epsilon} = K_\epsilon$, ou seja, $\overline{K_\epsilon}$ é compacto. Assim, pelo item (ii) do Lema A.18, obtemos que $\chi(K_\epsilon) = 0$. Além disso, como $\text{diam}(C_\epsilon) \rightarrow 0$, quando $\epsilon \rightarrow 0$, dado $\delta > 0$, podemos tomar ϵ suficientemente pequeno tal que $\epsilon < \delta$ e então, podemos cobrir C_ϵ pelo conjunto C_δ . Assim, pela Definição A.17, como $\delta > 0$ é qualquer, obtemos que $\inf Q(C_\epsilon) = 0$, ou seja, $\chi(C_\epsilon) = 0$. Logo, $\chi(A) = 0$. Portanto do item (ii) do Lema A.18, concluímos que \overline{A} é compacto, ou seja, A é relativamente compacto. □

Definição A.20. *Um operador $f : E \rightarrow E_1$ é chamado operador condensante se este é contínuo e para cada subconjunto $\Omega \subset E$, limitado e não-compacto ($\chi(\Omega) > 0$), vale a igualdade*

$$\chi(f(\Omega)) < \chi(\Omega).$$

Por exemplo, operadores completamente contínuos, contrações e somas destes operadores são condensantes.

Teorema A.21 (Teorema do ponto fixo para operadores condensantes). *Seja E um espaço de Banach. Se um operador condensante f leva um subconjunto limitado, fechado e convexo $A \subset E$ nele mesmo, isto é, $f(A) \subset A$, então f possui pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração. (32, p. 151). □