

**Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Faculdade de Engenharia
Câmpus de Ilha Solteira**

LUIS PAULO MORAIS LIMA

**ESTUDO DA ATENUAÇÃO DE SINAL DE VAZAMENTO DE
ÁGUA EM TUBOS DE PVC COM LONGARINAS METÁLICAS
LONGITUDINAIS**

**Ilha Solteira
2020**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Câmpus de Ilha Solteira

LUIS PAULO MORAIS LIMA

**ESTUDO DA ATENUAÇÃO DE SINAL DE VAZAMENTO DE
ÁGUA EM TUBOS DE PVC COM LONGARINAS METÁLICAS
LONGITUDINAIS**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Amarildo T. Paschoalini
Orientador

Márcio Antônio Bazani
Coorientador

Ilha Solteira

2020

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

L732e Lima, Luis Paulo Morais.
Estudo da atenuação de sinal de vazamento de água em tubos de pvc com longarinas metálicas longitudinais / Luis Paulo Morais Lima. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2020
45 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2020

Orientador: Amarildo Tabone Paschoalini

Coorientador: Márcio Antônio Bazani

Inclui bibliografia

1. Propagação de ondas. 2. Casca cilíndrica enrijecida. 3. Detecção de vazamentos.


Raiane da Silva Santos
Supervisora Técnica de Seção

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:

Estudo da atenuação de sinal de vazamento de água em tubos de PVC com longarinas metálicas longitudinais

AUTOR: LUIS PAULO MORAIS LIMA

ORIENTADOR: AMARILDO TABONE PASCHOALINI

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA MECÂNICA, área: Mecânica dos Sólidos pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. AMARILDO TABONE PASCHOALINI

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP



Prof. Dr. SAMUEL DA SILVA

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP



Prof. Dr. ADRIANO TODOROVIC FABRO

Departamento de Engenharia Mecânica / Universidade de Brasília - UnB

Ilha Solteira, 16 de julho de 2020

Aos Moraes e aos Lima, mais uma vez.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Além disso, ele foi fruto da orientação dos Profs. Amarildo T. Paschoalini e Márcio A. Bazani, a quem agradeço e peço que passem adiante minha gratidão a todos da Unesp que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento dele, especialmente para meus colegas do Labsin. Em especial, agradeço: aos meus pais, irmão e irmã, pois, assim como antes, ainda agora suportam comigo a distância que nos separa; aos amigos que perduram há anos e que escolho não nomear para que não incorra no erro de esquecer alguém, mas que ao lerem isto espero que saibam que falo deles e que sou grato por combaterem comigo minha solidão; a Dijiane R. de Paula, Fernanda C. de Almeida e Otávio D. Z. Boaventura, que contribuíram de forma muito valiosa durante minha estada nesta cidade; a Noir e Fernanda Aranha, que me proporcionaram ensinamentos e experiências maravilhosas dentro e fora de rodas de capoeira; e a todos aqueles com quem convivi por me engrandecerem e fortalecerem. Muito obrigado a todos.

「朝辭白帝彩雲間，
千里江陵一日還。
兩岸猿聲啼不住，
輕舟已過萬重山。」
《早發白帝城》李白

*“De manhã, parto de Baidi entre nuvens coloridas,
Retorno à distante Jiangling em um dia.
Das margens, os gritos dos macacos não cessam,
Nosso pequeno barco já passou milhares de montanhas.”
 (“Partindo de Baidi pela manhã”, de LI Bai.)*

RESUMO

A água potável é um recurso indispensável e, por isso, é importante que se evite desperdícios por quaisquer causas, dentre elas, vazamento em redes de distribuição. Porém, a detecção de vazamento em tubulações subterrâneas é dificultada devido ao material plástico do qual geralmente são feitos os tubos. Isso porque este material atenua as ondas mecânicas geradas pelos vazamentos e que servem, justamente, de sinal para que se possa detectá-los e localizá-los. Este trabalho propõe um novo tipo de tubo para reduzir o efeito natural, porém indesejável, da atenuação. Trata-se do mesmo tubo de plástico acrescido de longarinas metálicas longitudinais que tem a função não de enrijecê-lo, mas de serem meios menos atenuantes para as ondas mecânicas. Esta proposta foi modelada matematicamente acoplando-se uma casca cilíndrica fina a uma viga que transmite ondas de flexão e compressão. As equações de movimento para uma longarina acoplada ao tubo foram obtidas e, a partir delas, foi determinada a relação de dispersão do sistema, a qual foi usada para avaliar a atenuação do novo tubo. Simulações numéricas usando o Método dos Elementos Finitos foram feitas para validar os resultados teóricos sem preencher o tubo com água. Os resultados do modelo mostraram uma melhora bastante expressiva para ondas longitudinais na casca, com redução de 96% da atenuação. Esta predição, entretanto, está superestimada devido a uma limitação do modelo, que não admite transmissão de energia entre a casca e as longarinas, a qual resultaria em mais atenuação. Por fim, algumas sugestões de trabalhos futuros são feitas para que o modelo seja corrigido e se torne mais realista.

Palavras-chave: Propagação de ondas. Casca cilíndrica enrijecida. Detecção de vazamentos.

ABSTRACT

Water is an indispensable resource, and as such it is important that waste of any source is avoided, among them, by leakage in distribution networks. However, leakage detection in underground pipes is difficult due to the plastic material of which pipe is usually made. That is because plastic materials attenuate the mechanical waves generated by the leakage which are used as signal to detect and locate their source. This work proposes a new type of pipe to reduce this however natural, still undesirable effect. The pipe is the same plastic-made one with added longitudinal metallic stringers which are not supposed to stiffen it, but to be a less attenuating medium for the mechanical waves. This proposal was mathematically modeled coupling a thin cylindrical shell and a beam capable of conveying flexural and compressional waves. The equations of motion for a stringer coupled to the pipe were obtained and, from them the system's dispersion relationship was derived, which was used to evaluate the attenuation in the new pipe. Numerical simulations using the Finite Element Method were carried out to validate theoretical results without filling the pipe with water. The theoretical results show an expressive improvement for longitudinal waves in the shell, with a reduction of 96% of the attenuation. This prediction, however, is overestimated because the model does not account for the transmission of energy between the shell and the stringers, which would result in more attenuation. At last, some suggestions for future works are made to correct and make the model more realistic.

Keywords: Wave propagation. Stiffened cylindrical shell. Leakage detection.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Detecção de vazamento usando correlacionador de sinais | 15 |
| Figura 2 – Configuração $u(x, t)$ de uma seção de uma corda tensionada | 18 |
| Figura 3 – Componente harmônica de uma onda unidimensional se propagando | 19 |
| Figura 4 – Três casos de vibração de uma corda | 22 |
| Figura 5 – Deslocamento axial $u(x, t)$ de uma seção de uma barra prismática | 22 |
| Figura 6 – Configuração $u(x, t)$ da linha neutra de uma viga de Euler-Bernoulli | 23 |
| Figura 7 – Três modos de propagação numa viga prismática | 24 |
| Figura 8 – Casca cilíndrica e seu sistema de coordenadas | 25 |
| Figura 9 – Coordenadas de uma casca cilíndrica longitudinalmente enrijecida por longarinas e deslocamentos de seus componentes | 27 |
| Figura 10 – Sistema de coordenadas na seção transversal de uma viga | 27 |
| Figura 11 – Modos de vibração circunferenciais de uma casca cilíndrica | 31 |
| Figura 12 – Representação do modelo usado nas simulações numéricas | 34 |
| Figura 13 – Anel de plástico extraído do tubo de PVC e acoplado a um <i>shaker</i> com um acelerômetro | 36 |
| Figura 14 – Raízes da relação de dispersão da Equação 3.21 | 37 |
| Figura 15 – Meia-distância calculada para vários casos | 38 |
| Figura 16 – Razão de amplitude entre deslocamento radial e longitudinal | 39 |
| Figura 17 – Modelo 3D usado no COMSOL Multiphysics® | 40 |
| Figura 18 – Comparação entre o número de onda do modelo analítico e simulado por elementos finitos | 41 |
| Figura 19 – Comparação entre a razão de amplitude do modelo analítico e a simulada por elementos finitos | 42 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1 – Propriedades dos materiais de construção e parâmetros geométricos da casca, das longarinas e do fluido | 35 |
| Tabela 2 – Velocidades médias de propagação | 36 |
| Tabela 3 – Coeficiente de atenuação (m) e razão de amplitude relativa (r/r_{casca}) | 38 |

LISTA DE SÍMBOLOS

Matrizes e vetores

| | |
|------------------|-----------------------------------|
| $[A]$ | uma matriz |
| $\{A\}$ | matriz coluna |
| A_{ij} | elemento (i, j) da matriz $[A]$ |
| $[A]^T, \{A\}^T$ | matriz transposta |

Letras latinas

| | |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| A | amplitude; área |
| c | velocidade de propagação |
| d | distância |
| E, \bar{E} | módulo de Young; módulo de Young complexo |
| f | uma função; frequência |
| g | uma função |
| h | espessura |
| i | $\sqrt{-1}$ |
| $I^{[1]}, I^{[2]}$ | primeiro e segundo momento de inércia de área |
| k, K | número de onda; número de onda normalizado |
| L | lagrangiano |
| m | coeficiente angular |
| n | ordem de um modo circunferencial |
| P | período, numerador de uma função racional |
| Q | constante de proporcionalidade da força viscosa, denominador de uma função racional |
| r, R | razão de amplitude; constante elástica, raio |
| s, S | ordem de um modo de propagação; ação total |
| t, T | tempo; força tensão na corda, energia cinética, função de transferência |
| u, U | deslocamento ou deslocamento longitudinal; amplitude de deslocamento longitudinal |

| | |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| v, V | deslocamento tangencial; amplitude de deslocamento tangencial, energia de deformação |
| w, W | deslocamento radial; amplitude de deslocamento radial |
| x, X | coordenada longitudinal; função de x |
| y | coordenada transversal |

Letras gregas

| | |
|------------------|----------------------------------------------|
| β | parâmetro adimensional de espessura da casca |
| ϵ | deformação |
| θ | coordenada angular, ângulo |
| λ | comprimento de onda |
| ν | coeficiente de Poisson |
| ρ | densidade de massa |
| σ | tensão |
| Ψ | função de t |
| ω, Ω | frequência angular; frequência normalizada |

Subscritos

| | |
|----------|--------------------------------|
| 0 | constante |
| 1/2 | meia-distância |
| AB | entre A e B |
| c | relativo à casca |
| comp. | relativo à compressão |
| f | relativo ao fluido |
| flex. | relativo à flexão |
| Im | relativo à parte imaginária |
| Re | relativo à parte real |
| v | relativo à longarina |
| x | derivada em relação a x |
| z | relativo ao eixo z |
| θ | derivada em relação a θ |

Funções e operadores

| | |
|--------------------------------|------------------------------------------------|
| $(\dot{})$ | derivada em relação a t |
| $()'$ | derivada em relação ao argumento |
| $()_q$ | derivada em relação à coordenada q |
| $\ \ $ | módulo |
| ∇^2 | laplaciano |
| ∇^4 | $\nabla^2 \nabla^2$ |
| e^x | função exponencial em x |
| $\mathcal{F}\{ \}$ | transformada de Fourier |
| $\text{Im}\{ \}$ | parte imaginária |
| $J_n()$ | função de Bessel de primeiro tipo de ordem n |
| \log_a | logaritmo na base a |
| \ln | logaritmo natural |
| $\text{Re}\{ \}$ | parte real |

SUMÁRIO

| | | |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 14 |
| 1.1 | Contextualização | 14 |
| 1.2 | Objetivos | 15 |
| 1.3 | Estrutura do texto | 16 |
| 2 | CONCEITUAÇÃO FUNDAMENTAL | 17 |
| 2.1 | Introdução | 17 |
| 2.2 | Frequência, número de onda e velocidade de propagação | 17 |
| 2.3 | Dispersão | 19 |
| 2.4 | Atenuação | 20 |
| 2.5 | Modos de propagação de ondas | 23 |
| 2.6 | Cascas cilíndricas e ondas causadas por um vazamento de água | 24 |
| 3 | MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÕES NUMÉRICAS | 26 |
| 3.1 | Modelo proposto | 26 |
| 3.2 | Modelagem das longarinas | 26 |
| 3.3 | Acoplando casca e viga | 28 |
| 3.3.1 | Lagrangiano da casca | 29 |
| 3.3.2 | Ação total do sistema, restrições de acoplamento e equações de movimento | 29 |
| 3.3.3 | Relação de dispersão | 30 |
| 3.4 | Acrescentando o fluido | 32 |
| 3.5 | Simplificando a relação de dispersão | 32 |
| 3.5.1 | Ondas no fluido e na casca | 33 |
| 3.6 | Simulações numéricas | 33 |
| 4 | RESULTADOS E DISCUSSÕES | 35 |
| 4.1 | Propriedades mecânicas do modelo | 35 |
| 4.2 | Resultados da relação de dispersão | 35 |
| 4.3 | Resultados das simulações numéricas | 40 |
| 5 | CONCLUSÕES | 43 |
| 5.1 | Trabalhos futuros | 43 |
| | REFERÊNCIAS | 44 |

1 INTRODUÇÃO

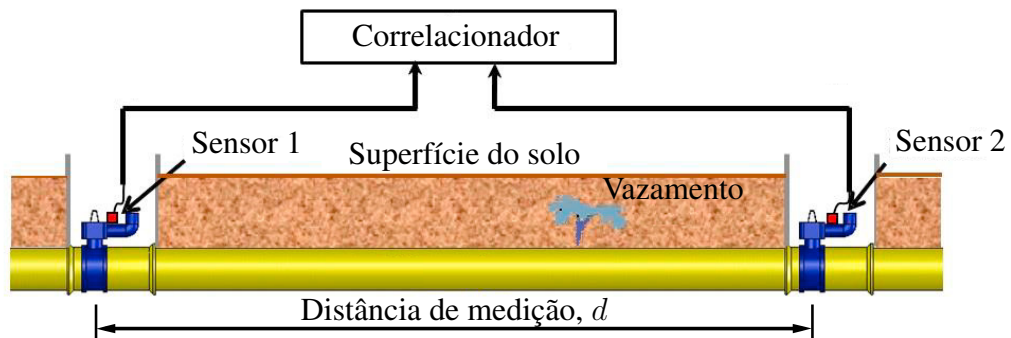
1.1 Contextualização

Sistemas de distribuição de fluido são empregados nos mais diversos meios de produção e para os mais diversos fins, seja para transportar matérias-primas brutas, subprodutos ou até mesmo produtos finais. Evitar desperdício nos tubos e dutos é, portanto, de muita importância para reduzir custos econômicos além extremamente importante para preservação ambiental. Porém, quanto maior o sistema de distribuição, e quanto mais difícil o acesso a ele, mais trabalhoso é a inspeção, detecção de falhas e manutenção. Um exemplo bastante importante são sistemas de distribuição de água potável em centros urbanos, os quais são quase completamente subterrâneos e, mesmo assim, ainda sofrem com alto volume de perdas. Dados do Ministério do Desenvolvimento Regional (1) mostram que a média nacional do Brasil é de quase dois quintos (38,3%) do volume de água distribuída perdido em vazamentos, e em alguns estados da região Norte, o volume é de mais da metade: 55,8% em Rondônia, 68,9% no Amazonas e 60,1% no Acre, por exemplo. Devido a demanda deste e de tantos outros sistemas, várias técnicas foram desenvolvidas e refinadas para que a detecção e controle de vazamentos seja mais eficaz (2), tornando sua manutenção mais eficiente.

Dentre as técnicas de detecção de vazamento, algumas usam o ruído sonoro gerado pelo próprio vazamento ou seus efeitos sobre outras ondas mecânicas para detectá-lo e localizá-lo Pust *et al.* (2). lista várias dessas técnicas vibroacústicas, sendo algumas delas: *leak reflection method* (método de reflexão de vazamento), que usa a reflexão de ondas causada pela presença de um vazamento na tubulação; *impulse response analysis* (análise de resposta ao impulso), que quantifica o amortecimento de uma onda transiente no tubo e o compara com um caso sem vazamento; *ground penetrating radar* (radar penetrante na terra), que usa ondas de radar refletidas pelas diferentes camadas e elementos presentes no solo; *leak noise correlators* (correlacionadores de ruído de vazamento), que identifica e localiza um vazamento correlacionando o ruído gerado por ele, e que foi medido em pontos distintos da tubulação, como mostrado na Figura 1. Dentre estas técnicas, as duas primeiras podem não ser viáveis para tubulações subterrâneas, pois exigem que ela seja excitada de uma forma específica para geração de uma onda transiente, enquanto que a eficácia das outras duas depende fortemente das propriedades do solo e da tubulação. À exceção da técnica de radar penetrante, as demais são também limitadas pela atenuação dos sinais medidos na tubulação, que é causada tanto pelo material do tubo quanto pelo meio em que ele se encontra, como o solo.

Correlação de sinais já têm sido usada com bastante sucesso há bastante tempo, desde o meio do século XX (4), e tanto a técnica quanto o equipamento continuam se desenvolvendo com pesquisas que compararam diferentes tipos de sensores para aquisição dos sinais (5), ou diferentes formas de se tratar os dados medidos para correlação (6, 7). Contudo, a experiência

Figura 1 – Detecção de vazamento usando correlacionador de sinais



Fonte: Adaptada de Brennan *et al.* (3).

mostra que distância de medição d da Figura 1 continua limitada até 50 m para as tubulações de plástico comumente usadas na distribuição de água, o que é um fator limitante no projeto infraestrutural, pois exige a presença de pontos de inspeção ou poços de visita a distâncias menores que essa. A Companhia Ambiental do Estado de São Paulo (8), por exemplo, recomenda um espaçamento máximo de 100 m para poços de visitas de tubos de 1 m de diâmetro ou mais. Se a distância d puder ser aumentada, a distribuição dos poços será menos restrita permitindo otimizá-la para reduzir custos de construção. Isso pode ser feito reduzindo-se a atenuação do sinal do vazamento, algo que ainda não foi abordado diretamente como se deseja fazer neste trabalho.

Como a atenuação de ondas mecânicas é inerente ao meio em que elas se propagam, e depende tanto do tipo de onda quanto da perda de energia no próprio material (9), este trabalho propõe uma modificação nos tubos de plástico comumente usados: acrescentar-se ao tubo um elemento metálico longitudinal — uma longarina —, pois, sabidamente, o metal atenua vibração bem menos que o plástico. Esta abordagem é original, em primeiro lugar, porque em Vibrações Mecânicas e Propagação de Ondas não é usual tentar reduzir a atenuação mas, pelo contrário, aumentá-la, como em sistemas de isolamento acústico. Em segundo lugar, apesar de já existirem tubos de plástico com elementos metálicos bastante usados em aplicações de Engenharia Civil, o metal é tratado como reforço estrutural, e longarinas longitudinais raramente são usadas, sendo preferível reforços circulares ou helicoidais (10).

1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é fazer uma investigação inicial do comportamento de ondas mecânicas num tubo de plástico acrescido de longarinas metálicas longitudinais no vácuo. O objetivo principal, portanto, é desenvolver um modelo matemático que descreva este sistema. De forma específica, quer-se: 1) descrever o novo tipo de tubo por meio de suas equações de movimento; 2) obter sua relação de dispersão de ondas na faixa de frequência característica do vazamento

de água, e; 3) comparar os resultados da nova relação de dispersão com os obtidos em simulações numéricas usando o Método dos Elementos Finitos. Os capítulos a seguir dão conta destes objetivos mostrando os resultados obtidos nesta pesquisa.

1.3 Estrutura do texto

Neste primeiro capítulo foi apresentado o contexto da pesquisa e seus objetivos. O Capítulo 2 apresenta uma breve revisão da teoria de propagação de ondas necessária para este trabalho. No Capítulo 3 será apresentado o modelo matemático usados para descrever o tubo com as longarinas e seu desenvolvimento. Ele também apresenta o procedimento experimental adotado nas simulações computacionais envolvidas nesta pesquisa. O Capítulo 4 mostra e discute os resultados obtidos analiticamente e os compara às simulações numéricas. Por fim, o Capítulo 5, que fecha o texto, elenca as principais conclusões da pesquisa e sugere investigações futuras para aprofundar este estudo.

2 CONCEITUAÇÃO FUNDAMENTAL

Este capítulo traz uma breve revisão da teoria de propagação de ondas necessária para o desenvolvimento deste trabalho. Ele apresenta alguns conceitos básicos de propagação de ondas, define dispersão e atenuação, e introduz brevemente o conceito de cascas cilíndricas e quais teorias de casca são pertinentes a esta pesquisa.

2.1 Introdução

O fenômeno de propagação de ondas mecânicas trata-se de uma perturbação inicial num determinado meio, e que é transmitida através dele sem que haja transporte de massa. (11) Sua forma mais observável é o som, que nada mais é que uma onda mecânica detectada pelo ouvido humano. Matematicamente, este tipo de fenômeno é descrito por alguma equação que relacione a forma e a posição inicial (ou outro estado conhecido) da perturbação, com a nova forma e posição dela mesma num instante de tempo futuro. O caso mais simples é descrito pela chamada Equação da Onda, que pode, dentro de certas considerações, ser usada para estudar alguns tipos de ondas unidimensionais, como o deslocamento transversal de uma corda fina e tensionada (9), a flutuação de pressão de um gás dentro de um tubo cilíndrico rígido devido ao movimento de um êmbolo (12), ou deslocamento axial devido a tração e compressão de uma barra prismática (9). Esta equação será apresentada a seguir e servirá de auxílio para a apresentação de alguns conceitos importantes no estudo de propagação de ondas.

2.2 Frequência, número de onda e velocidade de propagação

Considerando uma corda fina, longa, tensionada por uma força T , de densidade linear de massa ρ , e sem ação de forças externas, seu deslocamento transversal $u = u(x, t)$, como mostrado na Figura 2, é regido pela Equação da Onda (9)

$$u_{xx} = \frac{1}{c_0^2} \ddot{u}, \quad (2.1)$$

sendo $c_0 = \sqrt{T/\rho}$, $(\)_x$ é a derivada parcial de uma função e relação a x , $(\)_{xx} = ((\)_x)_x$, e $(\)''$ é a segunda derivada no tempo. Esta equação pode ser resolvida usando o método da separação de variáveis, ou seja, fazendo $u(x, t) = X(x)\Psi(t)$ e substituindo isto na Equação 2.1, resultando em

$$\frac{X''}{X} = \frac{\Psi''}{c_0^2 \Psi},$$

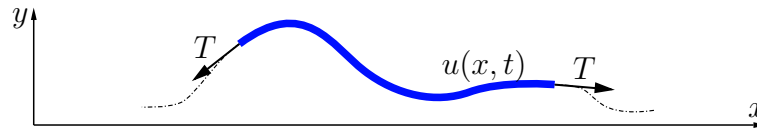
sendo $(\)''$ a segunda derivada de uma função em relação ao seu argumento. Igualando cada lado da igualdade a $-k^2$, tem-se duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem desacopladas e que, portanto, podem ser resolvidas individualmente. Resolvendo-as, retornando à

solução geral, e usando algumas igualdades trigonométricas, tem-se

$$u(x, t) = A_1 \sin(kx + \omega t) + A_2 \sin(kx - \omega t) + A_3 \cos(kx + \omega t) + A_4 \cos(kx - \omega t), \quad (2.2)$$

em que $\omega = kc_0$. Os parâmetros c_0 , ω e k serão explicados a seguir.

Figura 2 – Configuração $u(x, t)$ de uma seção de uma corda tensionada



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tomando $u(0, t)$, vê-se pela Equação 2.2 que trata-se de uma soma de senos e cossenos em função do tempo. Portanto, a interpretação de ω é direta e vemos que é a *frequência angular* da onda. De modo similar, fazendo $u(x, 0)$ vê-se que k é como a “frequência espacial” da solução. De fato, este parâmetro é chamado de *número de onda*, e relaciona a quantidade de ondas completas que há numa unidade de comprimento do espaço. Assim como a frequência ω está relacionada ao período P da onda por

$$\omega = \frac{2\pi}{P}, \quad (2.3)$$

o número de onda k relaciona-se ao comprimento de onda λ por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.4)$$

É conveniente também definir a *frequência linear* $f = 1/P$, que mede ciclos por intervalo de tempo e por ser mais fácil de ser medida em experimentos. Pode-se, então, definir que a *velocidade de propagação* c é a relação entre comprimento de onda e o intervalo de tempo que ela leva para excitar o ponto com todo seu comprimento e, usando as relações das Equações 2.3 e 2.4, tem-se (9)

$$c = \frac{\lambda}{P} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{k}.$$

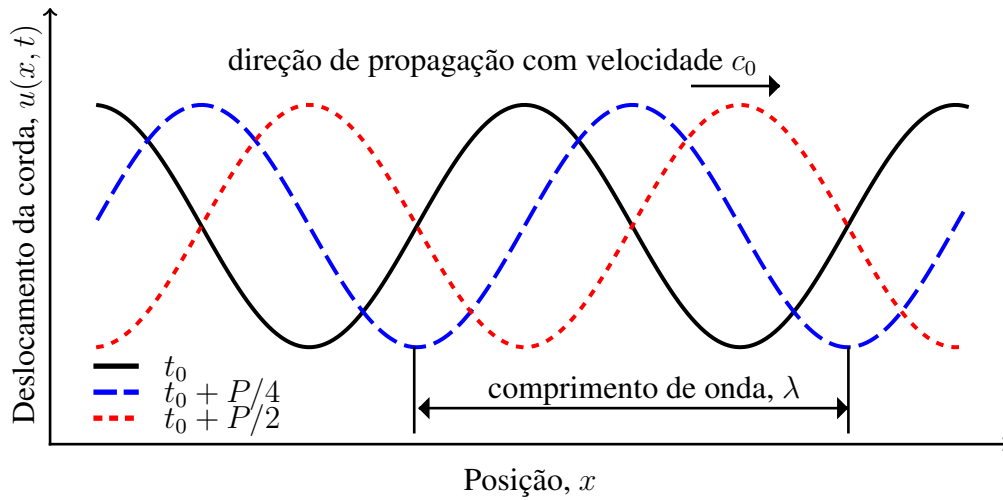
Como já havia sido definido que $\omega = kc_0$, então c_0 é a velocidade de propagação da onda na corda. O comportamento típico de um termo da Equação 2.2 é mostrado na Figura 3, ilustrando também o comprimento de onda e a velocidade de propagação.

Uma outra solução para a Equação da Onda é creditada a d’Alembert (9):

$$u(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t). \quad (2.5)$$

Supondo que a $f(x, t)$ e $g(x, t)$ possa ser aplicada a transformada de Fourier em x e em t , a Equação 2.5 nada mais é que o caso mais geral da solução da Equação 2.2, pois qualquer

Figura 3 – Componente harmônica de uma onda unidimensional se propagando



Fonte: Elaborada pelo autor.

forma de onda $f + g$ pode ser escrita como uma superposição de senos e cossenos em função da posição x , da frequência espacial (número de onda) k , do tempo t e da frequência ω . O estudo de propagação de ondas pode, então, ser feito em grande parte considerando uma única onda harmônica com ω e k arbitrários, e sobrepondo-se seus resultados de forma apropriada. É comum também que soluções da forma trigonométrica da Equação 2.2 sejam preteridas, e que soluções com funções harmônicas complexas como

$$u(x, t) = Ae^{i(kx \pm \omega t)} \quad (2.6)$$

sejam usadas (13), com $i = \sqrt{-1}$ sendo a unidade imaginária. Para se comparar os resultados obtidos usando funções complexas com dados de experimentos, basta tomar a parte real dos dados analíticos e compará-los aos valores experimentais.

2.3 Dispersão

Considere novamente que o meio de propagação de uma onda mecânica de frequência ω e número de onda k é uma corda. Seja ela, então, harmônica e da forma da Equação 2.6, e aplique-se a ela a Equação da Onda (Equação 2.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Ae^{i(kx \pm \omega t)} &= \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Ae^{i(kx \pm \omega t)}, \\ -k^2 Ae^{i(kx \pm \omega t)} &= -\frac{1}{c_0} \omega^2 Ae^{i(kx \pm \omega t)}. \end{aligned}$$

Manipulando o resultado, chegamos a

$$c = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{k^2}} = \pm c_0, \quad (2.7)$$

e concluímos que uma onda harmônica sempre se propaga numa corda com velocidade constante c_0 independente da frequência ω ou do número de onda k . Mais que isso, se reescrevermos a Equação 2.7 na forma $k = \omega/c_0$, ela diz que para qualquer ω , há apenas um k possível para que a onda se propague na corda, e vice-versa. O sinal positivo ou negativo apenas indica se a onda está indo no sentido positivo ou negativo de x .

Para outro meio de propagação que não seja uma corda, ou cujo fenômeno de propagação não seja descrito pela Equação 2.1, a relação da Equação 2.7 não é válida. Por exemplo, uma corda sob ação de uma força de linha restitutiva $F_R = -Ru$ tem como equação do movimento (9)

$$u_{xx} = \frac{1}{c_0^2} \ddot{u} + \frac{R}{T} u, \quad (2.8)$$

sendo R a constante elástica da força. Substituindo-se aqui a onda da Equação 2.6, tem-se

$$\left(-k^2 - \frac{R}{T} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \right) A e^{i(kx \pm \omega t)} = 0.$$

Eliminando-se a forma da onda para obter a velocidade de propagação c , resulta a relação

$$c = \frac{\omega}{k} = \pm c_0 \sqrt{1 + \frac{R}{Tk^2}} \quad (2.9)$$

que não é constante como a Equação 2.7, e depende do número de onda k , que depende da frequência ω , pois $k = \omega/c$.

Os comportamentos descritos pelas Equações 2.7 e 2.9 são chamados de *não-dispersivos* e *dispersivos*, respectivamente, e dependem tanto do meio de propagação quanto do tipo de onda analisada (11). Para o primeiro caso, só há um tipo de onda e, independente da frequência, todas as componentes se propagam numa única velocidade. Portanto, se houver superposição de ondas, todas as componentes se propagarão sem se dispersarem umas das outras, mantendo a forma da onda constante durante todo o tempo se não houver descontinuidades na corda. Por outro lado, para o segundo caso, a velocidade de propagação depende da frequência e, assim sendo, componentes de diferentes frequências, terão suas próprias velocidades de propagação e se dispersarão umas das outras, modificando a forma inicial da onda. Por este motivo, as equações que relacionam número de onda e frequência de propagação são apropriadamente chamadas de *relações de dispersão* (9).

2.4 Atenuação

Retornando ao caso dispersivo, pode-se extrair outro comportamento importante das ondas. Reescrevendo a Equação 2.9 em função de k e ω , tem-se:

$$k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{R}{T}}.$$

Aqui, dependendo da combinação de valores que as variáveis dentro da raiz quadrada podem assumir, o valor de k pode ser puramente real ou puramente imaginário. Se k for real, então,

segundo a forma da onda descrita pela Equação 2.6, ainda temos uma onda harmônica. Caso k seja imaginário, então $k = ik_{\text{Im}}$ com k_{Im} real, e a forma da onda fica

$$u(x, t) = Ae^{-k_{\text{Im}}x}e^{\pm i\omega t}.$$

Considerando $k_{\text{Im}} > 0$, o resultado não é mais uma onda, mas uma *vibração evanescente* (9), isto é, um decaimento exponencial $e^{-k_{\text{Im}}x}$ cuja amplitude A varia harmonicamente. Se $k_{\text{Im}} < 0$, então temos um crescimento exponencial infinito, o que não é observado na natureza e, portanto, k_{Im} é sempre positivo.

Supondo agora que a corda também esteja imersa num meio viscoso que exerça sobre ela uma força de linha F_Q contrária ao movimento e proporcional à velocidade, $F_Q = -Q\dot{u}$, a equação governante seria (9)

$$u_{xx} = \frac{1}{c_0^2}\ddot{u} + \frac{Q}{T}\dot{u} + \frac{R}{T}u,$$

sendo Q a constante de proporcionalidade da força viscosa exercida pelo meio. Neste caso, a relação de dispersão é

$$k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{R}{T} \mp i\frac{Q\omega}{T}}.$$

Assim, o número de onda é complexo, possuindo parte real e imaginária. Assumindo $k = k_{\text{Re}} + ik_{\text{Im}}$ com k_{Re} real, a onda seria

$$u(x, t) = Ae^{-k_{\text{Im}}x}e^{k_{\text{Re}}x \pm i\omega t},$$

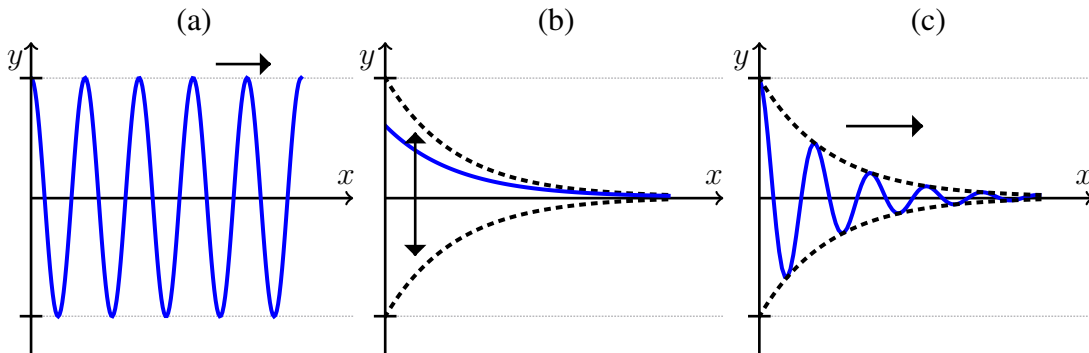
que é uma combinação dos dois resultados anteriores: uma onda harmônica se propagando sob um envelope de decaimento exponencial. A este fenômeno dá-se o nome de *atenuação*, e basta investigar a parte imaginária do número de onda para quantificá-la. A fim de ilustração, a Figura 4 mostra os comportamentos distintos para os três casos de números de onda descritos, isto é, real, imaginário ou complexo.

Outra causa de atenuação de ondas é a perda de energia inerente ao próprio material que transmite as ondas, cujo comportamento nunca é idealmente elástico (14). Para considerar este tipo de perda, é comum adotar o módulo de Young E dos materiais como sendo complexo, e cuja parte real está relacionada ao comportamento linear entre deformação e tensão, e a parte imaginária representando uma perda de energia. A usual relação $\sigma = E\epsilon$, em que σ é a tensão e ϵ é a deformação, deve, então, ser reescrita como (14)

$$\begin{aligned} \sigma &= E(1 + i\eta)\epsilon, \text{ ou} \\ \sigma &= \bar{E}\epsilon \end{aligned} \quad (2.10)$$

sendo η o chamado *fator de perda* do material e $\bar{E} = E(1 + i\eta)$. Uma das formas de observar a influência de η é submetendo um material a uma carga oscilatória, e comparar o atraso entre as tensões e as deformações medidas, que seriam efetivamente os valores de $\text{Re}\{\sigma\}$ e $\text{Re}\{\epsilon\}$ obtidos pela Equação 2.10, com $\text{Re}\{\}$ sendo a parte real de um número complexo. No caso das

Figura 4 – Três casos de vibração de uma corda: (a) onda harmônica – número de onda real; (b) vibração evanescente (não-propagante) – número de onda imaginário; (c) onda harmônica atenuada – número de onda complexo



As setas indicam a direção de propagação ou de vibração.

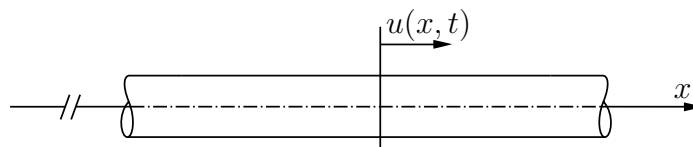
Fonte: Elaborada pelo autor.

ondas, o efeito de atenuação se deve ao fato de que o módulo de Young do material aparece em quase todas as relações de dispersão para meios sólidos. Logo, se assumirmos que ele é complexo, todos os modos de propagação que dele dependam serão, possivelmente, atenuados. Como exemplo, basta aplicar a própria Equação da Onda (Equação 2.1) a ondas longitudinais numa barra prismática. O deslocamento $u(x, t)$ passa a descrever o deslocamento de uma seção transversal na posição x no eixo da barra, num instante t , com mostrado na Figura 5. A equação governante é a mesma exceto pela velocidade de propagação, que agora é $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ (9), sendo ρ ainda a densidade de massa do material, e, portanto, a relação de dispersão (Equação 2.7), se mantém. Porém, considerando \bar{E} em vez de E , então c_0 será complexa e o número de onda k também, o que causa atenuação. É interessante observar que, mesmo com comportamento atenuante, a propagação ainda é não-dispersiva, pois a velocidade c , que agora deve ser escrita como

$$c = \frac{\omega}{\text{Re}\{k\}}, \tag{2.11}$$

continua constante.

Figura 5 – Deslocamento axial $u(x, t)$ de uma seção de uma barra prismática



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.5 Modos de propagação de ondas

Um elemento estrutural pode possuir mais que um modo de propagação de ondas. Os exemplos até o momento — corda tensionada e barra prismática — possuem apenas um modo de propagação e isso é representado por suas relações de dispersão que possuem apenas um par de raízes reais ou complexas representando apenas um tipo de onda que vai num ou noutro sentido de propagação. Se considerarmos uma típica viga de Euler-Bernoulli como a mostrada na Figura 6, o deslocamento transversal $u(x, t)$ de sua linha neutra é regido por (9):

$$u_{x^4} = \frac{1}{a^2} \ddot{u}, \quad (2.12)$$

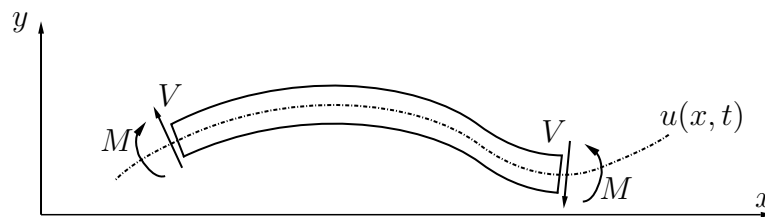
com $a = \sqrt{EI/\rho A}$, sendo EI a rigidez de flexão da viga. Esta, porém, não é a Equação da Onda, portanto não se pode esperar que a viga possua a mesma relação de dispersão que a corda. Usando a mesma abordagem anterior e substituindo $u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ na Equação 2.12, podemos extrair que

$$k = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a}}, \quad \pm i \sqrt{\frac{\omega}{a}}.$$

Há agora quatro raízes — duas reais e duas imaginárias — que representam um modo de propagação por flexão para os dois sentidos de x , mais duas vibrações evanescentes. Note-se também que agora há um comportamento dispersivo, pois usando as duas raízes reais, a velocidade de propagação não é mais constante e depende da frequência:

$$c = \pm \sqrt{a\omega}.$$

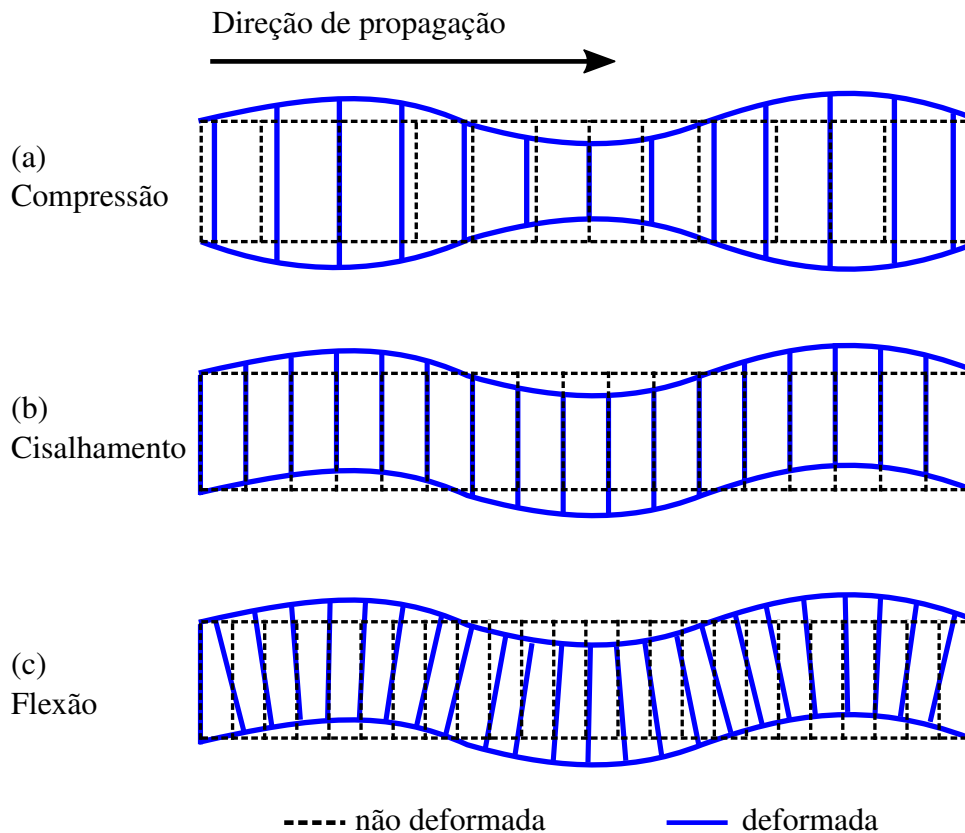
Figura 6 – Configuração $u(x, t)$ da linha neutra de uma viga de Euler-Bernoulli sob ação de momentos fletores e forças cortantes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Fazendo-se as devidas considerações, e aumentando-se os graus de liberdade, é possível admitir mais que um modo de propagação ao mesmo tempo, como compressão, flexão, cisalhamento e até torção no mesmo elemento ou estrutura. A Figura 7 ilustra os modos de propagação de compressão, cisalhamento e flexão numa estrutura prismática. Nestes casos, a relação de dispersão tem mais raízes, o que implica que para uma mesma frequência, há diferentes possibilidades para uma onda se propagar, e seu modo vai depender de como o sistema é excitado e de como as ondas se refletem ou transmitem em suas fronteiras.

Figura 7 – Três modos de propagação numa viga prismática



As linhas verticais representam as seções transversais da viga.

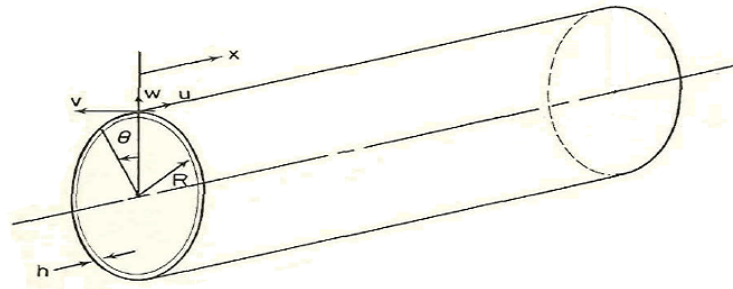
Fonte: Adaptada de Fahy e Gardonio (11, p. 14).

2.6 Cascas cilíndricas e ondas causadas por um vazamento de água

Como este trabalho investiga as características de propagação de ondas num tubo de plástico, faz-se necessária a introdução de um modelo matemático para sua representação. Para tal fim, usaremos uma *casca cilíndrica*, que é um “corpo sólido [de] forma curva, razoavelmente fino e capaz de carregar e transmitir cargas” (15, p. 1, tradução nossa). Ela também será considerada *fina*, isto é, sua espessura h é muito menor que seu raio médio R , o que implica que sua configuração pode ser descrita pelos deslocamentos de uma superfície de referência (15), aqui escolhida como sendo a definida por seu raio médio. Usando um sistema de coordenadas cilíndricas (x, r, θ) , os deslocamentos u , v e w desta superfície são na direção axial, tangencial e radial, como na Figura 8, e são funções das coordenadas da casca, mais do tempo t . É possível encontrar extensa teoria e estudos para este tipo de elemento e, portanto, este trabalho apenas se proverá de trabalhos já consagrados, sem refazer o desenvolvimento detalhado de equações de movimento de qualquer teoria, e apresentando-as quando forem usadas no capítulo seguinte.

Para este trabalho, há duas teorias de casca importantes: casca de membrana e de Donnell-Mushtari. A primeira é o caso mais simples, sendo a casca uma membrana curvada capaz de

Figura 8 – Casca cilíndrica e seu sistema de coordenadas



Fonte: Adaptada de Leissa (16, p. 32).

transmitir tração, compressão e torção, mas que não sofre flexão (9). Nela há dois modos de propagação: um de compressão, em que o deslocamento dos pontos da casca é majoritariamente longitudinal, mas acoplado a um deslocamento radial menor; e um de torção, com deslocamento tangencial (9). Já a segunda, de Donnell-Mushtari, difere do caso mais simples por introduzir efeitos de flexão (16), que é importante se considerar devido à flexão das longarinas que serão adicionadas. Este modo resulta em ondas com atenuação mesmo se não forem consideradas perdas no material, o que não acontece numa casca de membrana. Esta última pode ser simplificada para chegar-se à casca de membrana com base na faixa de frequência investigada, como será feito mais adiante.

Ao se considerar a água dentro tubo, adiciona-se um campo acústico interno à casca. Aplicando a condição de contorno de que o fluido está sempre em contato com a casca, ele aparece como uma carga não-linear e radial agindo sobre ela, como demonstrado por Fuller e Fahy (17). Pinnington e Briscoe (18), por sua vez, assumem o mesmo que Fuller e Fahy (17), mas simplificam suas equações e obtêm relações de dispersão polinomiais de segundo grau que se provaram válidas em campos de testes, como demonstram Muggleton, Brennan e Pinnington (19). Já Gao *et al.* (20) vai além e inclui os efeitos do solo considerando-o como um meio linear elástico infinito exterior à casca, o que é um cenário bem mais realista e que também pôde ser comprovado experimentalmente. Os efeitos do solo, porém, não serão tratados neste trabalho.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Os modelos matemáticos usados para representar os elementos da tubulação proposta no Capítulo 1, o método para acoplá-los, bem como a obtenção da relação de dispersão usada para avaliar a propagação de ondas no sistema resultante serão apresentados nas seções a seguir. A última seção apresenta como foram realizadas as simulações numéricas usando o Método dos Elementos Finitos.

3.1 Modelo proposto

Como dito no Capítulo 1, este trabalho investiga as características de propagação de onda de um tubo de plástico acrescido de longarinas metálicas longitudinais. O tubo é representado por uma casca cilíndrica fina e as longarinas são vigas acopladas à casca, como mostrado na Figura 9. Este tipo de sistema é conhecido como *casca cilíndrica longitudinalmente enrijecida* e é amplamente utilizado em estruturas navais ou de aeronaves. (21) Porém, na maior parte das aplicações e, conseqüentemente, na maior parte dos trabalhos publicados a respeito deste tipo de casca, saber as frequências naturais e os modos de vibração do sistema já é suficiente, o que não é o caso deste, pois precisamos descrever a propagação de ondas, e não vibração estacionária.

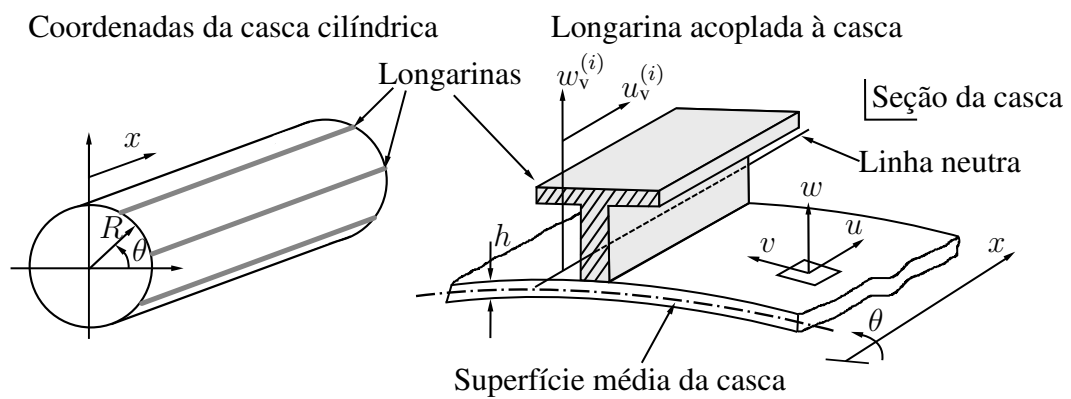
A abordagem usada neste capítulo foi inspirada nos trabalhos de Miller (21) e Rinehart e Wang (22). Estes autores usam Mecânica Lagrangiana para desenvolver o autoproblema de uma casca cilíndrica finita e longitudinalmente enrijecida para, em seguida, calcular suas frequências naturais e seus modos de vibrar. A vantagem deste método é que as longarinas podem ser tratadas como elementos discretos e acoplados rigidamente à casca. Ambos substituem, no lagrangiano do sistema, uma forma aproximada dos modos de vibrar para obter o autoproblema. Miller (21) usa equações de Euler-Lagrange, mas sem obter as equações de movimento, enquanto que Rinehart e Wang (22) integra o lagrangiano e substitui a forma dos modos. Aqui, porém, será usada a ação total do sistema em função do lagrangiano — o qual será mais simplificado que os destes autores —, e equações de Euler-Lagrange apropriadas apropriadas para minimizá-la e obter as equações de movimento. Depois disso, assumindo propagação de ondas harmônicas, a relação de dispersão de ondas no sistema será obtida.

3.2 Modelagem das longarinas

Esta seção apresenta o desenvolvimento das equações de movimento das longarinas usando Mecânica Lagrangiana: primeiro será definida a energia de deformação das longarinas, depois sua energia cinética, seu lagrangiano e a ação total, que será minimizada para obter as equações desejadas.

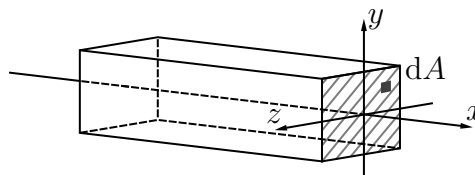
As longarinas são vigas de deslocamento bidimensional que serão rigidamente acopladas à casca, como mostrado na Figura 9. Suas seções transversais são não-deformáveis e sempre ortogonais às suas linhas neutras, sendo u_v o deslocamento axial de uma seção de uma longarina na posição x e no instante t , e w_v o deslocamento transversal dessa mesma seção na direção ortogonal à casca. Deste modo, um elemento da viga sofre apenas esforços de compressão e flexão, como ilustrado na Figura 10, sendo que o eixo x das longarinas é paralelo e tem mesmas origem e orientação que o eixo da casca.

Figura 9 – Coordenadas de uma casca cilíndrica longitudinalmente enrijecida por longarinas e deslocamentos de seus componentes



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 10 – Sistema de coordenadas na seção transversal de uma viga



Fonte: Elaborada pelo autor.

A deformação ϵ_x de um elemento de área dA em (z, y) na seção da viga da Figura 10 é a soma das parcelas de deformação devido à compressão, $\epsilon_{comp.}$, e à flexão, $\epsilon_{flex.}$, que são (23)

$$\epsilon_{flex.} = -yw_{v,xx}, \quad \text{e} \quad (3.1)$$

$$\epsilon_{comp.} = u_{v,x}, \quad (3.2)$$

logo,

$$\epsilon_x = \epsilon_{flex.} + \epsilon_{comp.} \quad (3.3)$$

Pela Lei de Hooke, a tensão σ_x no mesmo ponto (y, z) é

$$\sigma_x = E_v \epsilon_x, \quad (3.4)$$

sendo E_v o módulo de Young do material da viga. Desta forma, para uma longarina semi-infinita, de 0 a $+\infty$ em x , podemos definir sua energia de deformação V_v como sendo

$$V_v = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \int_A \sigma_x \epsilon_x \, dA dx. \quad (3.5)$$

Combinando as Equações de 3.1 a 3.4, a Equação 3.5 pode ser reescrita como

$$V_v = \frac{E_v}{2} \int_0^{+\infty} A_v (u_{v,x})^2 - 2I_z^{(1)}(u_{v,x})(w_{v,xx}) + I_z^{(2)}(w_{v,xx})^2 \, dx, \quad (3.6)$$

sendo $I_z^{[1]} = \int_A y \, dA$ o primeiro momento de área e $I_z^{[2]} = \int_A y^2 \, dA$ o segundo momento de área da seção da transversal, ambos em relação ao seu eixo z , e A_v a própria área da seção. Quanto à energia cinética T_v de uma viga, esta é função do deslocamento dos pontos da seção transversal e, como ela não é deformável, este deslocamento é uniforme e independe da posição na seção. Portanto,

$$T_v = \frac{\rho_v A_v}{2} \int_0^{+\infty} (\dot{u}_v)^2 + (\dot{w}_v)^2 \, dx, \quad (3.7)$$

sendo ρ_v a densidade de massa do material da viga. Caso se deseje desconsiderar a compressão, basta fazer $u_v = 0$, o que elimina a dependência deste deslocamento nas Equações 3.6 e 3.7. Definindo o lagrangiano L_v da longarina como sendo

$$L_v = T_v - V_v,$$

a ação total S_v da longarina,

$$S_v[u_v, w_v] = \int_{t_1}^{t_2} L_v \, dt,$$

é um funcional em u_v e w_v nas coordenadas x e t .

3.3 Acoplando casca e viga

Para representação do sistema casca-vigas, suas equações de movimento serão obtidas, assim como na seção anterior, usando-se Mecânica Lagrangiana. Os passos serão os seguintes:

1. definir o lagrangiano e a ação total do sistema somando-se o lagrangiano de cada viga ao da casca;
2. definir equações algébricas que representem o acoplamento entre a casca e as vigas;
3. reduzir o número de funções de deslocamento tanto quanto possível usando as restrições;
4. aplicar equações de Euler-Lagrange para obter as equações de movimento.

3.3.1 Lagrangiano da casca

Valendo-se do trabalho de Leissa (16), tem-se que a energia de deformação V_c para uma casca de Donnell-Mushtari é

$$V_c = \frac{Eh}{2R(1-\nu^2)} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} (Ru_x + v_\theta + w)^2 - 2R(1-\nu) \left[wu_x - \frac{R}{4} \left(v_x - \frac{u_\theta}{R} \right)^2 \right] + \beta^2 \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) [w_{\theta\theta}w_{xx} - (w_{x\theta})^2] \right\} d\theta dx, \quad (3.8)$$

e a energia cinética T_c é

$$T_c = \frac{\rho h R}{2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} (\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2 d\theta dx,$$

sendo que E , ρ e ν são o módulo de Young, a densidade de massa e o coeficiente de Poisson do material do qual ela é construída, respectivamente, $\beta^2 = h^2/12R^2$ é o parâmetro adimensional de espessura da casca, e o operador

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

é o laplaciano em coordenadas cilíndricas. O lagrangiano da casca, portanto, é $L_c = T_c - V_c$. A teoria de casca de membrana pode ser obtida por simplificação, bastando fazer $\beta = 0$. (16)

3.3.2 Ação total do sistema, restrições de acoplamento e equações de movimento

Para definirmos a ação total do sistema, uma importante consideração deve ser feita: as longarinas estão distantes o suficiente entre si mesmas para que seus deslocamentos não afetem umas às outras. Isso implica que num ponto em que houver longarina, o movimento será governado pela equação acoplada da casca com a viga, enquanto num ponto só de casca e longe o suficiente de uma longarina, apenas as equações de casca atuam. Logo, para N longarinas posicionadas em $\theta_1, \dots, \theta_N$, a ação total do sistema é

$$S[u, v, w, u_v^{(1)}, w_v^{(1)}, \dots, u_v^{(N)}, w_v^{(N)}] = \int_{t_1}^{t_2} L_c + \sum_{i=1}^N L_v^{(i)} dt, \quad (3.9)$$

sendo $u_v^{(i)}$, $w_v^{(i)}$ e $L_v^{(i)}$ os deslocamentos e lagrangiano da i -ésima viga.

As longarinas estão acopladas à casca tais que nas dadas posições $\theta = \theta_i$, com $i = 1, \dots, N$, em que elas estejam, os deslocamentos transversais de suas linhas neutras de flexão são iguais ao deslocamento radial da casca, e os deslocamentos longitudinais de suas seções transversais são iguais ao deslocamento longitudinal da casca naquelas posições. Algebricamente, pode-se escrever

$$\begin{aligned} u_v^{(i)}(x, t) &= u(x, \theta_i, t), \text{ e} \\ w_v^{(i)}(x, t) &= w(x, \theta_i, t). \end{aligned}$$

Como estas equações definem vínculos holônomos, elas podem ser usadas para reduzir a dependência do funcional da Equação 3.9 de $3 + 2N$ funções para apenas três. Ao fazer isso, no entanto, perde-se informação de posições em que $\theta \neq \theta_i$, o que resulta em equações que descrevem o movimento apenas onde há longarinas. Por fim, pode-se simplificar a ação S ainda mais reaplicando-se a consideração inicial: não importa quantas longarinas hajam, o comportamento de todas deve ser avaliado individualmente. Assim sendo, o somatório de $L_v^{(i)}$ de 1 a N será eliminado na Equação 3.9 e apenas uma longarina será considerada doravante.

Após simplificada, a ação total para a casca com uma longarina é

$$S[u, v, w] = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

sendo $L = L_c + L_v$, e as equações de Euler-Lagrange apropriadas para minimizá-la são (16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial L}{\partial u_\theta} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} \right) - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial L}{\partial v_\theta} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) &= 0, \text{ e} \\ \frac{\partial L}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial w_x} \right) - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial L}{\partial w_\theta} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) \\ &+ \frac{d}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial w_{xx}} \right) + \frac{d^2}{d\theta dx} \left(\frac{\partial L}{\partial w_{x\theta}} \right) \\ &+ \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{\partial L}{\partial w_{\theta\theta}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Definindo $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$, as equações de movimento resultantes são:

$$u_{xx} + \frac{1-\nu}{2R^2} u_{\theta\theta} + \frac{1+\nu}{2R} v_{\theta x} + \frac{\nu}{R} w_x + \frac{1}{\rho h R c_p^2} \left(A_v E_v u_{xx} - E_v I_z^{[1]} w_{x^3} \right) = \left(1 + \frac{\rho_v A_v}{\rho h R} \right) \frac{\ddot{u}}{c_p^2}, \quad (3.10)$$

$$\frac{1+\nu}{2R} u_{\theta x} + \frac{1-\nu}{2} v_{xx} + \frac{v_{\theta\theta}}{R^2} + \frac{w_{\theta\theta}}{R^2} = \frac{\ddot{v}}{c_p^2}, \text{ e} \quad (3.11)$$

$$-\frac{\nu u_x}{R} - \frac{v_\theta}{R^2} - \frac{w}{R^2} - \beta^2 R^2 \nabla^4 w + \frac{1}{\rho h R c_p^2} \left(E_v I_z^{[1]} u_{x^3} - E_v I_z^{[2]} w_{x^4} \right) = \left(1 + \frac{\rho_v A_v}{\rho h R} \right) \frac{\ddot{w}}{c_p^2}, \quad (3.12)$$

em que $c_p^2 = E/\rho(1-\nu^2)$.

3.3.3 Relação de dispersão

Assim como feito no Capítulo 1, os três deslocamentos da casca serão ondas harmônicas. A forma apropriada para cada um deles é

$$u(x, \theta, t) = U_n \cos(n\theta) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.13)$$

$$v(x, \theta, t) = V_n \sin(n\theta) e^{i(kx - \omega t)}, \text{ e} \quad (3.14)$$

$$w(x, \theta, t) = W_n \cos(n\theta) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.15)$$

sendo U_n , V_n , e W_n a amplitude da onda, k é o número de onda axial, ω é a frequência angular e o parâmetro n é a ordem do modo de vibração circunferencial, cujas formas de 0 a 3 são mostradas na Figura 11. Substituindo as Equações de 3.13 a 3.15 nas Equações de 3.10 a 3.12 e eliminando os termos $e^{i(kx-\omega t)}$, pode-se rearranjar o resultado na forma matricial $[M]\{U\} = 0$, sendo $\{U\} = [U_n \ V_n \ W_n]^T$ e

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

que é a matriz de coeficientes, com

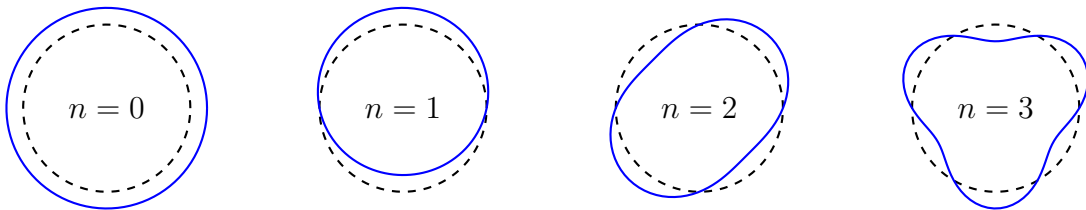
$$\begin{aligned} M_{11} &= \Omega^2 - K^2 - \frac{n^2(1-\nu)}{2} + \frac{A_v}{\rho c_p^2 H} \left(\rho_v \frac{\Omega^2 c_p^2}{R^2} - E_v \frac{K^2}{R^2} \right), \\ M_{12} &= \frac{(1+\nu)}{2} i K n, \\ M_{13} &= i K \nu + \frac{E_v I_z^{[1]} K^3}{\rho c_p^2 H R^3}, \\ M_{21} &= M_{12}, \\ M_{22} &= n^2 - \Omega^2 + \frac{(1-\nu)}{2} K^2, \\ M_{23} &= n, \\ M_{31} &= M_{13}, \\ M_{32} &= M_{23}, \text{ e} \\ M_{33} &= 1 - \Omega^2 + \beta^2 (K^2 + n^2)^2 + \frac{1}{\rho c_p^2 H} \left(E_v I_z^{[2]} \frac{K^4}{R^4} - \rho_v A_v \frac{\Omega^2 c_p^2}{R^2} \right), \end{aligned}$$

onde $K = kR$, $\Omega = \omega R/c_p$ e $H = h/R$ são o número de onda, a frequência e a espessura da casca adimensionalizados. Por fim, como $\{U\} \neq \{0\}$, nos resta que

$$\det[M] = 0, \quad (3.17)$$

que é uma equação polinomial em K de oitavo grau para uma dada frequência Ω , e sendo ela a própria relação de dispersão do sistema.

Figura 11 – Modos de vibração circunferenciais de uma casca cilíndrica



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4 Acrescentando o fluido

A presença de fluido dentro do tubo resulta no chamado *termo de carregamento do fluido* F_f descrito por Fuller e Fahy (17), que deve ser subtraído do elemento (3,3) da matriz de coeficientes $[M]$ da Equação 3.16. Se o fluido estiver presente, então

$$M_{33} = 1 - \Omega^2 + \beta^2(K^2 + n^2)^2 + \frac{1}{\rho c_p^2 H} \left(E_v I_z^{[2]} \frac{K^4}{R^4} - \rho_v A_v \frac{\Omega^2 c_p^2}{R^2} \right) - F_f, \text{ e}$$

$$F_f = \frac{\Omega^2}{H K_R} \cdot \frac{\rho_f}{\rho} \cdot \frac{J_n(K_R)}{J'_n(K_R)}, \quad (3.18)$$

sendo ρ_f a densidade de massa do fluido, $K_R = \pm \sqrt{K_f^2 - K^2}$ é o número de onda normalizado na direção radial, $K_f = \Omega(c_p/c_f)$ é o número de onda normalizado do fluido, c_f a velocidade de propagação do som no fluido, e $J_n()$ a função de Bessel do primeiro tipo de n -ésima ordem. A relação de dispersão passa agora a ser uma equação implícita em K devido a presença das funções de Bessel em F_f .

3.5 Simplificando a relação de dispersão

A matriz de coeficientes da Equação 3.16 pode ser simplificada fazendo considerações acerca do problema estudado. Primeiro, Fuller e Fahy (17) mostram que a maior parte da energia de vibração que se propaga em uma casca preenchida por fluido encontra-se nos casos em que $n = 0$ e 1. O primeiro é chamado de *modo axissimétrico*, e o segundo é o *modo de viga*. Contudo, como Gao *et al.* (20) bem observa, para um tubo enterrado no solo, o modo $n = 1$ não ocorre, tampouco há torção. Portanto, podemos adotar $n = 0$ e anular o deslocamento tangencial fazendo $v = 0$. A consequência é que as ondas harmônicas definidas nas Equações 3.13, 3.14 e 3.15 deixam de depender de θ (daí o termo “modo axissimétrico”) e a Equação 3.11 desaparece completamente. Logo, todos os elementos de $[M]$ perdem todas as parcelas que dependem de n e a própria matriz é reduzida de ordem três para dois. Hunaidi *et al.* (24), por sua vez, mostram que a maior parte do sinal de vazamento se encontra na água e embasam a consideração que muitos autores fazem — p.ex. Referências (3, 20, 19) — de que a frequência do sinal do vazamento está bem abaixo da chamada *frequência de anel*, que é aquela em que o comprimento de onda é igual à circunferência do tubo, isto é, quando $K = 1$. Com isso, é razoável eliminar os termos K^3 e K^4 por serem bem menores que a unidade. Ao fazer isso, o único termo remanescente da contribuição da longarina em M_{33} é $\Omega^2(\rho_v/\rho)(A_v/HR^2)$, o qual provém da flexão. Todavia, todos os termos de flexão da casca ou da longarina — K^4 e, por consequência, β — foram eliminados. É, então, coerente eliminar esta parcela também, o que leva à conclusão de que as ondas geradas por um vazamento não se propagam por flexão. A matriz simplificada resultante é

$$[M] = \begin{bmatrix} \Omega^2 \left(1 + \frac{\rho_v}{\rho} \frac{A_v}{HR^2} \right) - K^2 \left(1 + \frac{A_v E_v}{\rho c_p^2 R^2 H} \right) & iK\nu \\ iK\nu & 1 - \Omega^2 - F_f \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Caso não houvesse viga, isto é, anulando-se os termos ρ_v , E_v e A_v , $[M]$ seria a mesma matriz obtida pelas equações de Pinnington e Briscoe (18). Por último, seguindo estes mesmos autores, pode-se simplificar F_f fazendo $K_R \rightarrow 0$, o que faz com que $J_0(K_R)/J'_0(K_R) \approx -2/K_R$, e

$$F_f = -\frac{2\Omega^2 \rho_f}{H(K_f^2 - K^2)\rho}, \quad (3.20)$$

fazendo com que $\det[M]$ seja uma função racional com polinômios em K de até quarto grau. Substituindo a Equação 3.20 em 3.19, a relação de dispersão então fica

$$\det[M] = \frac{P(K)}{Q(K)} = 0, \quad (3.21)$$

sendo suas raízes dadas por $P(K) = 0$ com $K \neq K_f$.

3.5.1 Ondas no fluido e na casca

Fuller e Fahy (17) observaram que há apenas dois modos de propagação de ondas axissimétricas abaixo da frequência de anel: uma onda chamada $s = 1$ cuja maior parte da energia se propaga pelo fluido, e outra onda $s = 2$ cuja maior parte da energia se propaga pela casca. Com isso pode-se simplificar ainda mais a Equação 3.21 usando as seguintes observações de Pinnington e Briscoe (18):

1. para uma onda $s = 1$ (no fluido), então $K^2 \gg K_L^2$, isto é, o número de onda é muito maior que o de uma placa plana, com $K_L = \omega R/c_p = \Omega$, e
2. para uma onda $s = 2$ (na casca), então $K_f^2 \gg K^2$, isto é, o número de onda no fluido é muito maior que o do sistema casca-fluido.

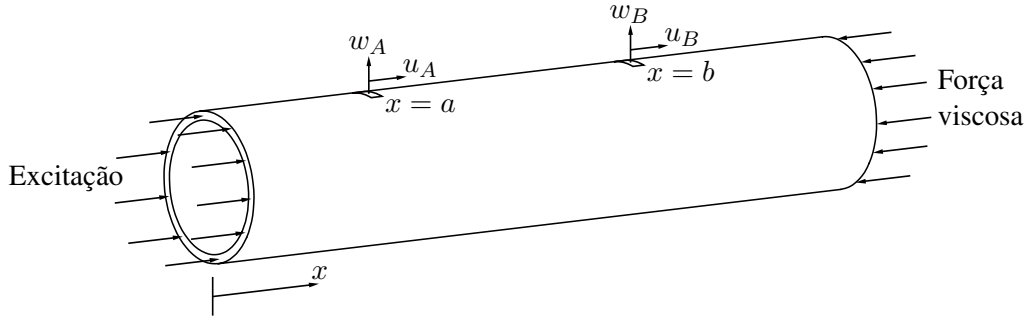
Ao se aplicar essas considerações individualmente, obtém-se uma ou outra onda desejada.

3.6 Simulações numéricas

A fim de validar a modelagem matemática desenvolvida anteriormente, o Método dos Elementos Finitos implementado no COMSOL Multiphysics® (25) foi usado neste trabalho. Esta escolha foi feita para podermos comparar resultados provindos de formulações diferentes e independentes entre si.

Uma representação ilustrativa do modelo usado nas simulações é mostrado Figura 12. A casca e as longarinas foram modeladas por elementos tridimensionais tetraédricos. O modelo foi excitado por deslocamento prescrito uniforme num de seus aros, enquanto o outro foi amortecido por uma força viscosa para reduzir a reflexão de ondas na fronteira. Por se tratar de uma pesquisa inicial, o fluido não foi incluído nas simulações. A malha final obedeceu às recomendações do COMSOL Multiphysics® de que nenhum elemento deva ter comprimento maior que 1/6 do menor comprimento de onda esperado em simulações de onda, o que também já

Figura 12 – Representação do modelo usado nas simulações numéricas



Fonte: Elaborada pelo autor.

obedece a condição de convergência de Courant-Friedrichs-Lewy (26) de que as dimensões dos elementos não devem ser maiores que o menor comprimento de onda.

O número de onda pode ser calculado por meio das funções de transferência T_{AB} entre o deslocamento medido nos pontos A e B em $x = a$ e $x = b$, respectivamente, com $b > a$, como mostrado na Figura 12. Usando a Equação 3.13, para ondas axissimétricas e com atenuação, ou seja $n = 0$ e $k = k_{\text{Re}} + ik_{\text{Im}}$, os deslocamentos axiais em A e B são

$$\begin{aligned} u_A(t) &= u(a, t) = U_0 e^{i(ka - \omega t)} = U_0 e^{-k_{\text{Im}} a} e^{i(k_{\text{Re}} a - \omega t)}, \text{ e} \\ u_B(t) &= u(b, t) = U_0 e^{i(kb - \omega t)} = U_0 e^{-k_{\text{Im}} b} e^{i(k_{\text{Re}} b - \omega t)}. \end{aligned}$$

Tomando a transformada de Fourier $\mathcal{F}\{\}$ em relação tempo t de $u_A(t)$ e $u_B(t)$, e calculando a função de transferência $T_{AB} = \mathcal{F}\{u_B(t)\} / \mathcal{F}\{u_A(t)\}$, tem-se

$$T_{AB} = \|T_{AB}\| e^{-i\phi_{AB}(\omega)} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{U_0 e^{-k_{\text{Im}} b} e^{ik_{\text{Re}} b}}{U_0 e^{-k_{\text{Im}} a} e^{ik_{\text{Re}} a}} \\ &= e^{-k_{\text{Im}} d} e^{ik_{\text{Re}} d} \quad (3.23) \end{aligned}$$

com $d = b - a$, e $\| \cdot \|$ e $\phi(\omega)$ sendo o módulo e a fase de um número complexo, respectivamente, no caso, de T_{AB} . Comparando-se as Equações 3.22 e 3.23 e lembrando que $e^{-k_{\text{Im}} d}$ é sempre real, e $e^{ik_{\text{Re}} d}$ tem sempre módulo igual à unidade, então

$$k_{\text{Re}} = \frac{\phi_{AB}(\omega)}{d} \text{ e } k_{\text{Im}} = \frac{-\ln \|T_{AB}\|}{d}.$$

Como existe acoplamento entre os deslocamentos radial e longitudinal, $w_A(t)$ e $w_B(t)$ também podem ser usados para estimar k sem perda de generalidade.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo será apresentada uma análise do modelo matemático desenvolvido anteriormente e o resultado das simulações numéricas da casca enrijecida. As partes real e imaginária do modelo analítico são comparadas entre diferentes casos, a atenuação é quantificada e, depois, o resultado do número de onda das simulações é comparado ao modelo analítico.

4.1 Propriedades mecânicas do modelo

A casca usada neste trabalho foi baseada num tubo de policloreto de vinila (PVC) comercial com diâmetro externo de 50 mm e parede de 3 mm, que são geralmente usado nos ramais de distribuição de água em regiões residenciais. A densidade do material foi medida usando-se um picnômetro, e seu módulo de Young foi calculado medindo-se a frequência natural de uma amostra anular excitada por um *shaker*, como mostrado na Figura 13, e aplicando-se as fórmulas de frequências naturais de anéis apresentadas por Blevins (27). As longarinas tem seção transversal quadrada cuja aresta mede o mesmo que a espessura do tubo, e são feitas de aço estrutural. Os fatores de perda adotados foram o mesmo usado por Gao *et al.* (20) para a casca, e o medido por Jung *et al.* (28) para as longarinas. O fluido adotado foi a água. A Tabela 1 resume as propriedades mecânicas e os parâmetros geométricos usados, sendo que para as simulações numéricas modelou-se uma casca de 25 cm de comprimento. Uma casca tão curta foi usada para que a não houvessem ressonâncias significativas abaixo de 1 kHz.

Tabela 1 – Propriedades dos materiais de construção e parâmetros geométricos da casca, das longarinas e do fluido

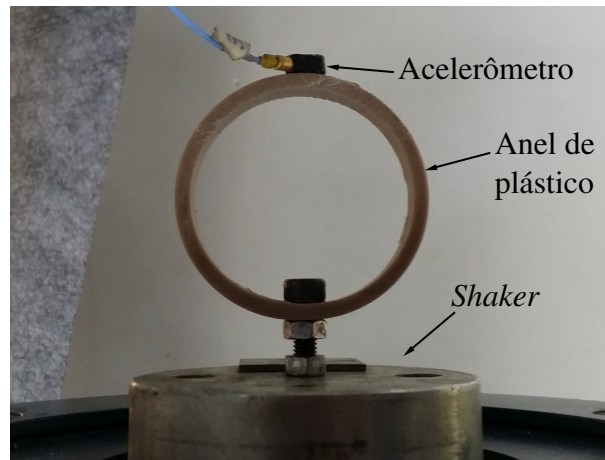
| Propriedade | Tubo (plástico) | Longarina (aço) | Fluido (água) |
|--------------------------------|-------------------|---------------------|---------------|
| Densidade (kg/m ³) | 1.514 | 7.800 | 1.000 |
| Módulo de Young (GPa) | 1,644 | 200,0 | — |
| Coefficiente de Poisson | 0,4 | 0,3 | — |
| Fator de perda | $6 \cdot 10^{-2}$ | $2,3 \cdot 10^{-3}$ | — |
| Raio (mm) | 50 | — | — |
| Espessura / Aresta (mm) | 3 | 3 | — |
| Velocidade do som (m/s) | — | — | 1.500 |

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 Resultados da relação de dispersão

Usando-se os dados da Tabela 1, pode-se calcular as raízes da relação de dispersão da Equação 3.21, mostradas na Figura 14. Nota-se que a parte real (Figura 14a) tem comportamento

Figura 13 – Anel de plástico extraído do tubo de PVC e acoplado a um *shaker* com um acelerômetro



Fonte: Elaborada pelo autor.

bastante linear em função da frequência, o que indica que a propagação é muito pouco dispersiva. Se a considerarmos como não-dispersiva, podemos obter a velocidade propagação c usando regressão linear, já que a Equação 2.11 pode ser reescrita como $c = 2\pi f / \text{Re}\{k\}$, que é o inverso do coeficiente angular das curvas da Figura 14a. Calculando também as velocidades adimensionais $C_p = c / \text{Re}\{c_p\}$ e $C_f = c / c_f$ e reunindo os resultados na Tabela 2, é possível perceber a influência do fluido na propagação: as ondas no fluido ($s = 1$) são mais lentas que aquelas num fluido livre se propagando a c_f , enquanto que as ondas na casca ($s = 2$) são um pouco mais rápidas que as que se propagam numa casca vazia. A presença da longarina, por sua vez, causa um aumento da rigidez do sistema, o que aumenta a velocidade de todos os tipos ondas.

Tabela 2 – Velocidades médias de propagação

| Caso | Velocidade, c (m/s) | $C_p = c / \text{Re}\{c_p\}$ | $C_f = c / c_f$ |
|----------------------------------------|-----------------------|------------------------------|-----------------|
| Casca | 1.030 | 0,916 | 0,687 |
| Casca + fluido ($s = 1$) | 314,3 | 0,279 | 0,210 |
| Casca + fluido ($s = 2$) | 1.121 | 0,997 | 0,747 |
| Casca + longarina | 3.267 | 2,91 | 2,18 |
| Casca + longarina + fluido ($s = 1$) | 340,1 | 0,302 | 0,227 |
| Casca + longarina + fluido ($s = 2$) | 3.285 | 2,92 | 2,19 |

Fonte: Elaborada pelo autor.

A parte imaginária do número de onda (Figura 14b), assim como a real, também tem comportamento linear e mostra que quanto maior a frequência, maior a atenuação. É conveniente também introduzir uma medida de atenuação $x_{1/2}$:

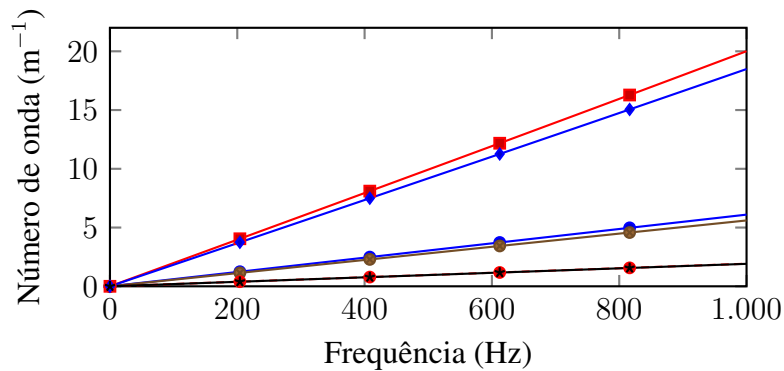
$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_{\text{Im}}} = -\frac{d \ln 2}{\ln ||T_{AB}||}, \quad (4.1)$$

que é a *meia-distância* da onda, isto é, distância percorrida por ela para que sua amplitude decaia pela metade do valor inicial. O resultando da Equação 4.1 mostrado no gráfico da Figura 15 ajuda a interpretar os resultados:

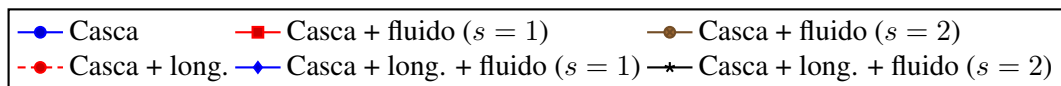
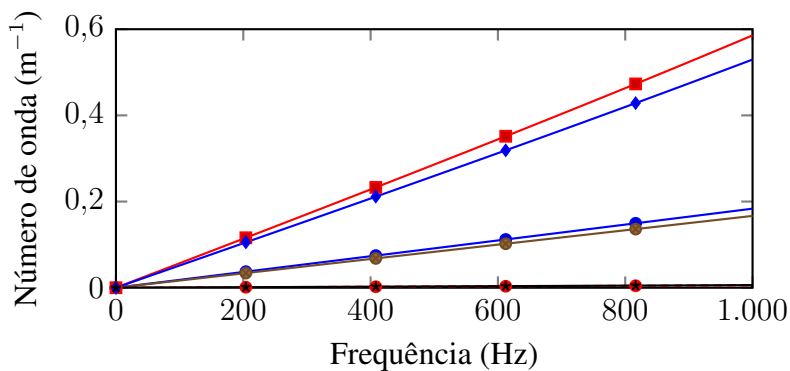
- A atenuação é bem maior em ondas no fluido ($s = 1$) do que na casca ($s = 2$). Acima de 100 Hz as ondas no fluido decaem pela metade em menos de 10 m, enquanto que na casca, valores menores que essa meia-distância só acontecem para frequências acima de 400 Hz.
- Apesar de aumentar um pouco a velocidade de propagação, o fluido pouco altera a atenuação de ondas na casca ($s = 2$) quando comparada à casca vazia, assim como a longarina pouco influencia a velocidade das ondas no fluido ($s = 1$).
- A atenuação de ondas na casca ($s = 2$) reduz-se bastante quando se adicionam as longarinas, sendo bastante próxima daquela da casca vazia com longarina.

Figura 14 – Raízes da relação de dispersão da Equação 3.21

(a) Parte real do número de onda, $\text{Re}\{k\}$

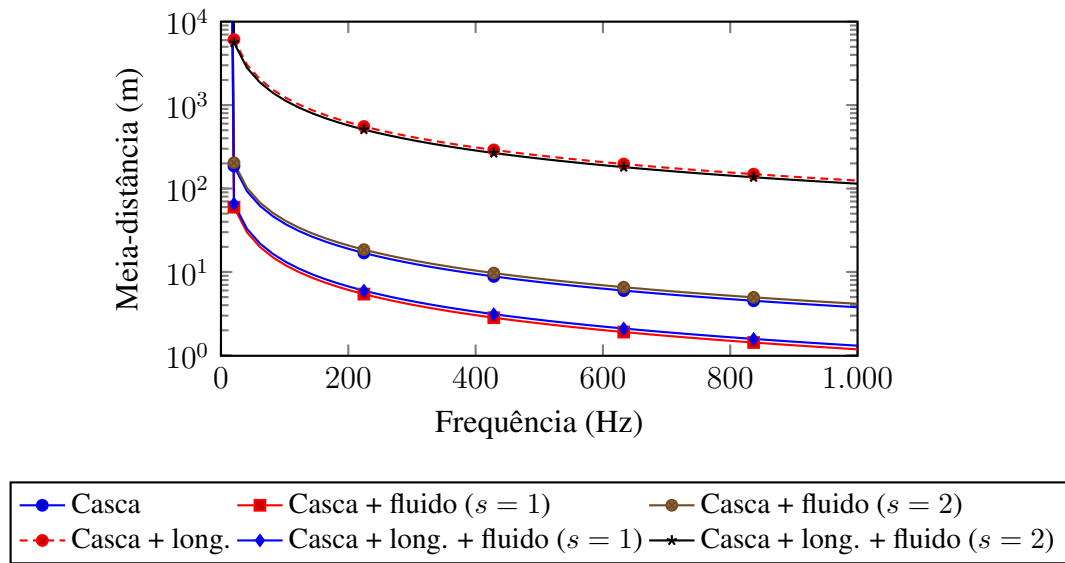


(b) Parte imaginária do número de onda, $\text{Im}\{k\}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 15 – Meia-distância calculada para vários casos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para avaliar comparativamente as mudanças na atenuação, podemos calcular o coeficiente de atenuação m , que definimos como sendo o coeficiente angular das curvas da Figura 14b, e cujos valores foram calculados por regressão linear e estão listados na Tabela 3. Pode-se observar que para uma casca com fluido mas sem longarinas, a atenuação é muito maior em ondas no fluido ($s = 1$) do que na casca ($s = 2$). E também, mesmo que a longarina quase não mude a atenuação de ondas no fluido ($s = 1$), ao adicioná-las a atenuação em ondas na casca ($s = 2$) cai para menos de 4% do seu valor original, sendo que a mesma tendência é vista comparando-se uma casca vazia não-enrijecida com a enrijecida.

Tabela 3 – Coeficiente de atenuação (m) e razão de amplitude relativa (r/r_{casca})

| Caso | m | r/r_{casca} |
|----------------------------------------|----------------------|----------------------|
| Casca | $1,83 \cdot 10^{-4}$ | 1,00 |
| Casca + fluido ($s = 1$) | $5,84 \cdot 10^{-4}$ | $1,85 \cdot 10$ |
| Casca + fluido ($s = 2$) | $1,67 \cdot 10^{-4}$ | $4,81 \cdot 10^{-2}$ |
| Casca + longarina | $5,57 \cdot 10^{-6}$ | $3,16 \cdot 10^{-1}$ |
| Casca + longarina + fluido ($s = 1$) | $5,28 \cdot 10^{-4}$ | $2,41 \cdot 10^{+2}$ |
| Casca + longarina + fluido ($s = 2$) | $6,06 \cdot 10^{-6}$ | $1,66 \cdot 10^{-2}$ |

Fonte: Elaborada pelo autor.

A melhora inesperadamente grande na atenuação talvez possa ser explicada por uma limitação do modelo analítico: ele não prevê a transmissão de energia entre a longarina e a casca, possivelmente consequência de vibração estacionária na direção tangencial, que resultaria em atenuação na direção longitudinal devido à demanda de energia na outra direção. Grice e Pinnington (29) demonstram a existência desse efeito para uma placa plana infinita enrijecida por

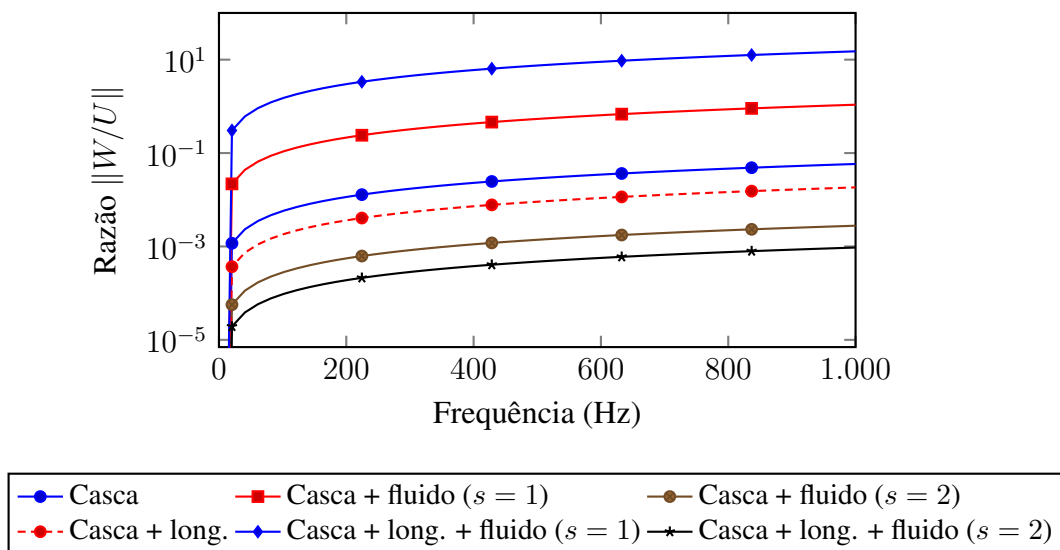
uma viga. Seu método, entretanto, não pode ser diretamente estendido para uma casca cilíndrica porque nesta há propagação em apenas uma direção, enquanto que no problema da placa infinita há duas. Esta é uma limitação de todas as teorias de casca cilíndricas, pois elas consideram que a onda é estacionária em direções transversais ao eixo, o que é evidenciado pela presença dos termos seno e cosseno nas Equações 3.13, 3.14 e 3.15 e é ilustrado pelos modos circunferenciais da Figura 11. A inclusão deste fluxo de energia acrescentaria pelo menos mais um número de onda imaginário à relação de dispersão do sistema, estando ele relacionado a uma vibração evanescente partindo da longarina e transversal a seu eixo. Isto, por sua vez, modificaria o modo circunferencial da casca e, portanto, sua inclusão dependeria da escolha apropriada da forma do modo, o qual dependeria do número de longarinas.

Outro importante resultado é a razão entre deslocamento radial W_0 e o longitudinal U_0 . Retornando à matriz $[M]$ da Equação 3.19 e reescrevendo o sistema $[M]\{U_0 \ W_0\}^T = 0$, temos que $M_{11}U_0 + M_{12}W_0 = 0$ e $M_{21}U_0 + M_{22}W_0 = 0$. Substituindo as raízes K em $[M]$ para obtermos seus elementos, a razão de amplitudes r é

$$r = \left\| \frac{W_0}{U_0} \right\| = \left\| \frac{-M_{11}}{M_{12}} \right\| = \left\| \frac{-M_{21}}{M_{22}} \right\|,$$

cujos resultados são mostrados na Figura 16. Como a proporção entre as curvas é aproximadamente constante, podemos usar regressão linear novamente e calcular o valor médio de r/r_{casca} , que é a razão entre r e a razão de amplitude do caso mais simples da casca r_{casca} , e cujos resultados estão listados na Tabela 3. A presença da longarina acentua as características dos casos sem ela: quando não há fluido, as ondas na casca são predominantemente longitudinais, sendo que a presença da longarina reduz quase 2/3 a razão de amplitude, o que mostra um favorecimento da direção longitudinal; para ondas $s = 1$, a razão aumenta 10 vezes, e cai 2/3 para ondas $s = 2$.

Figura 16 – Razão de amplitude entre deslocamento radial e longitudinal



Fonte: Elaborada pelo autor.

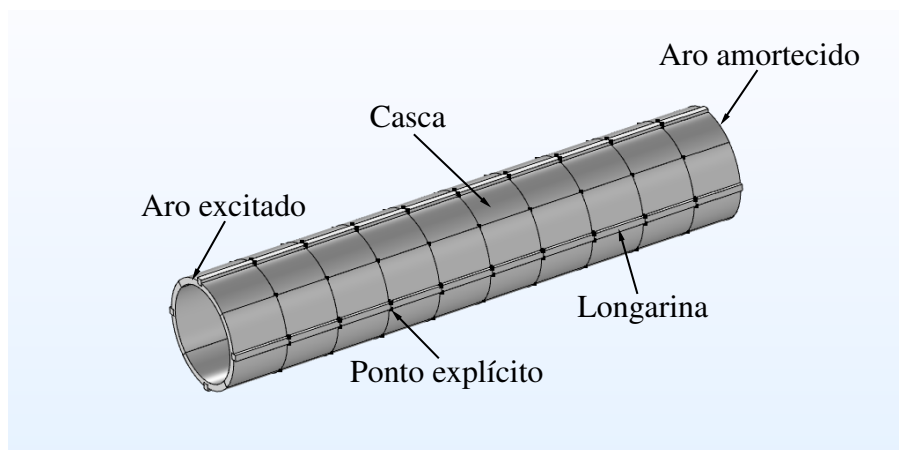
As observações feitas até agora somadas aos resultados da Figura 15 sugerem que para aumentar a eficácia da adição de longarinas, deve-se fazer medições na direção longitudinal na intenção de detectar ondas $s = 2$. Entretanto, os trabalhos de Fuller e Fahy (17), Pinnington e Briscoe (18) e Hunaidi *et al.* (24) combinados mostram que o sinal gerado pelo vazamento pode ser melhor medido no fluido e, caso o uso de hidrofones seja inviável, as ondas $s = 1$ são melhores detectadas no deslocamento radial para tubos de baixa rigidez, como o plástico. Portanto, para confirmar essa proposição, é preciso refazer o estudo de Fuller e Fahy (17) para uma casca enrijecida longitudinalmente, já incluindo a transmissão entre casca e a longarina, e avaliar a distribuição de energia entre essas duas partes mais o fluido, o que está fora do escopo deste trabalho.

4.3 Resultados das simulações numéricas

As simulações numéricas foram realizadas no domínio do tempo. O deslocamento prescrito para o aro excitado foi um seno com frequência variando linearmente de 50 a 1.000 Hz em 0,1 s, e com amplitude de 0,1 mm. O recíproco do passo no tempo foi de 12,8 kHz. Foram simuladas a casca sem longarinas e com $N = 2$ e 4 longarinas espaçadas uniformemente entre si. Não foi possível testar casos com mais que quatro longarinas devido ao alto custo computacional, pois mesmo com a malha muito refinada houve problemas de convergência na simulação.

As funções de transferência T_{AB} foram calculadas em relação a entrada ($x = 0$) e medindo-se o deslocamento longitudinal em pontos explícitos do modelo, que são mostrado na Figura 17, onde também estão destacados os aros excitado e amortecido. Houve pouquíssima diferença nos resultados se os dados fossem calculados num ponto numa longarina ou na casca na mesma posição em x , o que evidencia o fato de que a vibração é estacionária na direção tangencial. Os resultados de número de onda e razão de amplitude, então, foram calculados como sendo média aritmética dos resultados de todos os pontos, sem fazer distinção entre pontos de longarina ou de casca.

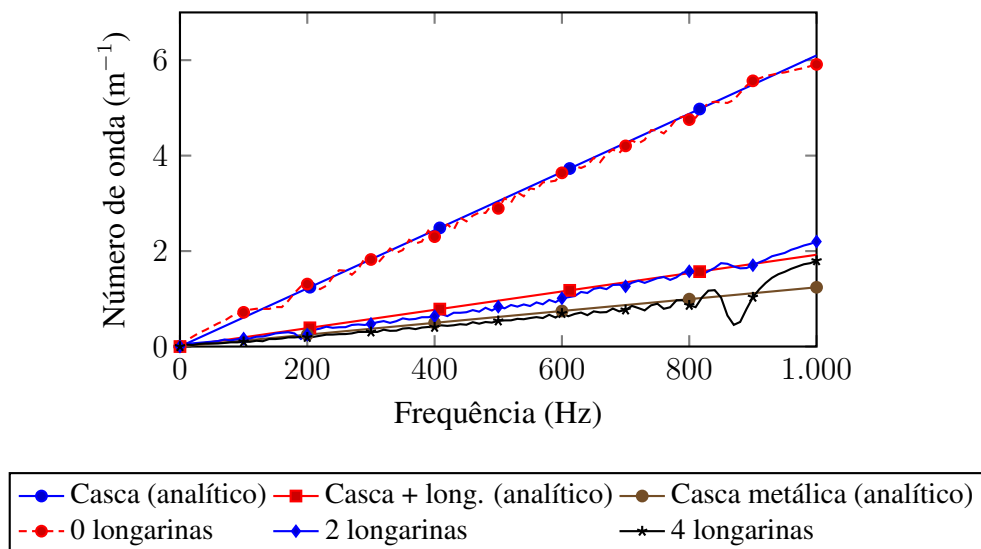
Figura 17 – Modelo 3D usado no COMSOL Multiphysics®



Fonte: Elaborada pelo autor.

O resultado do número de onda é mostrado na Figura 18. Observa-se que há bastante coerência entre os dados simulados e o resultado analítico no caso sem longarinas e para duas longarinas. Para quatro longarinas, o número de onda da simulação é menor que o predito pelo modelo, o que evidencia que a quantidade de longarinas deveria ter sido considerada matematicamente. Nota-se que este caso tendeu a um casco cilíndrico metálico do mesmo material que as longarinas, o que sugere que exista um número mínimo de longarinas para que uma casco de plástico enrijecida seja considerada como equivalente a uma casco metálica. Apesar de não ser possível quantificar a atenuação na simulação para corroborar esta conjectura, o fato da parte real do número de onda ter seguido a predição, sugere que a atenuação na casco enrijecida deve ser menor que na casco não-enrijecida.

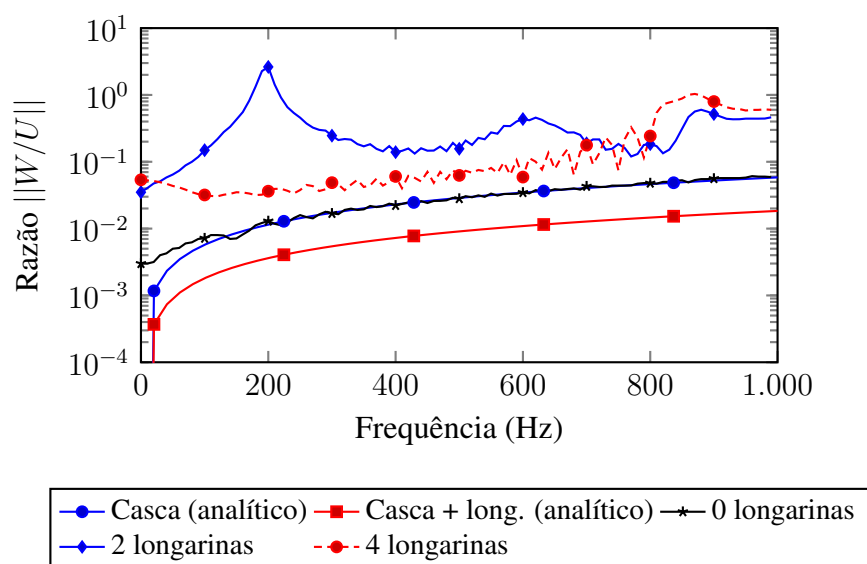
Figura 18 – Comparação entre o número de onda do modelo analítico e simulado por elementos finitos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para calcularmos a razão de amplitude entre deslocamento radial e longitudinal r , basta aplicar a transformada de Fourier aos deslocamentos, ou seja, $r = \|\mathcal{F}\{w(x, t)\} / \mathcal{F}\{u(x, t)\}\|$. Com isso, obtemos o gráfico da Figura 19. Novamente, o caso sem longarina se ajusta bem aos valores teóricos, enquanto que os demais, desviam. Para duas longarinas, há um aumento expressivo do deslocamento radial. Isso se explica pelo fato de que o modo circunferencial ali é $n = 2$, o qual, para cascas cilíndricas finitas, tem frequência natural menor que o modo $n = 0$ e, portanto, é o mais fácil de ser excitado (21). Para quatro longarinas, a razão se reduz um pouco, mas ainda é superior ao valor predito. Suspeita-se que quanto maior o número de longarinas, maior é n , o que torna a forma do modo circunferencial mais próxima de $n = 0$. É possível que a presença do solo em volta de um tubo com longarinas restrinja o deslocamento radial de tal forma que a razão r tenda ainda mais para a predição devido a participação reduzida de modos $n \neq 0$, os quais já nem são observados num tubo comum enterrado.

Figura 19 – Comparação entre a razão de amplitude do modelo analítico e a simulada por elementos finitos



Fonte: Elaborada pelo autor.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho propôs o uso de longarinas metálicas longitudinais para reduzir a atenuação de ruído de vazamento em tubos de plástico, para que se possa aumentar a distância máxima de detecção de vazamento usando técnicas vibroacústicas. O tubo com longarinas foi modelado como uma casca cilíndrica longitudinalmente enrijecida, e suas equações de movimento foram desenvolvidas usando Mecânica Lagrangiana. A relação de dispersão do sistema foi obtida usando-se ondas harmônicas, e foi simplificada considerando-se frequências abaixo da frequência de anel do tubo. Os resultados analíticos foram contrapostos com resultados de simulações numéricas usando um modelo de elementos finitos. A partir do estudo dos modelos analítico e numérico, pode-se resumir os resultados nas seguintes conclusões:

- As equações mostram uma redução bastante expressiva da atenuação, mas estes dados não são definitivos devido a limitação do modelo desenvolvido que não prevê transmissão de energia entre a casca e as longarinas, nem a presença de modos não-axissimétricos.
- O enrijecimento da casca é maior no modelo de elementos finitos do que no analítico, resultando em ondas de comprimento que tendem ao comprimento de ondas numa casca metálica com o aumento do número de longarinas.
- A concordância dos valores dos modelos analítico e numérico para a parte real do número de onda, mais a tendência da casca enrijecida de se comportar com uma casca metálica, sugerem que a parte imaginária do número de onda, que não pôde ser medida nas simulações do modelo de elementos finitos, é menor que num casca não-enrijecida, reduzindo a atenuação como desejado.

5.1 Trabalhos futuros

As conclusões feitas nesta pesquisa podem ser melhor entendidas aumentando-se apropriadamente a complexidade do modelo matemático usado e executando algumas investigações que foram apontadas ao longo do texto. Para isso, sugere-se o seguintes trabalhos:

- realização de testes experimentais e estudo com longarinas de diferentes geometrias;
- incluir o fluido nas simulações numéricas para que as curvas $s = 1$ e $s = 2$ analíticas também possam ser comparadas com resultados simulados;
- incluir a influência do número de longarinas no modelo e estudar a transmissão de energia entre elas e a casca, avaliando sua distribuição entre longarinas, fluido e casca;
- incluir efeitos do solo ao modelo para torná-lo mais realista.

REFERÊNCIAS

- 1 BRASIL. Ministério do Desenvolvimento Regional. Secretaria Nacional de Saneamento. Sistema Nacional de Informações sobre Saneamento. *Diagnóstico dos Serviços de Água e Esgotos*. Brasília, 2018. 226 p.
- 2 PUUST, R. *et al.* A review of methods for leakage management in pipe networks. *Urban Water Journal*, Londres, v. 7, p. 25–45, 2010.
- 3 BRENNAN, M. J. *et al.* On the role of vibro-acoustics in leak detection for plastic water distribution pipes. *Procedia Engineering*, Amsterdã, v. 199, p. 1350–1355, 2017.
- 4 FUCHS, H. V.; RIEHLE, R. Ten years of experience with leak detection by acoustic signal analysis. *Applied Acoustics*, Amsterdã, v. 33, p. 1–19, 1991.
- 5 GAO, Y. *et al.* On the selection of acoustic/vibration sensors for leak detection in plastic water pipes. *Journal of Sound and Vibration*, Amsterdã, v. 283, p. 927–941, 2005.
- 6 ALMEIDA, F. C. L. *et al.* On the signum function and its effect on acoustic correlation for leak location in buried plastic water pipes. *Procedia Engineering*, Amsterdã, v. 199, p. 1344–1349, 2017.
- 7 GAO, Y. *et al.* Improving the shape of the cross-correlation function for leak detection in a plastic water distribution pipe using acoustic signals. *Applied Acoustics*, Amsterdã, v. 127, p. 24–33, 2017.
- 8 COMPANHIA AMBIENTAL DO ESTADO DE SÃO PAULO. *Drenagem Urbana*. 2. ed. São Paulo: Companhia Ambiental do Estado de São Paulo, 1980.
- 9 GRAFF, K. F. *Wave Motion in Elastic Solids*. [S.l.]: Dover Publications, 1991.
- 10 WANG, F. *et al.* Time-dependent field performance of steel-reinforced high-density polyethylene pipes in soil. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Reston, v. 146, p. 04019122, 2020.
- 11 FAHY, F.; GARDONIO, P. *Sound and structural vibration: radiation, transmission and response*. 2. ed. [S.l.]: Elsevier, 2007.
- 12 KIM, Y.-H. *Sound propagation: An impedance based approach*. Cingapura: Wiley, 2010.
- 13 EWINS, D. J. *Modal Testing: Theory and practice*. Taunton: Research Studies, 1984.
- 14 JONES, D. I. G. *Handbook of Viscoelastic Vibration Damping*. [S.l.]: Wiley, 2001.
- 15 DIKMEN, M. *Theory of thin elastic shells*. Londres: Pitman, 1982.
- 16 LEISSA, A. W. *Vibration of shells*. Washington: NASA, 1973.
- 17 FULLER, C. R.; FAHY, F. J. Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical shells filled with fluid. *Journal of Sound and Vibration*, Amsterdã, v. 81, p. 501–518, 1982.

- 18 PINNINGTON, R. J.; BRISCOE, A. R. Externally applied sensor for axisymmetric waves in a fluid filled pipe. *Journal of Sound and Vibration*, Amsterdã, p. 503–516, 1994.
- 19 MUGGLETON, J. M.; BRENNAN, M. J.; PINNINGTON, R. J. Wavenumber prediction of waves in buried pipes for water leak detection. *Journal of Sound and Vibration*, Amsterdã, p. 939–954, 2002.
- 20 GAO, Y. *et al.* Simplified dispersion relationships for fluid-dominated axisymmetric wave motion in buried fluid-filled pipes. *Journal of Sound and Vibration*, Amsterdã, v. 375, p. 386–402, 2016.
- 21 MILLER, P. R. *Free vibrations of a stiffened cylindrical shell*. Londres: Ministry of Aviation, Aeronautical Research Council, 1960.
- 22 RINEHART, S. A.; WANG, J. T. S. Vibration of simply supported cylindrical shells with longitudinal stiffeners. *Journal of Sound and Vibration*, Amsterdã, v. 24, p. 151–163, 1972.
- 23 HIBBELER, R. C. *Resistência dos Materiais*. 5. ed. [S.l.]: Pearson, 2009.
- 24 HUNAIDI, O. *et al.* Detecting leaks in plastic pipes. *Journal AWWA*, Nova Iorque, v. 92, p. 82–94, 2000.
- 25 COMSOL AB. *COMSOL Multiphysics® v. 5.4*. Stockholm, Sweden.
- 26 COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, Nova Iorque, v. 11, n. 2, p. 215–234, 1967.
- 27 BLEVINS, R. D. *Formulas for natural frequency and mode shape*. Nova Iorque: Van Nostrand Reinhold Company, 1979.
- 28 JUNG, S. S. *et al.* Measurement of the resonance frequency, the loss factor, and the dynamic young's modulus in structural steel and polycarbonate by using an acoustic velocity sensor. *Journal of the Korean Physical Society*, Londres, v. 49, p. 1961–1966, 2006.
- 29 GRICE, R. M.; PINNINGTON, R. J. A method for the vibration analysis of built-up structures, part I: introduction and analytical analysis of plate-stiffened beam. *Journal of Sound and Vibration*, Amsterdã, v. 230, p. 825–849, 2000.