

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

BRUNO EDUARDO DA SILVA

CONTEÚDO FÍSICO DE TEORIAS DE CAMPO LIVRE VIA VARIÁVEIS DE BARDEEN.

Guaratinguetá

2019

Bruno Eduardo da Silva

CONTEÚDO FÍSICO DE TEORIAS DE CAMPO LIVRE VIA VARIÁVEIS DE BARDEEN.

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Bacharelado em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Bacharelado em Física .

Orientador: Prof^o Dr. Denis Dalmazi

Guaratinguetá

2019

S586c Silva, Bruno Eduardo da
Conteúdo físico de teorias de campo livre via variáveis de Bardeen /
Bruno Eduardo da Silva – Guaratinguetá, 2018.
61 f.: il.
Bibliografia: f. 60-61

Trabalho de Graduação – Bacharelado em Física – Universidade
Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018.
Orientador: Pro. Dr. Denis Dalmazi

1. Teoria de campos (Física). 2. Método de decomposição.
3. Partículas. I. Título

CDU 530.145

Luciana Máximo

Bibliotecária CRB-8/3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

BRUNO EDUARDO DA SILVA

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUANDO EM
BACHARELADO EM FÍSICA "

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
BACHARELADO EM FÍSICA

Profº Dr. MARCO AURÉLIO ALVARENGA MONTEIRO
Coordenador

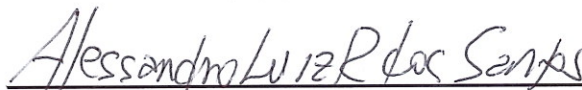
BANCA EXAMINADORA:



Profº Dr. Denis Dalmazi
Orientador/UNESP-FEG



Profº Dr. Álvaro de Souza Dutra
UNESP-FEG



Profº Dr. Alessandro Luiz Ribeiro do Santos
ITA-DCTA

Janeiro , 2019

Dedico esse trabalho aos meus pais, José Moacyr e Luciana, pela luta, apoio e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, pelo dedicação, preocupação, apoio e incentivo aos estudos. Aos meus irmãos, Talita e Tauan e os demais familiares por me incentivarem o tempo todo.

Aos meus irmãos da MORADIA ESTUDANTIL, foram pessoas cruciais que estavam o tempo todo comigo, nos momentos de baixa e nos momentos de vitória.

Aos irmãos de guerra, Gabriel Philot e Ana C. Marion, não tenho palavras para agradecer, simplesmente obrigado por tudo!

Ao Professor Denis Dalmazi, pela orientação, liberdade e paciência.

Aos demais professores do departamento de física pela construbuição significativa na minha formação.

Aos funcionários pela disposição e boa vontade.

Aos amigos pelas discussões e bate-papos, em especial, Pedro Fusco, Diego Sá, Renato, Richard, Thunder, Série B , Grilão, Chico Bento, Bolívia, Chiquinho, Gonô, Betinho, Allan, Rafael Robson, Felipe Leoncio, Natan, Silvio, Gustavo, Jhyrly Jherson, Tainá, Sapão, Ju, João V. Ribeiro, Gu, Aviãozinho, Ptz, Leo e dentre outros.

Ao time de basquete, handbol, futebol e o pessoal do atletismo pela diversão.

Ao Centro Acadêmico da Física pela aprendizagem e pela oportunidade.

À CNPq pelo apoio financeiro.

Este trabalho contou com o apoio da seguinte entidade:

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

“Busque o caminho, não um dedo que te aponte ele...”
(Emicida.)

RESUMO

No presente trabalho analisamos o conteúdo físico de teorias de campo livres através da técnica de decomposição em variáveis de helicidades, que consiste em obter os graus de liberdade propagantes e não propagantes da teoria utilizando às chamadas variáveis de Bardeen sem a necessidade da fixação de um calibre (gauge). Inicia-se com estudos em teoria de campos revisando conceitos fundamentais, e posteriormente, dirige-se ao estudo de teorias que descrevem partículas de spin-1 e spin-2 não massivas e massivas.

PALAVRAS-CHAVE: Decomposição em variáveis de Helicidade. Variáveis de Bardeen.

ABSTRACT

In the present work we analyze the physical content of free field theories through the technique of decomposition in helicities variables, which consists in obtaining the propagating and non-propagating degrees of freedom of the theory using the so-called Bardeen variables without the need of a gauge. It begins with studies in field theory reviewing fundamental concepts, and later, it is directed to the study of theories that describe non-massive and massive spin-1 and spin-2 particles.

KEYWORDS: Decomposition in helicity variables. Bardeen's variables.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS	12
2.1	Transição do discreto para o contínuo	12
2.2	Princípio Variacional	15
2.3	Teorema de Noether para Campos	17
3	CAMPOS DE SPIN-1	22
3.1	Equações de Maxwell	22
3.2	Transformação de Gauge	23
3.3	Simetria de Gauge	24
3.4	Teoria de Maxwell-Proca	25
3.5	Campo de Spin 1 via tensor simétrico	26
4	CAMPOS DE SPIN-2	28
4.1	A Teoria de Einstein-Hilbert	28
4.2	A Teoria de Fierz-Pauli	31
4.3	Partículas de spin 2 massivo a partir de tensor de rank-2	32
5	TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	33
5.1	Preliminares	33
5.2	Formulação Lagrangiana	33
5.3	Expansão em ondas planas do campo vetorial	34
5.4	Segunda Quantização	36
5.5	Decomposição de Fourier para o Operador de Campo de Proca	38
5.6	Hamiltoniana	40
5.7	Autoestados de helicidade	43
6	DECOMPOSIÇÃO EM VARIÁVEIS DE HELICIDADE	45
6.1	Decomposição em V.H. para a Teoria de Maxwell	45
6.2	Decomposição em V.H. para a Teoria de Proca	46
6.3	Decomposição em V.H. para o Modelo Tensorial	47
6.4	Decomposição em V.H. da Teoria de Einstein-Hilbert	50
6.5	Decomposição em V.H. da Teoria de Fierz-Pauli	54
6.6	Decomposição em V.H. do modelo $\mathcal{L}(a_1)$	56
7	CONCLUSÃO	59
	REFERÊNCIAS	60

1 INTRODUÇÃO

Iniciamos o estudo com os pilares da teoria de campos com a transição de um sistema discreto para um sistema contínuo com infinitos (incontáveis) graus de liberdade com a abordagem de campos. Um campo físico pode ser considerado como a atribuição de uma quantidade física em cada ponto do espaço e do tempo.

No capítulo 2 começamos estendendo o formalismo unindo duas bases sólidas, a mecânica clássica e a relatividade, para construir a teoria clássica de campos. O princípio variacional (princípio de mínima ação) também é um ferramental muito importante nesse estudo. Ao longo do trabalho utilizaremos frequentemente a ação para determinar as equações de movimento ou encontrar simetrias de teorias. Um dos teoremas fundamentais da mecânica clássica é o teorema de Noether que diz respeito a quantidades conservadas e simetrias do sistema físico em questão, por exemplo, se temos simetria por translação implica na conservação do momento linear.

No capítulo 3, no contexto dos campos clássicos estudamos os campos vetoriais massivos e não massivos. Para cada um destes deduzimos as equações do movimento (equação de Klein-Gordon, equações de Proca e a simetria de gauge) e estudamos essas teorias para podermos atacar os problemas dos campos tensoriais de forma mais suave. E ainda, buscamos entender as simetrias de gauge por trás de cada teoria.

No capítulo 4, estudamos a interação gravitacional que é mediada por grávitons, partículas elementares de spin-2, aparentemente sem massa ou de massa muito pequena (inferior a $10^{-22}eV$ em unidades de c^2 , onde c representa a velocidade da luz). Embora muito pequena, essa massa pode ser a chave para explicarmos a aceleração do universo, constatada experimentalmente em 1998 através de explosão de supernovas. Grávitons massivos poderiam dispensar a introdução da chamada energia escura ou diminuir sua proporção no universo.

Os novos modelos de gravitação massiva são baseados no modelo linearizado de Fierz-Pauli (FP) para partículas massivas de spin-2, (1939) (FIERZ; PAULI, 1939). Para entendermos tal modelo, iniciaremos com a relatividade geral de Einstein que estende a descrição de fenômenos físicos para sistemas não inerciais, em que a gravidade é encarada como uma propriedade geométrica do espaço-tempo.

No capítulo 5, fazemos uma breve introdução aos conceitos de teoria quântica de campos afim de entendermos de maneira rígida sobre as polarizações e os autoestados de helicidade.

O capítulo 6, destinamos para análise do conteúdo físico dos modelos propostos. O método é a decomposição em helicidades que consiste em determinar os graus de liberdades propagantes e os não propagantes. Para teorias de gauge(ou de calibre) temos que fixar uma condição de gauge para que possamos eliminar graus de liberdades espúrios do modelo. Neste método não precisamos de tal condição, ao invés disso identificamos os graus de liberdades invariantes de gauge utilizando as variáveis de Bardeen. Como exemplo deste caso faremos a decomposição do modelo de Maxwell. Em seguida faremos a decomposição do modelo de Maxwell- Proca , que descreve fótons massivos (modelo com campo vetorial), para que possamos comparar com o modelo tensorial que também

descreve fótons massivos, porém através de um tensor simétrico de *rank*-2.

Estaremos utilizando o sistema de unidade naturais onde $c = \hbar = 1$. Índices latinos denotam componentes espaciais e índices gregos denotam componentes temporais e espaciais e assinatura da métrica de Minkowski, $diag \eta_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$.

2 TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

As primeiras noções de campos surgem a partir das ideias de estudiosos antigos que procuraram explicar os efeitos produzidos pela magnetita ou pelo âmbar atritado. Muitos outros cientistas desenvolveram ideias de que alguns objetos na física estariam sendo circundados por uma nuvem ou gás invisível. Até mesmo Isaac Newton na construção da lei da Gravitação universal Newton explica como os corpos materiais interagem, mas não explica o mecanismo pelo qual esses corpos o fazem, permitindo apenas suposição de que as interações entre os corpos era do tipo ação a distância sem precisar de um meio para interações. Na mesma época alguns físicos, na tentativa de entender a gravidade, eletricidade e magnetismo, não acreditavam na descrição de um sistema físico por ação a distância até que Michael Faraday (1791-1867), em suas pesquisas, surgiu com o conceito de linhas de força no eletromagnetismo (conjunto de linhas imaginárias) e James Clerk Maxwell (1831-1879) formulou matematicamente o eletromagnetismo com o conceito de campos e noções de mecânica dos fluidos. A partir daí tem-se desenvolvido cada vez mais o conceito de campos na Física, sendo um dos artifícios fundamentais na descrição da física de partículas.

2.1 TRANSIÇÃO DO DISCRETO PARA O CONTÍNUO

A ideia central é partirmos de um sistema discreto, descrito na mecânica clássica por um conjunto de coordenadas generalizadas $q_i(t)$ e generalizarmos para um sistema contínuo descrito por campos $q(x, t)$ que possui um número infinito de graus de liberdade. Vamos fazer essa transição através do formalismo lagrangiano para uma corda unidimensional. Vamos começar com um caso mais simples e depois generalizamos para o caso quadridimensional. A corda consiste em um conjunto discreto de átomos que interage um com o outro, de maneira que um átomo vizinho perturbe o outro e assim a onda se propaga. Composta por átomos que no estado de equilíbrio estão uniformemente espaçados por uma distância a . Veja (FELSAGER, 2012) e (LEMOS, 2007).

A corda vibrante é um sistema simples no qual podemos entender essa transição do discreto para o contínuo. Suponhamos que n massas iguais estejam ligadas por fios de massa desprezível. A evolução dinâmica da corda é descrita pelas funções:

$$q_i = q_i(t) ; \quad i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

A energia cinética do i -ésimo átomo será:

$$K_i = \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 \quad (2)$$

A energia potencial associada ao i -ésimo e o $(i + 1)$ -ésimo átomo para esse sistema será do tipo quadrático:

$$U_i = \frac{1}{2} m v^2 (q_{i+1} - q_i)^2 \quad (3)$$

Onde v é a velocidade de propagação da corda. A lagrangiana será dada por:

$$L = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} m v^2 (q_{i+1} - q_i)^2 \right) \quad (4)$$

Utilizando a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Temos,

$$m \ddot{q}_i = m v^2 (q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}) \quad (6)$$

A solução geral será dada por:

$$q_i(t) = A \cos(kx_n - \omega t) \quad (7)$$

Que representa uma onda se propagando. Substituindo (7) em (6), temos a relação de dispersão:

$$\omega^2 = 2v^2(1 - \cos(ka)) \quad (8)$$

Note que para valores pequenos de k (comprimentos de onda longos) podemos expandir o cosseno em séries:

$$\omega \simeq \pm va.k \quad (9)$$

Esperamos tomar o limite contínuo $a \rightarrow 0$ e $m \rightarrow 0$ de maneira que a densidade linear permaneça finita. Ao invés de representarmos os deslocamentos da corda por uma função discreta $q_i(t)$ vamos representá-la por uma função contínua $q(x, t)$ que representa a posição do átomo em equilíbrio na posição x .

Vamos fazer uma suposição sobre v , a velocidade no limite de baixos comprimentos de onda é dado por:

$$\frac{\omega}{k} = va \quad (10)$$

Assumimos que ela se aproxima de uma constante c , a velocidade de uma onda propagando no contínuo:

$$va \rightarrow c \quad \text{quando} \quad a \rightarrow 0 \quad (11)$$

Com isso podemos analisar a lagrangiana, começamos pelo termo cinético:

$$K = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2(t) = \sum_{x_n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{m}{a} \dot{q}^2(x_n, t) a$$

$$= \sum_{x_n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{m}{a} \dot{q}^2(x_n, t) \Delta x_n \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \rho \dot{q}^2(x_n, t) dx \quad (12)$$

Para a energia potencial, comecemos calculando:

$$q_{i+1}(t) - q_i(t) = q(x_{i+1}, t) - q(x_i, t) \simeq a \frac{\partial q(x_n, t)}{\partial x} \quad (13)$$

Temos então:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m v^2 (q_{i+1}(t) - q_i(t))^2 \simeq \sum_{x_i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{m}{a} v^2 a^2 \left[\frac{\partial q(x_n, t)}{\partial x} \right]^2 a \\ &= \sum_{x_i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{m}{a} v^2 a^2 \left[\frac{\partial q(x_n, t)}{\partial x} \right]^2 \Delta x_n \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \rho c^2 \left[\frac{\partial q(x_n, t)}{\partial x} \right]^2 dx \end{aligned} \quad (14)$$

De tal forma que a lagrangiana fica:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} m v^2 (q_{i+1} - q_i)^2 \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\rho \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \rho c^2 \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Agora a lagrangiana, num sistema contínuo, é expressa por uma integral espacial cujo o integrando é identificado como uma densidade de lagrangiana \mathcal{L} .

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{L} \left(q, \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial x} \right) \quad (16)$$

Para o caso da corda vibrante temos a seguinte densidade de lagrangiana ¹

$$\mathcal{L} \left(q, \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left[\rho \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \rho c^2 \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (17)$$

Do modelo discreto temos a seguinte equação de movimento:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i(t) &= v^2 (q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}) = v^2 [(q_{i+1}(x_n, t) - q_i(x_n, t)) - (q_i(x_n, t) - q_{i-1}(x_n, t))] \\ &\simeq a \left[\frac{\partial q(x_n + \frac{a}{2}, t)}{\partial x} - \frac{\partial q(x_n - \frac{a}{2}, t)}{\partial x} \right] \simeq a^2 \frac{\partial^2 q(x_n, t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (18)$$

¹ É comum no âmbito da física denominarmos a densidade de lagrangiana simplesmente como lagrangiana, bem como neste trabalho.

Assim temos,

$$\ddot{q}_i(t) \simeq v^2 a^2 \frac{\partial^2 q(x_n, t)}{\partial x^2} \rightarrow c^2 \frac{\partial^2 q(x_n, t)}{\partial x^2} \quad (19)$$

ou ainda,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (20)$$

Chamada de equação de onda. Como anteriormente, no caso discreto, podemos procurar por uma solução de onda progressiva:

$$q(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (21)$$

Substituindo em (20), temos:

$$\omega^2 A \cos(kx - \omega t) = -c^2 k^2 A \cos(kx - \omega t) \quad (22)$$

o que implica na seguinte relação de dispersão:

$$\omega = \pm ck \quad (23)$$

2.2 PRINCÍPIO VARIACIONAL

Agora vamos fazer uma descrição mais profunda onde o campo $\phi(\vec{x}, t)$ está definido ao longo do espaço-tempo. O valor do campo em um determinado ponto, digamos x_0 , corresponde a $q(\vec{x}_0, t)$.

A lagrangiana mais geral possível fica,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, t) \quad (24)$$

Antes de definirmos a ação segue um pequeno adendo sobre funcional:

“Um funcional é uma função real cujo domínio é um espaço de funções. Mais explicitamente, um funcional associa um número real a cada função de uma certa classe de funções para as quais o funcional está definido.” (LEMOS, 2007).

Definimos a ação como um funcional do campo $\phi(\vec{x}, t)$ o qual associamos a cada conjunto de campos um único valor:

$$S[\phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\phi, \partial_\mu \phi) = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, t) \quad (25)$$

onde Ω é uma região quadridimensional definida entre os hiperplanos t_1 e t_2 .

Para encontrarmos as equações de movimento vamos extremizar a ação S , que é um funcional do campo $\phi(\vec{x}, t)$, de modo que a trajetória real da partícula entre os instantes t_1 e t_2 é aquela que minimiza a ação $\delta S = 0$. Buscamos encontrar $\phi(\vec{x}, t)$ que extremiza a ação e isso nos leva as equações de movimento para os campos.

Supondo que $\phi(\vec{x}, t)$ extremiza a ação, consideremos um campo

$$\bar{\phi}(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t) + \delta\phi(\vec{x}, t) \quad (26)$$

Sendo $\delta\phi(\vec{x}, t) = \epsilon\eta(\vec{x}, t)$ e $\eta(\vec{x}, t)$ satisfaz a condição de extremos fixos, isto é, $\eta(\vec{x}, t_1) = \eta(\vec{x}, t_2) = 0$, ou ainda, $\delta\phi(\vec{x}, t_1) = \delta\phi(\vec{x}, t_2) = 0$.

Pelo Princípio de Hamilton temos,

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \delta(\partial_{\mu}\phi) \right] \quad (27)$$

Devido a comutatividade da variação δ com a derivada. No segundo termo de (27) podemos escrever:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \delta(\partial_{\mu}\phi) = \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \delta\phi \right) - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \right) \delta\phi. \quad (28)$$

Assim temos,

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \right) \right] \delta\phi + \int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \delta\phi \right). \quad (29)$$

O segundo termo é um termo de derivada total que avaliado nos extremos com $\delta\phi(\vec{x}, t_1) = \delta\phi(\vec{x}, t_2) = 0$ se anulará, de modo que ficamos com:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \right) \right] \delta\phi. \quad (30)$$

Impondo $\delta S = 0$, temos a equação de Euler-Lagrange para campos escalares.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \right) = 0 \quad (31)$$

2.3 TEOREMA DE NOETHER PARA CAMPOS

Em (LE MOS, 2007) e (GREINER; REINHARDT, 2013) nos mostra que simetrias globais da lagrangiana nos levam a constantes de movimento, isto é, grandezas físicas conservadas. O teorema de Noether relaciona esses dois conceitos importantes na Física, dos pontos de vista conceitual e prático.

Por exemplo:

Homogeneidade do espaço \iff Conservação do momento linear

Simetria temporal \iff Conservação de energia

Isotropia espacial \iff Conservação do momento angular

Consideremos uma ação como o funcional dado em (25), fazendo uma transformação infinitesimal no espaço-tempo e nos campos, isto é:

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (32)$$

$$\phi(x) \rightarrow \tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (33)$$

Impondo que a variação da ação seja nula ² sob essas transformações de simetria ³:

$$\delta S = \int_{\tilde{\Omega}} d^4\tilde{x} \tilde{\mathcal{L}} - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L} = 0 \quad (34)$$

Sabendo que, $\delta\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}} - \mathcal{L}$, a equação acima se torna:

$$\delta S = \int_{\tilde{\Omega}} d^4\tilde{x} \mathcal{L} + \int_{\tilde{\Omega}} d^4\tilde{x} \delta\tilde{\mathcal{L}} - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L} = 0 \quad (35)$$

Calculando a variação da medida de integração:

$$d\tilde{x}^\alpha = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (36)$$

Usando a equação (32), ficamos com

$$d\tilde{x}^\alpha = [\delta_\mu^\alpha + \partial_\mu \delta x^\alpha] dx^\alpha \equiv M_\mu^\alpha dx^\mu \quad (37)$$

Podemos obter o jacobiano da transformação até a primeira ordem através de

$$d^4\tilde{x}^\alpha = (\det M) d^4x^\mu \quad (38)$$

Onde M é dado por

$$M_\mu^\alpha = \delta_\mu^\alpha + \partial_\mu \delta x^\alpha \quad (39)$$

² ou no máximo igual a uma integral de derivada total, mas consideremos o campo nulo $\phi(\vec{x}) = 0$ quando $\vec{x} \rightarrow \infty$. Pelo teorema do divergente a integral se torna zero.

³ Por simplicidade $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\tilde{\phi}(\tilde{x})\partial_\mu\tilde{\phi}(\tilde{x}), \tilde{x}_\mu)$

Usando:

$$\det M = e^{\text{Tr}(\ln M)} \quad (40)$$

Expandindo em primeira ordem obteremos o seguinte,

$$\det M = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu \quad (41)$$

Com o jacobiano da transformação em mãos teremos que

$$d^4 \tilde{x}^\alpha = (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) d^4 x^\alpha \quad (42)$$

Notemos que as regiões de integração $\tilde{\Omega}$ e Ω serão aproximadamente iguais. A equação (35) se tornará,

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4 x [\delta \mathcal{L} + \partial_\gamma \delta x^\gamma \mathcal{L}] \quad (43)$$

ou ainda⁴,

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4 x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\delta x^\beta \partial_\beta \phi + \tilde{\delta} \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} \delta \partial_\alpha \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_E x_\alpha} \delta x_\alpha + \partial_\gamma \delta x^\gamma \mathcal{L} \right] \quad (44)$$

Definimos uma transformação apenas nos campos (variação na forma funcional de $\phi(x)$),

$$\tilde{\delta} \phi(x) = \tilde{\phi}(x) - \phi(x) \quad (45)$$

Se pegarmos a equação (33) e expandirmos até primeira ordem $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$ para δx^μ pequenos, teremos:

$$\delta \phi = \tilde{\phi}(x^\mu + \delta x^\mu) - \phi(x) \quad (46)$$

$$\delta \phi = \delta x^\beta \partial_\beta \phi + \tilde{\delta} \phi(x) \quad (47)$$

De forma análoga podemos encontrar que

$$\delta(\partial_\alpha \phi) = \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\phi}(\tilde{x}) - \partial_\alpha \phi(x) = \delta x^\beta \partial_\beta \partial_\alpha \phi + \partial_\alpha \tilde{\delta} \phi \quad (48)$$

Substituindo (47) e (48) em (44) e rearranjando teremos após o uso das equações de Euler-Lagrange (31):

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4 x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \tilde{\delta} \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] \quad (49)$$

⁴ Note que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_E x_\alpha}$ se refere a dependência explícita da lagrangiana nas coordenadas.

Impondo que temos uma simetria: $\delta S = 0$ para uma região Ω arbitrária, conclui-se que para manter a ação invariante pelas transformações (32) e (33) o integrando tem que ser nulo

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \tilde{\delta} \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] = 0 \quad (50)$$

Sendo f^μ o termo entre colchetes, temos

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \partial_\mu f^\mu = 0 \quad (51)$$

Usando o teorema de Gauss e utilizando a condição de que os campos vão a zero quando as coordenadas tendem a infinito tem-se a quantidade conservada $\dot{G} = 0$ abaixo:

$$G \equiv \int_{vol} d^3x f_0 \quad (52)$$

Que é o resultado essencial do teorema de Noether.

1. Invariância sob translação

Seja uma translação infinitesimal global ($\partial_\alpha \epsilon^\mu = 0$):

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \quad (53)$$

Desde que a forma dos campos não mude, com $\delta \phi = 0$,

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x) \quad (54)$$

Após uma expansão implicará em

$$\tilde{\delta} \phi = \tilde{\phi}(x) - \phi(x) = -\epsilon^\nu \partial_\nu \phi \quad (55)$$

Após calcularmos a variação da ação impondo que seja nula sob essa transformação infinitesimal (53), concluiremos que:

$$f^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \epsilon_\nu \partial^\nu \phi + \mathcal{L} \epsilon^\mu \quad (56)$$

Na equação (49), substituindo esse f^μ ,

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \partial_\mu \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi + \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] \epsilon_\nu = 0 \quad (57)$$

Definindo o termo entre colchetes como,

$$\Theta^{\mu\nu} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \delta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] \quad (58)$$

Este é denominado tensor energia-momento. Para um parâmetro arbitrário ϵ_ν ,

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \quad (59)$$

Com mais alguns cálculos a constante de movimento,(52), resultará em:

$$G^\nu = \int_{vol} d^3x \Theta^{0\nu} \quad (60)$$

Para $\nu = 0$:

$$G^0 \equiv E = \int_{vol} d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} + \mathcal{L} \right) = \text{constante} \quad (61)$$

A energia se conserva. Para $\nu = i$:

$$G^i = \int_{vol} d^3x \Theta^{0i} \quad (62)$$

$$\vec{G} \equiv \vec{P} = \int_{vol} d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \vec{\nabla} \phi \right) = \text{constante} \quad (63)$$

O momento linear \vec{P} se conserva.

2. Transformação de Lorentz infinitesimal

Seja a transformação de Lorentz infinitesimal,

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta\omega^{\mu\nu} x_\nu \quad (64)$$

É possível demonstrar que $\delta\omega^{\mu\nu} = -\delta\omega^{\nu\mu}$, ou seja, os parâmetros da transformação são antissimétricos. A transformação nos campos, segue:

$$\tilde{\phi}_r(\tilde{x}) = \phi_r(x) + \frac{1}{2} \delta\omega^{\mu\nu} (I_{\mu\nu})_{rs} \phi_s(x) \quad (65)$$

onde $I_{\mu\nu}$ são 6 geradores infinitesimais⁵ da transformação.

Pelo teorema de Noether, concluiremos que a quantidade com quadri-divergência nula será,

$$f_\mu = \frac{1}{2} \delta\omega^{\nu\lambda} M_{\mu\nu\lambda} \quad (66)$$

Sendo,

$$M_{\mu\nu\lambda} = \Theta_{\mu\lambda} x_\nu - \Theta_{\mu\nu} x_\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} (I_{\nu\lambda})_{rs} \phi_s \quad (67)$$

⁵ Para uma matriz antissimétrica em D dimensões temos $\frac{D(D-1)}{2}$ componentes independentes.

obteremos a grandeza conservada. Com $\mu = 0$, como visto em (52), temos

$$M_{\nu\lambda} = \int_V d^3x M_{0\nu\lambda} \quad (68)$$

onde o $M_{\nu\lambda}$ é o tensor momento angular. Podemos dividi-lo em duas partes

$$M_{ij} = L_{ij} + S_{ij} \quad (69)$$

onde,

$$L_{ij} = \int_{vol} d^3x (x_i \Theta_{0j} - x_j \Theta_{0i}) \quad (70)$$

é o momento angular orbital e

$$S_{ij} = \int_{vol} d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^0 \phi_r)} (I_{ij})_{rs} \phi_s(x) \quad (71)$$

é o momento angular intrínseco, ou spin.

3 CAMPOS DE SPIN-1

No capítulo 6 de (GREINER; REINHARDT, 2013) é abordado a formulação covariante da teoria de Maxwell, teoria de Maxwell-Proca, transformação de gauge, quantidades conservadas, momento angular, spin, helicidade, entre outros aspectos físicos. Discutiremos os mais relevantes.

3.1 EQUAÇÕES DE MAXWELL

Em um sistema de unidades naturais ($c = 1 = \hbar$), temos as equações de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (\text{lei de Gauss}) \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \quad (\text{lei de Ampère – Maxwell}) \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{lei de Faraday}) \quad (4)$$

Podemos escrever o campo elétrico e o magnético em termos de potenciais. Devido a ausência de monopólos magnéticos podemos definir um potencial vetor;

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (5)$$

Vale a pena ressaltar que ele é apenas um ferramental matemático, não é um observável. Usando a equação (5) na lei de Faraday podemos definir um potencial escalar:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (6)$$

onde \vec{A} é o potencial vetor e ϕ é o potencial escalar. Definimos um quadri-potencial $A^\mu = (\phi, \vec{A})$.

Introduzimos o tensor (antissimétrico) eletromagnético $F^{\mu\nu}$ para uma formulação manifestamente covariante das quatro equações de Maxwell, ou seja,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (7)$$

Em termos matriciais,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

As equações de Maxwell na formulação covariante, são:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu \quad (9)$$

$$\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} = 0 \quad (10)$$

Note que se tomarmos uma quadri-divergência ∂_ν em (9) teremos a equação da continuidade numa forma covariante:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (11)$$

sendo $j^\mu = (\rho, \vec{j})$.

Se substituirmos (7) em (9), teremos:

$$\square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = -j^\nu \quad (12)$$

Podemos reescrevê-la:

$$\square \vec{A} - \vec{\nabla}(\phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\vec{j} \quad (13)$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\rho \quad (14)$$

Temos um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem acopladas. Como dito, o potencial vetor A_μ não é um observável como veremos a seguir.

3.2 TRANSFORMAÇÃO DE GAUGE

Temos interesse no comportamento dos campos elétrico e magnético e não dos potenciais, pois podemos realizar transformações no potencial tal que não alteremos os campos. Esse tipo de transformação nós chamamos de transformação de gauge.

Fazemos uma transformação local como segue,

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x) \quad (15)$$

Aqui $\Lambda(x)$ é uma função arbitrária. Essa transformação não altera os campos \vec{E} e \vec{B} , em outras palavras, a equação (7) é invariante sob (15). Através dessa invariância podemos escolher ou impor certas condições que chamamos de condições de gauge. Os mais populares são:

Gauge de Lorenz: $\partial_\mu A^\mu = 0$

Gauge de Coulomb: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

Gauge temporal: $A^0 = 0$

Gauge axial: $A^3 = 0$

Vamos enfatizar o gauge de Lorenz, pois é menos trabalhoso e é o único que se apresenta na forma covariante. Utilizando $\partial_\mu A^\mu = 0$ retiramos um grau de liberdade.

Voltando em (12) e usando esse gauge, se não tivermos corrente ($j^\mu = 0$), ficamos com:

$$\square A^\mu = 0 \quad (16)$$

Vemos que A^μ satisfaz a equação de onda. Voltando em (15) vemos que

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (17)$$

se,

$$\square \Lambda = 0 \quad (18)$$

Para funções que satisfazem a equação da onda, chamamos de função harmônica. Com Λ satisfazendo a equação de onda (75), vemos que

$$\square A'^\mu = \square A^\mu = 0 \quad (19)$$

Portanto temos uma simetria de gauge residual podemos retirar mais um grau de liberdade. Ao final das quatro componentes de A^μ temos apenas dois graus de liberdade o que condiz com o fóton ter apenas dois graus de liberdade independentes, possuindo helicidades¹ ± 1 .

3.3 SIMETRIA DE GAUGE

Para entendermos melhor a simetria de gauge, consideremos a lagrangiana de Maxwell com fonte:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A^\mu j_\mu \quad (20)$$

Escrevemos a lagrangiana na forma, $A^\mu G_{\mu\nu} A^\nu$, usando (7), teremos o operador

$$G_{\mu\nu} = \square \Theta_{\mu\nu} \equiv \square \eta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \quad (21)$$

Para analisar o propagador da teoria temos que utilizar a inversa de $G_{\mu\nu}$, mas devido ao fato de que o coeficiente de $\omega_{\mu\nu}$ (definido como $\frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}$, onde $\square \equiv \partial^\alpha \partial_\alpha$) é nulo, ou seja, não existe a inversa de $G_{\mu\nu}$ não podemos usar essa relação.

Se fizermos uma transformação de gauge (15) nessa teoria, para que o termo de fonte não se altere perante essa transformação, isto é, com

$$S_{fonte} = \int d^4x A_\mu j^\mu \quad (22)$$

Após a transformação, e integração por partes

$$\delta S_{fonte} = - \int d^4x \Lambda \partial_\mu j^\mu \quad (23)$$

¹ Helicidade é a projeção do spin na direção do momento linear.

Se $\delta S_{fonte} = 0$ chegaremos a equação da continuidade, havendo a conservação da carga elétrica:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (24)$$

Com isso, mostra-se a invariância de \mathcal{L}_M sob transformação de gauge, e como $\Lambda(x)$ é diferente em cada ponto do espaço-tempo, define-se uma simetria local ou simetria de gauge. Havendo simetria local, temos na nossa teoria graus de liberdade espúrios. Vamos adicionar o termo de fixação de gauge de Lorenz, o qual depende de um parâmetro arbitrário λ , tal que:

$$\mathcal{L}_{gauge} = \frac{\lambda}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2 \quad (25)$$

Temos então,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2 + A^\mu j_\mu = A_\nu G^{\mu\nu} A_\mu + A^\mu j_\mu \quad (26)$$

O operador ficará como

$$G_{\mu\nu} = \square \theta_{\mu\nu} - \lambda \square \omega_{\mu\nu} \quad (27)$$

Agora pode ser invertido e ao final a dependência de λ , desaparece. Podemos então prosseguir com a determinação do espectro da teoria de Maxwell, que descreve partícula de spin-1 sem massa.

3.4 TEORIA DE MAXWELL-PROCA

Vamos analisar também a teoria de Maxwell- Proca, que é a teoria de Maxwell acrescentando um termo quadrático do campo A^μ acompanhado de massa. Essa teoria descreve partículas massivas de spin 1.

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + A^\mu j_\mu \quad (28)$$

As equações de Euler-Lagrange nos levam a,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - m^2 A^\nu = j^\nu, \quad (29)$$

podendo ser reescritas em termos dos campos A^μ

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial \cdot A) - m^2 A^\nu = j^\nu, \quad (30)$$

Esta é chamada de equação de Proca.

Tomando a quadri-divergência e, rearranjando os termos temos

$$\partial_\nu A^\nu = -\frac{1}{m^2} \partial_\nu j^\nu \quad (31)$$

Assumindo que $m \neq 0$. Na ausência de fontes,

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \quad (32)$$

O campo A_μ satisfaz automaticamente a condição de transversalidade, mas agora isso não é uma escolha e sim uma imposição da teoria. Substituindo esse resultado em (30) vemos que essa teoria satisfaz a equação de Klein-Gordon na ausência de fontes, que é a equação de movimento relativística para partículas massivas:

$$(\square - m^2)A^\mu = 0 \quad (33)$$

Um ponto importante é que o termo de massa quebra a simetria de gauge. E também, quando escrevemos a lagrangiana de Proca da forma $\mathcal{L} = A_\mu G_{m \neq 0}^{\mu\nu} A_\nu$ o operador $G_{m \neq 0}^{\mu\nu}$, poderá ser invertido sem a necessidade de fixar um gauge, pois a teoria não possui simetria.

3.5 CAMPO DE SPIN 1 VIA TENSOR SIMÉTRICO

No capítulo 4 de (SANTOS, 2012) pode ser vista a descrição de partículas de spin 1 via tensor de rank-2. A partir da teoria de Maxwell-Proca pode-se fazer um mapeamento dual via um tensor simétrico. Escrevendo uma ação mestra, em 4 dimensões², é uma ação mais geral que nos permite estabelecer equivalência entre modelos, com um campo auxiliar $W_{\mu\nu}$ simétrico para o caso massivo,

$$S_{Mestra} = \int d^4x \left(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} + \frac{1}{3} W + 2W^{\mu\nu} \partial_{(\mu} A_{\nu)} - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + j_\mu A^\mu + W_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right) \quad (34)$$

Completando o quadrado no campo $W_{\mu\nu}$, isto é, desacoplando os campos obtemos o modelo de Maxwell-Proca e se completarmos o quadrado no campo A_μ obtemos o modelo dual S_W . Para $j_\mu = 0$ temos³:

$$S_W = \int d^Dx \left[(\partial_\mu W^{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2} \left(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{W^2}{3} \right) \right] \quad (35)$$

As equações de movimento nos fornecem,

$$\partial_\nu \partial^\alpha W_{\mu\alpha} + \partial_\mu \partial^\alpha W_{\nu\alpha} + m^2 \left(\frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} W - W_{\mu\nu} \right) = 0 \quad (36)$$

Se aplicarmos $\eta_{\mu\nu}$, temos:

$$\partial^\mu \partial^\nu W_{\mu\nu} = -\frac{m^2}{2} \frac{W}{3} \quad (37)$$

² É possível generalizá-la para D dimensões, (SANTOS, 2012) e (DALMAZI; SANTOS, 2011).

³ Vale salientar que para $m = 0$ para o modelo tensorial não temos dinâmica, ou seja, para massa nula não temos conteúdo físico para o modelo.

Atuando ∂^μ em (36) e usando (37) obteremos

$$\square(\partial^\alpha W_{\nu\alpha}) - \partial_\nu(\partial^\alpha \partial^\beta W_{\beta\alpha}) - m^2(\partial^\alpha W_{\nu\alpha}) = 0, \quad (38)$$

que é equivalente à equação de Proca (30). Aplicando ∂^ν em (38) obtemos

$$\partial^\mu \partial^\nu W_{\mu\nu} = 0 \quad (39)$$

Assim (38) se torna,

$$(\square - m^2)\partial^\nu W_{\mu\nu} = 0 \quad (40)$$

Vamos decompor o tensor de rank-2 em uma parte transversa e outra longitudinal,

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu f_\nu + \partial_\nu f_\mu + W_{\mu\nu}^T \quad (41)$$

Como a derivada em $\partial^\mu W_{\mu\nu}^T = 0$, substituindo (39) em (37) conclui-se facilmente que $W = 0$. Podemos concluir que o traço de $W_{\mu\nu}$ é apenas um campo auxiliar, também substituindo esse resultado em (36) tiramos que $W_{\mu\nu}^T = 0$, ou seja, o campo $W_{\mu\nu}$ é totalmente longitudinal.

A equação de movimento, após essas considerações tornou-se:

$$\partial_\nu \partial^\alpha W_{\mu\alpha} + \partial_\mu \partial^\alpha W_{\nu\alpha} - m^2 W_{\mu\nu} = 0 \quad (42)$$

Substituindo a relação (41) em (42) mostra-se que $W_{\mu\nu}^T = 0$ e, por outro lado, sabendo que os campos são nulos no infinito e alguns cálculos extras, obtemos⁴:

$$(\square - m^2)f_\mu = 0, \quad (43)$$

e que $\partial^\mu f_\mu = 0$, pois $W = \eta^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 0$. Conclui-se que o campo $W_{\mu\nu}$ descreve partículas massivas de spin 1.

⁴ Vide (SANTOS, 2012) e (MENDONÇA,) e para um estudo mais aprofundado, a partir de primeiros princípios, sobre as condições extra que os campos tensoriais devem satisfazer (chamadas as condições de Fierz-Pauli) segue a referência (KOENIGSTEIN; GIACOSA; RISCHKE, 2016)

4 CAMPOS DE SPIN-2

4.1 A TEORIA DE EINSTEIN-HILBERT

Em 1915, Einstein construiu as equações que governam o campo gravitacional (relacionando a curvatura do espaço-tempo com a matéria e radiação) e, posteriormente, Hilbert desenvolveu, por métodos variacionais, uma ação para teoria de Einstein, ficando conhecida como a ação de Einstein-Hilbert. Na ausência de fontes é dada por:

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (1)$$

onde, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço-tempo, g o determinante do tensor métrico, $\kappa = \sqrt{32\pi G}$, G é a constante gravitacional e R é o escalar de Curvatura.

Expandindo a métrica no limite de campo gravitacional fraco (SANTOS, 2015), isto é:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2)$$

Em que $h_{\mu\nu}$ é a flutuação da métrica. Note que a inversa, $g^{\mu\nu}$ pode ser obtida através de $g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = \delta_{\alpha}^{\mu}$, dada por:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu}_{\alpha}h^{\alpha\nu} - h^{\mu\alpha}h_{\alpha\beta}h^{\beta\nu} + \mathcal{O}(h^4) \quad (3)$$

Para o determinante utilizaremos:

$$g = \det g_{\mu\nu} = e^{Tr[\ln(g_{\mu\nu})]} \quad (4)$$

Vejamos que,

$$\ln(g_{\mu\nu}) = \ln(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}h_{\mu\alpha}h^{\alpha\nu} + \frac{1}{3}h_{\mu\alpha}h^{\alpha\beta}h_{\beta\nu} - \mathcal{O}(h^4) \quad (5)$$

ou ainda,

$$Tr[\ln(g_{\mu\nu})] = h - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} + \frac{1}{3}h_{\mu\alpha}h^{\alpha}_{\beta}h^{\beta\mu} - \mathcal{O}(h^4) \quad (6)$$

Portanto,

$$-g = 1 + h - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h_{\mu\alpha}h^{\alpha}_{\beta}h^{\beta\mu} - \frac{1}{2}hh_{\mu\nu}h^{\mu\nu} + \frac{1}{6}h^3 + \mathcal{O}(h^4) \quad (7)$$

Assim temos,

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} + \frac{1}{8}h^2 + \mathcal{O}(h^3) \quad (8)$$

Com isso podemos reescrever o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, em termos da flutuação

da métrica que até em segunda ordem (SANTOS, 2015), será:

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} \left(-\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\lambda h^\lambda_\nu + \partial_\nu \partial_\lambda h^\lambda_\mu - \partial_\mu \partial_\nu h + \square \eta_{\mu\nu} h - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} \right) + \\
& + \frac{1}{4} \partial^\lambda h (\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\lambda\mu}) - \frac{1}{4} \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h - \frac{1}{2} \partial^\sigma h^\lambda_\sigma (\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\lambda\mu}) + \\
& + \frac{1}{2} \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\sigma h^\lambda_\sigma - \frac{1}{2} \partial_\lambda h_{\mu\sigma} \partial^\sigma h^\lambda_\nu + \frac{1}{2} \partial_\lambda h_{\mu\sigma} \partial^\lambda h^\sigma_\nu + \frac{1}{4} \partial_\mu h^{\lambda\sigma} \partial_\nu h_{\lambda\sigma} + \\
& + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \square h - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} (\partial_\mu \partial_\beta h_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial_\beta h_{\alpha\mu}) + \\
& + \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{4} \partial^\lambda h^{\alpha\beta} \partial_\beta h_{\lambda\alpha} - \frac{3}{8} \partial^\lambda h^{\alpha\beta} \partial_\lambda h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_\lambda h^{\lambda\sigma} \partial_\sigma h + \frac{1}{8} \partial^\lambda h \partial_\lambda h + \frac{1}{2} \partial_\lambda h^{\beta\lambda} \partial^\sigma h_{\beta\sigma} + \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \square h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta h + h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial^\lambda h_{\lambda\beta} \right) + \mathcal{O}(h^3) \tag{9}
\end{aligned}$$

A lagrangiana de Einstein- Hilbert, em ordem quadrática de h , é dada por:

$$(\sqrt{-g}R)_{hh} = -\frac{1}{2} h^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^{(1)}(h) \tag{10}$$

onde,

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu}^{(1)}(h) &= R_{\mu\nu}^{(1)}(h) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^{(1)}(h) = \\
&= \frac{1}{2} \left(-\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial^\lambda h_{\lambda\nu} + \partial_\nu \partial^\lambda h_{\lambda\mu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \square \eta_{\mu\nu} h - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} \right) \tag{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu}^{(1)}(h) &= R_{\mu\nu}^{(1)}(h) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^{(1)}(h) = \\
&= \frac{1}{2} \left(-\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial^\lambda h_{\lambda\nu} + \partial_\nu \partial^\lambda h_{\lambda\mu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \square \eta_{\mu\nu} h - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} \right) \tag{12}
\end{aligned}$$

Com isso temos que a ação de Einstein-Hilbert (1) linearizada (Note que a métrica é plana, isto é, $\eta_{\mu\nu}$ que é responsável por abaixar e/ou subir os índices de $h_{\mu\nu}$). Redefinindo $h_{\mu\nu} \rightarrow kh_{\mu\nu}$ temos:

$$\begin{aligned}
S_{EHL}[h] &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x (\sqrt{-g}R)_{hh} \\
&= \int d^4x \left(-\frac{1}{4} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial^\mu h^{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\nu h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu h^{\mu\alpha} \partial^\nu h_{\alpha\nu} \right) \tag{13}
\end{aligned}$$

Realizando a variação da ação e desprezando termos de derivadas totais, teremos:

$$\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h - \partial^\alpha \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \partial^\alpha \partial_\nu h_{\alpha\mu} + \eta_{\mu\nu} (\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} - \square h) = 0 \quad (14)$$

Por outro lado, a ação (13) é invariante sob a transformação de gauge:

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \quad (15)$$

Devido a arbitrariedade de ξ_μ , com $\mu = 0, 1, 2, 3$, significa que existem 4 graus de liberdade espúrios no modelo, então podemos fixar 4 condições de gauge, escolheremos o gauge de "de Donder"(ou gauge Harmônico):

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu h = 0 \quad (16)$$

Esse gauge pode ser fixado escolhendo 4 parâmetros ξ_μ que satisfazem,

$$\square \xi_\mu = -\partial^\nu h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu h \quad (17)$$

nos permitindo eliminar 4 graus de liberdade redundantes da teoria.

Substituindo (16) em (14), teremos:

$$\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square h = 0 \quad (18)$$

Aplicando $\eta^{\mu\nu}$ na equação acima (18), teremos:

$$\square h = 0 \quad (19)$$

Com este resultado em (18), obteremos:

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (20)$$

Mas note que a condição de gauge (16) não fixa $h_{\mu\nu}$ completamente. Podemos fazer uma transformação de gauge residual (15) com o parâmetro ψ_μ satisfazendo a $\square \psi_\mu = 0$, que deixa (16) e (20) invariantes, permitindo eliminar mais 4 graus de liberdade.

Uma vez que em D dimensões um tensor simétrico tem $D(D+1)/2$ graus de liberdade, então em $D = 3 + 1$, teremos para o tensor simétrico $h_{\mu\nu}$ 10 graus de liberdade. Com a fixação do gauge (16) eliminamos 4 graus de liberdade e a fixação do gauge residual mais 4 graus de liberdade espúrios, resultando em apenas 2 graus de liberdade, com conteúdo físico que corresponde às helicidades ± 2 do gráviton.

4.2 A TEORIA DE FIERZ-PAULI

A teoria de Fierz-Pauli, (FIERZ; PAULI, 1939), descreve o gráviton massivo com a ação dada pela ação de Einstein-Hilbert mais um termo de massa que quebra a invariância de gauge da teoria.

$$S_{FP} = S_{EH} + \int d^4x \left[-\frac{m^2}{4} (h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2) \right] \quad (21)$$

A teoria linearizada fica:

$$S_{FP} = \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa^2} \left(-\frac{1}{4} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial^\mu h^{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\nu h^{\mu\nu} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \partial_\mu h^{\mu\alpha} \partial^\nu h_{\alpha\nu} \right) - \frac{m^2}{4} (h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2) \right] \quad (22)$$

A variação da ação resultará:

$$\frac{\delta S_{FP}}{\delta h^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \left[\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h - \partial^\alpha \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \partial^\alpha \partial_\nu h_{\alpha\mu} + \right. \\ \left. + \eta_{\mu\nu} (\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} - \square h) \right] + \frac{m^2}{2} (h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h) = 0 \quad (23)$$

Atuando com ∂^μ em (23), teremos:

$$\frac{m^2}{2} (\partial^\mu h_{\mu\nu} - \partial_\nu h) = 0 \Rightarrow \partial^\mu h_{\mu\nu} = \partial_\nu h \quad (24)$$

Por outro lado, atuando com $\eta^{\mu\nu}$ em (23) e usando (24), teremos:

$$h = 0 \quad (25)$$

Substituindo (25) em (24), temos:

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0 \quad (26)$$

Com essas três condições (conhecidas como condições de Fierz-Pauli), (24), (25) e (26) em (23) obtemos a equação de Klein-Gordon:

$$(\square - m^2)h_{\mu\nu} = 0 \quad (27)$$

A condição de transversalidade (26) nos permite eliminar 4 graus de liberdade em $D = 3 + 1$, a condição (25) nos permite eliminar 1 grau de liberdade. Sendo que para um tensor simétrico em 4 dimensões temos 10 graus de liberdade independentes e com essas condições teremos apenas 5 graus de liberdade independentes o que está de acordo com a regra de que para teorias massivas possui $2s + 1$ graus de liberdade em que s é o spin. Portanto, para o caso de spin 2, isto é, $s = 2$ temos 5 graus de liberdade independentes.

4.3 PARTÍCULAS DE SPIN 2 MASSIVO A PARTIR DE TENSOR DE RANK-2

Na teoria de Fierz-Pauli, tratada na seção anterior, notamos que é construída a partir de um tensor simétrico $h_{\mu\nu}$. Por outro lado, (DALMAZI, 2013) trata a descrição de partículas massivas de spin 2 para o caso mais geral em que o tensor que descreve tais partículas não possui simetria. Além do mais, possui como caso particular a teoria de Fierz-Pauli ajustando um parâmetro.

Existem duas famílias de modelos propostos em (DALMAZI, 2013), $\mathcal{L}(a_1)$ e o $\mathcal{L}_{nFP}(c)$, que é um caso particular de $\mathcal{L}(a_1)$ quando $a_1 = -1/12$ e $c = -1$. O modelo $\mathcal{L}(a_1)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a_1) = & -\frac{1}{2}\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\mu h^{\alpha\beta} + \left(a_1 + \frac{1}{4}\right)\partial^\mu e[\partial_\mu e - 2\partial^\alpha h_{\alpha\mu}] + [\partial^\alpha h_{\alpha\beta}]^2 + \\ & + \left(a_1 - \frac{1}{4}\right)[\partial^\alpha e_{\alpha\beta}]^2 - \frac{m^2}{2}(e_{\mu\nu}e^{\nu\mu} - e^2) \end{aligned} \quad (28)$$

As equações de movimento vão nos levar às condições de Fierz-Pauli (uma análise mais precisa das equações de movimento pode ser vista em (FORTES, 2018)), isto é:

$$\partial^\mu e_{\mu\nu} = 0 \qquad e = 0 \qquad e_{[\mu\nu]} = 0 \quad (29)$$

e a equação de Klein-Gordon,

$$(\square - m^2)e_{(\mu\nu)} = 0 \quad (30)$$

O que resulta em 5 graus de liberdade independentes correspondentes à regra de $2s + 1$ graus de liberdade. Quando fazemos $a_1 = -1/4$ retornamos ao modelo de Fierz-Pauli.

5 TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

5.1 PRELIMINARES

Na mecânica clássica um dado estado de um sistema pode ser definido por um conjunto de coordenadas canônicas $\{q_i, p_i\}$ (em que i é a i -ésima coordenada) e a hamiltoniana determina a dinâmica deste sistema. Em um sentido restrito, para transição da mecânica clássica para a quântica (chamada de primeira quantização) basta promovermos essas coordenadas para operadores (transformando parênteses de Poisson para comutadores), veja (GREINER; REINHARDT, 2013) e (FELSAGER, 2012), tal que ¹

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad , \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$$

Agora os estados físicos, diferentemente dos estados na mecânica clássica, são determinados por vetores de estado no espaço de Hilbert.

Em certo momento a mecânica quântica não era mais capaz de explicar certos fenômenos quânticos havendo uma necessidade de uma teoria que lidasse com a variação do número de partículas de um dado sistema e uma teoria que conciliasse a mecânica quântica e a relatividade especial. Com isso surge a teoria quântica de campos com o objetivo de explicar esses fenômenos, em que a ideia fundamental é quantizar os campos (conhecida também como segunda quantização).

Para determinar o estado deste sistema em um dado momento precisamos dizer o valor do campo em todos os pontos e seu momento canonicamente conjugado $(\psi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}, t))$ transformando-os em operadores e impomos que:

$$[\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}(\vec{x}', t)] = [\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{x}', t)] = 0 \quad [\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}(\vec{x}', t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}', t)$$

Ilustraremos como exemplo a *quantização canônica do campo de Maxwell-Proca* a qual temos um grande interesse para compreendermos as helicidades de um campo vetorial massivo.

5.2 FORMULAÇÃO LAGRANGIANA

A teoria de Proca é descrita por um campo vetorial massivo, dada pela seguinte densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu + A_\mu j^\mu \quad (1)$$

¹ Lembrando que estamos em sistema de unidades naturais, então $\hbar=1$.

Já vimos que as equações de Euler-Lagrange são:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - m^2 A^\nu = -j^\nu \quad (2)$$

Sabendo que $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, teremos a chamada equação de Proca:

$$\square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) - m^2 A^\nu = -j^\nu \quad (3)$$

Tomando a quadri-divergência desta equação com respeito a ν , obtém-se:

$$m^2 \partial_\nu A^\nu = -\partial_\nu j^\nu \quad (4)$$

Uma vez que $m \neq 0$ e que a densidade de corrente é conservada ($\partial_\mu j^\mu = 0$) temos a **condição de transversalidade** para a teoria de Proca:

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \quad (5)$$

Com isso, voltando na (3), teremos:

$$(\square - m^2)A^\nu = -j^\nu \quad (6)$$

Assim quatro componentes do campo vetorial de spin 1 satisfazem automaticamente a equação de Klein-Gordon e (5). Notemos que sem o termo de massa em (1) temos a teoria de Maxwell que possui simetria de calibre, (ou simetria local) descrevendo fótons sem massa. Acrescentando o termo massivo, a simetria é quebrada, ou seja, *a teoria de Proca não é invariante sob transformações de calibre*.

5.3 EXPANSÃO EM ONDAS PLANAS DO CAMPO VETORIAL

Podemos decompor o campo vetorial A^μ em ondas planas, onde :

$$A_\mu(\vec{k}, \lambda; x) = N_k e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \quad (7)$$

Em que, $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ é a relação de dispersão, N_k é uma constante de normalização, $\epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda)$ representam o conjunto em quatro dimensões de vetores de Lorentz, o *vetor de polarização* e λ denota as componentes do tipo tempo ($\lambda = 0$) e do tipo espaço ($\lambda = 1, 2, 3$). Como estamos trabalhando com um vetor de Lorentz esperamos que sejam linearmente independentes e que sejam três componentes do tipo espaço e uma componente do tipo tempo. Podemos definir o vetor de polarização na direção do momento nos levando a partículas com estados de helicidade bem definida.

Os vetores de polarização satisfazem as seguintes relações de ortonormalidade:

$$\epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda') = g_{\lambda\lambda'} \quad (8)$$

sendo $g_{00} = -1$ e $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ e os remanescentes são nulos.

Para construirmos o conjunto de vetores de polarização fixamos um referencial na onda plana que se propaga com momento \mathbf{k} . Podemos fixar um referencial com dois vetores de polarização transversos à direção do momento:

$$\epsilon_{\mu}(\vec{k}, 1) = (0, \vec{\epsilon}(\vec{k}, 1))$$

$$\epsilon_{\mu}(\vec{k}, 2) = (0, \vec{\epsilon}(\vec{k}, 2))$$

Impondo que

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1) \cdot \vec{k} = 0 = \vec{\epsilon}(\vec{k}, 2) \cdot \vec{k},$$

e,

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, i) \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, j) = \delta_{ij} \quad ; \quad i, j = 1, 2$$

e sendo $\lambda = 3$ a componente longitudinal ao momento \vec{k} , usando (5) determinamos $\epsilon_{\mu}(\vec{k}, 3)$ tal que:

$$k^{\mu} \epsilon_{\mu}(\vec{k}, 3) = 0 \quad (9)$$

Tomando $\epsilon_{\mu}(\vec{k}, 3)$ e a equação de normalização (8) para $\lambda = \lambda' = 3$ podemos encontrar as componentes do vetor de polarização longitudinal, que será:

$$\epsilon_{\mu}(\vec{k}, 3) = \left(\frac{k}{m}, \frac{\vec{k}}{k} \frac{k_0}{m} \right) ; \quad k = \sqrt{\vec{k} \cdot \vec{k}} \quad (10)$$

Essas componentes tipo espaço formam uma base e somente as três componentes espaciais não são invariantes sob transformações de Lorentz, com isso para completar uma base no espaço de Minkowski a componente tipo tempo ($\lambda = 0$) é dada por:

$$\epsilon_{\mu}(\vec{k}, 0) = \frac{k_{\mu}}{m} \quad (11)$$

Com isso teremos um conjunto de vetores do tipo espaço ortogonais e um do tipo tempo longitudinal:

$$\epsilon_{\mu}(\vec{k}, 1) k^{\mu} = \epsilon_{\mu}(\vec{k}, 2) k^{\mu} = \epsilon_{\mu}(\vec{k}, 3) k^{\mu} = 0 \quad (12)$$

e,

$$\epsilon_{\mu}(\vec{k}, 0) k^{\mu} = m \quad (13)$$

Pode-se mostrar que os quadri-vetores de polarização satisfazem a seguinte relação de completeza:

$$\sum_{\lambda=0}^3 g_{\lambda\lambda} \epsilon_{\mu}(\vec{k}, \lambda) \epsilon_{\nu}(\vec{k}, \lambda) = g_{\mu\nu} \quad (14)$$

Percebe-se que através da condição de transversalidade para uma teoria livre, temos

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad k^\mu \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) = 0 \quad (15)$$

Essa restrição implica que o campo vetorial massivo tem apenas três estados de polarização ($\lambda = 1, 2, 3$). E a componente $\lambda = 0$ não está de acordo com (13) e (15), portanto não pode ser usada para descrever uma partícula.

No entanto, temos que observar que os três estados de polarização “física” por si só não formam um conjunto completo no sentido matemático. Assim teremos um termo extra na relação de completudeza (14), como segue:

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\vec{k}, \lambda) = - \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right) \quad (16)$$

5.4 SEGUNDA QUANTIZAÇÃO

Começando com a formulação Hamiltoniana encontrando os momentos canonicamente conjugados:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} \quad (17)$$

Como o tensor eletromagnético é antissimétrico e $F^{0i} = E^i$, obtem-se:

$$\pi^0 = 0 \quad \vec{\pi} = -\vec{E} \quad (18)$$

Não podemos determinar a componente A^0 pois ela não possui um momento canônico conjugado π^0 , desde que a lagrangiana não contenha termos com derivadas temporais de A_0 . No entanto, usando a condição de transversalidade podemos eliminar A_0 em termos de A_i tornando-a uma variável dependente.

A dinâmica do campo será dada apenas por \vec{A} e $\vec{\pi} = \vec{E}$, determinando estes podemos determinar A_0 , pois há uma relação entre eles através da equação de Proca (3). Com $\mu = 0$ e $j_\mu = 0$:

$$A^0 = -\frac{1}{m^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad (19)$$

Mostrando que A_0 não é uma variável dinâmica independente. A densidade Hamiltoniana do campo de Proca é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L} = F_{0\mu} \dot{A}^\mu + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \\ &= -\vec{E} \cdot \dot{\vec{A}} - \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \frac{m^2}{2} (-A_0^2 + \vec{A}^2) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla} A_0 \quad (20)$$

tal que:

$$\vec{E}^2 = -\vec{E} \cdot \dot{\vec{A}}^2 - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} A_0 \quad (21)$$

sendo:

$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} A_0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} A_0) - A_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} A_0) + m^2 A_0^2 \quad (22)$$

então, $-\vec{E} \cdot \dot{\vec{A}} = \vec{E}^2 + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} A_0) + m^2 A_0^2$, tal que:

Com isso,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2 + m^2 \vec{A}^2 + m^2 A_0^2) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} A_0) \quad (23)$$

Para obtermos a Hamiltoniana integramos no volume em todo espaço. O termo de divergência em (23) pode ser descartado usando o Teorema de Gauss e sabendo que os campos tendem a zero no infinito. Assim, temos a Hamiltoniana em termos de \vec{A} e \vec{E} definida positiva:

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} \left(\vec{E}^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 + m^2 \vec{A} \cdot \vec{A} + \frac{1}{m^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2 \right) \quad (24)$$

Seguindo com o procedimento de quantização promovemos os campos e seus momentos canonicamente conjugados, impondo que:

$$[\hat{A}^i(\vec{x}, t), \hat{E}^j(\vec{x}', t)] = i\delta^{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (25)$$

$$[\hat{A}^i(\vec{x}, t), \hat{A}^j(\vec{x}', t)] = 0 = [\hat{E}^i(\vec{x}, t), \hat{E}^j(\vec{x}', t)] \quad (26)$$

A hamiltoniana também terá uma versão quantizada, com os operadores $\hat{\vec{A}}$ e $\hat{\vec{E}}$ satisfazendo as equações de movimento de Heisenberg:

$$\dot{\hat{\vec{A}}} = -\hat{\vec{E}} + \frac{1}{m^2} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{E}}) \quad \dot{\hat{\vec{E}}} = -\nabla^2 \hat{\vec{A}} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{A}}) + m^2 \hat{\vec{A}}$$

E ainda usando o vínculo (19) podemos reescrever as relações de comutação na forma covariante, uma vez que:

$$\hat{A}^0 = -\frac{1}{m^2} \vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{E}}$$

Podemos mostrar que satisfazem as seguintes relações:

$$[\hat{A}^i(\vec{x}, t), \hat{A}^0(\vec{x}', t)] = i\frac{1}{m^2} \vec{\nabla} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad [\hat{A}^0(\vec{x}, t), \hat{A}^0(\vec{x}', t)] = 0 \quad (27)$$

Por conta das componentes espaciais e temporal de $\hat{\vec{A}}$ serem tratadas diferentemente, a quantização não aparece na forma covariante. No entanto, das relações acima com (25) e (26), podemos construir

relações de comutação covariantes:

$$[A^\mu(\hat{x}), \hat{A}^\nu(x')] = -i \left(g^{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} \partial^\mu \partial^\nu \right) \Delta(x - x') \quad (28)$$

Onde, $\Delta(x - x')$, é a função invariante de Pauli- Jordan-Schwinger dado por:

$$\Delta(x - x') = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sin k(x - x')}{\omega_k}$$

Este é o processo de quantização canônica para um campo vetorial de spin-1 massivo.

5.5 DECOMPOSIÇÃO DE FOURIER PARA O OPERADOR DE CAMPO DE PROCA

Buscamos uma solução geral em uma certa base específica. Note que podemos decompor o operador de campo em partes de frequências positivas e negativas usando a expansão em ondas planas, veja :

$$\hat{A}^\mu(x) = \int d^3k \sum_{\lambda=1}^3 \left(\hat{a}_{\vec{k}\lambda} A^\mu(\vec{k}, \lambda; x) + \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger A^{*\mu}(\vec{k}, \lambda; x) \right), \quad (29)$$

ou ainda, usando (7) com $N_k = (2\omega_k(2\pi)^3)^{-1/2}$, teremos:

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1}^3 \left(\hat{a}_{\vec{k}\lambda} \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \epsilon^{*\mu}(\vec{k}, \lambda) e^{ik \cdot x} \right) \quad (30)$$

Por construção o operador \hat{A}^μ é hermitiano, o qual na teoria clássica equivale a um campo de valor real. Relembrando que a expansão (30) soma sobre as duas componentes transversas $\lambda = 1, 2$ e uma componente longitudinal ao momento $\lambda = 3$, pois $\partial_\mu A^\mu = 0$ e $\epsilon_\mu(\vec{k}, 0)$ não é transversal e não deve fazer parte de A^μ .

Podemos trabalhar com o potencial vetor e obter o operador $\hat{\vec{E}}$,

$$\hat{\vec{A}}(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1}^3 \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \left(\hat{a}_{\vec{k}\lambda} e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{ik \cdot x} \right) \quad (31)$$

Usando (20) promovendo os campos para a forma de operadores iremos obter:

$$\hat{\vec{E}}(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1}^3 \tilde{\vec{\epsilon}}(\vec{k}, \lambda) \left(\hat{a}_{\vec{k}\lambda} e^{-ik \cdot x} - \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{ik \cdot x} \right) \quad (32)$$

Reforçando que para descrever a polarização linear planar, esses vetores podem ser escolhidos de forma real, isto é, $\epsilon^{*\mu} = \epsilon^\mu$ onde,

$$\tilde{\vec{\epsilon}} \equiv \vec{\epsilon} - \frac{1}{\omega_k} \vec{k} \epsilon^0 \quad (33)$$

Usando a condição de transversalidade (15), temos:

$$\vec{\tilde{\epsilon}} \equiv \vec{\epsilon} - \frac{\vec{k}}{\omega_k} \vec{k} \cdot \vec{\epsilon} \quad (34)$$

Com o auxílio da relação de dispersão, temos a seguinte propriedade:

$$\vec{k} \cdot \vec{\tilde{\epsilon}} = \left(1 - \frac{\vec{k} \cdot \vec{k}}{\omega_k^2}\right) \vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = \frac{m^2}{\omega_k^2} \vec{k} \cdot \vec{\epsilon} \quad (35)$$

RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO

Esperamos que $\hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger$ e $\hat{a}_{\vec{k}\lambda}$ desempenhem o papel de operadores de criação e de aniquilação para bósons de spin-1. Para verificar as relações de comutação expressamos em termos da “transformada inversa de Fourier” e escrevemos em termos dos campos $\hat{A}(x)$ e $\hat{E}(x)$. Definindo o *produto escalar* de dois vetores de Proca:

$$(A(x), A'(x)) = i \int d^3x [A^{*\mu} \partial_0 A'_\mu - A'_\mu \partial_0 A^{*\mu}] \quad (36)$$

Calculando o produto escalar de duas ondas planas obtém-se:

$$(A(\vec{k}', \lambda'), A(\vec{k}, \lambda)) = \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda') \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \quad (37)$$

Usando a relação (8) temos:

$$(A(\vec{k}', \lambda'), A(\vec{k}, \lambda)) = \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) g_{\lambda'\lambda} \quad (38)$$

E ainda, de forma análoga podemos ter os seguintes produtos:

$$(A^*(\vec{k}', \lambda'), A^*(\vec{k}, \lambda)) = -\delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) g_{\lambda'\lambda} \quad (39)$$

$$(A^*(\vec{k}', \lambda'), A(\vec{k}, \lambda)) = 0 = (A(\vec{k}', \lambda'), A^*(\vec{k}, \lambda)) \quad (40)$$

Para encontrar os operadores de criação e aniquilação podemos usar o produto escalar de forma que:

$$\hat{a}_{\vec{k}\lambda} = (A(\vec{k}, \lambda), \hat{A}(x)) = i \int d^3x [A^{*\mu}(\vec{k}, \lambda) \partial_0 \hat{A}_\mu - \hat{A}_\mu \partial_0 A^{*\mu}(\vec{k}, \lambda)] \quad (41)$$

Substituindo (7), abrindo o campo A^μ em componentes espaciais e temporal, verifica-se que o operador de aniquilação é dado por:

$$\hat{a}_{\vec{k}\lambda} = (A(\vec{k}, \lambda), \hat{A}(x)) = i \int d^3x \frac{e^{ik \cdot x}}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} (\omega_k \vec{\tilde{\epsilon}} \cdot \hat{A}(x)' - i\vec{\tilde{\epsilon}} \cdot \hat{E}(x)) \quad (42)$$

Sendo de forma análoga para o operador de criação:

$$\hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger = \left(A(\vec{k}, \lambda), \hat{A}(x) \right) = i \int d^3x \frac{e^{-ik \cdot x}}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \left(\omega_k \tilde{\vec{\epsilon}} \cdot \hat{A}(x)' + i\tilde{\vec{\epsilon}} \cdot \hat{E}(x) \right) \quad (43)$$

Isso nos permite obter os comutadores entre esses operadores,

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\vec{k}'\lambda'}, \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger] &= \int d^3x' d^3x \frac{e^{ik' \cdot x'}}{\sqrt{2\omega_{k'}(2\pi)^3}} \frac{e^{-ik \cdot x}}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \\ &\times \left[\omega_{k'} \tilde{\vec{\epsilon}}' \cdot \hat{A}'(x)' - i\tilde{\vec{\epsilon}}' \cdot \hat{E}'(x), \omega_k \tilde{\vec{\epsilon}} \cdot \hat{A}(x) + i\tilde{\vec{\epsilon}} \cdot \hat{E}(x) \right] \end{aligned} \quad (44)$$

Usando as relações de comutação (25), (26) teremos:

$$[\hat{a}_{\vec{k}'\lambda'}, \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger] = \int d^3x \frac{e^{i(\omega_{k'} - \omega_k)t - i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}}}{2(2\pi)^3 \sqrt{\omega_{k'}\omega_k}} (\omega_{k'} \tilde{\vec{\epsilon}}' \cdot \vec{\epsilon} + \omega_k \vec{\epsilon}' \cdot \tilde{\vec{\epsilon}})$$

Com a definição integral de delta de Dirac, obtém-se:

$$[\hat{a}_{\vec{k}'\lambda'}, \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger] = \frac{1}{2} \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) \left(\tilde{\vec{\epsilon}}' \cdot \vec{\epsilon} + \vec{\epsilon}' \cdot \tilde{\vec{\epsilon}} \right) \quad (45)$$

Note que se usarmos (33):

$$\tilde{\vec{\epsilon}}' \cdot \vec{\epsilon} \equiv \tilde{\vec{\epsilon}}(\vec{k}', \lambda') \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) = \vec{\epsilon}(\vec{k}', \lambda') \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) - \frac{1}{\omega_k} \epsilon^0(\vec{k}, \lambda') \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda), \quad (46)$$

e também a relação de ortogonalidade (8):

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{\epsilon}}(\vec{k}', \lambda') \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) &= \vec{\epsilon}(\vec{k}', \lambda') \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) - \epsilon^0(\vec{k}, \lambda') \epsilon^0(\vec{k}, \lambda) = \\ &= \epsilon(\vec{k}', \lambda') \cdot \epsilon(\vec{k}, \lambda) \end{aligned} \quad (47)$$

Assim,

$$\tilde{\vec{\epsilon}}' \cdot \vec{\epsilon} = \delta_{\lambda'\lambda} \quad (48)$$

Voltando em (45), teremos:

$$[\hat{a}_{\vec{k}'\lambda'}, \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger] = \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{\lambda'\lambda} \quad (49)$$

De forma similar podemos mostrar que:

$$[\hat{a}_{\vec{k}'\lambda'}, \hat{a}_{\vec{k}\lambda}] = 0 = [\hat{a}_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger] \quad (50)$$

5.6 HAMILTONIANA

A Hamiltoniana pode ser escrita em termos dos operadores. Vamos escrevê-la em termos dos operadores de criação e aniquilação através do operador número de partícula $\hat{n}_{\vec{k},\lambda} = \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\lambda}$ dos modos

dos campos individuais multiplicado por $\hbar\omega_k$. Para eliminar possíveis divergências da contribuição do vácuo tomamos o ordenamento normal, tal que:

$$\hat{H} = \int d^3x \frac{1}{2} : \left(\hat{\vec{E}}^2 + (\hat{\vec{\nabla}} \times \hat{\vec{A}})^2 + m^2 \hat{\vec{A}} \cdot \hat{\vec{A}} + \frac{1}{m^2} \hat{\vec{\nabla}} \cdot \hat{\vec{E}} \right) : \quad (51)$$

Então, ao substituirmos (31) e (32) em (51) manipulando a expressão mantendo o ordenamento normal iremos obter que a *Hamiltoniana para um campo massivo de spin 1* será dada por:

$$\hat{H} = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\lambda} \quad (52)$$

Também podemos determinar o operador momento linear tendo em vista que:

$$\hat{\vec{P}} = \int d^3x \left(\hat{\vec{E}} \times \hat{\vec{B}} - m^2 \hat{\vec{A}} \hat{\vec{A}} \right), \quad (53)$$

nos levando a:

$$\hat{\vec{P}} = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \vec{k} \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\lambda} \quad (54)$$

Portanto, o campo vetorial carrega quanta de energia ω_k e momento \vec{k} .

OPERADOR DE SPIN

Como o campo vetorial é dotado de um momento angular intrínseco, é esperado que haja um operador de spin tal que o operador momento angular total seja a soma do operador de spin e o operador momento angular orbital. Através do Teorema de Noether e da Teoria Clássica, temos que o operador de spin será dado por (já em ordenamento normal):

$$\hat{\vec{S}} = \int d^3x : \hat{\vec{E}} \times \hat{\vec{A}} : \quad (55)$$

Substituindo (31) e (32), mantendo o ordenamento normal, temos:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{S}} = & \frac{i}{2} \int d^3k \sum_{\lambda, \lambda'=1}^3 \left[\tilde{\vec{\epsilon}}(\vec{k}, \lambda') \times \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \left(\hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\lambda} - \hat{a}_{\vec{k}\lambda'}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\lambda} \right) \right] + \\ & + \tilde{\vec{\epsilon}}(-\vec{k}, \lambda') \times \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \left(\hat{a}_{-\vec{k}\lambda'} \hat{a}_{\vec{k}\lambda} e^{-2i\omega_k t} - \hat{a}_{-\vec{k}\lambda'}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{2i\omega_k t} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

O momento angular orbital e o spin, em geral, não são operadores diagonais para campos vetoriais, no entanto, podemos definir uma outra quantidade a *helicidade*, $\Lambda = \vec{S} \cdot \hat{\vec{k}}$, que é a *projeção do spin ao longo do momento linear* sendo uma quantidade bem definida. Não temos a contribuição da componente longitudinal e para as componentes de polarização transversa temos que $\tilde{\vec{\epsilon}}(\vec{k}, \lambda) = \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)$,

para a segunda contribuição em (56) renomeamos as variáveis $\lambda \longleftrightarrow \lambda'$ e $\vec{k} \longleftrightarrow -\vec{k}$, assim:

$$\hat{\Lambda} = \frac{i}{2} \int d^3k \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \vec{e}_k \cdot \vec{e}(\vec{k}, \lambda') \times \vec{e}(\vec{k}, \lambda) \left(\hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} - \hat{a}_{k\lambda'}^\dagger \hat{a}_{k\lambda'} \right) \quad (57)$$

Sendo $\vec{e}(\vec{k}, 1)$, $\vec{e}(\vec{k}, 2)$ e $\vec{e}_k = \vec{k} / |\vec{k}|$ uma base ortonormal, de maneira que:

$$\hat{\Lambda} = i \int d^3k \left(\hat{a}_{k2}^\dagger \hat{a}_{k1} - \hat{a}_{k1}^\dagger \hat{a}_{k2} \right) \quad (58)$$

Nota-se que o operador helicidade não é diagonal, isto é, o operador não consiste na forma do operador número de partículas $\hat{n}_{k\lambda} = \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda}$. Assim sendo, os estados do tipo $\hat{a}_{k\lambda}^\dagger | 0 \rangle$ não são autoestados do operador de helicidade. Entretanto, para contornar esse problema, se escolhermos um novo conjunto de operadores:

$$\begin{cases} \hat{a}_{k+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{k1} - i\hat{a}_{k2}), \\ \hat{a}_{k-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{k1} + i\hat{a}_{k2}), \\ \hat{a}_{k0} &= \hat{a}_{k3}, \end{cases} \quad (59)$$

também temos as relações inversas:

$$\begin{cases} \hat{a}_{k1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{k+} + \hat{a}_{k-}), \\ \hat{a}_{k2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{k+} - \hat{a}_{k-}), \\ \hat{a}_{k3} &= \hat{a}_{k0}, \end{cases} \quad (60)$$

De forma análoga para o operador \hat{a}^\dagger . Após a mudança de base vemos que as relações de comutação não são alteradas,

$$[\hat{a}_{k'++}, \hat{a}_{k'++}^\dagger] = [\hat{a}_{k'-}, \hat{a}_{k'-}^\dagger] = [\hat{a}_{k'0}, \hat{a}_{k'0}^\dagger] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (61)$$

Portanto, os quanta do campo são partículas de spin-1 circularmente polarizada, temos agora o operador helicidade diagonal:

$$\hat{\Lambda} = \int d^3k \left(\hat{a}_{k+}^\dagger \hat{a}_{k+} - \hat{a}_{k-}^\dagger \hat{a}_{k-} \right) \quad (62)$$

Descrevendo as helicidades (na direção do eixo z) +1, -1 para as componentes transversas e 0 para a longitudinal (unidades de \hbar , mas estamos em unidades naturais). Podemos reescrever a hamiltoniana em termos da nova base, de modo que teremos:

$$\hat{H} = \sum_{\sigma=-,0,+} \int d^3k \omega_k \hat{a}_{k,\sigma}^\dagger \hat{a}_{k,\sigma} \quad (63)$$

Os vetores de polarização circular(ou vetores helicidades) são dados por:

$$\begin{cases} \epsilon^\mu(\vec{k}, \pm) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\epsilon^\mu(\vec{k}, 1) \pm i\epsilon^\mu(\vec{k}, 2) \right) \\ \epsilon^\mu(\vec{k}, 0) &= \epsilon^\mu(\vec{k}, 3) \end{cases} \quad (64)$$

5.7 AUTOESTADOS DE HELICIDADE

Como dito anteriormente, a helicidade é a projeção do spin na direção do momento, para compreendê-la um pouco mais vamos usar a equação (6) no espaço dos momenta:

$$k_\mu k^\mu A^\nu = m^2 A^\nu \quad (65)$$

No referencial de repouso, $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$. Podemos expandir em onda planas, bem como (7):

$$A_\mu = \epsilon_\mu e^{ik \cdot x} + \epsilon_\mu^* e^{-ik \cdot x} \quad (66)$$

Ao introduzirmos (66) em (65) no referencial de repouso (como as componentes de (66) são independentes cada coeficiente tem que ser nulo), teremos:

$$k^0 A_0 = 0 \Rightarrow m \epsilon_0 = 0 \Rightarrow \epsilon_0 = 0 \quad (67)$$

Com isso temos apenas as componentes ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 . Para interpretar as componentes do vetor de polarização, consideremos uma rotação em torno do eixo-z:

$$\epsilon'_\mu = R_\mu^\alpha \epsilon_\alpha \quad (68)$$

Ou ainda, matricialmente (Em que ϕ é o ângulo azimutal enquanto que θ é o ângulo polar.)

$$\begin{pmatrix} \epsilon'_0 \\ \epsilon'_1 \\ \epsilon'_2 \\ \epsilon'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_0 \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (69)$$

teremos:

$$\begin{cases} \epsilon'_0 = \epsilon_0 \\ \epsilon'_1 = \cos \theta \epsilon_1 + \sin \theta \epsilon_2 \\ \epsilon'_2 = -\sin \theta \epsilon_1 + \cos \theta \epsilon_2 \\ \epsilon'_3 = \epsilon_3 \end{cases} \quad (70)$$

Combinando-os de forma que possamos escrever um novo vetor que satisfaça a equação de autovalor:

$$\epsilon'_j = e^{i\theta} \epsilon_j \quad (71)$$

Encontramos que:

$$\epsilon'_- \equiv \epsilon'_1 + i\epsilon'_2 \Rightarrow \epsilon'_- = e^{-i\theta} \epsilon_- \quad (72)$$

De forma similar,

$$\epsilon'_+ \equiv \epsilon'_1 - i\epsilon'_2 \Rightarrow \epsilon'_+ = e^{i\theta} \epsilon_+ \quad (73)$$

Analisando momento angular, mais especificamente a componente z do momento angular:

$$\hat{L}_z = -i(x\partial_y - y\partial_x) \quad (74)$$

Podemos mostrar que em coordenadas esféricas essa componente será:

$$\hat{L}_z = -i\partial_\phi \quad (75)$$

Para um autoestado qualquer Ψ , temos:

$$\hat{L}_z \Psi = l_z \Psi \quad (76)$$

Substituindo (75) em (76) e resolvendo a equação diferencial de primeira ordem obteremos:

$$\Psi(\phi) = A e^{il_z \phi} \quad (77)$$

Em que A é uma constante arbitrária, para efeitos práticos vamos fazê-la igual a 1 e realizando uma transformação do tipo:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \Delta\phi \quad (78)$$

Teremos que o estado Ψ muda por uma fase,

$$\Psi' = e^{il_z \Delta\phi} \Psi \quad (79)$$

Podemos identificar o termo multiplicado por $i\Delta\phi$ como sendo o autovalor da helicidade uma vez que

$$\vec{S} \cdot \hat{z} = S_z \quad (80)$$

Com isso temos uma maneira prática de determinar as helicidades. Voltando em (70), (72) e (73),

$$\epsilon'_- = e^{-i\theta} \epsilon_- \quad \epsilon'_+ = e^{i\theta} \epsilon_+ \quad \epsilon'_3 = \epsilon_3 \quad (81)$$

Segundo a regra temos helicidades ± 1 e 0 para a descrição de partículas massivas de spin-1.

6 DECOMPOSIÇÃO EM VARIÁVEIS DE HELICIDADE

Esse método nos permite obter o conteúdo físico de uma dada teoria analisando e identificando os graus de liberdade propagantes e não propagantes e, ainda, para teorias de gauge podemos determinar esses graus de liberdade sem a necessidade de fixar um gauge. Identificamos os graus de liberdade invariantes de gauge usando as variáveis de Bardeen, (BIAZOTTI, 2015) . Iniciamos com o procedimento para a teoria de Maxwell (descrevendo fótons sem massa), pois é um modelo simples para aprendermos a técnica de decomposição.

6.1 DECOMPOSIÇÃO EM V.H. PARA A TEORIA DE MAXWELL

Para a teoria de Maxwell na presença de fontes:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \quad (1)$$

onde, $F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$. Esta é invariante sob a transformação de gauge:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \theta \quad (2)$$

A equação de Euler-Lagrange, será:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu \quad (3)$$

Vamos fazer a decomposição em helicidades do campo A_μ :

$$A_\mu = \begin{cases} A_0 = \psi \\ A_i = v_i^T + \partial_i \lambda \end{cases} \quad (4)$$

O índice T na variável v_i indica que é transversa, isto é, $\partial^i v_i^T = 0$. E para a corrente realizamos a mesma decomposição,

$$j_\mu = \begin{cases} j_0 = \rho \\ j_i = S_i^T + \partial_i S \end{cases} \quad (5)$$

A ausência de derivadas temporais é uma característica fundamental da decomposição em helicidades o que nos assegura que o conteúdo das equações de movimento e a estrutura canônica da teoria não são alterados. Como consequência imediata, segue que:

$$\delta A_0 = \delta \psi = -\dot{\theta} \quad (6)$$

$$\delta A_i = \delta v_i^T + \partial_i \delta \lambda = -\partial_i \theta \quad (7)$$

Assim temos,

$$\delta\psi = -\dot{\theta} \qquad \delta v_i^T = 0 \qquad \delta\lambda = -\theta \qquad (8)$$

Podemos definir uma variável de Bardeen invariante de gauge:

$$\Psi = \psi - \dot{\lambda} \qquad (9)$$

Temos então, em $D = 3 + 1$, um grau de liberdade de Ψ , dois graus de liberdade de v_i^T e um grau de liberdade (puro gauge) de λ .

Uma opção é trabalharmos com as variáveis não locais, isto é, variáveis que não dependem ponto a ponto do espaço, para isso podemos usar diretamente (4):

$$\lambda = \frac{1}{\nabla^2} \partial_i A^i \qquad (10)$$

e,

$$v_i = A_i - \frac{1}{\nabla^2} \partial_i \partial_j A^j \qquad (11)$$

Observe que o operador laplaciano pode ser invertido, uma vez que os campos podem ser expandidos em ondas planas (transformada de Fourier). Pode-se mostrar que seus autovalores são negativos. Através do uso da equação de conservação, ou seja, $\partial^\mu j_\mu = 0$ e da decomposição (4) e (5) podemos reescrever (1) em termos da decomposição (4) e (5):

$$\mathcal{L}_M^{Dec} = \frac{1}{2} [\partial_i \Psi \partial^i \Psi - \partial_\mu v_i \partial^\mu v^i] + [\rho \Psi - S_i v^i] \qquad (12)$$

As equações de Euler-Lagrange são:

$$\nabla^2 \Psi = \rho \qquad (13)$$

$$\square (v^i)^T = (S^i)^T \qquad (14)$$

Em $D = 3 + 1$ temos *dois graus de liberdades propagantes* devido ao campo v_i^T e um vínculo, pois (13) não envolve derivada segunda no tempo. Investigando mais a fundo vemos que (13) corresponde à lei de Gauss e (14) corresponde à lei de Ampère do eletromagnetismo. Esses dois graus de liberdade propagantes estão relacionados com as duas helicidades do fóton, por isso denominamos v_i^T **variáveis de helicidade**.

6.2 DECOMPOSIÇÃO EM V.H. PARA A TEORIA DE PROCA

Como mencionado nas seção anterior a teoria de Proca descreve fótons massivos, dada pela lagrangiana (1) e satisfaz a equação de Klein-Gordon (6). A decomposição será a mesma do modelo

de Maxwell, porém temos um novo termo de massa.¹. Reescrevendo a lagrangiana de Proca (com $j_\mu = 0$) em termos da decomposição em helicidades (no vácuo), teremos:

$$\mathcal{L}_P^{Dec} = \frac{1}{2} [\partial_i \Psi \partial^i \Psi - \partial_\mu v_i \partial^\mu v^i] + \frac{m^2}{2} [\psi^2 - \partial_i \lambda \partial^i \lambda - v_i^T v^{iT}] \quad (15)$$

As equações de Euler-Lagrange são:

$$(\square - m^2)v_i^T = 0 \quad (16)$$

$$\nabla^2(\ddot{\lambda} + m^2\lambda) = \nabla^2\dot{\psi} \quad (17)$$

$$\nabla^2\psi - m^2\psi = \nabla^2\dot{\lambda} \quad (18)$$

Veja que a equação (17) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\nabla^2(\ddot{\lambda} + m^2\lambda - \dot{\psi}) = 0 \quad (19)$$

Pelas condições de contorno em que os campos vão a zero no infinito, vamos ter que $\ddot{\lambda} + m^2\lambda - \dot{\psi} = 0$, assim temos:

$$\ddot{\lambda} + m^2\lambda = \dot{\psi} \quad (20)$$

Usando (18) e (20), obtemos a equação de Klein-Gordon:

$$(\square - m^2)\lambda = 0 \quad (21)$$

Resumindo temos,

$$(\square - m^2)v_i^T = 0 \quad (22)$$

$$(\square - m^2)\lambda = 0 \quad (23)$$

$$\psi = \frac{\nabla^2}{\nabla^2 - m^2}\dot{\lambda} \quad (24)$$

Dois graus de liberdade propagantes do campo transverso v_i^T , um grau de liberdade propagante do campo longitudinal λ e um vínculo que nos permite eliminar ψ em termos de $\dot{\lambda}$. Então, para a teoria do fóton massivo temos três graus de liberdade propagantes correspondentes as helicidades ± 1 e 0.

6.3 DECOMPOSIÇÃO EM V.H. PARA O MODELO TENSORIAL

Uma forma alternativa de descrever uma teoria de spin-1 massiva é utilizando tensor de *rank-2*, veja (SANTOS, 2012) e (DALMAZI; SANTOS, 2011). Para nos assegurar disso temos que garantir

¹ Note que embora o termo de massa quebre a simetria de gauge, por simplicidade, mantemos as variáveis de Bardeen para facilitar os cálculos.

que haja o mesmo conteúdo físico que a teoria de Proca. Como temos o objetivo de estudar partículas de spin-2, que geralmente são descritas por um tensor *rank-2*, é cabível iniciarmos com esse modelo, pois há menos termos na lagrangiana e facilitará o entendimento da decomposição. Já vimos que o modelo tensorial com tensor de *rank-2* simétrico é dual à teoria de Proca:

$$\mathcal{L}_W = \partial_\mu W^{\mu\nu} \partial^\alpha W_{\nu\alpha} + \frac{m^2}{2} \left(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{W^2}{3} \right) \quad (25)$$

A equação de Euler-Lagrange nos fornece:

$$\partial_\nu \partial^\alpha W_{\mu\alpha} + \partial_\mu \partial^\alpha W_{\nu\alpha} + m^2 \left(\frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} W - W_{\mu\nu} \right) = 0 \quad (26)$$

Desta equação podemos obter:

$$(\square - m^2) \partial^\nu W_{\mu\nu} = 0 \quad (27)$$

$$\partial^\mu \partial^\nu W_{\mu\nu} = 0 \quad (28)$$

$$W = \eta_{\mu\nu} W^{\mu\nu} = 0 \quad (29)$$

$$\partial_\nu \partial^\alpha W_{\mu\alpha} + \partial_\mu \partial^\alpha W_{\nu\alpha} - m^2 W_{\mu\nu} = 0 \quad (30)$$

Para analisarmos o conteúdo físico deste modelo, temos a seguinte decomposição para o tensor de *rank-2* simétrico:

$$W_{\mu\nu} = \begin{cases} W_{00} = \psi \\ W_{0i} = \beta_i^T + \partial_i \gamma \\ W_{ij} = \phi \delta_{ij} + (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \nabla^2) \lambda + \frac{1}{2} (\partial_i \epsilon_j^T + \partial_j \epsilon_i^T) + W_{ij}^{TT} \end{cases} \quad (31)$$

O índice T nas variáveis β_i e ϵ_i , $i = 1, 2, 3$, significa que são transversos, isto é, $\partial^i \beta_i^T = 0$ e $\partial^i \epsilon_i^T = 0$ e os índices em W_{ij}^{TT} significam que W_{ij}^{TT} é transverso, $\partial^i W_{ij}^{TT} = 0 = \partial^j W_{ij}^{TT}$ e ainda que não possui traço, $\delta^{ij} W_{ij}^{TT} = 0$.

Em $D = 3+1$ há 16 componentes para o tensor simétrico $W_{\mu\nu}$ com 10 componentes independentes. E na decomposição temos, um grau de liberdade devido a ψ , dois de β_i^T , um de γ , um de ϕ , um de λ , dois de ϵ_i^T e dois de W_{ij}^{TT} , resultando 10 graus de liberdade independentes.

Podemos reescrever (25) em termos da decomposição:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W^{Dec} = & -(-\dot{\psi} + \nabla^2 \gamma)^2 + \left(\frac{1}{2} \nabla^2 \epsilon_i^T - \dot{\beta}_i^T \right)^2 + \partial_i (\phi - \dot{\gamma}) \partial^i (\phi - \dot{\gamma}) + \\ & + \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{3} \psi^2 - (\beta_i^T)^2 - (\partial_i \gamma)^2 + \frac{1}{3} (\nabla^2 \lambda)^2 + \psi \phi - \frac{2}{3} \psi \nabla^2 \lambda + \frac{1}{2} (\partial_i \epsilon^j{}^T)^2 + (W_{ij}^{TT})^2 \right) \end{aligned} \quad (32)$$

As equações de movimento em relação a cada campo são:

$$2\ddot{\psi} - 2\nabla^2\dot{\gamma} + m^2 \left(\frac{2}{3}\psi + \phi - \frac{2}{3}\nabla^2\lambda \right) = 0 \quad (33)$$

$$\dot{\psi} - \nabla^2\gamma - \dot{\phi} + \ddot{\gamma} + m^2\gamma = 0 \quad (34)$$

$$-2\nabla^2\phi + 2\nabla^2\dot{\gamma} + m^2\psi = 0 \quad (35)$$

$$\frac{2}{3}\nabla^2(\nabla^2\lambda - \psi) = 0 \quad (36)$$

$$-\ddot{\beta}_i^T + \frac{1}{2}\nabla^2\dot{\epsilon}_i^T - m^2\beta_i^T = 0 \quad (37)$$

$$\dot{\beta}_i^T - \frac{1}{2}\nabla^2\epsilon_i^T + \frac{m^2}{2}\epsilon_i^T = 0 \quad (38)$$

$$m^2W_{ij}^{TT} = 0 \quad (39)$$

Para a parte vetorial segue imediatamente que derivando (38) em relação ao tempo e substituindo em (37) temos:

$$\beta_i^T = \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_i^T \quad (40)$$

Substituindo (40) em (37), obtém-se:

$$(\square - m^2)\beta_i^T = 0 \quad (41)$$

Devido às condições de contorno em que os campos vão a zero no infinito, a partir da equação (36), temos:

$$\nabla^2\lambda = \psi \quad (42)$$

E então, substituindo (42) em (33), teremos:

$$2\ddot{\psi} - 2\nabla^2\dot{\gamma} + m^2\phi = 0 \quad (43)$$

A partir de (34), (35) e (43) temos um sistema de equações:

$$\dot{\psi} - \nabla^2\gamma - \dot{\phi} + \ddot{\gamma} + m^2\gamma = 0 \quad (44a)$$

$$-2\nabla^2\phi + 2\nabla^2\dot{\gamma} + m^2\psi = 0 \quad (44b)$$

$$2\ddot{\psi} - 2\nabla^2\dot{\gamma} + m^2\phi = 0 \quad (44c)$$

Note que se realizarmos as seguintes manipulações:

$$-2\partial_0\nabla^2 \left(\dot{\psi} - \nabla^2\gamma - \dot{\phi} + \ddot{\gamma} + m^2\gamma \right) = 0 \quad (45a)$$

$$\partial_0^2 (-2\nabla^2\phi + 2\nabla^2\dot{\gamma} + m^2\psi) = 0 \quad (45b)$$

$$\nabla^2 \left(2\ddot{\psi} - 2\nabla^2 \dot{\gamma} + m^2 \phi \right) = 0 \quad (45c)$$

E as somarmos, teremos:

$$m^2(\nabla^2 \phi - 2\nabla^2 \dot{\gamma} + \ddot{\psi}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\psi} = -\nabla^2 \phi + 2\nabla^2 \dot{\gamma} \quad (46)$$

Podemos substituir (46) em (33):

$$-2\nabla^2 \phi + 2\nabla^2 \dot{\gamma} + m^2 \phi = 0 \quad (47)$$

Com isso, subtraindo (47) de (35):

$$m^2(\psi - \phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = \phi \quad (48)$$

Assim, substituindo esse resultado em (44a) e (44b) teremos, respectivamente:

$$(\square - m^2)\gamma = 0 \quad (49)$$

$$\psi = \left(\frac{2\nabla^2}{2\nabla^2 - m^2} \right) \dot{\gamma} \quad (50)$$

Logo, temos três graus de liberdade que se propagam, um devido ao campo longitudinal e dois devido ao campo transverso:

$$(\square - m^2)\gamma = 0 \quad ; \quad (\square - m^2)\beta_i^T = 0$$

e graus de liberdade não propagantes, pois envolvem no máximo uma derivada temporal, ou seja, são vínculo²:

$$\psi = \phi \quad ; \quad \lambda = \frac{1}{\nabla^2} \psi \quad ; \quad \psi = \left(\frac{2\nabla^2}{2\nabla^2 - m^2} \right) \dot{\gamma} \quad ; \quad \beta_i^T = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_i^T \quad ; \quad W_{ij}^{TT} = 0$$

6.4 DECOMPOSIÇÃO EM V.H. DA TEORIA DE EINSTEIN-HILBERT

Vamos iniciar introduzindo um termo de fonte à ação (13) de Einstein-Hilbert,

$$S_{EHL+int}[h] = \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa^2} \left(-\frac{1}{4} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial^\mu h^{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \partial_\mu h \partial^\mu h + \right. \right. \\ \left. \left. -\frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\nu h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu h^{\mu\alpha} \partial^\nu h_{\alpha\nu} \right) + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right] \quad (51)$$

² Com $m \neq 0$ para a teoria de Proca, vide a equação (5), de onde tiramos a condição de transversalidade impondo que $m \neq 0$.

O campo $h_{\mu\nu}$ pode ser decomposto da seguinte maneira (JACCARD; MAGGIORE; MITSOU, 2013):

$$h_{\mu\nu} = \begin{cases} h_{00} = 2\psi \\ h_{0i} = \beta_i^T + \partial_i\gamma \\ h_{ij} = -2\phi\delta_{ij} + \Delta_{ij}\lambda + \partial_{(i}\epsilon_{j)}^T + \tilde{h}_{ij} \end{cases} \quad (52)$$

Em que

$$\Delta_{ij} = \partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2 \quad \partial^i\beta_i^T = 0 \quad \partial^i\epsilon_i^T = 0$$

e \tilde{h}_{ij} [e um tensor simétrico transverso e sem traço:

$$\partial^i\tilde{h}_{ij} = 0 \quad \partial^j\tilde{h}_{ij} = 0 \quad \delta^{ij}\tilde{h}_{ij} = 0$$

Para analisarmos as variáveis de Bardeen será necessário decompor o parâmetro da transformação de gauge (15) ξ_μ :

$$\xi_\nu = \begin{cases} \xi_0 = A \\ \xi_i = B_i^T + \partial_i C \end{cases} \quad (53)$$

Assim teremos:

$$\begin{aligned} \delta\psi &= \dot{A} & \delta\phi &= -\frac{1}{3}\nabla^2 C & \delta\gamma &= A + \dot{C} & \delta\lambda &= 2C \\ \delta\beta_i^T &= \dot{B}_i^T & \delta\epsilon_i^T &= 2B_i^T & \delta\tilde{h}_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

Com essas variáveis podemos escrever combinações invariantes de gauge, as chamadas variáveis de Bardeen:

$$\Phi = -\phi - \frac{1}{6}\nabla^2\lambda \quad (54)$$

$$\Psi = \psi - \dot{\gamma} + \frac{1}{2}\ddot{\lambda} \quad (55)$$

$$\Theta_i^T = \beta_i^T - \frac{1}{2}\epsilon_i^T \quad (56)$$

Então, a nível da teoria linearizada teremos 6 quantidades invariantes. Sendo 2 componentes do tensor \tilde{h}_{ij} (que é transverso e sem traço), 2 componentes do vetor Θ_i que é transverso, 1 componente de Φ e 1 componente de Ψ . Isso pelo fato de ξ_μ eliminar 4 graus de liberdade.

De maneira análoga vamos decompor o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$,

$$T_{\mu\nu} = \begin{cases} T_{00} = \rho \\ T_{0i} = S_i^T + \partial_i S \\ T_{ij} = P\delta_{ij} + \Delta_{ij}\sigma + \partial_{(i}\sigma_{j)}^T + \sigma_{ij}, \end{cases} \quad (57)$$

onde,

$$\partial^i \sigma_i^T = 0; \quad \partial^i S_i^T = 0; \quad \partial^i \sigma_{ij} = 0; \quad \delta^{ij} \sigma_{ij} = 0 \quad (58)$$

A parte isotrópica de T_{ij} é $P\delta_{ij}$, onde P é a pressão. A parte anisotrópica de T_{ij} depende dos parâmetros escalar σ , do vetor transverso σ_i e do tensor transverso e sem traço σ_{ij} . Assumiremos que S , σ , $\nabla^2 \sigma$ e σ^i são nulos no infinito.

Através da conservação do tensor energia-momento, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, obtemos equações auxiliares:

$$\partial_\mu T^{\mu 0} = 0 \Rightarrow \nabla^2 S = \dot{\rho} \quad (59)$$

$$\partial_\mu T^{\mu j} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\nabla^2 \sigma^i - \dot{S}^i + \partial^i \left(-\dot{S} + P + \frac{2}{3}\nabla^2 \sigma \right) = 0 \quad (60)$$

Atuando com ∂_i , teremos:

$$\nabla^2 \left(-\dot{S} + P + \frac{2}{3}\nabla^2 \sigma \right) = 0 \quad (61)$$

ou:

$$\nabla^2 f = 0, \quad f = \dot{S} + P + \frac{2}{3}\nabla^2 \sigma \quad (62)$$

Impondo as condições de contorno, ou seja, que o tensor energia-momento se anula no infinito, teremos a equação de Laplace, $\nabla^2 f = 0$ para a condição de contorno de que $f = 0$ no infinito. Isso implicará que $f = 0$, em todo o espaço, assim teremos sobre S , P e σ :

$$-\dot{S} + P + \frac{2}{3}\nabla^2 \sigma = 0 \quad (63)$$

Com esse resultado em (60), temos:

$$\nabla^2 \sigma^{iT} = 2\dot{S}^{iT} \quad (64)$$

Para o termo de interação em (51) abrindo a soma de $h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$, utilizando as equações (61), (63) e (64) e as variáveis de Bardeen podemos escrever:

$$\frac{1}{2}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = 3\Phi P + \Psi\rho - \Theta_i^T S^{iT} + \frac{1}{2}\tilde{h}_{ij}\sigma^{ij} \quad (65)$$

Enquanto que $S_{EHL}(h)$ em termos das variáveis de Bardeen ficará:

$$S_{EHL}(h) = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \left[-12\dot{\Phi}^2 + 4\partial_i\Phi\partial^i\Phi - 8\partial_i\Phi\partial^i\Psi + \partial_i\Theta_j\partial^i\Theta^j + \right. \\ \left. -\frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{h}_{ij}\partial^\mu\tilde{h}^{ij} \right] \quad (66)$$

Portanto, com interação temos:

$$S_{EHL}(h) = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \left[-12\dot{\Phi}^2 + 4\partial_i\Phi\partial^i\Phi - 8\partial_i\Phi\partial^i\Psi + \partial_i\Theta_j^T\partial^i\Theta^{jT} + \right. \\ \left. -\frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{h}_{ij}\partial^\mu\tilde{h}^{ij} \right] + \int d^4x \left[3\Phi P + \Psi\rho - \Theta_i^T S^{iT} + \frac{1}{2}\tilde{h}_{ij}\sigma^{ij} \right] \quad (67)$$

Para obtermos as equações de movimento vamos realizar a variação da ação que depende apenas das combinações invariantes de gauge. A variação em relação a Φ :

$$24\ddot{\Phi} - 8\nabla^2\Phi + 8\nabla^2\Psi = -3\kappa^2 P \quad (68)$$

A variação em relação a Ψ :

$$8\nabla^2\Phi = -\kappa^2\rho \quad (69)$$

A variação em relação a Θ_i :

$$2\nabla^2\Theta_i^T = -\kappa^2 S_i^T \quad (70)$$

A variação em relação a \tilde{h}_{ij} :

$$2\Box\tilde{h}_{ij} = -\kappa^2\sigma_{ij} \quad (71)$$

Substituindo (69) em (68), teremos:

$$\ddot{\Phi} + \frac{1}{3}\nabla^2\Psi = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad (72)$$

Note que usando a equação (69) derivada duas vezes no tempo $8\nabla^2\ddot{\Phi} = -\kappa^2\ddot{\rho}$ e usando a relação (59) obtemos $8\nabla^2\ddot{\Phi} = -\kappa^2\nabla^2\dot{S}$ e usando as condições de contorno sobre os campos (equação de Laplace), teremos:

$$8\ddot{\Phi} = -\kappa^2\dot{S} \quad (73)$$

Substituindo (73) em (72), teremos:

$$\nabla^2\Psi = -4\pi G(\rho + 3P - 3\dot{S}) \quad (74)$$

E ainda podemos reescrever (74) usando (63), $3P - 3\dot{S} = -2\nabla^2\sigma$. Resumindo teremos:

$$\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho \quad (75)$$

$$\nabla^2\Psi = -4\pi G(\rho - 2\nabla^2\sigma) \quad (76)$$

$$\nabla^2\Theta_i^T = -16\pi GS_i^T \quad (77)$$

$$\square\tilde{h}_{ij} = -16\pi G\sigma_{ij} \quad (78)$$

Observe que a perturbação escalar e vetorial obedecem a equação de Poisson e não representam graus de liberdade propagantes, enquanto que a perturbação tensorial obedece uma equação dinâmica com dois graus de liberdade propagantes que corresponde às helicidades ± 2 do gráviton. Podemos rearranjar as equações (75) e (76) reescrevendo como:

$$\nabla^2(\Phi - \Psi) = -8\pi G\nabla^2\sigma \quad (79)$$

E se a parte anisotrópica do tensor T_{ij} for nula, implicará que $\Phi = \Psi$. E na ausência de matéria, teremos $\Phi = \Psi = \Theta = 0$.

6.5 DECOMPOSIÇÃO EM V.H. DA TEORIA DE FIERZ-PAULI

Com a mesma decomposição para a teoria de Fierz-Pauli, uma vez que o termo cinético é o mesmo que da teoria de Einstein-Hilbert linearizada, mas o termo de massa quebra a invariância de gauge da teoria de Fierz-Pauli. Vamos considerar o termo de massa

$$S_m = -\frac{m^2}{4}(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2) \quad (80)$$

A componente tensorial fica:

$$S_m^T = \int d^4x \left[-\frac{m^2}{4}\tilde{h}_{ij}\tilde{h}^{ij} \right] \quad (81)$$

A componente vetorial fica:

$$S_m^V = \int d^4x \left[-\frac{m^2}{4} \left(-2\beta_i^T\beta^{iT} + \frac{1}{2}\partial_i\epsilon_j^T\partial^i\epsilon^{jT} \right) \right] \quad (82)$$

Agora a componente escalar dada por:

$$S_m^E = \int d^4x \left[-\frac{m^2}{4} \left(-2\partial_i\gamma\partial^i\gamma - 24\phi^2 + \frac{2}{3}\nabla^2\lambda\nabla^2\lambda - 24\psi\phi \right) \right] \quad (83)$$

Por conveniência vamos reescrever (83) em termos das variáveis de Bardeen (54) e (55):

$$S_m^E = \int d^4x \left[-\frac{m^2}{4} \left(12\Phi^2 + 4\Phi\nabla^2\lambda + \partial_i\gamma\partial^i\gamma - 12\psi\Phi - 2\psi\nabla^2\lambda \right) \right], \quad (84)$$

tal que:

$$S_{FP}^E = \int d^4x \left[-12\dot{\Phi}^2 + 4\partial_i\Phi\partial^i\Phi - 8\partial_i\Phi\partial^i\psi + 8\partial_i\Phi\partial^i\dot{\gamma} + 4\ddot{\Phi}\nabla^2\lambda + \right. \\ \left. + m^2(12\Phi^2 + 4\Phi\nabla^2\lambda + \partial_i\gamma\partial^i\gamma - 12\psi\Phi - 2\psi\nabla^2\lambda) \right] \quad (85)$$

$$S_{FP}^V = \int d^4x \left[\frac{1}{8}\partial_i\dot{\epsilon}_j^T\partial^i\epsilon^{jT} - \frac{1}{2}\dot{\beta}_i^T\nabla^2\epsilon^{iT} + \frac{1}{2}\partial_i\beta_j^T\partial^i\beta^{jT} + \frac{m^2}{2}\beta_i^T\beta^{iT} - \frac{m^2}{8}\partial_i\epsilon_j^T\partial^i\epsilon^{jT} \right] \quad (86)$$

$$S_{FP}^T = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}\partial_\mu\tilde{h}_{ij}\partial^\mu\tilde{h}^{ij} - \frac{m^2}{4}\tilde{h}_{ij}\tilde{h}^{ij} \right] \quad (87)$$

Para a parte escalar a variação em relação a γ , ψ e λ , será respectivamente:

$$\nabla^2(8\dot{\Phi} - 2m^2\gamma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{4\dot{\Phi}}{m^2} \quad (88)$$

$$8\nabla^2\Phi - 12m^2\Phi - 2m^2\nabla^2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\lambda = \frac{4}{m^2}\nabla^2\Phi - 6\Phi \quad (89)$$

$$2\ddot{\Phi} + 2m^2\Phi - m^2\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = \frac{2}{m^2}\ddot{\Phi} + 2\Phi \quad (90)$$

Substituindo (88), (89) e (90) em (85), teremos:

$$S_{FP}^E = \int d^4x [-12(\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + m^2\Phi^2)] \quad (91)$$

Isso nos leva à seguinte equação de movimento:

$$\frac{\delta S_{FP}^E}{\delta\Phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\square - m^2)\Phi = 0 \quad (92)$$

Para a componente vetorial a variação em relação a β_i e ϵ_i , será respectivamente:

$$\frac{1}{2}\nabla^2\dot{\epsilon}_i^T - \nabla^2\beta_i^T + m^2\beta_i^T = 0 \quad (93)$$

$$\frac{1}{4}\nabla^2\dot{\epsilon}_i^T - \frac{1}{2}\nabla^2\dot{\beta}_i^T + \frac{m^2}{4}\nabla^2\epsilon_i^T = 0 \quad (94)$$

Derivando (93) em relação ao tempo e subtraindo de (94), obtém-se:

$$m^2 \left(\frac{1}{2}\nabla^2\epsilon_i^T - \dot{\beta}_i^T \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\dot{\beta}_i^T = \nabla^2\epsilon_i^T \quad (95)$$

Com este resultando em (93), temos:

$$(\square - m^2)\beta_i^T = 0 \quad (96)$$

E para a componente tensorial a variação da ação com respeito à \tilde{h}^{ij} será:

$$(\square - m^2)\tilde{h}_{ij} = 0 \quad (97)$$

Resumindo temos:

$$(\square - m^2)\Phi = 0 \quad , \quad (\square - m^2)\beta_i^T = 0 \quad , \quad (\square - m^2)\tilde{h}_{ij} = 0$$

Sendo que Φ possui um grau de liberdade independente, β_i^T dois graus de liberdade independentes (pois é um vetor transverso) e \tilde{h}_{ij} possui dois graus de liberdade independentes (pois é um tensor transverso e sem traço), o que resulta nos 5 graus de liberdade do gráviton massivo.

6.6 DECOMPOSIÇÃO EM V.H. DO MODELO $\mathcal{L}(a_1)$

A decomposição da parte simétrica será similar à do modelo de Fierz-Pauli,

$$h_{\mu\nu} = \begin{cases} h_{00} = A \\ h_{0i} = V_i^T + \partial_i L \\ h_{ij} = E\delta_{ij} + \Delta_{ij}F + \partial_{(i}G_{j)}^T + \tilde{h}_{ij} \end{cases} \quad (98)$$

a decomposição é a mesma do modelo tensorial visto anteriormente. E a parte antissimétrica será dada por:

$$B_{\mu\nu} = \begin{cases} B_{0i} = v_i^T + \partial_i l \\ B_{ij} = \varepsilon_{ijk}u_k^T + \varepsilon_{ijk}\partial^k N \end{cases} \quad (99)$$

Sendo que $e_{\mu\nu} = h_{(\mu\nu)} + B_{[\mu\nu]}$:

$$e_{\mu\nu} = \begin{cases} e_{00} = A \\ e_{0i} = (V_i + v_i)^T + \partial_i(L + l) \\ e_{ij} = E\delta_{ij} + \Delta_{ij}F + \partial_{(i}G_{j)}^T + \tilde{h}_{ij} + \varepsilon_{ijk}u_k^T + \varepsilon_{ijk}\partial^k N \end{cases} \quad (100)$$

O modelo $\mathcal{L}(a_1)$ é invariante sob:

$$\delta e_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial^\alpha \Lambda_{[\alpha\mu\nu]} \quad (101)$$

que possui decomposição:

$$\xi_\mu = \begin{cases} \xi_0 = \psi \\ \xi_i = \beta_i^T + \partial_i \gamma \end{cases} \quad (102)$$

e,

$$\partial^\alpha \Lambda_{[\alpha\mu\nu]} = \tilde{\Lambda}_{[\mu\nu]}^T = \begin{cases} \tilde{\Lambda}_{[0i]}^T = \rho_i^T \\ \tilde{\Lambda}_{[ij]}^T = \varepsilon_{ijk} \partial^k \sigma \end{cases} \quad (103)$$

Em termos do campo e decomposto, temos:

$$\begin{aligned} \delta A = \dot{\psi} & & \delta(L + l) = \dot{\gamma} & & \delta(L - l) = \psi \\ \delta E = \frac{1}{3} \nabla^2 \gamma & & \delta F = \gamma & & \delta N = \sigma \\ \delta(V_i + v_i) = \dot{\beta}_i^T + \rho_i^T & & & & \delta(V_i - v_i)^T = -\rho_i^T \\ \delta G_i^T = 2\beta_i^T & & \delta u_i^T = 0 & & \delta \tilde{h}_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Com isso podemos construir variáveis de Bardeen:

$$W_1 = A - (\dot{L} - \dot{l}) \quad (104)$$

$$W_2 = L + l - \dot{F} \quad (105)$$

$$W_3 = E - \frac{1}{3} \nabla^2 F \quad (106)$$

$$Z_i^T = (V_i + v_i)^T + (V_i - v_i)^T - \frac{1}{2} \dot{G}_i^T \quad (107)$$

$$Y_i^T = (\dot{V}_i - \dot{v}_i)^T + \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k^T \quad (108)$$

Atualmente estamos reescrevendo a lagrangiana $\mathcal{L}(a_1)$ em termos destas variáveis. Temos o objetivo de encontrar os 5 graus de liberdade propagantes do modelo $\mathcal{L}(a_1)$ correspondentes às helicidades $\pm 2, \pm 1$ e 0 do gráviton massivo. Após estudarmos esses modelos e realizar a decomposição em helicidades podemos prosseguir estudando primeiramente a teoria de Einstein-Hilbert no espaço curvo, (JACCARD; MAGGIORE; MITSOU, 2013), e posteriormente podemos aplicar a decomposição

em helicidades para essas famílias de lagrangianas, $\mathcal{L}(a_1)$ e \mathcal{L}_{nFP} , que descrevem o gráviton massivo via tensor de *rank-2* sem simetria.

7 CONCLUSÃO

A análise do conteúdo físico de teorias de campo, tanto de spin-1 quanto de spin-2, via variáveis de Bardeen foram realizadas com sucesso. Encontramos para cada teoria seus respectivos graus de liberdade propagantes através da decomposição em variáveis de helicidade.

Iniciamos revisando toda a teoria clássica de campos e ferramentas básicos para o estudo, bem como princípio variacional para encontrarmos as equações de movimento e o Teorema de Noether para encontrarmos as simetrias e as leis de conservação dos modelos.

Revisitamos ideias básicas da teoria quântica de campos para compreendermos a propagação do campo e as helicidades para prosseguirmos com a decomposição das variáveis de helicidade.

Quanto à análise do conteúdo físico por decomposição em helicidade encontramos para a teoria de Maxwell dois graus de liberdade propagantes correspondentes as helicidades ± 1 do fóton. Para teoria de Proca encontramos três graus de liberdade do fóton massivo. Para o modelo tensorial de spin-1 com tensor simétrico verificamos os mesmos três graus de liberdade. Isso está de acordo que para partículas massivas bosônicas de spin s vale a regra de $2s + 1$ graus de liberdades. E ainda, os modelos (25) e (1) são fisicamente equivalentes diferindo apenas nos graus de liberdade não físicos.

Para partículas de spin-2, descritas por tensores de $rank = 2$, estudamos o modelo de Einstein que descreve o gráviton sem massa. Encontramos dois graus de liberdade correspondentes às helicidades ± 2 do gráviton. Analisamos também o modelo de Fierz-Pauli e os modelos de (DALMAZI, 2013), encontramos as variáveis de Bardeen para os tais modelos, mas encontra-se em andamento o cálculo das equações de movimento, que possuem o de Fierz-Pauli como caso particular descrevendo o gráviton massivo. Que possuem cinco graus de liberdades correspondentes e encontramos 5 graus de liberdade, que correspondem às helicidades 0, ± 1 e ± 2 do gráviton massivo.

REFERÊNCIAS

- BLAZOTTI, H. A. **Teorias de Spin-1**: decomposição em helicidades, redução dimensional e imersão de calibre. 2015. 47 f. Trabalho de Graduação (Graduação em Física) – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.
- DALMAZI, D. Massive spin-2 particle from a rank-2 tensor. **Physical Review D**, v. 87, n. 12, p. 2–7, 2013.
- DALMAZI, D.; SANTOS, R. Spin-1 duality in d dimensions. **Physical Review D**, v. 84, n. 4, p. 5–7, 2011.
- FELSAGER, B. **Geometry, particles, and fields**. New York: Springer Science & Business Media, 2012.
- FIERZ, M.; PAULI, W. E. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A.**, The Royal Society, London - England, v. 173, n. 953, p. 211–232, 1939.
- FORTES, H. G. M. **Partículas massivas de spin-2 em espaços curvos de fundo**. 2018. 57 f. Tese (Doutorado em Física)– Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2018.
- GREINER, W.; REINHARDT, J. **Field quantization**. Germany: Springer Science & Business Media, 2013.
- JACCARD, M.; MAGGIORE, M.; MITSOU, E. Bardeen variables and hidden gauge symmetries in linearized massive gravity. **Physical Review D**, v. 87, n. 4, p. 2–22, 2013.
- KOENIGSTEIN, A.; GIACOSA, F.; RISCHKE, D. H. Classical and quantum theory of the massive spin-two field. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 368, p. 16–55, 2016.
- LEMONS, N. A. **Mecânica analítica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- MENDONÇA, E. L. **Teorias duais massivas de spin-2 em $D= 2+ 1$ via ação mestra e imersão de Noether**. 86 f. Tese (Doutorado em Física)– Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.
- SANTOS, A. L. R. d. **Modelos alternativos para partículas massivas de spin 2 e gravitação massiva**. 2015. 117 f. Tese (Doutorado em Física)– Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.
- SANTOS, R. d. C. **Partículas de spin-1 em D-dimensões via tensor simétrico**. 2012. 86 f. Dissertação (Mestrado em Física)– Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.