



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Simulações Numéricas de Escoamentos Viscoelásticos Utilizando OpenFOAM[®]

Luiz Haines Júnior

Orientadora: Profa. Dra. Gilcilene Sanchez de Paulo

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Fevereiro de 2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Simulações Numéricas de Escoamentos Viscoelásticos Utilizando OpenFOAM[®]

Luiz Haines Júnior

Orientadora: Profa. Dra. Gilcilene Sanchez de Paulo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Fevereiro de 2021

H153s	<p>Haines Júnior, Luiz</p> <p>Simulações numéricas de escoamentos viscoelásticos utilizando OpenFOAM / Luiz Haines Júnior. -- Presidente Prudente, 2021 99 p. : il., tabs.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente Orientadora: Gilcilene Sanchez de Paulo</p> <p>1. Fluidodinâmica computacional. 2. Modelos viscoelásticos. 3. Viscosidade dependendo da pressão. 4. Tempo de relaxação dependendo da pressão. 5. Método dos volumes finitos. I. Título.</p>
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Simulações numéricas de escoamentos viscoelásticos utilizando OpenFOAM®

AUTOR: LUIZ HAINES JÚNIOR

ORIENTADORA: GILCILENE SANCHEZ DE PAULO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:



Profa. Dra. GILCILENE SANCHEZ DE PAULO (Participação Virtual)
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

VIDEOCONFERÊNCIA

Prof. Dr. FABRÍCIO SIMEONI DE SOUSA (Participação Virtual)
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação / Universidade de São Paulo

VIDEOCONFERÊNCIA

Prof. Dr. LUIS JORGE LIMA FERRÁS (Participação Virtual)
Universidade do Minho

Presidente Prudente, 25 de fevereiro de 2021

Dedico a Deus, a minha família e amigos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado forças durante esta jornada e permitido que eu chegasse até aqui.

À minha família que sempre esteve presente em minha vida e me ajudou a alcançar meus objetivos.

À Professor Dra. Gilcilene Sanchez de Paulo, pela valiosa orientação e motivação que tem possibilitado o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço aos docentes do departamento de matemática e computação da FCT - UNESP, pelo conhecimento e aprendizado que contribuíram em minha formação.

Aos meus amigos, pela companhia, apoio e conselhos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

*Se, a princípio, a ideia não é absurda,
então não há esperança para ela.*
Albert Einstein

Resumo

O presente trabalho apresenta estudos numéricos para escoamentos de fluidos viscoelásticos em que a viscosidade polimérica η_P e o tempo de relaxação λ variam linearmente com a pressão p . Estas modelagens foram incluídas nos modelos Oldroyd-B e UCM e implementadas no ambiente de simulação de escoamentos viscoelásticos *rheoTool*, baseado no OpenFOAM[®]. Desta forma, neste trabalho é apresentada uma introdução aos *softwares* para simulação de escoamentos OpenFOAM[®] e *rheoTool*, é dada uma breve ideia de discretização pelo método dos volumes finitos e de metodologias numéricas, como o método SIMPLE e algumas de suas variações, que fazem parte do OpenFOAM[®]. A nova modelagem implementada é, então, aplicada aos estudos numéricos de escoamentos entre placas paralelas fixas (canal) e em uma contração 4:1. No caso do escoamento em um canal, primeiramente é realizado uma análise de convergência a partir do refinamento de malha para o escoamento totalmente desenvolvido. Para o problema da contração 4:1, são apresentados inicialmente resultados de verificação através de comparações com resultados existentes na literatura. Em seguida, para ambos os problemas, um estudo paramétrico detalhado mostra a forte influência no comportamento do escoamento quando as variações da viscosidade e do tempo de relaxação com a pressão são levadas em consideração. Para que o estudo paramétrico possa ser ampliado, a metodologia Log-conformation é utilizada para amenizar o problema do alto número de Weissenberg e obter maior estabilidade nos resultados.

Palavras-Chave: *OpenFOAM[®], rheoTool, fluidos viscoelásticos, viscosidade dependendo da pressão, tempo de relaxação dependendo da pressão, canal, contração 4:1.*

Abstract

This work presents numerical studies for viscoelastic fluid flows, modeled by the Oldroyd-B constitutive equation, such as, the Hagen-Poiseuille flow in which the polymeric viscosity η_P and the relaxation time λ linearly depends on the pressure p . These models were included in the Oldroyd-B and UCM models and implemented in the viscoelastic flow simulation environment *rheoTool*, based on OpenFOAM[®]. Thus, this work presents an introduction to softwares for flow simulation OpenFOAM[®] and *rheoTool*, a brief idea is given of discretization by the finite volume method and of numerical methodologies, such as the SIMPLE method and some of its variations, which are part of the OpenFOAM[®]. The new modeling implemented is applied to numerical studies of flows between fixed parallel plates (channel) and in a 4:1 contraction. In the case of flow in a channel, firstly a convergence analysis is carried out from the mesh refinement to the fully developed flow. For the 4:1 contraction problem, verification results are initially presented through comparisons with existing results in the literature. Then, for both problems, a detailed parametric study shows the strong influence on the flow behavior when variations in viscosity and relaxation time with pressure are taken into account. In order to expand the parametric study, the Log-conformation methodology is used to reduce the problem of the high Weissenberg number and obtain greater stability in the results.

Keywords: *OpenFOAM[®], rheoTool, viscoelastic fluids, pressure dependent viscosity, pressure dependent relaxation time, channel, contraction 4:1.*

Lista de Figuras

3.1	Estrutura de diretórios. Fonte: [30].	32
4.1	Volume de controle. Fonte: [41].	35
4.2	Malha Cartesiana bidimensional. Fonte: [56].	36
4.3	Esboço de um tipo de malha não-estruturada tridimensional. Fonte: [56].	38
4.4	Malha uniforme para esquematização do HRS. Fonte: [64].	41
4.5	Elemento de domínio temporal. Adaptado de [56].	44
4.6	Malha deslocada bi-dimensional. Adaptado de [56].	45
4.7	Exemplo da utilização de uma malha deslocada em uma malha deslocada. Fonte: [83].	45
5.1	Fluxograma do algoritmo SIMPLE	52
5.2	Fluxograma do algoritmo SIMPLE-Transient	53
6.1	Esboço do domínio para o escoamento em um canal bidimensional.	56
6.2	Erro relativo das variáveis v_x , τ_{xx} e τ_{xy} (eixo- y) com relação ao espaçamento δ_y (eixo- x) das malhas M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 e M_6 (em escala log-log), para as abordagens 1 (a), 2 (b), 3 (c) e 4 (d).	59
6.3	Comparação do perfil da velocidade v_x (a) e o desvio do perfil parabólico da velocidade ($v_x _{\gamma} - v_x _{\gamma=0}$) (b), ao longo de um corte transversal ao canal em $x = 16$ para diferentes valores de γ	62
6.4	Comparação do perfil do tensor τ_{xx} (a) e a variação da componente do tensor: $\tau_{xx} _{\gamma} - \tau_{xx} _{\gamma=0}$ (b), ao longo de um corte transversal ao canal em $x = 16$ para diferentes valores de γ	62
6.5	Comparação do perfil do tensor τ_{xy} (a) e a variação da componente do tensor: $\tau_{xy} _{\gamma} - \tau_{xy} _{\gamma=0}$ (b), ao longo de um corte transversal ao canal em $x = 16$ para diferentes valores de γ	63
6.6	Valores da pressão ao longo do centro do canal, $y = 0.5$ e $5 \leq x \leq 20$, para diferentes valores de γ	63
6.7	Comparação dos perfis v_x da velocidade: $v_x _{\gamma=10^{-2}} - v_x _{\gamma=0}$ (a) ao longo de $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$ para diferentes valores de De ; e valores máximos de v_x da velocidade, que ocorre em $y = 0.5$, para $\gamma = 0$, $2 \cdot 10^{-3}$, $4 \cdot 10^{-3}$, $6 \cdot 10^{-3}$, $8 \cdot 10^{-3}$ e $1 \cdot 10^{-2}$ e para diferentes valores de De (b).	64
6.8	Comparação do tensor entre as modelagens: $\tau_{xx} _{\gamma=10^{-2}} - \tau_{xx} _{\gamma=0}$ (a) e $\tau_{xy} _{\gamma=10^{-2}} - \tau_{xy} _{\gamma=0}$ (b), ao longo de $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$ para diferentes valores de De	65
6.9	Comparação do tensor entre as modelagens: $\tau_{xy} _{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xy} _{\gamma=0}$ (a) e $\tau_{xy} _{\gamma=10^{-4}} - \tau_{xy} _{\gamma=0}$ (b), ao longo de $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$ para diferentes valores de De	66
6.10	Valores da pressão ao longo do eixo central de simetria do canal em $y = 0.5$ e $5 \leq x \leq 20$, para diferentes valores de De	66

6.11	Comparação dos perfis da velocidade entre as modelagens: $v_x _{\gamma=10^{-2}} - v_x _{\gamma=0}$, ao longo de $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$ para diferentes valores de β	67
6.12	Comparação do tensor entre as modelagens: $\tau_{xx} _{\gamma=10^{-2}} - \tau_{xx} _{\gamma=0}$ (a) e $\tau_{xy} _{\gamma=10^{-2}} - \tau_{xy} _{\gamma=0}$ (b), ao longo de $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$ para diferentes valores de β	67
6.13	Valores da pressão ao longo do eixo central de simetria do canal em $y = 0.5$ e $5 \leq x \leq 20$, para diferentes valores de β	68
6.14	Variação da velocidade ($v_x _{\gamma} - v_x _{\gamma=0}$), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de γ	69
6.15	Variação do tensor τ_{xx} ($\tau_{xx} _{\gamma} - \tau_{xx} _{\gamma=0}$) (a) e Variação do tensor τ_{xy} ($\tau_{xy} _{\gamma} - \tau_{xy} _{\gamma=0}$) (b), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de γ	70
6.16	Valores da pressão retirados do centro do canal a partir de $x = 5$, para diferentes valores de γ	70
6.17	Variação da velocidade ($v_x _{\gamma=10^{-3}} - v_x _{\gamma=0}$) (a) e valores máximos da velocidade (obtidos no centro do canal) para $\gamma = 0, 2 \cdot 10^{-4}, 4 \cdot 10^{-4}, 6 \cdot 10^{-4}, 8 \cdot 10^{-4}$ e $1 \cdot 10^{-3}$, retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de De	71
6.18	Variação do tensor τ_{xx} ($\tau_{xx} _{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xx} _{\gamma=0}$) (a) e Variação do tensor τ_{xy} ($\tau_{xy} _{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xy} _{\gamma=0}$) (b), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de De	72
6.19	Valores da pressão retirados do centro do canal a partir de $x = 5$, para diferentes valores de De	72
6.20	Variação da velocidade ($v_x _{\gamma=10^{-3}} - v_x _{\gamma=0}$), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de De	73
6.21	Variação do tensor τ_{xx} ($\tau_{xx} _{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xx} _{\gamma=0}$) (a) e Variação do tensor τ_{xy} ($\tau_{xy} _{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xy} _{\gamma=0}$) (b), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de De	73
6.22	Valores da pressão retirados do centro do canal a partir de $x = 5$, para diferentes valores de β	74
6.23	Comparação dos resultados obtidos entre as abordagens 3 e 4 (sem e com utilização da metodologia Log-Conformation), com $Re = 0.01$ e $De = 0.5$ para $\gamma = 10^{-3}$ e $2 \cdot 10^{-4}$. São apresentadas a diferença das velocidades (a), a diferença das tensões τ_{xx} (b), a diferença das tensões τ_{xy} (c) e a pressão p (d)	75
6.24	Velocidade v_x (a) e variação da velocidade ($v_x _{\gamma} - v_x _{\gamma=0}$) (b), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de γ	76
6.25	Variação do tensor τ_{xx} (a) e Variação do tensor τ_{xx} ($\tau_{xx} _{\gamma} - \tau_{xx} _{\gamma=0}$) (b), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de γ	77
6.26	Valores do tensor τ_{xy} (a) e Variação do tensor τ_{xy} ($\tau_{xy} _{\gamma} - \tau_{xy} _{\gamma=0}$) (b), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de γ	77
6.27	Valores da pressão retirados do centro do canal a partir de $x = 5$, para diferentes valores de γ	78
6.28	Variação da velocidade ($v_x _{\gamma=10^{-3}} - v_x _{\gamma=0}$) (a) e valores máximos da velocidade (obtidos no centro do canal) para $\gamma = 0, 2 \cdot 10^{-4}, 4 \cdot 10^{-4}, 6 \cdot 10^{-4}, 8 \cdot 10^{-4}$ e $1 \cdot 10^{-3}$, retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de De	79
6.29	Variação do tensor τ_{xx} ($\tau_{xx} _{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xx} _{\gamma=0}$) (a) e Variação do tensor τ_{xy} ($\tau_{xy} _{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xy} _{\gamma=0}$) (b), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de De	79

6.30	Valores da pressão retirados do centro do canal a partir de $x = 5$, para diferentes valores de De	80
6.31	Varição da velocidade ($v_x _{\gamma=10^{-3}} - v_x _{\gamma=0}$), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de β	81
6.32	Varição dos tensores τ_{xx} ($\tau_{xx} _{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xx} _{\gamma=0}$) (a) e τ_{xy} ($\tau_{xy} _{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xy} _{\gamma=0}$) (b), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de β	81
6.33	Valores da pressão retirados do centro do canal a partir de $x = 5$, para diferentes valores de β	82
6.34	Domínio do escoamento em uma contração abrupta.	82
6.35	Comprimentos dos vórtices \tilde{X}_R e \tilde{X}_L em função de De : comparações dos resultados numéricos obtidos no presente trabalho pela M_4 com os resultados apresentados por [64].	84
6.36	Comprimentos dos vórtices \tilde{X}_R e \tilde{X}_L em função de De , para diferentes valores de γ	85
6.37	Comprimentos dos vórtices \tilde{X}_R e \tilde{X}_L em função de Re , para diferentes valores de γ	86
6.38	Comprimentos dos vórtices \tilde{X}_R e \tilde{X}_L em função de β , para diferentes valores de γ	86
6.39	Linhas de corrente para $De = 2$ e 5 , na malha M_4	87

Lista de Tabelas

2.1	Modelos viscoelásticos [8], [9]	25
2.2	Modelos viscoelásticos com a abordagem Log-conformation	27
6.1	Malhas computacionais para o escoamento em um canal bidimensional. . .	57
6.2	Erro relativo da componente v_x nas malhas M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 e M_6 . . .	58
6.3	Erro relativo da componente τ_{Pxx} nas malhas M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 e M_6 . .	58
6.4	Erro relativo da componente τ_{Pxy} nas malhas M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 e M_6 . .	59
6.5	Ordem de convergência espacial para a abordagem 1.	60
6.6	Ordem de convergência espacial para a abordagem 2.	60
6.7	Ordem de convergência espacial para a abordagem 3.	60
6.8	Ordem de convergência espacial para a abordagem 4.	60
6.9	Malhas computacionais para o escoamento na contração 4:1	83
6.10	Evolução do comprimento do vórtice \tilde{X}_R em função de De . De variando de 0 a 5.	83
6.11	Evolução do comprimento do <i>lip</i> -vórtice \tilde{X}_L em função de De . De variando de 0 a 5.	83
6.12	Evolução do comprimento dos vórtices \tilde{X}_R e \tilde{X}_L na malha M_4 , em função de De . De variando de 1 a 5, para $\gamma = 10^{-4}$	84

Lista de Siglas

CAD: Computer Aided Design
CFD: Computational Fluid Dynamics
DEVSS: Discrete Elastic Viscous Split Stress
EVSS: Elastic Viscous Split Stress
FENE-CR: Finite Extendable Non-linear Elastic - Chilcott and Rallison
FENE-P: Finite Extendable Non-linear Elastic - Peterlin
FOAM: Field Operation and Manipulation
GPL: GNU Public License
HRS: High-Resolution Scheme
HWNP: High Weissenberg Number Problem
NVA: Normalized Variable Approach
NVD: Normalized Variable Diagram
OpenFOAM: Open Field Operation and Manipulation
PTT: Phan-Thien–Tanner
SIMPLE: Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations
SIMPLEC: Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations Consistent
UCM: Upper-Convected Maxwell
VTK: Visualization Toolkit

Sumário

Resumo	5
Abstract	7
Lista de Figuras	8
Lista de Tabelas	11
Lista de Siglas	15
Capítulos	
1 Introdução	19
2 Formulação Matemática	23
2.1 Fluidos Newtoniano e Newtoniano Generalizado	23
2.2 Fluido Viscoelástico	24
2.3 Abordagens Matemáticas para Resolver Escoamentos Viscoelásticos	25
2.3.1 Formulação EVSS	25
2.3.2 Formulação DEVSS	26
2.3.3 Log-conformation	26
2.4 Modelagens da Viscosidade e do Tempo de Relaxação Dependendo da Pressão	27
2.5 Números Adimensionais	28
2.6 Condições Auxiliares	29
3 Introdução OpenFOAM®	31
3.1 Estrutura de um Caso para a Execução de uma Simulação no OpenFOAM®	32
3.2 Pré-Processamento	32
3.3 Simulação	33
3.4 Pós-Processamento	33
3.5 RheoTool	33
4 Método dos Volumes Finitos	35
4.1 Discretização do Termo Gradiente	36
4.1.1 Malhas Cartesianas	36
4.1.2 Integração de Green-Gauss	37
4.1.3 Gradiente no OpenFOAM®	38
4.2 Semi-Discretização do Termo Divergente e Lapaciano	39
4.2.1 Termo Difusivo no OpenFOAM®	40
4.3 Discretização do Termo Convectivo em uma Malha Estruturada (retangular)	40
4.3.1 Diferenças Centrais (Linear)	40

4.3.2	Esquema Upwind	40
4.3.3	Esquemas de Alta Ordem	41
4.3.4	Termo Convectivo no OpenFOAM®	43
4.4	Termo Transiente	43
4.4.1	Termo Transiente no OpenFOAM®	44
4.5	Arranjo das Variáveis na Malha	44
5	Algoritmos para Solução dos Acoplamentos Pressão-Velocidade e Tensor-Velocidade	47
5.1	Interpolação de Rhie-Chow	48
5.2	Acoplamento Tensor-Velocidade	49
5.3	Método SIMPLE para uma Malha Colocalizada	49
5.4	Método SIMPLEC (SIMPLE-Consistent)	51
5.5	Métodos para Solução do Sistema Algébrico	53
6	Resultados Numéricos	55
6.1	O Escoamento em um Canal Bidimensional	55
6.1.1	Verificação da Nova Metodologia Numérica no <i>rheoTool</i>	56
6.1.2	Estudos Paramétricos do Modelo Viscoelástico com a Viscosidade Variando com a Pressão	60
6.1.3	Estudos Paramétricos do Modelo Viscoelástico com a Viscosidade e o Tempo de Relaxação Variando com a Pressão	68
6.1.4	Estudos Paramétricos do Modelo Viscoelástico com a Viscosidade e o Tempo de Relaxação Variando com a Pressão Utilizando Log-Conformation	74
6.2	O Escoamento em uma Contração 4:1	81
6.2.1	Verificação das Simulações na Contração 4:1 com a Literatura	82
6.2.2	Estudos Paramétricos do Modelo Oldroyd-B com a Viscosidade e o Tempo de Relaxação Variando com a Pressão	84
7	Considerações Finais	89
	Referências	90

Introdução

O estudo de escoamentos viscoelásticos tem ampla relevância científica e aplicabilidade na indústria. Nas últimas décadas foram desenvolvidas diversas teorias, originando uma variedade de equações constitutivas, que tentam modelar o comportamento de fluidos viscoelásticos ([8], [9], [58]). Entretanto, por causa da complexidade das equações constitutivas, o estudo desse tipo de fluido esbarra na dificuldade de encontrar métodos numéricos capazes de resolver as equações governantes com eficácia.

Um dos maiores obstáculos para a simulação numérica de fluidos viscoelásticos é o problema do alto número de Weissenberg, afetando diretamente a convergência do sistema [22]. No trabalho pioneiro [21] é apresentado um estudo de como a mudança para variáveis logarítmicas ameniza as instabilidades causadas pelo problema do alto número de Weissenberg. Em [21] e [22] são analisadas simulações com um fluido Oldroyd-B em uma cavidade para valores de Deborah de 0 a 5, no qual são apresentadas as vantagens de se utilizar as variáveis logarítmicas na execução de tais simulações, onde foi possível solucionar as equações constitutivas para valores de Deborah mais elevados, se comparado com a modelagem sem utilizar a mudança para variáveis logarítmicas. No final da seção 2.5 da presente Dissertação está indicado os trabalhos [43] e [72] que tratam sobre as diferenças entre os números de Weissenberg e Deborah.

Dados os desafios e importância do estudo desse tipo de fluido, vários *software* CFD implementam aplicações para realizar tais simulações. Um destes *software* é o OpenFOAM[®], uma aplicação de código aberto baseada no método dos volumes finitos. Em [23] é implementado um *solver* no OpenFOAM[®], chamado `viscoelasticFluidFoam`, capaz de realizar simulações com diversos modelos viscoelásticos. Posteriormente, Pimenta e Alves [64] lançaram outro *solver* no OpenFOAM[®] intitulado *rheoTool* [63], no qual foi implementada a metodologia Log-conformation e novas abordagens para os esquemas de interpolação dos termos convectivos. Nesse trabalho [64] os autores analisaram escoamentos em uma contração planar 4:1 com um fluido Oldroyd-B, com o número de Deborah variando no intervalo de 0 a 12.

Embora no *rheoTool* possam ser encontradas as mais diversas equações constitutivas, até o presente momento e nos limites dos nossos conhecimentos, modelos que levam em consideração a variação da viscosidade com a pressão não foram ainda implementados ou publicados utilizando as metodologias do *rheoTool*. Nos fluidos não-Newtonianos, a viscosidade pode ser influenciada por diversas variáveis, como a taxa de cisalhamento, taxa de alongação, temperatura e pressão, por exemplo. A variação da viscosidade com a taxa de cisalhamento é a mais difundida na área, entretanto, existem diversos números de aplicações em que a dependência da viscosidade nas outras variáveis pode ser ainda mais importante. A importância da viscosidade dependendo da pressão tem sido vista

em problemas que envolvem lubrificação, processamento de alimentos e o bombeamento de combustível, ([50], [73]).

Stokes, em 1845, reconheceu em [79] a existência de uma relação entre a viscosidade e a pressão. Posteriormente, Barus [6] mostrou experimentalmente o crescimento da viscosidade com o aumento da pressão e sugeriu modelagens exponencial e linear. O trabalho de Bridgman [11] apresenta um estudo mostrando a variação da viscosidade de 43 líquidos com relação a pressão, da atmosférica até 12.000kgf/cm^2 , sob as temperaturas de 30°C e 75°C . Nesse trabalho ele mostrou que a viscosidade cresce muito rapidamente com o aumento da pressão para estes líquidos enquanto que comparativamente a variação da viscosidade da água sob diferentes valores da pressão é pequena. Embora este tema não seja atual, como constam nas referências dadas, há muito ainda para se investigar, principalmente no desenvolvimento de soluções numéricas para problemas complexos em que há significativa variação da pressão.

Aspectos da teoria Matemática com eventuais, muito poucos, ensaios numéricos para as equações que modelam escoamentos de fluidos Newtonianos e não-Newtonianos com viscosidade dependendo da pressão podem ser encontrados, colocando em ordem cronológica, nos trabalhos de Renardy (1986) [69], Davies (1994) [17], Larsson (1997) [47], Gazzola (1997) [31], Málek (2002) [53], Renardy (2003) [70], Huilgol (2006) [38], Rajagopal (2006) [68], Suslov (2008) [80], Rajagopal (2009) [67], Tran (2009) [81], Srinivasan (2009 e 2010) [77, 78], Kalogirou (2011) [44], Lanzendorfer (2011) [46], Karra (2011) [45], Hernández (2013) [34], Paloka (2013) [20], Pazanin (2014) [61], Zehra (2015) [86], Housiadas (2015 e 2018) [36, 37].

Além do trabalho [45], outros trabalhos mais pioneiros que consideram e apresentam os módulos do material viscoelástico variando com a pressão são, por exemplo, Bridgman (1931) [12], Singh e Nolle (1959) [76], McKinney e Belcher (1963) [52], Weertman et al. (1978) [84], Ivins et al. (1993) [40], e Sahaphol e Miura (2005) [74].

Pode-se notar que há trabalhos muito recentes nesta linha, tais como os trabalhos de Housiadas [36] e [37] e Karra et al. [45]. Housiadas [36] por exemplo, estudou o escoamento de um fluido viscoelástico entre duas placas paralelas, cuja viscosidade varia linearmente com a pressão. Essa pesquisa apresentou a solução analítica para as variáveis envolvidas em um escoamento utilizando o modelo *Upper Convective Maxwell* (UCM). Karra et al. [45] incluíram no modelo UCM as variações da viscosidade e do tempo de relaxação com respeito a pressão para estudar um problema de valor de contorno que modela o escoamento entre placas paralelas, onde a placa inferior está em repouso e a placa superior move-se a uma velocidade periódica no tempo, e obtiveram resultados teóricos e numéricos distintos da modelagem padrão.

Neste trabalho foram realizados estudos sobre as formulações matemáticas para resolver as equações que modelam escoamentos viscoelásticos, incompressíveis, isotérmicos bem como o método SIMPLE, e algumas de suas variações, para solucionar as variáveis primitivas velocidade e pressão, e o método dos volumes finitos para aproximação dessas equações resultantes, que são os métodos base para a metodologia implementada no *rheoTool*.

Foram realizados ensaios numéricos dos problemas clássicos do escoamento totalmente desenvolvido em um canal bidimensional e a contração 4:1 planar utilizando fluidos viscoelásticos modelados pela equação constitutiva Oldroyd-B e UCM. Nesse estudo foram analisadas duas abordagens. A primeira onde apenas a viscosidade polimérica depende da pressão. E uma segunda abordagem onde tanto a viscosidade polimérica quanto o tempo de relaxação dependem igualmente da pressão.

Os conteúdos estudados neste trabalho estão organizados em capítulos da seguinte maneira:

- no capítulo 2 apresenta-se a formulação matemática necessária para a modelagem, definição e solução dos problemas. Assim, apresentam-se as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis, laminares e isotérmicos, a modelagem de fluidos Newtonianos e Newtonianos Generalizados, as equações constitutivas para modelos viscoelásticos, e os modelos para as variáveis que dependem da pressão. Além disso, também define-se os parâmetros adimensionais utilizados neste trabalho e expõe-se algumas abordagens matemáticas para resolver estas equações;
- no capítulo 3 apresenta-se uma introdução ao *software* OpenFOAM[®], utilizado neste trabalho para realizar as simulações dos escoamentos. Também discorre-se sobre o *rheoTool*, um conjunto de *solvers* e utilitários para fluidos viscoelásticos baseados na plataforma OpenFOAM[®];
- o capítulo 4 traz uma breve descrição de como discretizar equações por meio do método dos volumes finitos, de modo geral. Ainda, inclui-se uma justificativa para a escolha do arranjo co-localizado no OpenFOAM[®];
- no capítulo 5 são apresentados algoritmos computacionais de solução para o acoplamento entre as variáveis primitivas, e alguns algoritmos utilizados para solucionar os sistemas lineares gerados pelo processo de discretização;
- o capítulo 6 apresenta os resultados numéricos obtidos para escoamentos de fluidos viscoelásticos modelados pela equação constitutiva Oldroyd-B e UCM para duas geometrias: canal e contração 4:1, ambos bidimensionais. Foram realizados testes de verificação e estudos paramétricos da nova modelagem.
- e no capítulo 7 são expressas as considerações finais sobre o desenvolvimento do trabalho.

Formulação Matemática

Os escoamentos de fluidos são modelados pelas equações de Navier-Stokes, as quais são representadas matematicamente por leis físicas de conservação, podendo descrever escoamentos compressíveis e incompressíveis, laminares e turbulentos. Neste trabalho as equações serão simplificadas para escoamentos incompressíveis, isotérmicos e laminares. Assim, obtemos a equação de conservação da massa e a equação da quantidade de movimento dadas, respectivamente, por

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.1)$$

e

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2.2)$$

onde ρ é a massa específica constante do fluido, \mathbf{v} é o vetor velocidade, p é a pressão e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor das tensões.

O tensor das tensões $\boldsymbol{\tau}$ descreve o comportamento reológico do fluido, que de maneira geral, classifica-se em fluido Newtoniano ou fluido não-Newtoniano.

2.1 Fluidos Newtoniano e Newtoniano Generalizado

Os fluidos Newtonianos, denominados assim por obedecerem a lei de Newton da viscosidade, são caracterizados por apresentarem uma deformação contínua com a ação de uma tensão de cisalhamento, expressando uma relação linear entre a tensão cisalhante e a taxa de deformação [13].

O tensor das tensões para um fluido Newtoniano incompressível é dado por

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}, \quad (2.3)$$

onde μ é o coeficiente de viscosidade dinâmica e \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T \right). \quad (2.4)$$

Em fluidos puramente Newtonianos, μ é constante. Assim, $\nabla \cdot \left(\nu (\nabla\mathbf{v})^T \right) = 0$, e portanto $\nabla \cdot \left(\nu \left(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T \right) \right) = \nu \nabla^2 \mathbf{v}$. Logo, a equação (2.2) é comumente apresentada como

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) - \nu \nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad (2.5)$$

onde $\nu = \mu/\rho$ representa a viscosidade cinemática.

Agora, quando μ apresenta variação em função de uma variável, como taxa de cisalhamento, temperatura ou pressão, estes são denominados Fluidos Newtonianos Generalizados (GNF - *Generalized Newtonian Fluid*), e a equação da quantidade de movimento apresenta-se como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \left(\nu (\nabla \mathbf{v})^T \right). \quad (2.6)$$

Os modelos Power-Law, Carreau, Casson são conhecidos por expressarem a viscosidade em função da taxa de cisalhamento [10, 39]; o modelo de Andrade, por exemplo, expressa a viscosidade como função da temperatura [5]; e os modelos de Barus que expressam o aumento linear ou exponencial da viscosidade com o aumento da pressão [6, 7].

2.2 Fluido Viscoelástico

Em contrapartida aos fluidos Newtonianos, os fluidos não-Newtonianos não apresentam tensão de cisalhamento diretamente proporcional à taxa de deformação, ou seja, não obedecem a Lei de Newton da Viscosidade. Dentre os fluidos não-Newtonianos, encontram-se os fluidos viscoelásticos, os quais são de grande importância científica e industrial, e têm sido muito estudados nas últimas décadas.

Para fluidos viscoelásticos o tensor das tensões é dividido em dois termos, sendo um da contribuição Newtoniana (viscosa) e outro da contribuição viscoelástica (polimérica), como segue,

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_S + \boldsymbol{\tau}_P, \quad (2.7)$$

onde $\boldsymbol{\tau}_S$ é o tensor da contribuição Newtoniana e $\boldsymbol{\tau}_P$ é o tensor extra-tensão ou tensor da contribuição polimérica, sendo

$$\boldsymbol{\tau}_S = 2\eta_S \mathbf{D} \quad (2.8)$$

e η_S a viscosidade de contribuição Newtoniana.

Reescrevendo a equação do momento (2.2), substituindo o tensor das tensões por (2.7) e expandindo o termo da contribuição viscosa obtem-se a seguinte equação do momento para fluidos viscoelásticos

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) \right) - \nabla \cdot (\eta_S \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \left(\eta_S (\nabla \mathbf{v})^T \right) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_P \quad (2.9)$$

ou, de forma mais simplificada, como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) - \nabla \cdot (\nu_S \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \left(\nu_S (\nabla \mathbf{v})^T \right) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_P, \quad (2.10)$$

com $\nu_S = \frac{\eta_S}{\rho}$ e, de agora em diante, p e $\boldsymbol{\tau}_P$ representando $\frac{p}{\rho}$ e $\frac{\boldsymbol{\tau}_P}{\rho}$, respectivamente.

A partir deste ponto é necessário conhecer e modelar as características viscoelásticas do fluido. A Tabela 2.1 apresenta algumas equações constitutivas que modelam a viscoelasticidade do fluido.

Nos modelos apresentados na Tabela 2.1, λ é o tempo de relaxação do fluido, os parâmetros α_G , L e ε são os parâmetros de extensibilidade do fluido, relacionados com a viscosidade extensional. O símbolo $(\overset{\nabla}{\cdot})$ representa a derivada convectada,

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_P = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_P}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\boldsymbol{\tau}_P) - \boldsymbol{\tau}_P \cdot \nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\tau}_P.$$

Tabela 2.1: Modelos viscoelásticos [8], [9]

Modelo	Equação Constitutiva
UCM	$\boldsymbol{\tau}_P + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_P = 2\eta_P \mathbf{D}$ e $\eta_S = 0$
Oldroyd-B	$\boldsymbol{\tau}_P + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_P = 2\eta_P \mathbf{D}$
Giesekus	$\boldsymbol{\tau}_P + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_P + \alpha_G \frac{\lambda}{\eta_P} (\boldsymbol{\tau}_P \cdot \boldsymbol{\tau}_P) = 2\eta_P \mathbf{D}$
FENE-CR	$\left[1 + \lambda \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{f}\right)\right] \boldsymbol{\tau}_P + \frac{\lambda}{f} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_P = 2\eta_P \mathbf{D}$ com $f = \frac{L^2 + \frac{\lambda}{\eta_P} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}_P)}{L^2 - 3}$
FENE-P	$\boldsymbol{\tau}_P + \frac{\lambda}{f} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_P = \frac{2a\eta_P}{f} \mathbf{D} - \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{f}\right) (\lambda \boldsymbol{\tau}_P + a\eta_P \mathbf{I})$ com $f = \frac{L^2 + \frac{\lambda}{a\eta_P} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}_P)}{L^2 - 3}$ e $a = \frac{L^2}{L^2 - 3}$
PTT	$f \boldsymbol{\tau}_P + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_P = 2\eta_P \mathbf{D}$ com $f = 1 + \frac{\varepsilon \lambda}{\eta_P} \text{tr}(\boldsymbol{\tau})$ (linear)

2.3 Abordagens Matemáticas para Resolver Escoamentos Viscoelásticos

Um grande problema para a simulação de escoamentos viscoelásticos é a perda de convergência do algoritmo numérico, conhecido como HWNP (*High Weissenberg Number Problem*) [58]. Várias abordagens foram propostas a fim de minimizar este problema, sendo algumas delas apresentadas a seguir.

2.3.1 Formulação EVSS

A formulação EVSS (*Elastic Viscous Split Stress*) divide o tensor total das tensões poliméricas em uma parte viscosa e outra elástica [58]

$$\boldsymbol{\tau}_P = \boldsymbol{\tau}_V + \boldsymbol{\tau}_E, \quad (2.11)$$

onde

$$\boldsymbol{\tau}_V = 2\eta_a \mathbf{D} \quad (2.12)$$

e, normalmente, assume-se $\eta_a = \eta_P$.

Substituindo (2.12) em (2.11), e com a equação atualizada (2.11) na equação do momento (2.10) obtemos

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) \right) - \nabla \cdot ((\eta_a + \eta_S) \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_E, \quad (2.13)$$

Esta modificação torna o problema numericamente mais estável, sem afetar a solução do problema, pois é feita apenas uma mudança de variável, a qual também deve ser realizada na equação do modelo constitutivo.

Apesar dos melhores resultados [51], a mudança de variável necessária pode ser muito complexa para algumas equações constitutivas [58].

2.3.2 Formulação DEVSS

A formulação DEVSS (*Discrete EVSS*) [32], também conhecida por BSD (*Both Sides Diffusion*), incorpora um termo difusivo extra a ambos os lados da equação do momento

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) \right) - \nabla \cdot ((\alpha + \eta_S) \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_P + \nabla \cdot (\alpha \nabla \mathbf{v}) , \quad (2.14)$$

onde $\alpha > 0$, e $\alpha = \eta_P$ tem sido uma escolha comum na literatura (ex. [14]).

A equação (2.14) diferencia-se da equação original apenas em sua forma discreta, pois os termos do lado direito da igualdade são resolvidos explicitamente, enquanto que os termos do lado esquerdo são resolvidos implicitamente. Este método possui a vantagem de não necessitar de uma mudança de variável, podendo assim, ser aplicado facilmente a qualquer equação constitutiva. A adição deste termo extra aumenta a elipicidade da equação, tornando o sistema mais estável, sem afetar a solução, uma vez que, quando a solução é obtida, um termo anula o outro.

2.3.3 Log-conformation

A abordagem log-conformation [21, 22] reescreve as equações constitutivas em termo do logaritmo do tensor conformação, mantendo o tensor conformação positivo definido e o campo do tensor extra-tensão linearizado em regiões de crescimento exponencial, aumentando a estabilidade numérica [64].

A relação entre o tensor conformação (\mathbf{A}) e o tensor extra-tensão, polimérico, para o modelo Oldroyd-B é dada por

$$\boldsymbol{\tau}_P = \frac{\eta_P}{\lambda} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) . \quad (2.15)$$

Considerando a equação (2.15) a equação de evolução para o tensor conformação \mathbf{A} do modelo Oldroyd-B é dada por

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\lambda} (\mathbf{I} - \mathbf{A}) . \quad (2.16)$$

Como o tensor conformação \mathbf{A} é positivo definido, então pode ser diagonalizado como

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R}^T , \quad (2.17)$$

onde \mathbf{R} é um tensor ortogonal, com as colunas sendo autovetores de \mathbf{A} , e a diagonal de $\boldsymbol{\Lambda}$ contendo seus respectivos autovalores.

Consideremos a seguinte decomposição

$$\nabla \mathbf{v}^T = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{B} + \mathbf{N}\mathbf{A}^{-1} , \quad (2.18)$$

onde $\boldsymbol{\Omega}$ e \mathbf{N} são matrizes antissimétricas, \mathbf{B} possui traço nulo e comuta com \mathbf{A} . Substituindo a equação (2.18) em (2.16) obtemos a seguinte equação para o modelo Oldroyd-B

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} - (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A} - \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}) - 2\mathbf{B}\mathbf{A} = \frac{1}{\lambda} (\mathbf{I} - \mathbf{A}) . \quad (2.19)$$

Fattal e Kupferman [21, 22] reformularam a equação (2.19) em termos do logaritmo natural de \mathbf{A}

$$\boldsymbol{\Theta} = \ln(\mathbf{A}) = \mathbf{R} \ln(\boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{R}^T , \quad (2.20)$$

levando a seguinte equação para $\boldsymbol{\Theta}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\Theta} - (\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Theta} - \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Omega}) - 2\mathbf{B} = \mathbf{R} \left[\frac{1}{\lambda} (\boldsymbol{\Lambda}^{-1} - \mathbf{I}) \right] \mathbf{R}^T . \quad (2.21)$$

Após solucionar Θ pela equação (2.21), obtem-se o tensor conformação \mathbf{A} pela equação (2.20) fazendo $\mathbf{A} = e^{\Theta}$ e, por fim, o tensor extra-stress é atualizado pela equação (2.15). Para simplificar a notação, consideremos

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Theta - (\Omega \Theta - \Theta \Omega) - 2\mathbf{B}.$$

A Tabela 2.2 apresenta exemplos de equações constitutivas modificadas pelo método Log-conformation, de alguns modelos viscoelásticos e o cálculo direto de $\boldsymbol{\tau}_P$ a partir de Θ .

Tabela 2.2: Modelos viscoelásticos com a abordagem Log-conformation

Modelo	$\Theta \rightarrow \boldsymbol{\tau}_P$	Equação constitutiva em Θ
Oldroyd-B	$\boldsymbol{\tau}_P = \frac{\eta_P}{\lambda} (e^{\Theta} - \mathbf{I})$	$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\lambda} (e^{-\Theta} - \mathbf{I})$
Giesekus	$\boldsymbol{\tau}_P = \frac{\eta_P}{\lambda} (e^{\Theta} - \mathbf{I})$	$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\lambda} \left[(e^{-\Theta} - \mathbf{I}) - \alpha_G e^{\Theta} (e^{-\Theta} - \mathbf{I})^2 \right]$
FENE-CR	$\boldsymbol{\tau}_P = \frac{\eta_P}{\lambda} f (e^{\Theta} - \mathbf{I})$	$\boldsymbol{\omega} = \frac{f}{\lambda} (e^{-\Theta} - \mathbf{I})$ com $f = \frac{L^2}{L^2 - \text{tr}(e^{\Theta})}$
FENE-P	$\boldsymbol{\tau}_P = \frac{\eta_P}{\lambda} (f e^{\Theta} - a \mathbf{I})$	$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\lambda} (a e^{-\Theta} - f \mathbf{I})$ com $f = \frac{L^2}{L^2 - \text{tr}(e^{\Theta})}$ e $a = \frac{L^2}{L^2 - 3}$
PTT	$\boldsymbol{\tau}_P = \frac{\eta_P}{\lambda(1-\zeta)} (e^{\Theta} - \mathbf{I})$	$\boldsymbol{\omega} = \frac{f}{\lambda} (e^{-\Theta} - \mathbf{I})$ com $f = 1 + \frac{\zeta}{1-\zeta} [\text{tr}(e^{\Theta}) - 3]$ (linear)

O modelo UCM pode ser obtido a partir do modelo Oldroyd-B fazendo $\eta_S = 0$.

2.4 Modelagens da Viscosidade e do Tempo de Relaxação Dependendo da Pressão

A existência de uma relação entre a viscosidade do fluido e a pressão do escoamento foi reconhecida por Stokes [79] e Barus [6, 7], através de dados experimentais, sugeriu modelagens exponencial e linear para a viscosidade. Outro trabalho experimental que corrobora com este fato foi realizado por Bridgman [11].

Nota-se que a partir da década de 80 houve um aumento nas pesquisas que estudam aspectos da teoria Matemática, com ainda poucos estudos numéricos para as equações que modelam escoamentos de fluidos, principalmente, os viscoelásticos com viscosidade dependendo da pressão. Na Introdução deste trabalho é possível encontrar uma lista mais ampla de referências, cita-se nesta ocasião alguns trabalhos como [17], [36], [37], [45], [68], [69], [86]. O trabalho de Karra et al. [45], que trabalha com fluidos viscoelásticos, adiciona a modelagem do tempo de relaxação do fluido como uma propriedade que também depende da pressão. Nesse trabalho [45], os autores citam o pioneirismo de Bridgman [12] nestes estudos experimentais e a sua defesa da relação dos módulos do material com a pressão.

De acordo com a literatura (ver [6], [7], [36] e [45]):

$$\eta_P(p) = f_{\eta_P}(p) \eta_{P_0} \quad (2.22)$$

$$\lambda(p) = f_{\lambda}(p) \lambda_0 \quad (2.23)$$

onde η_{P_0} é a viscosidades do polímero a uma pressão de referência, λ_0 o tempo de relaxação a uma pressão de referência e as funções $f_{\eta_P}(p)$ e $f_\lambda(p)$ podem assumir diferentes formas, exponencial ou linear:

$$f_{\eta_P}(p) = \begin{cases} e^{\gamma p}, \text{ ou} \\ 1 + \gamma(p - p_{ref}) \end{cases},$$

para a viscosidade, e

$$f_\lambda(p) = \begin{cases} e^{\Gamma p}, \text{ ou} \\ 1 + \Gamma(p - p_{ref}) \end{cases},$$

para o tempo de relaxação, onde γ e Γ são os coeficiente da viscosidade e do tempo de relaxação, respectivamente, dependendo da pressão, expresso em Pa^{-1} , e p é a pressão em Pa.

Neste presente trabalho, serão realizados estudos numéricos para explorar como a pressão afeta a viscosidade e o tempo de relaxação do fluido utilizando o pacote *rheoTool* do OpenFOAM®. Um cuidado especial deve ser tomado com relação a abordagem Matemática a ser empregada. A obtenção da equação constitutiva em função do tensor-conformação leva em consideração que a relação $\frac{\eta_P}{\lambda}$ é constante. Estas equações baseadas no tensor-conformação estão implementadas no *rheoTool*. Portanto, neste trabalho será necessário garantir $f_{\eta_P}(p) = f_\lambda(p)$.

As modelagens lineares tanto para a viscosidade quanto para o tempo de relaxação com $\gamma = \Gamma$ serão as adotadas neste trabalho.

Em resumo, neste trabalho serão adotadas as equações (2.22) e (2.23) juntamente com a equação (2.24):

$$f_{\eta_P}(p) = f_\lambda(p) = [1 + \gamma(p - p_{ref})] . \quad (2.24)$$

2.5 Números Adimensionais

O pacote *rheoTool* do OpenFOAM®, que é utilizado neste trabalho, implementa todas as equações na forma dimensional. Entretanto, para efeito de comparação para que as escalas, dimensões e unidades de medidas das propriedades não interfiram, os resultados serão apresentados na forma adimensional. Sendo assim, surgem números e parâmetros importantes e conhecidos na literatura.

O número de Reynolds (Re) é um número adimensional que representa a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas, sendo amplamente utilizado na mecânica dos fluidos para o cálculo do regime de escoamento de um fluido, é expresso por

$$Re = \frac{\rho U H}{\eta_0} , \quad (2.25)$$

onde ρ é a massa específica do fluido, U é uma velocidade característica do fluido, H é um comprimento característico e η_0 é a viscosidade dinâmica do fluido. Detalhando, η_0 na modelagem padrão dos fluidos viscoelásticos é a viscosidade total, $\eta_0 = \eta_S + \eta_{P_0}$, a uma taxa nula de cisalhamento, sendo η_S a viscosidade da contribuição newtoniana e η_{P_0} a viscosidade do polímero. Neste trabalho, com a modelagem da viscosidade com a pressão, interpreta-se η_0 como a viscosidade total a uma pressão de referência.

De modo geral, para valores baixos de Re o escoamento é laminar, enquanto que para valores altos de Re o escoamento é turbulento. Valores intermediários indicam que o escoamento encontra-se em uma zona de transição.

O parâmetro β que mede a contribuição Newtoniana do fluido, está definido no intervalo $(0, 1)$ como

$$\beta = \frac{\eta_S}{\eta_0} . \quad (2.26)$$

O número de Deborah (De) é definido pela razão entre o tempo de relaxação λ e o tempo característico do escoamento t_c , normalmente definido como $t_c = H/U$

$$De = \frac{\lambda}{t_c} = \frac{\lambda U}{H} . \quad (2.27)$$

Outro número adimensional importante em escoamentos com fluidos viscoelásticos é o número de Weissenberg (Wi) é um número adimensional que representa a razão entre as forças elásticas e as forças viscosas

$$Wi = \dot{\gamma} \lambda , \quad (2.28)$$

onde $\dot{\gamma}$ é a taxa de deformação característica e λ é o tempo de relaxação.

Neste trabalho, na modelagem em que λ é uma função da pressão, escreve-se $\lambda = \lambda_0$, onde λ_0 é o tempo de relaxação a uma pressão de referência.

A título de informação, em Reologia existem discussões sobre as diferenças e similaridades para aplicação correta dos números de Deborah e Weissenberg. O leitor interessado pode obter detalhes no trabalho pioneiro de [43]. Podemos citar outro autor que discutiu este assunto em [72]. John M. Dealy conclui o trabalho [43] colocando que o número de Deborah se destina a mensurar o quanto a resposta de um material a uma deformação é viscoelástica e não puramente viscosa, enquanto que o número de Weissenberg é destinado a descrever a não linearidade da resposta reológica. Ainda adiciona que há vários artigos e livros utilizando esses números incorretamente, até por que não é possível, exceto sob certas condições, fazer uma classificação dos dados.

2.6 Condições Auxiliares

As condições auxiliares são essenciais para a definição completa de uma equação diferencial parcial pois garantem que o problema seja bem posto, ou seja, garantem a existência e a unicidade da solução. Para os sistemas modelados pelas equações de Navier-Stokes são necessárias condições de contorno e condições iniciais.

Definir uma condição inicial para o problema é atribuir valores para as variáveis (velocidade, pressão, tensores, etc) no instante $t = t_0$, que satisfaçam as equações consideradas.

As condições de contorno são definidas de acordo com o problema físico que representam:

- **Entrada de fluido:** Na entrada de fluido no domínio é imposta uma velocidade \mathbf{v} . Neste trabalho, é utilizada uma velocidade nula para a componente tangencial a fronteira (\mathbf{v}_t), e uma velocidade específica para a componente normal a fronteira (\mathbf{v}_n)

$$\mathbf{v}_t = 0 \quad (2.29)$$

$$\mathbf{v}_n = v_{\text{inlet}} , \quad (2.30)$$

onde v_{inlet} é velocidade com que o fluido atravessa essa fronteira, pode ser constante, como a velocidade média do escoamento por exemplo, ou pode ser variável, de acordo

com o problema. Nesta fronteira, todas as componentes do tensor extra-tensão são nulas, ou seja,

$$\boldsymbol{\tau}_P = 0 , \quad (2.31)$$

salvo menção contrária que dependerá do tipo de problema, em que pode ser empregado algum tipo de solução analítica, por exemplo.

- Parede (fronteira sólida): Nestes contornos são consideradas, em geral, as condições de não-escorregamento e de impermeabilidade, em que o fluido não pode penetrar a parede. Podemos escrever as seguintes relações,

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{\text{parede}} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{v}_n = 0. \quad (2.33)$$

onde $\mathbf{v}_{\text{parede}}$ é a velocidade de movimentação da parede (alguns problemas levam em consideração paredes móveis, como por exemplo o problema da cavidade). No caso de contornos em repouso, $\mathbf{v}_{\text{parede}} = 0$, é o que chamamos de condição de não-escorregamento (*no-slip*). Na última década, a condição de escorregamento na parede (*slip wall*) ganhou um maior destaque a partir da tese de Doutorado de Ferrás [25] e suas inúmeras publicações, algumas citações [26], [27], [28].

No presente trabalho, conforme a metodologia adotada, neste contorno todas as componentes do tensor extra-tensão são calculadas por extrapolação linear. Esta abordagem para cálculo do tensor na fronteira sólida garante maior ordem de acurácia, quando comparado a condição gradiente zero [33].

- Saída de fluido: É a fronteira em que o fluido sai do domínio. A condição aplicada neste contorno é a condição de Neumann homogênea, na direção normal a fronteira, para todas as variáveis utilizadas no escoamento

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 , \quad (2.34)$$

ϕ , uma variável genérica, pode representar as componentes do vetor velocidade ou do tensor extra-tensão.

Introdução OpenFOAM[®]

A história do OpenFOAM[®] inicia em 1989, quando Henry Weller deu início a criação do Field Operation and Manipulation (FOAM) para a execução de operações com campos tensoriais [19].

Em 2004 o FOAM passa a ser um *software* de código aberto, sob a licença GPL (GNU Public License) e mantido pela OpenCFD, sendo chamado desde então de OpenFOAM[®] (Open Field Operation and Manipulation). A partir deste ano, o OpenFOAM[®] ganhou popularidade, por ser uma ferramenta que inclui, por padrão, vários *solvers* e aplicações para pré e pós-processamento destinados a resolução dos mais diversos problemas, bem como possibilita que o usuário desenvolva seu próprio *solver* ou utilitário tendo as bibliotecas do código do OpenFOAM[®] como base.

Algumas das principais vantagens do OpenFOAM[®], as quais atraem cada vez mais usuários são:

- código aberto, tem seu código distribuído gratuitamente, assim o usuário tem liberdade para personalizar o código, corrigindo *bugs* e desenvolvendo novas aplicações, o que torna o código do OpenFOAM[®] mais confiável e sua expansão cada vez mais rápida;
- escrito na linguagem C++, uma linguagem de alto nível, orientada a objetos, que permite a construção de um código de alta performance, eficiente e modular;
- inclui ferramentas de criação de malhas, pré e pós-processamento;
- decomposição e execução de problemas em paralelo, reduzindo consideravelmente o tempo necessário para executar problemas muito grandes;
- malhas móveis e não-ortogonais, comportando problemas com os mais diversos tipos de geometria;
- grande variedade de esquemas de interpolação e de *solvers* para a resolução de sistemas lineares;
- aplicações para importação e exportação de dados de outros *software* de CFD.

O OpenFOAM[®] trata as variáveis de forma dimensional, o que torna necessário informar as unidades de medidas dos campos vetoriais/tensoriais e das propriedades associadas a eles. Além do usuário identificar as unidades para cada variável, também é realizada uma checagem dimensional nas equações a fim de evitar operações sem sentido. As unidades são definidas usando a classe `dimensionSet`.

3.1 Estrutura de um Caso para a Execução de uma Simulação no OpenFOAM®

Um caso do OpenFOAM® consiste de uma forma estruturada de arquivos com informações necessárias para a execução de uma simulação. Estes arquivos descrevem a geometria e a malha utilizada, condições de contorno, discretizações, métodos numéricos e propriedade físicas intrínsecas ao problema.

A Figura 3.1 apresenta uma estrutura básica de um caso genérico:

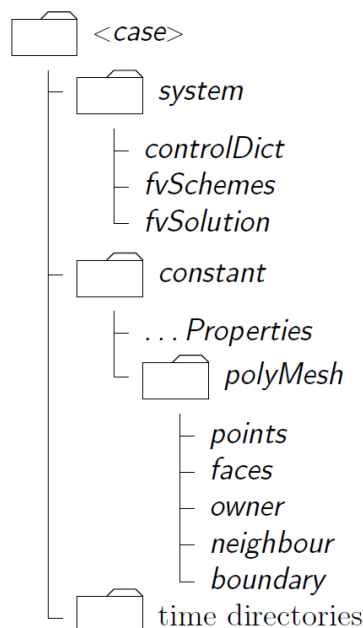


Figura 3.1: Estrutura de diretórios. Fonte: [30].

O diretório raiz `<case>` nomeia o caso e dentro dele encontram-se os demais arquivos e diretórios com as propriedades da simulação.

O diretório `system` possui as informações associadas ao processo de solução. Contém pelo menos três arquivos: `controlDict` com os parâmetros de controle da execução; `fvSolution` especificando os métodos para solucionar as equações, tolerâncias e parâmetros de relaxação; e, `fvSchemes` com os esquemas de discretização e interpolação utilizados. Além destes, também é comumente encontrado o arquivo `blockMeshDict`, carregando as informações da geometria e necessário para gerar a malha, com o auxílio do utilitário `blockMesh`.

O diretório `constant` possui arquivos especificando as propriedades físicas do caso, e o diretório `polyMesh`, que armazena a descrição completa da malha.

Os diretórios de tempo (`time directories`) contêm arquivos de dados para cada campo. Os arquivos podem conter valores iniciais e condições de contorno especificados pelo usuário, ou resultados da execução da simulação pelo OpenFOAM®.

3.2 Pré-Processamento

Nesta etapa é modelada a região de interesse e definidas propriedades necessárias durante o processo de simulação, como condições de contorno, esquemas para discretização das equações e propriedades físicas do fluido. Outro passo desta etapa, após a modelagem da região de interesse, é a produção de uma malha, oriunda da discretização do domínio

em uma quantidade finita de subdomínios, os quais serão chamados de volumes de controle ou de células (ou ainda, também são chamados de elementos).

Juntamente com o pacote do OpenFOAM®, são disponibilizados alguns utilitários para gerar e manipular malhas. Um desses utilitários é o `blockMesh`, que utiliza as informações contidas no arquivo `system/blockMeshDict` para estruturar os dados da malha e armazená-los em arquivos no diretório `constant/PolyMesh`.

Caso o usuário opte por não utilizar as ferramentas para geração de malha do OpenFOAM®, é possível importar malhas geradas por *software* de CAD, bem como importar malhas utilizadas por outros *software* de CFD, como por exemplo o Fluent, STAR-CD ou I-DEAS.

3.3 Simulação

Após preparar o caso para ser executado, partimos para o passo de resolução numérica das equações discretizadas. Para esta etapa são utilizados *solvers*, arquivos executáveis que cumprem com a função de executar a simulação, resolvendo os sistemas lineares gerados e salvando os resultados obtidos para posterior uso.

O OpenFOAM® incorpora vários *solvers* prontos para serem utilizados em uma ampla variedade de problemas, como escoamentos incompressíveis ou compressíveis, transientes ou estacionários, turbulentos ou laminares, dentre outros. Caso o usuário precise utilizar uma modelagem que não se encontra em nenhum *solver* padrão, é possível que ele crie o próprio *solver* atendendo seus propósitos.

3.4 Pós-Processamento

O pós-processamento é a etapa responsável pela apresentação dos resultados da simulação. São utilizadas ferramentas para manipulação dos resultados e representação visual dos dados. O OpenFOAM® possui alguns utilitários para manipulação e extração de dados, e também, por padrão, faz uso de uma versão adaptada do ParaView, denominada `paraFoam`. Também é possível exportar os dados para que sejam lidos por outros *software*, ou até mesmo exportar para o formato VTK, o qual é amplamente aceito pelos *software* de visualização.

3.5 RheoTool

O primeiro *solver* para fluidos viscoelásticos para o OpenFOAM® foi desenvolvido por [24], com o nome de `viscoelasticFluidFoam`, possuindo uma biblioteca com uma ampla variedade de modelos viscoelásticos.

Posteriormente, a fim de melhorar a estabilidade deste *solver* e de ampliar as possibilidades de simulações com diferentes tipos de fluidos, foi criado o *rheoTool*[63]. Algumas das vantagens do *rheoTool* incluem a possibilidade de utilizar a metodologia log-conformation para fluidos viscoelásticos, esquemas de discretização de alta ordem para o termo convectivo, solucionar as equações de forma acoplada ou desacoplada e utilizar métodos para solucionar matrizes esparsas do Petsc, Hypre e Eigen. Mais detalhes da implementação e da utilização desta ferramenta podem ser encontrados em [63] e [64].

Método dos Volumes Finitos

O método dos volumes finitos é bastante empregado na Dinâmica dos Fluidos Computacional (ver por exemplo, [2], [29], [49], [56], [83]). A referência [2] traz, também, a evolução histórica da busca por metodologias numéricas robustas baseadas no método dos volumes finitos para resolver especificamente escoamentos viscoelásticos. Em [2], os autores relatam a indiscutível aceitação deste método para solução de problemas de Reologia Computacional, pois as novas metodologias garantem boa estabilidade, convergência e acurácia, inclusive para problemas envolvendo maiores números de Weissenberg ([1], [4], [21]).

O método dos volumes finitos utiliza a forma integral das equações de Navier-Stokes e equações constitutivas, aplicada a cada volume de controle (Figura 4.1) [29]. Este capítulo estará voltado para uma breve apresentação de como aproximar cada operador destas equações pelo método dos volumes finitos.

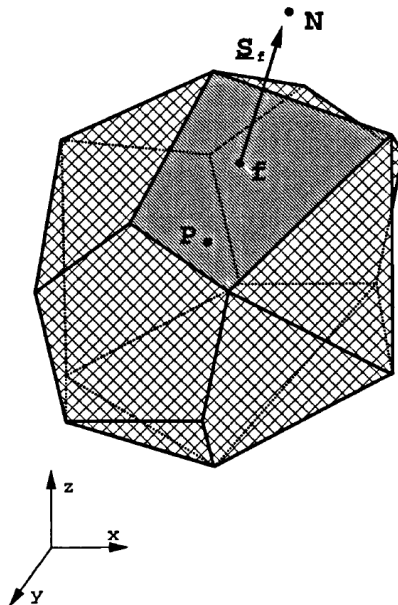


Figura 4.1: Volume de controle. Fonte: [41].

4.1 Discretização do Termo Gradiente

O operador gradiente está presente nas equações da quantidade de movimento e constitutiva, aplicado diretamente na variável pressão e no campo de velocidade. O gradiente também aparece no termo difusivo, onde escreve-se o Laplaciano como o Divergente do Gradiente, como será visto na próxima seção 4.2. Devido as vastas possibilidades de formas que o volume de controle pode assumir com as malhas estruturadas e não-estruturadas, esta seção descreverá a aproximação do gradiente no caso de malhas cartesianas ortogonais e o procedimento de integração de Green-Gauss para um caso particular de malha não-estruturada. Outro procedimento para malhas não-estruturadas é por meio do método dos mínimos quadrados. Este método gera melhores aproximações para o gradiente, porém exige um custo computacional mais elevado ([56]).

Para generalizar a notação, o operador gradiente será aplicado na variável genérica ϕ . Assim, as aproximações serão descritas para $\nabla\phi$.

4.1.1 Malhas Cartesianas

Por simplicidade, o exemplo de aproximação será apresentado para o caso bidimensional. Para fixar os índices de posição no volume de controle, considere a Figura 4.2 (extraída do livro [56]).

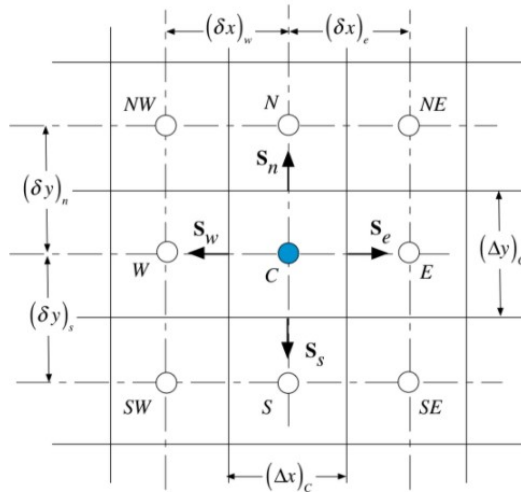


Figura 4.2: Malha Cartesiana bidimensional. Fonte: [56].

No caso de malha Cartesiana, a aproximação do gradiente no centro (C) do volume utiliza diferença central:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_C = \frac{\phi_E - \phi_W}{x_E - x_W},$$

componente do $\nabla\phi$ na direção- x , e

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_C = \frac{\phi_N - \phi_S}{x_N - x_S},$$

componente do $\nabla\phi$ na direção- y .

Estas fórmulas de aproximações não são válidas para o caso de malhas não-estruturadas. Portanto, as próximas seções trarão exemplos para casos particulares de malhas não-estruturadas.

4.1.2 Integração de Green-Gauss

O procedimento de Green-Gauss é mais abrangente, pode ser aplicado as malhas não-estruturadas em geral. Nesta seção, tal procedimento será descrito para um caso particular de malha não-estruturada.

Primeiramente, considere o gradiente médio sobre um volume de controle de centro (ou centróide) C e volume V_C ,

$$\overline{\nabla\phi}_C = \frac{1}{V_C} \int_{V_C} \nabla\phi \, dV .$$

Em decorrência do Teorema da Divergência, a integral sobre o volume é transformada em uma integral sobre a superfície ∂V_C ,

$$\overline{\nabla\phi}_C = \frac{1}{V_C} \int_{\partial V_C} \phi \, d\mathbf{S} , \quad (4.1)$$

onde $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ é o vetor normal exterior a superfície ∂V_C do volume, lembrando que o vetor \mathbf{n} é unitário.

Lembrando que no contexto discreto, a superfície ∂V_C do volume é composta pela reunião de polígonos, nomeadamente faces f , e portanto, a equação (4.1) pode ser reescrita como,

$$\overline{\nabla\phi}_C V_C = \sum_{f \sim nb(C)} \int_f \phi \, d\mathbf{S} , \quad (4.2)$$

onde a notação $f \sim nb(C)$ representa todas as faces f que constituem a fronteira ∂V_C do volume de controle de centro C ; nb sugere todas as faces f na “vizinhança” do centro C do volume, pois nb representa a abreviação de *neighborhood*, vizinhança em inglês.

Aplicando o Teorema do Valor Médio para Integrais, obtém-se

$$\overline{\nabla\phi}_C V_C = \sum_{f \sim nb(C)} \overline{\phi}_f S_f , \quad (4.3)$$

onde $\overline{\phi}_f$ é o valor médio de ϕ na face f , ou seja, é o valor de ϕ em algum ponto P da face f , e S_f representa a área da face f .

Desta forma, o gradiente de ϕ no centróide C ($\nabla\phi_C$) é aproximado por $\overline{\nabla\phi}_C$, ou seja,

$$\nabla\phi_C \approx \frac{1}{V_C} \sum_{f \sim nb(C)} \overline{\phi}_f S_f . \quad (4.4)$$

Uma última aproximação a fazer é para o valor médio de ϕ na face f ($\overline{\phi}_f$), já que o ponto P é desconhecido na prática. O valor $\overline{\phi}_f$ será aproximado pelo valor de ϕ no centro da face f , o qual será denotado simplesmente por ϕ_f . Portanto, a equação 4.5 será a aproximação para o gradiente,

$$\nabla\phi_C \approx \frac{1}{V_C} \sum_{f \sim nb(C)} \phi_f S_f . \quad (4.5)$$

Note que para aproximar o gradiente de ϕ no centróide C é necessário estimar o valor de ϕ no centro de cada face f que compõe a superfície ∂V_C do volume de centróide C . Para isto, pode-se utilizar diferentes abordagens envolvendo faces ou vértices vizinhos. A abordagem baseada em faces envolve um estêncil computacional mais compacto, o que

leva a sistemas lineares menores, porém, a abordagem baseada em vértices pode ser mais precisa pelo fato de trazer mais informações da vizinhança.

Para exemplificar o cálculo de ϕ_f na integração de Gree-Gauss, esta seção desenvolverá o caso da abordagem que envolve faces vizinhas.

Considere dois volumes de controle de centróides C e F , respectivamente, com uma face f em comum.

Caso a interseção do segmento de extremidades nos centróides C e F , denotado por $[CF]$, ocorra exatamente no centro da face f (ver Figura 4.3 extraída de [56]), o valor de ϕ_f é obtido simplesmente pela média ponderada dos valores de ϕ_C e ϕ_F , como a equação (4.6).

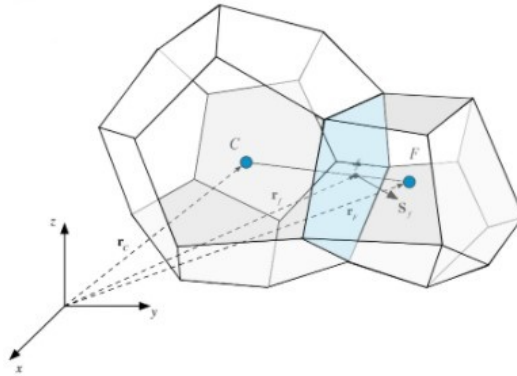


Figura 4.3: Esboço de um tipo de malha não-estruturada tridimensional. Fonte: [56].

$$\phi_f = g_C \phi_C + (1 - g_C) \phi_F, \quad (4.6)$$

onde $g_C = \frac{d_{Ff}}{d_{CF}}$ é o fator de ponderação dado pela razão entre a distância de F até a face f e o comprimento de $[CF]$. Note que, quando a interseção da face f com o segmento $[CF]$ é o ponto médio de $[CF]$, esta média ponderada (4.6) é a média aritmética.

Para efeito de informação, no caso mais geral, em que o segmento $[CF]$ não passa pelo centro da face f , considera-se um ponto f' no segmento $[CF]$ de uma das seguintes maneiras: (i) f' é a interseção de $[CF]$ com a face f ou; (ii) f' é o ponto médio de $[CF]$ ou; (iii) f' é tal que o segmento $[ff']$ é perpendicular ao segmento $[CF]$. A escolha por (ii) simplifica os cálculos e por (iii) melhora a precisão no cálculo do gradiente. A dedução de todos estes casos tem um forte apelo geométrico seguido de muitos cálculos analíticos, maiores detalhes ver, por exemplo, [56].

4.1.3 Gradiente no OpenFOAM®

O esquema de discretização do termo gradiente é especificado no sub-dicionário `gradSchemes`, no arquivo `fvSchemes`, usando a sintaxe geral:

```
gradSchemes
{
    default          none;
    grad(phi)       <optional limiter>
                  <gradient scheme>
                  <interpolation scheme>;
}
```

<optional limiter>: parâmetro opcional, tenta manter a condição de monotonicidade, limitando o gradiente e garantindo que o valor interpolado para a face está entre os valores nodais das células que compartilham a face.

<gradient scheme>: esquema para a discretização do gradiente, podendo ser Gauss (Green-Gauss) ou lastSquare (mínimos quadrados).

<interpolation scheme>: esquema para o cálculo de ϕ_f . Algumas esquemas disponíveis são: linear, cubic, Minmod, QUICK, downwind e upwind.

4.2 Semi-Discretização do Termo Divergente e Lapaciano

O termo viscoso da equação de conservação da quantidade de movimento é modelado pelo Laplaciano, que está representado pelo termo divergente $\nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{v})$. A viscoelasticidade também está representada pelo termo divergente $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_P$.

Como já dito, o método dos volumes finitos utiliza a forma integral das equações de conservação aplicada a cada volume de controle. Para exemplificar a aproximação do operador divergente pelo método dos volumes finitos, será utilizada a equação do calor (4.7), sem a interferência de um termo fonte,

$$\nabla \cdot (\Gamma^\phi \nabla \phi) = 0 , \quad (4.7)$$

onde Γ^ϕ é o coeficiente de difusão e ϕ uma função escalar.

Integrando a equação (4.7) sobre o volume V_C , tem-se

$$\int_{V_C} \nabla \cdot (\Gamma^\phi \nabla \phi) dV = 0 , \quad (4.8)$$

que, pelo Teorema da Divergência (4.8) pode ser reescrita sobre a fronteira ∂V_C do volume como

$$\int_{V_C} \nabla \cdot (\Gamma^\phi \nabla \phi) dV = \int_{\partial V_C} \Gamma^\phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial V_C} \Gamma^\phi \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} = 0 , \quad (4.9)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário exterior a superfície ∂V_C do volume.

A última integral de (4.9) será reescrita sobre cada face f do volume:

$$\int_{V_C} \nabla \cdot (\Gamma^\phi \nabla \phi) dV = \sum_{f \sim nb(C)} \int_f \Gamma^\phi \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} = 0 , \quad (4.10)$$

onde a notação $f \sim nb(C)$ representa todas as faces f que constituem a fronteira ∂V_C do volume de controle de centro C .

Portanto, aplicando o Teorema do Valor Médio para Integrais e avaliando, de forma aproximada, os valores de $\Gamma^\phi \nabla \phi$ no centro de cada face f , obtemos a seguinte aproximação para a forma integral do operador divergente sobre V_C ,

$$\int_{V_C} \nabla \cdot (\Gamma^\phi \nabla \phi) dV \approx \sum_{f \sim nb(C)} (\Gamma^\phi \nabla \phi)_f S_f , \quad (4.11)$$

onde S_f é a área da face f .

Note que nesta aproximação do Laplaciano, a fórmula de aproximação também requer a aproximação do gradiente $(\nabla \phi)_f$. A seção anterior 4.1 traz uma ideia para a aproximação do operador gradiente.

4.2.1 Termo Difusivo no OpenFOAM®

O esquema de discretização do termo difusivo é especificado no sub-dicionário `laplacianSchemes`, no arquivo `fvSchemes`, usando a sintaxe geral:

```
laplacianSchemes
{
    default                none ;
    laplacian (gamma, phi) Gauss
                        <interpolation scheme>
                        <snGrad scheme>;
}
```

<interpolation scheme>: esquema de interpolação para o cálculo do Termo I.

Alguns esquemas disponíveis são: `linear`, `cubic`, `Minmod`, `QUICK`, `downwind` e `upwind`.

<snGrad scheme>: esquema para cálculo de \mathbf{E}_f e \mathbf{T}_f .

Algumas opções disponíveis no OpenFOAM® são: `corrected`, `uncorrected` e `orthogonal`.

4.3 Discretização do Termo Convectivo em uma Malha Estruturada (retangular)

Com base na equação (4.11) temos, para o termo convectivo

$$\int_{V_C} \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{v}) dV \approx \sum_{f \sim nb(C)} (\rho \phi \mathbf{v})_f \cdot \mathbf{S}_f = \sum_{f \sim nb(C)} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{S})_f \phi_f = \sum_{f \sim nb(C)} \dot{m}_f \phi_f, \quad (4.12)$$

onde $\dot{m}_f = (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{S})_f$ é o fluxo de massa que atravessa a face f .

Após este passo, é preciso escolher um esquema de interpolação para o cálculo de ϕ_f . Alguns deles são apresentados a seguir.

4.3.1 Diferenças Centrais (Linear)

O valor de ϕ_f na face é aproximado linearmente por

$$\phi_f = \phi_C + \frac{(\phi_F - \phi_C)}{d_{CF}} d_{Cf}, \quad (4.13)$$

onde d_{CF} é a distância entre os centroides dos elementos F e C , e d_{Cf} é a distância entre a face f e o centroide do elemento C . A equação (4.13) pode ser reescrita como

$$\phi_f = \left(1 - \frac{d_{Cf}}{d_{CF}}\right) \phi_C + \frac{d_{Cf}}{d_{CF}} \phi_F. \quad (4.14)$$

Substituindo (4.14) em (4.12) temos

$$\sum_{f \sim nb(C)} \dot{m}_f \phi_f = \sum_{f \sim nb(C)} \left\{ \dot{m}_f \left[\left(1 - \frac{d_{Cf}}{d_{CF}}\right) \phi_C + \frac{d_{Cf}}{d_{CF}} \phi_F \right] \right\}. \quad (4.15)$$

4.3.2 Esquema Upwind

No esquema `upwind`, ϕ_f é calculado de acordo com o fluxo de massa na respectiva face f , tal que

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_C & \text{se } \dot{m}_f > 0 \\ \phi_F & \text{se } \dot{m}_f < 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Assim a discretização do termo convectivo por meio do esquema upwind dada por

$$\sum_{f \sim nb(C)} \dot{m}_f \phi_f = \left(\sum_{f \sim nb(C)} \max(\dot{m}_f, 0) \right) \phi_C + \sum_{f \sim nb(C)} (-\max(-\dot{m}_f, 0) \phi_f) . \quad (4.17)$$

4.3.3 Esquemas de Alta Ordem

Consideremos a equação (4.12), onde \dot{m}_f é obtido por meio da interpolação de Rhie-Chow, apresentada na seção 5.1, e ϕ_f precisa ser calculado a partir dos valores conhecidos nos centros das células vizinhas.

Algumas opções de esquemas são o upwind, um esquema incondicionalmente estável, mas apenas de primeira ordem de acurácia; e diferenças centrais, um esquema condicionalmente estável, mas de segunda ordem de acurácia; apresentados na seção 4.3 para uma malha estruturada retangular. Porém, uma alternativa para equilibrar a estabilidade e a acurácia são os esquemas de alta ordem HRS (*High-Resolution Scheme* - em inglês).

Concentraremos a análise dos HRSs na abordagem de variável normalizada (*Normalized Variable Approach* (NVA) - em inglês). São introduzidas as seguintes variáveis normalizadas,

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_f = \frac{\phi_f - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} & \text{variável normalizada de } \phi_f , \\ \tilde{\phi}_C = \frac{\phi_C - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} & \text{variável normalizada de } \phi_C . \end{cases} \quad (4.18)$$

Consideremos a malha uniforme apresentada na Figura 4.4

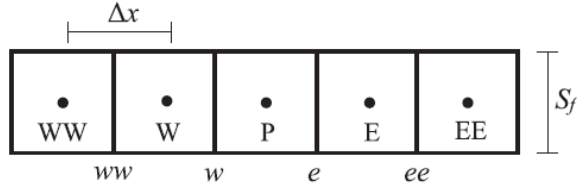


Figura 4.4: Malha uniforme para esquematização do HRS. Fonte: [64].

Seja $f = e$ e o fluxo atravessando a face de P para E ($\dot{m}_e > 0$), então temos $C = P$, $D = E$ e $U = W$. Agora considerando que o fluxo atravessa a face de E para P ($\dot{m}_e < 0$), então temos $C = E$, $D = P$ e $U = EE$. Quando representados em um diagrama de variáveis normalizadas muitos dos HRSs são funções lineares na forma da equação (4.19) [55]

$$\tilde{\phi}_f = \hat{\alpha} \tilde{\phi}_C + \hat{\beta} , \quad (4.19)$$

onde $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ podem tomar diferentes valores, em diferentes intervalos de $\tilde{\phi}_C$.

Substituindo (4.18) em (4.19) obtemos

$$\phi_f = \hat{\alpha} \phi_C + \hat{\beta} \phi_D + (1 - \hat{\alpha} - \hat{\beta}) \phi_U . \quad (4.20)$$

Alguns exemplos de HRS são listados abaixo:

$$\text{CUBISTA} \quad [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] = \begin{cases} \left[\frac{7}{4}, 0 \right] & 0 < \tilde{\phi}_C < \frac{3}{8} , \\ \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{8} \right] & \frac{3}{8} \leq \tilde{\phi}_C \leq \frac{3}{4} , \\ \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] & \frac{3}{4} < \tilde{\phi}_C < 1 , \\ [1, 0] & \text{caso contrário} . \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\text{MINMOD} \quad [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] = \begin{cases} \left[\frac{3}{2}, 0 \right] & 0 \leq \tilde{\phi}_C \leq \frac{1}{2}, \\ \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] & \frac{1}{2} \leq \tilde{\phi}_C \leq 1, \\ [1, 0] & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\text{STOIC} \quad [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] = \begin{cases} \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] & 0 \leq \tilde{\phi}_C \leq \frac{1}{2}, \\ \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{8} \right] & \frac{1}{2} \leq \tilde{\phi}_C \leq \frac{5}{6}, \\ [0, 1] & \frac{5}{6} \leq \tilde{\phi}_C \leq 1, \\ [1, 0] & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\text{SUPERBEE} \quad [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] = \begin{cases} \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] & 0 \leq \tilde{\phi}_C \leq \frac{1}{2}, \\ \left[\frac{3}{2}, 0 \right] & \frac{1}{2} \leq \tilde{\phi}_C \leq \frac{2}{3}, \\ [0, 1] & \frac{2}{3} \leq \tilde{\phi}_C \leq 1, \\ [1, 0] & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.24)$$

Embora a equação (4.19) seja utilizada para malhas uniformes, ela também é frequentemente adaptada para utilização em malhas não-uniformes, sem perda significativa de generalidade [16].

Na maioria dos casos, quando aplicada em malhas não-estruturadas, o centro da célula U não está alinhado com os centros das células C e D , e portanto a obtenção do valor de ϕ_U não é trivial. Para contornar este problema [42] sugere o uso da seguinte extrapolação,

$$\phi_U \approx \phi_D - 2(\nabla\phi)_C \cdot \mathbf{d}_{CD}, \quad (4.25)$$

onde \mathbf{d}_{CD} é o vetor conectando as células C e D , para avaliar $\tilde{\phi}_C$ na equação (4.18) e ϕ_f na equação (4.20).

Outro fator a ser considerado é a contribuição da equação (4.20) para a matriz de coeficientes e para o vetor de termo fonte. Se todos os termos são resolvidos implicitamente, há a possibilidade de ocorrer instabilidades, afetando diretamente convergência do método numérico [64].

Uma abordagem para contornar este problema, é implementar o HRS como uma combinação entre os esquemas de diferenças centrais e o upwind, com o fator de combinação, normalmente baseado em $\tilde{\phi}_C$, calculado localmente para cada célula. A parte relacionada ao esquema upwind é solucionada implicitamente permanecendo na matriz de coeficientes, enquanto a diferença entre o HRS e o upwind é calculada explicitamente. Porém, devemos notar que essa parte explícita, enviada para o termo fonte, pode afetar a taxa de convergência do método [55]. Este procedimento é conhecido como *deferred correction* e pode ser escrito usando as equações (4.20) e (4.25) como

$$\phi_f = [\phi_C]_{imp} + \left[(\hat{\alpha} - 1)\phi_C + \hat{\beta}\phi_B + (1 - \hat{\alpha} - \hat{\beta})(\phi_D - 2(\nabla\phi)_C \cdot \mathbf{d}_{CD}) \right]_{exp}. \quad (4.26)$$

Um último tópico a ser discutido é a respeito de como as equações (4.19) e (4.20) são aplicadas quando propriedade transportada ϕ é um vetor ou tensor (como por exemplo \mathbf{v} ou $\boldsymbol{\tau}_P$).

A primeira abordagem é calcular e utilizar o mesmo valor das variáveis $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ para as múltiplas componentes. Esse cálculo é baseado na norma do vetor ou no traço do tensor. Esta é a abordagem empregada no OpenFOAM[®] e tem a vantagem exigir um menor custo computacional. Entretanto, os valores das variáveis tendem a ser fortemente influenciados pela componente dominante e, em algumas situações, esse tratamento simplificado pode introduzir instabilidades numéricas.

A segunda abordagem é obter um valor de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ para cada componente, aumentando a estabilidade numérica. A ausência desta abordagem no OpenFOAM[®] é a principal motivação para a reimplementação dos esquemas convectivos, feita no *rheoTool*[64].

4.3.4 Termo Convectivo no OpenFOAM®

O esquema de discretização do termo convectivo é especificado no sub-dicionário `divSchemes`, no arquivo `fvSchemes`, usando a sintaxe geral:

```
divSchemes
{
    default          none ;
    div (Q)          <integration scheme> <interpolation scheme>;
    div (phi ,Q)     <integration scheme> <interpolation scheme>;
}
```

`<integration scheme>`: esquema utilizado para integração, por padrão o OpenFOAM® tem uma única opção disponível, `Gauss`.

O `rheoTool` implementa um outro método, chamado `GaussDefCmpw`, descrito brevemente na seção 4.3.3.

`<interpolation scheme>`: esquema para o cálculo de ϕ_f .

Alguns esquemas disponíveis são: `linear`, `cubic`, `Minmod`, `QUICK`, `downwind` e `upwind`.

4.4 Termo Transiente

Consideremos a equação 2.2 reescrita da forma

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}) + \mathcal{L} (\mathbf{v}) = 0 , \quad (4.27)$$

onde \mathcal{L} é um operador espacial contendo os termos não-transientes e $\frac{\partial}{\partial t}$ é o operador transiente.

Integrando a equação (4.27) sobre um volume de controle C temos,

$$\int_{V_C} \frac{\partial (\mathbf{v})}{\partial t} dV + \int_{V_C} \mathcal{L} (\mathbf{v}) dV = 0 , \quad (4.28)$$

a qual, depois de discretizada sobre o centroide do volume pelo teorema do valor médio, torna-se

$$\frac{\partial (\mathbf{v}_C)}{\partial t} V_C + L (\mathbf{v}_C^t) = 0 , \quad (4.29)$$

onde V_C é o volume da célula C e $L (\mathbf{v}_C^t)$ é o operador de discretização espacial em algum tempo t .

Integrando a equação (4.29) sobre o intervalo de tempo $[t - \Delta t/2, t + \Delta t/2]$ obtemos,

$$\underbrace{\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \frac{\partial (\mathbf{v}_C)}{\partial t} V_C dt}_{\text{Termo I}} + \underbrace{\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} L (\mathbf{v}_C^t) dt}_{\text{Termo II}} = 0 . \quad (4.30)$$

Considerando V_C constante, o Termo I torna-se a diferença de fluxo das faces temporais (Figura 4.5), e com o Termo II avaliado como uma integral de volume usando a regra do ponto médio, a equação (4.30) transforma-se na equação transiente semi-discretizada (4.31)

$$V_C (\mathbf{v}_C)^{t+\Delta t/2} - V_C (\mathbf{v}_C)^{t-\Delta t/2} + L (\mathbf{v}_C^t) \Delta t = 0 \quad (4.31)$$

ou, escrita de forma mais padrão, com todos os termos divididos por Δt , como

$$\frac{(\mathbf{v}_C)^{t+\Delta t/2} - (\mathbf{v}_C)^{t-\Delta t/2}}{\Delta t} V_C + L (\mathbf{v}_C^t) = 0 . \quad (4.32)$$

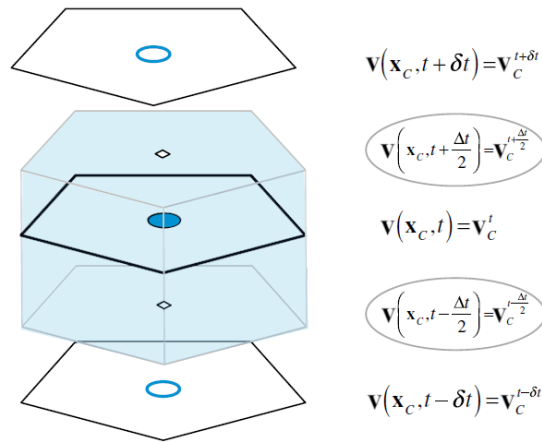


Figura 4.5: Elemento de domínio temporal. Adaptado de [56].

Para obter a equação discretizada completa, é necessário escolher um perfil de interpolação que expresse os valores das faces, $\mathbf{v}_C^{t+\Delta t/2}$ e $\mathbf{v}_C^{t-\Delta t/2}$, em termos dos valores dos elementos em \mathbf{v}_C^t , $\mathbf{v}_C^{t-\Delta t}$, $\mathbf{v}_C^{t+\Delta t}$, etc.

4.4.1 Termo Transiente no OpenFOAM[®]

O esquema de discretização temporal é especificado no sub-dicionário `ddtSchemes`, no arquivo `fvschemes`, usando a sintaxe geral:

```

ddtSchemes
{
    default      none ;
    ddt(U)      <time scheme>;
}

```

<time scheme>: esquema para interpolação em $(t - \Delta t/2)$ e $(t + \Delta t/2)$.

Algumas opções disponíveis no OpenFOAM[®] são: `steadyState`, `Euler` e `backward`.

O campo de velocidade no OpenFOAM[®] normalmente são denominados por `U`.

4.5 Arranjo das Variáveis na Malha

A malha computacional e o arranjo de variáveis utilizados tem um papel fundamental na qualidade das soluções numéricas. Talvez a maneira mais intuitiva de arranjar as variáveis na malha seja armazenar todas em um único local, o centro da célula. Entretanto, esta abordagem mais simplista pode trazer consigo um problema, denominado desacoplamento par-ímpar do campo de pressão por [35], ou também denominado de campo de pressão do tipo tabuleiro de xadrez por [60]. Quando este arranjo é utilizado, é necessário interpolar a velocidade para a face da célula e, caso não haja um devido tratamento, isso causará um desacoplamento entre o valor da pressão da célula com os valores das células vizinhas. Mais detalhes deste problema podem ser encontrados em [60], [18] e [75].

O arranjo deslocado é uma maneira eficiente para evitar a necessidade de interpolar as velocidades para as faces, eliminando o problema do desacoplamento par-ímpar. Esta

abordagem é amplamente utilizado em problemas em que o domínio é formado por elementos retangulares, onde, para o caso bi-dimensional, a velocidade u (velocidade normal ao eixo x) e v (velocidade normal ao eixo y) são armazenadas nas faces e a pressão é armazenada no centro das células, como ilustrado na Figura 4.6. Talvez a maior vantagem

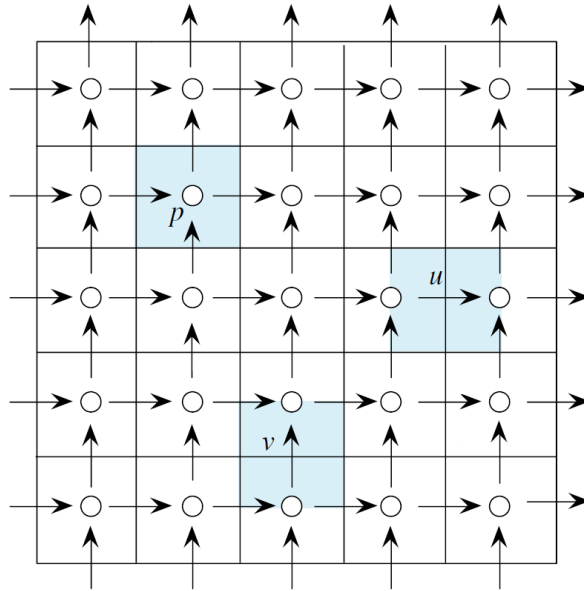


Figura 4.6: Malha deslocada bi-dimensional. Adaptado de [56].

do arranjo deslocado é o forte acoplamento entre a pressão e a velocidade evitando alguns tipos de problemas de convergência e oscilações nos campos de pressão e velocidade [29]. Entretanto, para malhas não uniformes ou curvilíneas, o arranjo deslocado não é capaz de representar adequadamente a velocidade nas faces, uma vez que a face deixa de ser ortogonal a componente da velocidade (Figura 4.7), além disso, pode fazer com que algumas variáveis sejam armazenadas em pontos de singularidade da malha, podendo levar a singularidades nas equações discretizadas. Portanto, é mais conveniente armazenar as

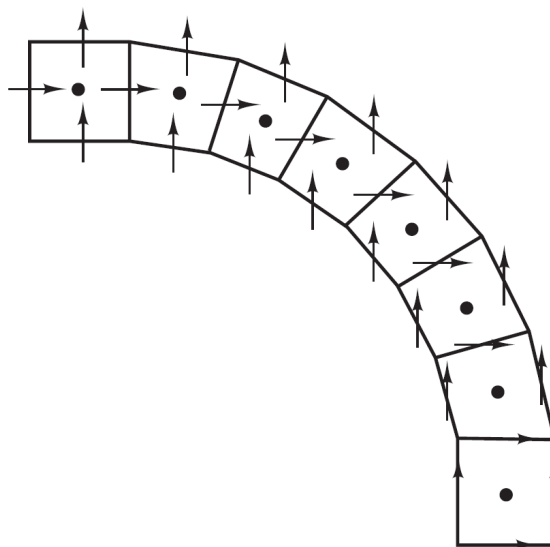


Figura 4.7: Exemplo da utilização de uma malha deslocada em uma malha deslocada. Fonte: [83].

componentes da velocidade no centro das células, juntamente com os valores da pressão

[83]. A esse arranjo dá-se o nome de co-localizado. Este arranjo é consideravelmente mais simples de ser implementado, não exige um espaço de memória adicional e facilita a implementação de procedimentos *multigrid* [29]. Entretanto, para suprimir as oscilações ligadas ao problema do desacoplamento par-ímpar, o fluxo de massa é calculado e armazenado em cada face por meio da interpolação de Rhie-Chow [71], a qual será detalhada na seção 5.1.

Algoritmos para Solução dos Acoplamentos Pressão-Velocidade e Tensor-Velocidade

As equações governantes para escoamentos de fluidos podem ser resolvidas tanto acopladas, quanto desacopladas. Em um sistema acoplado, todas as equações são resolvidas simultaneamente, tornando-o mais estável, o que permite a escolha de passos de tempo maiores e garante maior acurácia em escoamentos transientes. Mas, apesar destas vantagens, o sistema gerado é muito grande, exigindo um alto consumo de memória e um alto custo computacional durante o processo de solução.

Para o método de solução desacoplado as variáveis são separadas e solucionadas em sistemas separados, desta forma, para cada passo da solução, são resolvidos vários sistemas, relativamente menores que o sistema acoplado, exigindo menos memória e menor custo computacional. Este processo de desacoplamento das variáveis reduz a estabilidade, fazendo necessária a utilização de passos de tempo menores. A principal dificuldade para obter a solução para o sistema desacoplado, é encontrar um campo de pressões tal que, quando aplicado na equação do momento, gere um campo de velocidades que respeite a equação da continuidade [49].

Um passo importante para aumentar a taxa de convergência do método numérico é o uso de fatores de relaxação para atualizar as variáveis. O OpenFOAM[®] pode utilizar tanto a relaxação explícita, quanto a relaxação implícita de Patankar [59], [60]. Na abordagem de relaxação explícita, após obtido o novo valor para uma propriedade (ϕ_C), por meio da solução do sistema algébrico, o valor de ϕ_C é atualizado de modo a manter uma contribuição do valor da iteração anterior ϕ_C^* , matematicamente

$$\phi_C = \phi_C^* + \lambda_\phi (\phi_C - \phi_C^*) . \quad (5.1)$$

onde λ_ϕ é o fator de relaxação. Agora, para o cálculo da relaxação implícita de Patankar, consideremos equação algébrica para uma propriedade ϕ

$$a_C \phi_C + \sum_F a_F \phi_F = b_C . \quad (5.2)$$

O cálculo da relaxação implícita de Patankar é feito substituindo ϕ_C no membro direito da equação (5.1) pelo equivalente da equação (5.2), obtendo

$$\phi_C = \phi_C^* + \lambda_\phi \left[\left(\frac{-\sum_F a_F \phi_F + b_C}{a_C} \right) - \phi_C^* \right] \quad (5.3)$$

e por fim, obtemos a equação (5.3) reescrita em termos do fator de relaxação.

$$\frac{a_C}{\lambda_\phi} \phi_C + \sum_F a_F \phi_F = b_C + \frac{(1 - \lambda_\phi)}{\lambda_\phi} a_C \phi_C^* , \quad (5.4)$$

onde o fator de relaxação λ_ϕ modifica os coeficientes da diagonal principal e o lado direito sem modificar matematicamente a equação [56].

Agora, para a utilização dos métodos de desacoplamento pressão-velocidade SIMPLE e seus derivados, a equação algébrica do momento linear é reescrita.

Consideremos a equação algébrica do momento linear

$$a_C \mathbf{v}_C + \sum_F a_F \mathbf{v}_F = \mathbf{b}_C . \quad (5.5)$$

Para a construção da equação de correção da pressão colocalizada, o gradiente de pressão é retirado do termo \mathbf{b}_C

$$\mathbf{b}_C = -V_C (\nabla p)_C + \hat{\mathbf{b}}_C . \quad (5.6)$$

Substituindo (5.6) em (5.5) e dividindo tudo por a_C , obtemos

$$\mathbf{v}_C + \mathbf{H}_C [\mathbf{v}] = -\mathbf{D}_C (\nabla p)_C + \mathbf{B}_C , \quad (5.7)$$

onde os seguintes operadores vetoriais são definidos como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_C [\mathbf{v}] &= \sum_F \frac{a_F}{a_C} \mathbf{v}_F \\ \mathbf{D}_C &= \frac{V_C}{a_C} \\ \mathbf{B}_C &= \frac{\hat{\mathbf{b}}_C}{a_C} . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Esta forma será útil nas etapas seguintes.

5.1 Interpolação de Rhie-Chow

Consideremos a equação do momento discretizada nas células C e F , assim temos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C + \mathbf{H}_C [\mathbf{v}] &= -\mathbf{D}_C (\nabla p)_C + \mathbf{B}_C \\ \mathbf{v}_F + \mathbf{H}_F [\mathbf{v}] &= -\mathbf{D}_F (\nabla p)_F + \mathbf{B}_F \end{aligned} \quad (5.9)$$

e de forma similar a (5.9), a equação da velocidade \mathbf{v}_f na face compartilhada pelas células C e F dada por

$$\mathbf{v}_f + \mathbf{H}_f [\mathbf{v}] = -\mathbf{D}_f (\nabla p)_f + \mathbf{B}_f . \quad (5.10)$$

Em uma malha colocalizada, as velocidades estão armazenadas no centroide das células, implicando que os coeficientes desta equação não podem ser diretamente calculados, logo, serão aproximados por um perfil de interpolação linear utilizando os coeficientes dos nós vizinhos

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_f [\mathbf{v}] &= \overline{\mathbf{H}_f} [\mathbf{v}] \\ \mathbf{B}_f &= \overline{\mathbf{B}_f} \\ \mathbf{D}_f &= \overline{\mathbf{D}_f} , \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde a notação da barra em cima será utilizada para denotar a interpolação linear entre os valores nos pontos C e F .

Substituindo (5.11) em (5.10), temos

$$\mathbf{v}_f + \overline{\mathbf{H}}_f[\mathbf{v}] = \overline{\mathbf{B}}_f - \overline{\mathbf{D}}_f \nabla p_f \quad (5.12)$$

e, usando (5.9), $\overline{\mathbf{H}}_f$ é reescrito como

$$\overline{\mathbf{H}}_f[\mathbf{v}] = -\overline{\mathbf{v}}_f - \overline{\mathbf{D}}_f \overline{\nabla p_f} + \overline{\mathbf{B}}_f, \quad (5.13)$$

tal que a aproximação do coeficiente é de segunda ordem de acurácia [56].

Substituindo (5.13) em (5.12) a velocidade na face do elemento usando o método de interpolação de Rhie-Chow é obtido como

$$\mathbf{v}_f = \overline{\mathbf{v}}_f - \overline{\mathbf{D}}_f (\nabla p_f - \overline{\nabla p_f}) . \quad (5.14)$$

5.2 Acoplamento Tensor-Velocidade

De forma semelhante ao acoplamento pressão-velocidade, ao discretizar o termo envolvendo o tensor extra-tensão polimérico $\boldsymbol{\tau}_P$ devemos tomar um cuidado especial a fim de garantir que não haja um desacoplamento entre os valores das tensões em células vizinhas, ou seja, células que compartilham a mesma face.

Em [64] é descrito um método para garantir o acoplamento tensor-velocidade, onde a tensão polimérica nas faces é dada por

$$\boldsymbol{\tau}_f = \overline{\boldsymbol{\tau}}_f + \eta_P \left[\left(\nabla \mathbf{v}|_f + (\nabla \mathbf{v})^T|_f \right) - \left(\overline{\nabla \mathbf{v}}|_f + \overline{(\nabla \mathbf{v})^T}|_f \right) \right], \quad (5.15)$$

onde os termos com a barra sobrescrita são interpolados linearmente a partir dos valores do centro das células.

5.3 Método SIMPLE para uma Malha Colocalizada

O método SIMPLE foi apresentado por [59], sendo baseado em um dos métodos de Chorin [15], e tendo por princípio a resolução da equação do momento utilizando o campo de pressão do passo anterior, seguido do cálculo do campo de correção para a pressão e, por fim, a atualização dos campos de velocidade e pressão com os valores corrigidos.

Para a construção do método SIMPLE, as componentes de velocidade (\mathbf{v}), pressão (p) e fluxo de massa (\dot{m}) são decompostas em dois termos, sendo um deles um termo de correção

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}^* + \mathbf{v}' \\ p &= p^{(n)} + p' \\ \dot{m} &= \dot{m}^* + \dot{m}', \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde o sobrescrito $^{(n)}$ representa o valor obtido na iteração anterior, o sobrescrito $*$ os valores obtidos satisfazendo a equação (5.17) e o sobrescrito $'$ os termos de correção.

$$\mathbf{v}^*_C + \mathbf{H}_C[\mathbf{v}^*] = -\mathbf{D}_C (\nabla p^{(n)})_C + \mathbf{B}_C . \quad (5.17)$$

Inicialmente a equação do momento (5.17) é resolvida para obter \mathbf{v}^* utilizando o campo de pressão obtido na iteração anterior, desta forma obtemos uma velocidade que satisfaz a equação do momento linear (5.17), mas não a equação da continuidade.

Da equação da continuidade (2.1), temos sua forma discreta dada por

$$\sum_f \dot{m}_f = 0 , \quad (5.18)$$

então, substituindo o termo do fluxo de massa de (5.16) em (5.18) obtemos

$$\sum_f \dot{m}'_f = - \sum_f \dot{m}^*_f , \quad (5.19)$$

onde

$$\dot{m}'_f = \mathbf{v}'_f \cdot \mathbf{S}_f \quad (5.20)$$

$$\dot{m}^*_f = \mathbf{v}^*_f \cdot \mathbf{S}_f \quad (5.21)$$

e \mathbf{v}^*_f calculado por meio da interpolação de Rhie-Chow.

Subtraindo (5.17) de (5.7) obtemos

$$\mathbf{v}'_C + \mathbf{H}_C [\mathbf{v}'] = -\mathbf{D}_C (\nabla p')_C \quad (5.22)$$

e de forma semelhante, para o volume de controle F , vizinho a C , temos

$$\mathbf{v}'_F + \mathbf{H}_F [\mathbf{v}'] = -\mathbf{D}_F (\nabla p')_F \quad (5.23)$$

assim, interpolando as equações (5.22) e (5.23), temos

$$\overline{\mathbf{v}'_f} + \overline{\mathbf{H}_f} [\mathbf{v}'] = -\overline{\mathbf{D}_f} \overline{\nabla p'_f} \Rightarrow \overline{\mathbf{v}'_f} + \overline{\mathbf{D}_f} \overline{\nabla p'_f} = -\overline{\mathbf{H}_f} [\mathbf{v}'] . \quad (5.24)$$

Utilizando a interpolação de Rhie-Chow para calcular a correção da velocidade na face temos

$$\mathbf{v}'_f = \overline{\mathbf{v}'_f} - \overline{\mathbf{D}_f} (\nabla p'_f - \overline{\nabla p'_f}) \quad (5.25)$$

e substituindo (5.20) e (5.25) em (5.19) temos

$$\sum_f \underline{(\overline{\mathbf{v}'_f} \cdot \mathbf{S}_f)} + \sum_f \underline{(\overline{\mathbf{D}_f} \overline{\nabla p'_f} \cdot \mathbf{S}_f)} - \sum_f (\overline{\mathbf{D}_f} \nabla p'_f \cdot \mathbf{S}_f) = \sum_f \dot{m}^*_f , \quad (5.26)$$

onde os termos sublinhados referem-se a efeitos das correções de velocidades vizinhas ao elemento.

Substituindo (5.24) em (5.26) temos a equação de correção para a pressão dada por

$$\sum_f (-\overline{\mathbf{D}_f} \overline{\nabla p'_f} \cdot \mathbf{S}_f) = - \sum_f \dot{m}^*_f + \sum_f \underline{(\overline{\mathbf{H}_f} [\mathbf{v}'] \cdot \mathbf{S}_f)} , \quad (5.27)$$

na qual diferentes aproximações para o termo sublinhado geram diferentes variações do método SIMPLE.

No método SIMPLE original o termo sublinhado é omitido. Desta forma, a equação de correção da pressão é dada por

$$\sum_f (\overline{\mathbf{D}_f} \overline{\nabla p'_f} \cdot \mathbf{S}_f) = \sum_f \dot{m}^*_f \quad (5.28)$$

ou, utilizando a equação (4.11), temos

$$\int_{V_C} \nabla \cdot (\overline{\mathbf{D}} \overline{\nabla p'}) dV = \int_{V_C} \nabla \cdot (\dot{m}^*) dV \quad (5.29)$$

e portanto

$$\nabla \cdot (\bar{\mathbf{D}} \nabla p') = \nabla \cdot (\dot{m}_f^*) . \quad (5.30)$$

Esta equação será utilizada na implementação do método SIMPLE no OpenFOAM[®].

Com a correção da pressão calculada, o próximo passo é aplicar a correção à velocidade, ao fluxo de massa, e atualizar o campo de pressão com auxílio de um fator de relaxação λ_p

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_c^* + \mathbf{v}'_C & \mathbf{v}'_C &= -\mathbf{D}_C \nabla p'_C \\ \dot{m}_f &= \dot{m}_f^* + \dot{m}'_f & \dot{m}'_f &= -\bar{\mathbf{D}}_f \nabla p'_f \cdot \mathbf{S}_f \\ p_C &= p_C^{(n)} + \lambda_p p'_C . \end{aligned} \quad (5.31)$$

Com as variáveis atualizadas, resolve-se as outras equações de transporte discretizadas e, no caso dos escoamentos viscoelásticos resolve-se, também, a equação constitutiva para obter os novos valores para as tensões, e então, verifica-se se o algoritmo convergiu, em caso positivo encerra a execução, ou caso contrário, trata os valores obtidos como valores iniciais e executa novamente os passos do algoritmo. A Figura 5.1 apresenta um fluxograma do algoritmo SIMPLE.

O algoritmo SIMPLE pode ser modificado para obtenção de um método transiente, adicionando um laço de passo de tempo, como ilustrado na Figura 5.2. Assim, os sistemas lineares são resolvidos até que atenda o critério de convergência para cada passo de tempo.

5.4 Método SIMPLEC (SIMPLE-Consistent)

O método SIMPLEC foi proposto por [82] com o objetivo de minimizar o termo omitido pelo SIMPLE, reduzindo assim o erro e aumentando a ordem de convergência. O SIMPLEC assume que a correção da velocidade no ponto C é a média ponderada das correções nos nós vizinhos

$$\mathbf{v}'_C \approx \frac{\sum_F a_F \mathbf{v}'_F}{\sum_F a_F} \Rightarrow \sum_F a_F \mathbf{v}'_F \approx \mathbf{v}'_C \sum_F a_F \quad (5.32)$$

e usando o operador \mathbf{H} , como definido em (5.8), (5.32) pode ser reescrita como

$$\sum_F \frac{a_F \mathbf{v}'_F}{a_C} \approx \mathbf{v}'_C \sum_F \frac{a_F}{a_C} \Rightarrow \mathbf{H}_C [\mathbf{v}'] \approx \mathbf{v}'_C \mathbf{H}_C [1] . \quad (5.33)$$

Substituindo (5.33) em (5.22) obtemos

$$(1 + \mathbf{H}_C [1]) \mathbf{v}'_C \Rightarrow \mathbf{v}'_C = -\tilde{\mathbf{D}}_C \nabla p'_C . \quad (5.34)$$

Agora, combinando (5.5) e (5.6), e somando e subtraindo $\sum_F a_F \mathbf{v}_C$ no membro esquerdo da equação obtemos

$$\left(a_C + \sum_F a_F \right) \mathbf{v}_C + \sum_F a_F (\mathbf{v}_F - \mathbf{v}_C) = -\nabla p_C + \hat{\mathbf{b}}_C . \quad (5.35)$$

Reescrevendo (5.35) temos a equação do momento dada por

$$\mathbf{v}_C + \tilde{\mathbf{H}}_C [\mathbf{v} - \mathbf{v}_C] = -\tilde{\mathbf{D}}_C \nabla p_C + \tilde{\mathbf{B}}_C , \quad (5.36)$$

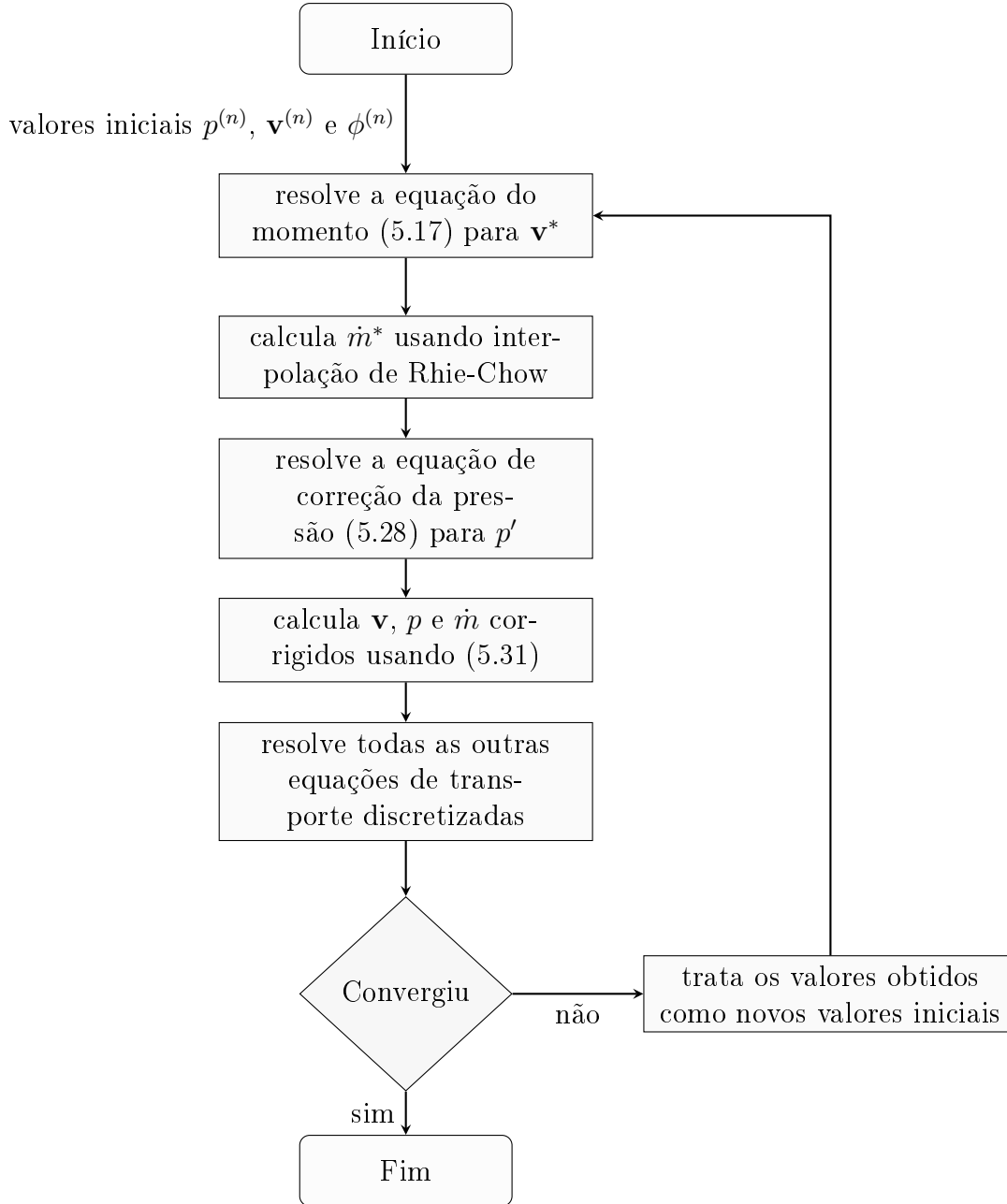


Figura 5.1: Fluxograma do algoritmo SIMPLE

onde

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{H}}_C &= \frac{\sum_F a_F}{a_C + \sum_F a_F} \\
 \tilde{\mathbf{D}}_C &= \frac{1}{a_C + \sum_F a_F} \\
 \tilde{\mathbf{B}}_C &= \frac{\hat{\mathbf{b}}_C}{a_C + \sum_F a_F}
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

e a equação de correção da velocidade (usando (5.36))

$$\mathbf{v}'_C = -\tilde{\mathbf{H}}_C [\mathbf{v}' - \mathbf{v}'_C] - \tilde{\mathbf{D}}_C \nabla p'_C, \tag{5.38}$$

onde termo $\tilde{\mathbf{H}}_C [\mathbf{v}' - \mathbf{v}'_C]$ é removido de (5.38), o que é equivalente a aproximação (5.33), e então utilizada para obter a equação de correção da pressão.

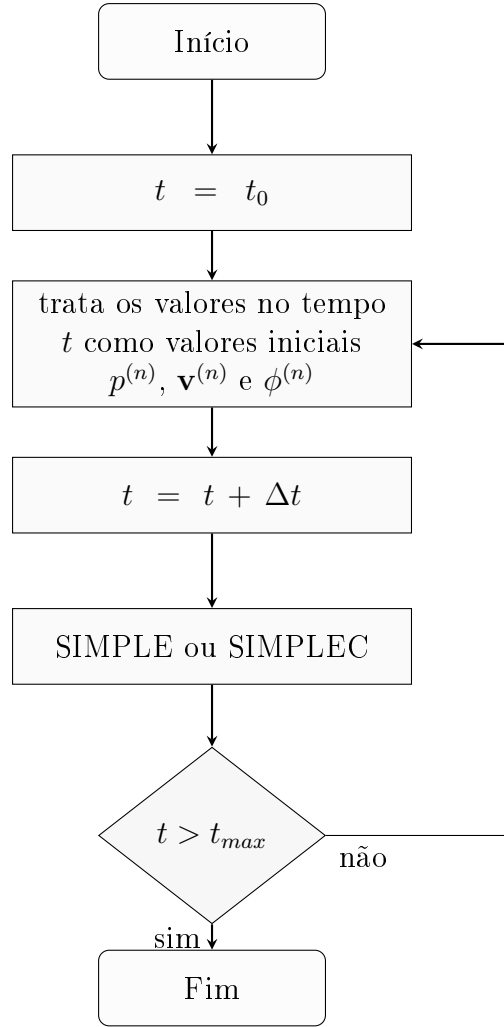


Figura 5.2: Fluxograma do algoritmo SIMPLE-Transient

Seguindo os passos para o desenvolvimento do método SIMPLE, obtemos a seguinte equação de correção da pressão

$$\sum_f \left(\overline{\mathbf{D}}_f \nabla p'_f \cdot \mathbf{S}_f \right) = \sum_f \dot{m}_f^* , \quad (5.39)$$

o que equivale a

$$\int_{V_C} \nabla \cdot \left(\overline{\mathbf{D}}_f \nabla p' \right) dV = \int_{V_C} \nabla \cdot \left(\dot{m}_f^* \right) dV \quad (5.40)$$

ou ainda

$$\nabla \cdot \left(\overline{\mathbf{D}}_f \nabla p' \right) = \nabla \cdot \left(\dot{m}_f^* \right) . \quad (5.41)$$

5.5 Métodos para Solução do Sistema Algébrico

Os métodos numéricos para a solução de cada sistema algébrico gerado pelo processo de discretização são especificados no arquivo `fvSchemes`. Alguns métodos disponíveis por padrão no OpenFOAM[®] são: Gradiente Conjugado Pré-condicionado (PCG), Gradiente Biconjugado Pré-condicionado (PBICG) e *Generalized Geometric Algebraic Multigrid* (GAMG).

Com a adição do *rheoTool*[63], passam a estar disponíveis ao usuário os métodos iterativos para solucionar matrizes esparsas dos *software* Petsc, Hypre e Eigen. São espe-

cificados critérios de convergência como a tolerância (**tolerance**) ou o número máximo de iterações a serem executadas (**maxIter**) e fatores de relaxação explícito para o campo de pressão (λ_p) e implícitos para as para as demais variáveis (λ_v , λ_{τ_P} , etc).

Resultados Numéricos

O objetivo deste capítulo é desenvolver um estudo paramétrico para a nova modelagem, para os escoamentos viscoelásticos em que a viscosidade e, também, o tempo de relaxação podem sofrer alterações de acordo com o comportamento da pressão. Este estudo paramétrico será desenvolvido para dois tipos de escoamentos confinados clássicos: escoamentos entre placas paralelas e escoamentos em uma contração 4:1, nos quais os valores das componentes da velocidade e do tensor polimérico serão observados com respeito aos parâmetros adotados e comparados aos valores da modelagem padrão. Antes de apresentar estes estudos, serão expostos os resultados de verificação da implementação da nova metodologia na plataforma OpenFOAM[®] e *rheoTool* através da análise de convergência da solução numérica do escoamento totalmente desenvolvido em um canal bidimensional. Para garantir a acurácia dos resultados do problema da contração 4:1 na nova modelagem, primeiramente serão simulados problemas da contração 4:1 existentes na literatura, e para isso foram escolhidos alguns ensaios numéricos do trabalho de Pimenta e Alves [64] como referência.

Neste capítulo, tando o estudo de escoamento em um canal bidimensional quanto em uma contração 4:1, foram utilizados os métodos de discretização de Euler para os termos temporais, CUBISTA para os termos convectivos, e linear para os demais termos.

6.1 O Escoamento em um Canal Bidimensional

O escoamento em um canal bidimensional é um dos problemas mais amplamente estudados pois, além de possuir uma geometria simples, é um dos poucos problemas de escoamento envolvendo as equações de Navier-Stokes do qual é possível, em muitos casos, obter uma solução analítica. No caso de fluidos Newtonianos, as simplificações das equações de Navier-Stokes para representar escoamentos em um canal bidimensional são as equações de Hagen-Poiseuille.

Este problema considera o escoamento de um fluido entre duas placas paralelas, como esboçado na Figura 6.1, no qual é aplicado um gradiente de pressão ou uma velocidade na entrada do canal.

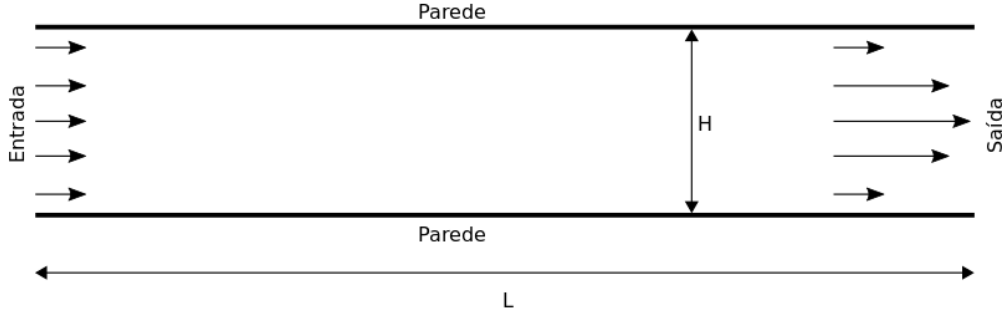


Figura 6.1: Esboço do domínio para o escoamento em um canal bidimensional.

As condições de contorno para as variáveis velocidade (\mathbf{v}), pressão (p), tensor extra-tensão, polimérico, ($\boldsymbol{\tau}_P$) e tensor logaritmo natural do tensor conformação ($\boldsymbol{\Theta}$) foram adotadas como a seguir, de acordo com o tipo de contorno:

Entrada:	Parede:	Saída:
$v_x = 1$	$\mathbf{v} = \mathbf{0}$	$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \mathbf{0}$
$v_y = 0$	$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$	$p = 0$
$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$\boldsymbol{\tau}_P$: extrapolação linear	$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_P}{\partial x} = \mathbf{0}$
$\boldsymbol{\tau}_P = \mathbf{0}$	$\frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial y} = \mathbf{0}$	$\frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial x} = \mathbf{0}$
$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{0}$		

onde a extrapolação linear, da tensão polimérica, para uma face f da fronteira de uma célula C é obtida por

$$\tau_{ij,f} = \tau_{ij,C} + \nabla \tau_{ij,C} \cdot \mathbf{d}_{Cf}, \quad (6.1)$$

e $\tau_{ij,f}$ e $\tau_{ij,C}$ são as componentes ij do tensor polimérico $\boldsymbol{\tau}_P$ na face f e no centro da célula C , respectivamente, e \mathbf{d}_{Cf} é o vetor ligando o centro da célula C ao centro da face f .

Inicialmente, em $t = 0$, o fluido compreendido entre as placas paralelas está em repouso, e portanto, todas as variáveis são consideradas nulas. E no caso da utilização da metodologia Log-Conformation, o tensor conformação é tomado como identidade, enquanto que o tensor logaritmo natural do tensor conformação é tomado como nulo.

Por simplicidade, as unidades de medida foram omitidas, lembrando que o OpenFOAM[®] é uma plataforma escrita na forma dimensional, sendo m , m/s , $Kg/m.s^2$ e Nm^{-2} as unidades de medida para o comprimento ou a largura (L , H , δ_x ou δ_x), a velocidade (\mathbf{v}), a pressão (p) e o tensor polimérico ($\boldsymbol{\tau}_P$), respectivamente.

6.1.1 Verificação da Nova Metodologia Numérica no *rheoTool*

Primeiramente, será apresentada uma análise de convergência espacial da solução numérica do escoamento totalmente desenvolvido em um canal bidimensional obtida pela plataforma OpenFOAM[®] e *rheoTool*. Desta forma, sete tipos de malhas, M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 , M_6 e M_7 , são consideradas com espaçamentos apresentados na Tabela 6.1.

Para estimar o erro e a ordem de convergência espacial da metodologia numérica implementada, os valores das componentes v_x , τ_{xx} e τ_{xy} foram extraídos de um corte transversal ao canal em $x = 16m$.

Denota-se este erro pelo valor escalar $E_\Phi(h)$, para uma propriedade Φ sendo v_x , τ_{xx} ou τ_{xy} , em uma malha de espaçamento $h = \delta_y$.

Tabela 6.1: Malhas computacionais para o escoamento em um canal bidimensional.

	Células	Espaçamento	
		δ_x^{min}	δ_y
M_1	400	0.5	0.1
M_2	1600	0.25	0.05
M_3	2820	0.16666	0.03333
M_4	5000	0.125	0.025
M_5	11280	0.08333	0.01666
M_6	20000	0.0625	0.0125
M_7	80000	0.03125	0.00625

Suponha que seja q a ordem de convergência espacial do método, então, teoricamente tem-se que,

$$E_{\Phi}(h) = Ch^q + O(h^{q+1}), \quad (6.2)$$

em que C é uma constante que independe de h . Sendo assim, para h suficientemente pequeno, pode-se estimar o erro pela aproximação

$$E_{\Phi}(h) \approx Ch^q. \quad (6.3)$$

Desta forma, ao refinar a malha por um fator λ , como exposto na Tabela 6.1, tem-se a seguinte aproximação para o erro

$$E_{\Phi}\left(\frac{h}{\lambda}\right) \approx C\left(\frac{h}{\lambda}\right)^q. \quad (6.4)$$

Define-se a taxa de erro por

$$R(h) = \frac{E_{\Phi}(h)}{E_{\Phi}(h/\lambda)}. \quad (6.5)$$

Logo, para o refinamento de malha escolhido neste trabalho, a taxa de erro $R(h)$ para um método de ordem q deve comportar-se como

$$R(h) \approx \lambda^q, \quad (6.6)$$

e conseqüentemente, a ordem de convergência pode ser calculada por

$$q \approx \log_{\lambda}(R(h)). \quad (6.7)$$

Em termos práticos, $E_{\Phi}(h)$ será adotado como sendo o erro relativo calculado na norma- l_2 ($\|\cdot\|_2$), ou seja,

$$E_{\Phi}(h) = \frac{\|\Phi(h) - \hat{\Phi}(h)\|_2}{\|\hat{\Phi}(h)\|_2}, \quad (6.8)$$

onde $\Phi(h)$ é a solução numérica e $\hat{\Phi}(h)$ é a solução de referência, ambas nos mesmos nós da malha de espaçamento h .

Neste trabalho, a solução de referência é a solução da malha mais fina M_7 . Desta forma, precisou-se de uma atenção especial para avaliar todas estas soluções nos mesmos pontos. Quando necessário, utilizou-se interpolação linear para estimar os valores de referência nos nós da malha M_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6), a partir dos valores da malha M_7 .

Os parâmetros para as simulações da verificação numérica são: $\rho = 0.01Kg/m^3$, $U = v_x = 1m/s$, $H = 1m$, $\eta_S = 0Kg/(ms)$, $\eta_P = 1Kg/(ms)$, $\lambda = 0.5$ e $1.0s$, e $\gamma = 0$,

10^{-2} e $10^{-3}ms^2/Kg$, levando a $Re = 0.01$ e $De = 0.5$ no modelo UCM (Oldroyd-B com $\beta = 0.0$).

A verificação da nova metodologia numérica é apresentada para quatro abordagens de modelagem:

- Abordagem 1: modelo UCM (Oldroyd-B com $\beta = 0.0$) padrão.
- Abordagem 2: modelo UCM (Oldroyd-B com $\beta = 0.0$) em que η_P varia linearmente com a pressão, ou seja, a viscosidade polimérica η_P é modelada pela equação (2.22), considerando a equação (2.24) com $\gamma = 10^{-2}ms^2/Kg$.
- Abordagem 3: modelo UCM (Oldroyd-B com $\beta = 0.0$) em que η_P e λ variam linearmente com a pressão, ou seja, a viscosidade polimérica η_P é modelada pela equação (2.22) e o tempo de relaxação λ é modelado pela equação (2.23), ambos considerando a equação (2.24) com $\gamma = 10^{-3}ms^2/Kg$.
- Abordagem 4: foi aplicada a metodologia Log-Conformation para o modelo UCM (Oldroyd-B com $\beta = 0.0$) em que η_P e λ variam linearmente com a pressão (ver equações (2.22) e (2.23)), considerando a equação (2.24) com $\gamma = 10^{-3}ms^2/Kg$. Por utilizar a metodologia Log-Conformation, nesta abordagem utilizou-se $\lambda = 1s$, resultando $De = 1.0$.

Os erros relativos na norma- l_2 da componente da velocidade v_x e componentes do tensor extra-tensão τ_{Pxx} e τ_{Pxy} são apresentados nas Tabelas 6.2, 6.3 e 6.4, respectivamente; e se preferir o leitor pode visualizá-los nas Figuras 6.2a, 6.2b, 6.2c e 6.2d, que mostram a variação dos erros relativos na norma- l_2 com respeito aos valores $h = \delta_y$ na escala log-log.

Tabela 6.2: Erro relativo da componente v_x nas malhas M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 e M_6 .

Malha	Abordagem 1	Abordagem 2	Abordagem 3	Abordagem 4
M_1	$8.97803613 \cdot 10^{-3}$	$9.67733504 \cdot 10^{-3}$	$8.84423450 \cdot 10^{-3}$	$8.80998031 \cdot 10^{-3}$
M_2	$2.25652729 \cdot 10^{-3}$	$2.56804124 \cdot 10^{-3}$	$2.24140788 \cdot 10^{-3}$	$2.22764697 \cdot 10^{-3}$
M_3	$9.81090722 \cdot 10^{-4}$	$1.12412223 \cdot 10^{-3}$	$9.76759191 \cdot 10^{-4}$	$9.70451634 \cdot 10^{-4}$
M_4	$5.22851669 \cdot 10^{-4}$	$6.01739303 \cdot 10^{-4}$	$5.20728709 \cdot 10^{-4}$	$5.16572112 \cdot 10^{-4}$
M_5	$2.07600708 \cdot 10^{-4}$	$2.39440697 \cdot 10^{-4}$	$2.06810028 \cdot 10^{-4}$	$2.05019983 \cdot 10^{-4}$
M_6	$9.56159399 \cdot 10^{-5}$	$1.11085095 \cdot 10^{-4}$	$9.48632464 \cdot 10^{-5}$	$9.33341624 \cdot 10^{-5}$

Tabela 6.3: Erro relativo da componente τ_{Pxx} nas malhas M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 e M_6 .

Malha	Abordagem 1	Abordagem 2	Abordagem 3	Abordagem 4
M_1	$5.52092531 \cdot 10^{-2}$	$7.86966790 \cdot 10^{-2}$	$5.60418223 \cdot 10^{-2}$	$5.34129565 \cdot 10^{-2}$
M_2	$1.27322713 \cdot 10^{-2}$	$2.58597818 \cdot 10^{-2}$	$1.39774184 \cdot 10^{-2}$	$1.35148852 \cdot 10^{-2}$
M_3	$5.29115663 \cdot 10^{-3}$	$1.40044229 \cdot 10^{-2}$	$6.31749450 \cdot 10^{-3}$	$6.18477414 \cdot 10^{-3}$
M_4	$2.82526766 \cdot 10^{-3}$	$9.10168777 \cdot 10^{-3}$	$3.64517424 \cdot 10^{-3}$	$3.60516747 \cdot 10^{-3}$
M_5	$1.12117960 \cdot 10^{-3}$	$4.74213201 \cdot 10^{-3}$	$1.64416160 \cdot 10^{-3}$	$1.64073733 \cdot 10^{-3}$
M_6	$5.75205414 \cdot 10^{-4}$	$2.75651303 \cdot 10^{-3}$	$9.06614727 \cdot 10^{-4}$	$9.06371138 \cdot 10^{-4}$

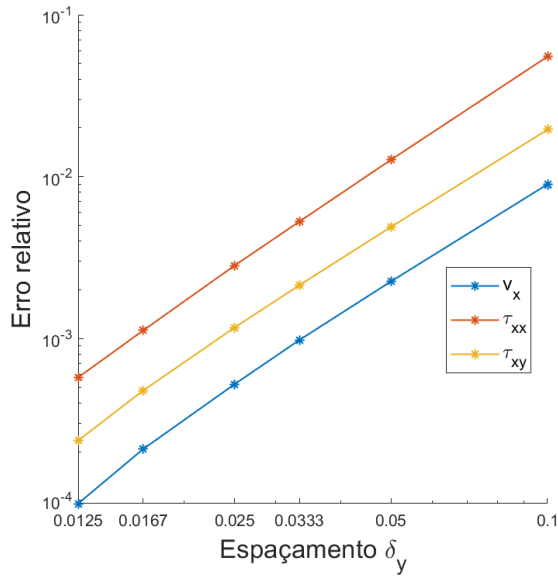
Nas Tabelas 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8 são apresentadas a ordem de convergência, calculada pela equação (6.7), para as abordagens 1, 2, 3 e 4, respectivamente.

Considerando que foram utilizadas predominantemente discretizações de ordem 2, estes resultados apresentados nas Tabelas 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8 eram esperados.

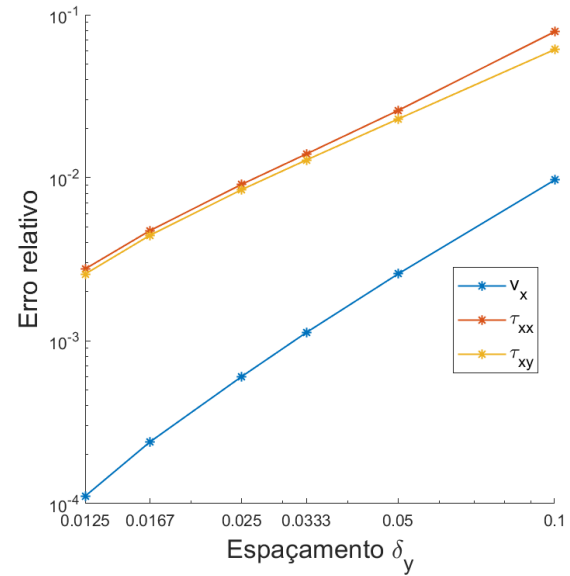
Com o apoio destes resultados, que apontam para uma convergência espacial de ordem pelo menos 2 da nova metodologia numérica implementada no OpenFOAM[®] e *rheoTool*, pode-se concluir que esta metodologia numérica é eficaz para solucionar escoamentos de fluidos viscoelásticos em que a viscosidade e, também, o tempo de relaxação variam de

Tabela 6.4: Erro relativo da componente $\tau_{P_{xy}}$ nas malhas M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 e M_6 .

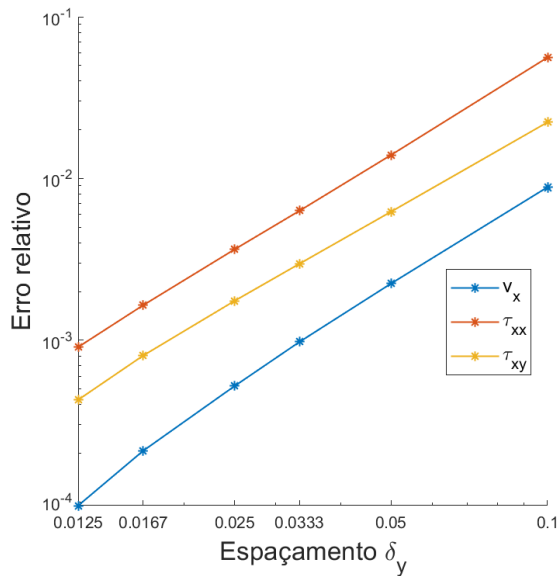
Malha	Abordagem 1	Abordagem 2	Abordagem 3	Abordagem 4
M_1	$1.95312502 \cdot 10^{-2}$	$6.11489998 \cdot 10^{-2}$	$2.22913785 \cdot 10^{-2}$	$2.26705885 \cdot 10^{-2}$
M_2	$4.89738795 \cdot 10^{-3}$	$2.29205361 \cdot 10^{-2}$	$6.23352174 \cdot 10^{-3}$	$6.36483761 \cdot 10^{-3}$
M_3	$2.13934306 \cdot 10^{-3}$	$1.28590808 \cdot 10^{-2}$	$2.97201248 \cdot 10^{-3}$	$3.04032017 \cdot 10^{-3}$
M_4	$1.17041190 \cdot 10^{-3}$	$8.44748381 \cdot 10^{-3}$	$1.75103083 \cdot 10^{-3}$	$1.79677962 \cdot 10^{-3}$
M_5	$4.77165398 \cdot 10^{-4}$	$4.43519787 \cdot 10^{-3}$	$8.02626869 \cdot 10^{-4}$	$8.24254711 \cdot 10^{-4}$
M_6	$2.34301734 \cdot 10^{-4}$	$2.56306223 \cdot 10^{-3}$	$4.27616300 \cdot 10^{-4}$	$4.37206239 \cdot 10^{-4}$



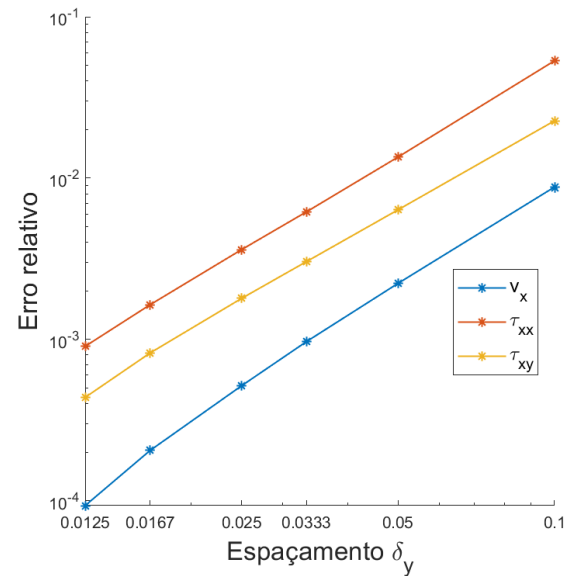
(a) Abordagem 1.



(b) Abordagem 2.



(c) Abordagem 3.



(d) Abordagem 4.

Figura 6.2: Erro relativo das variáveis v_x , τ_{xx} e τ_{xy} (eixo- y) com relação ao espaçamento δ_y (eixo- x) das malhas M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 e M_6 (em escala log-log), para as abordagens 1 (a), 2 (b), 3 (c) e 4 (d).

acordo com as alterações dos valores da pressão nestes escoamentos. Portanto, os estudos

Tabela 6.5: Ordem de convergência espacial para a abordagem 1.

Malhas avaliadas	v_x	τ_{xx}	τ_{xy}
M_1/M_2	1.99229567	2.11642027	1.99569990
M_2/M_3	2.05417635	2.16561493	2.04255002
M_3/M_4	2.18779362	2.18107288	2.09663402
M_4/M_5	2.27785353	2.27918647	2.21266718
M_5/M_6	2.69528381	2.32027744	2.47270305

Tabela 6.6: Ordem de convergência espacial para a abordagem 2.

Malhas avaliadas	v_x	τ_{xx}	τ_{xy}
M_1/M_2	1.91394143	1.60559265	1.41568811
M_2/M_3	2.03746403	1.51258541	1.42544642
M_3/M_4	2.17238146	1.49793246	1.46062706
M_4/M_5	2.27252013	1.60780474	1.58887367
M_5/M_6	2.67001708	1.88609522	1.90643009

Tabela 6.7: Ordem de convergência espacial para a abordagem 3.

Malhas avaliadas	v_x	τ_{xx}	τ_{xy}
M_1/M_2	1.98033206	2.00340593	1.83836646
M_2/M_3	2.04850879	1.95849351	1.82675118
M_3/M_4	2.18655548	1.91161595	1.83901990
M_4/M_5	2.27723039	1.96341195	1.92369957
M_5/M_6	2.70949338	2.06947572	2.18905264

Tabela 6.8: Ordem de convergência espacial para a abordagem 4.

Malhas avaliadas	v_x	τ_{xx}	τ_{xy}
M_1/M_2	1.98361817	1.98264048	1.83262623
M_2/M_3	2.04929860	1.92786482	1.82212391
M_3/M_4	2.19189392	1.87617191	1.82835566
M_4/M_5	2.27890455	1.94133802	1.92173077
M_5/M_6	2.73576551	2.06316184	2.20438743

paramétricos que serão apresentados na próxima seção 6.1.2 possuem robustez, acurácia e precisão, como visto nesta etapa de verificação.

6.1.2 Estudos Paramétricos do Modelo Viscoelástico com a Viscosidade Variando com a Pressão

Nesta seção são apresentados diversos resultados a fim de analisar a influência da modelagem da viscosidade dependendo da pressão no modelo Oldroyd-B para solução numérica de escoamentos viscoelásticos.

A viscosidade polimérica, η_P , presente no modelo Oldroyd-B (ver Tabela 2.1) será expressa pelas equações (2.22) e (2.24). Desta forma, os estudos numéricos apresentados nesta seção considera a variação linear dos valores da viscosidade de acordo com as alterações da pressão no escoamento.

Como pode-se observar nas equações (2.22) e (2.24), $\gamma = 0 \text{ ms}^2/\text{Kg}$ corresponde ao modelo Oldroyd-B padrão, ou seja, sem a variação da viscosidade com a pressão.

Para as simulações, será considerado um canal de dimensões $20\text{m} \times 1\text{m}$, ou seja, seguindo a nomenclatura da Figura 6.1 serão adotados um comprimento $L = 20\text{m}$ e uma altura $H = 1\text{m}$. A malha M_5 é utilizada para todos os resultados obtidos nas seções seguintes.

Para efeito de comparação, os resultados serão apresentados na forma adimensional. Sendo assim, as variáveis \mathbf{v} , p , $\boldsymbol{\tau}_P$ e γ são normalizadas por U , $\frac{\eta_0 U}{H}$, $\frac{\eta_0 U}{H}$ e $\frac{H}{\eta_0 U}$, respectivamente.

Os estudos paramétricos estão dispostos a seguir em seções independentes, onde cada seção apresenta diversos resultados numéricos que apontam para o tipo de influência que um parâmetro, γ , De ou β , exerce sobre o escoamento.

6.1.2.1 A Influência do Parâmetro γ

A modelagem da variação linear da viscosidade com relação a pressão é dada pelas equações (2.22) e (2.24). Sendo assim, o parâmetro γ está relacionado com a razão entre os valores da viscosidade polimérica e os valores da pressão, ou seja, γ é o coeficiente angular desta modelagem. Quanto mais rápido a viscosidade crescer com o aumento da pressão nos escoamentos, maior deve ser os valores de γ para esta representação.

As simulações desta seção foram realizadas adotando os parâmetros $Re = 0.01$, $De = 0.5$ e $\gamma = 0, 2 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}, 6 \cdot 10^{-3}, 8 \cdot 10^{-3}, 1 \cdot 10^{-2}$, para $\beta = 0$, ou seja, para o modelo UCM. Lembrando que o caso $\gamma = 0$ corresponde ao modelo viscoelástico padrão.

Os comportamentos e os valores das componentes da velocidade v_x e do tensor polimérico τ_{xx} e τ_{xy} ao longo de um corte transversal ao canal em $x = 16$ com relação aos vários valores de γ considerados estão dispostos nas Figuras 6.3, 6.4 e 6.5, respectivamente.

De acordo com a Figura 6.3a não é possível observar comportamentos muito distintos das componentes v_x da velocidade no modelo viscoelástico padrão ($\gamma = 0$) e no modelo viscoelástico com a viscosidade variando linearmente com a pressão para os diversos valores de γ . Por causa da magnitude dos valores desta componente, a Figura 6.3b expõe melhor estas comparações, apresentando a diferença entre os dois perfis de velocidade: $v_x|_{\gamma} - v_x|_{\gamma=0}$, sendo $v_x|_{\gamma=0}$ o perfil da velocidade no modelo padrão e $v_x|_{\gamma}$ o perfil da velocidade para um valor de γ ($\gamma = 2 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}, 6 \cdot 10^{-3}, 8 \cdot 10^{-3}$ ou $1 \cdot 10^{-2}$).

O resultado de comparação apresentado na 6.3b mostra que na área central do canal, em torno do eixo de simetria, os valores de v_x são maiores na nova modelagem do que na modelagem padrão e quanto maior for o valor de γ , maior é o valor de v_x , com o pico desse aumento sendo atingido no eixo de simetria do canal. Inversamente, na região próxima a parede do canal, os valores de v_x na modelagem padrão superam os da nova modelagem e quanto maior for o valor de γ , menor é o valor de v_x . Este comportamento já foi registrado em um estudo teórico por [36]. Nesse trabalho o autor interpreta a diferença $v_x|_{\gamma} - v_x|_{\gamma=0}$ como o desvio de v_x do perfil parabólico padrão.

No caso das componentes τ_{xx} e τ_{xy} do tensor polimérico, ao longo de todo corte transversal, em $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$, estas componentes coincidem apenas no eixo de simetria do canal, onde todas as componentes do tensor polimérico são nulas (ver Figuras 6.4a e 6.5a). Na Figura 6.4a pode-se observar que quanto maior o valor de γ , mais alto é o valor da componente τ_{xx} . De forma semelhante, a Figura 6.5a mostra que quanto maior o valor de γ , mais alto é o valor absoluto da componente τ_{xy} . As Figuras 6.4b e 6.5b mostram as diferenças entre os respectivos valores das componentes do tensor polimérico na nova modelagem e na modelagem padrão. Para ambas as componentes, as diferenças ficam mais evidentes próximo as paredes do canal e vai diminuindo, em valor absoluto no caso da componente τ_{xy} , na direção do eixo de simetria, local onde são iguais, identicamente nulas.

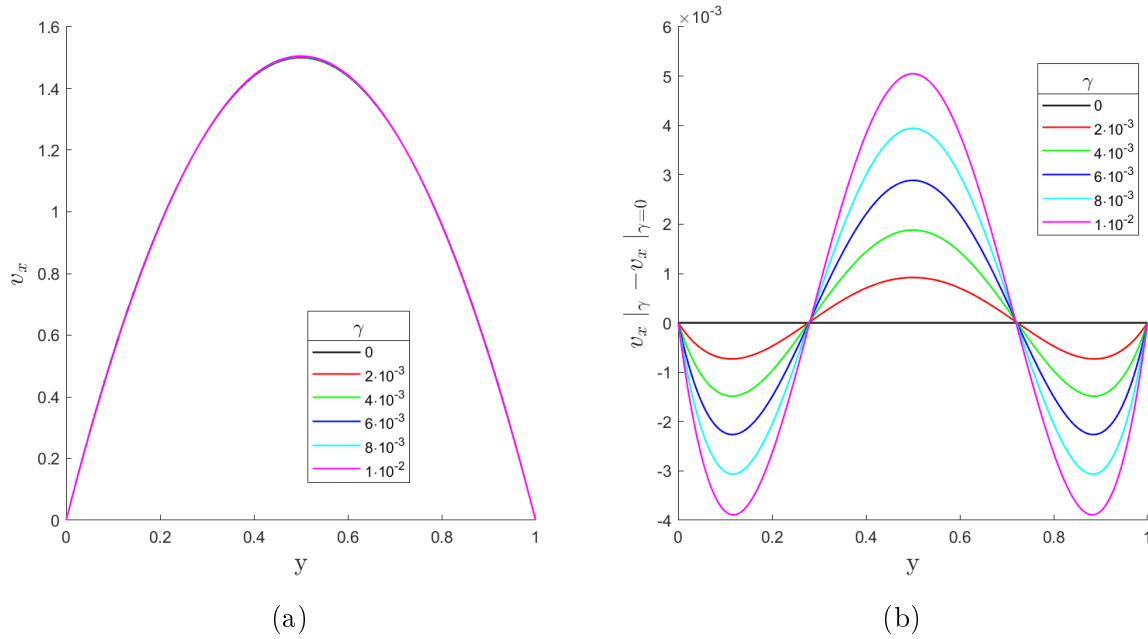


Figura 6.3: Comparação do perfil da velocidade v_x (a) e o desvio do perfil parabólico da velocidade ($v_x|_{\gamma} - v_x|_{\gamma=0}$) (b), ao longo de um corte transversal ao canal em $x = 16$ para diferentes valores de γ .

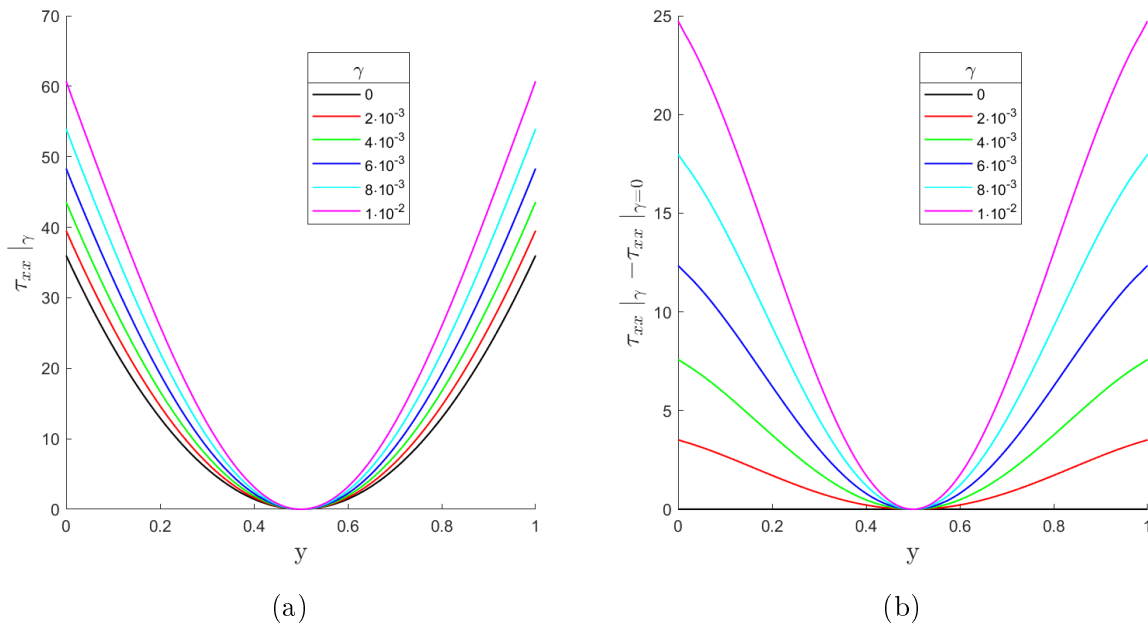


Figura 6.4: Comparação do perfil do tensor τ_{xx} (a) e a variação da componente do tensor: $\tau_{xx}|_{\gamma} - \tau_{xx}|_{\gamma=0}$ (b), ao longo de um corte transversal ao canal em $x = 16$ para diferentes valores de γ .

Um comportamento interessante que vale a pena destacar é a queda da pressão ao longo do canal. Na nova modelagem a pressão decai exponencialmente, como pode ser visto na Figura 6.6, então $\partial p / \partial x$ não é constante. Além disso, a Figura 6.6 aponta para uma influência muito significativa do parâmetro γ sobre a pressão, quanto maior o valor de γ , maior é a pressão ao longo do escoamento, principalmente mais próximo a entrada do canal.

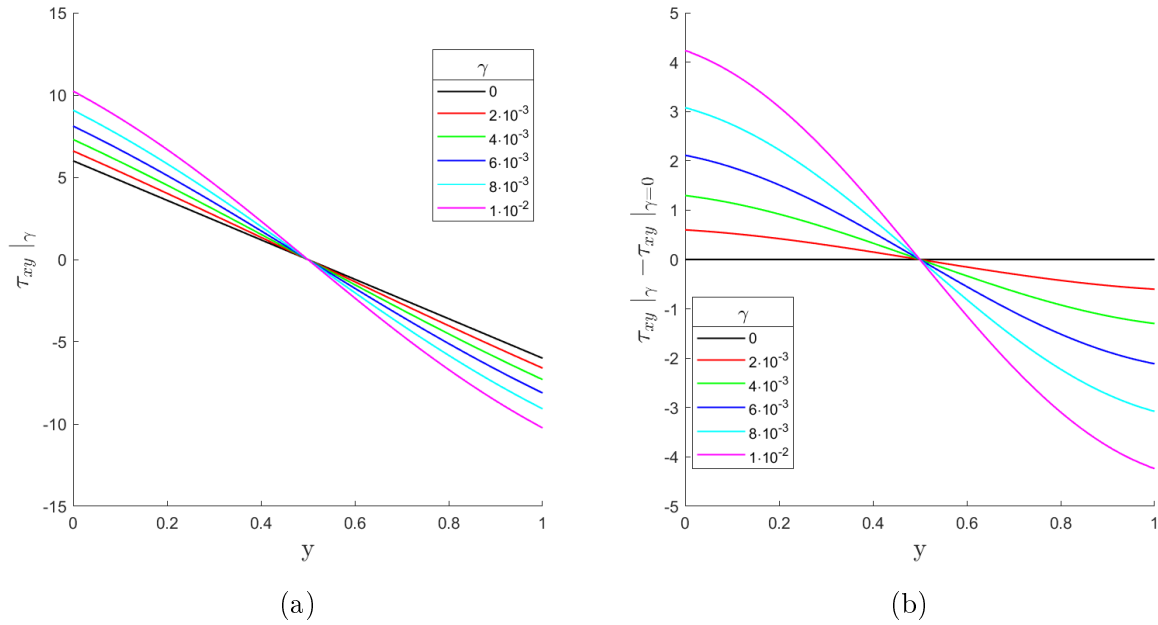


Figura 6.5: Comparação do perfil do tensor τ_{xy} (a) e a variação da componente do tensor: $\tau_{xy}|_{\gamma} - \tau_{xy}|_{\gamma=0}$ (b), ao longo de um corte transversal ao canal em $x = 16$ para diferentes valores de γ .

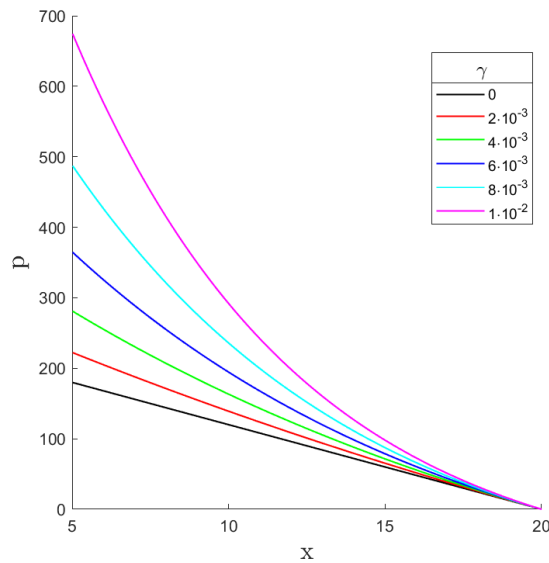


Figura 6.6: Valores da pressão ao longo do centro do canal, $y = 0.5$ e $5 \leq x \leq 20$, para diferentes valores de γ .

6.1.2.2 A Influência do Número de Deborah (De)

Para observar a influência do número de Deborah (De) na nova modelagem, foram realizadas simulações com $Re = 0.01$ e $\gamma = 10^{-2}$ fixos e diversos valores para o número de Deborah, $De = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ e 0.5 , considerando $\beta = 0$, ou seja, considerando a modelagem da viscosidade variando com a pressão (ver equações (2.22) e (2.24)) no modelo UCM.

As comparações entre a nova modelagem e a modelagem padrão estão dispostas nas Figuras 6.7, 6.8 e 6.10, onde os valores das componentes da velocidade v_x e do tensor

polimérico τ_{xx} e τ_{xy} são considerados ao longo de um corte transversal ao canal em $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$ e, os valores da pressão p são analisados no eixo de simetria do canal, em $y = 0.5$ e $5 \leq x \leq 20$.

A Figura 6.7a mostra a diferença $v_x|_{\gamma=10^{-2}} - v_x|_{\gamma=0}$ do perfil da velocidade entre a nova modelagem ($\gamma = 10^{-2}$) e a modelagem padrão ($\gamma = 0$) para os diversos valores de De . Nesta Figura 6.7a pode-se notar que, para $Re = 0.01$, $\gamma = 10^{-2}$ e $\beta = 0$, quanto maior o número de Deborah De , mais o perfil v_x na nova modelagem se distancia do perfil v_x na modelagem padrão. Esta tendência de comportamento também foi observada para outros valores de γ , como pode ser visto na Figura 6.7b, que mostra os valores máximo de v_x para $De = 0.1, 0.3$ e 0.5 e $\gamma = 0, 2 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}, 6 \cdot 10^{-3}, 8 \cdot 10^{-3}$ e $1 \cdot 10^{-2}$. Assim, os perfis de v_x nas duas modelagens (nova e padrão) são mais semelhantes não somente para valores baixos de γ , mas também para valores mais baixos de De .

O comportamento observado na Figura 6.7a é análogo ao visto na seção anterior (ver 6.3b). De acordo com a Figura 6.7a, para cada valor de De os perfis coincidem em dois pontos no interior do canal pela simetria do perfil, em y_1 e y_2 , onde $0.2 \leq y_1 \leq 0.4$ e $0.6 \leq y_2 \leq 0.8$. Em torno do eixo de simetria, para todo y tal que $y_1 \leq y \leq y_2$, os valores de v_x são maiores na nova modelagem do que na modelagem padrão, havendo uma inversão deste comportamento para os valores y tal que $0 \leq y \leq y_1$ e $y_2 \leq y \leq 1$, o que indica um perfil mais triangular de v_x na nova modelagem, o que está de acordo com a literatura (ver por exemplo, [36]).

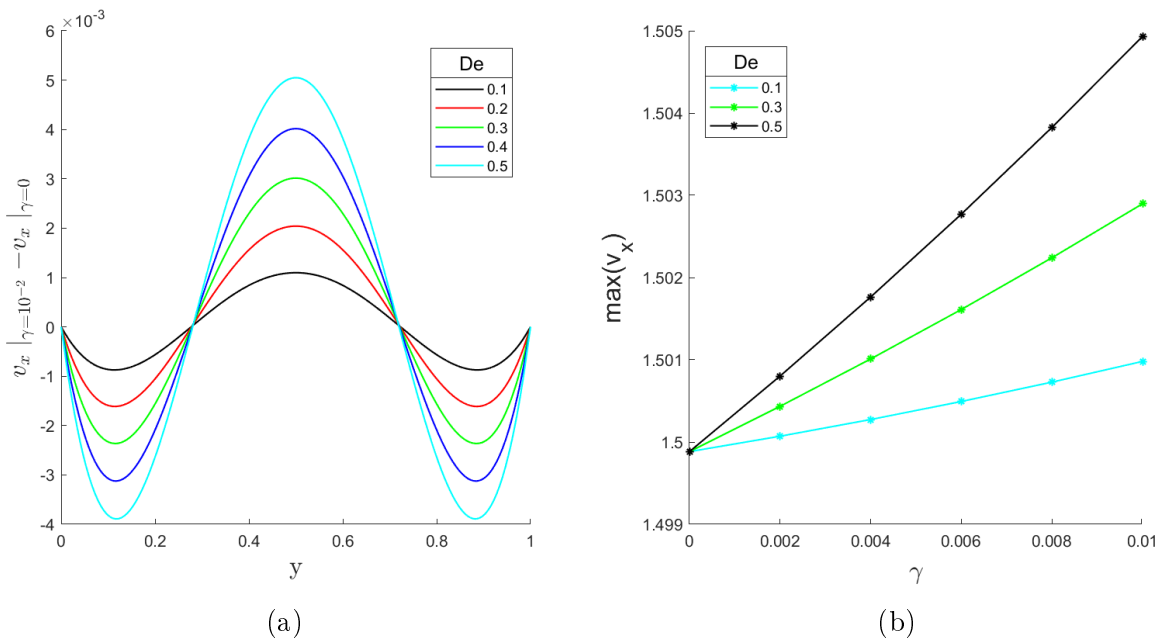


Figura 6.7: Comparação dos perfis v_x da velocidade: $v_x|_{\gamma=10^{-2}} - v_x|_{\gamma=0}$ (a) ao longo de $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$ para diferentes valores de De ; e valores máximos de v_x da velocidade, que ocorre em $y = 0.5$, para $\gamma = 0, 2 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}, 6 \cdot 10^{-3}, 8 \cdot 10^{-3}$ e $1 \cdot 10^{-2}$ e para diferentes valores de De (b).

A Figura 6.8 aponta para uma maior influência do número de De sobre a componente normal τ_{xx} do tensor polimérico. As Figuras 6.8a e 6.8b medem, respectivamente, a diferença entre os valores de τ_{xx} e τ_{xy} na nova modelagem ($\gamma = 10^{-2}$) e na modelagem padrão ($\gamma = 0$). A diferença absoluta máxima entre as duas modelagens salta de próximo de 5 para aproximadamente 25 na componente τ_{xx} , quando De varia de 0.1 para 0.5, enquanto que na componente τ_{xy} o aumento dessa diferença, nas proximidades das paredes do canal, não supera 15%. O que mantém-se para as duas componentes é o fato de que as

tensões tornam-se cada vez maiores, em valor absoluto no caso da componente cisalhante, com o aumento do número de De .

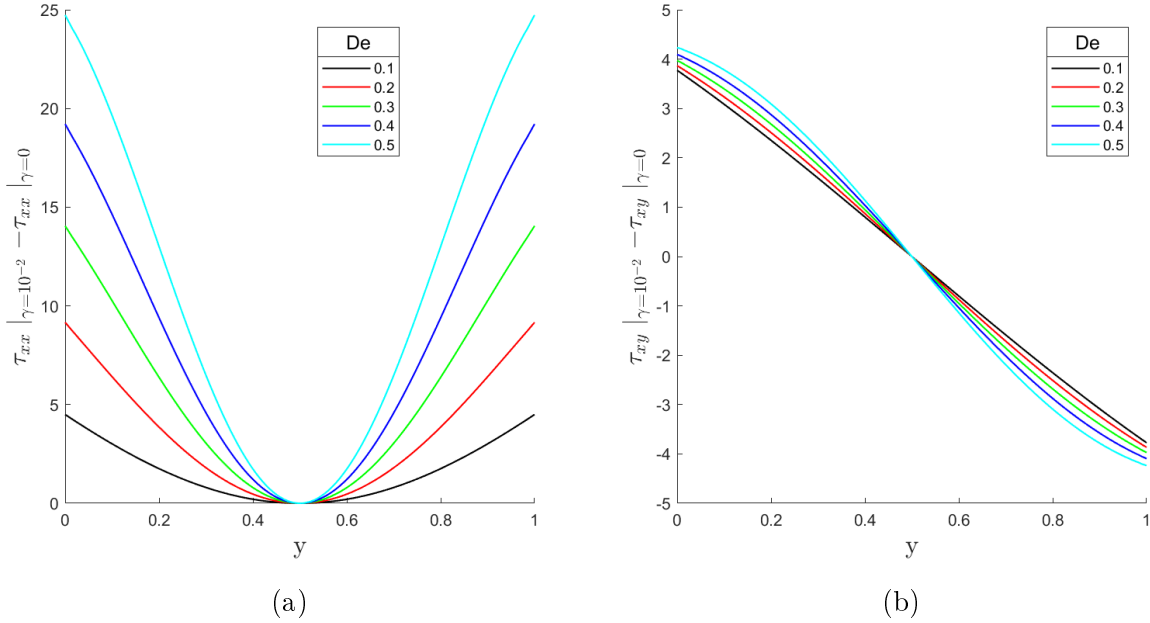


Figura 6.8: Comparação do tensor entre as modelagens: $\tau_{xx}|_{\gamma=10^{-2}} - \tau_{xx}|_{\gamma=0}$ (a) e $\tau_{xy}|_{\gamma=10^{-2}} - \tau_{xy}|_{\gamma=0}$ (b), ao longo de $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$ para diferentes valores de De .

Um comportamento interessante de se destacar é que, a variação do número de Deborah para valores baixos de γ faz com que as linhas do gráfico se cruzem em dois pontos y_1 e y_2 nas proximidades das paredes. Ou seja, há dois pontos y_1 e y_2 tais que, para a tensão avaliada em $y_1 < y < y_2$ ha um aumento no valor absoluto da tensão τ_{xy} , e quando avaliada em $0 \leq y < y_1$ e $y_2 < y \leq 1$ o aumento no número de Deborah leva a uma redução da tensão τ_{xy} . Esse comportamento é destacado nas Figuras 6.9a e 6.9b para $\gamma = 10^{-3}$ (onde $0.013 < y_1 < 0.015$ e $0.985 < y_2 < 0.987$) e $\gamma = 10^{-4}$ (onde $0.024 < y_1 < 0.026$ e $0.974 < y_2 < 0.976$), respectivamente.

A Figura 6.10 mostra a queda da pressão ao longo do eixo central de simetria do canal, das proximidades do contorno de entrada até o de saída. Assim como visto na Figura 6.6, o decaimento da pressão é exponencial. O número de De exerce um papel importante nos valores da pressão ao longo deste corte escolhido. Nestas simulações, a pressão assume valores cada vez maiores sempre que o valor de De aumenta.

6.1.2.3 A Influência do Parâmetro β

O parâmetro β é uma razão entre viscosidades, mais especificamente $\beta = \frac{\eta_S}{\eta_0}$, onde $\eta_0 = \eta_S + \eta_{P_0}$ é a viscosidade total de referência, sendo η_S a viscosidade do solvente Newtoniano e η_{P_0} a viscosidade polimérica de referência; logo, $0 \leq \beta < 1$. Para $\beta = 0$ tem-se a ausência da viscosidade Newtoniana, e então, o modelo Oldroyd-B reduz-se ao modelo UCM. Quando β assume um valor próximo de 1 significa que a viscosidade polimérica de referência η_{P_0} é um valor muito próximo de zero, assim a viscosidade do solvente é dominante no fluido e então, o escoamento tem um comportamento mais semelhante ao do Newtoniano.

Nas simulações para os estudos da influência do parâmetro β foram utilizados $Re = 0.01$, $De = 0.5$, $\gamma = 10^{-2}$ e $\beta = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6$ e 0.8 .

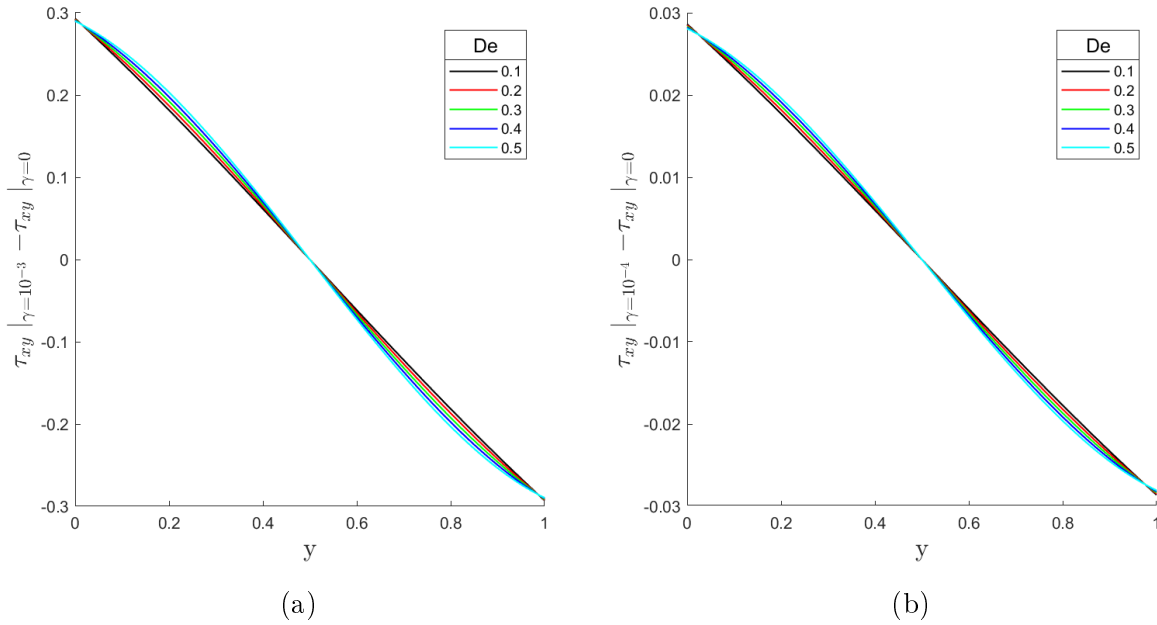


Figura 6.9: Comparação do tensor entre as modelagens: $\tau_{xy}|_{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xy}|_{\gamma=0}$ (a) e $\tau_{xy}|_{\gamma=10^{-4}} - \tau_{xy}|_{\gamma=0}$ (b), ao longo de $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$ para diferentes valores de De .

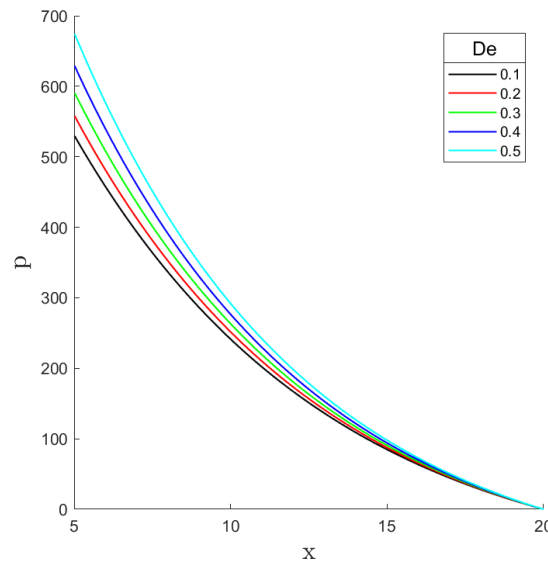


Figura 6.10: Valores da pressão ao longo do eixo central de simetria do canal em $y = 0.5$ e $5 \leq x \leq 20$, para diferentes valores de De .

A Figura 6.11 mostra a diferença $v_x|_{\gamma=10^{-2}} - v_x|_{\gamma=0}$ do perfil da velocidade entre a nova modelagem ($\gamma = 10^{-2}$) e a modelagem padrão ($\gamma = 0$) para os diversos valores de β , ao longo do corte transversal ao canal em $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$. Novamente, o mesmo comportamento mais triangular do perfil da velocidade é visto para a nova modelagem. O que nota-se da influência do parâmetro β é que o perfil da velocidade na nova modelagem tende ao perfil mais parabólico quando β aumenta, ou equivalentemente, para valores baixos de β , pouca influência de η_S , as diferenças entre os perfis da velocidade nas modelagens nova e padrão aumentam, então o desvio do perfil parabólico na nova modelagem fica maior.

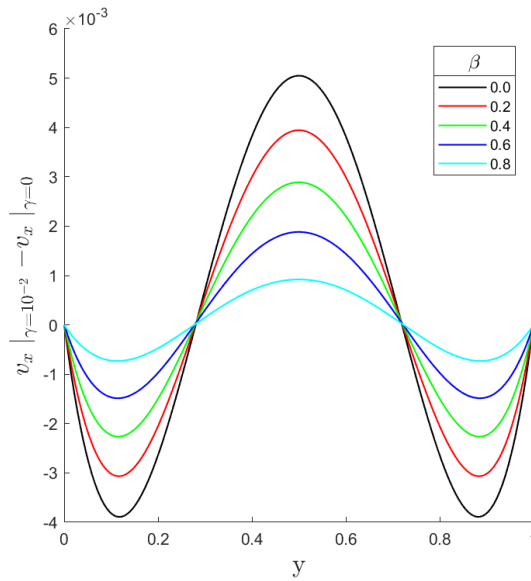


Figura 6.11: Comparação dos perfis da velocidade entre as modelagens: $v_x|_{\gamma=10^{-2}} - v_x|_{\gamma=0}$, ao longo de $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$ para diferentes valores de β .

As Figuras 6.12a e 6.12b apresentam as diferenças entre os valores das componentes do tensor polimérico τ_{xx} e τ_{xy} , respectivamente, na nova modelagem e na modelagem padrão. Para ambas as componentes, o parâmetro β exerce forte influência quanto menor for. Pode-se ver nas Figuras 6.12a e 6.12b que quanto menor o valor de β , maior é a diferença entre os valores da tensão na nova modelagem e na modelagem padrão, atingindo valores mais altos da tensão, em valor absoluto no caso da componente τ_{xy} , quando β é pequeno.

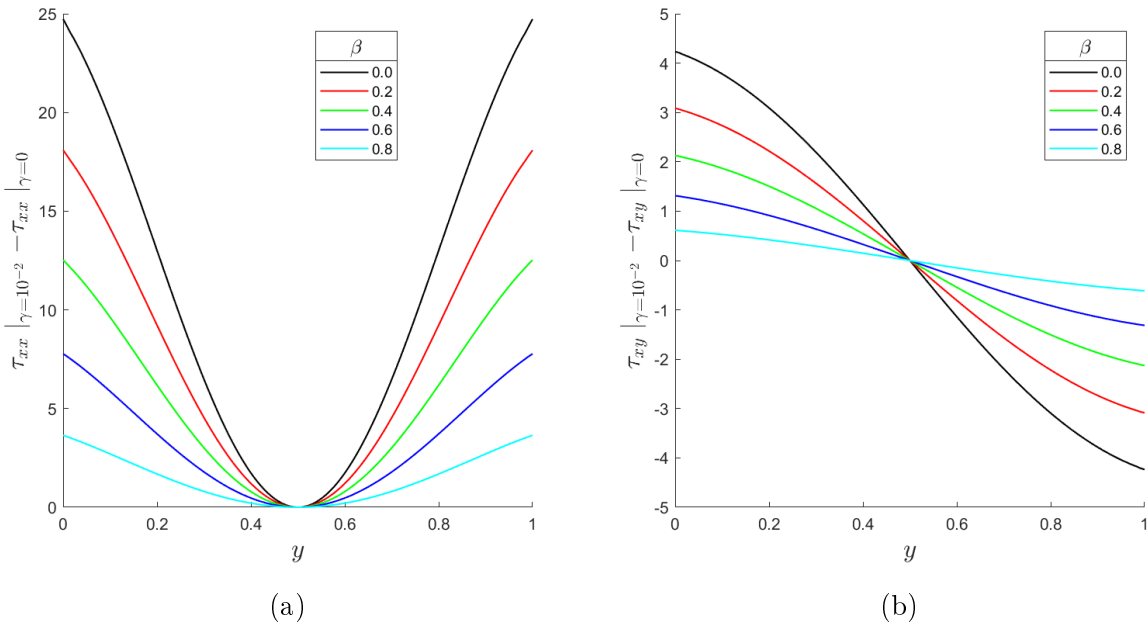


Figura 6.12: Comparação do tensor entre as modelagens: $\tau_{xx}|_{\gamma=10^{-2}} - \tau_{xx}|_{\gamma=0}$ (a) e $\tau_{xy}|_{\gamma=10^{-2}} - \tau_{xy}|_{\gamma=0}$ (b), ao longo de $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$ para diferentes valores de β .

No caso do estudo da pressão com respeito ao parâmetro β , a Figura 6.13 mostra que quanto menor o valor de β , ou seja, menor a influência da viscosidade Newtoniana, maior

torna-se a pressão ao longo do eixo central de simetria do canal. Como visto nos estudos anteriores, a nova modelagem exhibe um decaimento da pressão semelhante ao exponencial nesta região.

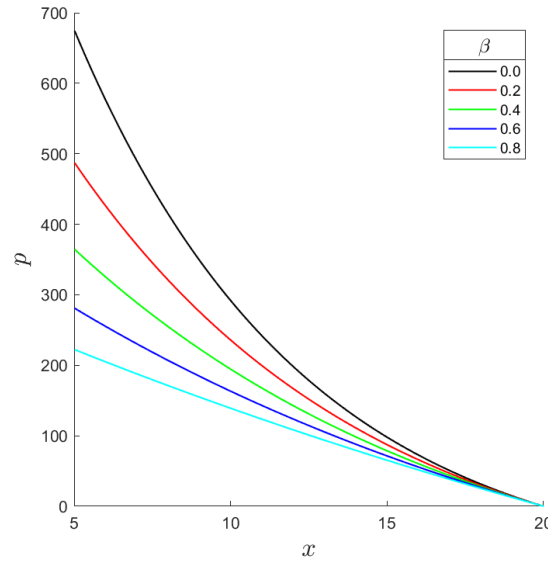


Figura 6.13: Valores da pressão ao longo do eixo central de simetria do canal em $y = 0.5$ e $5 \leq x \leq 20$, para diferentes valores de β .

6.1.3 Estudos Paramétricos do Modelo Viscoelástico com a Viscosidade e o Tempo de Relaxação Variando com a Pressão

Nesta seção é analisado o comportamento do escoamento quando tanto a viscosidade quanto o tempo de relaxação dependem linearmente com a pressão, para a solução numérica de escoamentos viscoelásticos utilizando o modelo Oldroyd-B. A geometria, malha, normalizações e condições de contorno utilizadas são as mesmas apresentadas nas seções anteriores.

Para esta nova modelagem, a viscosidade polimérica (η_P) e o tempo de relaxação (λ) presentes no modelo Oldroyd-B (ver Tabela 2.1) serão expressos, respectivamente, pelas equações (2.22) e (2.23), com $f_{\eta_P}(p)$ e $f_{\lambda}(p)$ modelados igualmente pela equação (2.24), ou seja, variando linearmente com a pressão.

6.1.3.1 A Influência do Parâmetro γ

Para analisar a influência do do parâmetro γ foram realizadas simulações para o modelo UCM (Oldroyd-B com $\beta = 0$) com $Re = 0.01$, $De = 0.5$ e $\gamma = 0, 2 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}, 6 \cdot 10^{-3}, 8 \cdot 10^{-3}$ e $1 \cdot 10^{-2}$, onde $\gamma = 0$ equivale ao modelo viscoelástico padrão.

As Figuras 6.14, 6.15a, 6.15b dispõem, respectivamente, os gráficos com o perfil da diferença, entre o novo modelo e o modelo padrão, das componentes de velocidade v_x , e do tensor polimérico τ_{xx} e τ_{xy} , ao longo de um corte transversal em $x = 16$, e a Figura 6.16 dispõe os valores da pressão, retirados do eixo central de simetria ($y = 0.5$) e $5 \leq x \leq 20$.

A Figura 6.14 detalha o comportamento distinto entre a velocidade v_x no novo modelo, em que a viscosidade e o tempo de relaxação variam linearmente com a pressão, e no modelo viscoelástico padrão, ou seja, o gráfico apresenta a diferença $v_x|_{\gamma} - v_x|_{\gamma=0}$ para $\gamma = 0, 2 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}, 6 \cdot 10^{-3}, 8 \cdot 10^{-3}$ e $1 \cdot 10^{-2}$. Podemos observar a presença de dois

pontos, y_1 e y_2 com $0.2 \leq y_1 \leq 0.4$ e $0.6 \leq y_2 \leq 0.8$, nos quais a velocidade v_x é idêntica em ambas as modelagens. Além disso, nota-se que há um aumento na velocidade v_x em $y_1 < y < y_2$, com o pico máximo sendo alcançado no eixo de simetria do canal. E em $0 < y < y_1$ e $y_2 < y < 1$ há uma redução na velocidade v_x , se comparado ao modelo padrão. Desta forma, com o aumento do parâmetro γ , há uma maior diferença entre o perfil de velocidade v_x da nova modelagem com relação a modelagem padrão, deixando de ter um perfil parabólico e assumindo um perfil mais triangular, de forma semelhante ao apresentado nas seções anteriores, onde apenas a viscosidade polimérica η_P varia com a pressão.

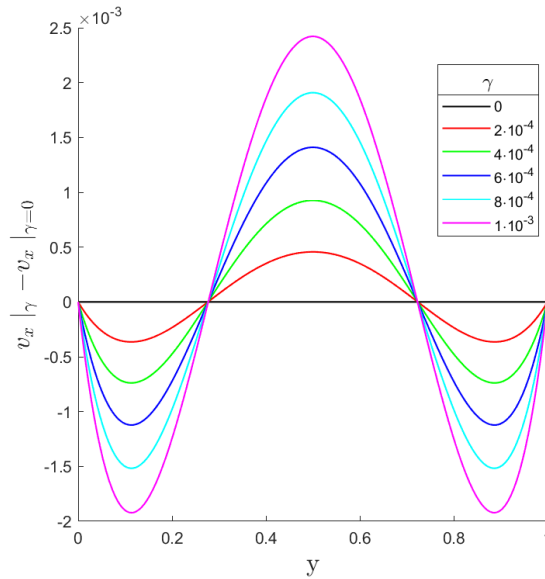


Figura 6.14: Variação da velocidade ($v_x|_\gamma - v_x|_{\gamma=0}$), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de γ .

As Figuras 6.15a e 6.15b exibem a diferença entre o valor do novo modelo e do modelo padrão, das componentes τ_{xx} e τ_{xy} do tensor polimérico, retiradas de um corte transversal em $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$. Podemos notar que não há variação das tensões no eixo de simetria do canal ($y = 0.5$), onde todas as componentes do tensor assumem valor nulo. Observamos também que, quanto maior o valor do parâmetro γ , maior é o valor da componente τ_{xx} , e, de forma similar, o aumento de γ leva a um aumento do valor absoluto da componente τ_{xy} .

A Figura 6.16 exibe o gráfico da pressão, retirada no eixo de simetria em $y = 0.5$ e $5 \leq x \leq 20$, para $\gamma = 0, 2 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}, 6 \cdot 10^{-3}, 8 \cdot 10^{-3}$ e $1 \cdot 10^{-2}$. Nota-se que com o aumento do parâmetro γ há um aumento nos valores da pressão ao longo do canal, e a queda de pressão deixa de ser linear, ou seja, $\partial p / \partial x$ deixa de ser constante.

6.1.3.2 A Influência do Número de Deborah (De)

A análise da influência do número de Deborah (De) é realizada a partir de simulações com $De = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ e 0.5 , e considerando $Re = 0.01$ e $\beta = 0.0$ (modelo UCM) fixos. São consideradas as equações (2.22), (2.23) e (2.24), onde a viscosidade polimérica e o tempo de relaxação variam linearmente com a pressão para $\gamma = 10^{-3}$.

As Figuras 6.17a, 6.18a e 6.18b apresentam, respectivamente, as comparações entre os valores da componente da velocidade v_x , tensor polimérico τ_{xx} e τ_{xy} , retirados de um corte transversal em $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$. Podemos observar na Figura 6.17, a variação do perfil

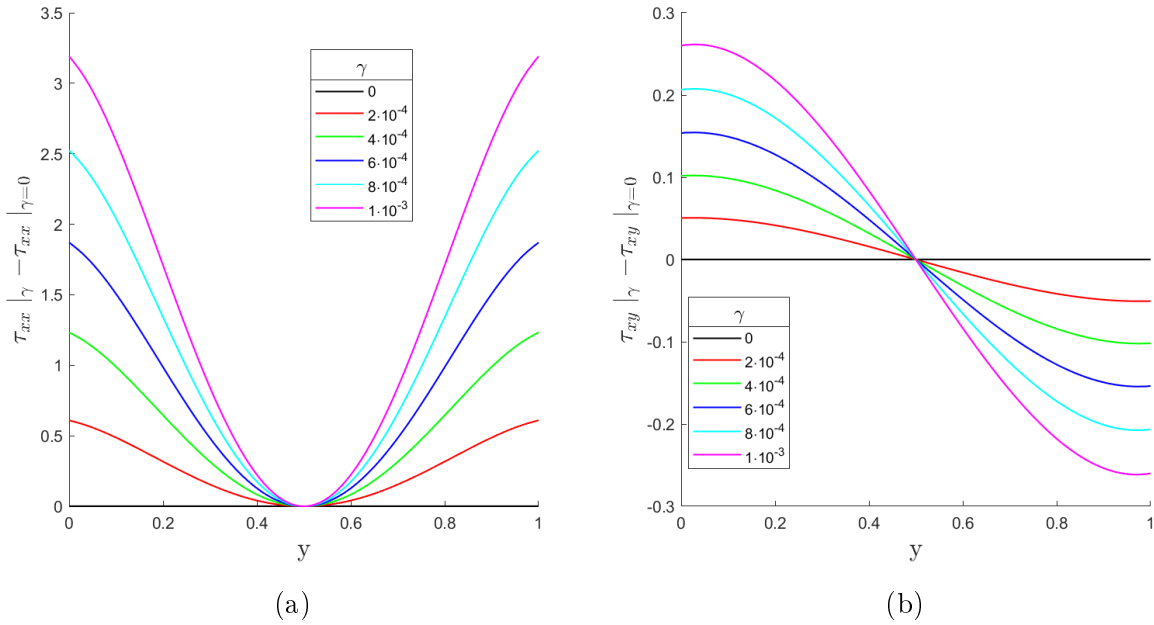


Figura 6.15: Variação do tensor τ_{xx} ($\tau_{xx}|_{\gamma} - \tau_{xx}|_{\gamma=0}$) (a) e Variação do tensor τ_{xy} ($\tau_{xy}|_{\gamma} - \tau_{xy}|_{\gamma=0}$) (b), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de γ .

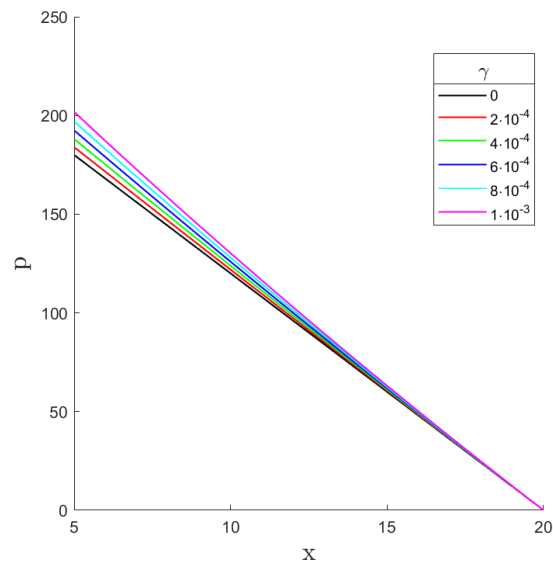


Figura 6.16: Valores da pressão retirados do centro do canal a partir de $x = 5$, para diferentes valores de γ .

de velocidade v_x entre $\gamma = 10^{-3}$ (novo modelo) e $\gamma = 0$ (modelo padrão) para $De = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ e 0.5 , que o aumento do número de Deborah leva a uma maior variação no perfil de velocidade v_x entre as modelagens, deixando de ter o comportamento do clássico perfil parabólico do modelo padrão. Este comportamento também é observado para outros valores de γ , como pode ser observado na Figura 6.17b, onde são apresentados os valores máximos da velocidade v_x para $De = 0.1, 0.3$ e 0.5 , e $\gamma = 0, 2 \cdot 10^{-4}, 4 \cdot 10^{-4}, 6 \cdot 10^{-4}, 8 \cdot 10^{-4}$ e $1 \cdot 10^{-3}$. Assim, os perfis de velocidade v_x na nova modelagem distanciam-se da modelagem padrão tanto com o aumento de γ quanto com o aumento do número de Deborah De .

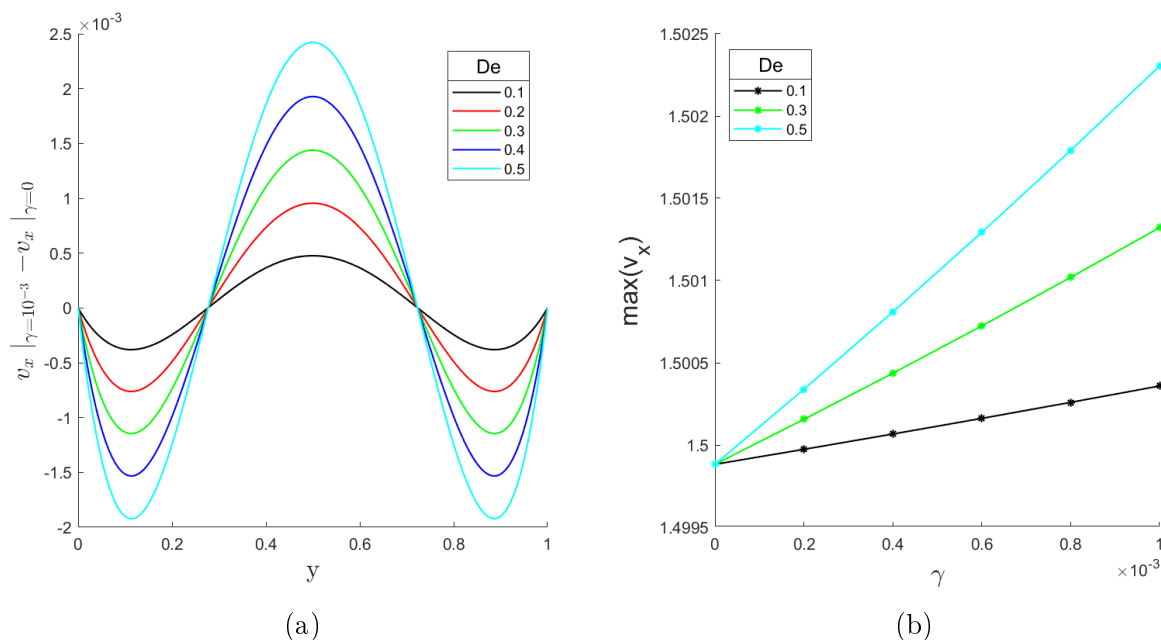


Figura 6.17: Variação da velocidade ($v_x|_{\gamma=10^{-3}} - v_x|_{\gamma=0}$) (a) e valores máximos da velocidade (obtidos no centro do canal) para $\gamma = 0, 2 \cdot 10^{-4}, 4 \cdot 10^{-4}, 6 \cdot 10^{-4}, 8 \cdot 10^{-4}$ e $1 \cdot 10^{-3}$, retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de De .

A Figura 6.18a exibe a diferença entre as tensões τ_{xx} ($\tau_{xx}|_{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xx}|_{\gamma=0}$) para $De = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ e 0.5 . Podemos notar que o aumento do número de Deborah (De) induz a um aumento no valor de τ_{xx} entre as parede e o eixo de simetria do canal. Também observa-se que no eixo de simetria não ha diferença entre as tensões, todas são nulas. Já para o tensor τ_{xy} (ver Figura 6.18b) observamos que as linhas da tensão para diferentes valores de De cruzam-se em três pontos, sendo um no eixo de simetria ($y = 0.5$), onde a componente τ_{xy} é nula para todos os valores de De , e em mais dois pontos y_1 ($0.055 \leq y_1 \leq 0.006$) y_2 ($0.94 \leq y_2 \leq 0.945$), próximos a parede do canal. Ressalta-se que o aumento do valor De leva a uma aumento no valor absoluto da tensão τ_{xy} em $y \in (y_1, y_2)$. E, em contrapartida, em $y \in (0, y_1)$ e $y \in (y_2, 1)$, o aumento do valor De leva a uma redução no valor absoluto da tensão τ_{xy} .

A Figura 6.19 exibe a queda da pressão ao longo do eixo de simetria do canal, em $y = 0.5$ e $5 \leq x \leq 20$. São apresentados os valores da pressão para $Re = 0.01$, $\gamma = 10^{-3}$, $\beta = 0.0$ e $De = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ e 0.5 . Podemos notar que a variação no valor do número de Deborah (De) exerce um pequena influência nos valores da pressão, que aumentam a medida que o valor de De também aumenta.

6.1.3.3 A Influência do Parâmetro β

Para observar a influência do parâmetro β , foram realizadas simulações com $Re = 0.01$, $De = 0.5$ e $\gamma = 10^{-3}$, para $\beta = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6$ e 0.8 . Os valores da velocidade v_x e tensões τ_{xx} e τ_{xy} foram retirados de um corte transversal em $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$. A Figura 6.20 mostra a variação do perfil de velocidade entre a nova modelagem ($\gamma = 10^{-3}$) e a modelagem padrão ($\gamma = 0$) para os diversos valores de β . Com o aumento no valor do parâmetro β , ou seja, com o aumento da contribuição newtoniano do fluido, há uma redução na diferença entre os perfis da velocidade v_x da nova modelagem e da modelagem padrão. Em outras palavras, o aumento do parâmetro β faz com que o perfil da velocidade torne-se mais parecido com o clássico perfil parabólico da modelagem padrão.

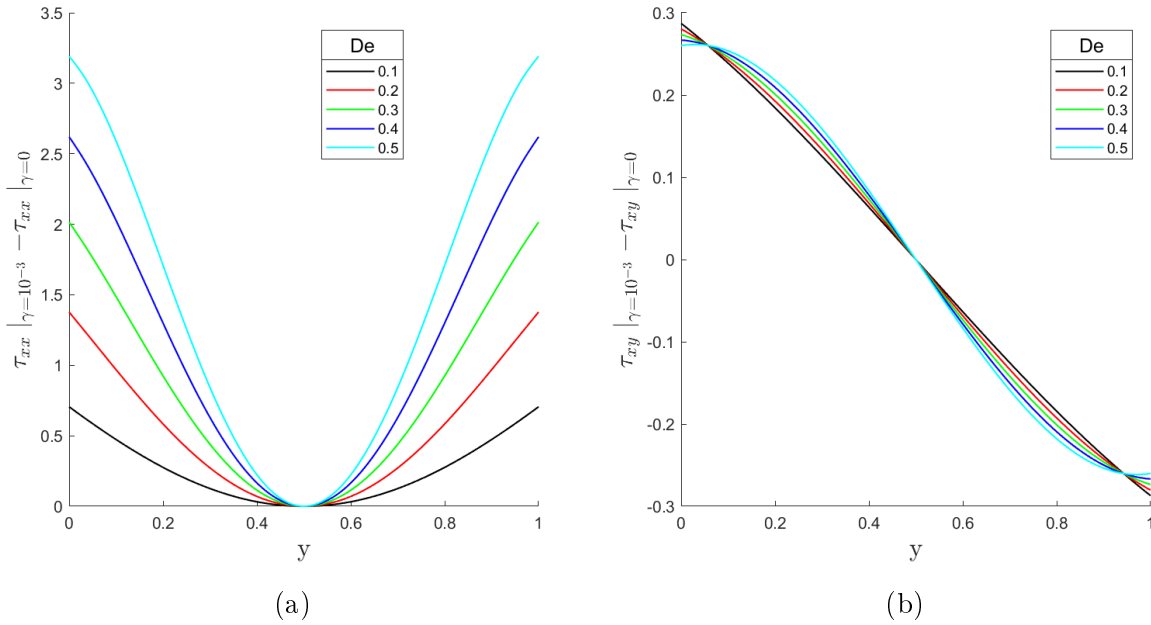


Figura 6.18: Variação do tensor τ_{xx} ($\tau_{xx} |_{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xx} |_{\gamma=0}$) (a) e Variação do tensor τ_{xy} ($\tau_{xy} |_{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xy} |_{\gamma=0}$) (b), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de De .

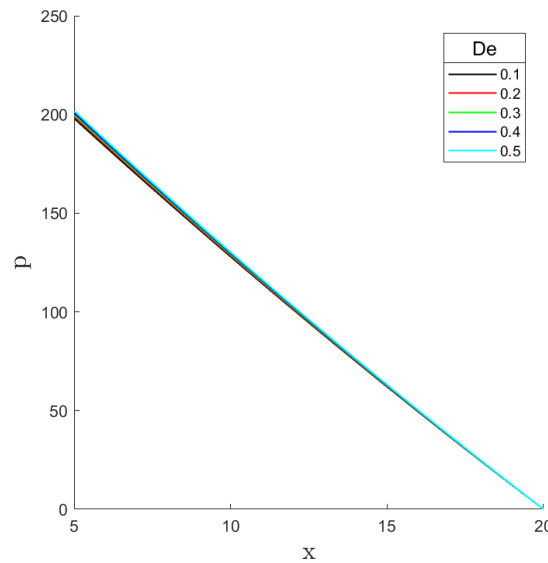


Figura 6.19: Valores da pressão retirados do centro do canal a partir de $x = 5$, para diferentes valores de De .

As Figuras 6.21a e 6.21b apresentam, respectivamente, as diferenças dos valores das tensões τ_{xx} ($\tau_{xx} |_{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xx} |_{\gamma=0}$) e τ_{xy} ($\tau_{xy} |_{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xy} |_{\gamma=0}$) entre a nova modelagem e a modelagem padrão. Ao aumentarmos β , assim diminuindo a contribuição polimérica e aumentando a contribuição polimérica do fluido, tensão τ_{xx} diminui, aproximando-se do perfil do modelo padrão. E, de maneira análoga, a tensão τ_{xy} diminui, em valor absoluto, a medida que o valor do parâmetro β aumenta, diminuindo assim as diferenças entre o novo modelo e o modelo padrão.

Para o estudo da pressão, avaliando os efeitos da variação do parâmetro β , os valores foram retirados de um corte do eixo central de simetria $y = 0.5$ e $5 \leq x \leq 20$. Com o au-

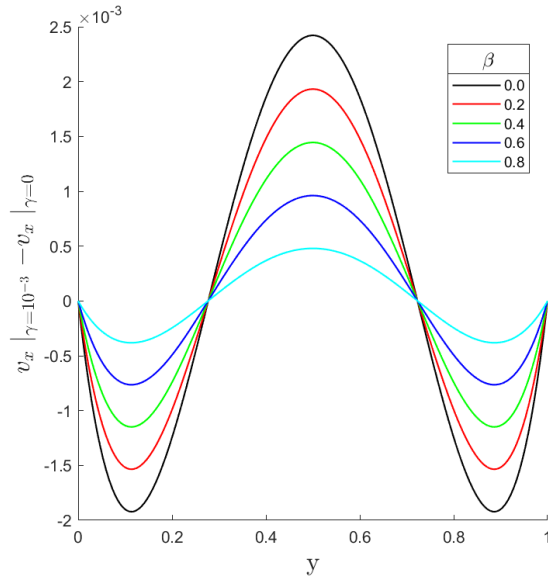


Figura 6.20: Variação da velocidade ($v_x |_{\gamma=10^{-3}} - v_x |_{\gamma=0}$), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de De .

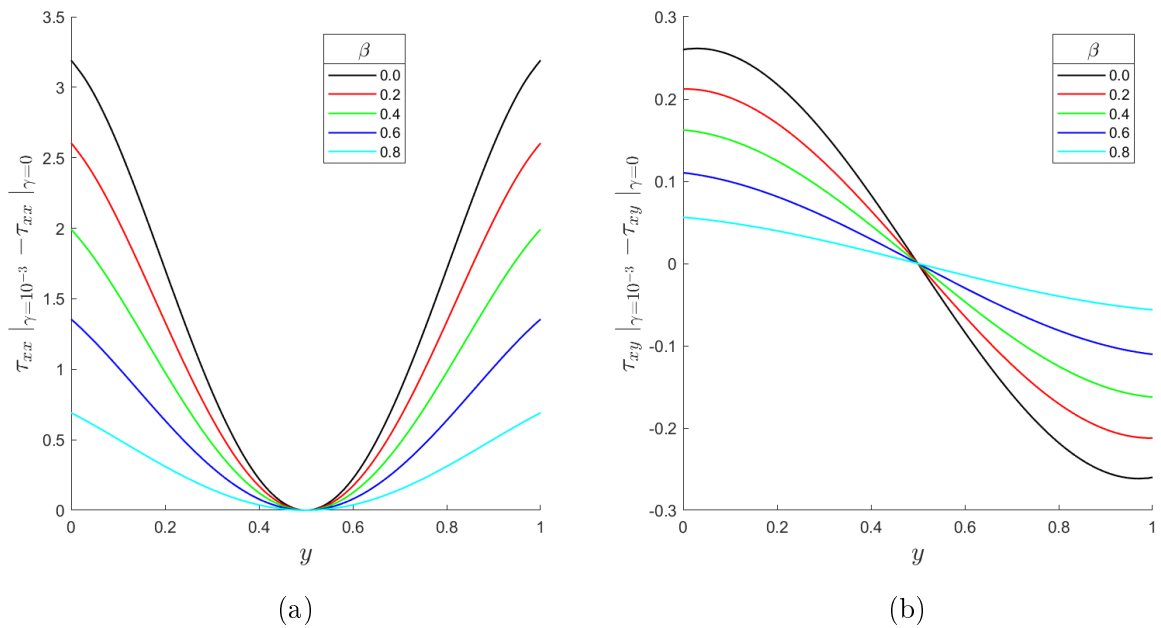


Figura 6.21: Variação do tensor τ_{xx} ($\tau_{xx} |_{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xx} |_{\gamma=0}$) (a) e Variação do tensor τ_{xy} ($\tau_{xy} |_{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xy} |_{\gamma=0}$) (b), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de De .

mento do valor de β , ou seja, com a maior influência da contribuição newtoniana, há uma redução no valor da pressão, e deixa de ter comportamento exponencial e aproximando-se de um comportamento linear.

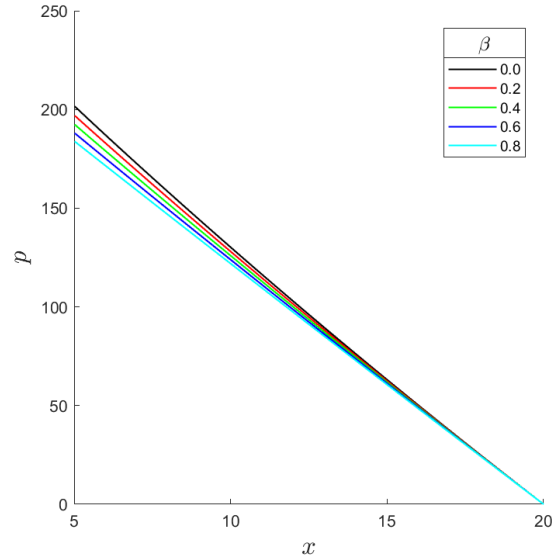


Figura 6.22: Valores da pressão retirados do centro do canal a partir de $x = 5$, para diferentes valores de β .

6.1.4 Estudos Paramétricos do Modelo Viscoelástico com a Viscosidade e o Tempo de Relaxação Variando com a Pressão Utilizando Log-Conformation

Nesta seção são exibidos os resultados a fim de observarmos a influência da modelagem da viscosidade e do tempo de relaxação dependendo da pressão, para a solução numérica de escoamentos viscoelásticos utilizando o modelo Oldroyd-B. Foi utilizada geometria, malhas, normalizações e condições de contorno iguais as apresentadas na seção anterior.

A viscosidade polimérica, η_P , e o tempo de relaxação, λ , presentes no modelo Oldroyd-B serão expressos, respectivamente, pelas equações (2.22) e (2.23), com $f_{\eta_P}(p)$ e $f_\lambda(p)$ modelados igualmente pela equação (2.24), ou seja, variando linearmente com a pressão. Lembramos que, pelas limitações da implementação das equações constitutivas utilizando a metodologia Log-Conformation no *rheoTool*, devemos, obrigatoriamente, utilizar $f_{\eta_P}(p) = f_\lambda(p)$.

Para efeito de comparação com a seção anterior, são comparados resultados obtidos entre os modelos UCM (Oldroyd-B com $\beta = 0$) padrão e o mesmo modelo utilizando a metodologia Log-Conformation, com $Re = 0.01$ e $De = 0.5$ para $\gamma = 10^{-3}$ e $2 \cdot 10^{-4}$. Estão dispostos nas Figuras 6.23a, 6.23b e 6.23c a diferença das velocidades, a diferença das tensões τ_{xx} e a diferença das tensões τ_{xy} , avaliadas em um corte transversal em $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$. E na Figura 6.23d é apresentada a pressão p , avaliada no eixo de simetria do canal, $y = 0.5$ e $5 \leq x \leq 20$. Assim podemos observar em todos os quatro gráficos que, como esperado, há equivalência entre os resultados obtidos com as abordagens 3 (Oldroyd-B) e 4 (Oldroyd-B com Log-Conformation).

A partir deste ponto, as seções seguintes farão uso da metodologia Log-Conformation para obtenção de maior estabilidade e possibilitar a execução de simulações com valores de Deborah (De) mais elevados.

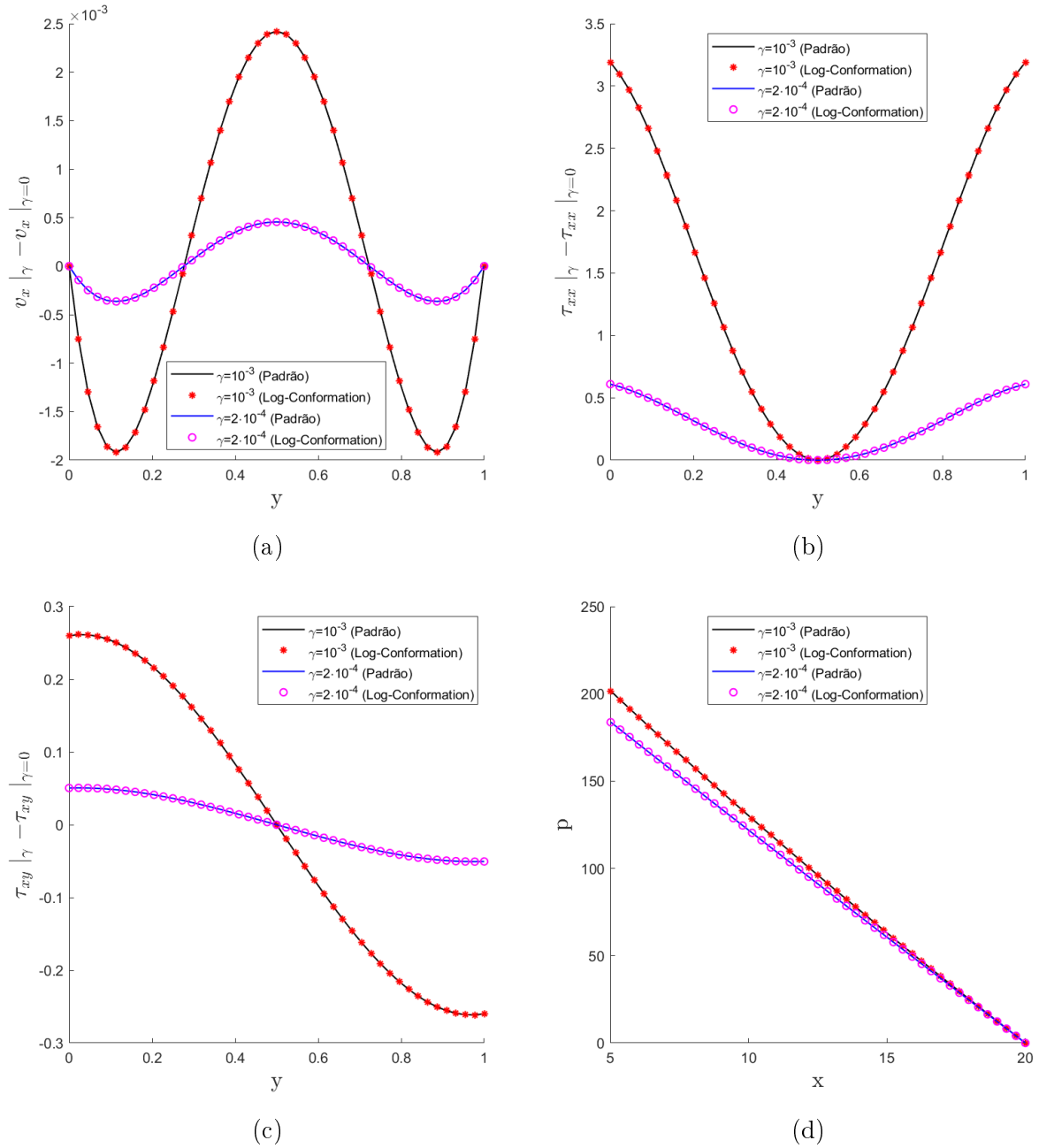


Figura 6.23: Comparação dos resultados obtidos entre as abordagens 3 e 4 (sem e com utilização da metodologia Log-Conformation), com $Re = 0.01$ e $De = 0.5$ para $\gamma = 10^{-3}$ e $2 \cdot 10^{-4}$. São apresentadas a diferença das velocidades (a), a diferença das tensões τ_{xx} (b), a diferença das tensões τ_{xy} (c) e a pressão p (d)

6.1.4.1 A Influência do Parâmetro γ

Foram realizadas simulações para o modelo UCM ($\beta = 0$) com os parâmetros $Re = 0.01$, $De = 1.0$ e $\gamma = 0, 2 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}, 6 \cdot 10^{-3}, 8 \cdot 10^{-3}$ e $1 \cdot 10^{-2}$. No qual o caso $\gamma = 0$ equivale ao modelo viscoelástico padrão.

Os gráficos com o perfil das componentes de velocidade v_x e do tensor polimérico τ_{xx} e τ_{xy} , ao longo de um corte transversal em $x = 16$, para os diferentes valores de γ são dispostos nas Figuras 6.24a, 6.25 e 6.26, respectivamente.

Na Figura 6.24a não é possível observar a diferença de comportamento da componente de velocidade v_x para os diferentes valores de γ , devido a pequena magnitude das diferen-

ças. Para detalhar o comportamento distinto, a Figura 6.24b apresenta a diferença entre os perfis da velocidade v_x do modelo com a viscosidade e o tempo de relaxação variando linearmente com a pressão e do modelo viscoelástico padrão, com $\gamma = 0$, $v_x|_{\gamma} - v_x|_{\gamma=0}$, sendo $v_x|_{\gamma}$ o perfil da velocidade para um valor de γ ($\gamma = 2 \cdot 10^{-4}$, $4 \cdot 10^{-4}$, $6 \cdot 10^{-4}$, $8 \cdot 10^{-4}$ ou $1 \cdot 10^{-3}$).

O resultado da comparação, apresentado na Figura 6.24b, exibe um aumento da velocidade na área central do canal, em torno do eixo de simetria, para a nova modelagem, quando comparado ao modelo padrão ($\gamma = 0$). Além disso, podemos observar que quanto maior for o parâmetro γ , maior é o valor de v_x , com o pico sendo atingido no eixo de simetria do canal. Em contrapartida, nas proximidades da parede do canal, os valores da componente de velocidade v_x da nova modelagem são inferiores aos obtidos na modelagem padrão, destacando-se que, quanto maior o valor de γ , menor é o valor de v_x .

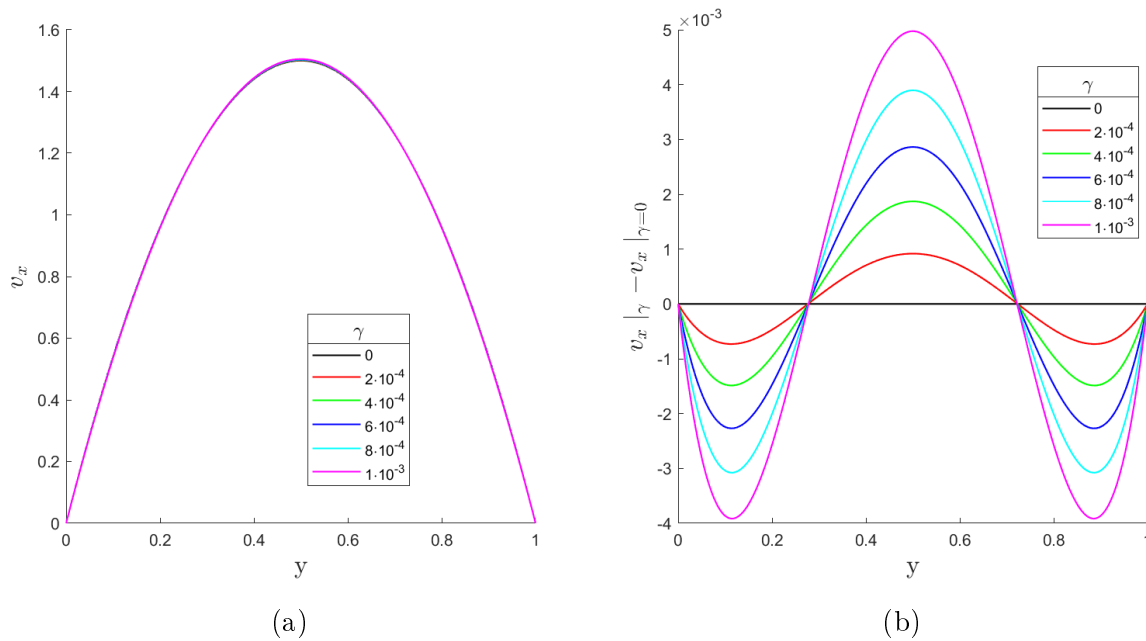


Figura 6.24: Velocidade v_x (a) e variação da velocidade ($v_x|_{\gamma} - v_x|_{\gamma=0}$) (b), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de γ .

Agora no caso das componentes τ_{xx} e τ_{xy} do tensor polimérico, analisado em um corte transversal, em $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$, as componentes coincidem apenas no eixo de simetria do canal ($y = 0.5$), onde todas as componentes do tensor apresentam valor nulo (ver Figuras 6.25 e 6.26). A Figura 6.25a mostra que quanto maior o valor de γ , maior é o valor da componente τ_{xx} . O detalhamento da diferença entre as tensões τ_{xx} no modelo padrão e no novo modelo é exibido na Figura 6.25b, na qual podemos observar a formação de dois pontos de máxima diferença entre as tensões, indicados com *.

A Figura 6.26a representa a tensão τ_{xy} , mostrando que o aumento no valor de γ leva a um aumento do valor absoluto da componente τ_{xy} do tensor polimérico. Este aumento é detalhado na Figura 6.26b (exibindo a diferença entre as tensões do modelo padrão ($\gamma = 0$) e da nova modelagem ($\gamma = 10^{-3}$)), onde, de forma semelhante a tensão τ_{xx} , há a formação de dois pontos de máximo no valor absoluto da diferença das tensões, indicados com *.

Na Figura 6.27 é apresentada a queda da pressão, para $\gamma = 0, 2 \cdot 10^{-4}, 4 \cdot 10^{-4}, 6 \cdot 10^{-4}, 8 \cdot 10^{-4}$ e $1 \cdot 10^{-3}$, ao longo do eixo central de simetria do canal $y = 0.5$ e $5 \leq x \leq 20$. Um comportamento que pode ser observado é que a queda pressão ao longo do canal deixa de ser linear, passando a decair exponencialmente, ou seja, $\partial p / \partial x$ deixa de ser constante.

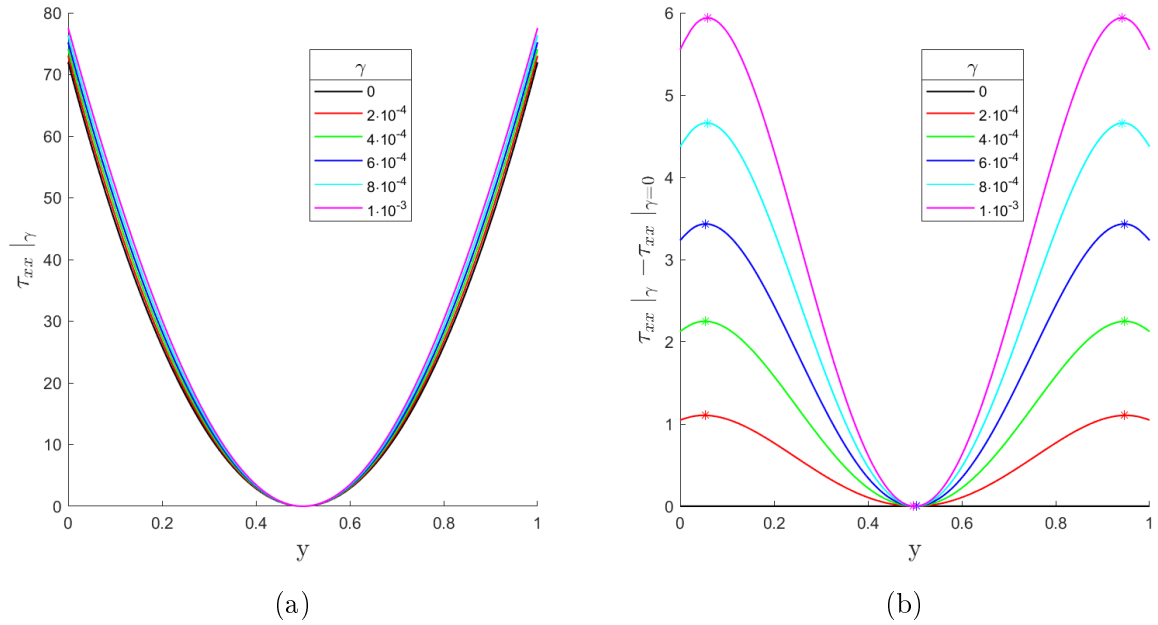


Figura 6.25: Variação do tensor τ_{xx} (a) e Variação do tensor τ_{xx} ($\tau_{xx} | \gamma - \tau_{xx} | \gamma=0$) (b), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de γ .

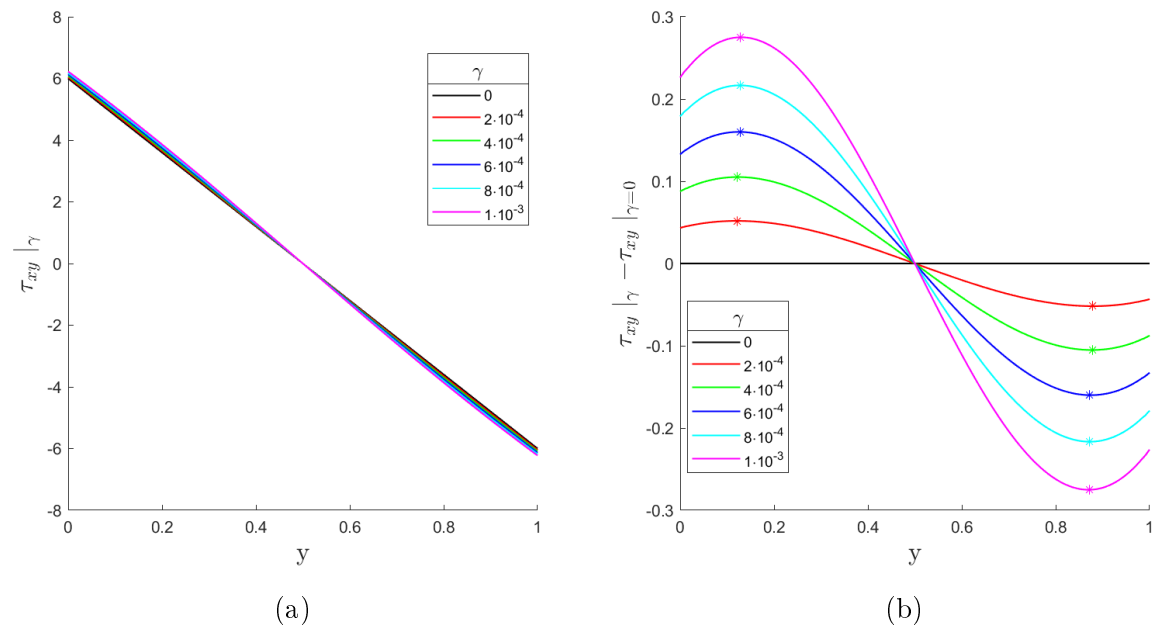


Figura 6.26: Valores do tensor τ_{xy} (a) e Variação do tensor τ_{xy} ($\tau_{xy} | \gamma - \tau_{xy} | \gamma=0$) (b), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de γ .

Além disso, o valor da pressão aumenta a medida que o parâmetro de dependência da pressão γ é elevado.

6.1.4.2 A Influência do Número de Deborah (De)

Para analisar a influência do número de Deborah (De) na nova modelagem, foram realizadas simulações para De iguais a 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 e 1.0, com $Re = 0.01$ e $\gamma = 10^{-3}$ fixos. Além disso, foi considerado $\beta = 0$, ou seja, a modelagem da viscosidade e

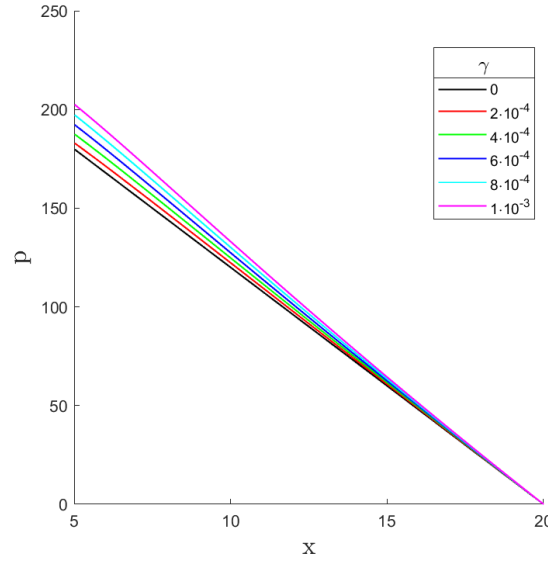


Figura 6.27: Valores da pressão retirados do centro do canal a partir de $x = 5$, para diferentes valores de γ .

o tempo de relaxação variando com a pressão (equações (2.22), (2.23) e (2.24)) no modelo UCM.

As comparações entre os valores da componente da velocidade v_x , tensor polimérico τ_{xx} e τ_{xy} são apresentadas, respectivamente nas Figuras 6.28a, 6.29a e 6.29b. Os resultados foram retirados de um corte transversal em $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$, e os valores da pressão do centro do canal, ou seja, no eixo de simetria, em $y = 0.5$ e $5 \leq x \leq 20$.

Na Figura 6.28a podemos observar a diferença $v_x|_{\gamma=10^{-3}} - v_x|_{\gamma=0}$ do perfil de velocidade entre a nova modelagem e a modelagem padrão, para $De = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ e 1.0 . Podemos notar que, para $Re = 0.01$, $\gamma = 10^{-3}$ e $\beta = 0$, o aumento do número de Deborah induz a uma maior diferença entre o perfil v_x da nova modelagem e o perfil da modelagem padrão. Este comportamento também é observado para outros valores de γ , como pode ser visto na Figura 6.28b, onde são apresentados os valores máximos da velocidade v_x para $De = 0.6, 0.8$ e 1.0 , e $\gamma = 0, 2 \cdot 10^{-4}, 4 \cdot 10^{-4}, 6 \cdot 10^{-4}, 8 \cdot 10^{-4}$ e $1 \cdot 10^{-3}$. Deste modo, os perfis da velocidade v_x nas duas modelagens (nova e padrão) se diferenciam mais não apenas com o aumento de γ , mas também com o aumento de De .

Na Figura 6.29a, onde é exibida a diferença entre as tensões τ_{xx} , podemos observar que com o aumento do número de Deborah (De), há a formação de dois pontos de máximo, nas proximidades das paredes. Pontos destacados com *. Este comportamento não é observado para valores baixos de De (ver Figura 6.18a), aparecendo apenas a partir de $De = 0.8$. Outro comportamento observado é que, ao aumentar o número de Deborah, estes pontos de máximos distanciam-se das paredes do canal, deslocando-se em direção ao eixo de simetria, onde a variação da tensão é nula.

A Figura 6.29b apresenta o gráfico da diferença entre as tensões τ_{xy} no novo modelo e no modelo padrão. Neste gráfico podemos observar que as linhas indicadas as diferenças entre as tensões cruzam-se em três pontos, sendo um no eixo de simetria, onde a componente τ_{xy} é nula para todos os valores de De , e em mais dois pontos y_1 ($0.055 \leq y_1 \leq 0.06$) e y_2 ($0.94 \leq y_2 \leq 0.945$), próximos as paredes do canal. Além dos pontos onde as linhas do gráfico cruzam-se, podemos também notar a formação de dois pontos de máximo absolutos próximos as paredes do canal e que, com o aumento do número de De , distanciam-se da parede, em direção ao eixo de simetria do canal.

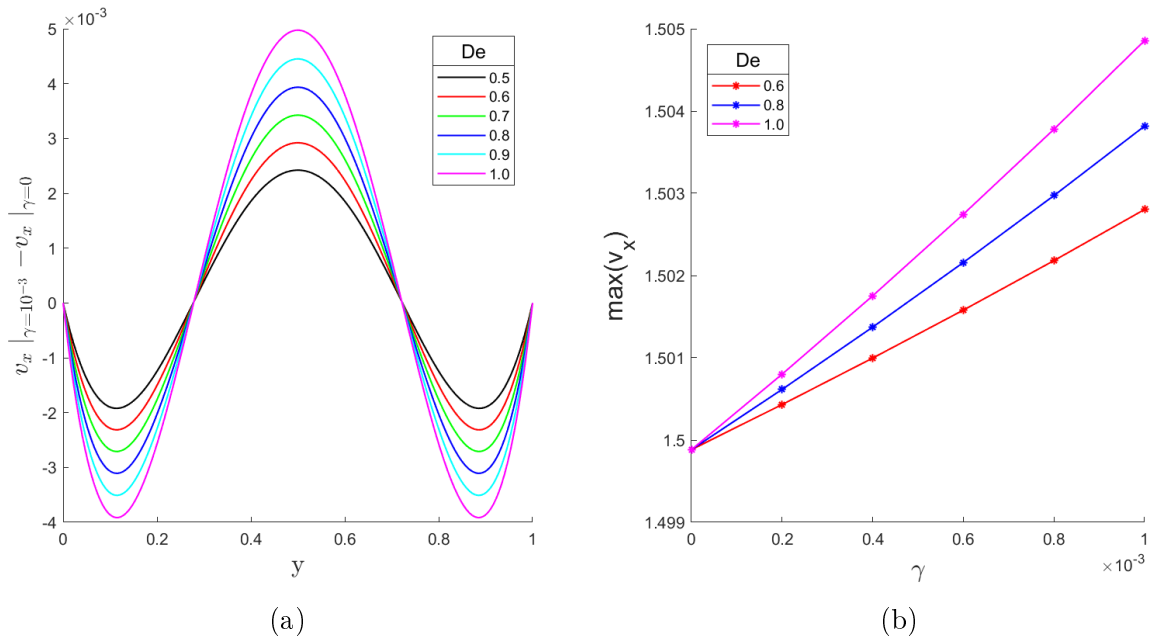


Figura 6.28: Variação da velocidade ($v_x|_{\gamma=10^{-3}} - v_x|_{\gamma=0}$) (a) e valores máximos da velocidade (obtidos no centro do canal) para $\gamma = 0, 2 \cdot 10^{-4}, 4 \cdot 10^{-4}, 6 \cdot 10^{-4}, 8 \cdot 10^{-4}$ e $1 \cdot 10^{-3}$, retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de De .

Semelhante ao observado na seção anterior para o comportamento da tensão τ_{xy} , ocorre a formação de dois pontos máximos da diferença absoluta entre as tensões do novo modelo ($\gamma = 10^{-3}$) e do modelo padrão ($\gamma = 0$), próximos as paredes do canal. Tais pontos são destacados no gráfico com *. E, como observado anteriormente, não há diferença entre as tensões no eixo de simetria do canal.

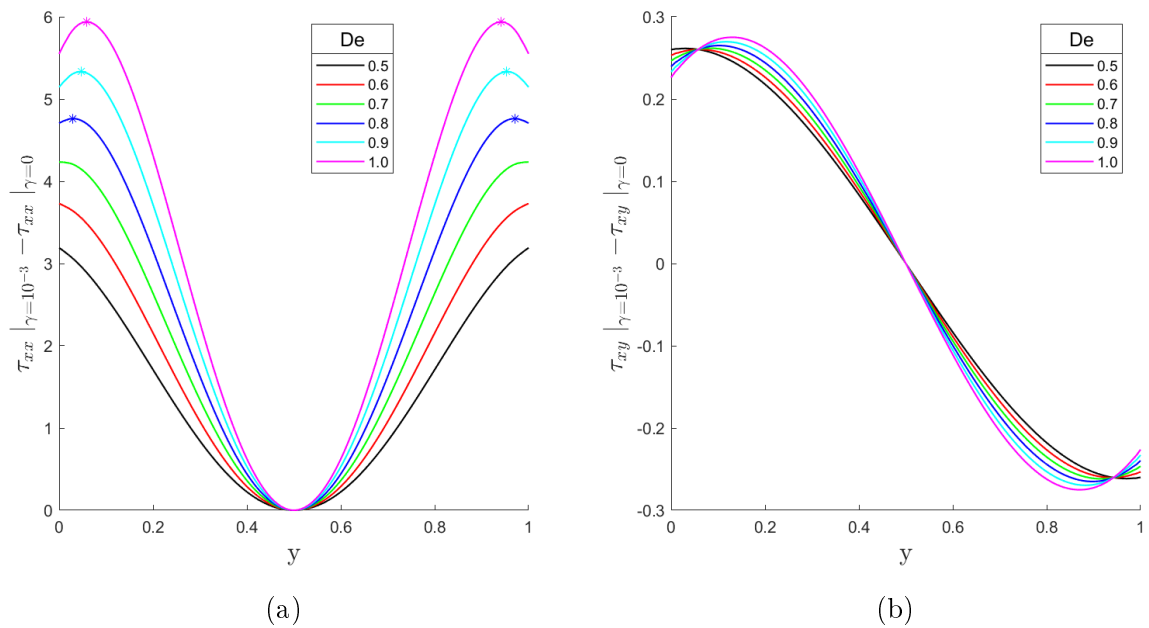


Figura 6.29: Variação do tensor τ_{xx} ($\tau_{xx}|_{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xx}|_{\gamma=0}$) (a) e Variação do tensor τ_{xy} ($\tau_{xy}|_{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xy}|_{\gamma=0}$) (b), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de De .

A Figura 6.30 exibe a queda de pressão ao longo do eixo central de simetria do canal, das proximidades do contorno de entrada ($x = 5$) até o de saída ($x = 20$). Observando a figura podemos notar que, para os parâmetros utilizados ($Re = 0.01$, $\beta = 0$ e $\gamma = 10^{-3}$), o número de Deborah (De) não exerce grande influência sobre a pressão, ou seja, todas as linhas do gráfico estão praticamente sobrepostas. Entretanto, destaca-se que ao aumentar o número de Deborah, há um pequeno aumento nos valores da pressão ao longo do canal.

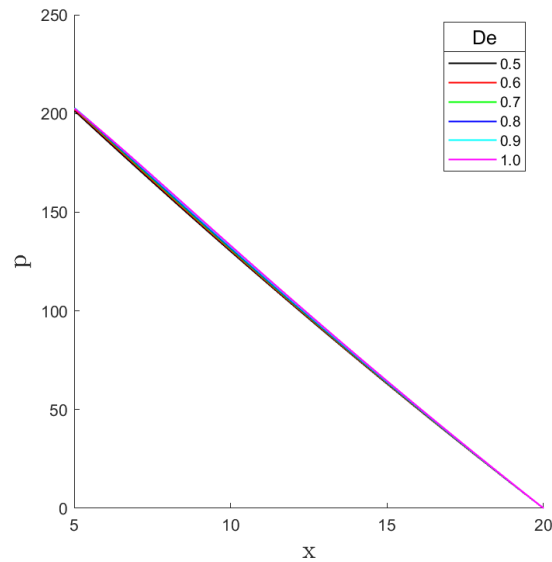


Figura 6.30: Valores da pressão retirados do centro do canal a partir de $x = 5$, para diferentes valores de De .

6.1.4.3 A Influência do Parâmetro β

Para observar a influência do parâmetro β , foram realizadas simulações com $Re = 0.01$, $De = 1.0$, $\gamma = 10^{-3}$ e $\beta = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6$ e 0.8 . A Figura 6.31 mostra a variação do perfil de velocidade, $v_x |_{\gamma=10^{-3}} - v_x |_{\gamma=0}$, entre a nova modelagem ($\gamma = 10^{-3}$) e a modelagem padrão ($\gamma = 0$) para os diversos valores de β , ao longo de um corte transversal ao canal em $x = 16$ e $0 \leq y \leq 1$. Podemos notar que, com o aumento do parâmetro β , o perfil da nova modelagem tende ao perfil mais parabólico, ou de forma equivalente, com a redução no valor do parâmetro β , as diferenças entre os perfis da velocidade v_x da nova modelagem e padrão diminuem.

As Figuras 6.32a e 6.32b apresentam as variações ($\tau_{xx} |_{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xx} |_{\gamma=0}$ e $\tau_{xy} |_{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xy} |_{\gamma=0}$) entre os valores dos tensores τ_{xx} e τ_{xy} , respectivamente. De forma semelhante ao apresentado na seção anterior para altos valores de De , para valores de β inferiores a 0.4 (inclusive), ocorre a formação de dois pontos (y_1 e y_2) de máximo no perfil da diferença da tensão τ_{xx} , próximo a parede do canal. Tais pontos são destacados no gráfico com *. Além disto, as tensões coincidem no eixo de simetria do canal, onde são identicamente nulas. Semelhante ao observado na seção anterior para o comportamento da tensão τ_{xy} , ocorre a formação de dois pontos máximos da diferença absoluta entre as tensões do novo modelo ($\gamma = 10^{-3}$) e do modelo padrão ($\gamma = 0$), próximos as paredes do canal. Tais pontos são destacados no gráfico com *. E, como observado anteriormente, não há diferença entre as tensões no eixo de simetria do canal.

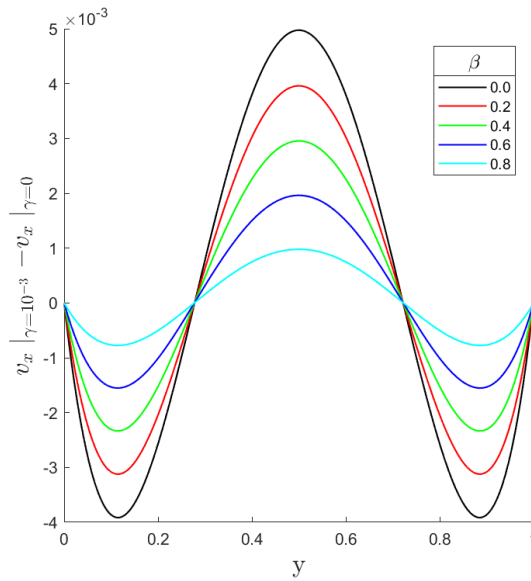


Figura 6.31: Variação da velocidade ($v_x |_{\gamma=10^{-3}} - v_x |_{\gamma=0}$), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de β .

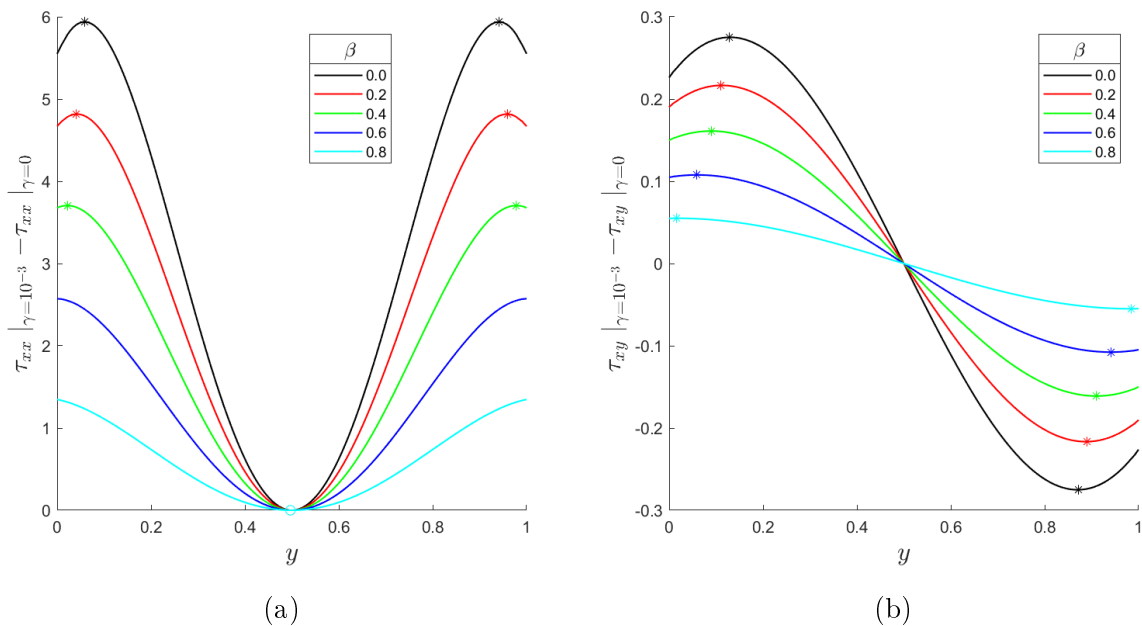


Figura 6.32: Variação dos tensores τ_{xx} ($\tau_{xx} |_{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xx} |_{\gamma=0}$) (a) e τ_{xy} ($\tau_{xy} |_{\gamma=10^{-3}} - \tau_{xy} |_{\gamma=0}$) (b), retirados de um corte em $x = 16$ para diferentes valores de β .

No estudo da pressão, com respeito a variação do parâmetro β , observamos na Figura 6.33 que com a redução de β , ou seja, maior influência da viscosidade polimérica, há um aumento da pressão ao longo do eixo central de simetria do canal.

6.2 O Escoamento em uma Contração 4:1

Um problema bastante explorado na literatura, tanto numericamente quanto experimentalmente, é o escoamento em uma contração abrupta (Figura 6.34). Vários autores, de diferentes grupos de pesquisa, vêm trabalhando com soluções de problemas nesta geome-

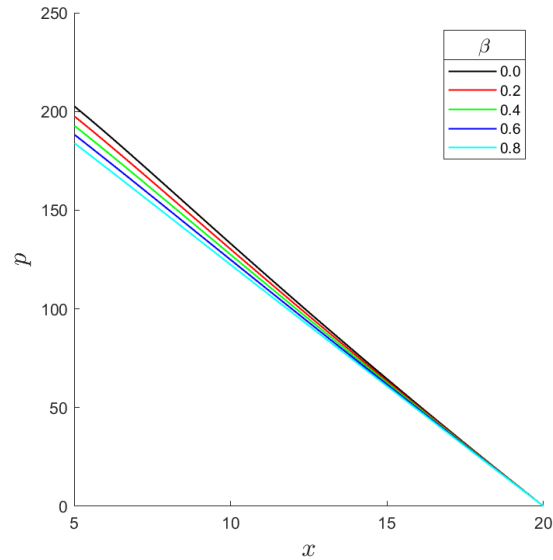


Figura 6.33: Valores da pressão retirados do centro do canal a partir de $x = 5$, para diferentes valores de β .

tria ([3], [48], [54], [57], [62], [64], [65], [66], [85]). A motivação para estudar escoamentos viscoelásticos neste tipo de geometria é que muitos problemas industriais que envolvem o processo de extrusão apresentam um aparato com esse tipo de formato.

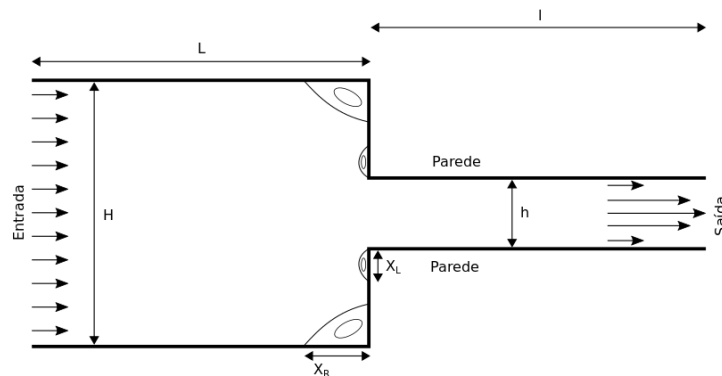


Figura 6.34: Domínio do escoamento em uma contração abrupta.

6.2.1 Verificação das Simulações na Contração 4:1 com a Literatura

Nesta seção, apresentaremos alguns ensaios numéricos seguindo como referência o trabalho de Pimenta e Alves [64]. As malhas escolhidas foram mais refinadas locais em locais próximos onde há a formação de vórtices, e as menores dimensões das células, utilizadas em cada malha, estão dispostas na Tabela 6.9.

Foi utilizada uma geometria com $h = 1\text{m}$, $H = 4h$, $L = l = 100h$ e uma velocidade média na saída do fluido de $U_{out} = 1\text{m/s}$. A velocidade de entrada do fluido é dada em

Tabela 6.9: Malhas computacionais para o escoamento na contração 4:1

Malha	$\Delta x_{min}/(h/2) = \Delta y_{min}/(h/2)$
M_1	0.0036
M_2	0.0027
M_3	0.0018
M_4	0.0014

função da velocidade U_{out} e do tempo t , expressa na equação (6.9)

$$U_{in}(t) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(\pi t)}{8} U_{out} & 0 \leq t \leq 1 \\ 0.25 U_{out} & t > 1 \end{cases} \quad (6.9)$$

Além deste perfil de velocidade aplicado na entrada, as demais condições de contorno são: $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\tau}_P$ calculado por extrapolação linear e condições de Neumann homogêneas na direção normal ao contorno para p e Θ nas paredes; $v_y = 0$, $\boldsymbol{\tau}_P = \mathbf{0}$, $\Theta = \mathbf{0}$ e $\partial p / \partial x = 0$ (Neumann homogênea) na entrada; e condições de Neumann homogêneas na direção normal ao contorno para todas as variáveis \mathbf{v} , p , $\boldsymbol{\tau}_P$ e Θ na saída.

Para a realização da simulação numérica, são considerados os seguintes valores para os parâmetros: $\eta_p = 0.88889 m^2 s^{-1}$, $\eta_s = 0.11111 m^2 s^{-1}$, $\rho = 0.01 kg m^{-3}$, $U = v_{xmax} = 1 m s^{-1}$, $\lambda = [1 - 5] s$, levando a $\beta = \frac{1}{9}$, $Re = 0.01$ e $De = [1 - 5]$.

Nas Tabelas 6.10 e 6.11 são apresentadas, respectivamente, as medidas, adimensionais, dos vórtices X_R e X_L ($\tilde{X}_R = \frac{X_R}{h}$ e $\tilde{X}_L = \frac{X_L}{h}$).

Tabela 6.10: Evolução do comprimento do vórtice \tilde{X}_R em função de De . De variando de 0 a 5.

De	M_1	M_2	M_3	M_4
0	1.4851	1.4912	1.4939	1.4954
1	1.3594	1.3622	1.3635	1.3643
2	1.1725	1.1709	1.1706	1.1709
3	0.9774	0.9690	0.9684	0.9693
4	0.8072	0.7876	0.7854	0.7866
5	0.6747	0.6411	0.6364	0.6385

Tabela 6.11: Evolução do comprimento do *lip*-vórtice \tilde{X}_L em função de De . De variando de 0 a 5.

De	M_1	M_2	M_3	M_4
0	0	0	0	0
1	0.0556	0.0440	0.0382	0.0338
2	0.1309	0.1119	0.0985	0.0854
3	0.2399	0.1893	0.1612	0.1429
4	0.3837	0.2850	0.2453	0.2142
5	0.5932	0.4356	0.3705	0.3131

A Figura 6.35 apresenta uma comparação entre os resultados do presente trabalho, considerando a malha M_3 , e os resultados apresentados por Pimenta e Alves [64], em que as Figuras 6.35 (a) e (b) apresentam as evoluções dos comprimentos dos vórtices \tilde{X}_R e \tilde{X}_L , respectivamente, com o aumento do número de Deborah De .

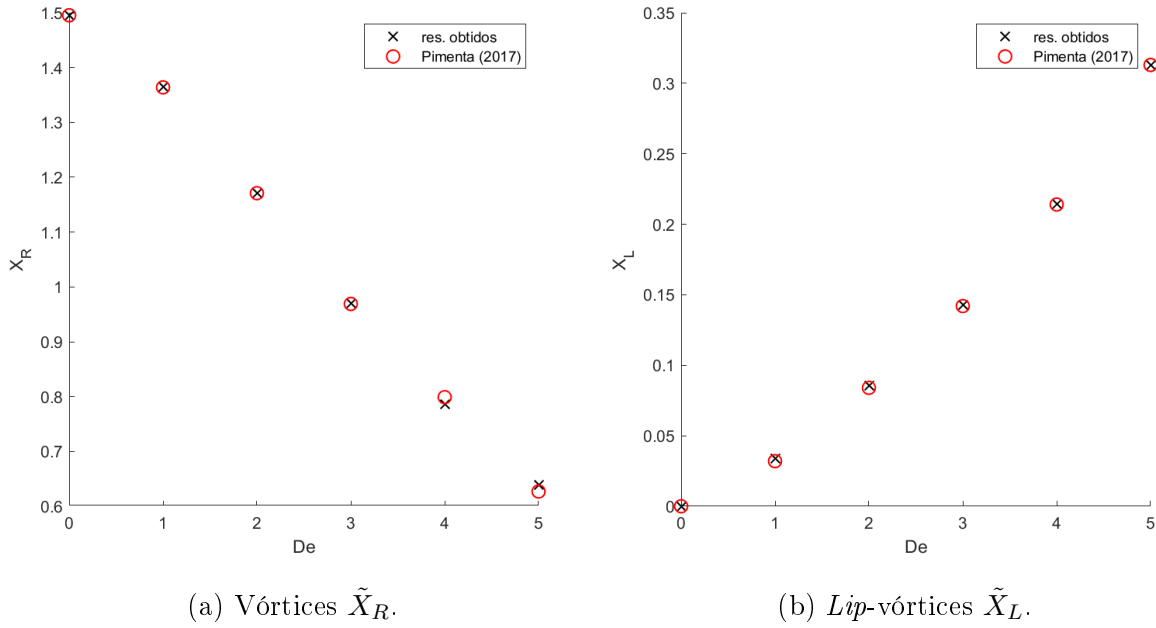


Figura 6.35: Comprimentos dos vórtices \tilde{X}_R e \tilde{X}_L em função de De : comparações dos resultados numéricos obtidos no presente trabalho pela M_4 com os resultados apresentados por [64].

6.2.2 Estudos Paramétricos do Modelo Oldroyd-B com a Viscosidade e o Tempo de Relaxação Variando com a Pressão

Nesta seção são apresentados resultados a fim de observar a influência da modelagem da viscosidade e do tempo de relaxação dependendo da pressão na formação dos vórtices, em uma contração 4:1.

Os parâmetros viscosidade polimérica (η_P) e tempo de relaxação (λ) são expressos pelas equações (2.22) e (2.23), respectivamente, com $f_{\eta_P}(p)$ e $f_\lambda(p)$ modelados igualmente pela equação (2.24), variando linearmente com a pressão. Para as simulações desta seção foi utilizada a metodologia Log-Conformation, portanto, por restrições das equações implementadas no *rheoTool*, devemos, obrigatoriamente, utilizar $f_{\eta_P}(p) = f_\lambda(p)$.

A Tabela 6.12 apresenta as dimensões dos vórtices \tilde{X}_R e \tilde{X}_L , para os coeficientes de dependência da pressão $\gamma = 10^{-4}$ e $\gamma = 10^{-3}$. A comparação entre os valores do

Tabela 6.12: Evolução do comprimento dos vórtices \tilde{X}_R e \tilde{X}_L na malha M_4 , em função de De . De variando de 1 a 5, para $\gamma = 10^{-4}$.

De	\tilde{X}_R		\tilde{X}_L	
	$\gamma = 10^{-4}$	$\gamma = 10^{-3}$	$\gamma = 10^{-4}$	$\gamma = 10^{-3}$
1	1.3581	1.2885	0.0358	0.0549
2	1.1565	1.0072	0.0878	0.1306
3	0.9488	0.7592	0.1489	0.2305
4	0.7646	0.5767	0.2243	0.3824
5	0.6176	0.4624	0.3305	0.5965

comprimento dos vórtices apresentados na Tabela 6.12 são ilustrados nas Figuras 6.36a e 6.36b para os vórtices \tilde{X}_R e \tilde{X}_L , respectivamente, com $\gamma = 0, 10^{-4}$ e 10^{-3} , e $De = 1, 2, 3, 4$ e 5. Nota-se na Figura 6.36a que com o aumento do número de Deborah (De) há uma redução no tamanho do vórtice \tilde{X}_R , assim como ocorre com o modelo padrão ($\gamma = 0$).

Além disso, o aumento do parâmetro γ faz com que haja uma maior redução no tamanho do vórtice \tilde{X}_R . Agora, observando a Figura 6.36b, podemos notar que com o aumento de De há um aumento do tamanho do vórtice \tilde{X}_L na nova modelagem, assim como também ocorre na modelagem padrão ($\gamma = 0$), e para valores de γ mais elevados o aumento no tamanho do vórtice \tilde{X}_L é maior.

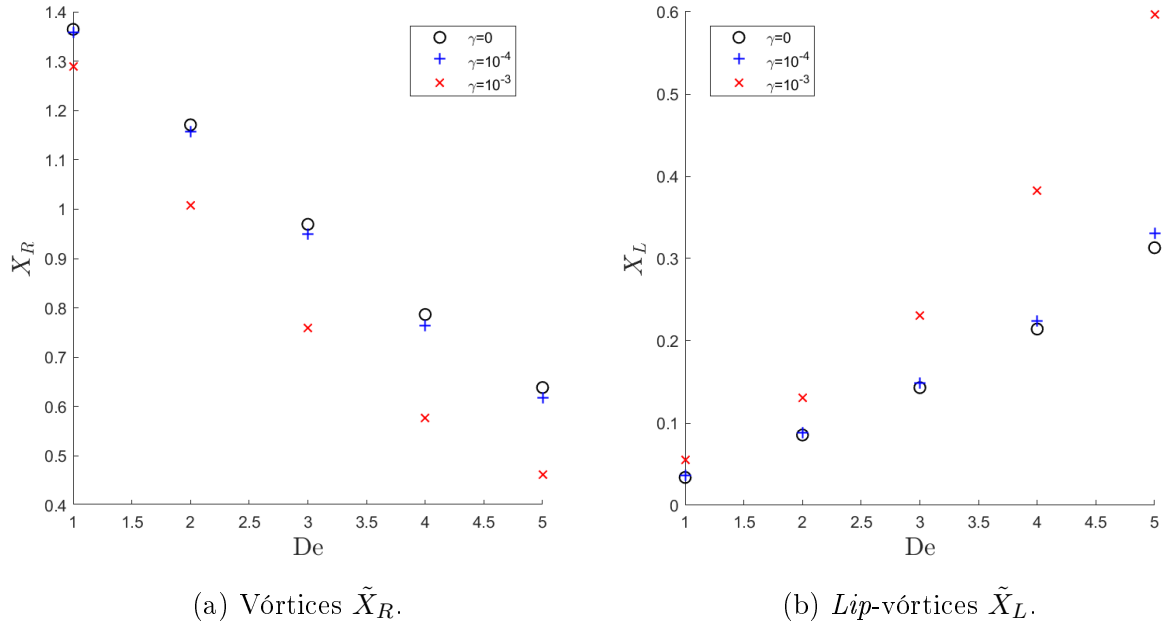


Figura 6.36: Comprimentos dos vórtices \tilde{X}_R e \tilde{X}_L em função de De , para diferentes valores de γ .

Nas Figuras 6.37a e 6.37b são apresentados os tamanhos dos vórtices \tilde{X}_R e \tilde{X}_L , respectivamente, para $De = 2$, $\beta = 1/9$ e $Re = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04$ e 0.05 , para $\gamma = 0$ e $\gamma = 10^{-3}$. Podemos observar que para $\gamma = 10^{-3}$ há a formação de um vórtice menor do que o obtido pelo modelo padrão, e, além disso, o aumento do número de Reynolds (Re) leva a uma redução no tamanho do vórtice em ambas as abordagens. Agora para o vórtice \tilde{X}_L , exposto na Figura 6.37b, o vórtice formado na nova modelagem é maior do que o obtido por meio da abordagem padrão. porém, diferentemente do vórtice \tilde{X}_R , não há mudança significativa no tamanho do vórtice ao aumentar o número de Reynolds.

As Figuras 6.38a e 6.38b ilustram o tamanho dos vórtices \tilde{X}_R e \tilde{X}_L , respectivamente, para $De = 2$, $Re = 0.01$ e $\beta = 0, 1/9, 2/9, 3/9, 4/9$ e $5/9$, para $\gamma = 0$ e $\gamma = 10^{-3}$. Considerando a Figura 6.38a, o aumento do parâmetro β , ou seja, a medida que a contribuição newtoniana da viscosidade do fluido aumenta, o tamanho do vórtice \tilde{X}_R também aumenta. Podemos destacar que, a medida que valores de β aumentam, a diferença do tamanho dos vórtices \tilde{X}_R entre o novo modelo e o modelo padrão diminuem. No caso do vórtice \tilde{X}_L (Figura 6.38b), o aumento do parâmetro β leva a uma redução no tamanho dos vórtices em ambas as modelagens. E, de forma semelhante para o vórtice \tilde{X}_R , a diferença de tamanho entre os vórtices \tilde{X}_L da nova modelagem e da modelagem padrão diminuem ao incrementar o parâmetro β .

Na Figura 6.39 são apresentas as linhas de corrente, próximo a contração, para $De = 2$ e 5 , com $\gamma = 10^{-3}$, $\beta = 1/9$ e $Re = 0.01$. Podemos observar que, com o aumento do número de Deborah (De), há um aumento no tamanho dos vórtices que se formam na entrada da contração, e, em contrapartida, os demais vórtices formados tem seus tamanhos reduzidos.

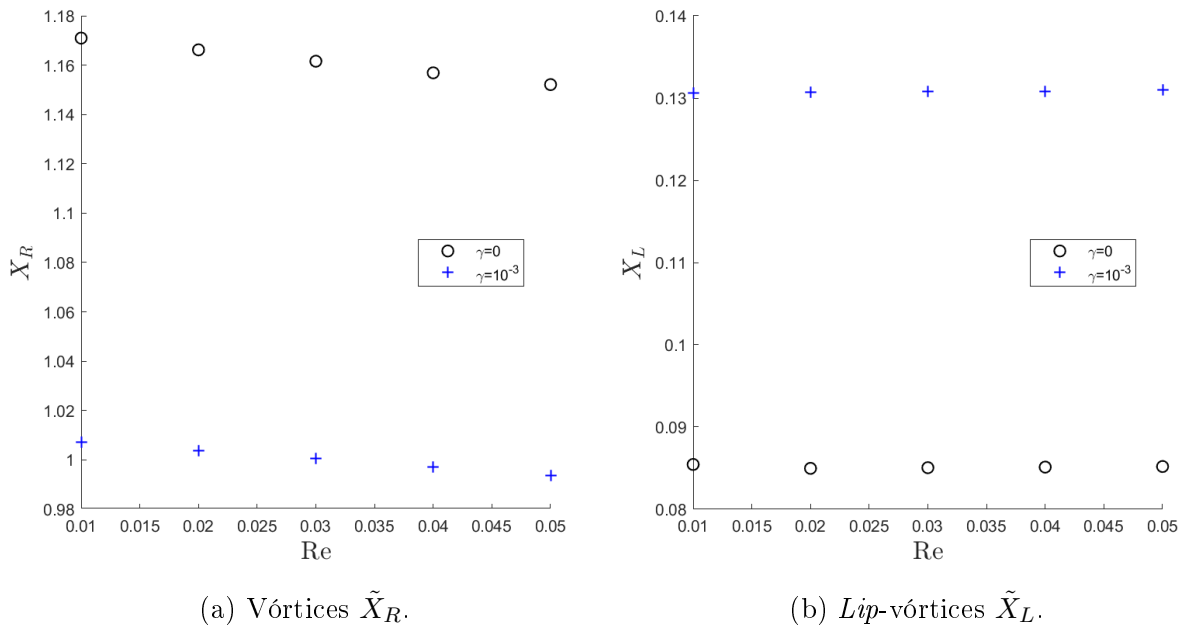


Figura 6.37: Comprimentos dos vórtices \tilde{X}_R e \tilde{X}_L em função de Re , para diferentes valores de γ .

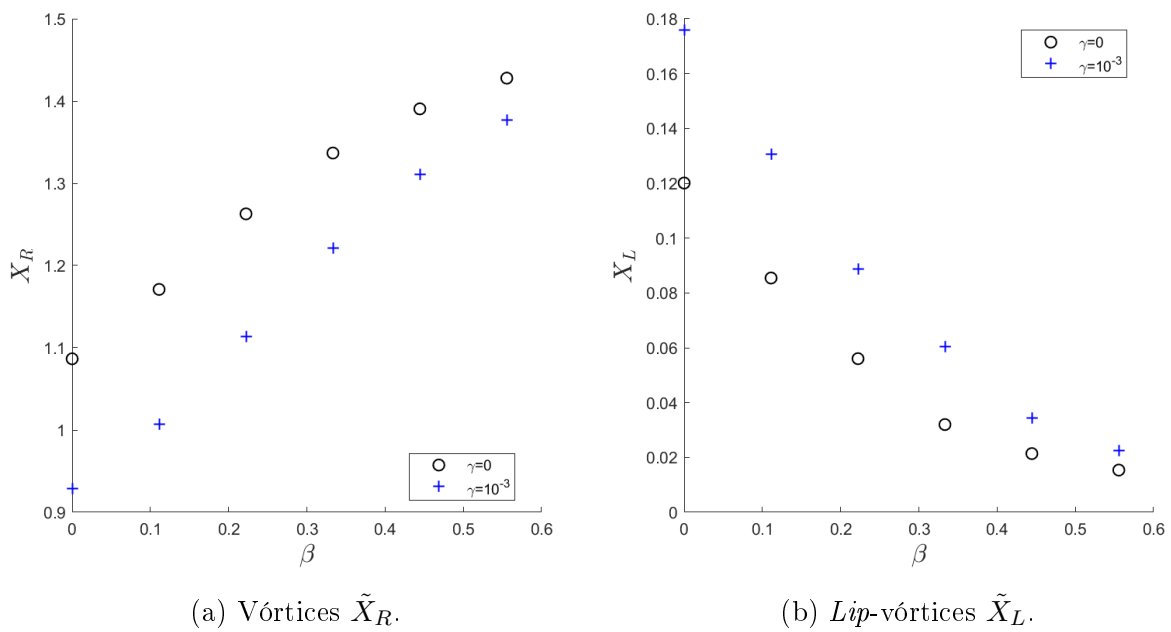
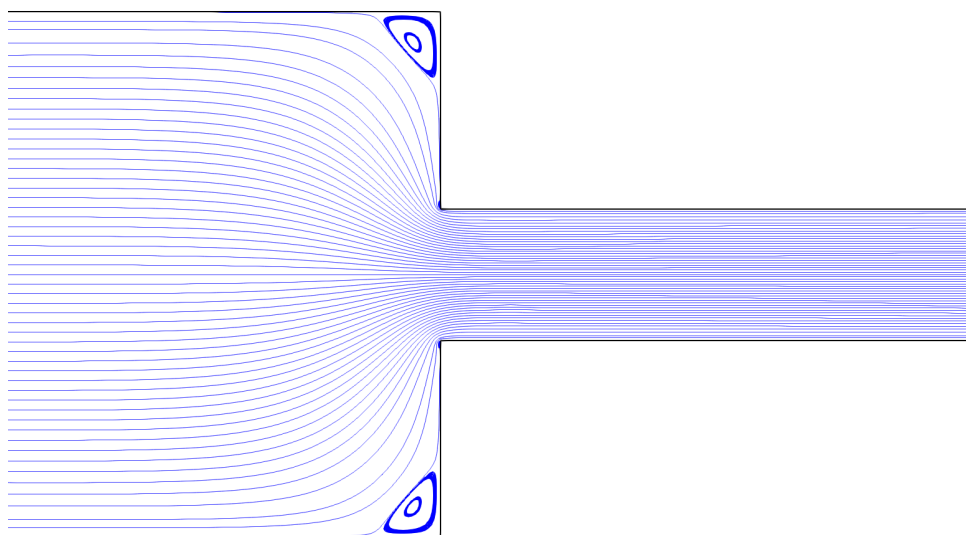
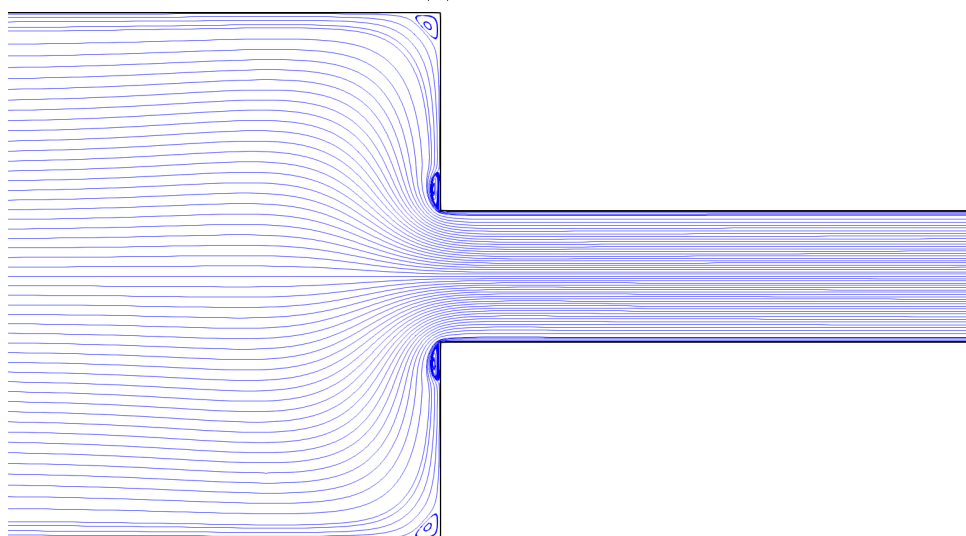


Figura 6.38: Comprimentos dos vórtices \tilde{X}_R e \tilde{X}_L em função de β , para diferentes valores de γ .

(a) $De = 2$.(b) $De = 5$.Figura 6.39: Linhas de corrente para $De = 2$ e 5, na malha M_4 .

Considerações Finais

Neste trabalho foram apresentadas as equações que modelam, matematicamente, os escoamentos incompressíveis, isotérmicos e laminares, de fluidos Newtonianos e viscoelásticos. A nova modelagem que acrescenta a viscosidade polimérica e o tempo de relaxação variando com a pressão nos modelos Oldroyd-B e UCM é o destaque principal deste trabalho.

Uma introdução aos ambientes de simulação de escoamentos OpenFOAM[®] e *rheoTool* foi apresentada, a qual incluiu as referências aos tutoriais detalhados. O método dos volumes finitos foi apresentado na abordagem utilizada pelo OpenFOAM[®], descrevendo-se os passos para a discretização de cada termo das equações envolvidas e sua sintaxe geral no OpenFOAM[®]. Em seguida, o algoritmo SIMPLE e algumas de suas variações utilizadas pelo *rheoTool* e por diversos *solvers* do OpenFOAM[®], para solucionar as equações de velocidade e pressão, foram descritos passo-a-passo.

Foram escolhidos problemas clássicos e com resultados numéricos já consolidados e publicados na literatura para serem utilizados como referência e para verificação dos resultados numéricos. Tais problemas simulados foram o problema de Hagen-Poiseuille (canal) e o problema da contração 4:1, ambos no caso planar.

O maior foco deste trabalho foi realizar um estudo paramétrico para a nova modelagem afim de analisar a influência da pressão na viscosidade e tempo de relaxação e, consequentemente, no comportamento dos escoamentos.

No problema do canal foram executadas simulações com diferentes valores de Re , De , β e γ , para uma abordagem com a viscosidade polimérica (η_P) dependendo da pressão (abordagem 2) e duas abordagens com a viscosidade polimérica (η_P) e o tempo de relaxação (λ) dependendo da pressão (abordagem 3 e 4), sendo uma delas com a utilização da metodologia Log-Conformation para que fosse possível realizar os estudos paramétricos para valores mais altos do número de Deborah. Em todos estes casos, na variação de Re não foram obtidas mudanças nas variáveis de velocidade, tensão e pressão. As mudanças no perfil de velocidade, tensão e pressão são mais significativas com o aumento de De , γ e redução de β . Foi possível observar que o perfil da velocidade deixa de ter comportamento parabólico e passa a ter um comportamento mais triangular, com um aumento da velocidade v_x em torno do eixo de simetria do canal e uma redução da velocidade nas proximidades das paredes. No caso da abordagem 2, esse comportamento também é reportado por Housiadas [36]. Em todos os casos a variação máxima da velocidade entre o modelo padrão ($\gamma = 0$) e as modelagens com dependência da pressão não foram superiores a $6 \cdot 10^{-3}$.

Destaca-se que o perfil da pressão, avaliado no eixo de simetria do canal em $y = 0.5$ e $5 \leq x \leq 20$, deixa de ter uma queda linear, ou seja, $\partial p / \partial x$ deixa de ser uma constante

negativa, e a queda da pressão passa a ter um comportamento exponencial. Os valores das componentes do tensor τ_{xx} e τ_{xy} obtidos nas novas modelagens implementadas foram maiores, em valor absoluto no caso do τ_{xy} , do que os valores obtidos no modelo padrão.

Para valores baixos de γ ($\gamma = 10^{-3}$ e $\gamma = 10^{-4}$) foi observado uma redução na tensão τ_{xy} próximo a parede do canal a medida que o número de Deborah aumenta. Este comportamento não ocorre na abordagem 2 com $\gamma = 10^{-2}$.

É importante observar que para a abordagem 2 foi possível utilizar valores mais altos de γ do que nas abordagens 3 e 4.

Antes de iniciar os estudos paramétricos da nova modelagem em uma contração planar 4:1, foram realizadas inicialmente simulações com a modelagem padrão para verificação dos resultados com os resultados da literatura de Pimenta e Alves [64]. Em seguida, foram realizados os estudos numéricos com a nova modelagem, em que a viscosidade polimérica η_P e o tempo de relaxação λ variam linearmente com a pressão, na contração planar 4:1.

As simulações do problema da contração foram executadas para valores de $\gamma = 0, 10^{-4}$ e 10^{-3} , $De = 1, 2, 3, 4$ e 5 , $Re = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04$ e 0.05 , e $\beta = 0, 1/9, 2/9, 3/9, 4/9$ e $5/9$. Foi observado a redução no tamanho do vórtice X_R com o aumento dos parâmetros γ , De e Re , e redução do parâmetro β . Já para o vórtice X_L , seu tamanho aumenta juntamente com o incremento dos parâmetros γ e De , e decremento do parâmetro β . Entretanto, com a variação do número de Reynolds (Re) não houve alteração em seu tamanho.

Portanto, com base nos resultados obtidos pode-se concluir que este trabalho contribui com a Reologia Computacional pois apresenta estudos numéricos para problemas de escoamentos viscoelásticos importantes em que a viscosidade polimérica e o tempo de relaxação dependem da pressão. Esses estudos mostram uma forte influência dessa variação da viscosidade e tempo de relaxação com a pressão no comportamento dos escoamentos viscoelásticos em canal e contração 4:1.

Referências

- [1] A.M. Afonso, F.T.Pinho, and M.A.Alves. The kernel-conformation constitutive laws. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 167-168:30–37, 2012.
- [2] A.M. Afonso, M.S.N. Oliveira, P.J. Oliveira, M.A. Alves, and F.T. Pinho. *The Finite Volume Method in Computational Rheology, Finite Volume Method - Powerful Means of Engineering Design, Chapter 7*. InTech, Available from: <http://www.intechopen.com/books/finitevolume-method-powerful-means-of-engineering-design/the-finite-volume-method-in-computational-rheology>, PhD. Radoslina Petrova edition, 2012.
- [3] J.P. Aguayo, P.M. Phillips, T.N. Phillips, H.R. Tamaddon-Jahromi, B.A. Snigerev, and M.F. Webster. The numerical prediction of planar viscoelastic contraction flows using the Pom-Pom model and higher-order finite volume schemes. *Journal of Computational Physics*, 220:586–611, 2007.
- [4] M. A. Alves, P. J. Oliveira, and F. T. Pinho. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International journal for numerical methods in fluids*, 41:47–75, 2003.
- [5] E. Andrade. The viscosity of liquids. *Nature*, 125:309–310, 1930.
- [6] C. Barus. Note on the dependence of viscosity on pressure and temperature. *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 27:13 – 18, 1891.
- [7] C. Barus. Isothermals, isopiestic and isometrics relative to viscosity. *American Journal of Science (1880-1910)*, 45(266):87, 1893.
- [8] R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager. *Dynamics of Polymetric Liquids*, volume 1. Wiley, New York, 1977. Fluid Mechanics.
- [9] R. B. Bird, C. F. Curtiss, R. C. Armstrong, and O. Hassager. *Dynamics of Polymetric Liquids*, volume 2. Wiley, New York, 1987. second ed.
- [10] R.E.S. Bretas. *Reologia De Polímeros Fundidos*. EDUFSCAR - São Carlos, 2000.
- [11] P.W. Bridgman. The viscosity of liquids under pressure. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 11:603–606, 1925.
- [12] P.W. Bridgman. *The Physics of High Pressure*. Macmillan, New York, 1931.
- [13] F. Brunetti. *Mecânica dos fluidos (2a. ed.)*. Pearson Educación, 2008.
- [14] Xingyuan Chen, Holger Marschall, Michael Schäfer, and Dieter Bothe. A comparison of stabilisation approaches for finite-volume simulation of viscoelastic fluid flow. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 27(6-7):229–250, 2013.

- [15] Alexandre Joel Chorin. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of computation*, 22(104):745–762, 1968.
- [16] MS Darwish and FH Moukalled. Normalized variable and space formulation methodology for high-resolution schemes. *Numerical Heat Transfer*, 26(1):79–96, 1994.
- [17] a.R. Davies and X.K. Li. Numerical modelling of pressure and temperature effects in viscoelastic flow between eccentrically rotating cylinders. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 54:331–350, 1994.
- [18] A DE OLIVEIRA. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2000.
- [19] CFD Direct. Cfd direct: About openfoam.
- [20] Marusic-Paloka Eduard and Igor Pazanin. A note on the pipe flow with a pressure-dependent viscosity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 197:5–10, 2013.
- [21] Raanan Fattal and Raz Kupferman. Constitutive laws for the matrix-logarithm of the conformation tensor. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 123(2-3):281–285, 2004.
- [22] Raanan Fattal and Raz Kupferman. Time-dependent simulation of viscoelastic flows at high Weissenberg number using the Log-conformation representation. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 126(1):23–37, 2005.
- [23] JL Favero, AR Secchi, NSM Cardozo, and Hrvoje Jasak. Viscoelastic flow analysis using the software OpenFOAM[®] and differential constitutive equations. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 165(23-24):1625–1636, 2010.
- [24] Jovani Luiz Fávero. Simulação de escoamentos viscoelásticos: desenvolvimento de uma metodologia de análise utilizando o software OpenFOAM[®] e equações constitutivas diferenciais. 2009.
- [25] L.L. Ferrás. *Theoretical and numerical studies of slip flows*. Tese de Doutorado, Universidade do Minho, 2012.
- [26] L.L. Ferrás, J.M. Nóbrega, and F.T. Pinho. Analytical solutions for channel flows of Phan-Thien–Tanner and Giesekus fluids under slip. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 171–172:97–105, 2012.
- [27] L.L. Ferrás, J.M. Nóbrega, and F.T. Pinho. Analytical solutions for Newtonian and inelastic non-Newtonian flows with wall slip. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 175–176:76–88, 2012.
- [28] L.L. Ferrás, J.M. Nóbrega, and F.T. Pinho. Implementation of slip boundary conditions in the finite volume method: New techniques. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 72:724–747, 2013.
- [29] J.H. Ferziger and M. Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [30] The OpenFOAM Foundation. OpenFOAM[®]v6 user guide. <https://cfd.direct/openfoam/user-guide>, 2018.

- [31] F. Gazzola. A note on the evolution navier-stokes equations with a pressure-dependent viscosity. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 48:760–773, 1997.
- [32] Robert Guénette and Michel Fortin. A new mixed finite element method for computing viscoelastic flows. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 60(1):27–52, 1995.
- [33] Florian Habla, Alexander Woitalka, Stefanie Neuner, and Olaf Hinrichsen. Development of a methodology for numerical simulation of non-isothermal viscoelastic fluid flows with application to axisymmetric 4: 1 contraction flows. *Chemical engineering journal*, 207:772–784, 2012.
- [34] Alfredo Hernández, J Arcos, F Méndez, and O Bautista. Effect of pressure-dependent viscosity on the exiting sheet thickness in the calendering of newtonian fluids. *Applied Mathematical Modelling*, 37(10-11):6952–6963, 2013.
- [35] Charles Hirsch. Numerical computation of internal and external flows. vol. 2-computational methods for inviscid and viscous flows. *Chichester, England and New York, John Wiley & Sons, 1990, 708 p.*, 1990.
- [36] K.D. Housiadas. An exact analytical solution for viscoelastic fluids with pressure-dependent viscosity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 223:147 – 156, 2015.
- [37] Kostas D. Housiadas and Georgios C. Georgiou. Analytical solution of the flow of a Newtonian fluid with pressure-dependent viscosity in a rectangular duct. *Applied Mathematics and Computation*, 322:123–128, 2018.
- [38] R. R. Huilgol and Z. You. On the importance of the pressure dependence of viscosity in steady non-isothermal shearing flows of compressible and incompressible fluids and in the isothermal fountain flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 136:106–117, 2006.
- [39] F. Irgens. *Rheology and Non-Newtonian Fluids*. Springer, Cham, 2014.
- [40] E.R. Ivins, C.G. Sammis, and C.F. Yoder. Deep mantle viscous structure with prior estimate and satellite constraint. *J. Geophys. Res.*, 98:4579–4609, (1993).
- [41] Hrvoje Jasak. Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows. 1996.
- [42] Hrvoje Jasak, HG Weller, and AD Gosman. High resolution nvd differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes. *International journal for numerical methods in fluids*, 31(2):431–449, 1999.
- [43] Dealy J.M. Weissenberg and Deborah numbers - their definition and use. *The British Society of Rheology, Rheology Bulletin*, 79(2):14–18, 2010.
- [44] Anna Kalogirou, Stella Poyiadji, and Georgios C. Georgiou. Incompressible poiseuille flows of newtonian liquids with a pressure-dependent viscosity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166:413–419, 2011.
- [45] Satish Karra, Vit Prusa, and K. R. Rajagopal. On maxwell fluids with relaxation time and viscosity depending on the pressure. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46:819–827, 2011.

- [46] Martin Lanzendorfer. *Flows of incompressible fluids with pressure-dependent viscosity (and their application to modelling the flow in journal bearing)*. Doctoral thesis, Mathematical Institute of Charles University, Prague, 2011.
- [47] R. Larsson. Transient non-newtonian elasto-hydrodynamic lubrication analysis of an involute spur gear. *Wear*, 207:67 – 73, 1997.
- [48] Jianzhong Lin, Zhenyu Ouyang, and Xiaoke Ku. Dynamics of cylindrical particles in the contraction flow of a second-order fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 257:1 – 12, 2018.
- [49] C.R. Maliska. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. Livros Técnicos e Científicos, 2004.
- [50] F.J. Martinez-Boza, M.J. Martin-Afonso, C. Callegos, M. Fernández. High-pressure behavior of intermediate fuel oils. *Energy Fuels*, 25:5138 – 5144, 2011.
- [51] H Matallah, P Townsend, and MF Webster. Recovery and stress-splitting schemes for viscoelastic flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 75(2-3):139–166, 1998.
- [52] J.E. McKinney and H.V. Belcher. Dynamic compressibility of polyvinylacetate and its relation to free volume. *J. Res. Nat. Bur. Stand. Sect. A. Phys. Chem.*, 67(1):43–53, 1963.
- [53] Josef Málek, Jindrich Necas, and K. R. Rajagopal. Global analysis of the flows of fluids with pressure-dependent viscosities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 165:243–269, 2002.
- [54] G. Mompean. On predicting abrupt contraction flows with differential and algebraic viscoelastic models. *Computers and Fluids*, 31:935–956, 2002.
- [55] F Moukalled, A Abdel Aziz, and M Darwish. Performance comparison of the nwf and dc methods for implementing high-resolution schemes in a fully coupled incompressible flow solver. *Applied mathematics and computation*, 217(11):5041–5054, 2011.
- [56] F. Moukalled, L. Mangani, and M. Darwish. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab*. Fluid Mechanics and Its Applications. Springer International Publishing, 2015.
- [57] P. J. Oliveira and F. T. Pinho. Plane contraction flows of Upper Convected Maxwell and Phan-Thien–Tanner fluids as predicted by a finite-volume method. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 88:63–88, 1999.
- [58] R.G. Owens and T.N. Phillips. *Computational Rheology*. Imperial College Press, London, 2002.
- [59] Suhas V Patankar and D Brian Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, 15:1787–1806, 1972.
- [60] SV Patankar. Numerical heat transfer and fluid flow. *Washington, DC, Hemisphere Publishing Corp., 1980. 210 p.*, 1980.
- [61] Igor Pazanin. On the helical pipe flow with a pressure-dependent viscosity. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 4:062006, 2014.

- [62] T. N. Phillips and A. Williams. Comparison of creeping and inertial flow of an Oldroyd-B fluid through a planar and axisymmetric contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 108:25–47, 2002.
- [63] F. Pimenta and M.A. Alves. rheotool. <https://github.com/fppimenta/rheoTool>, 2016.
- [64] F Pimenta and MA Alves. Stabilization of an open-source finite-volume solver for viscoelastic fluid flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 239:85–104, 2017.
- [65] F. T. Pinho, M. A. Alves, and P. J. Oliveira. Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and PTT fluids in planar contractions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 110:45–75, 2003.
- [66] Karen Y. Pérez-Salas, Salvador Sánchez, Gabriel Ascanio, and Juan P. Aguayo. Analytical approximation to the flow of a sPTT fluid through a planar hyperbolic contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 272:104160, 2019.
- [67] K. R. Rajagopal, G. Saccomandi, and L. Vergori. On the oberbeck-boussinesq approximation for fluids with pressure dependent viscosities. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10:1139–1150, 2009.
- [68] K.R. Rajagopal. On implicit constitutive theories for fluid. *J. Fluid Mech.*, 550:243–249, 2006.
- [69] M. Renardy. Some remarks on the navier-stokes equations with a pressure-dependent viscosity. Technical report, Technical Summary Report n. 2886, 1986.
- [70] Michael Renardy. Parallel shear flows of fluids with a pressure-dependent viscosity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 114:229–236, 2003.
- [71] CM Rhie and W Li Chow. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA journal*, 21(11):1525–1532, 1983.
- [72] Poole R.J. The Deborah and Weissenberg numbers. *The British Society of Rheology, Rheology Bulletin*, 53(2):32–39, 2012.
- [73] G. W. Roberts and K. Walters. On viscoelastic effects in journal-bearing lubrication. *Rheologica Acta*, 31:55–62, 1992.
- [74] T Sahaphol and S Miura. Shear moduli of volcanic soils. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 25(2):157–165, 2005.
- [75] Luciano Amaury dos Santos et al. O desacoplamento par-ímpar do campo de pressão e algoritmos para simulação de descoamentos incompressíveis por volumes finitos. 1996.
- [76] Harkrishan Singh and AW Nolle. Pressure dependence of the viscoelastic behavior of polyisobutylene. *Journal of Applied Physics*, 30(3):337–341, 1959.
- [77] Shriram Srinivasan and K. R. Rajagopal. Study of a variant of stokes’ first and second problems for fluids with pressure dependent viscosities. *International Journal of Engineering Science*, 47:1357–1366, 2009.

-
- [78] Shriram Srinivasan and K. R. Rajagopal. A note on the flow of a fluid with pressure-dependent viscosity in the annulus of two infinitely long coaxial cylinders. *Applied Mathematical Modelling*, 34:3255–3263, 2010.
- [79] G.G. Stokes. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of equilibrium and motion of elastic solids. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8:287 – 305, 1845.
- [80] Sergey A. Suslov and Thien Duc Tran. Revisiting plane couette-poiseuille flows of a piezo-viscous fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 154:170–178, 2008.
- [81] Thien Duc Tran and Sergey A. Suslov. Stability of plane poiseuille-couette flows of a piezo-viscous fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 156:139–149, 2009.
- [82] JP Van Doormaal and GD Raithby. Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical heat transfer*, 7(2):147–163, 1984.
- [83] H.K. Versteeg and W. Malalasekera. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Pearson Education Limited, 2007.
- [84] J. Weertman, S. White, and A.H. Cook. Creep laws for the mantle of the earth [and discussion]. *Proc. R. Soc. London Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci.*, 288:9–26, (1978).
- [85] S. C. Xue, N. Phan-Thien, and R. I. Tanner. Three-dimensional numerical simulation of viscoelastic flows through planar contractions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 74:195–245, 1998.
- [86] I. Zehra, M. M. Yousaf, and S. Nadeem. Numerical solutions of williamson fluid with pressure dependent viscosity. *Results in Physics*, 5:20–25, 2015.