

**unesp**



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
Instituto de Ciência e Tecnologia de Sorocaba  
Campus de São João da Boa Vista

Thainá Guimarães Pereira

**Aplicação de resistência de amortecimento em simulações de  
transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão**

São João da Boa Vista  
2021

Thainá Guimarães Pereira

**Aplicação de resistência de amortecimento em simulações de transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Interunidades, entre o Instituto de Ciência e Tecnologia de Sorocaba e o Campus de São João da Boa Vista da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Paula Ghedini Der Agopian  
Coorientador: Prof. Dr. Afonso José do Prado

São João da Boa Vista  
2021

P436a Pereira, Thainá Guimarães

Aplicação de resistência de amortecimento em simulações  
de transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão /

Thainá Guimarães Pereira. – São João da Boa Vista, 2021

100 p. : il., tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista  
(Unesp), Câmpus

Experimental de São João da Boa Vista, São João da Boa Vista

Orientadora: Paula Ghedini Der Agopian

Coorientador: Afonso José do Prado

1. Energia elétrica Transmissão. 2. Circuitos elétricos. 3.  
Sistemas lineares. 4. Transitórios (Eletricidade). 5.  
Telecomunicações. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Câmpus  
Experimental de São João da Boa Vista. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.



## 7-CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Aplicação de resistência de amortecimento em simulações de transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão

**AUTORA: THAINÁ GUIMARÃES PEREIRA**

**ORIENTADORA: PAULA GHEDINI DER AGOPIAN**

**COORIENTADOR: AFONSO JOSÉ DO PRADO**

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Sistemas Eletrônicos pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. AFONSO JOSÉ DO PRADO (Participação Virtual)

Coordenadoria de Curso de Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações / UNESP - Câmpus de São João da Boa Vista

PROFESSOR ASSOCIADO II JOSE CARLOS DA COSTA CAMPOS (Participação Virtual)  
Departamento de Engenharia Elétrica / UNIVERSIDADE FEDERAL DE VICOSA

Prof. Dr. ELMER MATEUS GENNARO (Participação Virtual)

Coordenadoria de Curso de Engenharia Aeronáutica / UNESP - Câmpus de São João da Boa Vista

São João da Boa Vista, 12 de maio de 2021



**“A menos que modifiquemos à nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo”  
(Albert Einstein)**

**“O Senhor é o meu pastor, nada me faltará”  
(Salmo 23)**

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus por mais uma oportunidade. Por ter me acompanhado, dado forças e sabedoria para enfrentar esse desafio. E também, por me acalmar nas horas de desespero, iluminar as minhas decisões e abençoar a minha trajetória.

Agradeço a minha mãe, Heliana, por todo apoio e suporte emocional durante toda minha vida. Você sempre soube o que dizer e fazer em todos os momentos.

Agradeço a minha irmã, Luanna, pelo companheirismo, amizade e amor. Obrigada por sempre acreditar que sou capaz. Obrigada também, por nos presentear com o maior tesouro de nossas vidas, Liz, que me proporciona alegria todos os dias e me ensinou o verdadeiro significado de amor. Vocês são peças chave para me ajudar alcançar o que tanto desejo.

Agradeço ao meu namorado, Lucas Gama, por todo incentivo, apoio e parceria diária. Obrigada por me ouvir e estar sempre ao meu lado.

Aos meus familiares, que mesmo distante, sempre estão presentes.

Agradeço também ao meu amigo e irmão de vida, Leonardo Lessa, por toda ajuda e conselhos. Você tornou esse caminho mais leve.

Por fim, não menos importante, gostaria de agradecer aos meus orientadores, Paula Ghedini Der Agopian por acreditar no meu potencial e ser uma mãe acadêmica. Saiba que levo você como um exemplo. E ao Afonso José do Prado, que se tornou um pai e amigo. Agradeço por todos esses anos de parceria, apoio e dedicação. Sem dúvidas, ensinou-me a ser melhor profissional.

Deixo aqui, o meu muito obrigada a todos que estiveram comigo durante todo esse percurso. Não posso dizer que foi fácil, mas todos tiveram uma participação especial, que tornou esse desafio mais ameno.

## RESUMO

A finalidade desse trabalho é identificar os melhores parâmetros para simulação de linhas de transmissão, levando em consideração a estabilidade e precisão numérica. Nesse trabalho, serão utilizadas linhas bifásicas com o intuito de representar a transmissão da usina hidrelétrica de Itaipu. Para a representação de linhas bifásicas são simuladas duas linhas monofásicas que possuem interligação. Essa interligação é simplificada por meio de uma transformação fase-modo para que cada linha se torne independente. Essas linhas de transmissão independentes podem ser representadas por circuitos simples com elementos concentrados. No caso, serão utilizadas cascatas de circuito  $\pi$  para essa simulação. Em estudos anteriores, foram detectadas oscilações indesejadas e erros numéricos com a utilização de cascatas de circuito  $\pi$  clássicos. Com o intuito de reduzir ou sanar essas oscilações, foram acrescentadas resistências de amortecimento para esse estudo. Ao longo do trabalho serão apresentados dois tipos de resistência de amortecimento, um deles é inserido em paralelo com a parte longitudinal e o segundo em série com a parte transversal.

**Palavras-chave:** Linha de transmissão. Sistema linear. Transitório eletromagnético. Simulações numéricas. Simulação no domínio do tempo.

## ABSTRACT

This thesis searches to identify the best parameters to simulate transmission lines, taking into consideration the stability and numeric precision. In this study, biphasic lines will be used to represent transmission lines used in Itaipu Power Plant. To represent these biphasic lines, two monophasic lines interconnected will be simulated. This interconnection is simplified through a phase-mode transformation so that each line becomes independent. These independent transmission lines can be represented by simple circuits with concentrated elements. In this case, cascade  $\pi$ -circuits will be used for this simulation. In previous studies, it has been detected undesirable oscillations and numeric errors with the use of classic cascade  $\pi$ -circuits. With the purpose of reducing or completely solving this oscillation problems, damping resistors were added to the circuit for this study. Throughout this thesis, two different types of damping resistors will be presented: one of them is inserted in parallel to the longitudinal part (damp) and the second one in series with the transversal part (shunt).

**Keywords:** Transmission line. Linear system. Electromagnetic transient. Numerical simulation. Time-domain simulation.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Circuito equivalente por unidade de comprimento para uma linha de transmissão real	24
Figura 2 – Unidade infinitesimal do circuito $\pi$	27
Figura 3 – Circuito $\pi$ utilizando elementos concentrados para circuitos intermediários	28
Figura 4 – Primeira unidade do circuito $\pi$	29
Figura 5 – Última unidade do circuito $\pi$	29
Figura 6 – Unidade infinitesimal utilizando parâmetros distribuídos	31
Figura 7 – Fluxograma das simulações utilizando matrizes 2x2	39
Figura 8 – Circuito $\pi$ genérico	42
Figura 9 – Parte transversal do circuito $\pi$ com a resistência <i>shunt</i>	43
Figura 10 – Circuito $\pi$ intermediário com a resistência <i>shunt</i>	43
Figura 11 – Primeira unidade do circuito $\pi$ com a resistência <i>shunt</i>	44
Figura 12 – Última unidade do circuito $\pi$ considerando a resistência <i>shunt</i>	45
Figura 13 – Circuito $\pi$ intermediário com a resistência de amortecimento	46
Figura 14 – Primeira unidade do circuito $\pi$ com a resistência de amortecimento	47
Figura 15 – Última unidade do circuito $\pi$ com a resistência de amortecimento	48
Figura 16 – Fluxograma para simulações de transitórios em linhas de transmissão sem a aplicação de resistência de amortecimento	52
Figura 17 – Fluxograma para simulações de transitórios em linhas de transmissão com a aplicação de resistência de amortecimento	52
Figura 18 – Torre característica da linha em HVDC de Itaipu	53
Figura 19 – Esquema do sistema em HVDC da hidrelétrica de Itaipu	54
Figura 20 – Esquema de aplicação da transformação polo-modo	55
Figura 21 – Utilizando a matriz 2x2 para determinar a estabilidade do sistema	56
Figura 22 – Relação entre o passo de tempo e a quantidade de circuitos $\pi$ para o polo 0	57
Figura 23 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo homopolar para $k_S = 1$ referente ao $R_S$ .	59
Figura 24 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no	60

terminal de carga do polo homopolar para  $k_S = 3$  referente ao  $R_S$ .  
Figura 25 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no 61  
terminal de carga do polo homopolar para  $k_S = 6$  referente ao  $R_S$ .  
Figura 26 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no 62  
terminal de carga do polo homopolar para  $k_S = 10$  referente ao  $R_S$ .  
Figura 27 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no 63  
terminal de carga do polo homopolar para  $k_D = 1$  referente ao  $R_D$ .  
Figura 28 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no 64  
terminal de carga do polo homopolar para  $k_D = 3$  referente ao  $R_D$ .  
Figura 29 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no 65  
terminal de carga do polo homopolar para  $k_D = 6$  referente ao  $R_D$ .  
Figura 30 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no 65  
terminal de carga do polo homopolar para  $k_D = 10$  referente ao  $R_D$ .  
Figura 31 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de 66  
carga, polo homopolar,  $n = 300$  e escala linear para o passo de tempo  
referente ao  $R_S$ .  
Figura 32 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de 67  
carga, polo homopolar,  $n = 300$  e escala logarítmica para passo de tempo  
referente ao  $R_S$ .  
Figura 33 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de 67  
carga, polo homopolar,  $n = 500$  e escala linear para passo de tempo referente  
ao  $R_S$ .  
Figura 34 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de 68  
carga, polo homopolar,  $n = 500$  e escala logarítmica para passo de tempo  
referente ao  $R_S$ .  
Figura 35 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de 69  
carga, polo homopolar,  $n = 300$  e escala linear para o passo de tempo  
referente ao  $R_D$ .  
Figura 36 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de 69  
carga, polo homopolar,  $n = 300$  e escala logarítmica para passo de tempo  
referente ao  $R_D$ .  
Figura 37 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de 70  
carga, polo homopolar,  $n = 500$  e escala linear para o passo de tempo

referente ao  $R_D$ .

Figura 38 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $n = 500$  e escala logarítmica para passo de tempo referente ao  $R_D$ . 70

Figura 39 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $\Delta t = 1 \mu s$  referente ao  $R_S$ . 72

Figura 40 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $\Delta t = 0,5 \mu s$  referente ao  $R_S$ . 73

Figura 41 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $\Delta t = 1 \mu s$  referente ao  $R_D$ . 73

Figura 42 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $\Delta t = 0,5 \mu s$  referente ao  $R_D$ . 74

Figura 43 – Utilizando a matriz 2x2 para determinar a estabilidade do sistema 76

Figura 44 – Relação entre o passo de tempo e a quantidade de circuitos  $\pi$  para o polo alpha 77

Figura 45 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo  $\alpha$  para  $k_S = 1$  referente ao  $R_S$ . 79

Figura 46 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo  $\alpha$  para  $k_S = 3$  referente ao  $R_S$ . 79

Figura 47 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo  $\alpha$  para  $k_S = 6$  referente ao  $R_S$ . 81

Figura 48 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo  $\alpha$  para  $k_S = 10$  referente ao  $R_S$ . 81

Figura 49 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo  $\alpha$  para  $k_D = 1$  referente ao  $R_D$ . 82

Figura 50 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo  $\alpha$  para  $k_D = 3$  referente ao  $R_D$ . 83

Figura 51 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo  $\alpha$  para  $k_D = 6$  referente ao  $R_D$ . 84

Figura 52 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo  $\alpha$  para  $k_D = 10$  referente ao  $R_D$ . 85

Figura 53 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo  $\alpha$ ,  $n = 300$  e escala linear para o passo de tempo referente ao  $R_S$ . 86

Figura 54 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo $\alpha$ , $n = 300$ e escala logarítmica para passo de tempo referente ao $R_S$ .	87
Figura 55 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo $\alpha$ , $n = 500$ e escala linear para passo de tempo referente ao $R_S$ .	87
Figura 56 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo $\alpha$ , $n = 500$ e escala logarítmica para passo de tempo referente ao $R_S$ .	88
Figura 57 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo $\alpha$ , $n = 300$ e escala linear para o passo de tempo referente ao $R_D$ .	89
Figura 58 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo $\alpha$ , $n = 300$ e escala logarítmica para passo de tempo referente ao $R_D$ .	89
Figura 59 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo $\alpha$ , $n = 500$ e escala linear para o passo de tempo referente ao $R_D$ .	90
Figura 60 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo $\alpha$ , $n = 500$ e escala logarítmica para passo de tempo referente ao $R_D$ .	91
Figura 61 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo $\alpha$ , $\Delta t = 1 \mu s$ referente ao $R_S$ .	92
Figura 62 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo $\alpha$ , $\Delta t = 0,5 \mu s$ referente ao $R_S$ .	93
Figura 63 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo $\alpha$ , $\Delta t = 1 \mu s$ referente ao $R_D$ .	93
Figura 64 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo $\alpha$ , $\Delta t = 0,5 \mu s$ referente ao $R_D$ .	94

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Aplicação esparsidade usando programa matemático	40
Tabela 2 – Memória para armazenamento em simulações de transitórios	40

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

**RAM** *Random Access Memory*

**HVDC** *High-Voltage Direct Current* – português: alta tensão em corrente contínua

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\pi$	Letra grega – Pi
$\Delta x$	Extensão da linha
$R'$	Resistência por unidade de comprimento
$L'$	Indutância por unidade de comprimento
$C'$	Capacitância por unidade de comprimento
$G'$	Condutância por unidade de comprimento
$v$	Variável de estado de tensão
$i$	Variável de estado de corrente
$Z$	Matriz de impedância
$Y$	Matriz de admitância
$T_v$	Transformação de modo de tensão
$T_i$	Transformação de modo de corrente
$R$	Resistência
$L$	Indutância
$j$	Representa os circuitos intermediários
$C$	Capacitância
$G$	Condutância
$u(t)$	Função degrau
$n$	Número de circuitos $\pi$
$k_D$	Constante de amortecimento
$R_D$	Resistência de amortecimento
$G_D$	Condutância de amortecimento
$i_D$	Variável de estado de corrente para a resistência de amortecimento
$k_s$	Constante de <i>shunt</i>
$R_s$	Resistência de <i>shunt</i>
$x$	Vetor das variáveis de estado
$A$	Matriz que corresponde a cascata de circuitos $\pi$
$B$	Matriz de fontes ideais
$d$	Comprimento da linha de transmissão
$\Delta t$	Passo de tempo
$a$	Elementos da matriz $A$

<b>t</b>	Tempo
<b>I</b>	Matriz Identidade
<b><math>\alpha</math></b>	Alpha
<b><math>v_0</math></b>	Velocidade de propagação no polo 0
<b><math>L_0</math></b>	Indutância no polo 0
<b><math>C_0</math></b>	Capacitância no polo 0
<b><math>d_0</math></b>	Distância da linha do polo 0
<b><math>t_0</math></b>	Tempo de propagação da onda no polo 0
<b>km/s</b>	Unidade – quilômetro por segundo
<b>km</b>	Unidade de comprimento – Quilômetro
<b>s</b>	Unidade de tempo – Segundo
<b>ms</b>	Unidade de tempo – Milissegundo
<b><math>\mu</math>s</b>	Unidade de tempo – Microssegundo
<b>pu</b>	Por unidade
<b>%</b>	Porcentagem
<b>f</b>	Frequência
<b><math>v_\alpha</math></b>	Velocidade de propagação no polo $\alpha$
<b><math>L_\alpha</math></b>	Indutância no polo $\alpha$
<b><math>C_\alpha</math></b>	Capacitância no polo $\alpha$
<b><math>d_\alpha</math></b>	Distância da linha do polo $\alpha$
<b><math>t_\alpha</math></b>	Tempo de propagação da onda no polo $\alpha$
<b><math>Z_\alpha</math></b>	Impedância do polo $\alpha$
<b><math>Z_0</math></b>	Impedância do polo 0
<b><math>v_M</math></b>	Tensão modal
<b><math>i_M</math></b>	Corrente modal
<b><math>Z_M</math></b>	Impedância modal
<b><math>Y_M</math></b>	Admitância modal
<b><math>v_F</math></b>	Tensão de fase
<b><math>i_F</math></b>	Corrente de fase
<b><math>\omega</math></b>	Frequência angular
<b><math>\theta</math></b>	Defasagem entre tensão e corrente de cada fase
<b>y</b>	Constante de propagação de cada fase
<b><math>\lambda</math></b>	Autovalor

<b><math>V_M</math></b>	Fasor de tensão no domínio modal
<b><math>I_M</math></b>	Fasor de corrente no domínio modal
<b><math>Z_{PF}</math></b>	Impedância própria de fase
<b><math>Z_{MF}</math></b>	Impedância mútua de fase
<b><math>Y_{PF}</math></b>	Admitância própria de fase
<b><math>Y_{MF}</math></b>	Admitância mútua de fase
<b><math>V_{P+}</math></b>	Tensão de polo positivo
<b><math>V_{P-}</math></b>	Tensão de polo negativo
<b><math>i_{P+}</math></b>	Corrente de polo positivo
<b><math>i_{P-}</math></b>	Corrente de polo negativo
<b>Hz</b>	Unidade de frequência – <i>Hertz</i>
<b>MHz</b>	Unidade de frequência – <i>Mega Hertz</i>
<b>GHz</b>	Unidade de frequência – <i>Giga Hertz</i>
<b>kB</b>	Unidade de <i>byte</i> – <i>quilobyte</i>

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>20</b>
1.1 Objetivos .....	21
1.2 Estrutura do texto .....	22
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>23</b>
2.1 Unidade infinitesimal da linha de transmissão .....	23
2.2 Equações diferenciais para uma unidade do circuito $\pi$ .....	27
2.3 Transformação Modal.....	30
2.4 Matriz 2x2 .....	37
2.5 Matrizes esparsas .....	39
<b>3 MODELO PROPOSTO.....</b>	<b>42</b>
3.1 Equações diferenciais incluindo $R_s$ .....	42
3.2 Equações diferenciais incluindo $R_D$ .....	46
3.3 Integração trapezoidal para o sistema.....	48
<b>4 RESULTADOS .....</b>	<b>53</b>
<b>4.1 Polo homopolar ou polo 0.....</b>	<b>55</b>
4.1.1 Curvas de superfície relativas à relação entre quantidade de circuitos $\pi$ e passo de tempo.....	58
4.1.2 Curvas de superfície relativas à relação entre passo de tempo e fator de proporcionalidade.....	66
4.1.3 Curvas de superfície relativas à relação entre circuitos $\pi$ e fator de proporcionalidade.....	71
<b>4.2 Polo <math>\alpha</math>.....</b>	<b>75</b>
4.2.1 Curvas de superfície relativas à relação entre quantidade de circuitos $\pi$ e passo de tempo.....	78
4.2.2 Curvas de superfície relativas à relação entre passo de tempo e fator de proporcionalidade.....	86
4.2.3 Curvas de superfície relativas à relação entre circuitos $\pi$ e fator de proporcionalidade.....	91
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>96</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>99</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Linhas de transmissão são sistemas usados para transmitir energia eletromagnética entre dois nós de um sistema de potência com grande distância entre esses pontos, ou entre dois nós de um sistema eletrônico utilizando altas frequências [1-3]. No caso, os elementos condutores que conectam os nós mencionados são considerados como guias de ondas ou guias de campos eletromagnéticos, transmitindo potência elétrica e sinais elétricos [4]. Ou seja, os sistemas modelados como linhas de transmissão podem transmitir altas potências elétricas ou servirem como canal de comunicação, onde trafegam dados [5]. Assim, tal modelagem pode ser aplicada a um sistema de transmissão de potência que se estende por centenas a milhares de quilômetros de extensão ou a sistema de pequenas dimensões que funcione em altas frequências. Para a transmissão de grande quantidade de potência elétrica é necessária uma alta potência, porém uma baixa frequência. Já para o caso de transmissão de dados, é necessário que o sinal tenha alta frequência. Ao utilizar materiais condutores, essa transmissão eletromagnética não é irradiada, sendo assim, guiada de uma fonte geradora para uma carga consumidora através de fios torcidos ou paralelos, cabos coaxiais ou guias de onda.

As análises de sistemas e circuitos elétricos que podem ser modelados como linhas de transmissão estão relacionadas a conceitos de parâmetros elétricos distribuídos. Diversas ferramentas analíticas e numéricas podem ser aplicadas para essas análises. De forma geral, tais análises estão baseadas em determinar como as ondas de tensão e corrente são propagadas ao longo da linha e com o passar do tempo.

Para que seja possível realizar uma análise gráfica da propagação de ondas de tensão e de corrente ao longo de linhas de transmissão, tensões e correntes em cada ponto da linha são determinadas em um determinado instante de tempo. Ou então, em um determinado ponto da linha, tensões e correntes são determinadas ao longo do tempo. Para isso, linhas de transmissão são modeladas em unidades infinitesimais e assim, diversos e variados modelos analíticos e numéricos são obtidos. Um dos modelos mais simples é baseado na modelagem de linhas de transmissão como cascatas de circuitos  $\pi$ . O circuito  $\pi$  seria uma das formas de modelar as unidades infinitesimais que representam linhas de transmissão [6]. Assim, para determinar as equações de estado que representam o modelo constituído por cascata de circuitos  $\pi$ , são utilizadas as leis de Kirchhoff das tensões e correntes. Em

conjunto com tais leis, para obter uma modelagem numérica estável e convergente, o método de Heun [3] é aplicado como método de integração para soluções numéricas das equações diferenciais obtidas. No entanto, esse conjunto quando aplicado em simulações de propagação de fenômenos transitórios em linhas de transmissão gera resultados contaminados por oscilações numéricas, ou oscilações de Gibbs [7].

Entre as estratégias para minimizar as oscilações numéricas mencionadas, podem ser incluídas modificações na estrutura clássica do circuito  $\pi$  [8-10]. Assim podem ser introduzidas resistências que amortecem as oscilações numéricas e que não causem interferência no fenômeno cuja propagação através da linha de transmissão é simulada. Essas modificações são apresentadas no desenvolvimento deste trabalho.

No caso deste trabalho, são analisadas duas alternativas: a resistência de amortecimento é introduzida em paralelo com a parte longitudinal do circuito  $\pi$  ou em série com a parte transversal desse circuito. Tais resistências de amortecimento minimizam as oscilações numéricas causadas pelos fenômenos de Gibbs [7,11-13]. Dessa forma, são apresentadas modelagens utilizando ambas resistências de amortecimento para representar linhas bifásicas em corrente contínua. Por meio de transformação modal, uma linha bifásica pode ser tratada como duas linhas modais monofásicas independentes. A modelagem baseada em circuitos  $\pi$  com a inclusão de resistências de amortecimento é aplicada para representar tais linhas modais como cascatas de circuitos  $\pi$ .

## 1.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho consiste em simular a propagação de fenômenos transitórios eletromagnéticos em linhas bifásicas de transmissão com a utilização de resistências de amortecimento para minimizar o efeito das oscilações numéricas. As linhas de transmissão podem ser representadas por elementos concentrados e utilizando circuitos simples lineares [14]. No caso deste trabalho, as linhas de transmissão são representadas por cascatas de circuitos  $\pi$ . Com o intuito de diminuir as oscilações numéricas causadas no circuito  $\pi$  clássico, [8] são acrescentadas resistências de amortecimento em paralelo com os elementos longitudinais de cada unidade de circuito  $\pi$ . Neste trabalho, foram comparados dois tipos de resistência de amortecimento. Uma inserida na parte longitudinal do circuito  $\pi$  em paralelo com os elementos modelados por resistência e indutância longitudinais [15-16]. O outro tipo

de resistência de amortecimento é uma resistência inserida em série na parte transversal do circuito (condutância e capacitância transversais).

## **1.2 Estrutura do texto**

Além deste capítulo de introdução do trabalho realizado durante o período de Mestrado, a estrutura do texto desta qualificação foi dividida da seguinte forma:

- Capítulo 2 – revisão bibliográfica na qual são apresentadas as bases do trabalho desenvolvido;
- Capítulo 3 – os modelos físicos e matemáticos são apresentados, bem como, as bases numéricas das rotinas utilizadas para as simulações de propagação de transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão;
- Capítulo 4 – os resultados obtidos por meio das simulações numéricas são apresentados e analisados;
- Capítulo 5 – as conclusões deste trabalho são apresentadas, bem como, sugestões para futuros trabalhos.

O texto é finalizado com as referências bibliográficas utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Ao longo de toda linha de transmissão, podem ser analisados diferentes processos, sendo eles, a distribuição das correntes, as diferenças de potencial, a transferência de energia, a propagação de ondas viajantes. Nos problemas de Engenharia não é suficiente determinar equacionamentos que possam ser aplicados na resolução de um problema sem que haja um conhecimento das limitações e simplificações adequadas. Com isso, expressões matemáticas podem ser utilizadas indevidamente. As soluções matemáticas dos fenômenos físicos devem sofrer simplificações e idealizações. Esses processos matemáticos de derivações por meio de princípios fundamentais, devem fornecer todas as informações referentes às restrições, aproximações e limitações impostas pelo sistema. Além disso, deve ser examinado com muito rigor, se é aceitável esses princípios fundamentais utilizados para dar início as deduções matemáticas.

A expressão linha de transmissão é aplicada para todos os elementos do circuito que é utilizado para o transporte de energia, sendo independente a quantidade de energia que é transportada. Essa mesma teoria geral é aplicada para qualquer comprimento físico da linha de transmissão, após serem consideradas as limitações da modelagem aplicada [17].

### 2.1 Unidade infinitesimal da linha de transmissão

Uma modelagem de linha de transmissão real, em que  $\Delta x$  é um elemento diferencial de comprimento, pode incluir, no circuito equivalente da linha, os elementos que representam perdas de condutores, retratadas pela resistência longitudinal, e as perdas dielétricas, constituídas pela condutância transversal. A Figura 1 mostra o circuito que representa a linha de transmissão por unidade de comprimento. Sendo os elementos  $R'$ ,  $L'$ ,  $C'$  e  $G'$  os valores de resistência, indutância, capacitância e condutância por unidade de comprimento.

A diferença de potencial entre o início e o fim do elemento da linha é definido como:

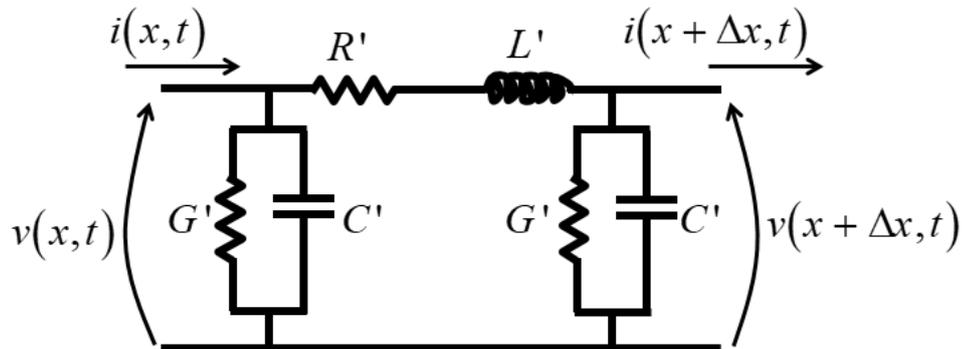
$$\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \quad (1)$$

As equações de tensão e corrente são mostradas em (2) e (3):

$$v(x + \Delta x, t) = v(x, t) - L' \Delta x \frac{\partial i(x + \Delta x, t)}{\partial t} - R' \Delta x i(x + \Delta x, t) \quad (2)$$

$$i(x + \Delta x, t) = i(x, t) - G' \Delta x v(x, t) - C' \Delta x \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (3)$$

Figura 1 – Circuito equivalente por unidade de comprimento para uma linha de transmissão real



Fonte: elaborado pelo autor

Em (3), a corrente e a primeira derivada parcial da corrente podem ser expandidas em uma série de Taylor. Então:

$$i(x + \Delta x, t) \approx i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \Delta x + \dots \quad (4)$$

$$\frac{\partial i(x + \Delta x, t)}{\partial t} \approx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x \partial t} \Delta x + \dots \quad (5)$$

Desprezando os termos de maiores ordens e substituindo na equação (2), tem-se:

$$\begin{aligned} v(x + \Delta x, t) - v(x, t) = & -L' \Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - R' \Delta x i(x, t) + \\ & -L' \Delta x^2 \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x \partial t} - R' \Delta x^2 \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (6)$$

Quando se aplica o limite para o primeiro membro de (6), os termos de segunda ordem desaparecem e usando a definição de derivada, conclui-se que:

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{v(x + \Delta x, t) - v(x, t)}{x_2 - x_1} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (7)$$

Assim, a equação diferencial da tensão no elemento é:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x = (R' \Delta x) i + (L' \Delta x) \frac{\partial i}{\partial t} \quad (8)$$

O sinal negativo em (8) vem dos valores positivos de  $i$  e  $\frac{\partial i}{\partial t}$ , fazendo com que o valor de  $v$  decresça. Dividindo (8) por  $\Delta x$ , a variação de  $v$  ao longo da linha é obtida.

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = R'i + L'\frac{\partial i}{\partial t} \quad (9)$$

Seguindo o mesmo princípio para a equação diferencial da tensão, a equação diferencial das correntes será então:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} \Delta x = (G' \Delta x)v + (C' \Delta x) \frac{\partial v}{\partial t} \quad (10)$$

Dividindo (10) por  $\Delta x$ , tem-se:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G'v + C'\frac{\partial v}{\partial t} \quad (11)$$

Em (10), o primeiro termo do segundo membro representa a corrente de deslocamento por meio do dielétrico, pela aplicação da tensão  $v$ . Já o segundo termo apresenta o valor da corrente de deslocamento por meio da capacitância  $C' \Delta x$ , devido a variação da tensão.

As equações (9) e (11) representam a Lei de Ohm onde  $v$  e  $i$  são variáveis dependentes da distância  $x$  de um ponto da linha até o ponto de referência e de  $t$ , que é o instante de tempo considerado [9].

A linha de transmissão para acoplamento de linhas, será utilizado para o cálculo do cruzamento de informações. Uma linha de transmissão com múltiplos condutores, sendo  $N$  linhas acopladas, essas linhas terão os valores de tensão e correntes acoplados.

A transformação de Laplace de equações telegráficas, descreve que as equações diferenciais parciais da linha de transmissão são independentes do tempo, isso pode ser observado em (12) e (13) [18].

$$\frac{dV(x,t)}{dx} = -Z(x,t)I(x,t) \quad (12)$$

$$\frac{dI(x,t)}{dx} = -Y(x,t)V(x,t) \quad (13)$$

Sendo que  $V(x,t)$  e  $I(x,t)$  são os vetores de tensão e corrente, respectivamente, da linha. Esses vetores são em função do passo de tempo e da posição ao longo da linha. Além disso, os valores de  $Z$  e  $Y$  são referenciados por unidade de comprimento de matrizes de impedância e admitância do sistema e definidos por:

$$Z = R(x,t) + X(x,t) \quad Y = G(x,t) + B(x,t) \quad (14)$$

As matrizes de impedância são relacionadas a resistência e reatância por unidade de comprimento, já as matrizes de admitância são relacionadas a condutância e susceptância por unidade de comprimento. Esses elementos estão

associados aos parâmetros unitários e mútuos do modelo físico [19].

As equações (9) e (11), podem ser associadas as equações (12) e (13), são determinadas de formas diferentes, mas contém as mesmas informações.

Sistemas elétricos de potência com uma longa extensão ou com uma grande área, principalmente os sistemas elétricos de transmissão e circuitos elétricos com altas frequências, podem ser utilizados para representar as linhas de transmissão [1-4]. Ao representar as linhas de transmissão por algum desses modelos de sistemas elétricos ocasiona um atraso entre o sinal de entrada e o sinal de saída. Isso ocorre devido à grande extensão da linha ou a alta frequência relacionada a ela. Os principais parâmetros de sinal de entrada e saída relacionados são tensões e correntes. Para as linhas de transmissão, a parte transversal do circuito é representada pela tensão  $v$ , e a parte longitudinal pela corrente  $i$ , essas relações foram descritas em (12-13). A matriz de impedância  $Z$  está relacionada a parte longitudinal do sistema e é uma matriz por unidade de comprimento. Já a matriz de admitância  $Y$ , está relacionada a parte transversal e também é uma matriz por unidade de comprimento, descritos em (13). Os valores de tensão e corrente são representados por vetores.

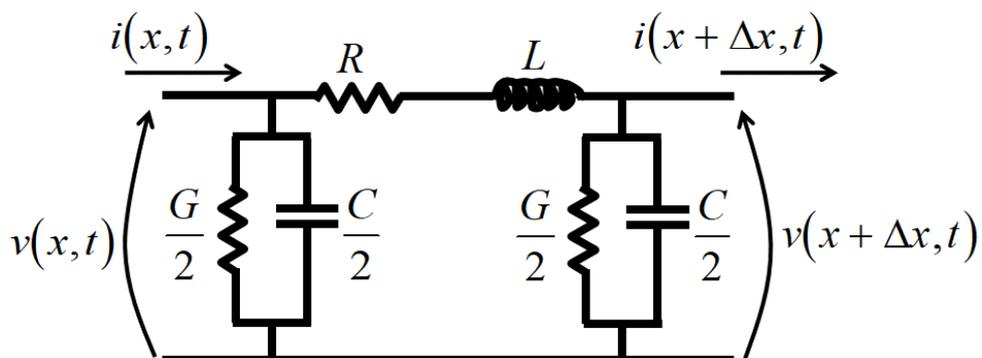
Os modelos de linha de transmissão que são dependentes da frequência, podem ser desenvolvidos utilizando o domínio das fases ou dos modos. Associados a isso, os domínios de tempo ou frequência podem ser usados para soluções de análises de transientes eletromagnéticos. Devido a essas opções, o modelo de representação das linhas de transmissão é aplicado para o estudo da parte transitória do sistema. Isso é relevante devido a parte longitudinal do sistema ser dependente da frequência. Para tentar melhorar essa representação, diversos modelos são sugeridos. Em alguns casos, ocorre a transformação fase-modo, para que seja estudado o domínio modo, para ver se há alguma melhoria na representação dos parâmetros dependentes da frequência. Em um desenvolvimento matemático, as matrizes de transformação fase-modo são dependentes da frequência, devido as matrizes de impedância longitudinal e admitância transversal da linha. Caso esse modelo matemático seja aplicado em softwares, o resultado pode ser uma rotina digital para análise de linha de transmissão, porém seu desempenho será lento. Uma alternativa para isso, seria usar uma matriz de transformação real única. Com isso, é obtido uma simulação rápida de transientes eletromagnéticos para linhas de transmissão e evita o uso de um processo de convolução na simulação. A matriz Clarke apresenta um bom desempenho para as 3 fases da linha de transmissão, com

exceção de casos transpostos e erros insignificantes para casos não transpostos. Por esses motivos, baseado em (12) e (13), a relação entre a tensão e corrente pode ser expressa no domínio de modos aplicando uma transformação de modo ( $T_V$  e  $T_I$ ). Com isso, são determinadas as matrizes  $Z$  e  $Y$  no domínio dos modos [9].

## 2.2 Equações diferenciais para uma unidade do circuito $\pi$

A linha de transmissão pode, então, ser considerada como o encadeamento de uma quantidade muito grande da unidade infinitesimal mostrada na Figura 2, ou a quantidade tendendo ao infinito. Esse tipo de conexão, utilizando definições de modelagem de circuitos elétricos, como quadripolos, é denominada associação em cascata. Considerando a quantidade de unidades limitada a um valor suficiente, para que os resultados numéricos obtidos sejam equivalentes analiticamente, ao considerar a quantidade de circuitos  $\pi$  tendendo ao infinito. Dessa forma, cada unidade de circuito  $\pi$  corresponde a uma pequena extensão da linha ( $\Delta x$ ) e tal extensão é relativamente muito pequena em relação à extensão total da linha. Assim, a tendência, de forma analítica, é que a representação da linha de transmissão seja melhor, conforme o comprimento da unidade infinitesimal tende a zero ( $\Delta x \rightarrow 0$ ). Dessa forma, quanto maior a quantidade de circuitos  $\pi$  utilizados na representação da linha de transmissão, melhor será essa modelagem. Em caso de aplicações numéricas, os limites de saturação desse ganho de representação devem ser estabelecidos. A Figura 3 mostra a estrutura de cada circuito  $\pi$  utilizado na modelagem mencionada.

Figura 2 – Unidade infinitesimal do circuito  $\pi$



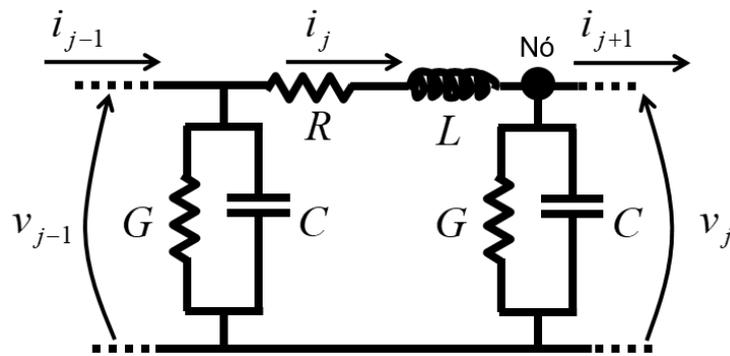
Fonte: [8]

De acordo com a Figura 3, foi realizado o equacionamento do quadripolo para determinar as tensões e correntes no circuito  $\pi$ , utilizando as Leis de Kirchhoff, leis

das malhas e nós. Nesta Figura 3 está sendo apresentado os circuitos  $\pi$  intermediários da linha de transmissão, variando da segunda unidade até a penúltima unidade do circuito  $\pi$ . A primeira unidade e a última unidade do circuito  $\pi$  são diferentes das demais, pois a primeira unidade é onde a tensão de entrada será inserida, e, a última unidade é considerada um terminal em aberto. Por esse motivo, os valores de capacitância e condutância são reduzidos pela metade. Com isso, os equacionamentos da malha para os circuitos intermediários são mostrados em (15):

$$v_{j-1} - Ri_j - Li_j - v_j = 0 \quad (15)$$

Figura 3 – Circuito  $\pi$  utilizando elementos concentrados para circuitos intermediários



Fonte: elaborado pelo autor

Portanto:

$$\dot{i}_j = \frac{1}{L}v_{j-1} - \frac{R}{L}i_j - \frac{1}{L}v_j \quad (16)$$

onde:  $R$  é a resistência,  $L$  é a indutância longitudinal da linha,  $v$  e  $i$  são as variáveis de estado, e  $j$  é a unidade relacionada ao circuito  $\pi$ .

Considerando o nó especificado para os circuitos  $\pi$  intermediários, o equacionamento da análise nodal é dado por:

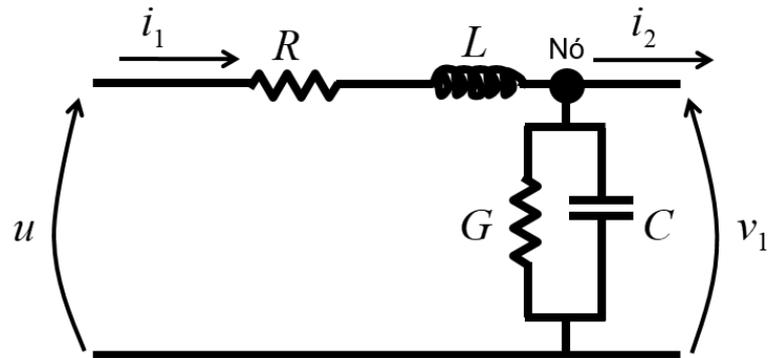
$$i_j - C\dot{v}_j - Gv_j - Gv_j - i_{j+1} = 0 \quad (17)$$

Assim:

$$\dot{v}_j = \frac{1}{C}i_j - \frac{G}{C}v_j - \frac{1}{C}i_{j+1} \quad (18)$$

onde:  $C$  é a capacitância e  $G$  a condutância transversais da linha.

As equações anteriores foram para determinar os valores de tensão e corrente dos circuitos  $\pi$  intermediários. A seguir, será apresentado os equacionamentos para a primeira unidade do circuito  $\pi$ , pela qual a tensão de entrada é aplicada, e será apresentada na Figura 4.

Figura 4 – Primeira unidade do circuito  $\pi$ 

Fonte: [8]

A tensão de entrada da linha de transmissão é dada por  $u$ . Os equacionamentos para a malha do primeiro circuito  $\pi$ .

$$u - Ri_1 - L\dot{i}_1 - v_1 = 0 \quad (19)$$

Então:

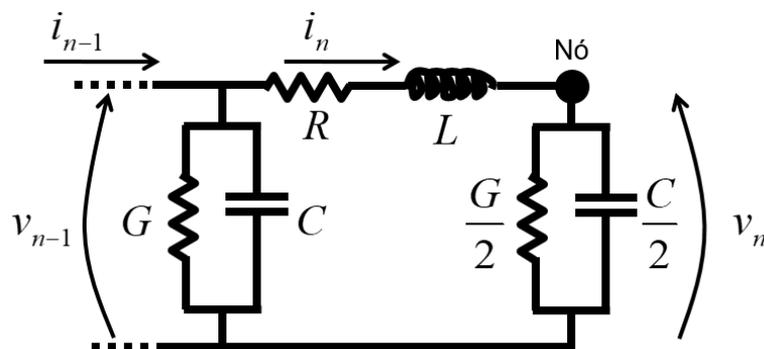
$$\dot{i}_1 = \frac{1}{L}u - \frac{R}{L}i_1 - \frac{1}{L}v_1 \quad (20)$$

Os equacionamentos da análise nodal para o nó especificado do primeiro circuito  $\pi$  é dado por:

$$i_1 - C\dot{v}_1 - Gv_1 - i_2 = 0 \quad (21)$$

Assim:

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{C}i_1 - \frac{G}{C}v_1 - \frac{1}{C}i_2 \quad (22)$$

Figura 5 – Última unidade do circuito  $\pi$ 

Fonte: [8]

Com isso, as equações de tensão e corrente para o primeiro circuito  $\pi$  foram apresentados nas equações (19-22). A seguir, serão apresentadas as equações para

o último circuito  $\pi$ , onde é considerado o terminal de carga em aberto. Este circuito será apresentado na Figura 5.

As equações de malha para a última unidade do circuito  $\pi$  é dada por:

$$v_{n-1} - Ri_n - L\dot{i}_n - v_n = 0 \quad (23)$$

Portanto,

$$\dot{i}_n = \frac{1}{L}v_{n-1} - \frac{R}{L}i_n - \frac{1}{L}v_n \quad (24)$$

sendo que  $n$  é referente a última unidade.

Já as equações da análise nodal para o nó especificado para a última unidade são apresentadas a seguir.

$$i_n - \frac{C}{2}\dot{v}_n - \frac{G}{2}v_n = 0 \quad (25)$$

Assim,

$$\dot{v}_n = \frac{2}{C}i_n - \frac{G}{C}v_n \quad (26)$$

Com essas equações apresentadas anteriormente, foram determinadas todas as equações de tensão e corrente para todas as unidades de circuitos  $\pi$  clássico.

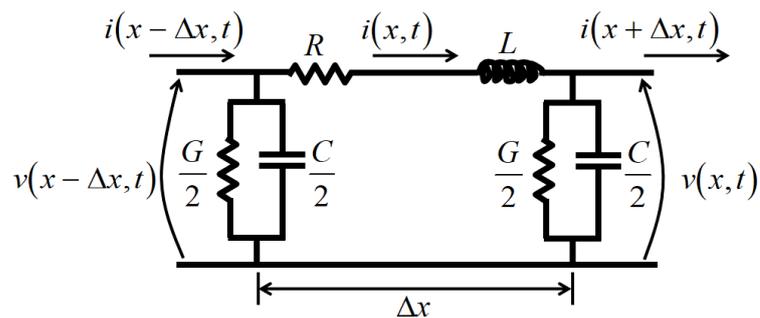
### 2.3 Transformação Modal

A duração de fenômenos transitórios eletromagnéticos é desprezível, quando comparada à duração de fenômenos associados ao funcionamento de redes elétricas, circuitos elétricos e sistemas de potência em regime permanente. Por outro lado, a maior parte de sobretensões e sobrecorrentes estão associadas ou ocorrem durante um fenômeno transitório eletromagnético, em tais sistemas elétricos. A origem desse tipo de desequilíbrio transitório, no funcionamento de um sistema elétrico, pode estar relacionada a alterações na estrutura desse sistema, tais como, abertura ou fechamento de chaves automáticas e ocorrência de curtos-circuitos. Esses desequilíbrios também podem ser gerados por transferência de alta potência elétrica, em um curto intervalo de tempo, entre sistemas diferentes ou isolados entre si. Nesse caso, podem ser mencionadas as descargas elétricas atmosféricas que atingem redes de fornecimento, distribuição e transmissão de energia elétrica, bem como, instalações de telefonia e transmissão de dados. Em todos esses casos, durante o fenômeno transitório, a energia é redistribuída e o sistema elétrico pode ser redirecionado para uma nova condição de regime permanente, ou, então, uma condição de instabilidade de tensão e corrente. Em caso de instabilidade, a condição

de funcionamento adequada do sistema elétrico, pode ser recuperada por meio da atuação de sistemas elétricos de proteção e coordenação. Em casos mais graves, os sistemas elétricos podem entrar em colapso, deixando de funcionar temporariamente ou permanentemente.

Fenômenos transitórios não atingem simultaneamente todas as partes de um sistema elétrico. Devido à grande extensão, ou a altíssima frequência do fenômeno transitório, relativamente à frequência de regime permanente de um sistema elétrico, ou ainda a esses dois últimos fatores, fenômenos transitórios levam um intervalo de tempo finito para atingir diferentes pontos de um sistema elétrico. É o caso de sistemas elétricos que podem ser modelados como linhas de transmissão. Nesse caso, podem ser citados dois importantes exemplos. O primeiro exemplo, engloba sistemas de transmissão de energia elétrica que se estendem por grandes extensões e trabalham em frequências de 50 ou 60 Hz, na maioria dos casos. O segundo exemplo, está relacionado a sistemas eletrônicos e de transmissão de dados, que podem não ter grandes dimensões, mas atuam em frequências muito superiores àquelas dos sistemas de potência (da ordem de GHz, atualmente) [1-10]. Uma unidade infinitesimal de linhas de transmissão pode ser modelada como mostra a Figura 6, onde os parâmetros são distribuídos ao longo da extensão dessa linha.

Figura 6 – Unidade infinitesimal utilizando parâmetros distribuídos



Fonte: elaborado pelo autor

Considerando a tensão,  $v(x, t)$ , e a corrente,  $i(x, t)$ , na unidade genérica da Figura 6, tem-se:

$$v(x - \Delta x, t) = R \cdot \Delta x \cdot i(x, t) + L \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + v(x, t) \quad (27)$$

Isolando a tensão no primeiro membro de (27), tem-se:

$$\frac{-v(x,t) + v(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = Ri(x,t) + L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad (28)$$

No caso da corrente, utilizando (27), tem-se:

$$\frac{-i(x,t) + i(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = Gv(x,t) + C \cdot \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \quad (29)$$

Considerando que a variação de comprimento é desprezível ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) em (28) e (29), equações diferenciais de linhas de transmissão são obtidas. Em (30) e (31), tais equações estão expressas em relação a tensões e correntes de fase de um sistema polifásico. Dessa forma,  $v_F$  é o vetor de tensões de fase,  $i_F$  é o vetor de correntes de fase,  $Z$  é a matriz de impedâncias longitudinais da linha e  $Y$  é a matriz de admitâncias da linha.

$$-\frac{\partial v_F}{\partial x} = Zi_F \quad (30)$$

$$-\frac{\partial i_F}{\partial x} = Yv_F \quad (31)$$

Com o objetivo de aplicar transformação de similaridade, obtendo  $Z$  e  $Y$  como matrizes diagonais, onde somente os elementos da diagonal principal não são nulos, em (30) e (31) são introduzidas as matrizes responsáveis por tal transformação. Essas matrizes,  $T_V$  e  $T_I$ , são autovetores.

$$-\frac{\partial v_F}{\partial x} = T_V^{-1} Z T_I i_F \quad (32)$$

$$-\frac{\partial i_F}{\partial x} = T_I^{-1} Y T_V v_F \quad (33)$$

Os autovetores não são únicos e são dependentes da frequência, se as matrizes  $Z$  e  $Y$  são dependentes da frequência. Os autovetores são independentes da variável  $x$ . Portanto, (32) e (33) podem ser reescritas deslocando uma das matrizes de transformação modal para o primeiro membro dessas expressões.

$$-\frac{\partial (T_V v_F)}{\partial x} = Z T_I i_F \quad (34)$$

$$-\frac{\partial (T_I i_F)}{\partial x} = Y T_V v_F \quad (35)$$

Simplificando (34) e (35), a mudança de base vetorial que foi aplicada neste caso tem sido denominada de transformação fase-modo ou transformação modal em aplicações relacionadas a linhas de transmissão. Dessa forma, a nova base vetorial,

ou domínio, obtida é denominada de domínio modal ou domínio dos modos. Portanto, os vetores de tensões modais ( $v_M$ ) e correntes modais ( $i_M$ ) são apresentados em (36), (37), (38) e (39).

$$-\frac{\partial(v_M)}{\partial x} = Zi_M \quad (36)$$

$$-\frac{\partial(i_M)}{\partial x} = Yv_M \quad (37)$$

$$v_M = T_V v_F \rightarrow v_F = T_V^{-1} v_M \quad (38)$$

$$i_M = T_I i_F \rightarrow i_F = T_I^{-1} i_M \quad (39)$$

Baseado em (32) e (33), as matrizes modais de impedâncias longitudinais ( $Z_M$ ) e admitâncias transversais ( $Y_M$ ) da linha, ou matrizes de impedâncias longitudinais e admitâncias transversais da linha no domínio modal, são definidas em (40) e (41). As matrizes  $Z_M$  e  $Y_M$  são matrizes diagonais, tendo elementos não nulos somente na diagonal principal de cada uma delas.

$$Z_M = T_V^{-1} Z T_I \quad (40)$$

$$Y_M = T_I^{-1} Y T_V \quad (41)$$

Uma forma de estabelecer relações entre  $Z_M$  e  $Y_M$  é utilizar a notação fasorial para definir os valores reais de  $v_F$  e  $i_F$ . Nesse caso, têm-se:

$$v_F = \text{Re} \left( \begin{bmatrix} V_{EF1} e^{\gamma_1 x} \\ V_{EF2} e^{\gamma_2 x} \\ \vdots \\ V_{EFn} e^{\gamma_n x} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right) \quad e \quad i_F = \text{Re} \left( \begin{bmatrix} I_{EF1} e^{\gamma_1 x} e^{j(\omega t + \theta_1)} \\ I_{EF2} e^{\gamma_2 x} e^{j(\omega t + \theta_2)} \\ \vdots \\ I_{EFn} e^{\gamma_n x} e^{j(\omega t + \theta_n)} \end{bmatrix} \right) \quad (42)$$

Em (42), são introduzidos valores eficazes de tensões de fase ( $V_{EF1}$ ,  $V_{EF2}$ , ...,  $V_{EFn}$ ) e valores eficazes de correntes de fase ( $I_{EF1}$ ,  $I_{EF2}$ , ...,  $I_{EFn}$ ). Completando a definição dos termos presentes em (42),  $\omega$  é a frequência angular do sistema elétrico analisado,  $n$  é o número de fases, os ângulos de  $\theta_1$  a  $\theta_n$  são as defasagens entre tensões e correntes de cada fase e os termos  $\gamma_1$  a  $\gamma_n$  são as constantes de propagação de cada fase.

Derivando (42) em função de  $x$ , o resultado é mostrado em (43). A derivada de (43) em função de  $x$  é mostrada em (44). Ou seja, a derivada de segunda ordem de (42) em função de  $x$  é mostrada em (44).

$$\frac{\partial v_F}{\partial x} = \operatorname{Re} \left( \begin{bmatrix} \gamma_1 V_{EF1} e^{\gamma_1 x} \\ \gamma_2 V_{EF2} e^{\gamma_2 x} \\ \vdots \\ \gamma_n V_{EFn} e^{\gamma_n x} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right) \quad e \quad \frac{\partial i_M}{\partial x} = \operatorname{Re} \left( \begin{bmatrix} \gamma_1 I_{EF1} e^{\gamma_1 x} e^{j(\omega t + \theta_1)} \\ \gamma_2 I_{EF2} e^{\gamma_2 x} e^{j(\omega t + \theta_2)} \\ \vdots \\ \gamma_n I_{EFn} e^{\gamma_n x} e^{j(\omega t + \theta_n)} \end{bmatrix} \right) \quad (43)$$

$$\frac{\partial^2 v_F}{\partial x^2} = \operatorname{Re} \left( \begin{bmatrix} \gamma_1^2 V_{EF1} e^{\gamma_1 x} \\ \gamma_2^2 V_{EF2} e^{\gamma_2 x} \\ \vdots \\ \gamma_n^2 V_{EFn} e^{\gamma_n x} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right) \quad e \quad \frac{\partial^2 i_F}{\partial x^2} = \operatorname{Re} \left( \begin{bmatrix} \gamma_1^2 I_{EF1} e^{\gamma_1 x} e^{j(\omega t + \theta_1)} \\ \gamma_2^2 I_{EF2} e^{\gamma_2 x} e^{j(\omega t + \theta_2)} \\ \vdots \\ \gamma_n^2 I_{EFn} e^{\gamma_n x} e^{j(\omega t + \theta_n)} \end{bmatrix} \right) \quad (44)$$

Em forma matricial, têm-se:

$$\frac{\partial^2 v_F}{\partial x^2} = \operatorname{Re}(\lambda_v V_{EF}) \quad e \quad \frac{\partial^2 i_F}{\partial x^2} = \operatorname{Re}(\lambda_I I_{EF}) \quad (45)$$

No caso, tem-se:

$$\lambda_v = \lambda_I = \begin{bmatrix} \gamma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_n^2 \end{bmatrix} = \lambda \quad (46)$$

O vetor de tensões eficazes é:

$$V_{EF} = \begin{bmatrix} V_{EF1} e^{\gamma_1 x} \\ V_{EF2} e^{\gamma_2 x} \\ \vdots \\ V_{EFn} e^{\gamma_n x} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \quad (47)$$

O vetor de correntes eficazes é:

$$I_{EF} = \begin{bmatrix} \gamma_1^2 I_{EF1} e^{\gamma_1 x} e^{j(\omega t + \theta_1)} \\ \gamma_2^2 I_{EF2} e^{\gamma_2 x} e^{j(\omega t + \theta_2)} \\ \vdots \\ \gamma_n^2 I_{EFn} e^{\gamma_n x} e^{j(\omega t + \theta_n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1^2 I_{EF1} e^{\gamma_1 x} e^{j\omega t} e^{j\theta_1} \\ \gamma_2^2 I_{EF2} e^{\gamma_2 x} e^{j\omega t} e^{j\theta_2} \\ \vdots \\ \gamma_n^2 I_{EFn} e^{\gamma_n x} e^{j\omega t} e^{j\theta_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{EF1} e^{\gamma_1 x} e^{j\theta_1} \\ I_{EF2} e^{\gamma_2 x} e^{j\theta_2} \\ \vdots \\ I_{EFn} e^{\gamma_n x} e^{j\theta_n} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \quad (48)$$

Derivando (30) e (31), têm-se:

$$-\frac{\partial^2 v_F}{\partial x^2} = Z \frac{\partial i_F}{\partial x} \quad e \quad -\frac{\partial^2 i_F}{\partial x^2} = Y \frac{\partial v_F}{\partial x} \quad (49)$$

Substituindo (30) e (31) em (49), têm-se:

$$\frac{\partial^2 v_F}{\partial x^2} = ZYv_F \quad e \quad \frac{\partial^2 i_F}{\partial x^2} = YZi_F \quad (50)$$

Considerando o domínio complexo, as derivadas de segunda ordem correspondem ao fasor negativo da variável correspondente em (50). Como o valor no domínio do tempo é a parte real desse número complexo, sendo que a parte real é determinada por meio de função cossenoidal, a relação em (50) pode ser estabelecida utilizando apenas o fasor. Dessa forma, têm-se:

$$\lambda_V V_{EF} = ZYV_{EF} \quad e \quad \lambda_I I_{EF} = YZI_{EF} \quad (51)$$

Aplicando a transformação modal em (51), têm-se:

$$\lambda_V T_V^{-1} V_M = ZYT_V^{-1} V_M \quad e \quad \lambda_I T_I^{-1} I_M = YZT_I^{-1} I_M \quad (52)$$

Simplificando (52), na qual  $V_M$  é o fasor de tensão no domínio modal e  $I_M$  é o fasor de correntes no domínio modal, têm-se:

$$\lambda_V T_V^{-1} V_M = ZYT_V^{-1} V_M \quad e \quad \lambda_I T_I^{-1} I_M = YZT_I^{-1} I_M \quad (53)$$

Multiplicando as expressões em (53) pelas matrizes de transformação modal correspondentes, têm-se:

$$T_V \lambda_V T_V^{-1} V_M = T_V ZYT_V^{-1} V_M \quad e \quad T_I \lambda_I T_I^{-1} I_M = T_I YZT_I^{-1} I_M \quad (54)$$

As matrizes  $\lambda_V$  e  $\lambda_I$  são matrizes diagonais. Dessa forma, têm-se:

$$T_V \lambda_V = \lambda_V T_V \quad e \quad T_I \lambda_I = \lambda_I T_I \quad (55)$$

Aplicando (55) em (54), têm-se:

$$\begin{aligned} \lambda_V T_V T_V^{-1} V_M &= T_V ZYT_V^{-1} V_M \quad \rightarrow \quad \lambda_V V_M = T_V ZYT_V^{-1} V_M \\ \lambda_I T_I T_I^{-1} I_M &= T_I YZT_I^{-1} I_M \quad \rightarrow \quad \lambda_I I_M = T_I YZT_I^{-1} I_M \end{aligned} \quad (56)$$

Comparando os termos em (56), é possível concluir que:

$$\lambda_V = T_V ZYT_V^{-1} \quad e \quad \lambda_I = T_I YZT_I^{-1} \quad (57)$$

As relações apresentadas em (57) podem ser utilizadas em métodos numéricos iterativos para determinar as matrizes de transformação modal.

Utilizando (40) e (42) para determinar as multiplicações entre  $Z_M$  e  $Y_M$ , têm-se:

$$Z_M Y_M = T_V^{-1} ZYT_V = \lambda_M \quad e \quad Y_M Z_M = T_I^{-1} YZT_I = \lambda_I \quad (58)$$

Aplicando (46), tem-se:

$$\lambda = Z_M Y_M = Y_M Z_M \quad (59)$$

Considerando (46) e (58), pode ser concluído que:

$$T_V^{-1} = T_I^T \quad e \quad T_I^{-1} = T_V^T \quad (60)$$

Para linhas bifásicas equilibradas eletricamente e balanceadas mecanicamente, as matrizes  $Z$  e  $Y$  tem a estrutura mostrada em (61). Nesse caso,  $Z_{PF}$  é a impedância própria de fase,  $Z_{MF}$  é a impedância mútua de fase,  $Y_{PF}$  é a admitância própria de fase e  $Y_{MF}$  é a admitância mútua de fase.

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{PF} & Z_{MF} \\ Z_{MF} & Z_{PF} \end{bmatrix} \quad e \quad Y = \begin{bmatrix} Y_{PF} & Y_{MF} \\ Y_{MF} & Y_{PF} \end{bmatrix} \quad (61)$$

Os autovetores são iguais e independentes da frequência para esse tipo de linha de transmissão, mesmo que  $Z$  e  $Y$  sejam dependentes da frequência. Uma solução possível é:

$$T_V = T_I = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad e \quad T_V^{-1} = T_I^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Em (62), os autovetores são matrizes cujos determinantes têm módulos unitários. Aplicando tais autovetores, as matrizes  $Z_M$  e  $Y_M$  são:

$$Z_M = \begin{bmatrix} Z_{PF} + Z_{MF} & 0 \\ 0 & Z_{PF} - Z_{MF} \end{bmatrix} \quad e \quad Y_M = \begin{bmatrix} Y_{PF} + Y_{MF} & 0 \\ 0 & Y_{PF} - Y_{MF} \end{bmatrix} \quad (63)$$

Os autovalores são:

$$\lambda = \begin{bmatrix} (Z_{PF} + Z_{MF})(Y_{PF} + Y_{MF}) & 0 \\ 0 & (Z_{PF} - Z_{MF})(Y_{PF} - Y_{MF}) \end{bmatrix} \quad (64)$$

Geralmente, as fases de um sistema de potência bifásico são denominadas de polos. Dessa forma, há o polo positivo e o polo negativo em uma linha de transmissão desse tipo de sistema elétrico. Nesse caso, o vetor de tensões no domínio das fases é composto pela tensão de polo positivo ( $v_{P+}$ ) e a tensão de polo negativo ( $v_{P-}$ ). O vetor de tensões no domínio dos modos é:

$$v_M = T_V v_F = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} v_F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{P+} \\ v_{P-} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v_{P+} + v_{P-} \\ v_{P+} - v_{P-} \end{bmatrix} \quad (65)$$

Por analogia, o vetor de correntes no domínio das fases é composto pela corrente de polo positivo ( $i_{P+}$ ) e corrente de polo negativo ( $i_{P-}$ ), gerando o vetor de correntes no domínio dos modos mostrado em (65).

$$i_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i_{P+} + i_{P-} \\ i_{P+} - i_{P-} \end{bmatrix} \quad (66)$$

## 2.4 Matriz 2x2

As matrizes de ordem 2x2 representam cada unidade do circuito  $\pi$  clássico, podendo substituir a matriz de grande ordem, que representa toda a cascata [8]. Mas, como as matrizes 2x2 representam apenas uma unidade, necessita obter uma matriz de ordem 2x2 para cada circuito  $\pi$  da cascata. Com isso, as variáveis de estado de cada circuito (tensão e corrente) são atualizadas de maneira independente das demais unidades. A influência das unidades anteriores e posteriores são aproximadas e introduzidas na variável de atualização.

A análise para as matrizes de ordem 2, há um *looping* lógico de  $n$  vezes a cada passo de tempo, sendo  $n$  o número de circuitos  $\pi$ . Essa forma de análise, resulta em uma boa precisão. No entanto, apresenta um limite de estabilidade numérica, devido ao método numérico aplicado, que relaciona o passo de tempo e a quantidade de circuitos  $\pi$  na cascata analisada. Já no caso da matriz de grande ordem, essa matriz é analisada apenas uma única vez a cada passo de tempo.

Seguindo o mesmo seguimento da análise da matriz 2x2, para circuitos  $\pi$  clássicos, realizada por [8], foi feito o desenvolvimento para os circuitos  $\pi$  com a resistência de amortecimento. Isso foi a base principal do início do desenvolvimento da pesquisa, pois, o primeiro passo para a análise do circuito é o limite de estabilidade, de acordo com o método numérico e precisão do sistema para matrizes 2x2. Com isso, identifica-se qual a curva de estabilidade e precisão que pode ser seguida.

Para estruturar a atualização de cada unidade de circuito  $\pi$  separadamente, a integração trapezoidal é aplicada para cada variável de estado. Em (67), é apresentada a expressão de corrente obtida com a aplicação da integração trapezoidal, considerando um circuito  $\pi$  intermediário da cascata que representa linhas de transmissão.

$$\left. \frac{\Delta i_j}{\Delta t} \right|_{\Delta t \rightarrow 0} \approx \frac{di_j}{dt} = \dot{i}_j \Rightarrow i_j(t_1 + \Delta t) - i_j(t_1) = \frac{\Delta t}{2} \left[ \dot{i}_j(t_1 + \Delta t) + \dot{i}_j(t_1) \right] \quad (67)$$

A integração trapezoidal é uma aproximação da área abaixo de uma curva, utilizando soma de diversos trapézios de tamanho infinitesimais. No caso em (68), o termo  $t_1$  será substituído por  $k$  e o termo  $t_1 + \Delta t$  será substituído por  $K+1$ .

$$i_j(k+1) = i_j(k) + \frac{\Delta t}{2} \left[ \dot{i}_j(k+1) + \dot{i}_j(k) \right] \quad (68)$$

Introduzindo (16) em (68), a atualização da corrente de uma unidade de circuito  $\pi$  é mostrada em (69).

$$i_j(k+1) = i_j(k) + \frac{\Delta t}{2L} [v_{j-1}(k+1) - Ri_j(k+1) - v_j(k+1) + v_{j-1}(k) - Ri_j(k) - v_j(k)] \quad (69)$$

Em (69), os termos  $i_j(k+1)$ ,  $i_j(k)$ ,  $v_j(k+1)$  e  $v_j(k)$  são utilizados para compor o sistema matricial, para a atualização da unidade  $j$  da cascata de circuitos  $\pi$ . O termo  $v_{j-1}(k+1)$  é conhecido, pois a unidade  $(j-1)$  é atualizada antes da unidade  $j$ . O termo  $v_{j-1}(k)$  não é mais conhecido, pois foi substituído por sua atualização, ou seja,  $v_{j-1}(k+1)$ . Dessa forma, o termo  $v_{j-1}(k)$  será aproximado, utilizando o método de Euler e o valor de  $v_{j-1}(k+1)$  [8].

A aplicação da integração trapezoidal em relação à tensão da unidade  $j$  da cascata de circuitos  $\pi$ , tem-se:

$$v_j(k+1) = v_j(k) + \frac{\Delta t}{2} [\dot{v}_j(k+1) + \dot{v}_j(k)] \quad (70)$$

No caso da atualização da tensão, tem-se:

$$v_j(k+1) = v_j(k) + \frac{\Delta t}{2C} [i_j(k+1) - Gv_j(k+1) - i_{j+1}(k+1) + i_j(k) - Gv_j(k) - i_{j+1}(k)] \quad (71)$$

Em (71), os termos  $i_j(k+1)$ ,  $i_j(k)$ ,  $v_j(k+1)$  e  $v_j(k)$  são utilizados para compor o sistema matricial para a atualização da unidade  $j$  da cascata de circuitos  $\pi$ . O termo  $i_{j+1}(k)$  é conhecido, pois a *unidade*  $(j+1)$  ainda não foi atualizada e o termo  $i_{j+1}(k+1)$  ainda não é conhecido pela mesma razão. Dessa forma, o termo  $i_{j+1}(k+1)$  será aproximado, utilizando o método de Euler e o valor de  $i_{j+1}(k)$ .

A atualização das unidades intermediárias é obtida por [8]:

$$\begin{bmatrix} i_j(k+1) \\ v_j(k+1) \end{bmatrix} = M_5 \left\{ M_6 \begin{bmatrix} i_j(k) \\ v_j(k) \end{bmatrix} + M_7 \begin{bmatrix} i_{j-1}(k+1) \\ v_{j-1}(k+1) \end{bmatrix} + M_3 \begin{bmatrix} i_{j+1}(k) \\ v_{j+1}(k) \end{bmatrix} \right\} \quad (72)$$

Considerando a linha conectada a uma fonte de tensão, a atualização da primeira unidade é obtida por [8]:

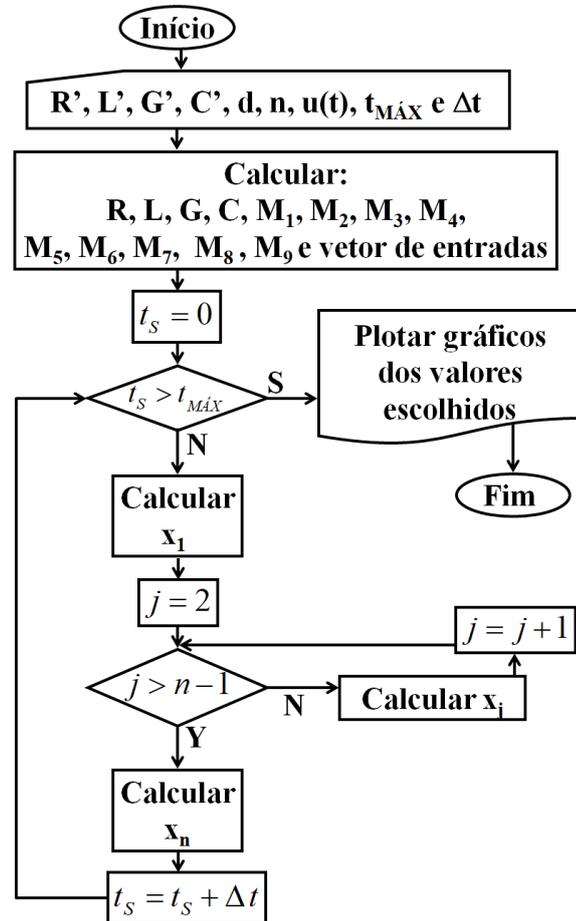
$$\begin{bmatrix} i_1(k+1) \\ v_1(k+1) \end{bmatrix} = M_1 \left\{ M_2 \begin{bmatrix} i_1(k) \\ v_1(k) \end{bmatrix} + M_3 \begin{bmatrix} i_2(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} + M_4 [u(k+1) + u(k)] \right\} \quad (73)$$

Considerando o terminal de carga em aberto, a atualização da última unidade é obtida por [8]:

$$\begin{bmatrix} i_1(k+1) \\ v_1(k+1) \end{bmatrix} = M_1 \left\{ M_2 \begin{bmatrix} i_1(k) \\ v_1(k) \end{bmatrix} + M_3 \begin{bmatrix} i_2(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} + M_4 [u(k+1) + u(k)] \right\} \quad (74)$$

Na Figura 7 é mostrado o algoritmo para simulações de transitórios, utilizando a atualização independente de cada unidade de circuito  $\pi$ .

Figura 7 – Fluxograma das simulações utilizando matrizes 2x2



Fonte: elaborado pelo autor

## 2.5 Matrizes esparsas

As linhas de transmissão são sistemas elétricos, usados para transmitir energia eletromagnética, por meio de cabos ou guias de ondas. Os modelos mais simples são baseados em unidades infinitesimais e representados por componentes concentrados. Podendo ser circuitos T ou circuitos  $\pi$ , e no caso desse trabalho, são analisados os circuitos  $\pi$ . No entanto, para representar a linha de transmissão, é necessário um grande número de circuitos  $\pi$  em cascata, pois os parâmetros elétricos são distribuídos ao longo da linha. Por esse motivo, podem ser introduzidas modificações na estrutura do circuito ou na aplicação do método de integração numérica, para as simulações dos transientes eletromagnéticos, nas linhas de

transmissão. Pode ser utilizado um circuito de apenas uma fase. A cascata de fase única, pode ser associada a uma sequência de componentes simétricos, de duas ou três fases para linhas de transmissão. A cascata é descrita analiticamente, por variáveis de estado, tensão e corrente. São utilizadas técnicas de integração trapezoidal e de matrizes esparsas, para reduzir as oscilações numéricas e diminuir o uso da memória computacional, respectivamente, durante as simulações [20]. O resultado de maior eficácia para a utilização das matrizes esparsas, para a análise de linhas de transmissão, é quando estão sendo analisadas as matrizes de grande ordem, por possuírem uma grande quantidade de elementos nulos.

Na Tabela 1, são apresentadas as comparações entre resultados obtidos com a técnica de esparsidade e resultados obtidos sem essa técnica. Tais resultados foram baseados na simulação da propagação de um degrau de tensão, através da linha de transmissão. Já na Tabela 2, a redução de alocação de memória RAM, necessária para as simulações é apresentada. Esses resultados foram obtidos utilizando um processador *Ryzen 2600X* em 4 GHz, com memórias do tipo DDR4 2.400 MHz [21].

Tabela 1 – Aplicação esparsidade usando programa matemático.

Quantidade de circuitos $\pi$	Tempo computacional sem esparsidade (s)	Tempo computacional com esparsidade (s)
200	0,11	0,09
800	6,93	4,11
1000	10,96	6,74
2000	52,51	37,11

Fonte: elaborado pelo autor

Tabela 2 – Memória para armazenamento em simulações de transitórios.

Quantidade de circuitos $\pi$	Memória sem esparsidade (kB)	Memória com esparsidade (kB)
200	1250	21,85
800	20000	87,47
1000	31250	109,35
2000	125000	218,72

Fonte: elaborado pelo autor

A técnica de matrizes esparsas, tem como fundamento, matrizes que possuem a maior parte de seus elementos nulos. Para que seja definido uma matriz esparsa, a relação entre o número de elementos nulos e o total de elementos deve ser calculado, e, esse valor deve ser maior do que 0,5. O propósito das matrizes esparsas é

armazenar apenas elementos não nulos, que são aplicados nas matrizes. Com isso, é utilizado uma menor memória para o processo, e ocasiona também, em um menor tempo computacional [20].

### 3. MODELO PROPOSTO

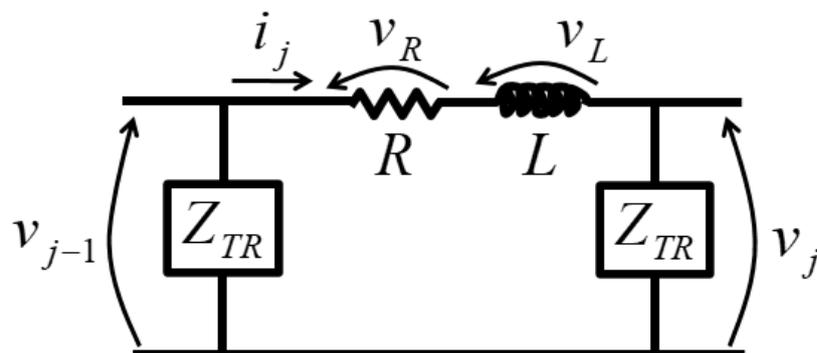
Neste capítulo serão apresentados os modelos propostos de resistências de amortecimento, para diminuir as oscilações numéricas apresentadas pelos circuitos  $\pi$  clássicos, para representação de linhas de transmissão.

O modelo proposto foi baseado na matriz de grande ordem e devido a esse fator, foram utilizadas as matrizes esparsas, apresentadas anteriormente. Essas matrizes resultam em um menor tempo computacional e uma menor utilização de memória.

#### 3.1 Equações diferenciais incluindo $R_s$

Os circuitos apresentados posteriormente estão relacionados aos circuitos que introduzem a resistência *shunt*. Essa resistência será acrescentada na parte transversal do circuito  $\pi$  em série com os elementos que estão em paralelo, sendo eles, uma capacitância e uma condutância. Na Figura 8, é observado um circuito  $\pi$  genérico, em que a parte transversal é representada por uma impedância transversal genérica. Já na Figura 9, essa impedância transversal é apresentada em forma de elementos concentrados para os circuitos  $\pi$  com a resistência *shunt*.

Figura 8 – Circuito  $\pi$  genérico



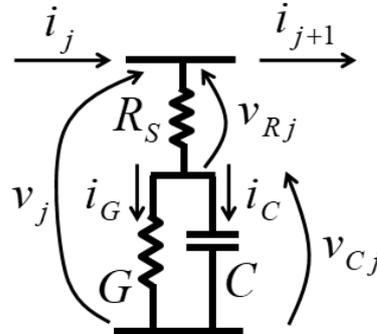
Fonte: elaborado pelo autor

O intuito de utilizar essa resistência *shunt* na parte transversal do circuito  $\pi$  é diminuir as oscilações numéricas que apresentam para o circuito  $\pi$  clássico [8]. A resistência *shunt* na parte transversal do circuito, faz com que, uma parte da corrente, seja desviada para a parte em que ela se encontra, ou seja, a parte transversal.

Foi desenvolvido o equacionamento numérico utilizando os mesmos princípios utilizados para determinar as variáveis de estado para o circuito  $\pi$  clássico, na sessão

2.2 deste documento. Essas equações serão apresentadas a seguir.

Figura 9 – Parte transversal do circuito  $\pi$  com a resistência *shunt*



Fonte: elaborado pelo autor

Primeiramente, será apresentado o equacionamento para os circuitos intermediários.

O equacionamento para a malha é apresentado por:

$$\dot{i}_j = \frac{1}{L} v_{j-1} - \frac{R}{L} i_j - \frac{1}{L} v_j \quad (75)$$

A análise nodal, no nó especificado é:

$$i_j - G v_{Cj} - C \dot{v}_{Cj} - i_{j+1} = 0 \quad (76)$$

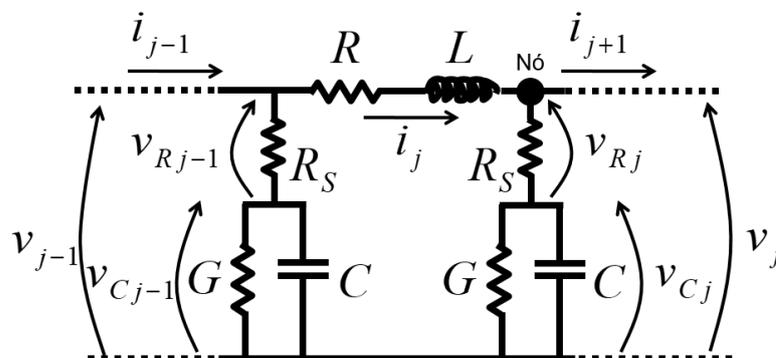
Sendo que  $v_{Cj}$  é dado por:

$$v_{Cj} = v_j - v_{Rsj} \quad (77)$$

E  $v_{Rsj}$  é representado a seguir:

$$v_{Rsj} = R_S (i_j - i_{j+1}) \quad (78)$$

Figura 10 – Circuito  $\pi$  intermediário com a resistência *shunt*



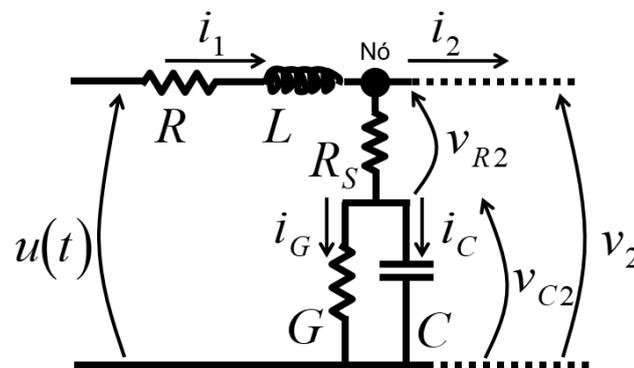
Fonte: elaborado pelo autor

Utilizando as equações (77-78) na equação (76), chega-se ao resultado:

$$\begin{aligned} \dot{v}_j &= \frac{R_s}{L} v_{j-1} + \frac{1}{C} \left[ 1 + R_s \left( G - \frac{RC}{L} \right) \right] i_j - \frac{1}{C} \left[ G + \frac{2R_s C}{L} \right] v_j + \\ & - \frac{1}{C} \left[ 1 + R_s \left( G - \frac{RC}{L} \right) \right] i_{j+1} + \frac{R_s}{L} v_{j+1} \end{aligned} \quad (79)$$

Então, a equação (75) representa a análise das malhas no circuito e a equação (79), a análise nodal para os circuitos intermediários. A próxima análise será para a primeira unidade do circuito  $\pi$ , onde é introduzida a tensão inicial na linha de transmissão, representada por  $u$  de acordo com a Figura 11.

Figura 11 – Primeira unidade do circuito  $\pi$  com a resistência *shunt*



Fonte: elaborado pelo autor

Para a primeira unidade do circuito  $\pi$ , é realizada a análise das malhas e a análise nodal. No primeiro momento, será apresentada a análise das malhas, que é feita da mesma maneira que foi realizada para o circuito anterior. No segundo momento, será apresentada a análise nodal.

Portanto, a análise das malhas é apresentada, na equação (80).

$$\dot{i}_1 = \frac{1}{L} u(t) - \frac{R}{L} i_1 - \frac{1}{L} v_1 \quad (80)$$

A análise nodal é representada por:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \frac{R_s}{L} u(t) + \frac{1}{C} \left[ 1 + R_s \left( G - \frac{RC}{L} \right) \right] i_1 - \frac{1}{C} \left[ G + \frac{2R_s C}{L} \right] v_1 + \\ & - \frac{1}{C} \left[ 1 + R_s \left( G - \frac{RC}{L} \right) \right] i_2 + \frac{R_s}{L} v_2 \end{aligned} \quad (81)$$

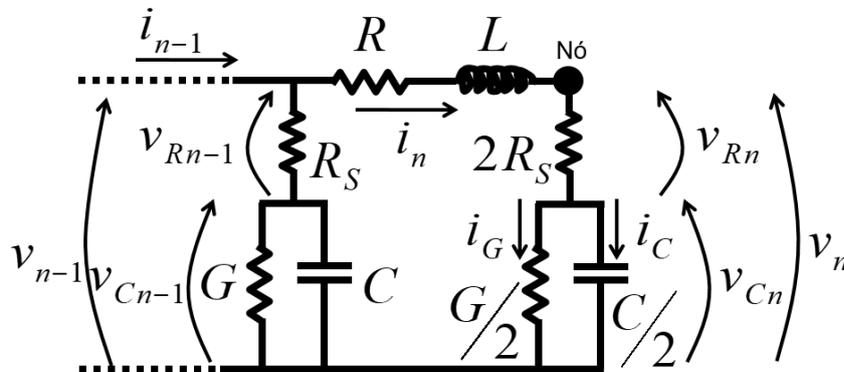
Dessa maneira, os equacionamentos para a primeira unidade do circuito  $\pi$  são mostrados nas equações (80) e (81). Pode-se então, ser apresentada a última unidade do circuito  $\pi$  utilizando a resistência *shunt* na parte transversal do circuito. A última unidade diferencia-se das demais, pelo fato de que a cascata de circuitos  $\pi$  está em

aberto. Portanto, na última unidade, os elementos da parte transversal são o dobro do que as demais unidades, de acordo com a Figura 12.

Como o final da cascata está em aberto, os elementos da parte transversal são duplicados. Por esse motivo, a resistência *shunt* duplica seu valor. Porém, quando os elementos estão em paralelo, esse valor é a metade. Isso acontece para a capacitância e a condutância, conforme pode ser observado na Figura 12. Espera-se que devido o terminal de carga da linha estar em aberto, a tensão no terminal de carga seja o dobro da tensão aplicada no terminal inicial da linha.

No último ramo transversal, seu valor é duplicado, pois não há outro circuito  $\pi$  em cascata, a essa última unidade. O valor real do ramo transversal do circuito  $\pi$  é conforme apresentado na última ramificação. Para os demais é diferente, pois os circuitos estão em cascata, e apresentam duas ramificações com os mesmos valores, um ao lado do outro. Para que seja representada apenas uma ramificação, é feito um cálculo para determinar o valor dos elementos equivalentes, que no caso, esse valor é o dobro do valor, para apenas uma ramificação.

Figura 12 – Última unidade do circuito  $\pi$  considerando a resistência *shunt*



Fonte: elaborado pelo autor

O equacionamento das malhas e nós são realizados da mesma maneira que para os demais circuitos. A análise das malhas é realizada e resulta em:

$$\dot{i}_n = \frac{1}{L} v_{n-1} - \frac{R}{L} i_n - \frac{1}{L} v_n \quad (82)$$

Já a análise nodal para a última unidade do circuito  $\pi$  utilizando a resistência *shunt* na parte transversal do circuito, obtêm-se:

$$i_n - \frac{G}{2} v_{C_n} - \frac{C}{2} \dot{v}_{C_n} = 0 \quad (83)$$

Nesse caso, a condição de  $v_{C_n}$  é:

$$v_{Cn} = v_n - v_{Rsn} \quad (84)$$

E o valor de  $v_{Rsn}$  é dado por:

$$v_{Rsn} = 2R_S i_n \quad (85)$$

Utilizando as equações (84-85) em (83), resulta-se:

$$\dot{v}_n = \frac{2R_S}{L} v_{n-1} + \frac{2}{C} \left[ 1 + R_S \left( G - \frac{RC}{L} \right) \right] i_n - \frac{2}{C} \left[ \frac{G}{2} + \frac{R_S C}{L} \right] v_n \quad (86)$$

As equações (82) e (86) mostram as equações das análises de malha e nodal, respectivamente, para a última unidade do circuito  $\pi$  com a resistência *shunt*.

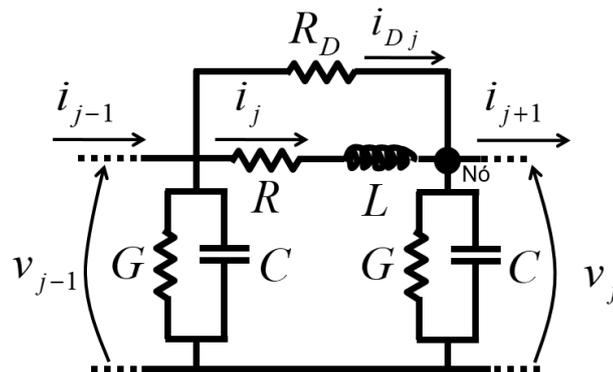
### 3.2 Equações diferenciais incluindo $R_D$

A proposta do trabalho é introduzir resistências em cada unidade do circuito  $\pi$ , para amenizar as oscilações numéricas, apresentadas pelos circuitos clássicos [8].

As equações a seguir, serão relacionadas aos circuitos  $\pi$  com resistência de amortecimento. Essa resistência de amortecimento é paralela à parte longitudinal do circuito, conforme pode ser observado na Figura 13.

A princípio, serão apresentadas as equações dos circuitos  $\pi$  intermediários com a resistência de amortecimento. Os circuitos intermediários considerados, são do segundo ao penúltimo circuito  $\pi$ .

Figura 13 – Circuito  $\pi$  intermediário com a resistência de amortecimento



Fonte: [20]

O equacionamento na malha é dado por:

$$\dot{i}_j = \frac{1}{L} v_{j-1} - \frac{R}{L} i_j - \frac{1}{L} v_j \quad (87)$$

Aplicando a análise nodal no nó especificado é obtida a relação:

$$i_j - i_{Dj} - i_G - i_C - i_{j+1} - i_{Dj+1} = 0 \quad (87)$$

Assim:

$$i_{Dj} = \frac{G_D}{G_j} i_j = G_D R i_j + G_D v_{Lj} = G_D R i_j + G_D L \dot{i}_j \quad (89)$$

Sendo que  $G_D$  é a condutância de amortecimento,  $i_D$  é a corrente que relaciona o ramo que se encontra a resistência de amortecimento.

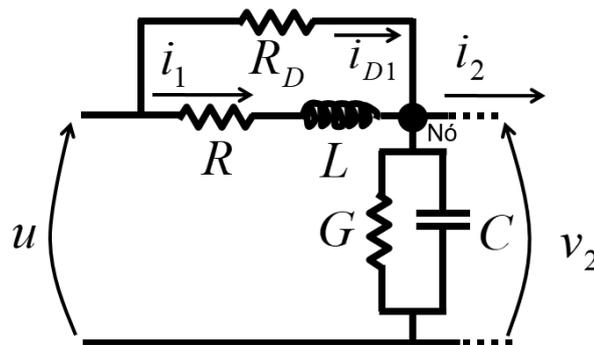
Aplicando a equação (89) em (88) temos:

$$\dot{v}_j = \frac{1}{C} i_j + \frac{G_D}{C} (v_{j-1} + v_{j+1}) - \frac{(G + 2G_D)v_j}{C} - \frac{1}{C} i_{j+1} \quad (90)$$

As equações (87) e (90) determinaram as equações de estado relacionadas as tensões e correntes para os circuitos  $\pi$  intermediários com a resistência de amortecimento.

A Figura 14 apresenta a primeira unidade do circuito  $\pi$  com a resistência de amortecimento. O primeiro circuito  $\pi$  é diferente dos circuitos intermediários, pois é onde a tensão de entrada é introduzida.

Figura 14 – Primeira unidade do circuito  $\pi$  com a resistência de amortecimento



Fonte: elaborado pelo autor

A equação de malha para a primeira unidade do circuito  $\pi$  é dada por:

$$\dot{i}_1 = \frac{1}{L} u - \frac{R}{L} i_1 - \frac{1}{L} v_1 \quad (91)$$

A equação da análise nodal para o nó especificado para a primeira unidade do circuito  $\pi$  é apresentada a seguir:

$$i_1 - i_{D1} - i_G - i_C - i_2 - i_{D2} = 0 \quad (92)$$

Após o desenvolvimento das equações, conforme é mostrado equação (89) resulta em:

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{C} i_1 + \frac{G_D}{C} u - \frac{(G + 2G_D)v_1}{C} - \frac{1}{C} i_2 + \frac{G_D}{C} v_2 \quad (93)$$

As equações (91) e (92) determinaram as equações de estado relacionadas as

tensões e correntes para o primeiro circuito  $\pi$  com a resistência de amortecimento.

O último circuito  $\pi$ , mostrado na Figura 15, é diferente dos anteriores, devido a ser o terminal de carga em aberto, por esse motivo, a capacitância e a condutância da carga é dividida pela metade.

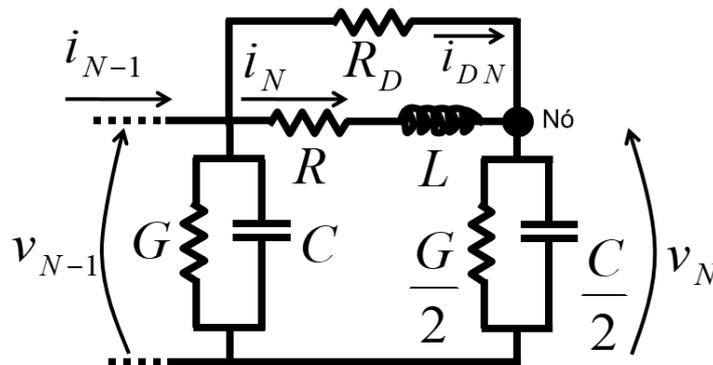
O equacionamento da análise da malha é apresentado por:

$$\dot{i}_n = \frac{1}{L}v_{n-1} - \frac{R}{L}\dot{i}_n - \frac{1}{L}v_n \quad (94)$$

A equação da análise nodal para o nó especificado, para a última unidade do circuito  $\pi$  é dada por:

$$i_n - i_{Dn} - i_G - i_C = 0 \quad (95)$$

Figura 15 – Última unidade do circuito  $\pi$  com a resistência de amortecimento



Fonte: elaborado pelo autor

Aplicando a equação (89) em (95):

$$\dot{v}_n = \frac{2}{C}\dot{i}_n + \frac{2G_D}{C}v_{n-1} - \frac{2}{C}\left(G_D + \frac{G}{2}\right)v_n \quad (96)$$

Assim, as equações (39) a (48) completam os equacionamentos para todos os circuitos  $\pi$ , com a introdução da resistência de amortecimento.

Conforme mencionado anteriormente, os valores para a última ramificação do circuito  $\pi$  são diferentes dos demais ramos. Para esse circuito, tem-se o mesmo princípio informado para o circuito que contém  $R_S$ .

### 3.3 Integração trapezoidal para o sistema

Para a introdução da integração trapezoidal, utiliza-se um sistema linear que representa uma linha de transmissão envolvendo variáveis de estado, de acordo com a equação (97). Os elementos representados em (97) são determinados de acordo com a estrutura dos circuitos  $\pi$ , usados para representar a linha de transmissão.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (97)$$

Nesse caso, o elemento  $A$  representa a matriz de componentes da cascata de circuitos  $\pi$ ,  $B$  a matriz de fontes ideais,  $x$  é o vetor de variáveis de estado e  $u$  é o vetor de entrada de dados.

Baseado na descrição dos circuitos  $\pi$  clássicos, ou seja, sem a inclusão de resistências de amortecimento,  $R_S$  ou  $R_D$ , os elementos do sistema linear mostrado em (97) são determinados e mostrados em (98-100). O vetor  $x$  é definido por:

$$x = [i_1 \quad v_1 \quad \dots \quad i_k \quad v_k \quad \dots \quad i_n \quad v_n]^T \quad (98)$$

Considerando que o primeiro circuito  $\pi$  da cascata está conectado a uma fonte de tensão, o vetor  $B$  é mostrado em (99).

$$B = \left[ \frac{1}{L} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right]^T \quad (99)$$

A matriz  $A$ , que é a matriz pela qual representa os elementos da cascata de circuitos  $\pi$  é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1/C & -G/C & -1/C & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1/L & -R/L & -1/L & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1/C & -G/C & -1/C & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1/L & -R/L & -1/L \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2/C & -G/C \end{bmatrix} \quad (100)$$

Nos circuitos  $\pi$  clássicos, os elementos longitudinais são a resistência ( $R$ ) e a indutância ( $L$ ). Já os elementos transversais são a condutância ( $G$ ) e a capacitância ( $C$ ). Os elementos  $R$ ,  $L$ ,  $G$  e  $C$  são parâmetros determinados pelos elementos baseados na linha, parâmetros por unidade de comprimento sendo eles  $R'$ ,  $L'$ ,  $G'$  e  $C'$  respectivamente. Em (101) é apresentada a relação entre os componentes concentrados e elementos distribuídos, sendo que  $d$  é o comprimento da linha de transmissão e  $n$  o número de circuitos  $\pi$  utilizados nessa representação da linha.

$$R = R' \frac{d}{n}, \quad L = L' \frac{d}{n}, \quad G = G' \frac{d}{n}, \quad C = C' \frac{d}{n} \quad (101)$$

A resistência de amortecimento ( $R_D$ ) é aplicada em paralelo com os elementos da parte longitudinal do circuito  $\pi$  que representa a linha de transmissão. Quando a linha de transmissão independente da frequência é representada por cascatas de circuito  $\pi$ . Cada resistência de amortecimento é relacionada ao valor de indutância ( $L$ ) da parte longitudinal do circuito  $\pi$  e o passo de tempo utilizado para análise.

A resistência *shunt* ( $R_S$ ) é introduzida em série com a parte transversal do

circuito  $\pi$ . O valor da resistência desses elementos está relacionado com a capacitância ( $C$ ) do circuito  $\pi$  e o passo de tempo aplicado para a simulação da parte transitória do sistema.

Essas relações são mostradas em (102), onde  $k_D$  e  $k_S$  são fatores proporcionais para determinação dos valores de  $R_D$  e  $R_S$ , respectivamente.

$$\begin{aligned} R_D &= k_D \frac{2L}{\Delta t} \quad e \quad G_D = \frac{\Delta t}{2k_D L} \\ R_S &= \frac{\Delta t}{2k_S C} \quad e \quad G_S = k_S \frac{2C}{\Delta t} \end{aligned} \quad (102)$$

A cascata de circuitos  $\pi$  modificados, ainda é baseada em um sistema linear, da mesma maneira que foi utilizada para a cascata de circuitos  $\pi$  clássicos. Portanto, utiliza-se a equação (105) para esses circuitos. No entanto, a estrutura da matriz  $A$  para os circuitos  $\pi$  modificados é diferente. Pode-se considerar uma mesma estrutura, tanto para circuitos  $\pi$  com a introdução da resistência de amortecimento, quanto para a resistência *shunt*. Porém, os valores dos elementos serão diferentes de acordo com as equações (104) e (106).

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_3 & a_4 & -a_3 & a_5 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_2 & a_1 & -a_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_5 & a_3 & a_4 & -a_3 & a_5 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_2 & a_1 & -a_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & a_2 & a_1 & -a_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2a_5 & 2a_3 & a_4 \end{bmatrix} \quad (103)$$

Considerando a aplicação da resistência de amortecimento  $R_D$ , os elementos apresentados em (103) são:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{R}{L} & a_2 &= \frac{1}{L} & a_3 &= \frac{1}{C} \\ a_4 &= -\frac{(2G_D + G)}{C} & a_5 &= \frac{G_D}{C} \end{aligned} \quad (104)$$

Considerando a fonte de tensão conectada ao início da linha de transmissão, o vetor  $B$  é representado por:

$$B = \left[ \frac{1}{L} \quad G_D/C \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \right]^T \quad (105)$$

No vetor  $B$ , para a resistência de amortecimento  $R_D$ , possui um elemento diferente do circuito  $\pi$  clássico, devido ao ramo onde está a resistência inserida no

circuito.

Levando em consideração a introdução da resistência *shunt* em todas as unidades da cascata de circuito  $\pi$ , as relações de alguns elementos são alteradas, sendo elas mostrados em (106). Existem elementos que são similares entre os componentes com a resistência de amortecimento e a resistência *shunt*, por esse motivo, os elementos não apresentados em (106) são similares ao que foi apresentado em (104). O vetor  $B$  também sofre alteração sendo representado em (107).

$$a_3 = \frac{1}{C} \left[ 1 + R_s \left( G - \frac{RC}{L} \right) \right] \quad a_4 = -\frac{1}{C} \left[ G + \frac{2R_s C}{L} \right] \quad (106)$$

$$a_5 = \frac{R_s}{L}$$

$$B = \left[ \frac{1}{L} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right]^T \quad (107)$$

Já para a resistência *shunt*, o vetor  $B$  é semelhante ao do circuito  $\pi$  clássico.

A relação geral entre o método de integração numérica e analítico de fenômenos físicos são descritos a seguir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \Big|_{\Delta t \rightarrow 0} \approx \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad (108)$$

A integração trapezoidal é baseada em uma aproximação de área abaixo de uma curva a partir de soma de diversas áreas de trapézios de tamanho infinitesimais. No caso de simulações de fenômenos transitórios é usada a relação (109).

$$\Delta x = x_{t_1 + \Delta t} - x_{t_1} \approx \int_{t_1}^{t_2} \dot{x} = \frac{\Delta t}{2} \left[ \dot{x}_{t_1} + \dot{x}_{t_2} \right] \quad (109)$$

$$x_{t_1} - x_{t_2} = \frac{\Delta t}{2} \left[ Ax_{t_1} + Bu_{t_1} + Ax_{t_2} + Bu_{t_2} \right]$$

Alterando as variáveis de (109), sendo que  $t_1$  passa ser  $K$  e  $t_2$  muda para  $(K+1)$ , então:

$$\left[ I - \frac{\Delta t}{2} A \right] x_{(K+1)} = \left[ I - \frac{\Delta t}{2} A \right] x_K + \frac{\Delta t}{2} B \left[ u_{(K+1)} + u_K \right] \quad (110)$$

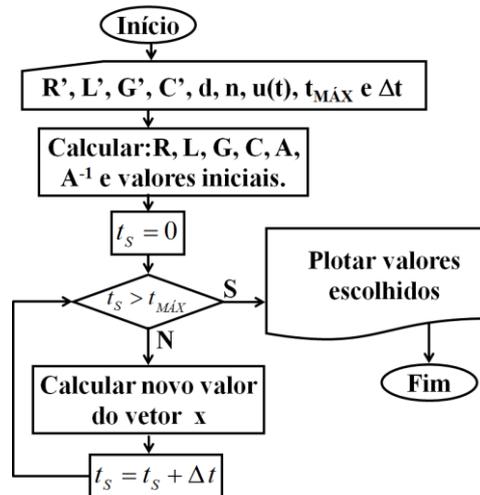
Sendo que  $I$  é a matriz identidade. Com isso, é obtido:

$$x(t_2) = A_1 x(t_1) + B_1 \left[ u(t_2) + u(t_1) \right] \quad (111)$$

Na equação (111), os elementos apresentados são descritos por:

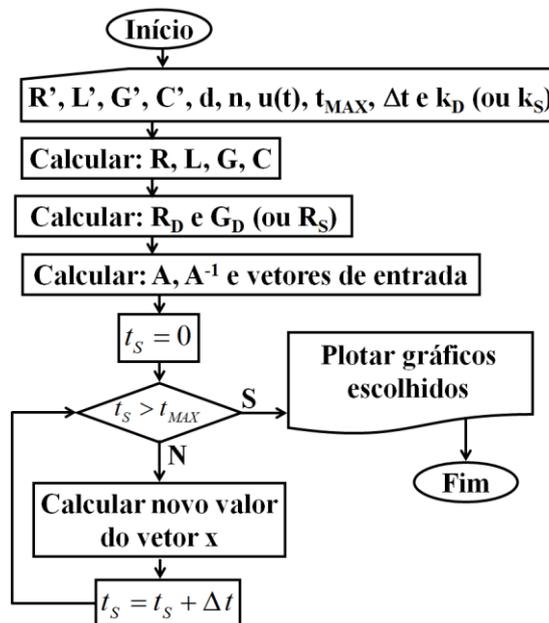
$$A_1 = \left[ I - \frac{\Delta t}{2} A \right]^{-1} \left[ I + \frac{\Delta t}{2} A \right] \quad B_1 = \left[ I - \frac{\Delta t}{2} A \right]^{-1} B \quad (112)$$

Figura 16 – Fluxograma para simulações de transitórios em linhas de transmissão sem a aplicação de resistência de amortecimento



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 17 – Fluxograma para simulações de transitórios em linhas de transmissão com a aplicação de resistência de amortecimento



Fonte: elaborado pelo autor

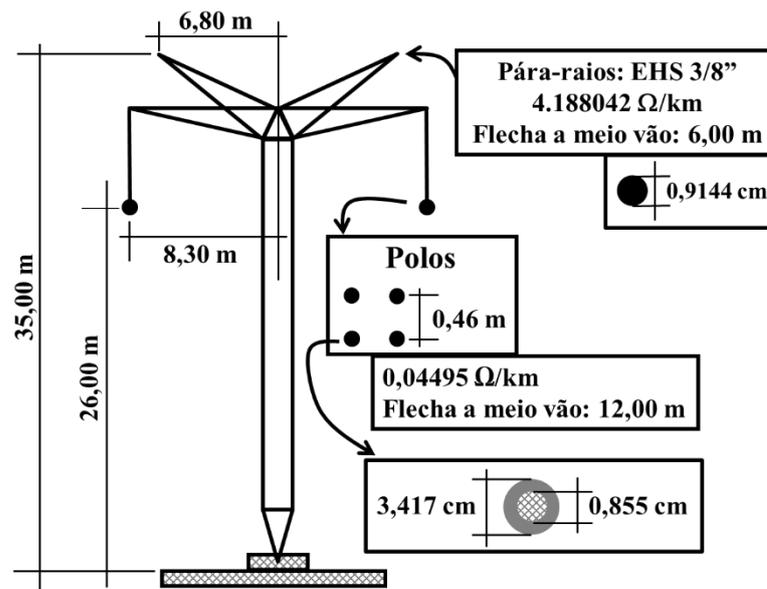
A Figura 16 mostra o algoritmo utilizado para realizar simulações de transitórios em linhas de transmissão sem a aplicação de resistências de amortecimento. A Figura 17 mostra o algoritmo para realizar simulações de transitórios em linhas de transmissão com a aplicação de resistências de amortecimento,  $R_S$  e  $R_D$ .

## 4 RESULTADOS

Nessa sessão serão apresentados os resultados obtidos com a aplicação de resistências de amortecimento representadas pelos elementos  $R_S$  e  $R_D$  nos circuitos  $\pi$ . Como a linha bifásica que se deseja representar foi dividida por meio da aplicação da transformação fase-modo em dois polos ou modos monofásicos e desacoplados. Esses polos serão chamados de polo homopolar e polo  $\alpha$ , e os gráficos apresentados a seguir serão relacionados a cada um desses polos ou modos para ambas as resistências de amortecimento ( $R_S$  e  $R_D$ ) inseridas no circuito [22]. As simulações apresentadas a seguir são para representar o comportamento das linhas de transmissão de Itaipu.

Na Figura 18, um esquema da torre característica de linha em HVDC (*high-voltage direct current*) que conecta a hidrelétrica de Itaipu ao Sistema Elétrico Brasileiro, cuja extensão é de aproximadamente 1600 km. O terminal de alimentação dessa linha está localizado na estação retificadora em Foz do Iguaçu, no Paraná. O terminal de interligação dessa linha com o Sistema Elétrico Brasileiro está na estação inversora de São Roque, em São Paulo. Há ainda uma subestação de controle de reativos localizada aproximadamente na metade da extensão dessa linha. Essa Figura 18, foi baseada em [23]. A resistividade do solo foi considerada como 1000  $\Omega \cdot m$ .

Figura 18 – Torre característica da linha em HVDC de Itaipu.

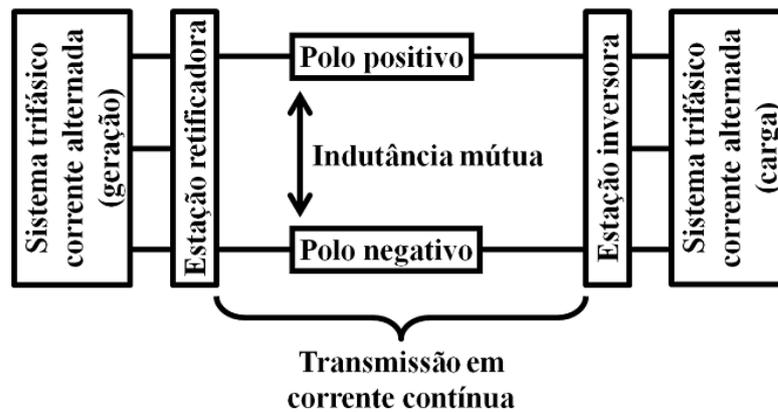


Fonte: elaborado pelo autor

Utilizando os dados da Figura 18, os parâmetros de linha são obtidos.

Desconsiderando a influência da frequência e tomando a frequência em regime permanente do sistema em corrente alternada que alimenta a estação retificadora (60 Hz), os parâmetros da linha são determinados. Foi utilizada tal frequência, pois as ondas de tensão e corrente que são retificadas para gerar as ondas de tensão e corrente em HVDC têm essa frequência em regime permanente. O sistema de transmissão da hidrelétrica de Itaipu pode ser esquematizado conforme a Figura 19.

Figura 19 – Esquema do sistema em HVDC da hidrelétrica de Itaipu.



Fonte: elaborado pelo autor

As matrizes de impedâncias longitudinais e de capacitâncias transversais que são obtidas utilizando a Figura 18 são apresentadas em (113) e em (114).

$$Z' = \begin{bmatrix} Z_{PF} & Z_{MF} \\ Z_{MF} & Z_{PF} \end{bmatrix} \quad (113)$$

$$Y' = C' = \begin{bmatrix} C_{PF} & C_{MF} \\ C_{MF} & C_{PF} \end{bmatrix} \quad (114)$$

Em (113),  $Z_{\alpha}$  é a impedância própria do polo  $\alpha$ ,  $Z_0$  é a impedância própria do modo homopolar e  $Z_{\alpha 0}$  é a impedância mútua entre os polos. Em (114),  $C_{\alpha}$  é a capacitância própria do polo  $\alpha$ ,  $C_0$  é a capacitância própria do modo homopolar e  $C_{\alpha 0}$  é a capacitância mútua entre os polos. Em (113) e (114), são fornecidos os parâmetros distribuídos da linha considerada. Ou seja, em função da unidade de extensão da linha. Os elementos em (113) e (114) são:

$$\begin{aligned} Z_{PF} &= 70,0722775 + j\omega 7,14510711 \cdot 10^{-1} \text{ m}\Omega / \text{km} \\ Z_{MF} &= 58,3619941 + j\omega 3,84491343 \cdot 10^{-1} \text{ m}\Omega / \text{km} \\ C_{PF} &= 23,3294412 \text{ nF} / \text{km} \\ C_{MF} &= -3,10763236 \text{ nF} / \text{km} \end{aligned} \quad (115)$$

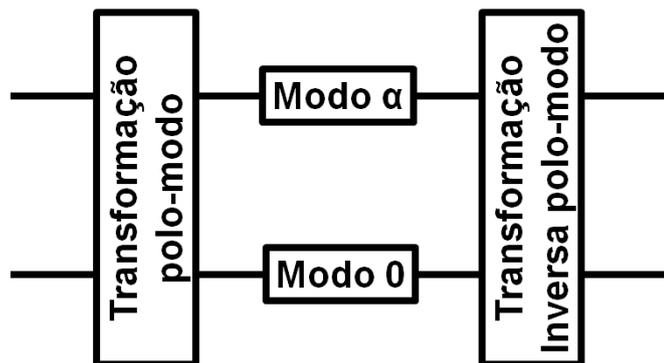
Aplicando transformação de similaridade (transformação de espaço de estado) ou, conforme denominação da área de sistemas de potência, transformação fase-modo (polo-modo, para linhas bifásicas), as matrizes modais são mostradas em (116). O esquema na Figura 20 mostra a transformação polo-modo é aplicada na prática. Utilizando (63), têm-se:

$$Z_M = \begin{bmatrix} Z_0 & 0 \\ 0 & Z_\alpha \end{bmatrix} \quad e \quad C_M = \begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & C_\alpha \end{bmatrix} \quad (116)$$

Em (116), os elementos são:

$$\begin{aligned} Z_0 &= 128,432716 + j\omega 1,099002054 \text{ m}\Omega / \text{km} \\ Z_\alpha &= 11,7102834 + j\omega 3,30019368 \cdot 10^{-1} \text{ m}\Omega / \text{km} \\ C_0 &= 20,22180884 \text{ nF} / \text{km} \\ C_\alpha &= 26,43707356 \text{ nF} / \text{km} \end{aligned} \quad (117)$$

Figura 20 – Esquema de aplicação da transformação polo-modo.



Fonte: elaborado pelo autor

#### 4.1 Polo homopolar ou polo 0

Para determinar a velocidade de propagação da onda no modo homopolar desconsiderando perdas, deve-se desconsiderar os valores de resistência ( $R$ ) e condutância ( $G$ ). Utilizando (118), encontra-se a velocidade de propagação da onda que relaciona a indutância e capacitância da linha de transmissão para o polo 0, tem-se:

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = 212124,46 \text{ km} / \text{s} \quad (118)$$

Sendo que  $L_0 = 1,099002054 \text{ mH}$  e  $C_0 = 20,22180884 \text{ nF}$ .

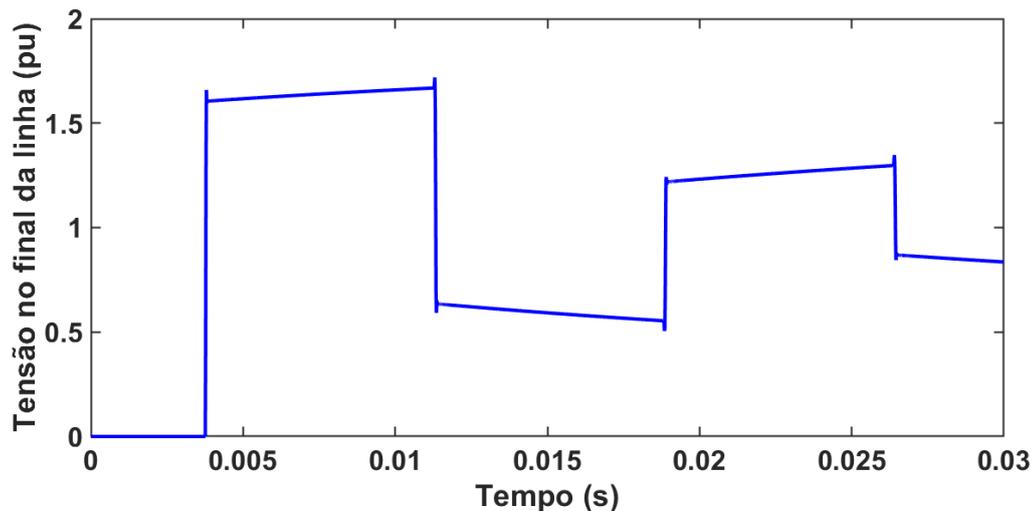
A distância entre a subestação de Itaipu e São Roque é de aproximadamente 1600 km. Porém, existe uma estação de controle de reativo na metade do percurso.

Portanto, o tempo necessário para a onda percorrer o trajeto da subestação de Itaipu até esse ponto médio (aproximadamente 800 km) é dado por:

$$t_0 = \frac{d_0}{v_0} = 3,771 \text{ ms} \quad (119)$$

Sendo que  $d_0 = 800 \text{ km}$  e  $v_0$  é identificado em (118).

Figura 21 – Utilizando a matriz 2x2 para determinar a estabilidade do sistema



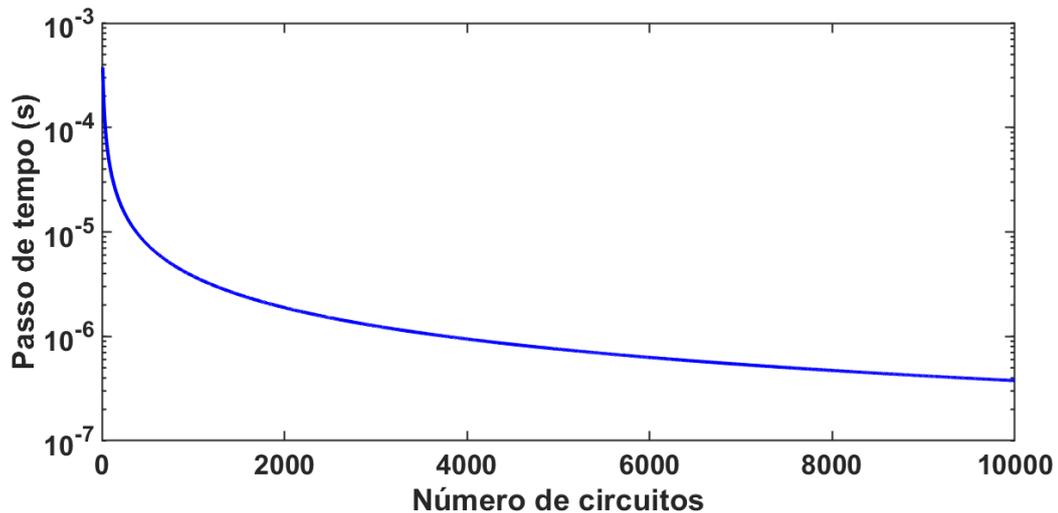
Fonte: elaborado pelo autor

Para a simulação inicial, consideramos um valor de tempo de simulação de 10 vezes o valor do tempo de propagação da onda. Isso é aplicado para seja possível observar alguns ciclos de reflexão e refração da onda nos terminais do polo. Para determinação dos melhores valores dos parâmetros numéricos que influenciam nos resultados obtidos nas simulações (número de circuitos  $\pi$ , passo de integração e resistência de amortecimento), um degrau de tensão é introduzido no terminal inicial do polo e, após propagação por esse polo, a onda recebida no terminal final da linha é analisada. O degrau de tensão é utilizado, pois, baseado na transformada de Fourier, tal sinal é decomposto em uma soma infinita de sinais senoidais com amplitude decrescente e frequência crescente. É um tipo de calibração e para isso, foi utilizada uma rotina numérica baseada em transformada de Laplace para cujos resultados são utilizados para comparar das formas de onda e estimar os erros relacionados à rotina numérica proposta neste trabalho.

Inicialmente, foram determinados os melhores valores da quantidade de circuitos  $\pi$  e do passo de tempo. Valores adequados do passo de tempo estão

relacionados a múltiplos do inverso da frequência fundamental do fenômeno analisado. Como a quantidade de circuitos  $\pi$  e o passo de tempo estão interrelacionados, é importante definir o conjunto desses parâmetros para, em seguida, definir o valor dos fatores  $k_S$  e  $k_D$  que determinam os valores das resistências de amortecimento. Para tal determinação, foi utilizada uma rotina numérica baseada na aplicação de matrizes de ordem 2, mostrado na Figura 21 [8]. Essa rotina apresenta um limite de estabilidade numérica. Apesar desse limite de estabilidade, ao utilizar tal rotina, é possível determinar uma curva relacionada aos resultados com menores quantidades de erros numéricos provocados por oscilações numéricas ou oscilações de Gibbs. Isso é estimado em função do erro do maior pico de tensão no terminal final da linha simulada quando é simulada a propagação de um degrau de tensão. Nessas condições, o maior pico de tensão ocorre durante a primeira reflexão da onda de tensão no terminal final da linha quando tal terminal está em aberto. A curva relacionada aos melhores conjuntos de quantidade de circuitos  $\pi$  e passo de tempo para o polo homopolar está mostrada na Figura 22.

Figura 22 – Relação entre o passo de tempo e a quantidade de circuitos  $\pi$  para o polo 0



Fonte: elaborado pelo autor

A curva apresentada na Figura 22 é obtida pelo produto entre a quantidade de circuitos  $\pi$  e o passo de tempo utilizados para obter os melhores resultados aplicando a rotina numérica baseada em matrizes de ordem 2. Dessa forma, para determinar o valor ideal desse produto constante, inicialmente fixou-se um valor de circuitos  $\pi$  e,

em seguida, o valor do passo de tempo foi determinado para o melhor resultado obtido. Para o caso do polo homopolar, a curva é relacionada ao valor constante do produto obtido entre 300 circuitos  $\pi$  e o passo de tempo de 12,572  $\mu\text{s}$ .

Utilizando a curva da Figura 22, as rotinas com a introdução das resistências de amortecimento serão analisadas, sendo determinados os melhores conjuntos dos parâmetros de simulação (quantidade de circuitos  $\pi$ , passo de tempo e fator de proporcionalidade  $k_S$  ou  $k_D$ ). Serão apresentadas, então, análises baseadas em gráficos tridimensionais que relacionam, em cada gráfico, dois desses fatores com o pico de tensão na primeira reflexão de um degrau de tensão no terminal de carga de cada polo após a propagação simulada pela rotina numérica em desenvolvimento. O pico de tensão mencionado está diretamente relacionado ao maior erro percentual gerado por oscilações numéricas do método de simulação aplicado.

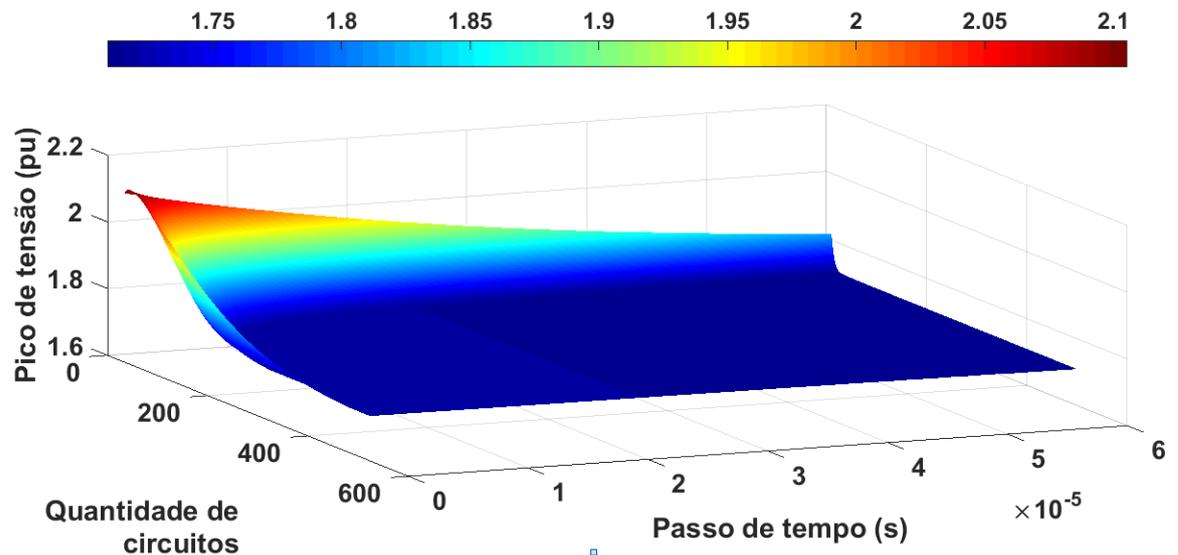
#### 4.1.1 Curvas de superfície relativas à relação entre quantidade de circuitos $\pi$ e passo de tempo

Essas curvas foram obtidas realizando a simulação da propagação de um degrau de tensão, sendo registrado o pico de tensão durante a reflexão dessa onda no terminal de carga da linha analisada, a quantidade de circuitos utilizada e o passo de tempo aplicado. O terminal de carga da linha estava em aberto e, portanto, a reflexão da onda de degrau de tensão foi total. A quantidade de circuitos  $\pi$  foi considerada no intervalo de 10 a 500 unidades com passo de 1 unidade a cada nova simulação. O passo de tempo teve variação de 1  $\mu\text{s}$  e foi considerado o intervalo de 1  $\mu\text{s}$  a 60  $\mu\text{s}$ . Foram obtidas curvas para o fator de proporcionalidade ( $k_S$  e  $k_D$ ) com os valores de 1, 3, 6 e 10. Abaixo serão apresentados os resultados para as simulações realizadas para o  $R_S$  e para o  $R_D$  respectivamente.

Primeiramente, os resultados apresentados fazem referência as simulações realizadas com a introdução da resistência de amortecimento em série com o ramo transversal do circuito  $\pi$ , chamado de resistência *shunt* ( $R_S$ ).

Na Figura 23, os maiores valores de pico obtidos, próximos a 2,1 pu, são relacionados a combinações de quantidades baixas de circuitos  $\pi$  e menores passos de tempo da faixa analisada. Esses maiores picos de tensão ocorrem devido à grande quantidade de oscilações numéricas nas simulações de propagação do degrau de tensão com terminal de carga aberto. Para o amortecimento dessas oscilações numéricas são necessários vários passos de tempo.

Figura 23 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo homopolar para  $k_S = 1$  referente ao  $R_S$ .



Fonte: elaborado pelo autor

Os picos de tensão próximos a 1,7 pu, ou seja, na região de menores picos de tensão da curva de superfície, são relacionados às simulações com menores erros causados por oscilações numéricas. No caso, dessa região da curva de superfície, os erros relacionados aos picos de tensão não ultrapassam 3% e as oscilações numéricas provocadas por tais picos são amortecidas em, no máximo, três passos de tempo. Os resultados após o amortecimento, com praticamente nenhuma oscilação numérica. Esses picos de tensão estão valor ser abaixo de 2 pu é consequência da resistência do modo homopolar.

Além do amortecimento das oscilações numéricas, para o fator  $k_S$  igual a 1, os componentes de altas frequências do fenômeno que está sendo analisado também podem sofrer amortecimento. Isso depende da frequência fundamental do fenômeno analisado e do passo de tempo utilizado na simulação numérica. Portanto, o fator  $k_S$  igual a 1 pode não ser adequado quando a frequência associada ao passo de tempo for muito próxima da maior frequência do fenômeno simulado. No caso, têm-se:

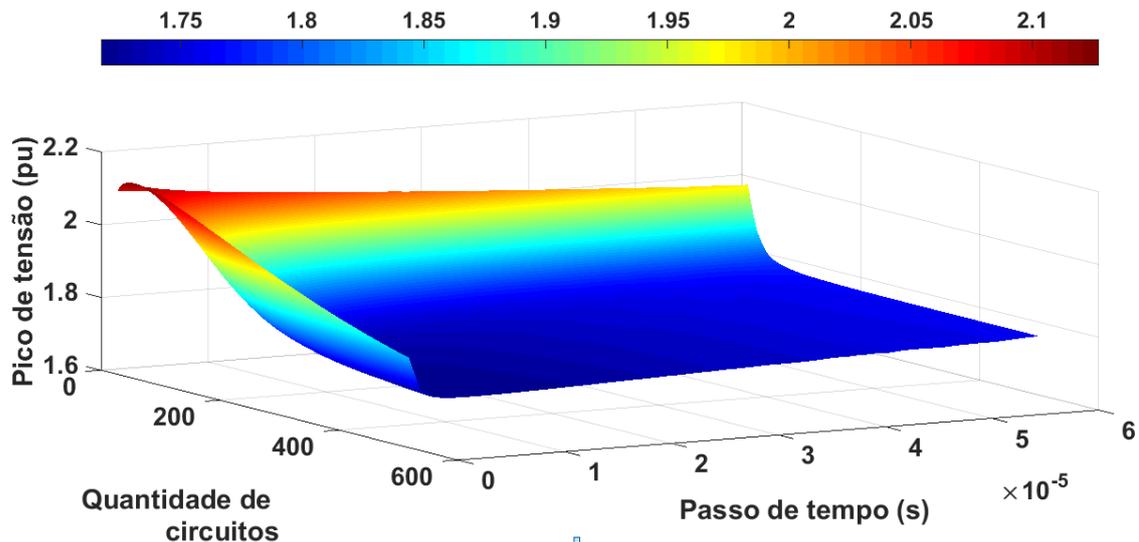
$$f_{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} > f_{FEN} \quad \text{ou} \quad \Delta t < \frac{1}{f_{FEN}} \quad (120)$$

onde:  $f_{\Delta t}$  é a frequência associada ao passo de tempo,  $\Delta t$  é o passo de tempo e  $f_{FEN}$  é a maior frequência presente no fenômeno simulado.

Na Figura 24, a região de maiores picos de tensão corresponde a ocorrência de oscilações numéricas durante vários passos de tempo. Da mesma forma que

ocorre para o caso da Figura 23, tais picos estão relacionados a quantidades baixas de número de circuitos  $\pi$  e os menores passos de tempo na faixa analisada.

Figura 24 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo homopolar para  $k_S = 3$  referente ao  $R_S$ .

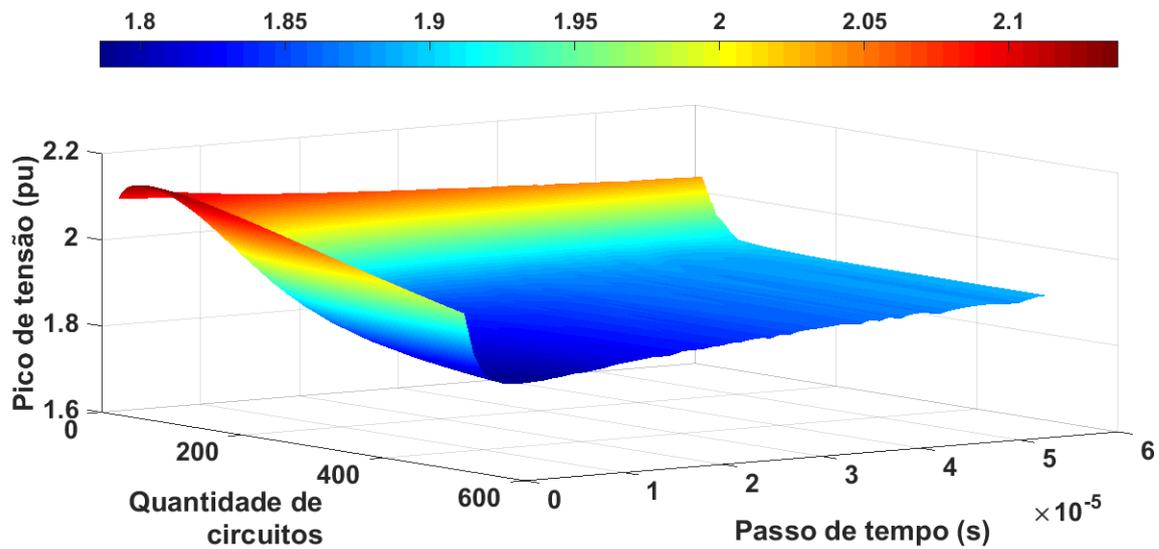


Fonte: elaborado pelo autor

No caso da Figura 24, o amortecimento na maioria das simulações em que o pico de tensão não excede 5% do valor nominal de tensão (entre 1,72 pu e 1,95 pu) ocorre após três passos de tempo consecutivos (parte azulada da curva de superfície) e essas simulações estão relacionadas às menores quantidades de oscilações numéricas. A variação dos picos entre 1,75 e 1,95 pu está relacionada à resistência por unidade de comprimento do polo homopolar.

Utilizando o fator  $k_S$  com valor de 3, evita-se, em sua grande maioria, o amortecimento das frequências mais altas do fenômeno simulado considerando a aplicação de um valor adequado de passo de tempo. No caso de utilizar o fator  $k_S$  igual a 1, o passo de tempo deve ser muito pequeno e tornar o tempo computacional de simulação extremamente alto. Por esse motivo, o fator  $k_S$  igual a 3 pode ser considerado mais adequado entre os dois valores analisados nas Figuras 23 e 24. O fator  $k_S$  igual a 3 possui pouca influência em relação às frequências que constituem o fenômeno simulado quando um passo de tempo adequado é utilizado. No caso de  $k_S$  igual a 1, o passo de tempo deveria ter uma ordem de grandeza muito pequena em relação ao inverso da frequência mais alta do fenômeno para que a simulação do fenômeno não apresentasse distorção na propagação do sinal considerado.

Figura 25 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo homopolar para  $k_S = 6$  referente ao  $R_S$ .



Fonte: elaborado pelo autor

Na Figura 25, a curva de superfície demonstra um aumento dos problemas causados por oscilações numéricas. Ou seja, os erros causados por oscilações numéricas são maiores que 5 % e o amortecimento dessas oscilações não ocorre em apenas três passos de tempo consecutivos. Tais resultados estão associados ao fator  $k_S$  com valor igual a 6.

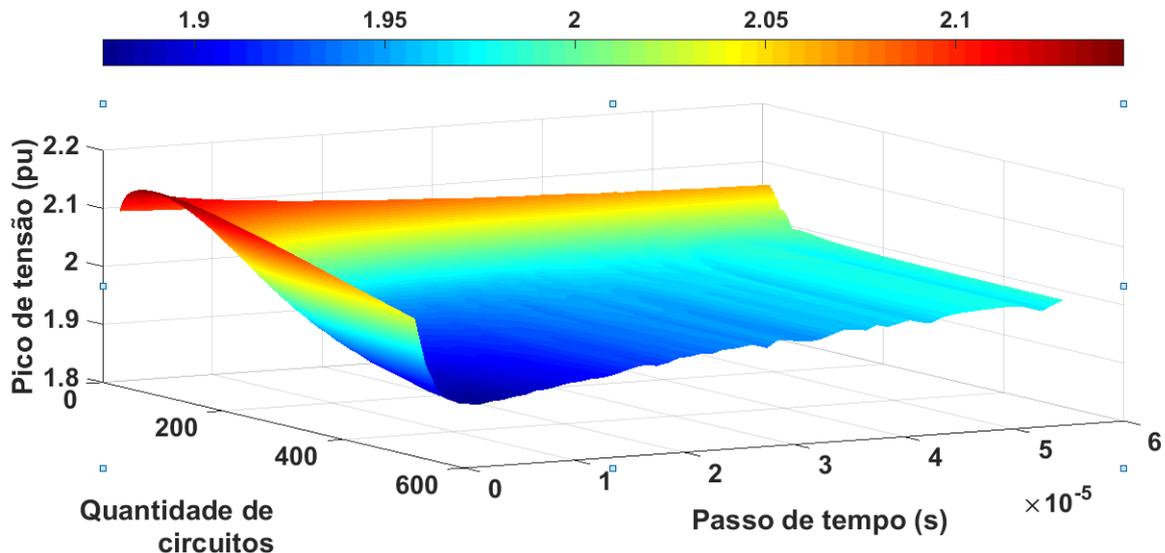
De acordo com a Figura 26, praticamente todas as vantagens da inclusão da resistência *shunt* em relação ao amortecimento das oscilações numéricas não são observadas nos resultados obtidos. Assim, os picos de tensão atingem valores próximos a 25 % do dobro do valor da tensão imposta no terminal de entrada do polo homopolar. As oscilações numéricas não são amortecidas em alguns poucos passos de tempo. Por tais motivos, o fator  $k_S$  com valor 10 não é adequado para aplicação de resistência *shunt* para amortecimento de erros numéricos em simulações de propagação de fenômenos transitórios em linhas de transmissão bifásicas.

Finalizando as análises feitas alterando o valor de  $k_S$  nas simulações, em que os valores desse fator de proporcionalidade fazem referência ao valor da resistência de amortecimento inserido em série com o ramo transversal ( $R_S$ ). A seguir, serão apresentadas as mesmas análises e simulações realizadas para o fator de proporcionalidade  $k_D$ . Esse fator de proporcionalidade faz referência à resistência de amortecimento em paralelo ao ramo longitudinal ( $R_D$ ).

Com isso, as análises a seguir são referentes as simulações para o modo

homopolar onde inclui a resistência de amortecimento em paralelo ao ramo longitudinal do circuito  $\pi$ .

Figura 26 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo homopolar para  $k_S = 10$  referente ao  $R_S$ .



Fonte: elaborado pelo autor

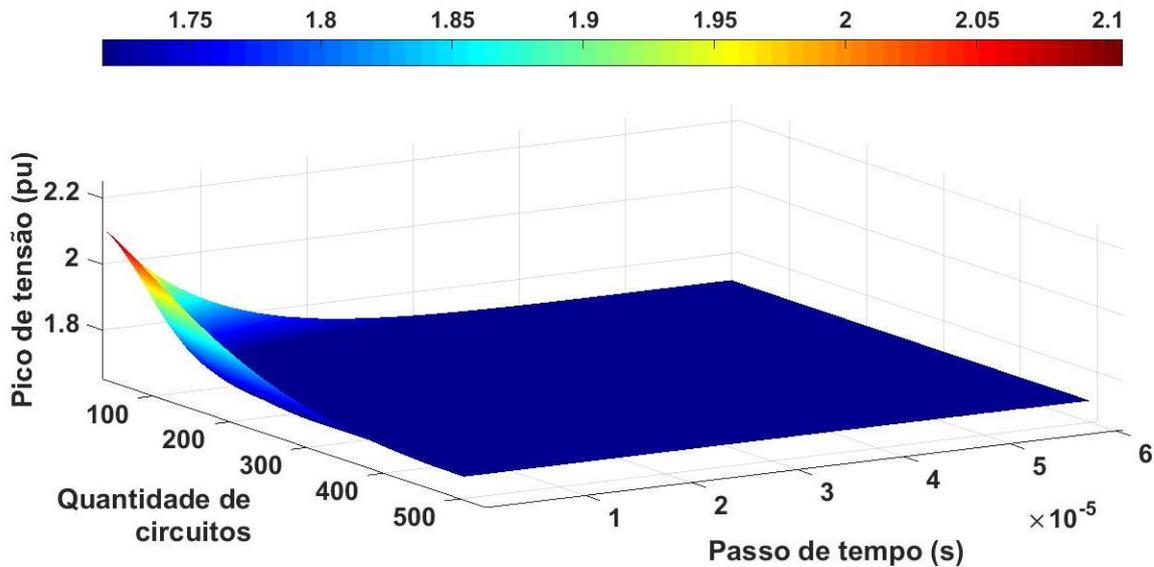
A Figura 27 trata-se da simulação referente ao fator de proporcionalidade  $k_D$  igual a 1. Em que o pico de tensão na primeira reflexão da onda é de 2,1 pu e onde encontra-se as maiores oscilações numéricas. Essas maiores oscilações numéricas estão presentes quando se tem pequenas unidades de circuitos  $\pi$  e menores passos de tempo. Após alguns passos de tempo, há um amortecimento das oscilações numéricas, em que o valor após o amortecimento se aproxima de 1,7 pu para o polo homopolar.

Como observado na Figura 27, o gráfico referente ao  $R_D$  apresenta uma maior capacidade de minimizar oscilações numéricas com menor número de circuitos  $\pi$  comparado ao gráfico referente ao  $k_S$  na Figura 23. No entanto, tanto para a análise com relação ao  $k_S$  e ao  $k_D$ , ambos apresentam uma grande área relativa à minimização de oscilações numéricas.

Para o fator  $k_D$  igual a 1, além do amortecimento das oscilações numéricas, os componentes de altas frequências do fenômeno que está sendo analisado também podem sofrer amortecimento. Isso depende da frequência fundamental do fenômeno analisado e do passo de tempo utilizado na simulação numérica. Portanto, o fator  $k_D$

igual a 1 pode não ser adequado quando a frequência associada ao passo de tempo for muito próxima da maior frequência do fenômeno simulado. Essa relação foi apresentada em (120).

Figura 27 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo homopolar para  $k_D = 1$  referente ao  $R_D$ .



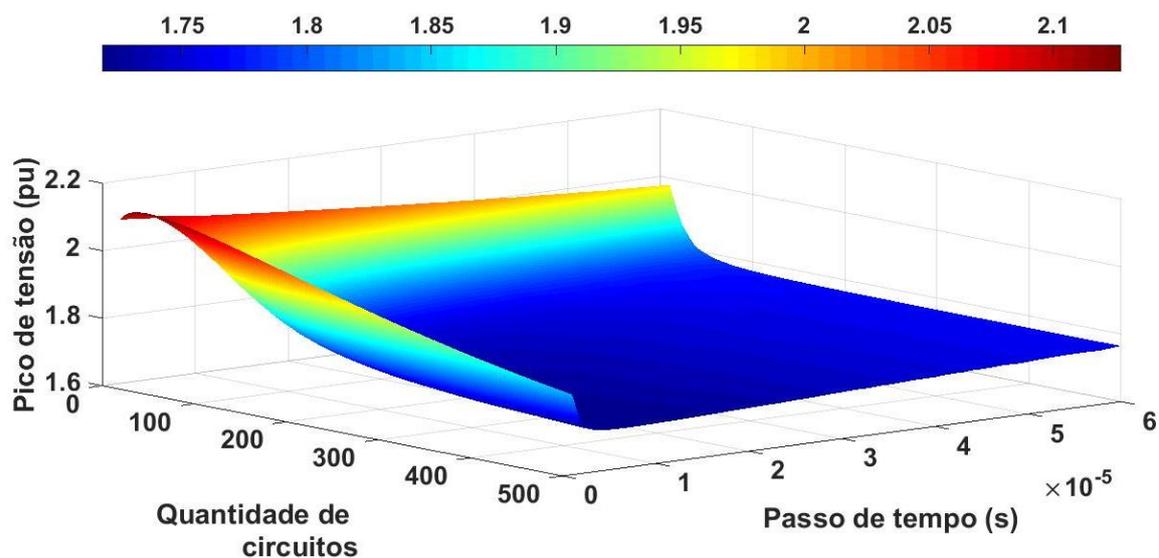
Fonte: elaborado pelo autor

Quando o fator de proporcionalidade  $k_D$  for igual à 3 que está sendo apresentado na Figura 28. Obtém-se um resultado semelhante ao que foi obtido para o  $k_s$ . Sendo que o pico máximo de tensão é 2,1 pu, onde está determinado as maiores oscilações numéricas. Em aproximadamente 1,75 pu é determinada pela área de menor oscilação numérica, após o amortecimento das oscilações. No caso, dessa região da curva de superfície, os erros relacionados aos picos de tensão não ultrapassam 3% e as oscilações numéricas provocadas por tais picos são amortecidas em, no máximo, três passos de tempo. Os resultados após o amortecimento, com praticamente nenhuma oscilação numérica. Esses picos de tensão possuem valor abaixo de 2 pu devido a consequência da resistência do modo homopolar. As oscilações numéricas para o fator  $k_D$  igual 3 são amortecidas com circuitos  $\pi$  acima de 150 unidades.

A Figura 29 apresenta o fator de proporcionalidade  $k_D$  sendo igual a 6. Para esse fator tem-se um aumento dos problemas causados pelas oscilações numéricas. A área de menor oscilação numérica é pequena com relação para os fatores de

proporcionalidade apresentados anteriormente, para que as oscilações numéricas sejam amortecidas, necessita de mais do que passos de tempo. Além disso, há algumas ondulações no gráfico ocasionando uma instabilidade em determinados pontos. Já quando se utiliza o fator de proporcionalidade  $k_D$  igual a 10, há maiores ondulações no gráfico 3D apresentado na Figura 30 que ocasionam em maiores oscilações numéricas. Com isso, já não apresenta vantagem ao utilizar a resistência de amortecimento com esse valor do fator de proporcionalidade. Por esses motivos, tanto o fator de proporcionalidade igual a 6 quando igual a 10, não são adequados para minimizar as oscilações numéricas ocasionadas para o circuito  $\pi$  clássico.

Figura 28 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo homopolar para  $k_D = 3$  referente ao  $R_D$ .

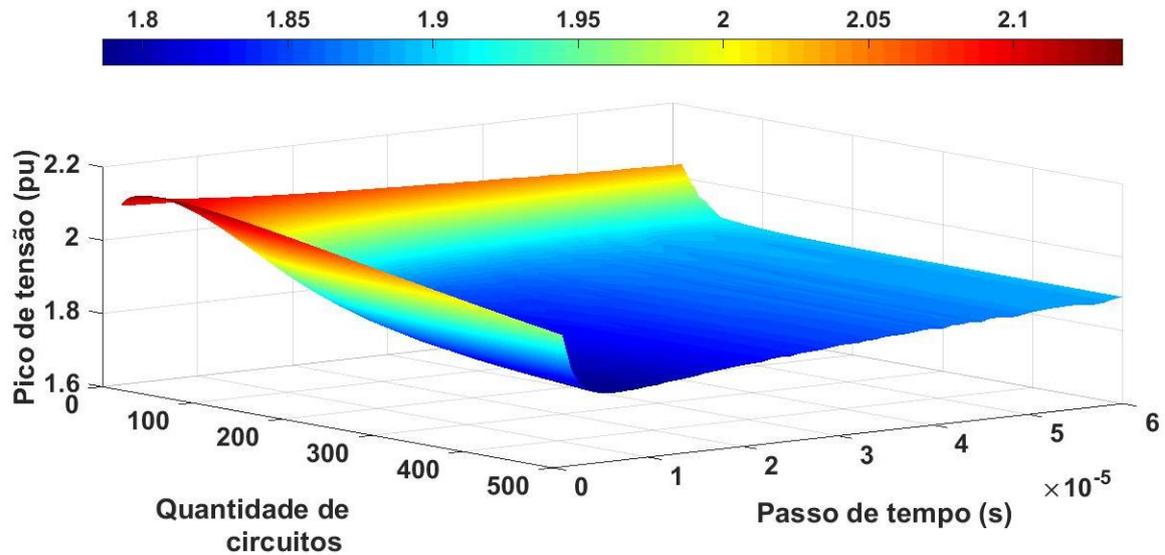


Fonte: elaborado pelo autor

Comparando os resultados ao variar os valores de  $k_S$  e  $k_D$  nas simulações pode ser observado uma semelhança entre ambos. Para o fator de proporcionalidade igual a 1, há um amortecimento das oscilações numéricas mais rapidamente, porém há também, um possível amortecimento do fenômeno analisado. Para o fator de proporcionalidade igual a 3, há uma grande área amortecida. O fenômeno analisado não sofre amortecimento devido ao  $\Delta t$  utilizado em relação à frequência do fenômeno. Com isso, esse fator de proporcionalidade (igual a 3) tanto para o  $R_S$  quanto para o  $R_D$  é o mais adequado para utilizar para esse fenômeno analisado, que no caso é um degrau unitário. Já para o fator de proporcionalidade igual a 6 e 10, não são

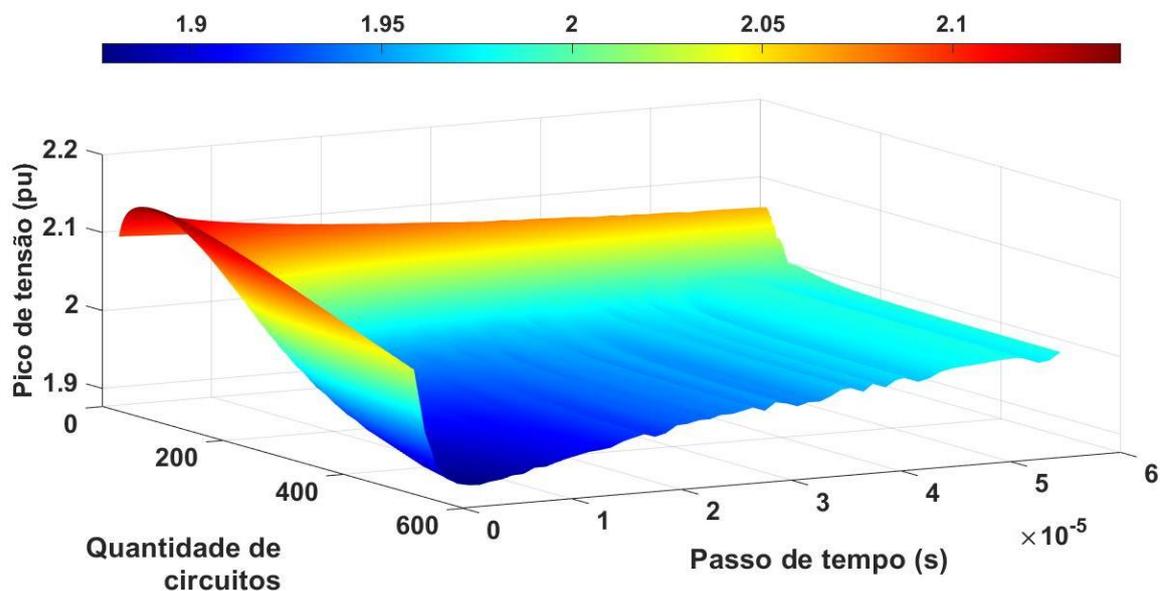
adequados para utilização, pois apresentam ondulações no gráfico ocasionando oscilações numéricas severas e instabilidade no sistema.

Figura 29 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo homopolar para  $k_D = 6$  referente ao  $R_D$ .



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 30 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo homopolar para  $k_D = 10$  referente ao  $R_D$ .



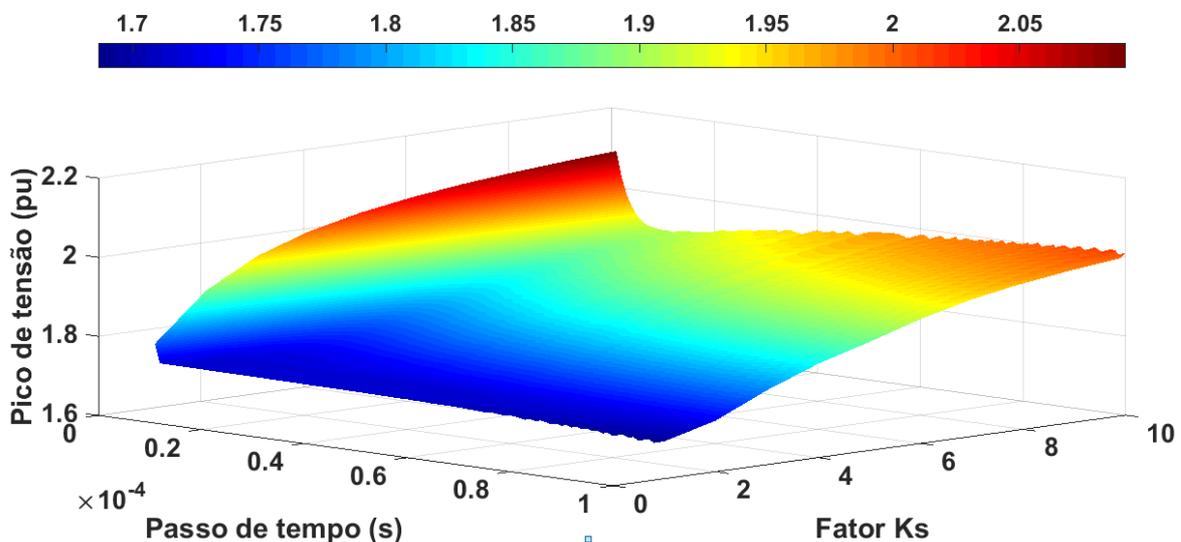
Fonte: elaborado pelo autor

#### 4.1.2 Curvas de superfície relativas à relação entre passo de tempo e fator de proporcionalidade

Nestas curvas de superfície, foram comparados os picos de tensão na primeira reflexão de um degrau de tensão no terminal de carga após propagação pelo polo homopolar considerando valores do fator de proporcionalidade ( $k_S$  e  $k_D$ ) entre 1 a 10 e passos de tempo entre  $1\mu s$  a  $60\mu s$ . Foram obtidas curvas de superfícies para 300 e 500 circuitos  $\pi$ . A seguir, serão apresentados os resultados para as simulações realizadas para o  $R_S$  e para o  $R_D$ , respectivamente. Da mesma maneira que foi apresentado no tópico acima, serão apresentadas as análises realizadas para a resistência *shunt* ( $R_S$ ) e posteriormente a resistência de amortecimento em paralelo ao ramo longitudinal ( $R_D$ ). Os resultados apresentados a seguir fazem referência as simulações realizadas com a introdução da resistência de amortecimento em série com o ramo transversal do circuito  $\pi$ , chamado de resistência *shunt* ( $R_S$ ).

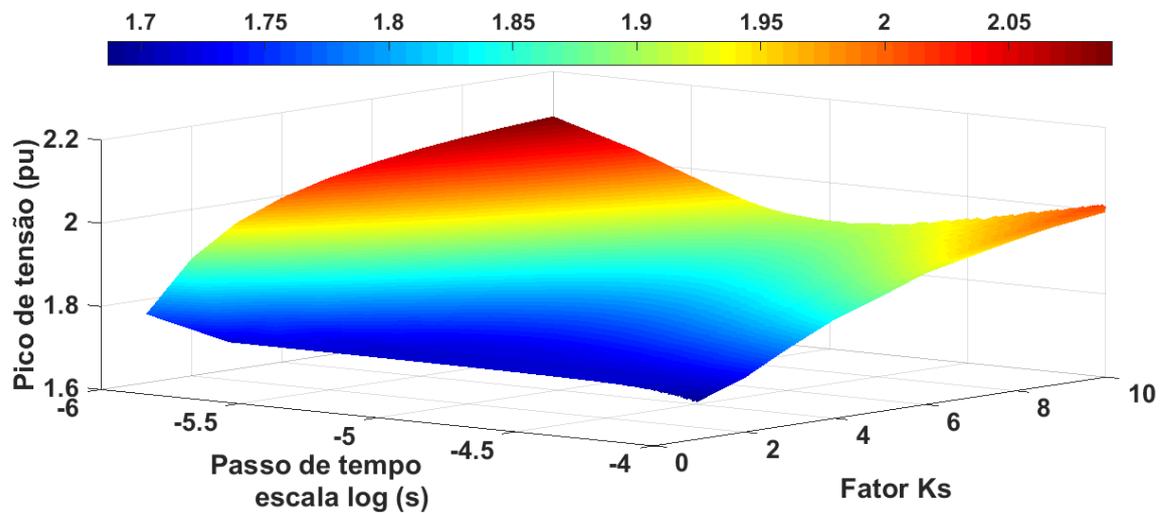
De acordo com a Figuras 31 e 32, a utilização do fator  $k_S$  com valores maiores do que 4 não é adequada para a maioria dos valores de passo de tempo, pois os picos de tensão tendem a erros significativos em relação ao dobro do valor de tensão imposto no terminal de entrada da linha. Considerando a propagação da onda através do polo homopolar, o erro percentual entre o valor esperado para a tensão no terminal de saída e o pico atingido chega a aproximadamente 25 %. Porém, com os menores valores de passo de tempo, podem ser utilizados valores do fator  $k_S$  de até 5.

Figura 31 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $n = 300$  e escala linear para o passo de tempo referente ao  $R_S$ .



Fonte: elaborado pelo autor

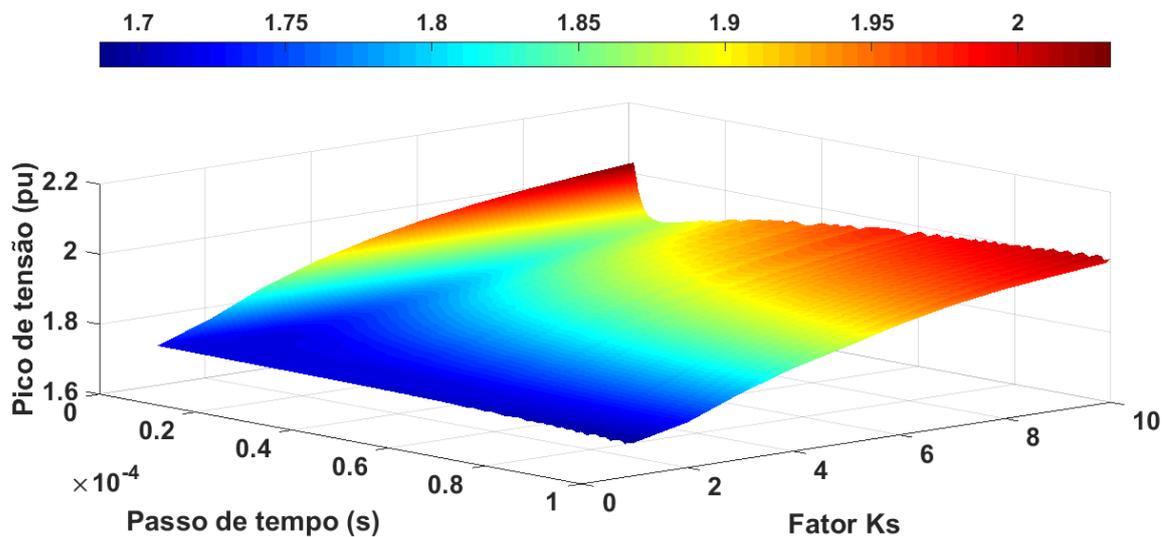
Figura 32 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $n = 300$  e escala logarítmica para passo de tempo referente ao  $R_s$ .



Fonte: elaborado pelo autor

Analisando as Figuras 33 e 34, devido ao aumento da quantidade de circuitos  $\pi$ , a faixa de valores adequados para simulações com redução das oscilações numéricas também é ampliada. Valores de  $k_s$  até 5 ou 6 podem ser utilizados para a maior parte dos passos de tempo apresentados.

Figura 33 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $n = 500$  e escala linear para passo de tempo referente ao  $R_s$ .

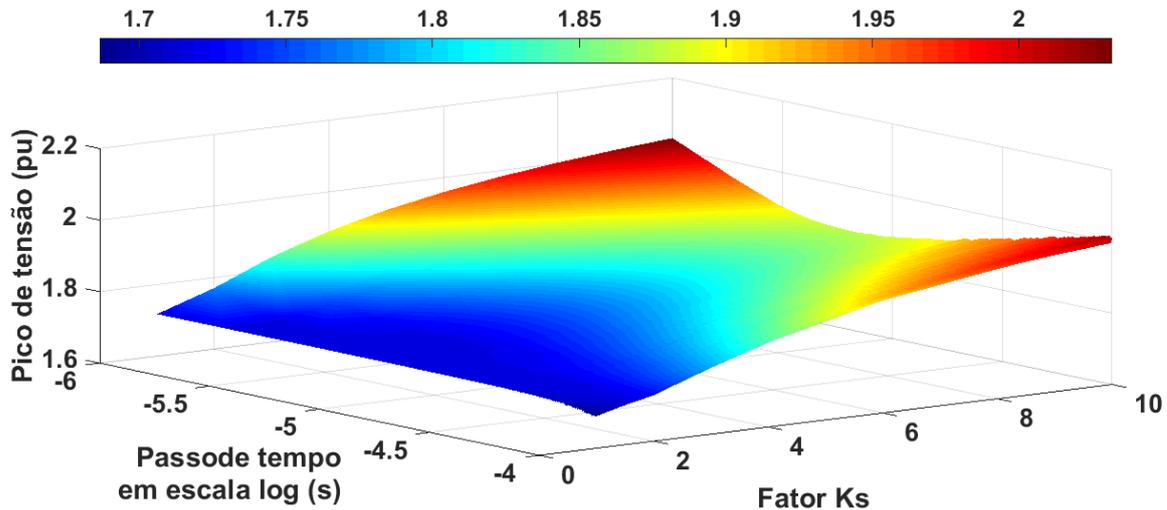


Fonte: elaborado pelo autor

Com isso, finaliza-se as análises realizadas para os parâmetros de resistência de amortecimento  $R_s$ . Foi observado que ao aumentar a quantidade de circuitos  $\pi$

para simulação, o fator de proporcionalidade ( $k_s$ ) também sofre um pequeno aumento com relação aos parâmetros analisados.

Figura 34 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $n = 500$  e escala logarítmica para passo de tempo referente ao  $R_s$ .



Fonte: elaborado pelo autor

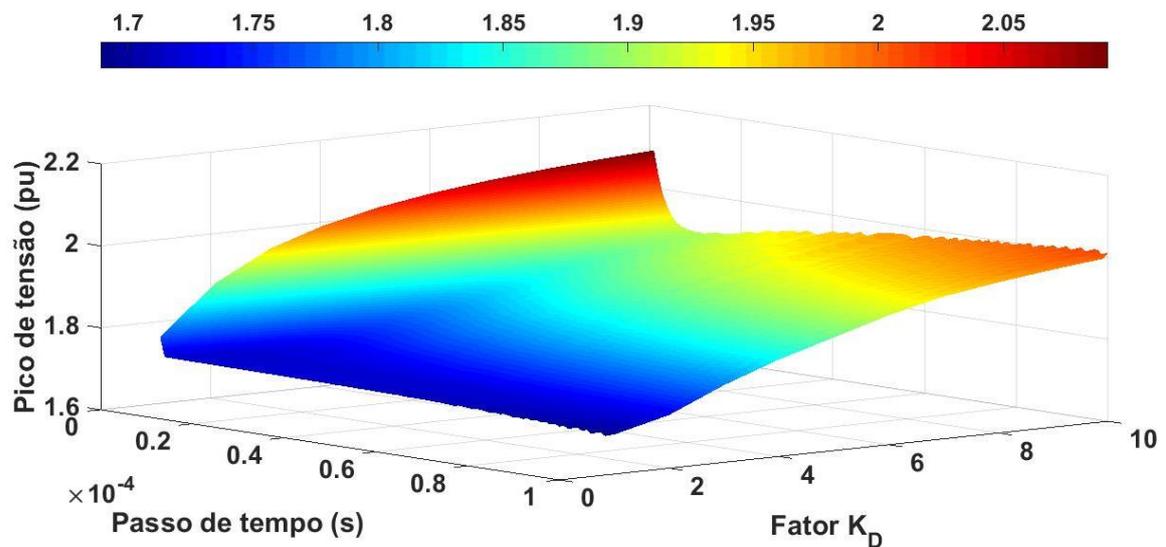
Os resultados apresentados em sequência fazem referência as simulações realizadas com a introdução da resistência de amortecimento em paralelo com o ramo longitudinal do circuito  $\pi$  ( $R_D$ ). Os resultados mostrados nas Figuras 35 e 36 apresentam semelhança ao que foi obtido utilizando a introdução da resistência de amortecimento em série com o ramo transversal, ou  $R_s$ , mostrado nas Figuras 31 e 32.

Utilizando a quantidade de circuitos  $\pi$  em 300 unidades pode-se observar que para a maioria dos passos de tempo apresentados no gráfico, o fator de proporcionalidade ( $k_D$ ) deve ser considerado menor que 4 para que esteja em uma região de menor oscilação numérica. Essa região de menor oscilação numérica para o modo homopolar é de aproximadamente 1,75 pu. O pico máximo de tensão na reflexão de degrau de tensão é em 2,1 pu, essa região é a de maior oscilação numérica.

Quando há um aumento na quantidade de circuitos  $\pi$  analisados, simulando 500 unidades. Mesmo assim, continua existindo uma similaridade entre os resultados obtidos para  $R_s$  e  $R_D$ . Aumentando a quantidade de unidades do circuito  $\pi$ , há também um aumento do fator de proporcionalidade.

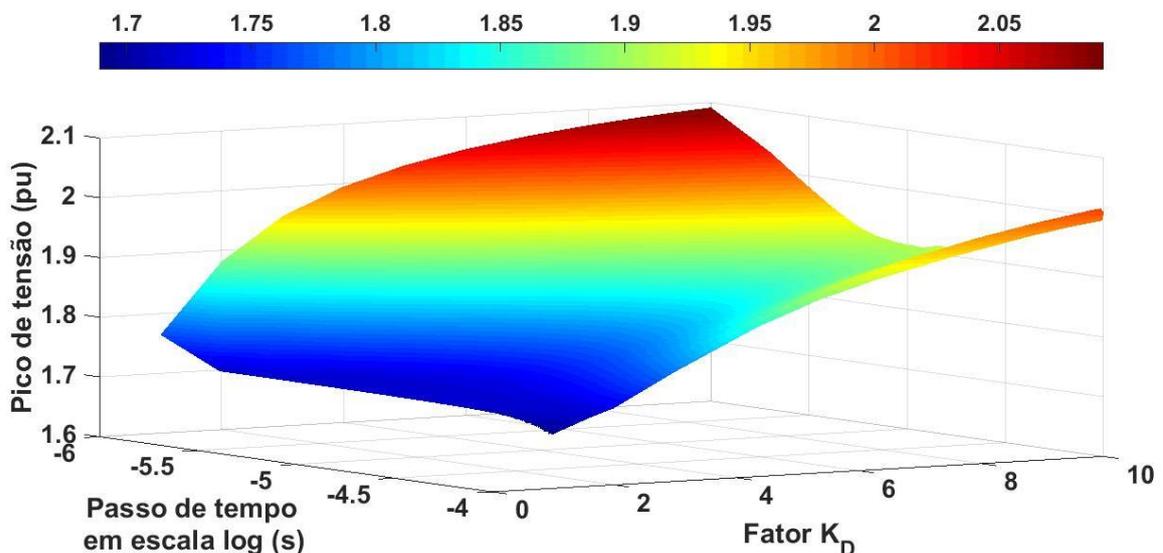
Para 500 unidades de circuito  $\pi$  analisadas, o fator de proporcionalidade  $k_D$  menor que 5, pode ser utilizado para a maior parte da quantidade de passos de tempo. Porém, em algumas partes do gráfico apresentado na Figura 36 pode ser estendida para o fator  $k_D$  sendo igual a 6.

Figura 35 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $n = 300$  e escala linear para passo de tempo referente ao  $R_D$ .



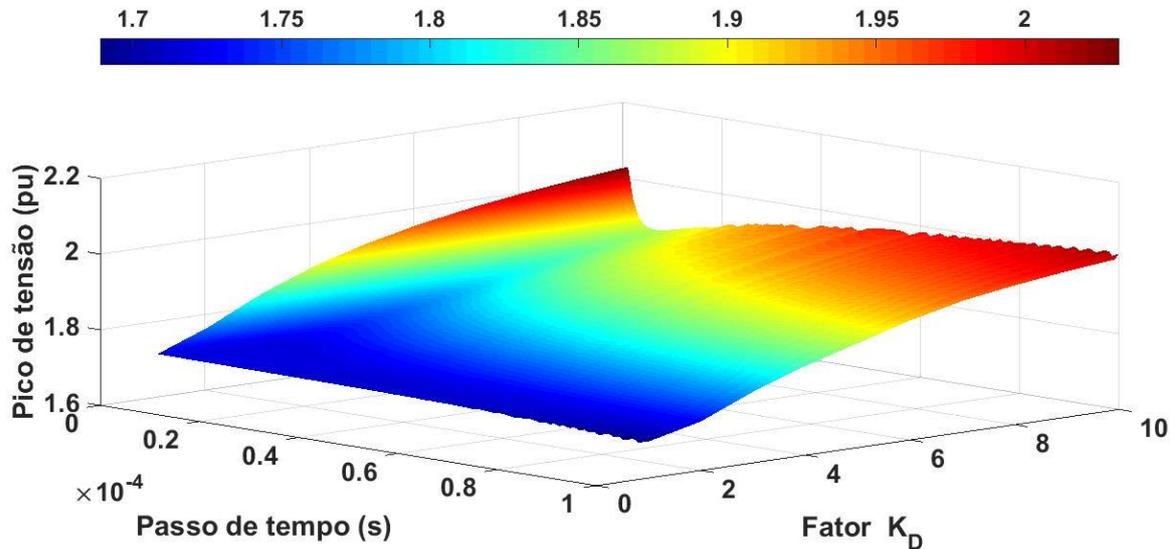
Fonte: elaborado pelo autor

Figura 36 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $n = 300$  e escala logarítmica para passo de tempo referente ao  $R_D$ .



Fonte: elaborado pelo autor

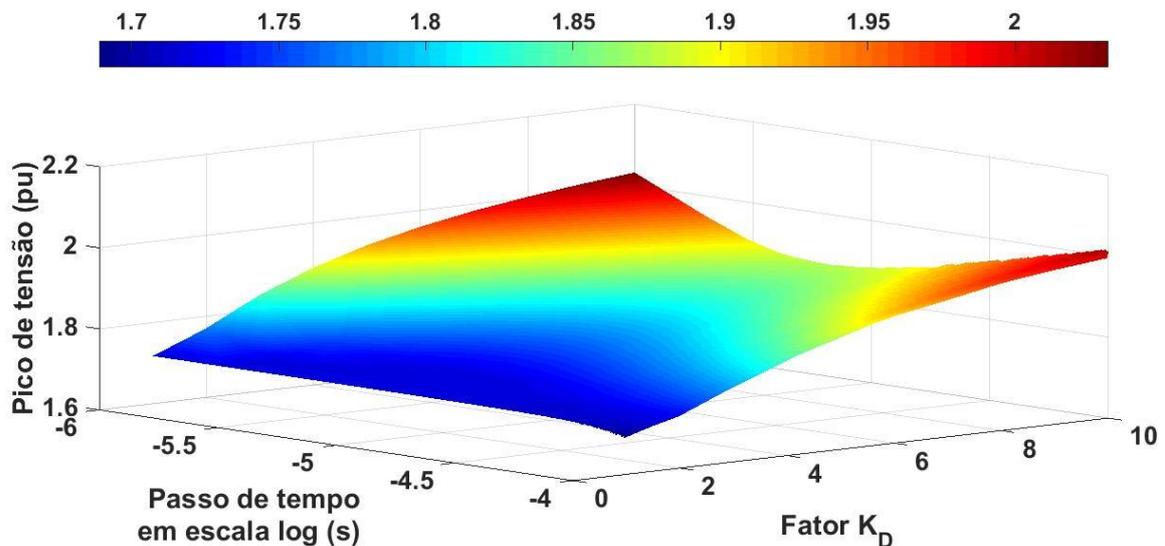
Figura 37 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $n = 500$  e escala linear para passo de tempo referente ao  $R_D$ .



Fonte: elaborado pelo autor

A mesma análise observada na Figura 37 que representa uma escala linear para o passo de tempo, pode ser observada na Figura 38, em que o passo de tempo está sendo representado em uma escala logarítmica.

Figura 38 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $n = 500$  e escala logarítmica para passo de tempo referente ao  $R_D$ .



Fonte: elaborado pelo autor

Considerando os valores do fator de proporcionalidade  $k_D$  acima dos valores mencionados anteriormente ocasionam a erros significativos com relação ao valor esperado no terminal de carga da linha. Esse valor, teoricamente, seria o dobro do valor no terminal inicial da linha, ou seja 2 pu.

Comparando os resultados para a quantidade de circuitos  $\pi$  entre 300 e 500 unidades, com o aumento desses valores, há também um aumento nos valores do fator de proporcionalidade utilizados. Com isso, pode-se dizer que a relação entre a quantidade de circuitos  $\pi$  e os fatores de proporcionalidade são diretamente proporcionais.

Após essas análises, foi possível comparar os valores obtidos para o  $R_S$  e  $R_D$ . Os resultados apresentados são semelhantes entre si, os valores do fator de proporcionalidade  $k_S$  e  $k_D$ , para que o pico de tensão na reflexão da onda no terminal de carga da linha tenha menos oscilações numéricas, são próximos para a quantidade de circuitos  $\pi$  analisados.

#### 4.1.3 Curvas de superfície relativas à relação entre circuitos $\pi$ e fator de proporcionalidade

Nestas curvas de superfície, foram considerados valores do fator de proporcionalidade ( $k_S$  e  $k_D$ ) variando de variando de 1 a 10 e o número de circuitos  $\pi$  variando entre 10 e 500. Foram obtidas curvas de superfície para os passos de tempo de  $0,5\mu s$  e  $1\mu s$ . Abaixo serão apresentados os resultados para as simulações realizadas para o  $R_S$  e para o  $R_D$ , respectivamente.

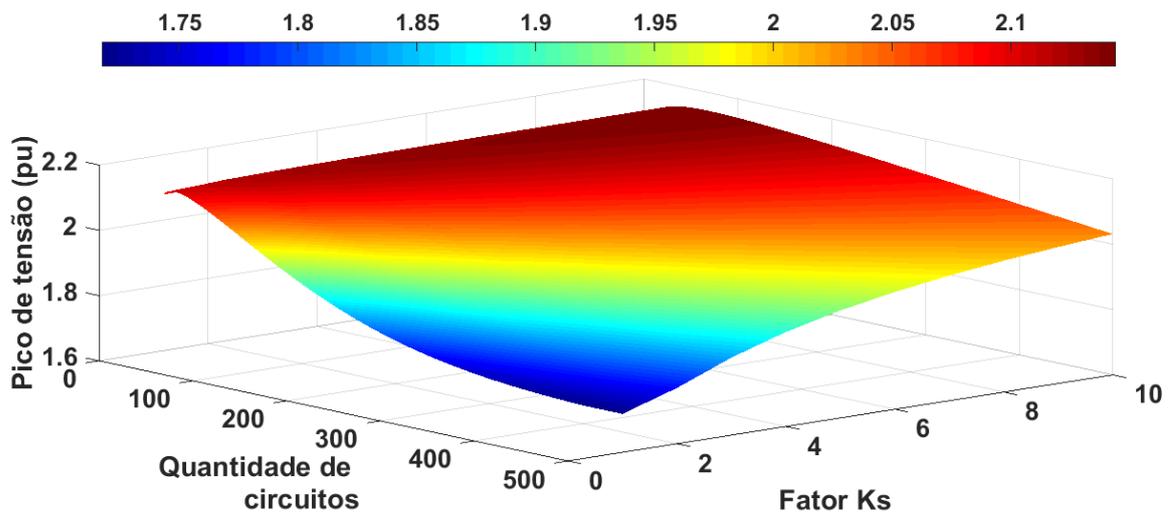
Da mesma maneira que anteriormente, serão apresentados, em primeiro momento, os resultados da análise de  $R_S$  e posteriormente para  $R_D$ .

Iniciando os resultados para  $R_S$  em que foi variado o valor do passo de tempo, foi encontrado uma faixa de valores dos parâmetros analisados (quantidade de circuitos  $\pi$  e fator de proporcionalidade) que apresentem menores oscilações numéricas. A seguir, as análises desses resultados são apresentadas.

De acordo com a Figura 39, as simulações que possuem menores oscilações numéricas são obtidas utilizando o valor de  $k_S$  abaixo de 4 e uma quantidade de circuitos  $\pi$  acima de 250. A variação apresentada na Figura 39, mostra semelhança com a curva de relação otimizada entre considerando a relação entre quantidade de circuitos  $\pi$  e passo de tempo. Essa curva foi obtida com a aplicação da rotina baseada em matrizes de ordem 2 e foi mostrada na Figura 21. A inclusão da resistência *shunt*,

além de minimizar as oscilações numéricas, possibilitou intervalos de ajuste para a quantidade de circuitos  $\pi$  e passo de tempo ao evitar o problema de instabilidade numérica encontrado na aplicação da rotina numérica baseada em matrizes de ordem 2 [8-10].

Figura 39 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $\Delta t = 1 \mu s$  referente ao  $R_S$ .



Fonte: elaborado pelo autor

Analisando a Figura 40, com a diminuição do passo de tempo, de  $1\mu s$  para  $0,5\mu s$ , há a necessidade de aumentar a quantidade de circuitos  $\pi$  para continuar obtendo os resultados com oscilações numéricas reduzidas. Isso pode ser observado comparando as Figuras 39 e 40.

O melhor passo de tempo a ser utilizado, irá depender da quantidade de circuitos  $\pi$  aplicada. E esses dois fatores dependem das frequências associadas ao fenômeno simulado. Por esse motivo, as curvas apresentadas podem ser utilizadas como modo de direcionar a escolha do melhor ajuste dos parâmetros numéricos da rotina apresentada para simulação de fenômenos transitórios em linhas de transmissão.

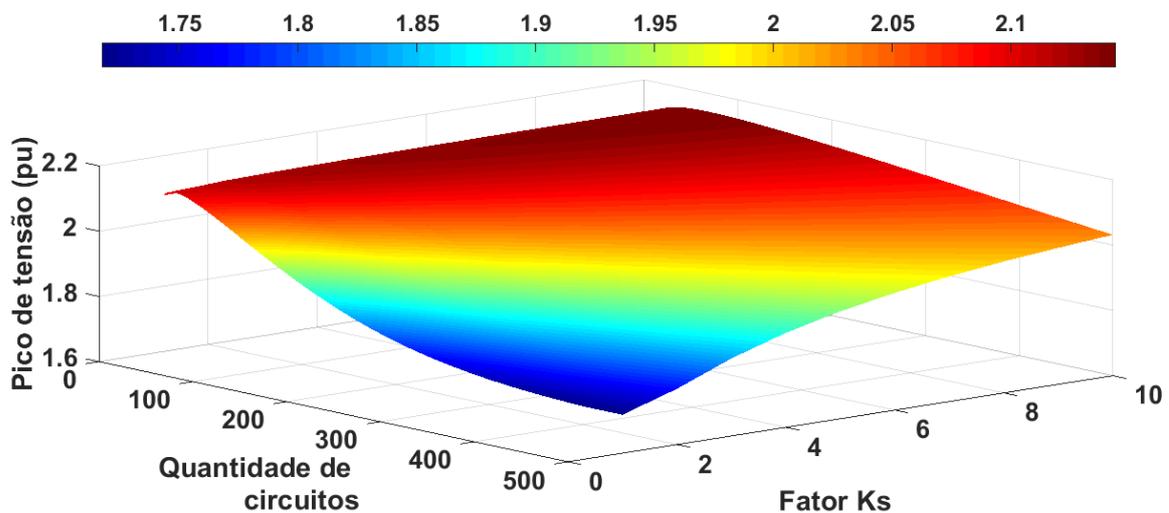
Com isso, encerra-se as análises feitas utilizando a resistência de amortecimento em série com o ramo transversal do circuito  $\pi$  ( $R_S$ ) para o polo homopolar ou polo 0.

A partir disso, será feita a mesma análise apresentada anteriormente para a resistência de amortecimento em paralelo ao ramo longitudinal ( $R_D$ ) para finalizar as

análises realizadas para o polo homopolar.

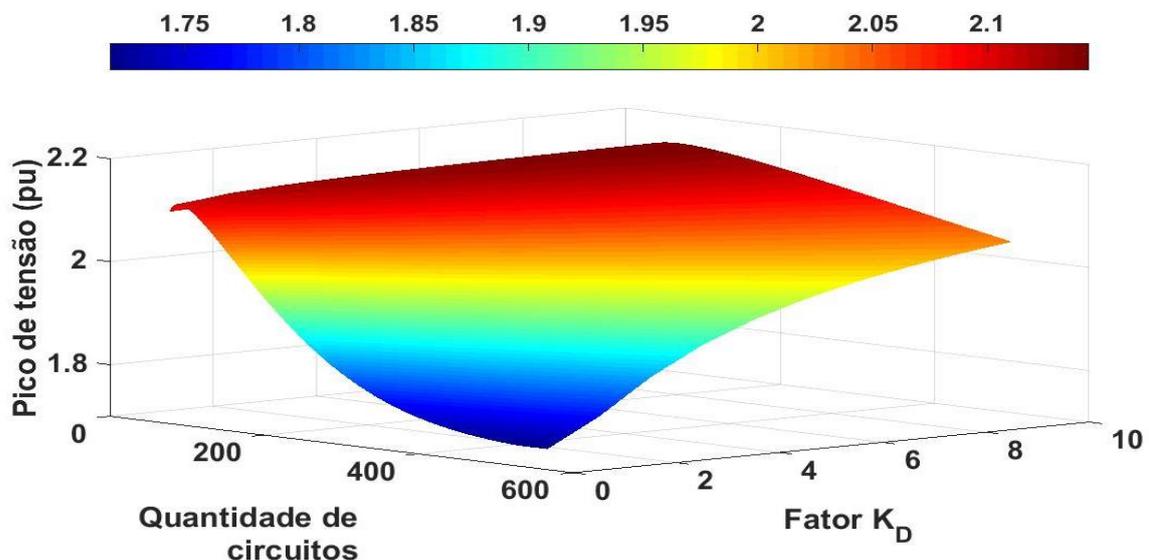
Na Figura 41, a simulação realizada é considerando o passo de tempo igual a  $1\mu\text{s}$ . Comparando ao resultado da Figura 39, pode-se perceber um mesmo padrão entre ambos. Com isso, para obter menores oscilações numéricas, a quantidade de circuitos  $\pi$  deve ser maior do que 200 unidades e  $k_D$  deve ser menor do que 4.

Figura 40 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $\Delta t = 0,5\ \mu\text{s}$  referente ao  $R_S$ .



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 41 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $\Delta t = 1\ \mu\text{s}$  referente ao  $R_D$ .



Fonte: elaborado pelo autor

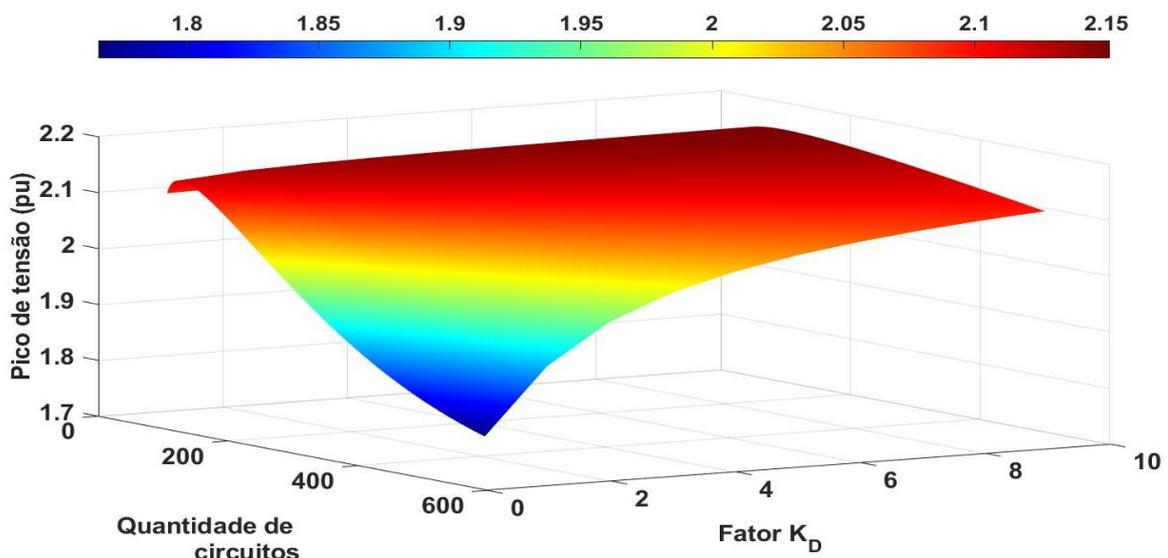
Os resultados apresentados para a resistência  $R_S$  e  $R_D$  são próximos para o mesmo passo de tempo de  $1\mu s$ , porém não são iguais.

Caso os valores estejam fora desses intervalos, há a presença de maiores oscilações numéricas pois, ainda não foram amortecidos os picos de tensão nas reflexões da onda no terminal de carga da linha.

Quando o passo de tempo é reduzido para  $0,5\mu s$ , como apresentado na Figura 42, o resultado continua tendo o mesmo padrão obtido para a análise realizada para a resistência de amortecimento  $R_S$ . Para que o pico de tensão na reflexão da onda apresentar menores oscilações numéricas, com a redução do passo de tempo, há a necessidade de aumentar a quantidade de circuitos  $\pi$ , passando a ser mais adequada a utilização de mais do que 300 unidades. Com relação ao fator de proporcionalidade, há uma pequena mudança, considerando esse fator menor ou igual a 3.

Da mesma maneira que ocorreu para  $1\mu s$ , também ocorre para  $0,5\mu s$ , os valores dos parâmetros analisados são próximos tanto para  $R_S$  quanto para  $R_D$ , sofrendo pequenas alterações, mas mantendo o mesmo padrão de resultados.

Figura 42 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo homopolar,  $\Delta t = 0,5\mu s$  referente ao  $R_D$ .



Fonte: elaborado pelo autor

Com isso, encerra-se as análises realizadas para a resistência de amortecimento incluída em paralelo ao ramo longitudinal ( $R_D$ ). Foi possível observar

que os valores entre os resultados referentes as resistências  $R_S$  e  $R_D$  são próximos e ambas apresentam semelhanças de comportamento.

De acordo com os resultados apresentados, foi possível determinar que os parâmetros analisados possuem proporcionalidades diretas ou inversas entre si. No caso de quantidade de circuitos  $\pi$  e o fator de proporcionalidades, os mesmos são diretamente proporcionais, já a quantidade de circuitos  $\pi$  e o passo de tempo, são inversamente proporcionais. Portanto, a relação entre o passo de tempo e o fator de proporcionalidade são inversamente proporcionais. Com essas proporcionalidades e as análises apresentadas anteriormente, pode-se determinar faixas de valores para os parâmetros verificados, sejam eles, a quantidade de circuitos  $\pi$ , o fator de proporcionalidade e o passo de tempo, para obter menores oscilações numéricas.

#### 4.2 Polo $\alpha$

Da mesma maneira que foi necessário determinar a velocidade de propagação da onda para o modo homopolar, é necessário fazer o mesmo para o modo  $\alpha$  [22]. Um valor aproximado dessa velocidade é determinado desconsiderando perdas. Assim, os valores de resistência ( $R$ ) e condutância ( $G$ ) são desconsiderados. Por meio de (108), a velocidade aproximada de propagação da onda no polo  $\alpha$  é determinada por:

$$v_\alpha = \frac{1}{\sqrt{L_\alpha C_\alpha}} = 338550,61 \text{ km/s} \quad (121)$$

sendo que os valores de  $L_\alpha = 330,019368 \mu\text{H}$  e  $C_\alpha = 26,43707356 \text{ nF}$ .

Como a distância considerada é o ponto médio entre a subestação de Itaipu e São Roque, ou seja, aproximadamente 800 km, o tempo de propagação de ondas eletromagnéticas para percorrer esse percurso é determinado por:

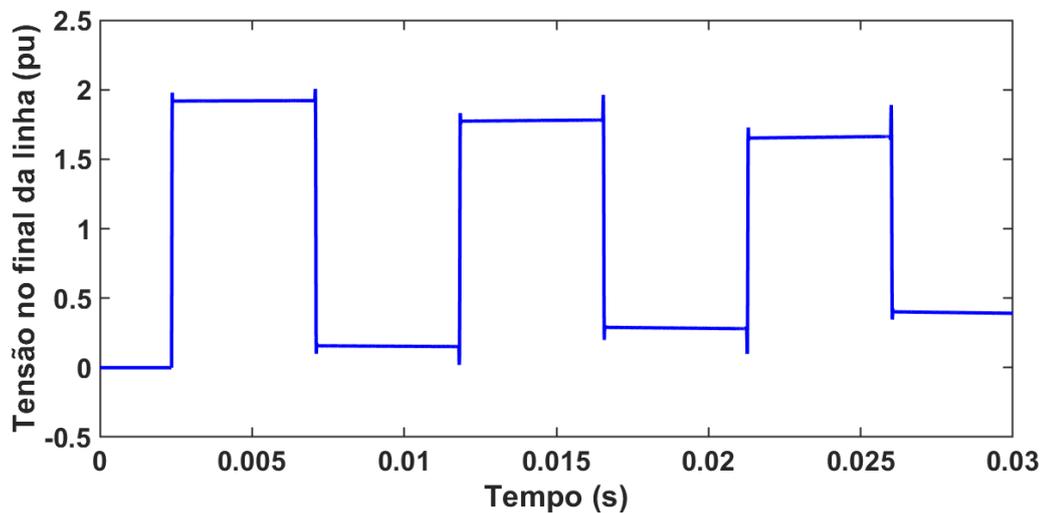
$$t_\alpha = \frac{d_\alpha}{v_\alpha} = 2,36 \text{ ms} \quad (122)$$

sendo que os valores de  $d_\alpha = 800 \text{ km}$  e  $v_\alpha$  foi identificado em (121).

Após determinar o tempo de propagação da onda, para a análise da simulação inicial, foi considerado um valor de tempo de simulação de 10 vezes o valor do tempo de propagação da onda. Pois assim, será possível visualizar aproximadamente 3-4 ciclos de reflexão e refração da onda nos terminais dos polos. Para determinação dos melhores valores dos parâmetros numéricos que influenciam nos resultados obtidos nas simulações (número de circuitos  $\pi$ , passo de integração e resistência de amortecimento), um degrau de tensão é introduzido no terminal inicial dos polos e,

após propagação por esse polo, a onda recebida no terminal final da linha analisada. O degrau de tensão é utilizado conforme utilizado para o polo homopolar, pois, baseado na transformada de Fourier, tal sinal é decomposto em uma soma infinita de sinais senoidais com amplitude decrescente e frequência crescente. É um tipo de calibração e para isso, foi desenvolvida uma rotina numérica baseada em transformada de Laplace para que os resultados sejam utilizados para comparar as formas de onda e estimar os erros relacionados à rotina numérica proposta neste trabalho.

Figura 43 – Utilizando a matriz 2x2 para determinar a estabilidade do sistema



Fonte: elaborado pelo autor

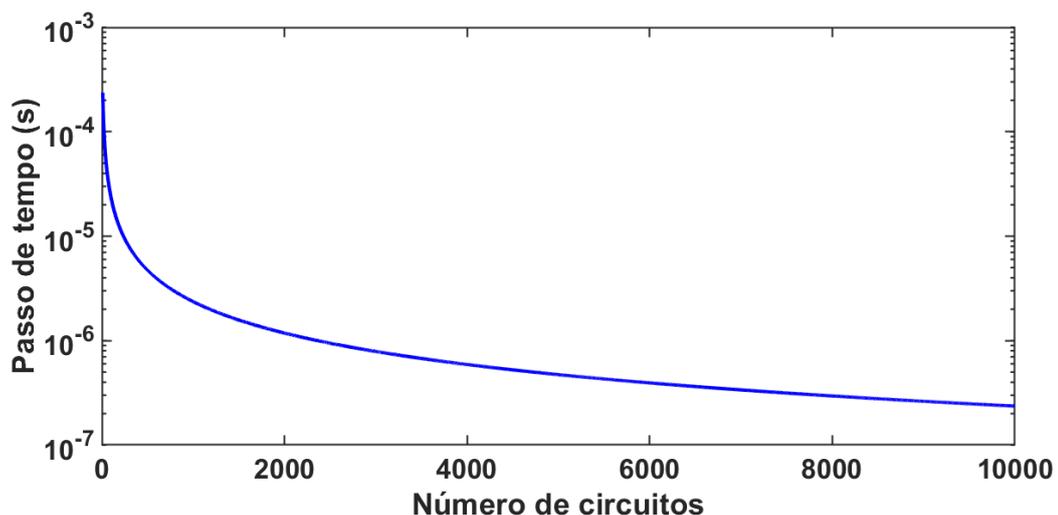
A princípio, foram determinados os melhores valores da quantidade de circuitos  $\pi$  e do passo de tempo. Os valores adequados para o passo de tempo estão relacionados com inverso da frequência fundamental do fenômeno analisado. Como esses dois parâmetros estão interrelacionados, é importante definir o conjunto desses parâmetros para posteriormente poder definir o valor dos fatores  $k_S$  e  $k_D$  que determinam os valores das resistências de amortecimento. Para tal determinação, foi utilizada uma rotina numérica baseada na aplicação de matrizes de ordem 2, mostrado na Figura 43 [8]. No entanto, essa rotina apresenta um limite de estabilidade numérica. Mesmo com esse limite de estabilidade, é possível determinar uma curva que relaciona as menores quantidades de erros numéricos provocados por oscilações numéricas ou oscilações de Gibbs. Isso é estimado em função do erro de maior pico de tensão no terminal final da linha simulada quando é simulada a propagação de um

degrau de tensão. Nessas condições, o maior pico de tensão ocorre durante a primeira reflexão da onda de tensão no terminal final da linha, quando o terminal está em aberto. A curva relacionada aos melhores conjuntos de quantidade de circuitos  $\pi$  e passo de tempo para o polo  $\alpha$  está mostrado na Figura 44.

A curva apresentada na Figura 44 é obtida pelo produto entre a quantidade de circuitos  $\pi$  e o passo de tempo utilizados para obter os melhores resultados aplicando a rotina numérica baseada em matrizes de ordem 2. Assim, para determinar o valor ideal desse produto, fixou-se um valor de circuitos  $\pi$  e, em seguida, o valor do passo de tempo foi determinado para o melhor resultado obtido. Para o caso do polo  $\alpha$ , a curva é relacionada ao valor constante do produto obtido entre 300 circuitos  $\pi$  e o passo de tempo de 7,877  $\mu\text{s}$ .

Utilizando a curva da Figura 44, as rotinas com a introdução das resistências de amortecimento serão analisadas, sendo determinados os melhores conjuntos de parâmetros de simulação (quantidade de circuitos  $\pi$ , passo de tempo e fator  $k_S$  ou  $k_D$ ). A seguir, as análises baseadas em gráficos tridimensionais serão apresentadas. Cada gráfico irá relacionar dois desses parâmetros com o pico de tensão na primeira reflexão de um degrau de tensão no terminal de carga de cada polo após a propagação simulada pela rotina numérica em desenvolvimento. O pico de tensão mencionado está relacionado diretamente com o maior erro percentual gerado por oscilações numéricas do método aplicado.

Figura 44 – Relação entre o passo de tempo e a quantidade de circuitos  $\pi$  para o polo alpha



Fonte: elaborado pelo autor

#### 4.2.1 Curvas de superfície relativas à relação entre quantidade de circuitos $\pi$ e passo de tempo

Essas curvas foram obtidas realizando a simulação da propagação de um degrau de tensão, sendo registrado o pico de tensão durante a reflexão dessa onda no terminal de carga da linha analisada, a quantidade de circuitos utilizada e o passo de tempo aplicado. O terminal de carga da linha estava em aberto e, portanto, a reflexão da onda de degrau de tensão foi total. A quantidade de circuitos  $\pi$  foi considerada no intervalo de 10 a 500 unidades com passo de 1 unidade a cada nova simulação. O passo de tempo teve variação de 1  $\mu$ s e foi considerado o intervalo de 1  $\mu$ s a 60  $\mu$ s. Foram obtidas curvas para o fator de proporcionalidade ( $k_S$  e  $k_D$ ) com os valores de 1, 3, 6 e 10. Abaixo serão apresentados os resultados para as simulações realizadas para o  $R_S$  e para o  $R_D$ , respectivamente.

Primeiramente, os resultados apresentados fazem referência as simulações realizadas com a introdução da resistência de amortecimento em série com o ramo transversal do circuito  $\pi$ , chamado de resistência *shunt* ( $R_S$ ).

Na Figura 45, os maiores valores de pico, próximos a 2,4 pu, estão relacionados a uma quantidade baixa de números de circuitos  $\pi$  e os menores passos de tempo na faixa analisada. Os valores do pico são maiores do que os relacionados ao modo homopolar, Figura 23, considerando os mesmos parâmetros.

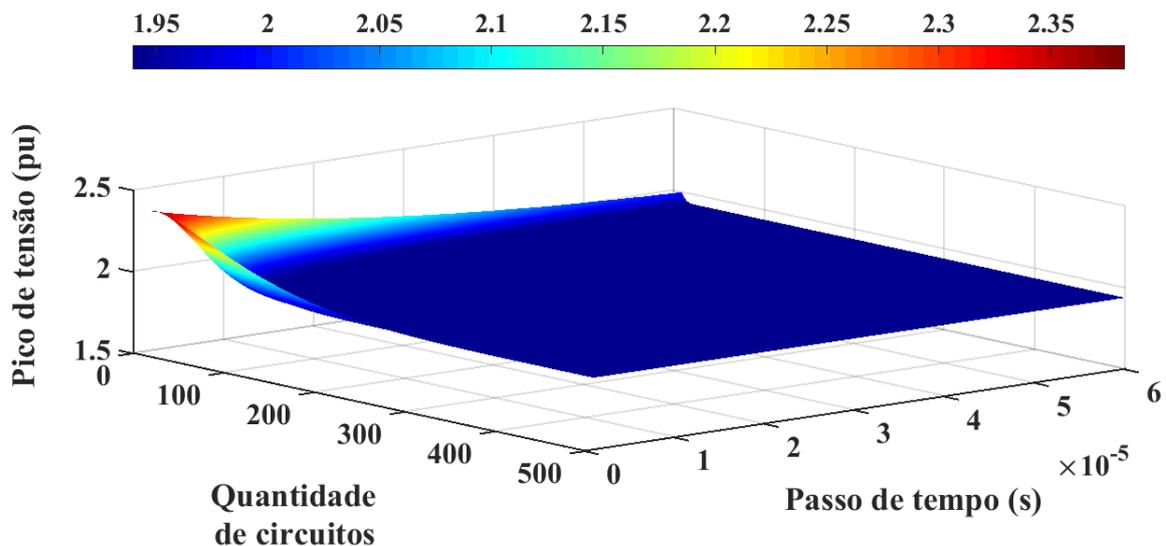
Esses maiores picos de tensão estão relacionados a uma grande quantidade de oscilações numéricas nas simulações de propagação de um degrau de tensão com terminal de carga em aberto. Nesse caso, o amortecimento das oscilações numéricas leva vários passos de tempo.

Os picos de tensão valores próximos a 1,95 pu, ou seja, na região de menores picos de tensão da curva de superfície plana do gráfico, são relacionados às simulações com menores erros causados por oscilações numéricas. No caso, dessa região da curva de superfície, os erros relacionados aos picos de tensão não ultrapassam 3% e as oscilações numéricas provocadas por tais picos são amortecidas em, no máximo, três passos de tempo. Os resultados após o amortecimento, com praticamente nenhuma oscilação numérica. O motivo pelo qual esses picos de tensão estão um valor abaixo de 2 pu é consequência da resistência do modo  $\alpha$ .

Além do amortecimento das oscilações numéricas, para o fator  $k_S$  igual a 1, os componentes de altas frequências do fenômeno que está sendo analisado também podem sofrer amortecimento. Isso depende da frequência fundamental do fenômeno

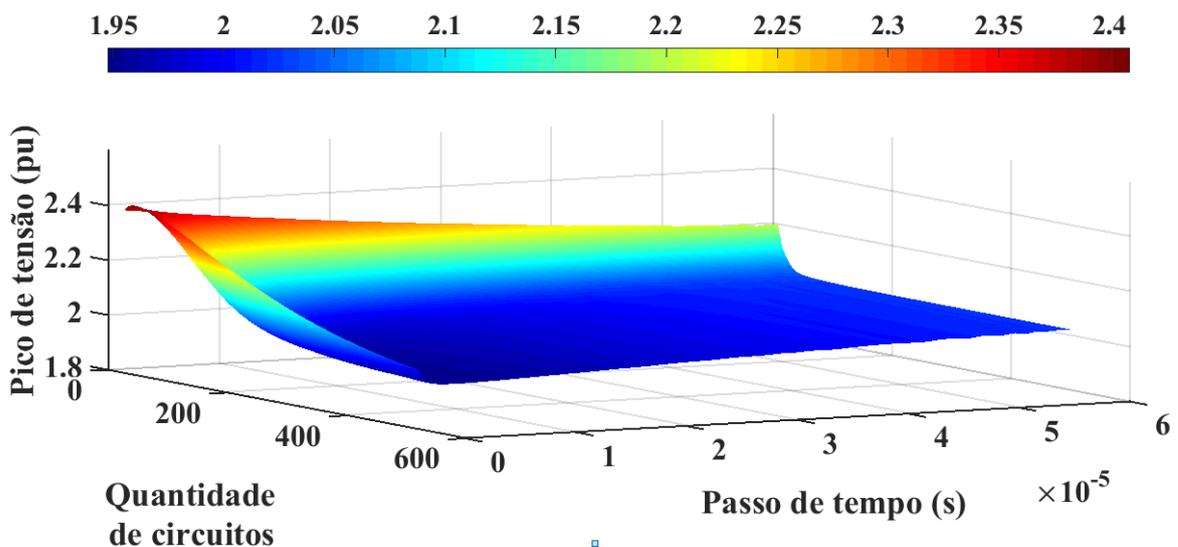
analisado e do passo de tempo utilizado na simulação numérica. Portanto, o fator  $k_S$  igual a 1 pode não ser adequado quando a frequência associada ao passo de tempo for muito próxima da maior frequência do fenômeno simulado. Essa relação é representada em (120).

Figura 45 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo  $\alpha$  para  $k_S = 1$  referente ao  $R_S$ .



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 46 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo  $\alpha$  e  $k_S = 3$  referente ao  $R_S$ .



Fonte: elaborado pelo autor

Na Figura 46, a região de maiores picos de tensão corresponde a ocorrência

de oscilações numéricas durante vários passos de tempo. Da mesma forma que acontece no caso da Figura 45, esses picos estão relacionados a quantidades baixas de número de circuitos  $\pi$  e os menores passos de tempo de acordo com a faixa analisada. Essas oscilações ocorrem por alguns passos de tempo.

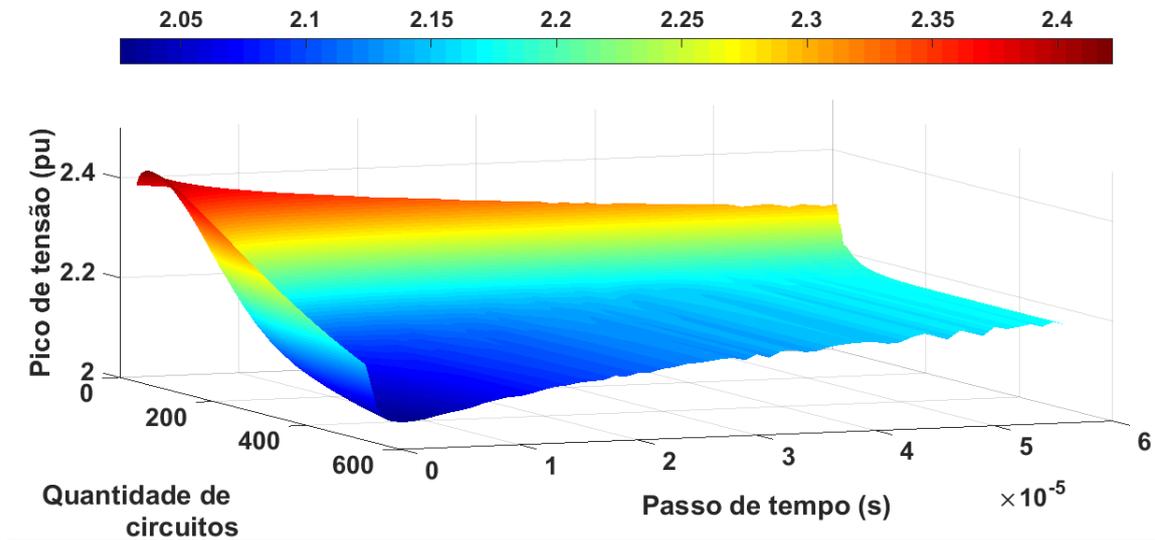
No caso da Figura 46, o amortecimento na maioria das simulações em que o pico de tensão não excede 5% do valor nominal de tensão (entre 2,05 pu e 1,95 pu) ocorre após três passos de tempo consecutivos (parte azulada da curva de superfície) e essas simulações estão relacionadas às menores quantidades de oscilações numéricas. A variação dos picos entre 1,95 e 2,05 pu está relacionada à resistência por unidade de comprimento do polo  $\alpha$ .

Utilizando o fator  $k_S$  com valor de 3, evita-se, em sua grande maioria, o amortecimento das frequências mais altas do fenômeno simulado considerando a aplicação de um valor adequado de passo de tempo. No caso de utilizar o fator  $k_S$  igual a 1, o passo de tempo deve ser muito pequeno e tornar o tempo computacional de simulação extremamente alto. Por esse motivo, o fator  $k_S$  igual a 3 pode ser considerado mais adequado entre os dois valores analisados nas Figuras 44 e 45. O fator  $k_S$  igual a 3 possui pouca influência em relação às frequências que constituem o fenômeno simulado quando um passo de tempo adequado é utilizado. No caso de  $k_S$  igual a 1, o passo de tempo deveria ter uma ordem de grandeza muito pequena em relação ao inverso da frequência mais alta do fenômeno para que a simulação do fenômeno não apresentasse distorção na propagação do sinal considerado.

Na Figura 47, a curva de superfície demonstra um aumento dos problemas causados por oscilações numéricas. Ou seja, os erros causados por oscilações numéricas são maiores que 5 % e o amortecimento dessas oscilações não ocorre em apenas três passos de tempo consecutivos. Tais resultados estão associados ao fator  $k_S$  com valor igual a 6.

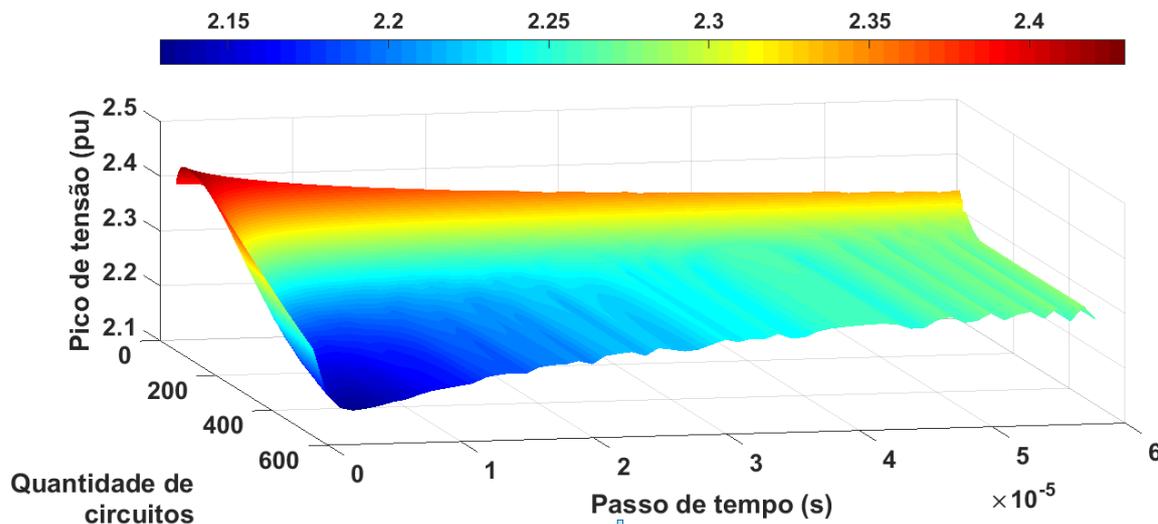
Na Figura 48, praticamente todas as vantagens da inclusão da resistência *shunt* em relação ao amortecimento das oscilações numéricas não são observadas nos resultados obtidos. Assim, os picos de tensão atingem valores próximos a 25 % do dobro do valor da tensão imposta no terminal de entrada do polo  $\alpha$ . As oscilações numéricas não são amortecidas em alguns poucos passos de tempo. Por tais motivos, o fator  $k_S$  com valor 10 não é adequado para aplicação de resistência *shunt* para amortecimento de erros numéricos em simulações de propagação de fenômenos transitórios em linhas de transmissão bifásicas.

Figura 47 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo  $\alpha$  para  $k_S = 6$  referente ao  $R_S$ .



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 48 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo  $\alpha$  para  $k_S = 10$  referente ao  $R_S$ .



Fonte: elaborado pelo autor

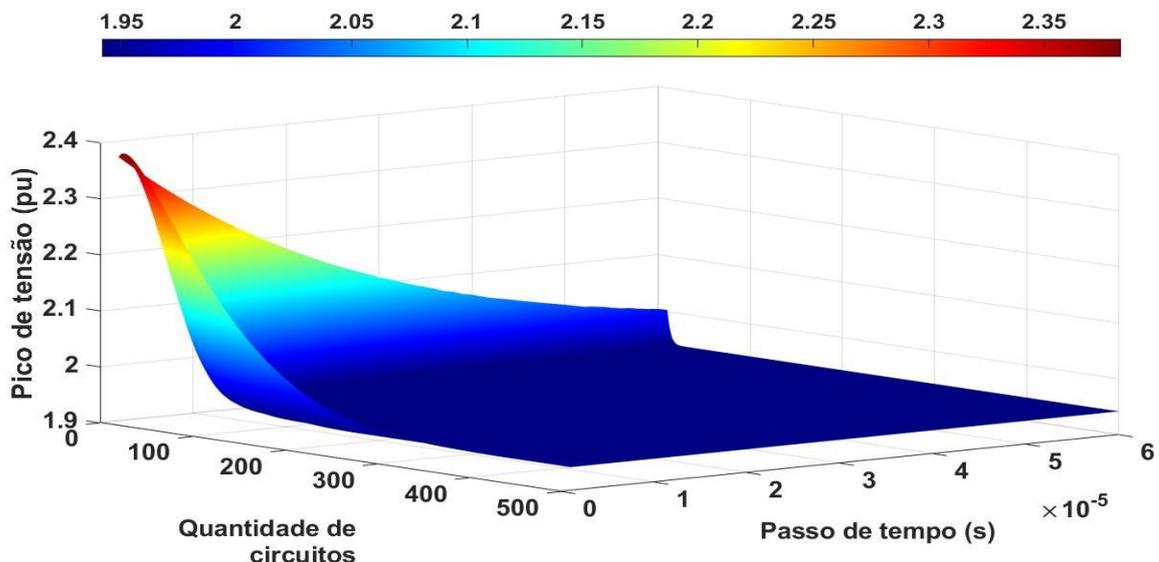
Finalizando as análises feitas alterando o valor de  $k_S$  nas simulações, em que os valores desse fator de proporcionalidade fazem referência ao valor da resistência de amortecimento inserido em série com o ramo transversal ( $R_S$ ). A seguir, serão apresentadas as mesmas análises e simulações realizadas para o fator de proporcionalidade  $k_D$ . Esse fator de proporcionalidade faz referência à resistência de amortecimento em paralelo ao ramo longitudinal ( $R_D$ ).

Com isso, as análises a seguir são referentes as simulações para o modo alpha ( $\alpha$ ) onde inclui a resistência de amortecimento em paralelo ao ramo longitudinal do circuito  $\pi$ .

A Figura 49 trata-se da simulação referente ao fator de proporcionalidade  $k_D$  igual a 1. Em que o pico de tensão na primeira reflexão da onda no terminal de carga é de 2,4 pu onde se encontra as maiores oscilações numéricas. Essas maiores oscilações numéricas estão presentes quando se tem poucas unidades de circuitos  $\pi$  e menores passos de tempo. Após alguns passos de tempo, há um amortecimento das oscilações numéricas, em que o valor após o amortecimento se aproxima de 1,95 pu para o polo  $\alpha$ .

Como observado na Figura 49, o gráfico referente ao  $R_D$  apresenta uma maior capacidade de minimizar oscilações numéricas com menor número de circuitos  $\pi$  comparado ao gráfico referente ao  $k_S$  na Figura 45. No entanto, tanto para a análise com relação ao  $k_S$  e ao  $k_D$ , ambos apresentam uma grande área relativa à minimização de oscilações numéricas.

Figura 49 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo  $\alpha$  para  $k_D = 1$  referente ao  $R_D$ .



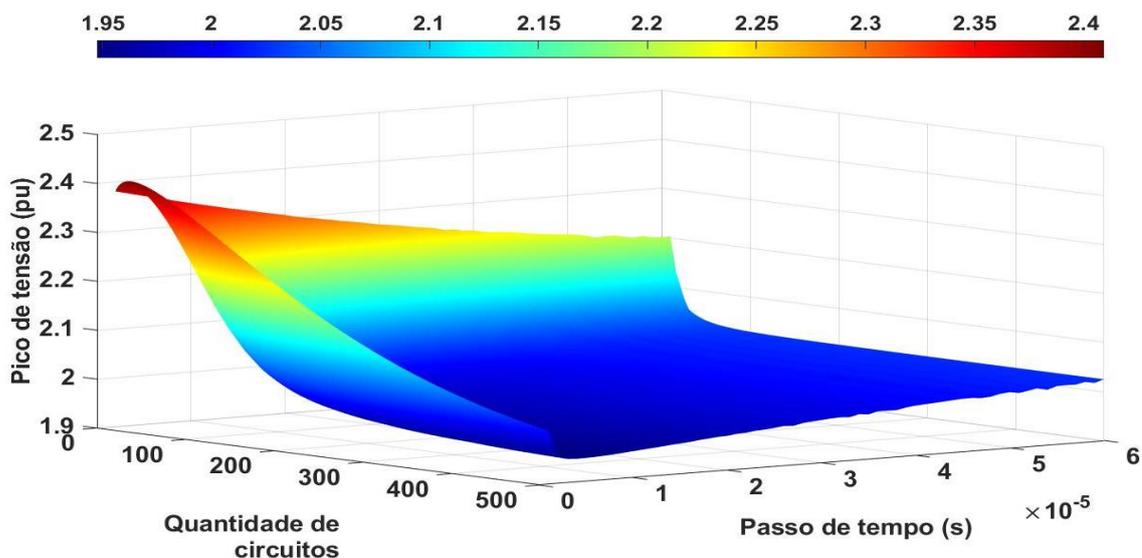
Fonte: elaborado pelo autor

Para o fator  $k_D$  igual a 1, além do amortecimento das oscilações numéricas, os componentes de altas frequências do fenômeno que está sendo analisado também podem sofrer amortecimento. Isso depende da frequência fundamental do fenômeno

analisado e do passo de tempo utilizado na simulação numérica. Portanto, o fator  $k_D$  igual a 1 pode não ser adequado quando a frequência associada ao passo de tempo for muito próxima da maior frequência do fenômeno simulado. Essa relação foi apresentada em (120).

Quando o fator de proporcionalidade  $k_D$  for igual à 3 que está sendo apresentado na Figura 50. Obtém-se um resultado semelhante ao que foi obtido para o  $k_S$ . Sendo que o pico máximo de tensão é 2,4 pu, onde está determinado as maiores oscilações numéricas. Em aproximadamente 1,95 pu é determinada pela área de menor oscilação numérica, após o amortecimento das oscilações. No caso, dessa região da curva de superfície, os erros relacionados aos picos de tensão não ultrapassam 5% (entre 2,05 pu e 1,95 pu) e as oscilações numéricas provocadas por tais picos são amortecidas em, no máximo, três passos de tempo. Os resultados após o amortecimento, com praticamente nenhuma oscilação numérica. Esses picos de tensão possuem valor abaixo de 2 pu devido a consequência da resistência do modo  $\alpha$ . As oscilações numéricas para o fator  $k_D$  igual 3 são amortecidas com circuitos  $\pi$  acima de 150 unidades.

Figura 50 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo  $\alpha$  para  $k_D = 3$  referente ao  $R_D$ .



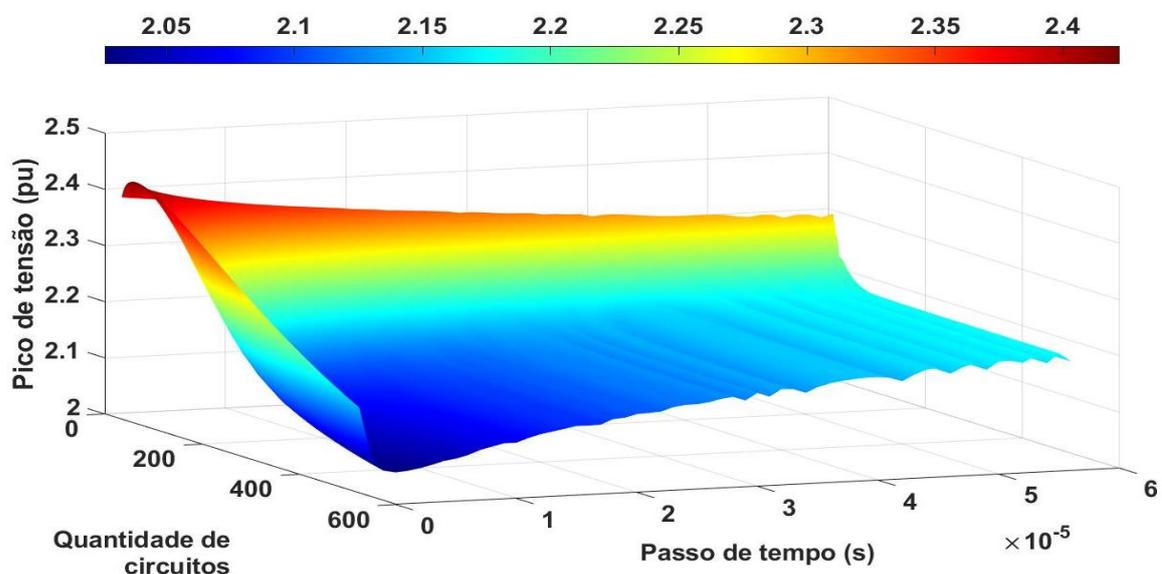
Fonte: elaborado pelo autor

Utilizando o fator  $k_D$  com valor de 3, evita-se, em sua grande maioria, o amortecimento das frequências mais altas do fenômeno simulado considerando a

aplicação de um valor adequado de passo de tempo. No caso de utilizar o fator  $k_D$  igual a 1, o passo de tempo deve ser muito pequeno e tornar o tempo computacional de simulação extremamente alto. Por esse motivo, o fator  $k_D$  igual a 3 pode ser considerado mais adequado entre os dois valores analisados nas Figuras 49 e 50. O fator  $k_D$  igual a 3 possui pouca influência em relação às frequências que constituem o fenômeno simulado quando um passo de tempo adequado é utilizado. No caso de  $k_D$  igual a 1, o passo de tempo deveria ter uma ordem de grandeza muito pequena em relação ao inverso da frequência mais alta do fenômeno para que a simulação do fenômeno não apresentasse distorção na propagação do sinal considerado. Os resultados obtidos para a resistência de amortecimento  $R_S$  e  $R_D$  apresentam semelhanças entre si para os fatores de proporcionalidade iguais a 1 e 3.

A Figura 51 apresenta o fator de proporcionalidade  $k_D$  sendo igual a 6. Para esse fator de proporcionalidade tem-se um aumento dos problemas causados pelas oscilações numéricas. A área de menor oscilação numérica é menor com relação aos fatores de proporcionalidade apresentados anteriormente, para que as oscilações numéricas sejam amortecidas, necessita de mais do que passos de tempo. Além disso, há algumas ondulações no gráfico ocasionando uma instabilidade em determinados pontos, quando relacionado grandes quantidades de circuitos  $\pi$  e altos passos de tempo.

Figura 51 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo  $\alpha$  para  $k_D = 6$  referente ao  $R_D$ .

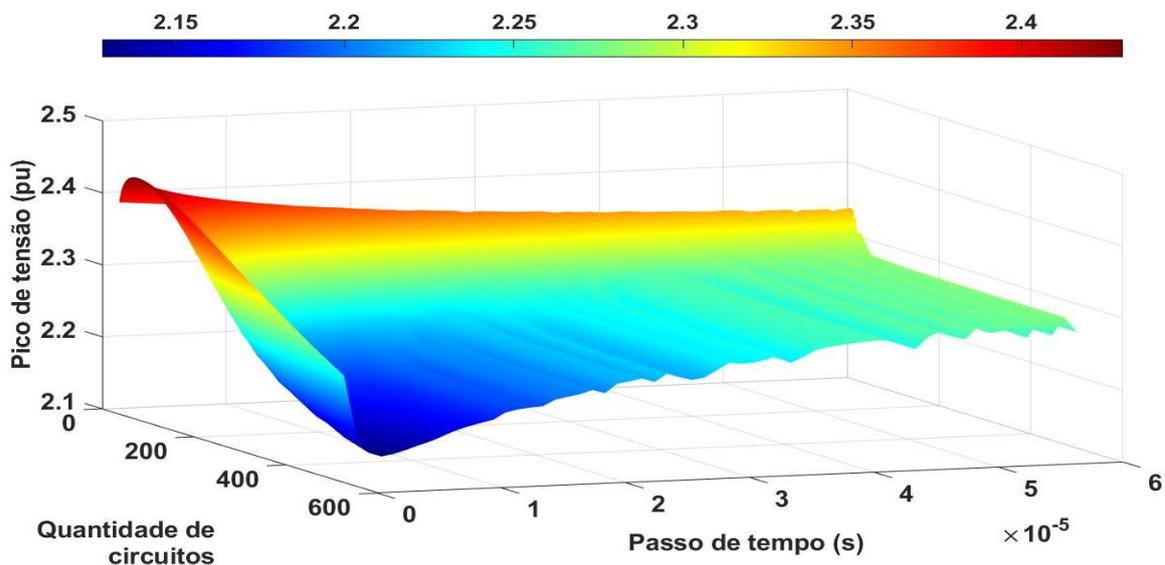


Fonte: elaborado pelo autor

Já quando se utiliza o fator de proporcionalidade  $k_D$  igual a 10, apresentado na Figura 52, há grandes ondulações no gráfico 3D que ocasionam em maiores oscilações numéricas. Com isso, já não apresenta vantagem ao utilizar a resistência de amortecimento com esse valor do fator de proporcionalidade.

Por esses motivos, tanto o fator de proporcionalidade igual a 6 quando igual a 10, não são adequados para minimizar as oscilações numéricas ocasionadas para o circuito  $\pi$  clássico.

Figura 52 – Picos de tensão na primeira reflexão de degrau de tensão no terminal de carga do polo  $\alpha$  para  $k_D = 10$  referente ao  $R_D$ .



Fonte: elaborado pelo autor

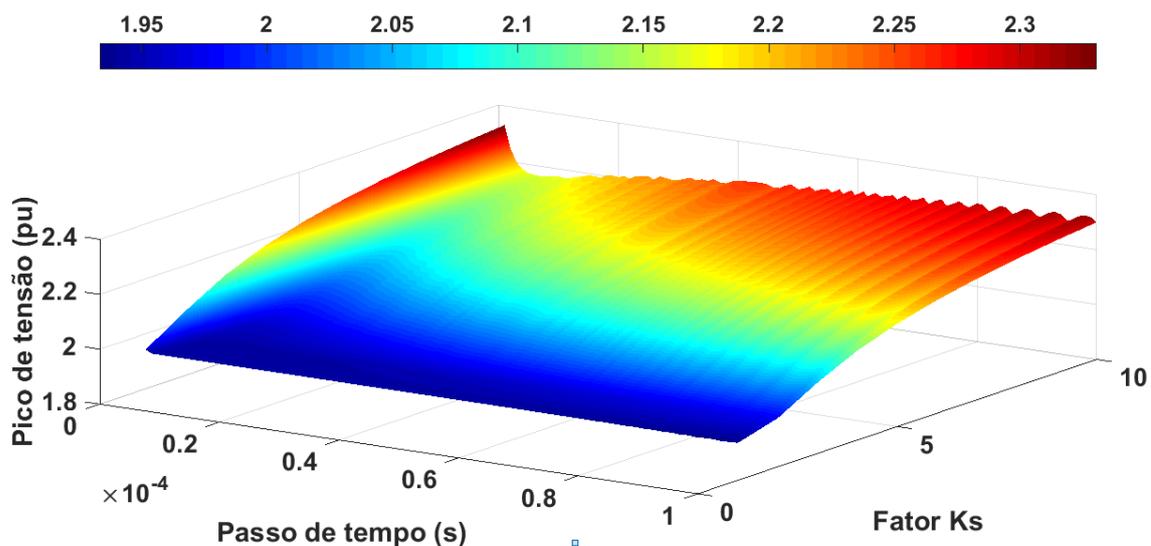
Comparando os resultados ao variar os valores de  $k_S$  e  $k_D$  nas simulações pode ser observado uma semelhança entre ambos. Para o fator de proporcionalidade igual a 1, há um amortecimento das oscilações numéricas mais rapidamente, porém há também, um amortecimento do fenômeno analisado. Para o fator de proporcionalidade igual a 3, há uma grande área amortecida. O fenômeno analisado não sofre amortecimento devido ao  $\Delta t$  utilizado para o fenômeno analisado. Com isso, esse fator de proporcionalidade (igual a 3) tanto para o  $R_S$  quanto para o  $R_D$  é o mais adequado para utilizar para esse fenômeno analisado, que no caso é um degrau unitário. Já para o fator de proporcionalidade igual a 6 e 10, não são adequados para utilização, pois apresentam ondulações no gráfico ocasionando oscilações numéricas severas e instabilidade no sistema.

#### 4.2.2 Curvas de superfície relativas à relação entre passo de tempo e fator de proporcionalidade

Nestas curvas de superfície, foram comparados os picos de tensão na primeira reflexão de um degrau de tensão no terminal de carga após propagação pelo polo  $\alpha$  considerando valores do fator de proporcionalidade ( $k_S$  e  $k_D$ ) entre 1 a 10 e passos de tempo entre  $1\mu s$  a  $60\mu s$ . Foram obtidas curvas de superfícies para 300 e 500 circuitos  $\pi$ . Abaixo serão apresentados os resultados para as simulações realizadas para o  $R_S$  e para o  $R_D$ , respectivamente.

Da mesma maneira que foi apresentado no tópico acima, serão apresentadas as análises realizadas para a resistência *shunt* ( $R_S$ ) e posteriormente a resistência de amortecimento em paralelo ao ramo longitudinal ( $R_D$ ).

Figura 53 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo  $\alpha$ ,  $n = 300$  e escala linear para o passo de tempo referente ao  $R_S$ .

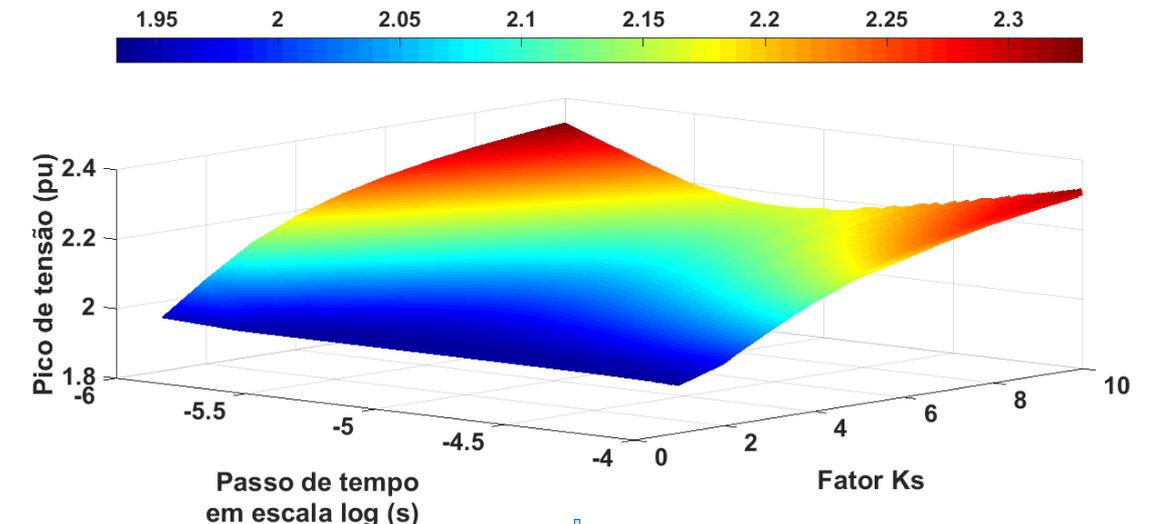


Fonte: elaborado pelo autor

Os resultados apresentados a seguir fazem referência as simulações realizadas com a introdução da resistência de amortecimento em série com o ramo transversal do circuito  $\pi$ , chamado de resistência *shunt* ( $R_S$ ). De acordo com as Figuras 53 e 54, a utilização do fator  $k_S$  com valores maiores que 4 não é adequada para a maioria dos valores de passo de tempo, pois os picos de tensão tendem a maiores erros em relação ao dobro do valor de tensão imposto no terminal de entrada da linha. Ao considerar as perdas resistivas durante a propagação da onda através do

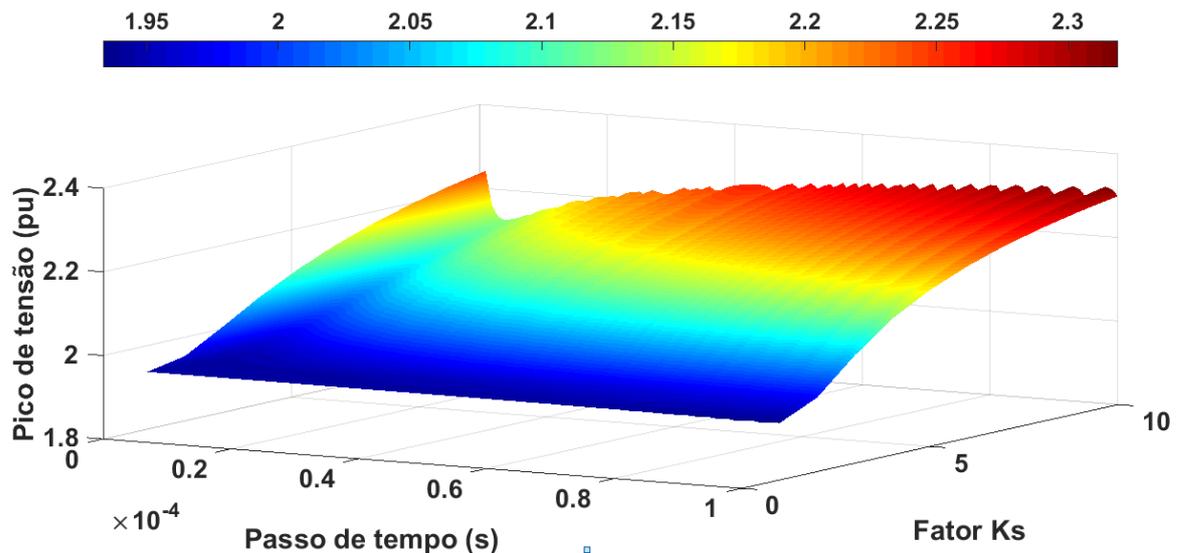
modo  $\alpha$ , o erro percentual entre o valor esperado para a tensão no terminal de carga e o pico atingido chega a erros de aproximadamente 25%. Porém, considerando pequenos valores de passo de tempo, pode-se utilizar valores do fator  $k_s$  de até 6.

Figura 54 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo  $\alpha$ ,  $n = 300$  e escala logarítmica para passo de tempo referente ao  $R_s$ .



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 55 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo  $\alpha$ ,  $n = 500$  e escala linear para passo de tempo referente ao  $R_s$ .



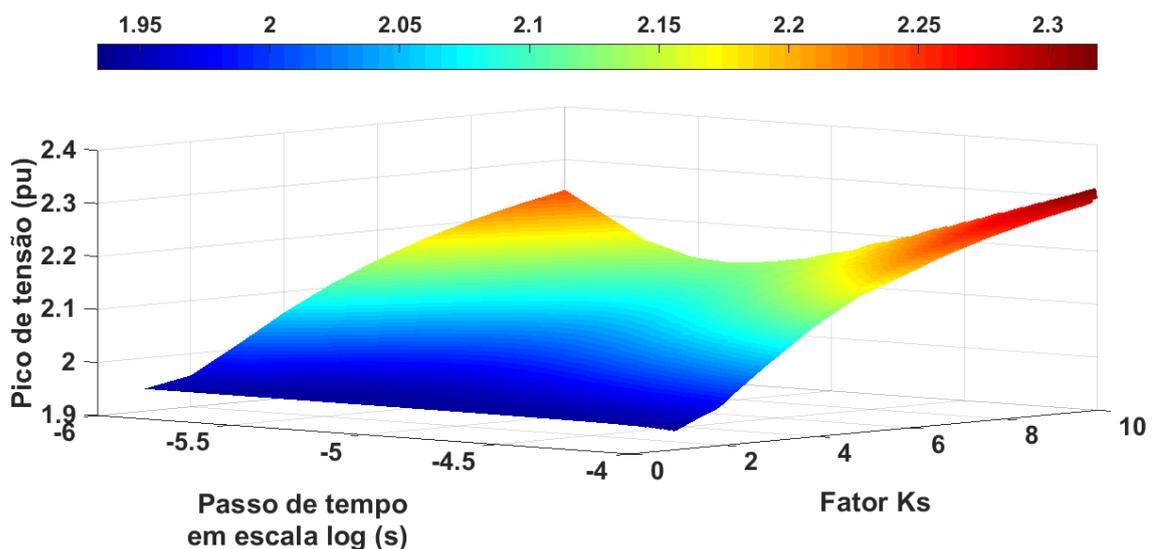
Fonte: elaborado pelo autor

Com o aumento da quantidade de circuitos  $\pi$ , nas Figuras 55 e 56, a faixa de valores adequados para simulações com redução das oscilações numéricas também

é ampliada. Os valores adequados de  $k_S$  vão até 5 ou 6 na maior parte dos passos de tempo analisados.

Com isso, finaliza-se as análises realizadas para os parâmetros de resistência de amortecimento  $R_S$ . Foi observado que ao aumentar a quantidade de circuitos  $\pi$  para simulação, o fator de proporcionalidade ( $k_S$ ) também sofre um pequeno aumento com relação aos parâmetros analisados.

Figura 56 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo  $\alpha$ ,  $n = 500$  e escala logarítmica para passo de tempo referente ao  $R_S$ .



Fonte: elaborado pelo autor

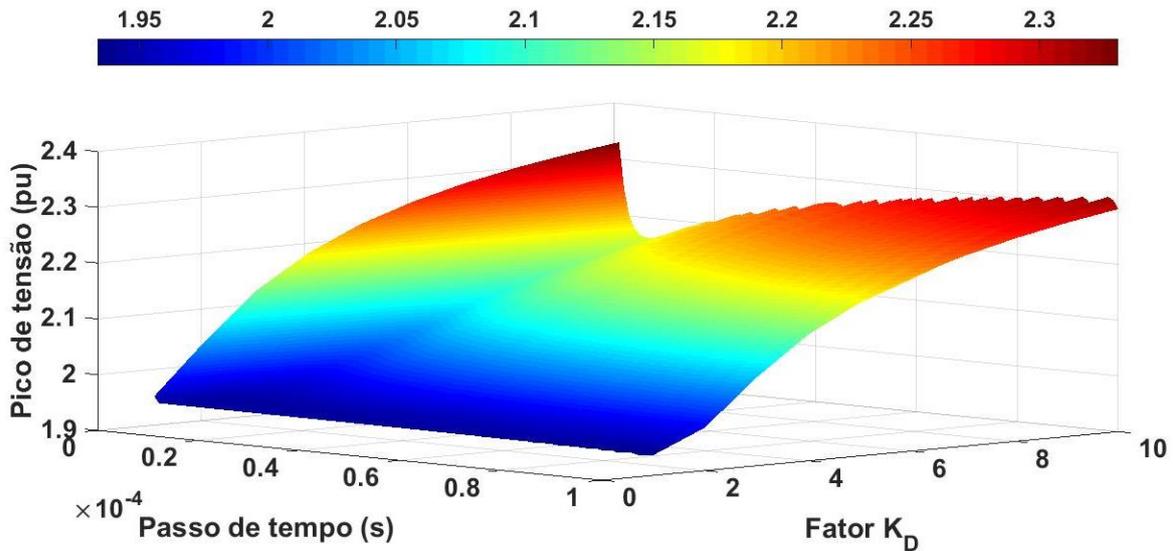
Os resultados apresentados em sequência fazem referência as simulações realizadas com a introdução da resistência de amortecimento em paralelo com o ramo longitudinal do circuito  $\pi$  ( $R_D$ ).

Os resultados mostrados nas Figuras 57 e 58 apresentam semelhança ao que foi obtido utilizando a introdução da resistência de amortecimento em série com o ramo transversal, ou  $R_S$ , mostrado nas Figuras 53 e 54. Utilizando a quantidade de circuitos  $\pi$  em 300 unidades pode-se observar que para a maioria dos passos de tempo apresentados no gráfico, o fator de proporcionalidade ( $k_D$ ) deve ser considerado menor que 4 para que esteja em uma região de menor oscilação numérica. Essa região de menor oscilação numérica para o modo  $\alpha$  é de aproximadamente 1,95 pu. O pico máximo de tensão na reflexão de degrau de tensão é em 2,35 pu, essa região é a de maior oscilação numérica.

Quando há um aumento na quantidade de circuitos  $\pi$  analisados, simulando

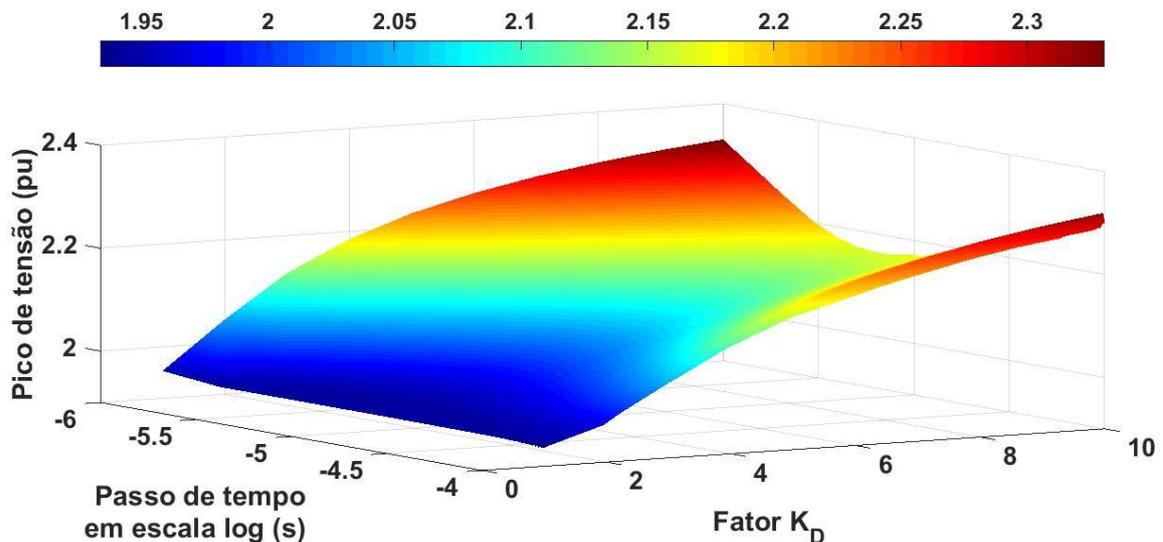
500 unidades. Mesmo assim, continua existindo uma similaridade entre os resultados obtidos para  $R_S$  e  $R_D$ . Aumentando a quantidade de unidades do circuito  $\pi$ , há também um aumento do fator de proporcionalidade.

Figura 57 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo  $\alpha$ ,  $n = 300$  e escala linear para passo de tempo referente ao  $R_D$ .



Fonte: elaborado pelo autor

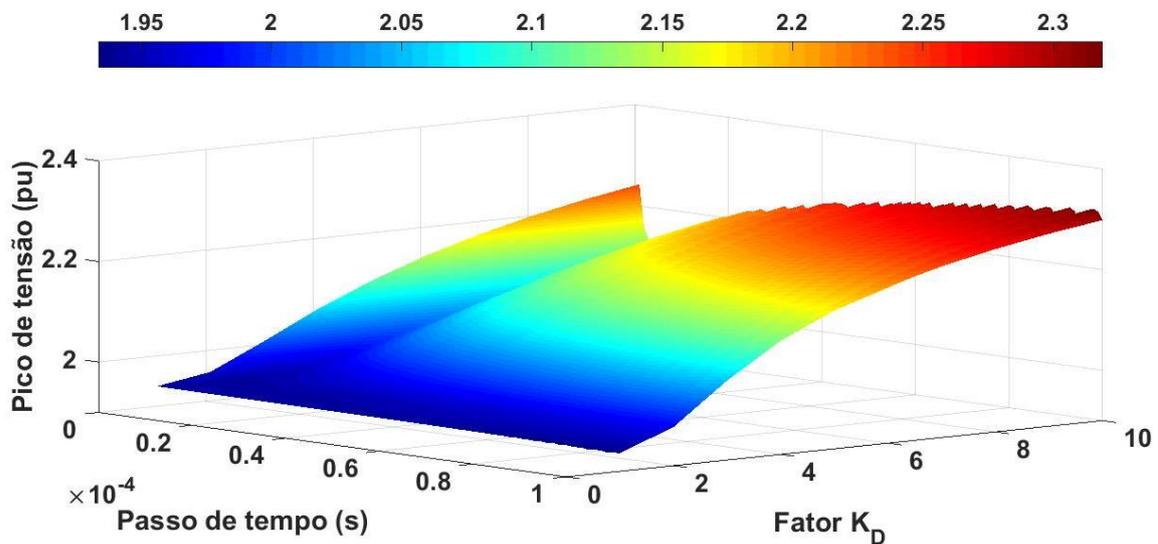
Figura 58 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo  $\alpha$ ,  $n = 300$  e escala logarítmica para passo de tempo referente ao  $R_D$ .



Fonte: elaborado pelo autor

Para 500 unidades de circuito  $\pi$  analisadas, o fator de proporcionalidade  $k_D$  menor que 5, pode ser utilizado para a maior parte da quantidade de passos de tempo. Porém, em algumas partes do gráfico apresentado na Figura 59 pode ser estendida para o fator  $k_D$  sendo igual a 6. A mesma análise observada na Figura 59 que representa uma escala linear para o passo de tempo, pode ser observada na Figura 60, em que o passo de tempo está sendo representado em uma escala logarítmica.

Figura 59 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo  $\alpha$ ,  $n = 500$  e escala linear para passo de tempo referente ao  $R_D$ .



Fonte: elaborado pelo autor

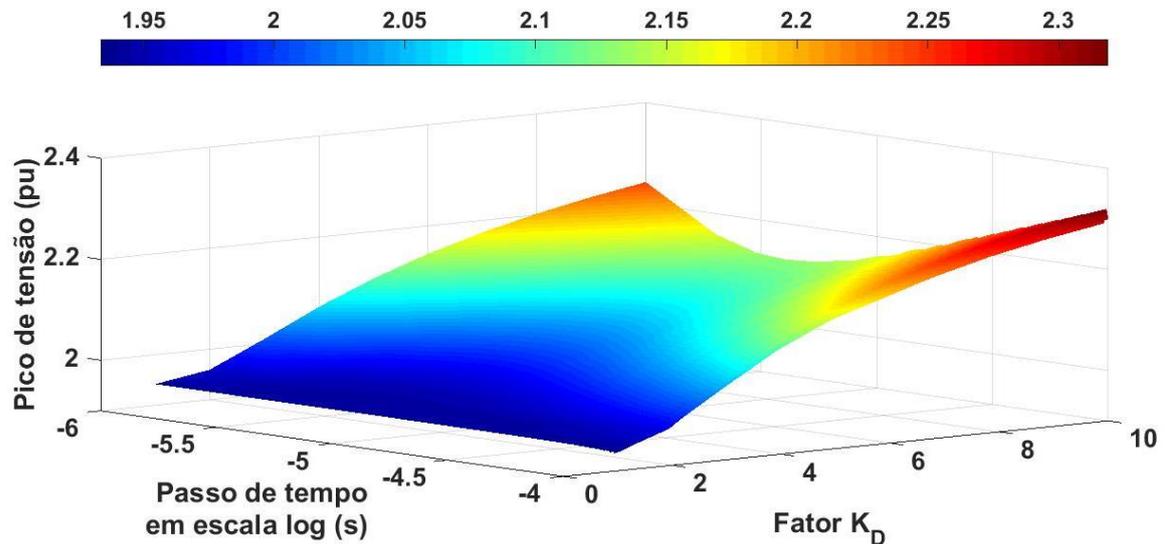
Considerando os valores do fator de proporcionalidade  $k_D$  acima dos valores mencionados anteriormente ocasionam a erros significativos com relação ao valor esperado no terminal de carga da linha. Esse valor, teoricamente, seria o dobro do valor no terminal inicial da linha.

Comparando os resultados para a quantidade de circuitos  $\pi$  entre 300 e 500 unidades, com o aumento desses valores, há também um aumento nos valores do fator de proporcionalidade utilizados. Com isso, pode-se dizer que a relação entre a quantidade de circuitos  $\pi$  e os fatores de proporcionalidade são diretamente proporcionais.

Após essas análises, foi possível comparar os valores obtidos para o  $R_S$  e  $R_D$ . Os resultados apresentados são semelhantes entre si, os valores do fator de proporcionalidade, para que o pico de tensão na reflexão da onda tenha menos

oscilações numéricas, são próximos para a quantidade de circuitos  $\pi$  analisados.

Figura 60 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo  $\alpha$ ,  $n = 500$  e escala logarítmica para passo de tempo referente ao  $R_D$ .



Fonte: elaborado pelo autor

#### 4.2.3 Curvas de superfície relativas à relação entre circuitos $\pi$ e fator de proporcionalidade

Nestas curvas de superfície, foram comparados os valores do fator de proporcionalidade ( $k_S$  e  $k_D$ ) variando de 1 a 10 e o número de circuitos  $\pi$  variando entre 10 e 500. Foram obtidas curvas de superfície para os passos de tempo de  $0,5\mu s$  e  $1\mu s$ . Abaixo serão apresentados os resultados para as simulações realizadas para o  $R_S$  e para o  $R_D$ , respectivamente.

Da mesma maneira que anteriormente, serão apresentados, em primeiro momento, os resultados da análise de  $R_S$  e posteriormente para  $R_D$ .

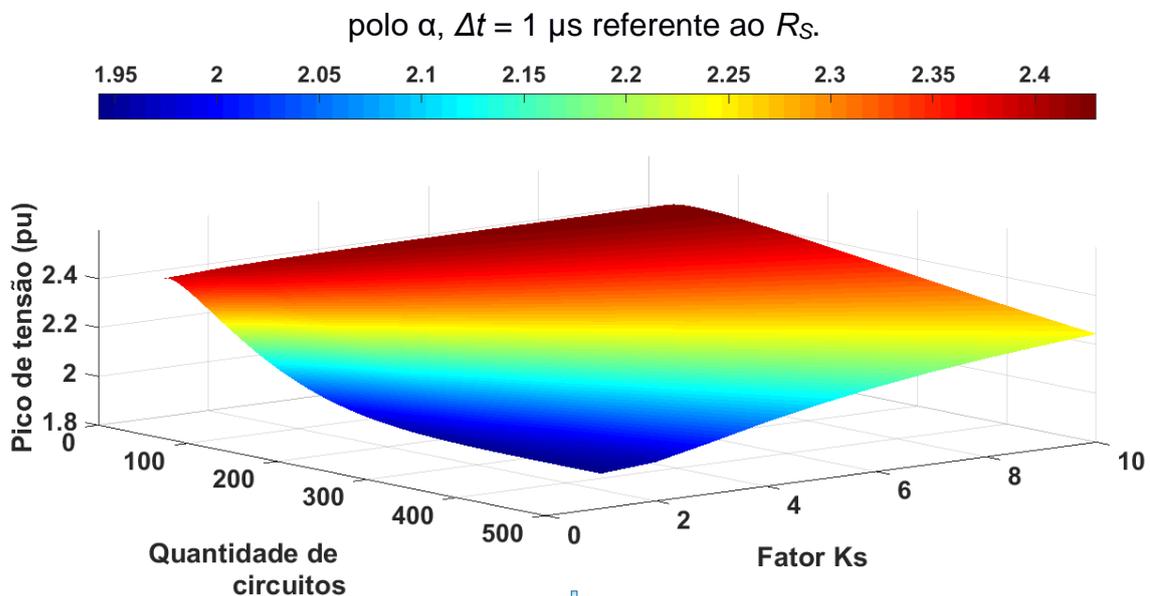
Iniciando os resultados para  $R_S$  em que foi variado o valor do passo de tempo, foi encontrado uma faixa de valores dos parâmetros analisados (quantidade de circuitos  $\pi$  e fator de proporcionalidade) que apresentem menores oscilações numéricas. A seguir, as análises desses resultados são apresentadas.

De acordo com a Figura 61, as simulações que contém reduzidas oscilações numéricas são obtidas utilizando valores de  $k_S$  abaixo de 4 e o número de circuitos  $\pi$  acima de 250. A variação apresentada na Figura 61, apresenta semelhança com a curva de relação otimizada entre a quantidade de circuitos  $\pi$  e o passo de tempo.

Essa curva foi obtida baseada em matrizes de ordem 2 e foi mostrada na Figura 44. A inclusão da resistência *shunt*, além de minimizar as oscilações numéricas, possibilitou intervalos de ajuste para a quantidade de circuitos  $\pi$  e passo de tempo ao evitar o problema de instabilidade numérica encontrado na aplicação da rotina numérica baseada em matrizes de ordem 2 [8-10].

Analisando a Figura 62, com a diminuição do passo de tempo, de  $1\mu\text{s}$  para  $0,5\mu\text{s}$ , há a necessidade de aumentar a quantidade de circuitos  $\pi$  para continuar obtendo os resultados com oscilações numéricas reduzidas. Isso pode ser observado comparando as Figuras 61 e 62.

Figura 61 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga,

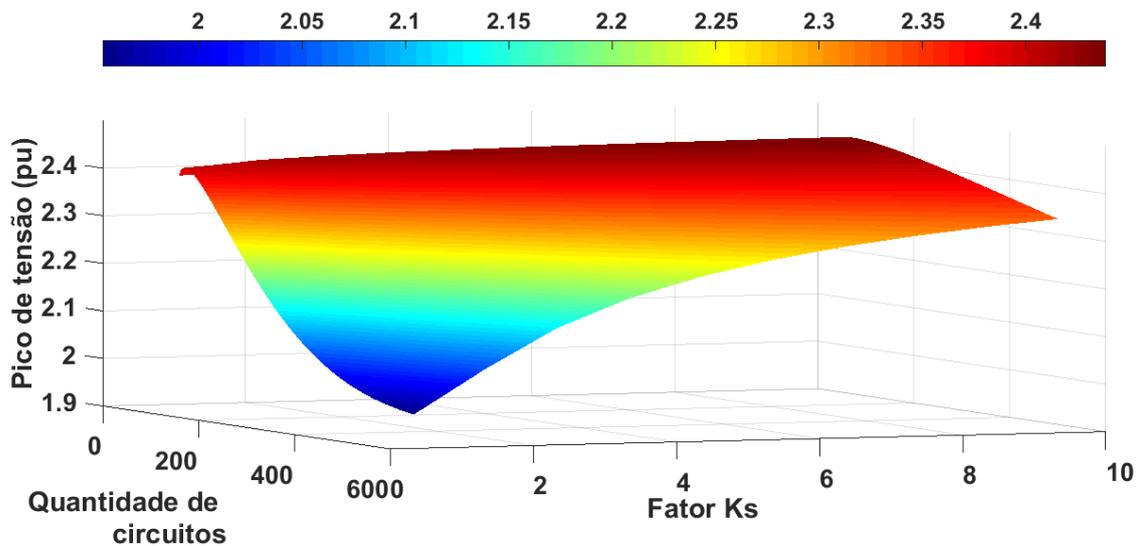


O melhor passo de tempo a ser utilizado, irá depender da quantidade de circuitos  $\pi$  aplicada. E esses dois fatores dependem das frequências associadas ao fenômeno simulado. Por esse motivo, as curvas apresentadas podem ser utilizadas como modo de direcionar a escolha do melhor ajuste dos parâmetros numéricos da rotina apresentada para simulação de fenômenos transitórios em linhas de transmissão. Com isso, encerra-se as análises feitas utilizando a resistência de amortecimento em série com o ramo transversal do circuito  $\pi$  ( $R_s$ ) para o polo  $\alpha$ .

Em sequência, será feita a mesma análise apresentada anteriormente para a resistência de amortecimento em paralelo ao ramo longitudinal ( $R_D$ ) para finalizar as análises realizadas para o polo  $\alpha$ . Na Figura 63, a simulação realizada é considerando

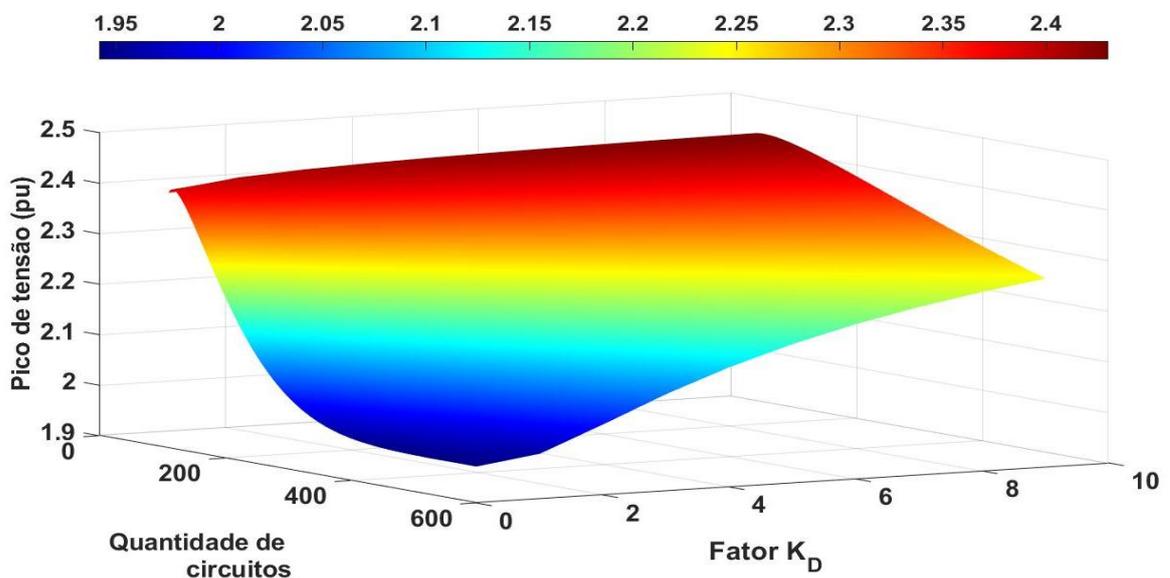
o passo de tempo igual a  $1\mu\text{s}$ . Comparando ao resultado apresentado na Figura 61, pode-se perceber um mesmo padrão entre ambos. Com isso, para obter menores oscilações numéricas, a quantidade de circuitos  $\pi$  deve ser maior do que 200 unidades e o fator de proporcionalidade deverá ser menor do que 5.

Figura 62 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo  $\alpha$ ,  $\Delta t = 0,5\ \mu\text{s}$  referente ao  $R_S$ .



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 63 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo  $\alpha$ ,  $\Delta t = 1\ \mu\text{s}$  referente ao  $R_D$ .



Fonte: elaborado pelo autor

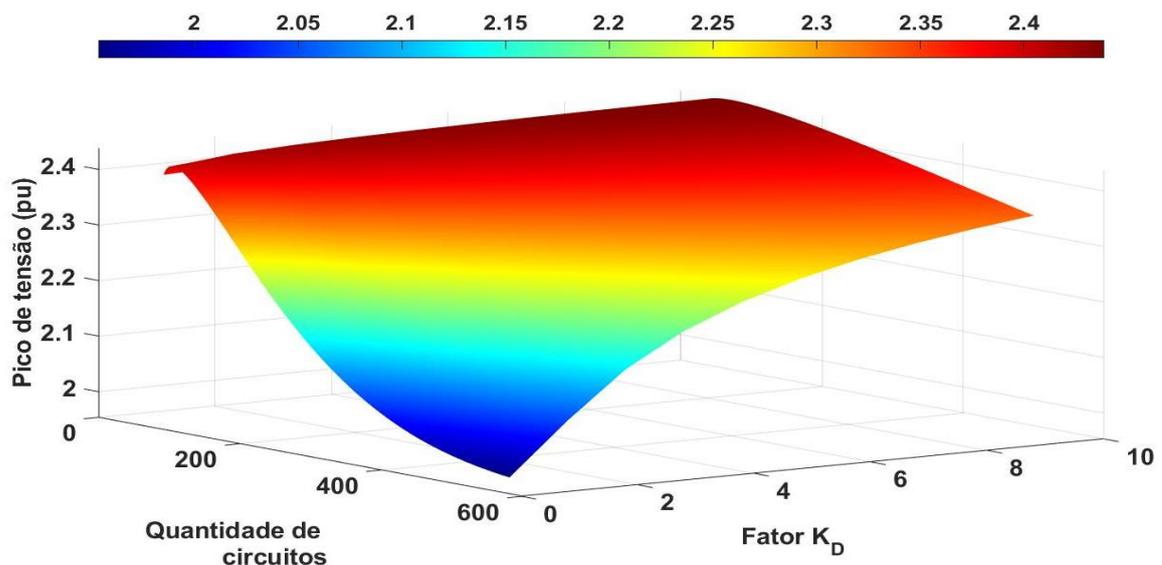
Os resultados apresentados para a resistência  $R_S$  e  $R_D$  são próximos para o mesmo passo de tempo de  $1\mu s$ , porém não são iguais.

Caso os valores estejam fora desses intervalos, há a presença de maiores oscilações numéricas pois, ainda não foram amortecidos os picos de tensão nas reflexões da onda.

Quando o passo de tempo é reduzido para  $0,5\mu s$ , como apresentado na Figura 64, o resultado continua tendo o mesmo padrão obtido para a análise realizada para a resistência de amortecimento  $R_S$ . Para que o pico de tensão na reflexão da onda apresentar menores oscilações numéricas, com a redução do passo de tempo, há a necessidade de aumentar a quantidade de circuitos  $\pi$ , passando a ser mais adequada a utilização de mais do que 300 unidades. Com relação ao fator de proporcionalidade, há uma pequena mudança, considerando esse fator menor ou igual a 3.

Da mesma maneira que ocorreu para  $1\mu s$ , também ocorre para  $0,5\mu s$ , os valores dos parâmetros analisados são próximos tanto para  $R_S$  quanto para  $R_D$ , sofrendo pequenas alterações, mas mantendo o mesmo padrão de resultados.

Figura 64 – Picos de tensão na reflexão de degrau de tensão no terminal de carga, polo  $\alpha$ ,  $\Delta t = 0,5\mu s$  referente ao  $R_D$ .



Fonte: elaborado pelo autor

Com isso, encerra-se as análises realizadas para a resistência de amortecimento incluída em paralelo ao ramo longitudinal ( $R_D$ ). Foi possível observar

que os valores entre os resultados referentes as resistências  $R_S$  e  $R_D$  são próximos e ambas apresentam semelhanças de comportamento.

De acordo com os resultados apresentados, foi possível determinar que os parâmetros analisados possuem proporcionalidades diretas ou inversas entre si. No caso de quantidade de circuitos  $\pi$  e o fator de proporcionalidades, os mesmos são diretamente proporcionais, já a quantidade de circuitos  $\pi$  e o passo de tempo, são inversamente proporcionais. Portanto, a relação entre o passo de tempo e o fator de proporcionalidade são inversamente proporcionais. Com essas proporcionalidades e as análises apresentadas anteriormente, pode-se determinar faixas de valores para os parâmetros verificados, sejam eles, a quantidade de circuitos  $\pi$ , o fator de proporcionalidade e o passo de tempo, para representar menores oscilações numéricas.

Por fim, analisando os resultados para o polo homopolar e o polo  $\alpha$  foi determinado uma semelhança nos resultados, porém devido a cada polo ser independente um do outro e possuir parâmetros próprios, as faixas de valores dos parâmetros analisados são diferentes.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As linhas de transmissão podem ser facilmente representadas utilizando circuitos lineares baseados em parâmetros concentrados quando associados a um número elevado de elementos. Esses elementos podem constituir métodos numéricos para a simulação dos transitórios eletromagnéticos. Neste trabalho, as linhas de transmissão são representadas utilizando uma cascata de circuitos  $\pi$ . A modelagem numérica utilizada baseia-se na integração trapezoidal. A proposta inicial do trabalho é modificar os circuitos  $\pi$ , com a inserção de uma resistência de amortecimento para minimizar as oscilações numéricas causadas pelo circuito  $\pi$  clássico.

O desenvolvimento deste trabalho é baseado considerando linhas de transmissão representadas por um circuito bifásico. Nas simulações são consideradas os parâmetros da linha de Itaipu. Por esse motivo, foi necessário a introdução de uma transformação fase-modo. O que dificulta a análise com relação a uma linha monofásica. A transformação fase-modo tem o intuito de desacoplar as fases, deixando-as independentes para análise. Por esse motivo, foi considerado dois polos, o polo 0 e o polo  $\alpha$ , que são o resultado da transformação fase-modo de uma linha bifásica. A linha representada pelo polo 0 e pelo polo  $\alpha$  é analisada separadamente. Cada polo analisado possui característica própria, devido a transformação fase-modo, com valores dos componentes concentrados diferentes uma da outra. Esses valores diferentes de componentes, ocasiona em diferentes velocidades de propagação e desempenho. Portanto, foi analisado os mesmos parâmetros para todas as simulações para cada uma das linhas.

Para as simulações, foi utilizado uma única matriz de grande ordem para representar a cascata de circuitos  $\pi$ . Da mesma maneira que foi utilizada para a cascata de circuitos  $\pi$  clássicos. Com o intuito inicial de poder comparar a diferença dos resultados. Porém, para reduzir o tempo computacional, visto que a matriz de grande ordem apresenta grande quantidade de elementos nulos, foram utilizadas matrizes esparsas.

Os circuitos  $\pi$  foram modificados inserindo uma resistência de amortecimento. Para que fosse comparado qual possui melhor desempenho, foram propostos dois modelos. O primeiro seria uma resistência em paralelo a parte longitudinal do circuito e, o segundo seria uma resistência em série com a parte transversal do circuito. Teoricamente, as soluções apresentam os mesmos resultados.

Nas simulações são considerados 3 parâmetros principais de análise: a

quantidade de circuito  $\pi$ , o passo de tempo e o fator de amortecimento. O intuito é que o resultado apresente estabilidade e precisão numérica. Para isso, são utilizados o método de Laplace e matrizes de ordem 2 para determinar esses melhores parâmetros. Posteriormente a essa análise, são comparados esses parâmetros com relação ao pico de tensão de saída no final da linha de transmissão. Para que o erro numérico seja inferior ao encontrado nas simulações para os circuitos  $\pi$  clássicos, que apresentaram aproximadamente 25% de erro. Com relação aos parâmetros analisados, é possível identificar que os valores do passo de tempo com relação ao número de circuitos são grandezas inversamente proporcionais e os valores do fator de amortecimento com relação a quantidade de circuitos  $\pi$  são grandezas diretamente proporcionais.

Na primeira fase da pesquisa, foi realizada as simulações relacionadas à resistência inserida em série com a parte transversal do circuito. Ao dar continuidade a pesquisa, foi feito o estudo e simulações para a resistência inserida em paralelo a parte longitudinal do circuito. Foram realizadas as mesmas simulações e utilizados os mesmos parâmetros entre elas para que fosse possível compará-las. Para as faixas de valores analisados os resultados para ambas resistências apresentam semelhanças entre si. Devido aos resultados serem semelhantes, pode-se escolher qualquer um dos modelos apresentados para realizar as simulações. O modelo a ser escolhido irá depender da aplicação a ser realizada.

A faixa de valores dos parâmetros estudados sofrerá alteração de acordo com a quantidade de circuitos  $\pi$  analisados e a frequência associada ao fenômeno simulado. As curvas apresentadas nesse trabalho, servem como uma orientação para a escolha do melhor ajuste dos parâmetros numéricos da rotina apresentada para simulação de fenômenos transitórios em linhas de transmissão. Portanto, com essas simulações é possível determinar valores específicos para os parâmetros principais que apresentaram melhor desempenho.

As análises entre os dois polos, polo 0 e polo  $\alpha$ , apresentam resultados diferentes pois, como cada polo possui suas características próprias e valores de componentes diferentes, os resultados também serão diferentes. No entanto, apresentam semelhanças no comportamento dos resultados.

A comparação com o circuito  $\pi$  clássico pode ser feita apenas por gráficos 2D, pois só é possível comparar os seguintes parâmetros: a quantidade de circuitos  $\pi$  e o passo de tempo, pois no circuito  $\pi$  clássico não possui o fator de proporcionalidade.

Os erros no pico de tensão da primeira reflexão de onda causados pelo circuito  $\pi$  clássico são entorno de 25%, com a inserção da resistência de amortecimento, esse erro numérico não ultrapassa 5%.

Com a diminuição do erro numérico ocasionado pelo circuito  $\pi$  clássico, é possível visualizar a melhora na precisão dos resultados. E, ao determinar valores específicos para os parâmetros principais de simulação, encontra-se uma melhor estabilidade numérica do sistema. Com isso, esses resultados correspondem a uma considerável precisão e estabilidade numérica para o sistema analisado.

Para trabalhos futuros, pode-se utilizar essa linha de transmissão para analisar o comportamento da linha após diferentes efeitos ocasionados em determinadas regiões da linha de transmissão.

## REFERÊNCIAS

- [1] MACÍAS, J. A. R.; EXPÓSITO, A. G.; SOLER, A. B., **A comparison of techniques for state-space transient analysis of transmission lines**, IEEE Trans. Power Deliv. 20 (2) (2005) p. 894–903. April, 2005.
- [2] MACÍAS, J. A. R.; EXPÓSITO, A. G.; SOLER, A. B., Correction to “**A comparison of techniques for state-space transient analysis of transmission lines**”, IEEE Trans. Power Deliv. 20 (3) (2005) p. 2358. July, 2005.
- [3] NELMS, R. M.; SHEBLE, G. B.; NEWTON, S. R.; GRIGSBY, L. L., **Using a personal computer to teach power system transients**, IEEE Trans. on Power Systems, v. 4, n. 3, p. 1293-1294, August, 1989.
- [4] MAMIS, M. S.; KOKSAL, M., **Solution of eigen problems for state-space transient analysis of transmission lines**, Electr. Power Syst. Res. 55 (1) (2000), 7–14. July, 2000.
- [5] DOMMEL, H. W., **Digital computer solution of electromagnetic transients in single and multiphase networks**. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, v. PAS-88, p. 388-399, April, 1969.
- [6] NELMS, R. M.; NEWTON, S. R.; SHEBLE, G. B.; GRIGSBY, L. L., **Simulation of transmission line transients using a personal computer**, IEEE Conference Record of the 1988 Eighteenth Power Modulator Symposium, p. 229–232, Hilton Head, South Carolina, USA, June, 1998.
- [7] MORENO, P.; RAMIREZ, A., **Implementation of the numerical laplace transform: a review**. IEEE Trans. on Power Delivery, v. 23, n. 4, 2008.
- [8] PRADO, A. J.; LESSA, L. S.; MONZANI, R. C.; BOVOLATO, L. F.; PISSOLATO FILHO, J., **Modified routine for decreasing numeric oscillations at associations of lumped elements**. Electric Power Systems Research, v. 112, n. 1, p. 56–64, July, 2014.
- [9] PRADO, A. J.; LESSA, L. S.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M; MONZANI, R. C.; PISSOLATO FILHO, J., **Laplace's analyses for application of  $\pi$  circuits' associations in digital simulations**. Progress in Electromagnetic Research Symposium – PIERS 2016, Shanghai, China, p. 5, May, 2016. DOI: 10.1109/PIERS.2016.7735281.
- [10] PEREIRA, T. G.; MOREIRA, A. C.; GRILO, C. V. C.; MENZINGER, J. S.; FERREIRA, A. A.; PRADO, A. J.; SCHEUER, R., **Laboratory tests with model based on  $\pi$  circuits considering the introduction of branches composing by RL parallel elements**. International Telecommunications Energy Conference – INTELEC 2018, Turin, Italy, p. 6, October, 2018. DOI: 10.1109/INTLEC.2018.8612346.
- [11] DOMMEL, H. W., **Digital computer solution of electromagnetic transients in single and multiphase networks**, IEEE Trans. Power Appar. Syst. PAS-88 (1969) p. 388–399, April, 1969.
- [12] DOMMEL, H. W., **Techniques for analyzing electromagnetic transients**, IEEE Comput. Appl. Power 10 (3) (1997), 18–21 July, 1997.
- [13] NGUYEN, H. V., DOMMEL, H. W., MARTÍ, J. R., **Modelling of single-phase nonuniform transmission lines in electromagnetic transient simulations**, IEEE Trans. Power Deliv. 12 (2) (1997) p. 916–921. April, 1997.

- [14] MARTINEZ-VELASCO, J. A.; GUSTAVSEN, B., **Overview of overhead line models and their representation in digital simulations**, International Conference on Power Systems Transients – IPST 2001, Rio de Janeiro, Brazil, 24-28 June, 2001.
- [15] PRADO, A. J.; BESPALHULK, K. J.; SILVA, B. F.; CONCEIÇÃO, K. O.; CARGNIN-STIELER, M.; GENNARO, E. M.; PISSOLATO FILHO, J., **Influences of damping resistances on transient simulations in transmission lines**, Progress In Electromagnetics Research B – PIER B, v. 75, n. 1, p. 27-39, 2017.
- [16] SANTOS, M. O.; JUS, L. H.; PRADO, A. J.; GENNARO, E. M.; PISSOLATO FILHO, J., **Influence of damping resistance in electromagnetic transients using alternate structures of  $\pi$  circuits**, Progress in Electromagnetics Research Symposium – PIERS 2017, St. Petersburg, Russia, pp. 22-25, May, 2017.
- [17] FUCHS, R. D., **Transmissão de energia elétrica: linhas aéreas; teoria das linhas em regime permanente**. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos; 1979.
- [18] PAUL, C. R., **Analysis of multiconductor transmission lines**. 2nd ed. John Wiley & Sons, October, 2007. ISBN: 978-0-470-13154-1.
- [19] SCHTT-AINE, J. E.; MITTRA, R., **Nonlinear transient analysis of coupled transmission lines**, IEEE Transactions on Circuits and Systems, v. 36, n. 7, p. 959–967, 1989.
- [20] LESSA, L. S.; LUCA, C. C. S.; PEREIRA, T. G.; GRILO, C. V. C.; MOREIRA, A. C.; RONCHINI, C. M. B.; GENNARO, E. M.; AGOPIAN, P. G.; PRADO, A. J., **Sparse matrices for transient simulations with computing memory reduction**, Electric Power Systems Research, 2020. DOI: 106226.
- [21] GRILO, C. V. C., **Simulações de Transitórios Eletromagnéticos em Ambiente Python**. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP, 2020.
- [22] PRADO, A. J.; KUROKAWA, S.; PISSOLATO, J.; BOVOLATO, L. F. and COSTA, E. C. M., **Phase-mode transformation matrix application for transmission line and electromagnetic transient analyses**, Electric Power System in Transition, 2010. ISBN: 978-1-61668-985-8.
- [23] ARRUDA, C. K. C., **Modelagem de efeito coroa em linhas de transmissão em corrente contínua**. Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia – COPPE UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, p.79, 2012.