

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

RODRIGO DE CASTRO LIMA

Férmions de dimensão de massa um e sua interação gravitacional: aspectos canônico e covariante

Guaratinguetá-SP

2021

Rodrigo de Castro Lima

Férmions de dimensão de massa um e sua interação gravitacional: aspectos canônico e covariante

Tese apresentada à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Guaratinguetá, para a obtenção do título de Doutor em Física na área de Partículas e Campos.

Orientador: Prof^o Dr. Saulo Henrique Pereira

Guaratinguetá-SP

2021

L732f Lima, Rodrigo de Castro
Férmions de dimensão de massa um e sua interação gravitacional:
aspectos canônico e covariante / Rodrigo de Castro Lima – Guaratinguetá,
2021
114 f. : il.
Bibliografia: f. 90-96

Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2021.
Orientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira

1. Férmions. 2. Gravitação. 3. Matéria escura (Astronomia). I. Título.

CDU 531.5(043)

Luciana Máximo

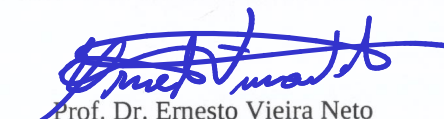
Bibliotecária-CRB-8/3595

RODRIGO DE CASTRO LIMA

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA
CURSO: DOUTORADO

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



PROF. DR. SAULO HENRIQUE PEREIRA
Orientador / UNESP

participou por videoconferência



PROF. DR. ELIAS LEITE MENDONÇA
UNESP/FEG

participou por videoconferência



PROF. DR. MÁRCIO EDUARDO DA SILVA ALVES
ICT

participou por videoconferência



PROF. DR. LUIZ CLEBER TAVARES DE BRITO
UFLA

participou por videoconferência



PROF. DR. RODOLFO VALENTIM DA COSTA LIMA
UNIFESP

participou por videoconferência

DADOS CURRICULARES

RODRIGO DE CASTRO LIMA

NASCIMENTO 03/06/1992 - Taubaté-SP

FILIAÇÃO José Afonso de Castro Lima,
Lindalva Arlinda de Castro Lima.

2010/2015 Curso de Graduação - Licenciatura em Física,
Universidade Federal de Lavras - UFLA, Lavras-MG
Brasil.


2015/2017 Curso de Pós-Graduação em Física, nível Mestrado,
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá-SP
Brasil.

2017/2021 Curso de Pós-Graduação em Física, nível Doutorado,
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá-SP
Brasil.

Com carinho, à minha mãe, Lindalva (*in memoriam*) e ao meu pai, José Afonso.

AGRADECIMENTOS

Nesse trajeto de quatro anos, de crescimento acadêmico e pessoal, chamado doutorado, Agradeço:

- Ao meu orientador e colaborador Prof. Dr. Saulo, pelos conhecimentos transmitidos e compartilhados. Pelas importantes discussões e por ter me guiado desde o início do mestrado, me motivando e ajudando a gerar frutíferos trabalhos.
- Aos docentes e funcionários técnicos administrativos do Departamento de Física e Química que contribuíram, direta e indiretamente, para minha formação acadêmica. Em especial, aos professores Julio Hoff e Marcelo Hott pelas aulas, ensinamentos e conversas inspiradoras.
- Aos membros da banca que aceitaram o convite, contribuindo com conselhos e sugestões, de modo a fortalecer essa importante fase da minha formação científica.
- Ao meu pai José Afonso que, ao lado do meu irmão Renan, me proporcionaram carinho e apoio durante essa caminhada.
- Aos meus tios Lucia e Noel, por serem como segundos pais para mim, dando-me suporte desde a infância. Bem como aos meus primos Liliane e Lucas que sempre estiveram ao meu lado, seja nos assuntos pessoais ou acadêmicos.
- Aos meus colegas de pós-graduação. Especialmente aos de pesquisa, Rodolfo e Thiago. E aos amigos de apartamento (em linha atemporal): Rafél, seu Gino e GuzLightyear, que me proporcionaram companheirismo, várias “ideias mirabolantes” (ou não!) e diversões.
- Ao meu amigo de infância e *ad aeternum*, Seon, que some e surge nos momentos aleatórios e significativos.
- Aos meus grandes amigos de graduação e *campings*  : Dora, Titonhe, Bg, Du Guetto, Rivus, Crisis, Dudu, MariArt, MariNova, Marina, Marciel, Bianca, Jezz, Vivi, Lis, Potta e Jana. Amigos estes que posso considerar uma família. Sem vocês, sem as características e aprendizado constante único vivido com cada um, com certeza eu seria menos do que sou hoje. Muito obrigado pela amizade, ensinamentos de vida, descontrações e alegrias compartilhadas.
- À Laura, por *cadazo simzo* e *apoiozo* reconfortante, por ser minha amiga, companheira e amante, por me permitir desenvolver e evoluir, por compartilhar saberes e carinho. Você tem sido muito especial na minha vida, desde o dia em que te conheci ♡.
- Aos contribuintes brasileiros e à CAPES que garantiram o suporte financeiro durante toda minha pós-graduação.

“Na vastidão do espaço e na imensidão do tempo, é uma alegria compartilhar um planeta e uma época com você(s)” – adaptação de Carl Sagan

Este trabalho contou com o apoio da seguinte entidade:

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - código de financiamento 001.

“A river cuts through rock, not because of its power, but because of its persistence.”
(Jim Watkins)

RESUMO

O campo espinorial *MDO* associado às partículas de *spin*-1/2 e dimensão canônica de massa um, construído sobre um conjunto completo de autoespinores de helicidade dual do operador conjugação de carga e que obedece a estatística de Fermi-Dirac, é um potencial candidato à descrição da matéria escura. A redefinição da estrutura dual desse objeto garantiu uma teoria adjacente local e invariante por transformações de Lorentz. Nesta tese, investigamos certos aspectos da interação do respectivo férmion com a gravidade à luz de uma formulação canônica à lá formalismo *ADM* e na perspectiva covariante sobre um *background* minkowskiano perturbado. No primeiro caso, apresentamos uma ação via campos de tetrada através de uma variedade folheada em uma família de superfícies tipo espaço Σ_t que carrega tal campo de matéria. Encontramos os vínculos hamiltoniano e de difeomorfismo em nível clássico para a dinâmica gravitacional com a imersão desse conteúdo material no espaço-tempo. Na prescrição covariante, estudamos a interação entre o férmion *MDO* e o gráviton, bóson não massivo de *spin*-2 e hipotético representante do *quantum* da gravidade. Realizamos a construção do vértice de interação e da identidade de Ward-Takahashi para a teoria em primeira ordem perturbativa. Averiguamos, em seguida, a correção da auto-energia, a um *loop*, do gráviton nesse cenário. Ademais, estudamos um processo de espalhamento relativístico entre os férmions escuros mediados pelos grávitons, que nos assegurou um potencial atrativo newtoniano no regime de baixas energias.

PALAVRAS-CHAVE: Dimensão de massa um. Formalismo *ADM*. Gráviton.

ABSTRACT

The MDO spinor field associated with spin-1/2 particles and mass dimension one, constructed on a complete set of dual helicity eigenspinors of the charge conjugation operator and that obeys the Fermi-Dirac statistic, is a potential candidate for the description of dark matter. The redefinition of the dual structure of this object guaranteed an adjacent local theory and invariant by Lorentz transformations. In this thesis, we investigate certain aspects of the interaction of the respective fermion with gravity in the light of a canonical formulation à la ADM formalism and in the covariant perspective under a perturbed Minkowski spacetime background. In the first case, we present an action via tetrad fields in a manifold foliated into a family of spacelike surfaces Σ_t that carries such a field of matter. We found the hamiltonian and diffeomorphism constraints at a classical level for the gravitational dynamics with the immersion of this material content in spacetime. In the covariant prescription, we studied the interaction between MDO fermions and graviton, a non-massive spin-2 boson and a hypothetical quantum gravity representative. We performed the construction of the interaction vertex and the Ward-Takahashi identity for the perturbative at first order theory. We then investigate the correction of the graviton's self-energy, to a loop, in this scenario. In addition, we studied a relativistic scattering process between dark fermions mediated by gravitons, which assured us a Newtonian attractive potential in the low energy regime.

KEYWORDS: Mass dimension one. ADM formalism. Graviton.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Ondas gravitacionais com dois modos diferentes de polarização transversal: polarização + (esquerda) e polarização \times (direita). Aqui, uma onda gravitacional que viaja ao longo do eixo z e atua no plano (x, y) é representada. Imagens reproduzidas de Buonanno (2007).	48
Figura 2	Intepretação geométrica da função <i>lapse</i> N e do vetor <i>shift</i> $N^\mu \equiv N^a X^\mu_{,a} = N^a \partial_a X^\mu$, via $t^\mu \equiv \dot{X}^\mu$. Imagens reproduzidas de Kiefer (2007) e Doná e Speziale (2010).	55
Figura 3	Interpretação geométrica da curvatura extrínseca. Imagem reproduzida de Kiefer (2007).	56
Figura 4	Interpretação da diferença do espaço de fase cinemático $(q_{ab}, \pi^{ab}) = 12 \cdot \infty^3$ e espaço de fase físico (<i>phys</i>) $(q_{ab}, \pi^{ab}) = 4 \cdot \infty^3$, reduzido devido aos vínculos. Na notação da figura, $\pi^{ab} \equiv p^{ab}$. Imagem reproduzida de Doná e Speziale (2010).	69
Figura 5	Vértice de interação <i>MDO</i> -gráviton em nível de árvore na ordem de κ . Fonte: Produção própria do autor.	76
Figura 6	Propagador do gráviton com correção à primeira ordem em um <i>loop</i> de κ^2 . Fonte: Produção própria do autor.	78
Figura 7	Dois diagramas, (a)—esquerda e (b)—direita (veja (D.8) do Apêndice (D)), que representam os tensores de polarização, pelas criações de férmions <i>MDO</i> virtuais associadas à auto-energia do propagador do gráviton. Fonte: Produção própria do autor.	78
Figura 8	Diagrama do termo de <i>tadpole</i> para o propagador do gráviton. Fonte: Produção própria do autor.	82
Figura 9	Diagrama de Feynman para férmions <i>MDO</i> com espalhamento mediado por um gráviton. Fonte: Produção própria do autor.	84

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Geradores e álgebra dos grupos $HOM(2)$ e $SIM(2)$, sendo os geradores $T_1 \equiv K_x + J_y$ e $T_2 \equiv K_y - J_x$ denotados em termos das componentes x e y dos geradores usuais \mathbf{J} (rotações) e \mathbf{K} (<i>boosts</i>).	39
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>ADM</i>	<i>Arnowitt-Deser-Misner</i>
<i>Elko</i>	<i>Eigenspinoren des Ladungskonjugationsoperators</i> [Autoespinores do operador conjugação de carga]
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
Λ CDM	<i>Lambda-Cold Dark Matter</i> [<i>Lambda</i> -matéria escura fria]
<i>LQG</i>	<i>Loop Quantum Gravity</i> [Gravitação Quântica em Laços]
<i>MDO</i>	<i>Mass Dimension One</i> [(férmion) de dimensão de massa um]
RG	Relatividade Geral
TQC	Teoria Quântica de Campos
UNESP	Universidade Estadual Paulista
<i>VSR</i>	<i>Very Special Relativity</i> [Relatividade muito especial]

LISTA DE SÍMBOLOS

$c = \hbar = 1$	Unidades naturais para a velocidade da luz e para a constante de Planck
$g_{\mu\nu} := \text{diag}(\pm, \mp, \mp, \mp)$	Assinatura(s) métrica(s) (contexto)
A_{μ}^i	Objeto com índices de espaço-tempo (grego $\mu = 0, 1, 2, 3$) e de espaço interno (latino $i = 0, 1, 2, 3$, sendo os espaciais $I = 1, 2, 3$)
\mathcal{M}	Variedade pseudo-Riemanniana/Amplitude de probabilidade (contexto)
Σ_t	Hipersuperfície de folheação à variedade pseudo-Riemanniana
$[A, B] = AB - BA$	Relação algébrica de comutação
$\{A, B\} = AB + BA$	Relação algébrica de anticomutação
$A_{[\mu}B_{\nu]} = 1/2(A_{\mu}B_{\nu} - B_{\mu}A_{\nu})$	Simetrização de álgebra comutativa
$A_{\{\mu}B_{\nu\}} = 1/2(A_{\mu}B_{\nu} + B_{\mu}A_{\nu})$	Simetrização de álgebra anticomutativa
∂_{μ}	Derivada usual
∇_{μ}	Derivada covariante em \mathcal{M}
D_{μ}	Derivada covariante em Σ_t
$R = g^{\mu\lambda}R_{\mu\lambda}$	Escalar curvatura de Ricci
$R_{\mu\lambda} = R_{\mu\rho\lambda}^{\rho}$	Componentes do tensor de Ricci
$R_{\mu\nu\lambda}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}\Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho}\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}$	Componente do tensor curvatura de Riemann
$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 1/2g^{\lambda\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\mu\rho} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu})$	Componentes da conexão afim
$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	Matrizes de Pauli
$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$	Matrizes gama de Dirac, com $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$
Γ_{μ}	Conexão de <i>spin</i>
${}_kF_l$	Funções hipergeométricas generalizadas
$\Gamma(z)$	Função gama de Euler para $z \in \mathbb{C}$

LISTA DE PUBLICAÇÕES

1. GUIMARÃES, T. M. ; LIMA, R. DE C. ; PEREIRA, S. H. . Cosmological inflation driven by a scalar torsion function. EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL C. PARTICLES AND FIELDS, v. 81, p. 271, 2021.
2. LIMA, R. DE C.; NOGALES, JOSÉ A. C. ; PEREIRA, S. H. . Gravitational entropy of wormholes with exotic matter and in galactic halos. INTERNATIONAL JOURNAL OF MODERN PHYSICS D, v. 29, p. 2050015, 2020.
3. PEREIRA, S. H. ; LIMA, R. DE C. ; ALVES, M. E. S. ; GUIMARÃES, T. M. ; JESUS, J. F. ; SOUZA, A. P. S. . Cosmology with mass dimension one fields: recent developments. THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL. SPECIAL TOPICS (ONLINE), v. 229, p. 2079-2116, 2020.
4. BUENO ROGERIO, R. J. ; LIMA, R. DE C. ; DUARTE, L. ; HOFF DA SILVA, J. M. ; DIAS, M. ; SENISE, C. R. . Mass-dimension-one fermions and their gravitational interaction. EPL (EUROPHYSICS LETTERS), v. 128, p. 20004, 2019. doi = 10.1209/0295-5075/128/20004
5. DUARTE, L. C.; LIMA, R. DE C. ; ROGERIO, R. J. BUENO ; VILLALOBOS, C. H. CORONADO . An Alternative Approach Concerning Elko Spinors and the Hidden Unitarity. Advances in Applied Clifford Algebras, v. 29, p. 1705.10302, 2019. doi = 10.1007/s00006-019-0988-6
6. PEREIRA, S. H. ; LIMA, R. DE C. ; JESUS, J. F. ; HOLANDA, R. F. L. . Acceleration in Friedmann cosmology with torsion. EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL C, v. 79, p. 950, 2019.

Publicações realizadas durante o doutorado (2017 – 2021) em consonância e em paralelo à pesquisa defendida nesta tese.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
2	RELATIVIDADE GERAL	21
2.1	As equações de campo de Einstein para a gravidade	22
2.2	Conservação do tensor energia-momento	25
3	FÉRMIONS DE DIMENSÃO DE MASSA UM	26
3.1	Bases - representação de Weyl para espinores	26
3.2	Construção dos autoespinores do operador conjugação de carga	32
3.3	Composição da estrutura dual do espinor <i>Elko/MDO</i>	36
3.4	Campo quântico e propagador de Feynman-Dyson do férmion <i>MDO</i>	41
4	O CONCEITO DE GRÁVITON	45
4.1	Perturbações a campo fraco	46
4.2	Grávitons como representações do grupo de Poincaré	50
4.3	Campo quântico e propagador do gráviton	52
5	INTERAÇÃO <i>MDO</i>-GRAVIDADE: UMA ABORDAGEM CANÔNICA	54
5.1	Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral	54
5.2	Férmion <i>MDO</i> acoplado à gravidade via formalismo canônico	60
5.3	Uma possível quantização canônica (?)	68
6	INTERAÇÃO <i>MDO</i>-GRAVIDADE: UMA ABORDAGEM COVARIANTE	71
6.1	Vértice de interação <i>MDO</i> -gráviton	71
6.2	Correção a um <i>loop</i> no propagador do gráviton via férmion <i>MDO</i>	77
6.3	Amplitude de espalhamento e potencial gravitacional <i>MDO</i> -gráviton	83
7	CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	88
	REFERÊNCIAS	91
	APÊNDICE A – CURVATURA SOB FOLHEAÇÕES DO FORMALISMO <i>ADM</i>	98
	APÊNDICE B – OPERADOR CURVATURA ASSOCIADA AO FÉRMION <i>MDO</i>	101
	APÊNDICE C – DA AÇÃO DE EINSTEIN-HILBERT À AÇÃO DE PALATINI- HOLST	102

APÊNDICE D – OBTENÇÃO DO VÉRTICE DE INTERAÇÃO <i>MDO</i> -GRÁVITON	104
APÊNDICE E – OBTENÇÃO DA CORREÇÃO A UM LOOP DO GRÁVITON VIA <i>MDO</i>	109
APÊNDICE F – PARCELAS DA AMPLITUDE <i>MDO</i> -GRÁVITON	112
APÊNDICE G – ESTRUTURA EXPLÍCITA DOS ESPINORES <i>MDO</i>	114

1 INTRODUÇÃO

Há, em certa medida, uma debilidade nas bases teóricas e experimentais no que tange às abordagens sólidas e simultaneamente solucionáveis quanto ao problema da matéria escura. Por vezes, tais barreiras são apresentadas de maneira concomitante. A complexidade e a peculiaridade desse problema tem levado a comunidade científica a aderir vastas tentativas de investigações ao mencionado fenômeno cosmológico. As propostas variam desde dimensões extras às cosmologias fenomenológicas baseadas em modelagens para potenciais exóticos. Embora o problema permaneça sem solução, uma abordagem baseada em critérios robustos erigidos a partir da Teoria Quântica de Campos (TQC) é particularmente válida. Motivado, entre outros fatores, por esse argumento, que se é escolhido um férmion peculiar como candidato à descrição da matéria escura e protagonista desta tese.

Proposto em sua primeira versão no ano de 2005, (AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005a) e (AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005b), o campo fermiônico de $spin-1/2$ com dimensão de massa um, *Mass Dimension One (MDO)*, é construído sobre um conjunto completo de autoespinores do operador de conjugação de carga, o *Elko*¹. Na formulação original, esses campos eram objetos quânticos alicerçados a uma representação dos subgrupos $HOM(2)$ e $SIM(2)$ do grupo Lorentz, cuja álgebra é fundamentada em Cohen e Glashow (2006), correspondendo a uma extensão semidireta. Recentemente, uma modificação no espinor dual - tirando vantagem do fato de que, na física de tal espinor, apenas um bilinear é observável devido a definição certa de fatores de fase de localidade nas componentes da mão direita e esquerda, a saber, os fatores de fase responsáveis pela remoção da não localidade - levou a uma teoria local dotada de simetria de Lorentz (Poincaré) completa. Os principais passos dessa formulação podem ser encontrados² em Ahluwalia (2017b). Essas bases impulsionaram diversos trabalhos em amplas áreas do conhecimento da Física, a saber: Física-Matemática, tendo numerosos resultados explorados no livro Ahluwalia (2019), em Fenomenologia de Partículas (DUARTE; DIAS; CAMPOS, 2020) e na Cosmologia (PEREIRA et al., 2020), como breves exemplos.

A pedra angular, presente no trabalho de Wigner, que examina o conteúdo físico suportado pelo espaço de Hilbert sob a ação do grupo Poincaré (WIGNER, 1939), via formulação e inserção da representação irreduzível das simetrias de Poincaré, descreve os estados e o conceito de uma partícula de forma consistente. Essa investigação foi realizada dentro do próprio subgrupo de Lorentz ortócrono próprio. Contudo, em um trabalho menos difundido, Wigner generalizou a investigação para o grupo não homogêneo de Lorentz como um todo, incluindo simetrias discretas, Wigner (1993). Como resultado desse estudo, surgem classes de partículas ocultas e verifica-se que a partícula estudada em Ahluwalia (2017b) se comporta, sob simetrias discretas, de forma prevista em um desses casos. É importante atentar-se para o fato de que Lee e Wick (1966) argumentam que os campos locais (como o caso em questão) não devem pertencer a nenhuma classe de Wigner incomum. A construção do campo como uma representação de $spin-1/2$ e dimensão de massa um é caracterizada pela presença de espinores como coeficientes de expansão. Esses espinores pertencem à família $(0, 1/2) \oplus (1/2, 0)$

¹ Acrônimo alemão para *Eigenspinoren des Ladungskonjugationsoperators* [Autoespinores do operador conjugação de carga].

² Ocasionalmente, conforme a situação exigir, será evidenciado um ou outro ponto necessário da formulação dual.

do espaço de representação de Weyl³, coincidindo com a “receita” para os espinores de Dirac. A diferença crucial entre ambos os espinores surge com a paridade. Para os espinores de Dirac, a paridade é intrínseca à teoria e, como consequência direta, a dinâmica de Dirac é alcançada. É uma relação literal: ao atuar sobre espinores, o operador de paridade é o operador de Dirac (SPERANCA, 2014), e vice-versa (VILLALOBOS; ROGERIO, 2017). Já para os espinores *MDO* (onde a paridade não desempenha nenhum papel), a dinâmica de Dirac não é mais esperada. Contudo, uma vez que sua construção é relativística, conclui-se que a dinâmica de Klein-Gordon está de fato em ordem. Além disso, seu campo quântico deve herdar essa dinâmica, a partir da qual a dimensão canônica de massa é explicitada. As características combinadas da dimensão de massa um, junto com os autoespinores do operador conjugação de carga, executam a neutralidade do campo - colocando-o como proeminente candidato teórico à matéria escura.

Paralelo a essa questão momentaneamente incompleta da matéria escura, temos o espaço-tempo e a gravidade como “palco” (*background*) para toda matéria e energia do Universo, além de “personagem” em si, visto que seu campo associado de natureza dinâmica há décadas segue sem uma solução completa e consistente dentro do regime quântico. Entre os diversos ramos de pesquisas existentes acerca do tema, duas correntes são fortes na literatura: a covariante e a canônica. A linha covariante, como bem embasado na análise histórica levantada por Rovelli (2000), é a tentativa de construir uma teoria quântica de campos via flutuações na métrica sobre um espaço-tempo de Minkowski ou sobre outro espaço métrico curvo fixo de fundo. O programa teve início com Rosenfeld (1930), Fierz (1939), Pauli e Fierz (1939) durante os anos 1930. As regras de Feynman para a Relatividade Geral linearizada foram gradativamente geradas por DeWitt e Feynman durante os anos 1970. Na mesma época, t’Hooft e Veltman, Deser e Van Nieuwenhuizen, entre outros, encontraram fortes evidências de não renormalizabilidade da teoria, como se pode notar pelas análises de t’Hooft e Veltman (1993). Nos anos seguintes, outras vertentes emergiram dessa linha, como teorias de ordens superiores, supergravidade e *String Theory* [Teoria de Cordas]. Já, a proposta canônica, por sua vez, é uma tentativa de construir uma teoria quântica na qual o espaço de Hilbert carrega uma representação dos operadores correspondentes à métrica completa, ou a algumas funções da métrica, eximindo a métrica de fundo em ser fixada. O programa foi definido por Bergmann e Dirac (1951), sendo muito trabalhoso de início. Arnowit, Deser e Misner completaram a tarefa no início dos anos 1960, com o que atualmente se chama formalismo *ADM* [Arnowitt-Deser-Misner] (ARNOWITT; DESER; MISNER, 1962) para a gravitação. Uma versão bem definida das mesmas equações foi encontrada com sucesso apenas no final dos anos 1980, com a primeira formulação daquilo que viria a ser conhecido como *Loop Quantum Gravity* (*LQG*) [Gravidade Quântica em Laços], devido às bases lançadas por Ashtekar (1987).

Diante dos pontos levantados até aqui, uma questão se faz pertinente: que consequências e análises teríamos ao unir a problemática da matéria escura, representada pelo candidato fermiônico *MDO*, com algumas características acerca das abordagens clássicas e de quantização do campo gravitacional? Esta tese nasce com a pretensão de apresentar e estudar alguns aspectos relevantes da interação entre esse férmion, proeminentemente lincado à matéria escura, e a gravitação nas linhas canônica e

³ Tomando como referência a construção histórica das partículas fundamentais, associadas à matéria bariônica, pertencentes ao Modelo Padrão da Física de Partículas.

covariante em suas propostas originais. No aspecto canônico, apresentamos a construção de uma ação que abarca o acoplamento entre o campo espinorial MDO com a gravitação em espaço curvo à lá Palatini-Holst, via formalismo ADM -tetrad, e extraímos seus vínculos associados à hamiltoniana. Enquanto, dentro do âmbito covariante, estudamos, em detalhes, a interação entre o férmion MDO e o gráviton, por meio da aproximação de campo fraco de primeira ordem perturbativa no parâmetro de expansão ao *background* minkowskiano.

A tese em questão encontra-se organizada da seguinte forma: o Capítulo 2 consiste em uma breve revisão sobre a gravitação consolidada na teoria vigente mais robusta a nível clássico, a Relatividade Geral (RG). Sendo mostrado as equações de campo de Einstein e uma discussão quanto à conservação do tensor energia-momento.

O Capítulo 3 disserta sobre as principais características e a construção do férmion de dimensão de massa um, MDO , sendo exclusivamente um revisional do tema, perpassando suas bases estruturais para a representação dos espinores de Weyl, sua construção como autoespinores do operador conjugação de carga, a composição de sua estrutura dual, bem como sua descrição em campo quântico e do respectivo propagador associado.

O Capítulo 4 discorre acerca da natureza do gráviton, partindo de uma linearização da RG via perturbação a campo fraco na métrica de Minkowski e trazendo sua representação como partícula ao grupo de Poincaré, além de revelar, em seguida, seu campo quântico e propagador, que é de forte valia para os capítulos seguintes.

O Capítulo 5 está dirigido à ampliação da ação gravitacional por Palatini-Holst, incorporada da matéria fermiônica de dimensão de massa um e $spin-1/2$, através do formalismo tetrad- ADM . São obtido, na sequência, os vínculos hamiltoniano e de difeomorfismo clássicos oriundos deste campo de matéria escura acrescido à gravidade. Como consequência, uma densidade de energia e densidade direcional de fluxo de energia associada emergem em junção ao acoplamento MDO -gravidade que, por sua vez, garante uma função semelhante à constante cosmológica. Uma análise conceitual para um possível programa de quantização canônica da teoria é realizada ao fim.

O Capítulo 6 fica reservado à caracterização do campo fermiônico de dimensão de massa um e $spin-1/2$ em espaço-tempo perturbado em torno da métrica de Minkowski, trazendo à tona os vértices de interação MDO -gráviton, a nível de árvore, a partir dos quais se evidencia a identidade de Ward-Takahashi correspondente. Em posse desse resultado, foi calculado a correção em primeira ordem, a um *loop*, do propagador do gráviton através desse férmion, identificando o contratermo de *tadpole*, que se torna removível da parcela divergente da interação, quando condicionado à inserção do parâmetro cosmológico Λ . Ao fim, foi estudado o processo de espalhamento gravitacional, no qual se obteve a amplitude de espalhamento relativística e o potencial newtoniano atrativo no limite de baixas energias, necessário para que o candidato à matéria escura esteja dentro do regime *Lambda-Cold Dark Matter* (Λ CDM) no universo atual.

Os capítulos 5 e 6 trazem elementos com nossas contribuições originais para a área de Física de Partículas e Campos, no que concerne ao férmion de dimensão de massa um e a gravidade.

Finalmente, no Capítulo 7 consta as considerações finais.

2 RELATIVIDADE GERAL

Este capítulo traz uma síntese da teoria clássica vigente para gravidade, apresentando as equações da dinâmica de campo bem como as características de conservação do conteúdo de energia e matéria que permeiam o espaço-tempo.

O termo *gravidade* (ou *gravitação*) tem seu conceito etimológico proveniente do latim *gravitas*¹, que significa: peso. É um fenômeno natural que garante interação a todo e qualquer ente físico dotado de massa ou energia. Seu alcance é infinito e se apresenta como a mais débil das quatro interações fundamentais conhecidas na natureza até o presente momento (KREBS, 1999), sendo aproximadamente 10^{38} vezes menos intensa que a interação forte, 10^{36} vezes mais fraca que a força eletromagnética e em torno de 10^{29} vezes menor que a interação fraca.

No ano de 1687, o matemático *Sir* Isaac Newton publicou sua majestosa obra, *Principia* (NEWTON, 1687), que apresenta a hipótese da lei do inverso do quadrado da gravitação universal. Em suas palavras²:

“... deduzi que as forças que mantêm os planetas em suas órbitas devem [ser] reciprocamente como os quadrados de suas distâncias dos centros em torno dos quais eles giram: e, portanto, comparei a força necessária para manter a Lua em sua órbita com a força da gravidade na superfície da Terra; e descobri que eles respondem quase que totalmente...” (LINTON, 2004, p. 225) (tradução do autor).

A teoria de Newton para gravitação foi de suma importância na previsão da existência de Netuno com base nos movimentos de Urano que não podiam ser explicados pelas ações dos outros planetas, sendo até hoje usada como alicerce para a Astronomia. Contudo, durante o século XIX, uma discrepância na órbita de Mercúrio apontou falhas na formulação newtoniana, dando as primeiras indicações de que esta não deveria ser a palavra final para a gravidade.

Séculos depois, já em 25 de novembro de 1915, Albert Einstein apresentou sua versão final³ das equações da gravidade à Academia Prussiana, estabelecendo a teoria da Relatividade Geral (RG) Einstein (1915), que trouxe como consequência imediata a correção para a órbita de Mercúrio, provando que a Lei da gravitação universal de Newton era um caso particular de sua proposta, funcionando muito bem apenas em limites de campos fracos. A construção desta teoria foi realizada ao longo de quase uma década, tendo início com um *insight* de seu criador, em 1907, de que seria impossível distinguir localmente a aceleração de origem gravitacional e a aceleração causada por um referencial não inercial, elaborando o princípio de equivalência entre a massa gravitacional (m_G) e a massa inercial (m_i). Experimentos recentes, como em Turyshev (2008), mostram que esse princípio

¹ <<https://www.oxfordlearnersdictionaries.com/definition/english/gravitas>>.

² A citação vem de um memorando que acredita-se ter sido escrito por volta de 1714.

³ Einstein obteve os créditos pelas deduções das equações de campo para a gravidade. Mas, é necessário enfatizar que há controvérsias e indícios históricos de que o matemático David Hilbert chegou a esses resultados antes de Einstein, utilizando-se do princípio variacional e antecedendo as deduções finais do físico em cinco dias (HILBERT, 1915). Houve apelos, por terceiros, reivindicando que essas deveriam ser chamadas "equações de campo de Einstein-Hilbert". Contudo, Hilbert não pressionou por essa prioridade, sugerindo, assim, que Einstein desenvolveu as equações de campo corretas primeiro, mesmo Hilbert alcançado-as de forma independente (WINTERBERG, 2004).

permanece válido no regime $1 - m_G/m_i < 10^{-14}$. Nos anos seguintes, Einstein precisou aprender e aplicar uma geometria que mantivesse invariante o elemento de linha $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ em transformações gerais de coordenadas⁴, pois a esta altura ele sabia que o tensor métrico, objeto $g_{\mu\nu}$, consistiria na dinâmica do campo capaz de descrever a gravidade. Com a ajuda de seu amigo Marcel Grossmann, Einstein fundamentou a covariância geral que necessitava a sua teoria, moldando-a sob os alicerces da Geometria Riemanniana e culminando nas equações de campo $G_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}$. A elaboração de sua equação garante que nos limites clássicos newtonianos, a RG recupera a equação de Laplace na ausência de matéria ρ para um potencial gravitacional Φ , $\nabla^2\Phi = 0$, ou a equação de Poisson quando há presença de matéria, $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$. Isso significa que as equações de campo de Einstein generalizam as equações de campo de Poisson e Laplace, análogas para o eletromagnetismo e gravitação newtoniana, para uma entidade geométrica dinâmica que corresponde ao próprio tecido do espaço-tempo (PAIS, 2005).

2.1 AS EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN PARA A GRAVIDADE

As equações de campo de Einstein podem ser obtidas, formalmente, pelo princípio variacional cujo procedimento foi o mesmo prescrito por Hilbert e é adotado em alicerçadas literaturas, como em Hobson, Efstathiou e Lasenby (2006) e Carroll (2014). Para tal procedimento, será seguido uma linha similar à que está presente na dissertação de mestrado de Lima (2017). Nesse formalismo, o mecanismo inicia-se com a descrição apropriada da ação que conduz à dinâmica dos campos da teoria em questão. Em tal princípio, a ação total é a soma da ação gravitacional (geométrica) de Einstein-Hilbert \mathcal{S}_{EH} com a ação que codifica o conteúdo de matéria \mathcal{S}_M :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{EH} + \mathcal{S}_M. \quad (2.1)$$

Considerando-se uma região limitada na variedade \mathcal{M} do espaço-tempo em (1 + 3) dimensões, onde os campos de interesse estão imersos e construídos pelas densidades de lagrangianas gravitacional $\mathcal{L}_{EH} = R/\kappa^2$ e de conteúdo de matéria \mathcal{L}_m , a ação \mathcal{S} é reescrita como:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} R d^4x + \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} \mathcal{L}_m d^4x, \quad (2.2)$$

em que $\kappa^2 = 16\pi G$, $\sqrt{-g}d^4x$ é o elemento de volume invariante, g o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, $R = g^{\mu\lambda}R_{\mu\lambda}$ o escalar curvatura de Ricci, $R_{\mu\lambda} = R^\rho_{\mu\rho\lambda}$ o tensor de Ricci, $R^\rho_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\rho_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}$ o tensor curvatura de Riemann e $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 1/2g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$ a conexão afim.

Segundo o princípio variacional, obtendo-se a mínima ação, $\delta\mathcal{S} = 0$, conseqüentemente tem-se as equações de campo do fenômeno tratado. Tomando-se a variação na ação do primeiro termo de (2.2), tem-se

$$\delta\mathcal{S}_{EH} = \frac{1}{\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + R\delta\sqrt{-g})d^4x. \quad (2.3)$$

⁴ Esta notação para ds^2 generaliza a notação de Minkowski utilizada nas descrições da Relatividade Restrita, válida somente em referenciais inerciais, $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$.

Descrito em termos dos produtos das conexões afins e suas derivadas, a variação do tensor de Ricci $\delta R_{\mu\nu}$ torna-se

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho + \delta \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\rho\mu}^\lambda. \quad (2.4)$$

Mesmo a conexão afim sendo um objeto não tensorial, sua variação se comporta tensorialmente. Desse modo, pode-se tomar a derivada covariante sobre $\delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho$, tendo como resultado $\nabla_\rho(\delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho) = \partial_\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho + \Gamma_{\alpha\rho}^\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \delta \Gamma_{\alpha\mu}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \delta \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$, permitindo que $\delta R_{\mu\nu}$ de (2.4) seja compactada na forma

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho(\delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho) - \nabla_\nu(\delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho). \quad (2.5)$$

O termo variacional $\delta\sqrt{-g}$ é descrito por

$$\delta\sqrt{-g} = \left[\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} \right] \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Sabendo-se que o determinante da matriz métrica, g , pode ser expresso na forma $g = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \text{Cof}(g^{\mu\nu}) = \text{Cof}(g^{\mu\nu})/g^{\mu\nu}$, sendo $\text{Cof}(g^{\mu\nu})$ o cofator do elemento $g_{\mu\nu}$ do tensor métrico, segue de imediato que, $\text{Cof}(g^{\mu\nu}) = \partial g / \partial g_{\mu\nu} = g g^{\mu\nu}$. Com isso, a expressão (2.6) torna-se

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Usando-se (2.5) e (2.7) na expressão (2.3), tem-se

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_{EH} &= \frac{1}{\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_\rho(\delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho) - \nabla_\nu(\delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho)] \right) d^4 x \\ &+ \frac{1}{\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} \left(\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \right) d^4 x, \end{aligned} \quad (2.8)$$

que, por sua vez, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_{EH} &= \frac{1}{\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} \left(\sqrt{-g} [\nabla_\rho(g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho)] \right) d^4 x \\ &+ \frac{1}{\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} \left(\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \right) d^4 x, \end{aligned} \quad (2.9)$$

pois $\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0$. Por uma questão de simetria nas conexões afins, realizando-se a troca de índices $\rho \leftrightarrow \nu$ na segunda parcela da primeira integral acima, obtem-se

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_{EH} &= \frac{1}{\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} \left(\sqrt{-g} [\nabla_\rho(g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\nu)] \right) d^4 x \\ &+ \frac{1}{\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} \left(\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \right) d^4 x. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Fundamentando-se no Teorema de Gauss covariante,

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\zeta} v^{\zeta} = \oint_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} \hat{n}_{\zeta} v^{\zeta}, \quad (2.11)$$

em que $\partial\mathcal{M}$ é a borda da região \mathcal{M} , $\sqrt{-g}d^3x$ é o elemento de hipersuperfície covariante e \hat{n}_{ζ} é o versor normal à hipersuperfície, a equação (2.10) passa a ser descrita como

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}_{EH} &= \frac{1}{\kappa^2} \oint_{\partial\mathcal{M}} \left(\sqrt{-g} [(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - g^{\mu\rho} \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\nu})] \right) \hat{n}_{\rho} d^3x \\ &+ \frac{1}{\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} \left(\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \right) d^4x. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Uma vez que a integral de superfície é nula na fronteira da região \mathcal{M} , a parcela de Einstein-Hilbert da ação é reduzida a

$$\delta\mathcal{S}_{EH} = \frac{1}{\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) d^4x. \quad (2.13)$$

Tomando-se, agora, a variação na ação do segundo termo de (2.2) e utilizando-se da expressão (2.7), tem-se

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}_M &= \int_{\mathcal{M}} \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) d^4x \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left(\mathcal{L}_m \delta\sqrt{-g} + \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) d^4x \\ &= \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} \left(\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_m g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x. \end{aligned} \quad (2.14)$$

De modo geral, o tensor energia-momento é definido como:

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \mathcal{L}_m g_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

permitindo-se visualizar a expressão (2.14) na forma

$$\delta\mathcal{S}_M = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.16)$$

Em posse das expressões (2.13) e (2.16), que estão associadas às variações geométrica e de matéria, respectivamente, a variação total da ação torna-se

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \delta\mathcal{S}_{EH} + \delta\mathcal{S}_M \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) d^4x + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \frac{\kappa^2}{2} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Assim, para toda e qualquer variação arbitrária da métrica $\delta g^{\mu\nu}$, as equações de campo de Einstein se

revelam como:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{\kappa^2}{2}T_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

em que $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein com as identidades de Bianchi contraídas, $\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0$. O tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ representa a dinâmica do espaço-tempo frente a um tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ que o estabelece, ou, segundo a descrição sucinta de John Archibald Wheeler:

“... o espaço-tempo diz à matéria como se mover e a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar...” (WHEELER; FORD, 2000, p. 235) (tradução do autor).

2.2 CONSERVAÇÃO DO TENSOR ENERGIA-MOMENTO

A lei de conservação para o tensor energia-momento assegura que o fluxo total do conteúdo de energia e momento que atravessa uma região \mathcal{M} em $(1 + 3)$ dimensões é nula, como mostrado em Grøn e Hervik (2007) e Carroll (2014),

$$\int_{\partial\mathcal{M}} T^{\mu\nu} n_\nu d\sigma = 0, \quad (2.19)$$

em que $\partial\mathcal{M}$ é a borda da região \mathcal{M} e n^ν é o vetor normal à superfície infinitesimal $d\sigma$. Aplicando-se o Teorema de Gauss covariante, dado pela expressão (2.11) em (2.19) obtém-se

$$\int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} \nabla_\nu T^{\mu\nu} d^4x = 0, \quad (2.20)$$

para toda e qualquer região arbitrária \mathcal{M} . Desse modo, pode-se apresentar a formulação para lei de conservação de energia-momento na forma:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.21)$$

Lê-se as componentes do tensor energia-momento como: T^{00} densidade de matéria e energia; $T^{\mu\mu}$ densidade de momento na direção μ , com $\mu \neq 0$; $T^{0\nu}$ fluxo de densidade de energia na direção ν , com $\nu \neq 0$; $T^{\mu 0}$ fluxo de densidade de momento na direção μ , com $\mu \neq 0$ e $T^{\mu\nu}$ fluxo de densidade da tensão de cisalhamento na direção ν , com $\mu \neq \nu$.

É válido notar que a expressão (2.21) generaliza a ideia de força, $\mathbf{F} = -\nabla\phi$, como gradiente de uma energia potencial. E, uma vez conservada, significa que a densidade de quadri-força f^μ é nula, garantindo-se que não haja interação atuando sobre a região externa à borda $\partial\mathcal{M}$ da variedade \mathcal{M} .

Entender o conteúdo de matéria presente no universo, e conseqüentemente representado pelo tensor energia-momento, tem se tornado cada vez mais necessário tanto para a Cosmologia quanto para os alicerces da Física de Partículas. Por isso, o capítulo seguinte descreve, de forma sucinta, as bases mais relevantes que tangem a um desses ingredientes de matéria, caracterizado no personagem inerente a esta tese e proeminente candidato à matéria escura: o férmion de dimensão de massa um.

3 FÉRMIONS DE DIMENSÃO DE MASSA UM

O presente capítulo elucidar aspectos relevantes acerca da natureza estrutural e dinâmica do campo espinorial de $spin-1/2$, que compõe um conjunto completo de autoespinores com helicidade dual do operador conjugação de carga, associado às partículas fermiônicas de dimensão canônica de massa um, conhecido na literatura de língua inglesa como *Mass dimension one fermions* (MDO). Detalhes sobre a descoberta teórica, bem como a conceitualização, desenvolvimento algébrico e processos de quantização desse campo estão presentes nas obras originais de Ahluwalia e Grumiller (2005a) e Ahluwalia e Grumiller (2005b). Após a redefinição da construção da estrutura dual de tal objeto, no qual forneceu uma descrição quântica local e covariante por Lorentz, Ahluwalia (2017b), estudos sistemáticos e minuciosos da teoria foram bem explorados e podem ser consultados na tese de doutorado de Rogério (2018) e no livro Ahluwalia (2019), respectivamente.

3.1 BASES - REPRESENTAÇÃO DE WEYL PARA ESPINORES

Historicamente, os espinores foram descobertos e apresentados na matemática, de forma genérica, por Élie Joseph Cartan (1913) e posteriormente alcunhado por Paul Ehrenfest (TOMONAGA, 1997). A incorporação desses elementos à Física veio através da mecânica quântica não relativística de Pauli (1927), ao introduzir suas matrizes de $spin$ e da mecânica quântica relativística de Dirac (1928), com uma teoria relativística completa para os elétrons, alicerçando uma das bases para a Teoria Quântica de Campos (TQC) e Física de Partículas, uma vez que os espinores são os objetos matemáticos mais rigorosos para a transcrição de estados quânticos dos férmions - partículas de $spin$ semi-inteiros e entes fundamentais da matéria existente.

Sabe-se que, no ano seguinte à publicação de Dirac, o qual tinha em mente o foco na descrição da natureza dos elétrons como campos fermiônicos munidos de massa, $spin$ e carga elétrica, Weyl (1929) mostrou que férmions sem massa podiam ser tratados por uma equação mais simples, gerando como solução um ente de duas componentes para caracterização desse hipotético campo estudado, em contraste às quatro componentes de Dirac emergentes de sua teoria. Em 1930, Pauli propôs a existência do neutrino para explicar o problema do espectro contínuo de energia dos elétrons em decaimento beta, mantendo a conservação de carga e energia do sistema. Mesmo não tendo publicado oficialmente essa hipótese, Pauli comentou-a em diversas cartas a colegas, como relatado em Pauli e Kronig (1964), Pauli (1978) e Pais (1986). Uma das consequências por trás dessas partículas era que deviam ser ausentes de massa, conforme previsto no primeiro modelo quantitativo formulado por Fermi (1934). Com tal premissa, conjecturou-se, à época, que neutrinos eram férmions de Weyl. Anos depois, foi experimentalmente comprovado que neutrinos, além de serem massivos (REINES; COWAN, 1956), possuem oscilação de massa (FUKUDA et al., 1998), para o caso de neutrinos solares. Devido a isso, até hoje não se há observado quaisquer férmions de Weyl como partícula, à princípio¹.

¹ Nenhuma das partículas elementares no Modelo Padrão são férmions de Weyl, apesar de terem sido observados apenas como quasi-partículas na Física de Matéria Condensada, vide semimetal de Weyl, Vishwanath (2015).

Embora nenhuma partícula elementar conhecida (ou mesmo pressuposta) possa ser um férmion de Weyl, o conceito por trás, em utilizá-lo, é muito útil, porque férmions de Weyl podem ser entendidos como blocos de construção de qualquer campo de férmions de $spin-1/2$ (PAL, 2011), que são os casos dos férmions de Dirac, Majorana² e inclusive do *MDO*, principal objeto deste capítulo, como será visto a seguir.

A equação de Weyl pode ser expressa, na forma de equação diferencial de primeira ordem, como (WOAN, 2000; PESKIN; SCHROEDER, 1995):

$$\sigma^\mu \partial_\mu \phi = 0, \quad (3.1)$$

em que $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma})$, sendo $\mathbb{1}$ a representação da matriz identidade 2×2 e $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ o conjunto de matrizes de Pauli, com $\phi = \phi(x^\mu)$ designando um espinor de Weyl no espaço das posições. A expressão para a forma dual da equação (3.1) é usualmente escrita por $\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \phi = 0$, com $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\boldsymbol{\sigma})$.

Por serem duas equações distintas, as soluções trazem o comportamento de quiralidade, gerando espinores de helicidades³ de mão esquerda (*left* L) e direita (*right* R),

$$\sigma^\mu \partial_\mu \phi_R = 0 \Leftrightarrow \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \phi_L = 0, \quad (3.2)$$

explicitamente assim rotulados. A solução para ambas quiralidades é via ondas planas, cada uma com duas componentes:

$$\phi = \phi(t, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \chi e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \chi e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)/\hbar}, \quad (3.3)$$

em que $\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$ é um espinor com as componentes em termos do momento que satisfaz

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^\mu p_\mu \chi_L = (\mathbb{1}E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \chi_L = 0, \\ \sigma^\mu p_\mu \chi_R = (\mathbb{1}E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \chi_R = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Atuando diretamente os dois operadores (usual e dual) em χ , obtém-se

$$(\bar{\sigma}^\nu p_\nu)(\sigma^\mu p_\mu) \chi = (p_\nu \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu p_\mu) \chi = (p_\nu \eta^{\mu\nu} p_\mu) \chi = p^\mu p_\mu \chi = (E^2 - \mathbf{p}^2) \chi = 0, \quad (3.5)$$

que é correspondente à equação de Klein-Gordon para partículas sem massa.

² Ettore Majorana foi um físico italiano, supervisionado por Enrico Fermi, que desenvolveu trabalhos promissores com neutrinos e desapareceu misteriosamente no ano de 1938. Os espinores de Majorana são autoespinores do operador conjugação de carga com autovalor positivo $+1$.

³ Helicidade é o termo que se refere à <orientação> das partículas, usando como referência a projeção do *spin* na direção-sentido do momento linear das mesmas.

Averiguando a atuação do operador helicidade, $\hat{\Sigma}$, sobre os estados do espinor de Weyl, tem-se:

$$\hat{\Sigma}|\phi_{L/R}(\mathbf{p})\rangle \equiv \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{|\mathbf{p}|}|\phi_{L/R}(\mathbf{p})\rangle = \alpha|\phi_{L/R}(\mathbf{p})\rangle, \quad (3.6)$$

com os estados no espaço dos momentos e os autovalores⁴ $\alpha = \pm 1$ para R e L , respectivamente.

É importante salientar que quiralidade e helicidade são representados por operadores distintos e, portanto, apresentam conceitos diferentes. Somente no caso de partículas não massivas que tais operadores são idênticos (LANCASTER; BLUNDELL, 2014). Helicidade diz a informação de como está projetado o *spin* em relação ao momento (paralelo ou antiparalelo), o que revela sua dependência em relação ao referencial que se é medido. Já a quiralidade é uma propriedade mais inerante ao estado quântico da partícula, determinando como é o comportamento e a transformação em componentes de mão esquerda (L) ou direita (R), via representação do grupo de Poincaré (PESKIN; SCHROEDER, 1995). No caso de partículas massivas, por exemplo, pode-se descrever um cenário de helicidade positiva sobre uma dada partícula e gerar um *boost*⁵ com momento invertido, através de um dado sistema de referência, revertendo sua helicidade original, mas não sua quiralidade, uma vez que seu *spin* é invariante.

Dito isso, é possível retomar a equação (3.4) e descrever uma equação de onda de primeira ordem para partículas massivas com os operadores de energia e momento da Mecânica Quântica $E \mapsto \hat{p}_0 = i\partial_0$, $\mathbf{p} \mapsto \hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ e com os espinores $\chi_{L/R} \mapsto \phi_{L/R}$ munidos de massa, através do conjunto

$$\begin{cases} (i\mathbb{1}\partial_0 - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\phi_L = m\phi_R, \\ (i\mathbb{1}\partial_0 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\phi_R = m\phi_L. \end{cases} \quad (3.7)$$

Ao superpor as equações de ϕ_L e ϕ_R , do sistema acima, tem-se:

$$(i\gamma^0\partial_0 - i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla - m)\psi = 0, \quad (3.8)$$

em que

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

são as chamadas matrizes gamas de Dirac, na representação de Weyl. De forma ainda mais compacta, a equação (3.8) pode ser expressa como:

$$(i\rlap{/}\partial - m)\psi = 0, \quad (3.10)$$

sendo $\rlap{/}\partial \stackrel{def}{=} \gamma^\mu\partial_\mu$ e $\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$. Essa é a chamada equação de Dirac para espinores massivos de *spin*-1/2. O espinor ψ está escrito na representação de Weyl, que no espaço dos momentos é

⁴ Omitido o fator 1/2.

⁵ Diz respeito a parte da transformação de Lorentz responsável em mudar a velocidade do objeto estudado frente a um sistema de coordenadas.

caracterizado por

$$\psi(p^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

À luz das conceituadas obras literárias de Weinberg (2005) e Ryder (1996), uma síntese do comportamento dos, agora massivos, espinores $\phi_L(p^\mu)$ e $\phi_R(p^\mu)$ sob as transformações de Lorentz, pode ser feita.

Admitindo-se um *boost* arbitrário, define-se que as componentes de mão direita e esquerda se transformam como:

$$\phi_R(p^\mu) \mapsto e^{\frac{\sigma}{2} \cdot \varphi} \phi_R(k^\mu) \Leftrightarrow \phi_L(p^\mu) \mapsto e^{-\frac{\sigma}{2} \cdot \varphi} \phi_L(k^\mu), \quad (3.12)$$

pertencentes aos espaços de representação $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ respectivamente, com φ sendo o parâmetro de *boost*.

Os operadores de *boosts* são explicitamente

$$e^{\pm \frac{\sigma}{2} \cdot \varphi} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 \pm \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \right), \quad (3.13)$$

sendo $e^{\frac{\sigma}{2} \cdot \varphi} \equiv \kappa^{(1/2,0)}$ e $e^{-\frac{\sigma}{2} \cdot \varphi} \equiv \kappa^{(0,1/2)}$. O parâmetro presente nas equações (3.12) e (3.13) é emergente do operador $\exp(i\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varphi})$ que, ao atuar sobre um quadrimomento qualquer, é extraído via

$$k^\mu = \left(m, \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}}{p} \right), \quad p = |\mathbf{p}|, \quad (3.14)$$

devolvendo uma relação hiperbólica que fisicamente resulta em $\cosh(\varphi) = E/m$, $\sinh(\varphi) = p/m$ e $\hat{\varphi} = \hat{p}$, sendo ainda o vetor $\mathbf{K} = (K_x, K_y, K_z)$ o conjunto dos geradores de *boost* no espaço de Minkowski. Com um processo análogo, atuando um operador de rotação $\exp(i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta})$ sobre um quadrivetor arbitrário, se extrai os geradores de rotação $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$, com θ designando o parâmetro angular. Os elementos de (\mathbf{K}, \mathbf{J}) são:

$$K_x = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

e

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Juntos, o conjunto (\mathbf{K}, \mathbf{J}) não satisfazem uma álgebra e, portanto, não formam um grupo fechado como os geradores de rotação \mathbf{J} , separadamente, $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$. Porém, é possível tomar os seis

geradores de (\mathbf{K}, \mathbf{J}) e redefinir dois novos geradores (RYDER, 1996), a saber,

$$SU(2)_A : \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}), \quad SU(2)_B : \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K}), \quad (3.17)$$

de modo que as relações de comutação entre eles satisfaçam a seguinte álgebra:

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k, \quad [B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k, \quad [A_i, B_j] = 0, \quad (3.18)$$

sendo o tensor de Levi-Civita $\epsilon_{ijk} = \pm 1$ para mudanças cíclica e anti-cíclica nos índices, respectivamente, e nulo para quaisquer índices repetidos.

Dessa forma, é estabelecido que (\mathbf{A}, \mathbf{B}) geram, individualmente, um grupo em $SU(2)$, dito grupo especial unitário de grau dois⁶ e, logo, tem-se $SU(2) \otimes SU(2)$ como o grupo de Lorentz⁷ (RYDER, 1996). Os geradores de *boost* e rotação das equações (3.15) e (3.16) podem ser escritos via matrizes de Pauli, com o intuito de facilitar a soma direta do espaço de representação de Weyl para os espinores mão esquerda e direita, da seguinte maneira:

$$\kappa = \begin{pmatrix} -i\sigma/2 & 0 \\ 0 & +i\sigma/2 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} \sigma/2 & 0 \\ 0 & \sigma/2 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

O conjunto de geradores (\mathbf{A}, \mathbf{B}) possuem autovalores (j, j') , respectivamente, com os rótulos

$$(1/2, 0) : \quad \mathbf{J}^{1/2} = \sigma/2, \quad \mathbf{K}^{1/2} = -i\sigma/2 \quad (3.20)$$

e

$$(0, 1/2) : \quad \mathbf{J}^{1/2} = \sigma/2, \quad \mathbf{K}^{1/2} = i\sigma/2. \quad (3.21)$$

Assim, os espinores de Weyl obedecem a relação $\phi_R(p^\mu) \mapsto (1/2, 0)$ e $\phi_L(p^\mu) \mapsto (0, 1/2)$, com transformações bem definidas, revelando ainda que o espinor de Dirac ψ (3.11) é uma soma direta $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ desses espinores, e caracterizado como uma representação irredutível do grupo de Lorentz.

Entre as simetrias discretas do espaço de Minkowski, o operador paridade é definido como o mapeamento em Ahluwalia (2017b)

$$P : \quad x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) \mapsto x'^\mu = (x^0, -\mathbf{x}), \quad (3.22)$$

relacionando os espaços de representações de mão direita e esquerda $(1/2, 0) \longleftrightarrow P(0, 1/2)$, dito

⁶ De modo geral, $SU(n)$ (*special unitary*) é a denotação de grupos especiais unitários de matrizes complexas de grau n e dimensão $n^2 - 1$ cujos elementos possuem determinante igual a 1. No caso específico de $SU(2)$, de dimensão 2, há uma relação sobrejetiva direta com $SO(3)$ (*special orthogonal group*) (PURI, 2001) que é o grupo de rotações responsáveis em preservar distâncias, sob essas transformações, no espaço euclidiano.

⁷ Grupo de rotações angulares (para rotações usuais) e hiperbólicas (para *boost*) no espaço-tempo de Minkowski. Expressa parte das simetrias sobre o espaço-tempo emergendo as leis fundamentais conhecidas na natureza. É matematicamente, também, representado por $O(1, 3)$ (*orthogonal group*), com uma dimensão no tempo e três no espaço (WEINBERG, 2005), preservando a distância entre eventos $(t, x, y, z) \mapsto t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Em essência, $SU(2) \otimes SU(2)$ é $SO^\uparrow(1, 3)$, um subgrupo de $O(1, 3)$, grupo restrito de Lorentz que preserva a orientação do espaço S (*spetial*) e a direção do tempo \uparrow em respeito à causalidade.

mais precisamente,

$$\phi_L(x^\mu) \mapsto P\phi_R(x^\mu); \quad \phi_R(x^\mu) \mapsto P\phi_L(x^\mu). \quad (3.23)$$

Os autoespinores do operador P possuem autovalores ± 1 e são espinores de Dirac. Em Rogério (2018) é discutido e mostrado que espinores que possuem vínculo à relação de paridade devem obedecer obrigatoriamente a dinâmica da equação (3.10) de Dirac.

Quase uma década após o proeminente trabalho de Dirac (1928) para elétrons e pósitrons, Majorana (1937) deduziu um espinor que satisfaz a dinâmica expressa em (3.10), com a condição de que o espinor associado à partícula fosse sua própria antipartícula. Em outras palavras, era apresentado pela primeira vez na literatura um férmion massivo e de carga elétrica nula, cuja dinâmica é expressa na forma:

$$(i\cancel{\partial} - m\mathcal{C})\psi \equiv (i\cancel{\partial} - m)\psi_c = 0, \quad (3.24)$$

em que

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \eta\omega\mathcal{K} \\ -\eta\omega\mathcal{K} & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

é o chamado operador de conjugação de carga, na representação de Weyl, sendo η uma fase arbitrária, geralmente dada por $\eta = 1$, $\omega = i\sigma_2$ e \mathcal{K} o operador que toma o complexo conjugado de qualquer ente à sua direita. Este é mais um dos operadores de simetrias discretas do espaço de Minkowski, junto com o operador de paridade P e de reversão temporal⁸ T , que obedece a imposição $\mathcal{C}^2 \propto \mathbb{1}$. O espinor ψ_c é explicitamente escrito, via componentes de mão esquerda de Weyl, como

$$\psi_c(p^\mu) = \begin{pmatrix} -\sigma_2\phi_L^*(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

com a condição de Majorana (RAMOND, 1981)

$$\mathcal{C}\psi_c(p^\mu) = +\psi_c(p^\mu). \quad (3.27)$$

Majorana elucidou que se um determinado campo espinorial é um conjugado de carga de si mesmo (autoconjugado de carga <autovalor restritamente positivo>), isto é, quando $\psi_c = \psi$, então a sua equação reflete a equação de Dirac e possui solução interpretada como descrição de um campo eletricamente neutro. Contudo, o operador de conjugação de carga não tem um estado próprio somente, como se pensou por muito tempo. Na realidade possui dois estados próprios distintos, sendo um deles o espinor *Elko/MDO* que, apesar de não ser solução da equação de Majorana, traz consequências interessantes quanto à sua dinâmica, estrutura e aplicações em Física de Partículas, para além do Modelo Padrão, e Cosmologia (AHLUWALIA, 2019), uma vez que seu campo é um proeminente candidato à descrição da matéria escura.

⁸ A saber, $T: x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) \mapsto x'^\mu = (-x^0, \mathbf{x})$.

3.2 CONSTRUÇÃO DOS AUTOESPINORES DO OPERADOR CONJUGAÇÃO DE CARGA

Previamente foi mencionado que espaços de representação de simetrias discretas e espinores possuem uma correlação. Em especial, os autoespinores do operador de paridade são naturalmente descritos via a dinâmica da equação de Dirac (ROGÉRIO, 2018). Dentro dessa perspectiva e motivados, entre outras questões, pelo estudo de espinores potencialmente passíveis de emergir via simetrias discretas do espaço-tempo, Ahluwalia e Grumiller exploraram os efeitos físicos por trás do operador de reversão temporal de Wigner, Θ , e suas consequências sobre os espinores de Weyl (AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005a). Sob a representação de $spin-1/2$, esse objeto é simbolizado por

$$\Theta = \begin{pmatrix} O & -1 \\ 1 & O \end{pmatrix} = -i\sigma_2, \quad (3.28)$$

sendo $\Theta^{-1} = -\Theta$. Quando atuado em conjunto com sua inversa sobre as matrizes de Pauli, observa-se que

$$\Theta \sigma \Theta^{-1} = -\sigma^*. \quad (3.29)$$

A relação (3.29) foi nomeada por Pierre Ramond como "*mágica das matrizes de Pauli*" (RAMOND, 1981). Ao operar (3.28) sobre o complexo conjugado das transformações dos espinores de Weyl de mão direita e esquerda, dados pela equação (3.12), tem-se o seguinte fato interessante:

$$[\zeta_\rho \Theta \phi_R^*(p^\mu)] = e^{-\frac{\sigma}{2} \cdot \varphi} [\zeta_\rho \Theta \phi_R^*(k^\mu)] \Leftrightarrow [\zeta_\lambda \Theta \phi_L^*(p^\mu)] = e^{+\frac{\sigma}{2} \cdot \varphi} [\zeta_\lambda \Theta \phi_L^*(k^\mu)], \quad (3.30)$$

revelando que enquanto $\phi_R(p^\mu)$ e $\phi_L(p^\mu)$ se transformam canonicamente como componentes de mão direita e esquerda, respectivamente, seus correspondentes $[\zeta_\rho \Theta \phi_R^*(p^\mu)]$ e $[\zeta_\lambda \Theta \phi_L^*(p^\mu)]$ se transformam de maneira oposta, ou seja, como componentes de mão esquerda e direita, nessa ordem, com as fases ζ_ρ e ζ_λ não declaradas, por hora.

Diante o exposto do comportamento das transformações presentes em (3.30), Ahluwalia e Grumiller (2005a)-Ahluwalia e Grumiller (2005b) propuseram uma representação teórica de um novo conjunto de espinores, sob o espaço de representação de soma direta de Weyl $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$, designados por:

$$\lambda(p^\mu) = \begin{pmatrix} \zeta_\lambda \Theta \phi_L^*(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}, \quad \rho(p^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \zeta_\rho \Theta \phi_R^*(p^\mu) \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

A partir de agora cabe frisar que a apresentação e manejo desses espinores ficarão restritos somente ao objeto $\lambda(p^\mu)$, uma vez que $\rho(p^\mu)$ não traz nenhuma informação física diferenciada. É válido mencionar que os caminhos usados para construir os espinores em (3.31) não foram amparadas por todas as simetrias discretas em consonância com as simetrias contínuas e, portanto, esses objetos não pertencem, a princípio, ao grupo de Lorentz (que inclui transformações por paridade, reversão temporal, *boosts* e rotações) mas ao subgrupo de Lorentz ortócrono próprio $SO^\uparrow(1, 3)$.

Observando a similaridade na estrutura do espinor $\lambda(p^\mu)$ de (3.31) com o espinor de Majorana $\psi_c(p^\mu)$ via expressão (3.26), a menos da fase arbitrária ζ_λ , Ahluwalia buscou por um operador com simetria discreta que pudesse ser escrito via o operador de reversão temporal de Wigner, a fim de

fechar uma correlação para seu novo espinor, tal como a inspiração $P \leftrightarrow \psi$ de Dirac. O candidato para isso, obviamente, estava no operador conjugação de carga \mathcal{C} (AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005b)

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & i\Theta \\ -i\Theta & 0 \end{pmatrix} \mathcal{K}, \quad (3.32)$$

em que os autores propositalmente escolheram definir a fase⁹ $\eta \mapsto i$ e evidenciar $\omega = i\sigma_2 \mapsto \Theta$, quando comparado a notação presente em (3.25).

Visto que os espinores de Majorana são autoespinores do operador conjugação de carga com autovalor +1 mostrado em (3.27), é admissível manejar os dois autovalores reais de \mathcal{C} , a saber ± 1 , em virtude da escolha da fase ζ_λ para o espinor $\lambda(p^\mu)$, se imposto tal condição. Assim, atuando com o operador \mathcal{C} sobre $\lambda(p^\mu)$, tem-se que

$$\mathcal{C}\lambda(p^\mu) = \begin{pmatrix} 0 & i\Theta \\ -i\Theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_\lambda^* \Theta \phi_L(p^\mu) \\ \phi_L^*(p^\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\Theta \phi_L^*(p^\mu) \\ -i\zeta_\lambda^* \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} = \pm \lambda(p^\mu), \quad (3.33)$$

no qual se permite fixar as fases $\zeta_\lambda = \pm i$ para $\lambda(p^\mu)$ ter autovalores duplamente degenerados ± 1 , ao serem estes autoespinores do operador \mathcal{C} . De modo mais literal, pode-se separar

$$\mathcal{C}\lambda^{S/A}(p^\mu) = \pm \lambda^{S/A}(p^\mu), \quad (3.34)$$

em que os espinores

$$\lambda^S(p^\mu) = \begin{pmatrix} i\Theta \phi_L^*(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}, \quad \lambda^A(p^\mu) = \begin{pmatrix} -i\Theta \phi_L^*(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

são os chamados *Self-Conjugate* (autoconjugados) e *Anti-Self-Conjugate* (anti autoconjugados) de carga, respectivamente, para elucidar os autoespinores com autovalores positivo e negativo, nessa ordem, em relação ao \mathcal{C} . Não é surpresa, portanto, que os pais desses novos entes físicos os tenham batizados de *Eigenspinoren des Ladungskonjugationsoperators*, cujo acrônimo alemão é *Elko* [Autoespinores do operador conjugação de carga] (AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005a; AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005b). Por terem essa natureza não interagente (ou quase nula) eletromagneticamente, tais espinores nascem como novos candidatos às teorias de partículas associadas à matéria escura.

A fim de explorar as características estruturais do espinor λ , faz-se necessário entender o comportamento de sua helicidade a partir de suas componentes ϕ_L e $\pm i\Theta \phi_L^*$. Com isso em mente, partindo primeiramente das bases da helicidade sobre os espinores de Weyl via equação (3.6), para um dado momento arbitrário k^μ , $\phi_L(k^\mu)$ será autoestado do operador helicidade expresso como

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}] \phi_L^\pm(k^\mu) = \pm \phi_L^\pm(k^\mu), \quad (3.36)$$

em que o vetor unitário $\hat{\boldsymbol{p}}$ está parametrizado em coordenadas esféricas (para melhor notação/manuseio

⁹ Há livros-textos e artigos em que a escolha da fase $\eta \mapsto -i$ ou $\eta \mapsto \pm 1$, como ocorreu no caso de Majorana, anteriormente mostrado. Contudo, isso não traz nenhuma alteração física nos resultados para a teoria estudada.

futuro), $\hat{\mathbf{p}} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$. De forma explícita, a componente $\phi_L^\pm(k^\mu)$ é representada por

$$\phi_L^\pm(k^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_{L1}^\pm(k^\mu) \\ \phi_{L2}^\pm(k^\mu) \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

resultando, a partir da equação (3.36), nas duas relações positiva e negativa para ϕ_L a seguir. A componente de helicidade positiva é deduzida como

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}] \phi_L^+(k^\mu) = +\phi_L^+(k^\mu) \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{L1}^+(k^\mu) \\ \phi_{L2}^+(k^\mu) \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} \phi_{L1}^+(k^\mu) \\ \phi_{L2}^+(k^\mu) \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

cuja solução para ϕ_L^+ , após algumas manipulações sobre as relações trigonométricas, é

$$\phi_L^+(k^\mu) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2) e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

e, analogamente para a helicidade negativa

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}] \phi_L^-(k^\mu) = -\phi_L^-(k^\mu) \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{L1}^-(k^\mu) \\ \phi_{L2}^-(k^\mu) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \phi_{L1}^-(k^\mu) \\ \phi_{L2}^-(k^\mu) \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

cuja solução para ϕ_L^- é estabelecida por

$$\phi_L^-(k^\mu) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) e^{-i\varphi/2} \\ \cos(\theta/2) e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Segundo Marinov (1968), entende-se que para uma teoria com partículas massivas ser consistente, no que tange as suas amplitudes de interações, a massa de tal objeto está condicionado a forma m^j , sendo j o *spin* associado à partícula de massa m . Por essa razão, o fator de massa \sqrt{m} é imposto “à mão” sob as soluções (3.39) e (3.41) (AHLUWALIA; JOHNSON; GOLDMAN, 1994; AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005a), já que espinores em repouso no espaço de representação $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ não existem no limite de massa nula, $m \rightarrow 0$.

De maneira concisa, vê-se em Rogério (2018) as consequências em obter os autoestados de helicidade para os espinores de mão direita $\Theta \phi_L^{\pm*}$ à outra componente da estrutura de λ . Sua descrição é expressa como

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}] \Theta \phi_L^{\pm*}(k^\mu) = \mp \Theta \phi_L^{\pm*}(k^\mu), \quad (3.42)$$

revelando que os autovalores de helicidades são opostos a $\phi_L^\pm(k^\mu)$, quando comparada a expressão (3.36). Tal resultado contrapõe ao que ocorre com os espinores de Dirac ψ e Majorana ψ_c (PAL, 2011), uma vez que estes últimos possuem suas duas componentes com helicidades iguais, didaticamente apresentadas em Peskin e Schroeder (1995), Ryder (1996). Claramente, se λ tivesse a mesma helicidade de ψ_c de Majorana, estes dois espinores seriam indistinguíveis. Portanto, uma vez que o comportamento da helicidade da componente de mão direita $(1/2, 0) \leftrightarrow i\Theta \phi_L^*$ é simultaneamente contrário a componente de mão esquerda $(0, 1/2) \leftrightarrow \phi_L$ na estrutura espinorial de $\lambda(p^\mu)$, este espi-

nor é caracterizado por possuir helicidade dual (AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005a; AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005b). Além disso, por ter duas relações (positiva e negativa) em ϕ_L^\pm , há 4 graus de liberdade permitidos para o espinor *Elko* $\lambda_\xi^{S/A}$, sendo ξ a designação de helicidade associada, a partir das bases presentes em (3.35), via as equações (3.36) e (3.42), cuja caracterização formal e pictórica¹⁰ é explanada por:

$$\lambda_{\{+,-\}}^S(k^\mu) = \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^-(k^\mu)]^* \\ \phi_L^-(k^\mu) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\{-,+\}}^S(k^\mu) = \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^+(k^\mu)]^* \\ \phi_L^+(k^\mu) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \downarrow \\ \uparrow \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

para os autoconjugados de helicidade $\xi = \{\pm, \mp\}$, com a primeira e segunda entrada para as transformações $R(1/2, 0)$ e $L(0, 1/2)$ respectivamente, e

$$\lambda_{\{+,-\}}^A(k^\mu) = \begin{pmatrix} -i\Theta[\phi_L^-(k^\mu)]^* \\ \phi_L^-(k^\mu) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\{-,+\}}^A(k^\mu) = \begin{pmatrix} -i\Theta[\phi_L^+(k^\mu)]^* \\ \phi_L^+(k^\mu) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \downarrow \\ \uparrow \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

aos anti autoconjugados de helicidade $\xi = \{\pm, \mp\}$.

Partindo da premissa das equações (3.12)-(3.13) para transformação por *boost* no tratamento dos espinores de Weyl, o espinor λ altera seu momento inicial k^μ para um arbitrário p^μ via

$$\lambda(p^\mu) = e^{i\kappa \cdot \varphi} \lambda(k^\mu), \quad (3.45)$$

sendo κ o gerador de *boost* em termos das matrizes de Pauli, retratado em (3.19), com seu respectivo parâmetro φ . Assim, o operador de *boost* em (3.45) é obtido por Ahluwalia e Grumiller (2005b) na forma

$$e^{i\kappa \cdot \varphi} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} + \frac{\sigma \cdot p}{E+m} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} - \frac{\sigma \cdot p}{E+m} \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Munido da transformação (3.45) com o operador (3.46) sobre as estruturas (3.43)-(3.44), tem-se explicitamente:

$$\lambda_{\{\pm, \mp\}}^{S/A}(p^\mu) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 \pm \frac{p}{E+m} \right) \lambda_{\{\pm, \mp\}}^{S/A}(k^\mu) \quad (3.47)$$

para mudanças de momento relativístico do espinor tanto aos auto quanto anti-autoconjugados de carga com suas helicidades duais, frente a qualquer referencial inercial.

Isto posto, se há formalizado um conjunto completo de auto espinores do operador conjugação de carga, $\lambda_{\{\pm, \mp\}}^{S/A}(p^\mu)$, mediante a transformação de *boost* de Lorentz. É válido destacar, também, que um estudo de simetria de paridade permite transformações nas helicidades dadas por: $\lambda_{\{+,-\}}^S(p^\mu) \rightarrow \lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu)$ e $\lambda_{\{+,-\}}^A(p^\mu) \rightarrow \lambda_{\{-,+\}}^A(p^\mu)$ (AHLUWALIA, 2017b; ROGÉRIO, 2018). Porém, quando essa transformação é empregada em $\lambda_{\{-,+\}}^{S/A}$, no limite de $m \rightarrow 0$, é gerado um problema quanto ao número de graus de liberdade da teoria, visto que o termo entre parênteses torna-se $(1 - p/p) = 0$, na equação (3.47). Esse vínculo estrutural-simétrico reforça mais uma vez a obrigatoriedade de que o presente espinor seja massivo, se porventura for observado na natureza.

¹⁰ Para evidenciar a configuração da forma dual de sua helicidade.

3.3 COMPOSIÇÃO DA ESTRUTURA DUAL DO ESPINOR *ELKO/MDO*

Até o ano de 2016, acreditava-se que o espinor *Elko* quebrava a covariância relativística de Lorentz, com um termo de quebra codificado nas somas¹¹ de *spin*, devido a outrora construção de seu respectivo dual nos trabalhos originais de Ahluwalia e Grumiller (2005a)-Ahluwalia e Grumiller (2005b). A localidade da teoria apenas era satisfeita com a escolha de um eixo de propagação do campo num dado sistema de referencial inercial, a saber, ao longo do eixo z (ROGERIO; SILVA, 2017). Nesse contexto, a invariância de Lorentz foi primeiramente contornada pela chamada *Very Special Relativity*¹² (*VSR*) [Relatividade Muito Especial], uma teoria proposta por Cohen e Glashow (2006), que coincidentemente deixa as somas de *spin* invariantes sob transformações dos grupos¹³ $HOM(2)$ e $SIM(2)$, como é verificada minuciosamente em Ahluwalia e Horvath (2010), Horvath (2011) e Souza (2015). Com o advento da proposta de uma nova estrutura dual para a teoria do espinor λ (AHLUWALIA, 2017b), a soma de *spin* e localidade do campo, via preservação da covariância de Lorentz, foi, por fim, sanada.

Fazendo uma breve recaptulação pela literatura (PESKIN; SCHROEDER, 1995) e (RYDER, 1996), a estrutura dual dos espinores de Dirac é dada na forma

$$\bar{\psi}(p^\mu) = \psi^\dagger(p^\mu)\gamma_0, \quad (3.48)$$

garantindo que $\bar{\psi}\psi$ seja um invariante de Lorentz. Seguindo o mesmo raciocínio, é de se esperar que uma descrição do dual permitida para o espinor *Elko* fosse tratada por $\bar{\lambda}(p^\mu) = \lambda^\dagger(p^\mu)\gamma_0$, para ambos os autoestados, autoconjugado (S) e anti-autoconjugado (A). Contudo, seguindo essa prescrição à lá Dirac, os candidatos a norma invariante da teoria seriam identificados como (AHLUWALIA, 2017b):

$$\bar{\lambda}_\xi^S(p^\mu)\lambda_{\xi'}^S(p^\mu) = -\bar{\lambda}_\xi^A(p^\mu)\lambda_{\xi'}^A(p^\mu) = \mp 2im \quad (3.49)$$

para combinação trocada de helicidades $\xi = \{\pm, \mp\}$ e $\xi' = \{\mp, \pm\}$ e nula para $\xi = \xi'$. Além de gerar

$$\bar{\lambda}_\xi^{S/A}(p^\mu)\lambda_{\xi'}^{A/S}(p^\mu) = 0, \quad \forall \xi, \xi'. \quad (3.50)$$

Em outras palavras, tal prescrição ao objeto dual do espinor λ é automaticamente descartada, visto que sua norma ou é nula ou é uma quantidade imaginária pura, não sendo fisicamente compatível com a noção de invariância por transformações de Lorentz e, desse modo, sem observável físico.

¹¹ Propriedade inerente a um dado campo quanto a combinação de seus estados de *spin*, com o propósito de obter a matriz \mathcal{S} , amplitude de espalhamento de uma dada interação, seção de choque e outros observáveis que permitem predição teórica e constatação experimental associada à partícula estudada (PESKIN; SCHROEDER, 1995; LANCASTER; BLUNDELL, 2014).

¹² A *VSR* mantém as características principais da Relatividade Especial, mas quebra a invariância rotacional. Não pode ser considerada uma simetria fundamental da natureza porque muitos fenômenos observados dependem da existência de *boost* de Lorentz. No entanto, dentro do escopo das teorias de violação de Lorentz, ela pode ter um papel relevante, já que está quebrando a simetria de Lorentz de uma forma muito branda (ALFARO; RIVELLES, 2014). A relevância da teoria *VSR* está presente em pesquisas recentes desenvolvidas a respeito de fenomenologia de partículas e demais interesses dentro da TQC a citar, por exemplo, Cheon, Lee e Lee (2009), Alfaro (2017), Selvaganapathy, Konar e Das (2019).

¹³ Subgrupos do grupo de Lorentz que preservam a constância da velocidade da luz, com representações redutíveis de dimensão finita. São bases para a *VSR* bem como demais teorias não locais.

Portanto, é necessário que a estrutura dual a ser criada possa resultar, em uma combinação com o espinor usual, numa norma real, não nula e invariante por Lorentz. Um ansatz para isso é buscar um operador genérico Ξ atuando em λ , antes de tomar sua transposta conjugada, e ainda uma nova matriz que faça o papel similar à matriz gama de Dirac (AHLUWALIA, 2017b; ROGÉRIO, 2018), $\gamma_0 \rightarrow \eta$,

$$\tilde{\lambda}_\xi(p^\mu) \stackrel{def}{=} [\Xi(p^\mu)\lambda_\xi(p^\mu)]^\dagger \eta, \quad (3.51)$$

com as condições de que: (Ξ, η) seja um conjunto de matrizes 4×4 , $\Xi(p^\mu)\lambda_\xi(p^\mu) = \lambda_{\xi'}(p^\mu)$ também seja um autoespinor do operador \mathcal{C} (trocando ou não a helicidade dual original) e a existência de $(\Xi^2 = \mathbb{1}, \Xi^{-1})$ para garantir um mapa invertível de usual \Leftrightarrow dual. Por definição, Silva et al. (2016), Ahluwalia (2017b), tem-se

$$\begin{aligned} \Xi(p^\mu) &\stackrel{def}{=} \frac{1}{2m} \sum_{\xi} (\lambda_{\xi}^S \bar{\lambda}_{\xi}^S - \lambda_{\xi}^A \bar{\lambda}_{\xi}^A) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{ip \sin \theta}{m} & \frac{-i(E+p \cos(\theta))e^{-i\varphi}}{m} & 0 & 0 \\ \frac{i(E-p \cos(\theta))e^{i\varphi}}{m} & \frac{-ip \sin \theta}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-ip \sin \theta}{m} & \frac{-i(E-p \cos(\theta))e^{-i\varphi}}{m} \\ 0 & 0 & \frac{i(E+p \cos(\theta))e^{i\varphi}}{m} & \frac{ip \sin \theta}{m} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

sendo a atuação de Ξ sobre os espinores λ demarcada como

$$\Xi(p^\mu)\lambda_{\{\pm, \mp\}}^S(p^\mu) = \mp i \lambda_{\{\mp, \pm\}}^S(p^\mu), \quad \Xi(p^\mu)\lambda_{\{\pm, \mp\}}^A(p^\mu) = \mp i \lambda_{\{\mp, \pm\}}^A(p^\mu), \quad (3.53)$$

que por sua vez, evidencia a troca de helicidade quando operado sobre um espinor auto ou anti auto conjugado. É importante dizer que, para os espinores de Dirac, $\Xi(p^\mu)$ existe e é identicamente a própria identidade $\mathbb{1}$.

Garantindo-se as condições e restrições algébricas, por transformações de Lorentz, para η , vê-se em Rogério e Silva (2017) que $\eta = \gamma_0$. Desse modo, a configuração para a estrutura dual na equação (3.51), em posse de (3.52) e conhecendo η , é declarada como:

$$\tilde{\lambda}_{\{\pm, \mp\}}^{S/A}(p^\mu) = \mp [\lambda_{\{\mp, \pm\}}^{S/A}(p^\mu)]^\dagger \gamma_0. \quad (3.54)$$

Ao contrário da relação de ortonormalidade, à luz da dualidade de Dirac vista anteriormente, $\bar{\lambda}\lambda$, que não permite a existência de observável físico, agora tem-se que essa relação, via o dual acima, provém o conjunto de norma

$$\tilde{\lambda}_\xi^S(p^\mu)\lambda_{\xi'}^S(p^\mu) = 2m\delta_{\xi\xi'}, \quad \tilde{\lambda}_\xi^A(p^\mu)\lambda_{\xi'}^A(p^\mu) = -2m\delta_{\xi\xi'}, \quad \tilde{\lambda}_\xi^{S/A}(p^\mu)\lambda_{\xi'}^{A/S}(p^\mu) = 0, \quad (3.55)$$

fisicamente aceitável.

De posse da estrutura do dual $\tilde{\lambda}$ é conveniente entender a soma de *spin* por trás da teoria, a fim de assegurar uma amplitude de probabilidade lorentziana, bem como o operador de onda associado aos autoespinores do operador conjugação de carga. A soma de *spin* dos autoespinores *S/A* são

designadas nas formas

$$\begin{aligned} \sum_{\xi} \lambda_{\xi}^S(p^{\mu}) \tilde{\lambda}_{\xi}^S(p^{\mu}) &= \\ \left[\frac{E+m}{2m} \left(1 - \frac{p^2}{(E+m)^2} \right) \right] &(-i\lambda_{\{-,+\}}^S(k^{\mu})[\lambda_{\{+,-\}}^S(k^{\mu})]^{\dagger} + i\lambda_{\{+,-\}}^S(k^{\mu})[\lambda_{\{-,+\}}^S(k^{\mu})]^{\dagger})\gamma_0 \\ &= m[\mathbb{1} + \mathcal{G}(\varphi)] \end{aligned} \quad (3.56)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{\xi} \lambda_{\xi}^A(p^{\mu}) \tilde{\lambda}_{\xi}^A(p^{\mu}) &= \\ \left[\frac{E+m}{2m} \left(1 - \frac{p^2}{(E+m)^2} \right) \right] &(-i\lambda_{\{+,-\}}^A(k^{\mu})[\lambda_{\{-,+\}}^A(k^{\mu})]^{\dagger} + i\lambda_{\{-,+\}}^A(k^{\mu})[\lambda_{\{+,-\}}^A(k^{\mu})]^{\dagger})\gamma_0 \\ &= -m[\mathbb{1} - \mathcal{G}(\varphi)], \end{aligned} \quad (3.57)$$

em que $\mathcal{G}(\varphi)$ é um operador (AHLUWALIA, 2017b) expresso pela matriz anti-diagonal

$$\mathcal{G}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ie^{-i\varphi} \\ 0 & 0 & ie^{i\varphi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ ie^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

sendo possível constatar que

$$\mathcal{G}(\varphi)\lambda_{\xi}^{S/A}(p^{\mu}) = \pm\lambda_{\xi}^{S/A}(p^{\mu}). \quad (3.59)$$

É notório que $\mathcal{G}(\varphi)$ não tem o comportamento de um operador de onda associado ao espinor *Elko*. Sob uma breve óptica comparativa, para o caso de espinores de Dirac, a mesma relação reflete em $\sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(p^{\mu})\bar{\psi}_{\alpha}(p^{\mu}) = (\not{p} - m\mathbb{1})$ (RYDER, 1996), que é seu próprio operador de onda, contrastando, portanto, com o *Elko*. Além disso, é evidente nas somas de *spin* (3.56)-(3.57) que há uma direção espacial priorizada devida, justamente, à forma de $\mathcal{G}(\varphi)$, demonstrando que este objeto é responsável pela quebra da covariância relativística de Lorentz da teoria original de Ahluwalia e Grumiller, apresentada à comunidade científica em 2005. Por sorte, a proposta teórica da *VSR*, desenvolvida no ano seguinte por Cohen e Glashow, possui as transformações necessárias para que um grupo do sub-grupo de Lorentz permita as somas de *spin* acima serem covariantes sob transformações frente a tal grupo, a saber, *HOM*(2) e *SIM*(2), descrito de forma sucinta-conceitual na abertura desta seção, e com os geradores e álgebra expressos na Tabela 1. A localidade da teoria fica restrita apenas ao longo do eixo *z*, como enfatizado em Rogerio e Silva (2017) e Duarte et al. (2019), frente a um dado sistema de referencial inercial adotado.

Por muito tempo, acreditou-se que o traço de não localidade era considerado uma característica inerente a esse férmion candidato à descrição da matéria escura. Contudo, recentemente, o trabalho de Ahluwalia (2017b) trouxe à tona uma proposta de deformação sutil no espinor adjunto associado ao *Elko*, levando a um novo campo local e, por essa razão, o problema de soma de *spin* que não apresentava

Grupo	Geradores	Álgebra
$HOM(2)$	T_1, T_2 e K_z	$[T_1, T_2] = 0, [T_1, K_z] = iT_1$ e $[T_2, K_z] = iT_2$
$SIM(2)$	T_1, T_2, J_z e K_z	$[T_1, T_2] = 0, [T_1, K_z] = iT_1$ e $[T_2, K_z] = iT_2$ $[T_1, J_z] = -iT_2, [T_2, J_z] = iT_1$ e $[J_z, K_z] = 0$

Tabela 1 – Geradores e álgebra dos grupos $HOM(2)$ e $SIM(2)$, sendo os geradores $T_1 \equiv K_x + J_y$ e $T_2 \equiv K_y - J_x$ denotados em termos das componentes x e y dos geradores usuais \mathbf{J} (rotações) e \mathbf{K} (boosts).

invariância (ou covariância) sob transformações de Lorentz foi “definitivamente” contornado. A construção física e matemática da (re)definição destes novos espinores duais é mostrada em detalhe no referido artigo, bem como na tese de doutorado de Rogério (2018). Dito isto, introduz-se o seguinte conjunto de transformações dos antigos para os novos duais da teoria:

$$\tilde{\lambda}_\xi^S(p^\mu) \mapsto \overset{\neg}{\lambda}_\xi^S(p^\mu) = \tilde{\lambda}_\xi^S(p^\mu)\mathcal{A} \quad (3.60)$$

e

$$\tilde{\lambda}_\xi^A(p^\mu) \mapsto \overset{\neg}{\lambda}_\xi^A(p^\mu) = \tilde{\lambda}_\xi^A(p^\mu)\mathcal{B}, \quad (3.61)$$

sendo \mathcal{A} e \mathcal{B} operadores dados por

$$\mathcal{A} = 2 \left[\frac{\mathbb{1} - \tau\mathcal{G}(\varphi)}{1 - \tau^2} \right] \quad (3.62)$$

e

$$\mathcal{B} = 2 \left[\frac{\mathbb{1} + \tau\mathcal{G}(\varphi)}{1 - \tau^2} \right], \quad (3.63)$$

respectivamente, em que τ é um parâmetro conhecido por “ τ -deformação” cujo limite deve ser bem definido em $\tau \rightarrow 1$, a fim de que a soma de *spin* seja bem estabelecida, como mostrado adiante. Vale observar, também, o fato de que $\mathcal{G}(\varphi)$ é a exata matriz antidiagonal expressa pela equação (3.58).

Desse modo, o princípio da ortonormalidade se mantém inalterada,

$$\overset{\neg}{\lambda}_\xi^S(p^\mu)\lambda_{\xi'}^S(p^\mu) = 2m\delta_{\xi\xi'}, \quad \overset{\neg}{\lambda}_\xi^A(p^\mu)\lambda_{\xi'}^A(p^\mu) = -2m\delta_{\xi\xi'}, \quad \overset{\neg}{\lambda}_\xi^{S/A}(p^\mu)\lambda_{\xi'}^{A/S}(p^\mu) = 0, \quad (3.64)$$

devido as propriedades

$$\mathcal{A}\lambda_\xi^S(p^\mu) = \lambda_\xi^S(p^\mu) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}\lambda_\xi^A(p^\mu) = \lambda_\xi^A(p^\mu). \quad (3.65)$$

A verificação das somas de *spin* reflete em

$$\sum_\xi \lambda_\xi^S(p^\mu) \overset{\neg}{\lambda}_\xi^S(p^\mu) = \sum_\xi \lambda_\xi^S(p^\mu) \tilde{\lambda}_\xi^S(p^\mu) \mathcal{A} = 2m[\mathbb{1} + \mathcal{G}(\varphi)] \left[\frac{\mathbb{1} - \tau\mathcal{G}(\varphi)}{1 - \tau^2} \right] \Bigg|_{\tau \rightarrow 1} = 2m\mathbb{1} \quad (3.66)$$

e

$$\sum_{\xi} \lambda_{\xi}^A(p^{\mu}) \tilde{\lambda}_{\xi}^{-A}(p^{\mu}) = \sum_{\xi} \lambda_{\xi}^A(p^{\mu}) \tilde{\lambda}_{\xi}^A(p^{\mu}) \mathcal{B} = -2m[\mathbb{1} - \mathcal{G}(\varphi)] \left[\frac{\mathbb{1} + \tau \mathcal{G}(\varphi)}{1 - \tau^2} \right] \Big|_{\tau \rightarrow 1} = -2m\mathbb{1}, \quad (3.67)$$

valendo-se do fato de $\mathcal{G}^2(\varphi) = \mathbb{1}$. É importante enfatizar que não existe solução para $\tau = 1$, embora exista nos limites infinitamente próximos às vizinhanças sob o parâmetro, tanto no limite pela esquerda e pela direita desse valor.

Logo, é possível notar que a redefinição da estrutura dual fornece uma teoria invariante por transformações de Lorentz, que obedece ao princípio da localidade, sem a necessidade de se recorrer à *VSR*.

Como desfecho desta seção, é interessante analisar a dinâmica associada ao espinor com novo dual, que não se diferencia da dinâmica para a teoria precedente. Partindo-se do fato que (SILVA et al., 2016)

$$\gamma_{\mu} p^{\mu} \lambda_{\{\pm, \mp\}}^S = \pm im \lambda_{\{\mp, \pm\}}^S \quad \text{e} \quad \gamma_{\mu} p^{\mu} \lambda_{\{\pm, \mp\}}^A = \mp im \lambda_{\{\mp, \pm\}}^A, \quad (3.68)$$

tem-se, por consequência, que (para os autoconjugados (S))

$$\gamma_{\nu} p^{\nu} \gamma_{\mu} p^{\mu} \lambda_{\{\pm, \mp\}}^S(p^{\mu}) = \pm im \gamma_{\nu} p^{\nu} \lambda_{\{\mp, \pm\}}^S(p^{\mu}) \Rightarrow -(\gamma_{\mu} \partial^{\mu})(\gamma_{\nu} \partial^{\nu}) \lambda_{\{\pm, \mp\}}^S(p^{\mu}) = \pm im (\mp im \lambda_{\{\pm, \mp\}}^S). \quad (3.69)$$

Como $-(\gamma_{\mu} \partial^{\mu})(\gamma_{\nu} \partial^{\nu}) = -\frac{1}{2} \{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} \partial^{\mu} \partial^{\nu}$, então segue que

$$-\square \lambda_{\{\pm, \mp\}}^S(p^{\mu}) = m^2 \lambda_{\{\pm, \mp\}}^S(p^{\mu}), \quad (3.70)$$

sendo válido o mesmo raciocínio para os anti-autoconjugados (A). Portanto, de modo geral:

$$(\square + m^2) \lambda_{\xi}^{S/A}(p^{\mu}) = 0. \quad (3.71)$$

Como esses campos satisfazem somente a dinâmica de Klein-Gordon e, desta forma, a lagrangiana que resulta na equação de movimento do campo é idêntica à lagrangiana do campo escalar, isso implica no fato de que esses espinores devem ser dotados de **dimensão de massa um**, explicando, portanto, sua nomenclatura e sigla: **MDO**. Característica diferentemente esperada para um campo espinorial de Dirac, cuja dimensão de massa é $3/2$. Além disso, por satisfazer diretamente tal dinâmica, a conservação de energia é satisfeita. Nesse contexto, fica claro que a nova formulação representa os espinores de dimensão de massa um, pertencentes ao grupo de Lorentz, sendo necessária uma revisão profunda do teorema *no-go*¹⁴ de Weinberg (AHLUWALIA, 2017a), enquanto a anterior se restringe às simetrias da teoria *VSR*, portanto, ambas as formulações são distintas. É de suma importância notar a diferença conceitual entre os espinores *Elko* (invariante da *VSR*) e os novos espinores locais *MDO* (invariante de Lorentz).

¹⁴ Tal teorema afirma que é impossível a existência de um campo espinorial de spin-1/2, além do campo de Dirac, que seja local e não viole as simetrias de Lorentz (AHLUWALIA, 2017a).

3.4 CAMPO QUÂNTICO E PROPAGADOR DE FEYNMAN-DYSON DO FÉRMION *MDO*

Partindo do fato de que os espinores *MDO* generalizam os espinores de Majorana e, simultaneamente, obedecem somente a equação de Klein-Gordon, é natural que a conservação de energia seja mantida e os coeficientes de expansão de $\lambda_\xi^{S/A}(\mathbf{k})$ sejam à lá campo escalar, afim de definir o campo quântico desse objeto em sua forma mais geral, em conformidade com o que fora apresentado em Ahluwalia e Grumiller (2005b), Rogério (2018). Assim, expandindo-se o campo quântico do *MDO*, a partir do espaço das posições $\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, em termos da transformada de Fourier, tem-se:

$$\mathbf{f}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{a(k^\mu)}{2E(\mathbf{k})} \sum_\xi [\hat{c}_\xi(\mathbf{k}) \lambda_\xi^S(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{c}_\xi^\dagger(\mathbf{k}) \lambda_\xi^A(\mathbf{k}) e^{+ik_\mu x^\mu}], \quad (3.72)$$

em que $\hat{c}_\xi(\mathbf{k})$ e $\hat{c}_\xi^\dagger(\mathbf{k})$ são os operadores de aniquilação e criação cujas relações algébricas devem ser determinadas e $a(k^\mu) \in \mathbb{R}$ é um parâmetro que terá sua condição revelada adiante. O operador que aniquila o campo quântico (3.72) deve ser tal que conduza às soluções de ondas planas da equação de Klein-Gordon:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\mathbf{f}(x) = 0. \quad (3.73)$$

A densidade de lagrangiana livre do férmion *MDO* é, portanto,

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \bar{\mathbf{f}}(x) \partial_\mu \mathbf{f}(x) - m^2 \bar{\mathbf{f}}(x) \mathbf{f}(x). \quad (3.74)$$

Já a densidade de hamiltoniana, por sua vez, é expressa por

$$\mathcal{H} = \Pi(x) \frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}(x)}{\partial t} \bar{\Pi}(x) - \mathcal{L}, \quad (3.75)$$

em que, via equação (3.74), os momentos conjugados são denotados como

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{f}}(x)} = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}(x)}{\partial t} \quad \text{e} \quad \bar{\Pi}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\mathbf{f}}}(x)} = \frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial t}. \quad (3.76)$$

Integrando \mathcal{H} em todo espaço, utilizando (3.75) e (3.76), obtem-se a hamiltoniana:

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x (\partial^0 \bar{\mathbf{f}}(x) \partial_0 \mathbf{f}(x) - \partial^i \bar{\mathbf{f}}(x) \partial_i \mathbf{f}(x) + m^2 \bar{\mathbf{f}}(x) \mathbf{f}(x)), \quad (3.77)$$

exigindo-se a positividade da mesma.

Substituindo-se os operadores de campo quântico usual/dual, a partir da expressão (3.72), e realizando as operações necessárias, tem-se que

$$\begin{aligned} H &= \int \left(\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \right) \left(\frac{a^2(k^\mu)}{4E^2(\mathbf{k})} \right) \sum_\xi [(k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2) \\ &\times (\hat{c}_\xi^\dagger(\mathbf{k}) \hat{c}_\xi(\mathbf{k}) \bar{\lambda}_\xi^S(\mathbf{k}) \lambda_\xi^S(\mathbf{k}) + \hat{c}_\xi(\mathbf{k}) \hat{c}_\xi^\dagger(\mathbf{k}) \bar{\lambda}_\xi^A(\mathbf{k}) \lambda_\xi^A(\mathbf{k}))]. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Reconhecendo que $(k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2) = 2E^2(\mathbf{k})$ e utilizando-se a condição de ortogonalidade/normalidade (3.55) do *Elko* que, por sua vez, é válida para a prescrição local do férmion *MDO*, a equação (3.78) passa a ser escrita como:

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a^2(k^\mu) m \sum_{\xi} [\hat{c}_{\xi}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{c}_{\xi}(\mathbf{k}) - \hat{c}_{\xi}(\mathbf{k}) \hat{c}_{\xi}^{\dagger}(\mathbf{k})]. \quad (3.79)$$

É necessário observar que se $\hat{c}_{\xi}^{\dagger}(\mathbf{k})$ e $\hat{c}_{\xi}(\mathbf{k})$ comutarem, a hamiltoniana pode assumir valores negativos, assim as seguintes relações de anticomutação precisam ser satisfeitas:

$$\{\hat{c}_{\xi}(\mathbf{k}), \hat{c}_{\xi'}^{\dagger}(\mathbf{k}')\} = b(k^\mu) (2\pi)^3 2E(\mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\xi\xi'}, \quad (3.80)$$

de modo que

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a^2(k^\mu) m \sum_{\xi} [\hat{c}_{\xi}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{c}_{\xi}(\mathbf{k}) - b(k^\mu) (2\pi)^3 2E(\mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \hat{c}_{\xi}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{c}_{\xi}(\mathbf{k})]. \quad (3.81)$$

Dessa maneira, a equação (3.79) torna-se compatível com (3.80) quando os parâmetros

$$a(k^\mu) = \sqrt{\frac{2E(\mathbf{k})}{m}} \quad \text{e} \quad b(k^\mu) = \frac{1}{2E(\mathbf{k})} \quad (3.82)$$

são condicionados. Através dos valores de $(a(k^\mu), b(k^\mu))$ e munido da forma integral da delta de Dirac, a Hamiltoniana torna-se, então

$$H = H_0 + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} 2E(\mathbf{k}) \sum_{\xi} 2\hat{c}_{\xi}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{c}_{\xi}(\mathbf{k}), \quad (3.83)$$

em que

$$H_0 = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3k . 2E(\mathbf{k}) \quad (3.84)$$

assume o papel da energia do ponto zero do oscilador harmônico simples cujo valor é $(1/2)\hbar\omega$. Porém, aqui, este resultado vem com um sinal negativo, similar ao que ocorre no caso da energia do ponto zero oriunda do férmion de Dirac. É importante analisar, ainda, que cada uma das helicidades $\xi = \{\pm, \mp\}$ dos espinores autoconjugados e anti autoconjugados, em (3.83), colabora com uma energia de $(1/2)E(\mathbf{k})$, totalizando $2E(\mathbf{k})$ que contrasta ao caso espinorial de Dirac cuja helicidade é única e resulta na metade do valor para o férmion *MDO*, ou seja, $E(\mathbf{k})$.

Com isso, as relações de anticomutação entre os operadores de criação e aniquilação se estabelecem, após certo desenvolvimento, como (AHLUWALIA, 2017b; ROGÉRIO, 2018):

$$\begin{aligned} \{\hat{c}_{\xi}(\mathbf{k}), \hat{c}_{\xi'}^{\dagger}(\mathbf{k}')\} &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\xi\xi'}, \\ \{\hat{c}_{\xi}^{\dagger}(\mathbf{k}), \hat{c}_{\xi'}^{\dagger}(\mathbf{k}')\} &= \{\hat{c}_{\xi}(\mathbf{k}), \hat{c}_{\xi'}(\mathbf{k}')\} = 0. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Por fim, aplicando-se o valor de $a(k^\mu)$ de (3.82) sobre o campo quântico para o férmion *MDO* em

(3.72), tem-se:

$$\mathbf{f}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{k})}} \sum_{\xi} [\hat{c}_{\xi}(\mathbf{k}) \lambda_{\xi}^S(\mathbf{k}) e^{-ik_{\mu}x^{\mu}} + \hat{c}_{\xi}^{\dagger}(\mathbf{k}) \lambda_{\xi}^A(\mathbf{k}) e^{ik_{\mu}x^{\mu}}] \quad (3.86)$$

com seu dual dado por

$$\overline{\mathbf{f}}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{k})}} \sum_{\xi} [\hat{c}_{\xi}^{\dagger}(\mathbf{k}) \overline{\lambda}_{\xi}^S(\mathbf{k}) e^{ik_{\mu}x^{\mu}} + \hat{c}_{\xi}(\mathbf{k}) \overline{\lambda}_{\xi}^A(\mathbf{k}) e^{-ik_{\mu}x^{\mu}}]. \quad (3.87)$$

Agora, fazendo-se uso das descrições de campo quântico acima para $\mathbf{f}(x)$ e seu adjunto $\overline{\mathbf{f}}(x)$, tendo em mãos as somas de *spin* (3.66) e (3.67) nos cálculos intermediários, a amplitude para as partículas descritas pelo par $(\mathbf{f}(x), \overline{\mathbf{f}}(x))$ se propagar do ponto do espaço-tempo x para x' é (AHLUWALIA, 2017b) expressa por

$$Q_{x \rightarrow x'} = \alpha \left\langle \left| \mathfrak{T}(\mathbf{f}(x') \overline{\mathbf{f}}(x)) \right| \right\rangle = 2\alpha i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik^{\mu}(x'_{\mu} - x_{\mu})} \left[\frac{\mathbb{1}_4}{k^{\mu}k_{\mu} - m^2 + i\epsilon} \right], \quad (3.88)$$

em que o operador \mathfrak{T} é o ordenamento temporal, exigindo que os campos sejam colocados em ordem de causa e efeito, ou seja, aquele que possui maior x^0 fica à esquerda. O parâmetro $\epsilon = 0^+$ e o fator $\alpha \in \mathbb{C}$ é determinado de modo que, na fase global, quando $Q_{x \rightarrow x'}$ sofre integração sobre todos os possíveis valores entre $(x - x')$, o resultado seja condicionado a

$$\alpha = \frac{i}{2} m^2, \quad (3.89)$$

permitindo reescrever a expressão (3.88) como

$$Q_{x \rightarrow x'} = -m^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik^{\mu}(x'_{\mu} - x_{\mu})} \left[\frac{\mathbb{1}_4}{k^{\mu}k_{\mu} - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (3.90)$$

Após uma série de detalhes que podem ser visualizados em Ahluwalia e Grumiller (2005b), o propagador de Feynman-Dyson é então definido para ser proporcional a $Q_{x \rightarrow x'}$ de tal forma que a constante de proporcionalidade é ajustada, tornando o propagador de Feynman-Dyson coincidente com a função de Green associada à equação de movimento para o campo $\mathbf{f}(x)$. Levando em consideração, ainda, as observações quanto as condições do fator α , tem-se o propagador do campo fermiônico MDO:

$$\mathcal{S}_{FD}(x' - x) = -\frac{1}{m^2} Q_{x \rightarrow x'} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik^{\mu}(x'_{\mu} - x_{\mu})} \left[\frac{\mathbb{1}_4}{k^{\mu}k_{\mu} - m^2 + i\epsilon} \right], \quad (3.91)$$

que por sua vez satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$(\partial_{\mu'} \partial^{\mu'} + m^2 \mathbb{1}_4) \mathcal{S}_{FD}(x' - x) = -\delta^4(x' - x). \quad (3.92)$$

Como consequência imediata expressa pelo propagador (3.91), seguindo o protocolo definido na Seção [12.1] de Weinberg (2005), a dimensão de massa desse objeto se torna indistinguível de um

campo escalar, sendo $\mathcal{D}_{\hat{f}(x)} = 1$ e concomitante ao conceito deste espinor em si.

É importante finalizar esta seção, e conseqüentemente este capítulo, apontando que o campo fermiônico de dimensão de massa um possui interações físicas com outros campos de matéria e de *gauge* do modelo padrão de Física de Partículas de forma extremamente limitada, como detalhado em Ahluwalia e Grumiller (2005b). Os acoplamentos permitidos são basicamente restritos a: autointeração quártica, interação com o bóson de Higgs e acoplamento semelhante ao de Yukawa com os neutrinos. Isto posto, um novo tópico de estudos dentro da da Cosmologia e da TQC nasce. Nas palavras do próprio pai da teoria:

“... destacamos que uma cosmologia de primeiro princípio baseada no *Elko* e no *MDO* nasceu. Nela, as partículas do modelo padrão, matéria escura, inflação e possivelmente energia escura são fundidas em um todo, onde as simetrias do espaço-tempo e certas simetrias discretas desempenham um papel crucial.” (AHLUWALIA, 2017b) (tradução do autor).

Cabe salientar que, mesmo não fazendo parte do modelo padrão, ainda, o gráviton seria outro campo fisicamente possível em se acoplar com o férmion *MDO*, visto que todo e qualquer conteúdo de matéria e energia presente no universo interage gravitacionalmente. O próximo capítulo apresenta e traz uma breve descrição física acerca do campo quântico associado à gravidade: o gráviton.

4 O CONCEITO DE GRÁVITON

Do ponto de vista histórico, o termo *gráviton* foi assim cunhado no início dos anos de 30 do século passado pelos físicos Dmitrii Blokhintsev e Gal'perin (1934). Admite-se que dentro das teorias de gravitação quântica, o gráviton deve ser encarado como uma partícula elementar, emergente de um hipotético campo quântico associado à gravidade, que serve de mediação à força gravitacional, análogo ao fóton na Eletrodinâmica Quântica. É um fato conhecido na literatura de que não há uma teoria quântica de campo completa e consistente aos grávitons, por dificuldades de acessibilidade aos dados observacionais existentes e devido a problemas matemáticos penderes à renormalização na teoria da RG (ROVELLI, 2000). Embora, existam métodos que tentam contornar problemas no regime ultravioleta, como a teoria de Hořava (2009) e tratamentos efetivos para a gravidade (DONOGHUE, 1995). Espera-se que, caso seja observado, o gráviton se revele não massivo¹, uma vez que a interação gravitacional tem um alcance aparentemente infinito, além de se propagar à velocidade da luz. O gráviton deve ser um bóson de *spin*-2 porque a base adjacente à gravidade é um tensor geométrico cujo *ranking* é de segunda ordem. Em seu limite clássico, uma teoria bem sucedida para grávitons deve se reduzir à teoria da RG que, por sua vez, se reduz à lei da gravitação universal de Newton no limite do campo fraco.

Uma das principais motivações para lidar com o problema da gravidade quântica foi explicada por Peter Bergmann da seguinte forma:

“A física teórica de hoje é amplamente construída em duas estruturas conceituais gigantes: teoria quântica e relatividade geral. Como o primeiro governa principalmente os mundos atômico e subatômico, enquanto as principais aplicações do último até agora têm sido na astronomia e cosmologia, nossa falha em harmonizar quanta e gravitação ainda não impediu o progresso em nenhuma das frentes. No entanto, a possibilidade de que possa haver alguma dissonância profunda causou aos físicos um mal-estar estético e fez com que várias pessoas explorassem caminhos que poderiam levar a uma teoria quântica da gravitação, não importa quantas décadas de distância das observações dos 'grávitons' pode estar no futuro.” (BERGMANN, 1992, p. 24) (tradução do autor).

Este capítulo tem como função apresentar, de forma breve, algumas características da natureza do gráviton, partindo das bases de ondas gravitacionais a campo fraco sobre o espaço-tempo de Minkowski e elucidar a noção de helicidade ligada a essa estrutura. Em seguida, será discutido de que maneira os grávitons são definidos como partículas de *spin*-2 a partir de representações do grupo de Poincaré e finalmente, a quantização do campo gravitacional em sua aproximação linear, bem como a descrição de seu propagador. A essência para este aparato teórico está assentada à luz das obras de Weinberg (2005), Kiefer (2007) e das bases para a física do gráviton de Holstein (2006).

¹ Apesar de existir teorias que, analogamente à teoria de Proca para fótons massivos (TU; LUO; GILLIES, 2005), consideram a possibilidade do gráviton ser dotado de massa. Mas, esse assunto é um tanto quanto sutil e foge da alçada desta tese, pois a ideia de grávitons massivos apresentam patologias perigosas, incluindo um modo fantasma e uma descontinuidade com a RG no limite onde a massa do gráviton vai a zero, como mostrado no trabalho de Hassan e Rosen (2011).

4.1 PERTURBAÇÕES A CAMPO FRACO

Como ponto de partida, as equações de campo de Einstein desenvolvidas no Capítulo 2 serão (re)-obtidas sob a forma linearizada. Para que isso seja concretizado, faz-se necessário adotar um regime a campo fraco, com decomposição de uma métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$ em um *background* fixo (ou seja, não dinâmico) de Minkowski e uma perturbação $h_{\mu\nu}$, explicitamente dada por

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

em que² $\kappa^2 = 16\pi G$, $|\kappa h_{\mu\nu}| \ll 1$ e $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ sendo um objeto simétrico. A componente inversa da matriz métrica e o termo do elemento de volume do espaço-tempo perturbado são expressos como

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h^{\mu\lambda} h^\nu{}_\lambda + \dots + \mathcal{O}(\kappa^n) \quad (4.2)$$

e

$$\sqrt{-g} = (-\det[g_{\mu\nu}])^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2}Tr[\ln(g_{\mu\nu})]\right) = 1 + \frac{\kappa}{2}h - \frac{\kappa^2}{4}h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} + \frac{\kappa^2}{8}h^2 + \dots + \mathcal{O}(\kappa^n), \quad (4.3)$$

em que $Tr[\]$ é o operador traço e $h = h^\mu{}_\mu$ é o traço da perturbação.

De modo a focar nas parcelas significativamente mais relevantes da perturbação, daqui em diante serão negligenciados os termos de ordem igual ou superior a $\mathcal{O}(\kappa^2)$. Com essa delimitação, tem-se que as componentes da conexão afim (sem torção), do tensor de Ricci e do escalar curvatura são denotados, respectivamente, nas formas

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{\kappa}{2}(\partial_\mu h^\rho{}_\nu + \partial_\nu h_\mu{}^\rho - \partial^\rho h_{\mu\nu}), \quad (4.4)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}(\partial_\mu\partial_\nu h + \partial_\lambda\partial^\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\lambda h^\lambda{}_\nu - \partial_\nu\partial_\lambda h^\lambda{}_\mu) \quad (4.5)$$

e

$$R = \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \kappa(\square h - \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}). \quad (4.6)$$

Antes de elucidar as equações de campo da gravidade linearizada, deve-se impor uma “condição harmônica”, também chamada de *gauge* de deDonder. Essa condição desenvolve um papel análogo ao *gauge* de Lorenz no eletromagnetismo (em que $\partial_\nu A^\nu = 0$), e aqui é usada para fixar parcialmente as coordenadas, assegurando $g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ e mantendo a invariância da teoria completa sob transformações de coordenadas. Por essa razão, a teoria da RG pode ser encarada como uma teoria de *gauge* que garante um difeomorfismo³ na ordem linearizada. Essa invariância da gravitação em campo fraco é

² Algumas referências adotam $\kappa^2 = 32\pi G$, pois partem de uma ação de Einstein-Hilbert prescrita como $\mathcal{S} = (2/\kappa^2) \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} R d^4x$. Em sutil contraste com a formulação $\mathcal{S} = (1/\kappa^2) \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} R d^4x$, adotada desde o Capítulo 2.

³ É um isomorfismo de variedades suaves: uma função invertível que mapeia uma variedade diferenciável em outra, de modo que tanto a função quanto sua inversa sejam suaves (CARMO, 2010, p. 87).

dada por

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x), \quad \epsilon \ll 1, \quad (4.7)$$

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu, \quad (4.8)$$

em que ϵ_μ é um vetor que gera o difeomorfismo. O *gauge* de deDonder é, por sua vez, definido como:

$$\partial^\beta h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_\alpha h = 0. \quad (4.9)$$

Ademais, esse *gauge* é importante para a definição futura do propagador do gráviton.

Assim, fazendo-se uso das equações (4.5) e (4.6), a relação entre o tensor de Einstein e o tensor energia-momento é descrita na forma

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square h - \partial_\mu \left(\partial^\beta h_{\beta\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu h \right) - \partial_\nu \left(\partial^\beta h_{\beta\mu} - \frac{1}{2} \partial_\mu h \right) = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (4.10)$$

Em posse do *gauge* de deDonder (4.9), as equações de campo de Einstein linearizadas podem ser escritas na forma:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}, \quad (4.11)$$

em que $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - 1/2 \eta_{\mu\nu} h$. Ou, equivalentemente

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T \right), \quad (4.12)$$

sendo $T \equiv \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ o traço do tensor energia-momento.

Pode-se notar que a equação (4.11) se assemelha, do ponto de vista estrutural, com as equações de onda de Maxwell para o eletromagnetismo na prescrição covariante: $\square A^\mu = 4\pi j^\mu$. Observa-se, assim, que a condição harmônica é consistente com $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ (análogo a $\partial_\nu j^\nu = 0$ no eletromagnetismo), mas não com $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Portanto, embora $T_{\mu\nu}$ atue como uma fonte para $h_{\mu\nu}$, não há dentro da aproximação linear nenhuma troca de energia entre a matéria e o campo gravitacional. Devido a este último argumento, a resolução da equação (4.11) é feita no vácuo, com ausência de matéria ($T_{\mu\nu} = 0$), garantindo soluções de ondas planas,

$$h_{\mu\nu}(x) = \varepsilon_{\mu\nu} e^{ikx} + \varepsilon_{\mu\nu}^* e^{-ikx}, \quad (4.13)$$

chamadas ondas gravitacionais, em que $\varepsilon_{\mu\nu}$ é o tensor de polarização, sendo $k_\mu k^\mu = 0$. Analisando essa solução com o *gauge* (4.9), tem-se

$$k^\nu \varepsilon_{\mu\nu} - \frac{1}{2} k_\mu \varepsilon^\nu{}_\nu = 0. \quad (4.14)$$

Uma vez que $h_{\mu\nu}$ continua obedecendo a condição dada pela equação (4.9), ao realizar uma nova

transformação de coordenadas do tipo (4.7), estabelece-se que

$$\partial^\nu h'_{\mu\nu}(x') - \frac{1}{2}\partial_\mu h'(x') = -\square\varepsilon_\mu, \quad (4.15)$$

sendo, segundo Kiefer (2007), possível fixar as coordenadas e escolher quatro funções $\varepsilon_\mu(x)$ que satisfaçam $\square\varepsilon = 0$, resultando em um total de dois graus de liberdade independente para o campo gravitacional em aproximação linear.

Em análises mais minuciosas, é conveniente que as ondas planas explicitadas na equação (4.13) tenham um comportamento puramente espacial e transversal em sua própria direção de propagação ($\varepsilon_{\mu\nu}k^\nu = 0$), sendo $\varepsilon^\nu{}_\nu = 0$. Os dois estados de polarização linear independentes são geralmente chamados de polarização $+$ e polarização \times (THORNE; MISNER; WHEELER, 2000). Assim, supondo que uma onda plana se mova na direção $x_3 \equiv z$, as direções transversais ($x_1 \equiv x, x_2 \equiv y$) terão um anel de partículas de teste deformadas em uma elipse pulsante, com o eixo da polarização $+$ sendo girado em $\pi/4$ em comparação com a polarização \times , como se pode ver na Figura 1.

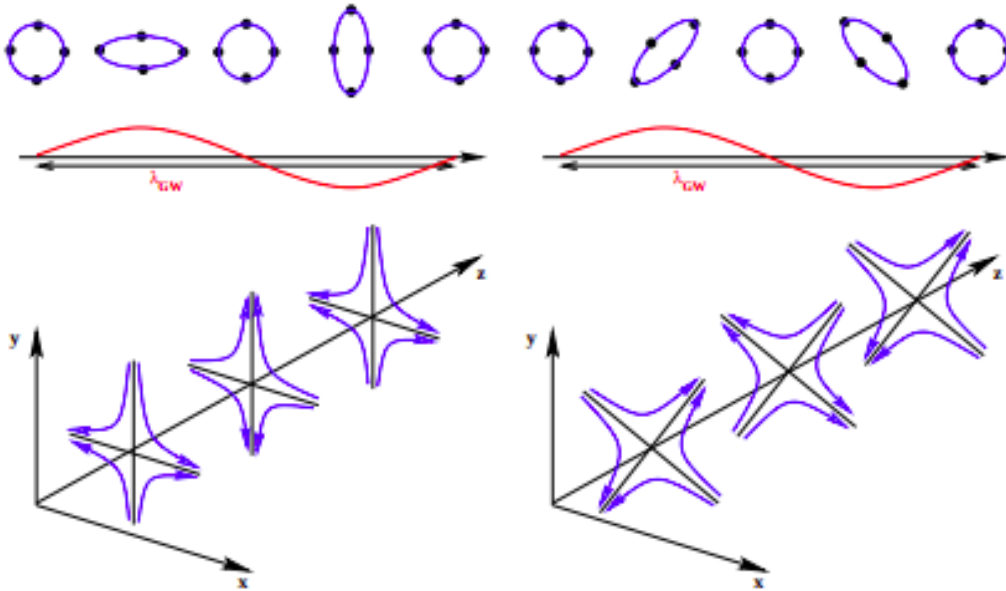


Figura 1 – Ondas gravitacionais com dois modos diferentes de polarização transversal: polarização $+$ (esquerda) e polarização \times (direita). Aqui, uma onda gravitacional que viaja ao longo do eixo z e atua no plano (x, y) é representada. Imagens reproduzidas de Buonanno (2007).

Explicitamente, a propagação de $h_{\mu\nu}$ que retrata as polarizações para o caso particular exemplificado acima é descrita como

$$h_{\mu\nu} = 2\Re(\varepsilon_{\mu\nu}e^{-i\omega(t-z)}), \quad (4.16)$$

tomando-se a soma das amplitudes de (4.13), sendo $x^0 \equiv 0, k^0 = k^3 \equiv \omega > 0$ e $k^1 = k^2 = 0$, já que sua propagação está sobre o eixo z . Denotando e_x e e_y para caracterização dos vetores unitários nas direções x e y , respectivamente, tem-se que as polarizações $+$ e \times são expressas como

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}\mathbf{e}_+ = \varepsilon_{11}(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y), \\ \varepsilon_{12}\mathbf{e}_\times = \varepsilon_{12}(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x). \end{cases} \quad (4.17)$$

Soluções gerais da equação de onda podem ser obtidas realizando superposições dos estados de polarização linear. De modo particular,

$$\mathbf{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ + i\mathbf{e}_\times) \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ - i\mathbf{e}_\times), \quad (4.18)$$

são os estados de polarização na forma circular de componentes de mão direita e esquerda, respectivamente.

É importante frisar que o comportamento das ondas $h_{\mu\nu}$ em relação a uma rotação em torno do eixo de propagação se faz útil para entender uma peculiaridade desse objeto frente a outros campos de matéria ou de *gauge* conhecidos. Girando no sentido anti-horário com um ângulo θ , os estados de polarização se transformam como

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_+ = \mathbf{e}_+ \cos(2\theta) + \mathbf{e}_\times \sin(2\theta), \\ \mathbf{e}'_\times = \mathbf{e}_\times \cos(2\theta) - \mathbf{e}_+ \sin(2\theta). \end{cases} \quad (4.19)$$

Tomando essa prescrição, os estados presentes na equação (4.18) seguem a transformação:

$$\mathbf{e}_R \mapsto \mathbf{e}'_R = e^{-2i\theta} \mathbf{e}_R \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_L \mapsto \mathbf{e}'_L = e^{+2i\theta} \mathbf{e}_L. \quad (4.20)$$

Esses tensores de polarização, portanto, realizam uma volta completa sob um ângulo de 2θ . Cabe recapitular que se uma onda plana arbitrária, ϕ , transforma-se como $\phi \mapsto \phi' = \phi e^{ih\theta}$ sob uma rotação em torno da direção de propagação, este objeto h é denominado helicidade, como já discutido conceitualmente no Capítulo 3. A onda gravitacional polarizada circular de componentes de mão esquerda e direita tem, portanto, helicidade ± 2 . A critério de comparação, a componente do campo vetorial, A_μ , no eletromagnetismo se move no espaço-tempo na forma

$$A_\mu = \varepsilon_\mu e^{ikx} + \varepsilon_\mu^* e^{-ikx}, \quad (4.21)$$

sendo ε_μ seu vetor de polarização, com $k_\mu k^\mu = 0$ e $k_\nu \varepsilon^\nu = 0$. As respectivas componentes via polarização circular são expressas como

$$\mathbf{e}_R \mapsto \mathbf{e}'_R = e^{-i\theta} \mathbf{e}_R \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_L \mapsto \mathbf{e}'_L = e^{+i\theta} \mathbf{e}_L, \quad (4.22)$$

revelando helicidades ± 1 para as mãos esquerda e direita.

Toda onda plana com helicidade h tem seus eixos de polarização linear inclinados um em direção ao outro por um ângulo de $2\pi h$. Para uma partícula de *spin*-1/2, por exemplo, significa dizer que isso é correspondente a um ângulo π . No caso de uma onda tensorial $h_{\mu\nu}$ se verifica, através da transformação (4.20), que a invariância para ela só é alcançada após uma rotação quatro vezes maior, ou seja, 4π . Estabelece-se, com isso, que tal onda deva ser caracterizada à partículas de *spin*-2. Dentro da TQC, esses estados são reconhecidos como estados de helicidade associados à partícula gráviton, que será explanado melhor na seção seguinte.

4.2 GRÁVITONS COMO REPRESENTAÇÕES DO GRUPO DE POINCARÉ

Na seção anterior, foi salientada uma discussão acerca do caráter não massivo e de *spin-2* para a partícula adjacente à perturbação gravitacional, representada pela onda $h_{\mu\nu}$. Mas, por que massa nula? Pela natureza de longo alcance da interação gravitacional, é esperado que o gráviton deve ser dotado de uma pequena massa. Porém, a presença de uma massa, por menor que seja, afeta a deflexão da luz descontinuamente e isso leva à primeira conclusão de que a massa do gráviton deve ser estritamente zero, vide Dam e Veltman (1970). O mesmo argumento não pode, necessariamente, ser apreciado para fótons.

A presente seção está encarregada de apresentar apenas as noções de estados de uma partícula, na concepção da Mecânica Quântica, à onda gravitacional. O palco principal é o espaço-tempo plano de Minkowski com métrica $\eta_{\mu\nu}$, fazendo o papel de um *background* de fundo fixo, trazendo consigo as simetrias de Poincaré, a saber: translações, *boosts* e rotações. O uso do grupo de Poincaré, não estendido para além do nível linearizado da RG, já é um indicativo da natureza aproximada do conceito de gráviton.

De acordo com os robustos alicerces construídos por Wigner (1939), “partículas” são classificadas como representações irredutíveis do grupo de Poincaré. E, uma transformação de Poincaré, sob uma determinada coordenada x^μ , se define por

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (4.23)$$

em que Λ^μ_ν representa as componentes da matriz de transformação de Lorentz e a^μ denota translações no espaço-tempo minkowskiano. Consoante ao teorema de Wigner (KIEFER, 2007), a transformação geométrica (4.23) induz uma transformação unitária⁴ no espaço de Hilbert⁵ da teoria,

$$\psi \mapsto \psi' = U(\Lambda, a)\psi, \quad (4.24)$$

sendo $U(\Lambda, a)$ o operador de transformação unitária agindo no domínio de Poincaré. Uma vez que este grupo é um grupo de Lie⁶, é conveniente estudar os elementos do grupo fechado para a identidade. Assim, tomando-se as transformações infinitesimais do espaço de Poincaré,

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu \quad \text{e} \quad a^\mu = \epsilon^\mu, \quad (4.25)$$

em que $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, tem-se a correspondente expansão da transformação unitária no espaço de

⁴ O teorema também permite transformações anti-unitárias, mas estas são relevantes apenas para simetrias discretas (WIGNER, 1993).

⁵ Conceitualmente, é um espaço vetorial que consiste em uma generalização do espaço euclidiano com um número infinito de dimensões, dotado de produto interno para definições precisas de distância e ângulos. Estabelece, também, uma relação de completude, garantindo os aspectos de uma teoria contínua com limites bem definidos.

⁶ Uma variedade diferenciável que admite uma estrutura de grupo onde as operações multiplicação e inversão são diferenciáveis.

Hilbert explicitada por⁷

$$U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) = 1 + i\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu}P^{\mu} + \dots, \quad (4.26)$$

em que $J^{\mu\nu}$ e P^{μ} denotam as dez componentes dos geradores hermitianos⁸ na representação do grupo de Poincaré, sendo reconhecidamente os geradores de *boosts*, na forma de momento angular e quadrimento linear, respectivamente. Esses objetos obedecem a seguinte álgebra de Lie (KIEFER, 2007):

$$[P^{\mu}, P^{\nu}] = 0, \quad (4.27)$$

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\lambda\rho}] = \eta^{\nu\lambda}J^{\mu\rho} - \eta^{\mu\lambda}J^{\nu\rho} + \eta^{\nu\rho}J^{\lambda\mu} - \eta^{\mu\rho}J^{\lambda\nu}, \quad (4.28)$$

$$i[P^{\mu}, J^{\nu\rho}] = \eta^{\mu\nu}P^{\rho} - \eta^{\mu\rho}P^{\nu}. \quad (4.29)$$

Via de regra, os estados de uma partícula são classificados segundo seu comportamento com relação às transformações de Poincaré. Uma vez que os componentes P^{μ} dos quatro momentos comutam entre si, ao atuar com este operador sobre um estado, tem-se

$$P^{\mu}\psi_{p,\sigma} = p^{\mu}\psi_{p,\sigma}. \quad (4.30)$$

A equação (4.30) diz que ao atuar um operador P^{μ} sobre o autoestado de uma partícula $\psi_{p,\sigma}$, obtém-se um autovalor p^{μ} associado a este objeto, caracterizado por seu momento p no espaço-tempo e por outros parâmetros intrínsecos denotados por σ que, por sua vez, são codificadas em *spin*, carga elétrica, carga de cor etc (se houver). Nessa mesma linha, a aplicação do operador unitário sobre esses autoestados é dado por

$$U(\mathbb{1}, a)\psi_{p,\sigma} = e^{-ip^{\mu}a_{\mu}}\psi_{p,\sigma}. \quad (4.31)$$

Uma vez que tais estados seguem a transformação de Lorentz (no regime ortócrono próprio), o método de indução de representações pode ser usado para encontrar as representações do *little group*. Este grupo é caracterizado por manter um vetor invariante padrão, k^{μ} , dentro da classe⁹ $p^2 \leq 0$ e observando o sinal de p^0 . Para p^0 positivo, pode-se distinguir entre os dois casos: a primeira possibilidade é $p^2 = -m^2 < 0$, podendo-se escolher $k^{\mu} = (m, 0, 0, 0)$, sendo o *little group* $SO(3)$ (grupo de rotações). Já que essa é uma transformação de Lorentz que mantém uma partícula com $\mathbf{k} = 0$ em repouso; a segunda possibilidade é $p^2 = 0$, sendo possível escolher $k^{\mu} = (1, 0, 0, 1)$, sendo o *little group* $ISO(2)$ (similar a geometria euclidiana bidimensional, mantendo translações e rotações em 2 dimensões), conforme observado em Kiefer (2007). A normalização entre dois estados distintos de $\psi_{p,\sigma}$ se faz de tal forma que o produto interno seja

$$\langle \psi_{p',\sigma'}, \psi_{p,\sigma} \rangle = \delta_{\sigma\sigma'}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (4.32)$$

⁷ O sinal positivo do primeiro termo de i é reforçado pela relação de comutação $[J_l, J_m] = i\epsilon_{lmn}J_n$ enquanto o sinal negativo do segundo termo de i é convencionado.

⁸ Elucida o mesmo conceito usado para operadores hermitianos em Mecânica Quântica. Ou seja, objetos que comutam e que podem ser medidos simultaneamente por observadores localizados em um mesmo referencial.

⁹ Restrição imposta com a finalidade de evitar a existência de táquions (partículas com $m^2 < 0$).

Se for escolhido o primeiro caso ($m \neq 0$) para associar os autoestados de partículas do *little group* $SO(3)$ às ondas gravitacionais $h_{\mu\nu}$, tem-se, a partir da Mecânica Quântica, uma soma direta de representações unitárias irredutíveis denotadas por $\mathcal{D}_{\sigma\sigma'}^{(j)}$ cuja dimensão é $2j + 1$ ($j = 0, 1/2, 1, \dots$). Nesta situação, o momento angular com respeito ao eixo z é caracterizado por $J_3^{(j)} \equiv J_{12}^{(j)}$, sendo $(J_3^{(j)})_{\sigma\sigma'} = \sigma\delta_{\sigma\sigma'}$, em que $\sigma = -j, \dots, +j$. Agora, no segundo caso ($m = 0$) o *little group* é o $ISO(2)$. Neste contexto, ocorre que os estados quânticos são distinguidos apenas pelo autovalor de J_3 , tendo a componente do momento angular na exata direção do movimento (lembrando que $k^\mu = (1, 0, 0, 1)$), ou seja,

$$J_3\psi_{k,\sigma} = \sigma\psi_{k,\sigma}, \quad (4.33)$$

sendo σ a própria helicidade. Esse comportamento concilia exatamente com a única informação adjacente às polarizações das ondas gravitacionais tratadas na seção anterior.

Por fim, ao analisar a situação com translação nula com o operador $U(\Lambda, 0)$ atuando no autoestado $\psi_{p,\sigma}$, tem-se que

$$U(\Lambda, 0)\psi_{p,\sigma} = Ne^{i\sigma\theta(\Lambda,p)}\psi_{\Lambda p,\sigma}, \quad (4.34)$$

em que N designa uma constante de normalização e θ o ângulo de rotação dentro das transformações de Lorentz Λ . Uma vez que as partículas de massa nula não podem ser encontradas em repouso sobre nenhum referencial inercial, a helicidade é uma propriedade invariante de Lorentz que permite evidenciar uma partícula com $m = 0$. Restam apenas as duas possibilidades de ter o momento angular paralelo ou antiparalelo à direção de propagação da onda.

Observando a equação (4.22), a helicidade $\sigma = \pm 1$ caracteriza o fóton¹⁰. Por outro lado, devido à natureza de helicidade $\sigma = \pm 2$, em (4.20), das ondas gravitacionais $h_{\mu\nu}$ emergentes da perturbação a campo fraco, fica caracterizada uma interação gravitacional, cuja partícula associada recebe o nome de **gráviton**, notoriamente uma partícula fundamental de *spin*-2.

4.3 CAMPO QUÂNTICO E PROPAGADOR DO GRÁVITON

Uma vez moldados os aspectos da partícula por trás das ondas gravitacionais $h_{\mu\nu}$, cabe apresentar aqui, muito sucintamente, algumas peculiaridades no âmbito da TQC para o gráviton. A quantização do campo gravitacional linearizado é analisada em detalhes desde seus primórdios, iniciado por Bronstein (1936).

Como discutido em Weinberg (2005), a construção de um campo quântico para uma teoria de campos à gravidade linearizada segue a mesma linha que as usuais empregadas em campos escalares, fermiônicos e bósons de *gauge* de interação. Assim, a superposição das ondas planas gravitacionais oriundas da equação (4.13) remetem ao operador de campo quântico do gráviton, expresso por

$$\mathfrak{h}_{\mu\nu} = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} [a(\mathbf{k}, \sigma)\varepsilon_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \sigma)e^{i\mathbf{k}x} + a^\dagger(\mathbf{k}, \sigma)\varepsilon_{\mu\nu}^*(\mathbf{k}, \sigma)e^{-i\mathbf{k}x}], \quad (4.35)$$

¹⁰ Devido a simetria de inversão no espaço, $\sigma = 1$ e $\sigma = -1$ ditam o comportamento da mesma partícula. Essa explicação é válida também para os grávitons. Mas, devido à violação da paridade não pode ser utilizada para explicar algum estado de neutrinos sem massa (KIEFER, 2007).

em que o par $(a(\mathbf{k}, \sigma); a^\dagger(\mathbf{k}, \sigma))$ designa os operadores de aniquilação e criação para um gráviton de momento \mathbf{k} e helicidade σ , respectivamente. A álgebra de comutação desses operadores obedecem a

$$\{a(\mathbf{k}, \sigma), a^\dagger(\mathbf{k}', \sigma')\} = \delta_{\sigma\sigma'}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (4.36)$$

$$\{a^\dagger(\mathbf{k}, \sigma), a^\dagger(\mathbf{k}', \sigma')\} = \{a(\mathbf{k}, \sigma), a(\mathbf{k}', \sigma')\} = 0. \quad (4.37)$$

Através do operador de campo quântico para o gráviton, informações físicas ligadas a produção de partículas a partir do vácuo, descrição da hamiltoniana, estado de energia mínima e outras investigações podem ser realizadas. Steven Weinberg (2005), inclusive, argumenta que se pode derivar o princípio de equivalência da RG, com a ausência de outros campos de matéria, por meio da invariância de Lorentz da teoria de spin-2, partindo de uma analogia semelhante ao eletromagnetismo, para mostrar que a carga elétrica deve ser conservada. Em sua análise, o acoplamento g_n devido ao gráviton deve assumir o valor $g_n \equiv \sqrt{8\pi G}$. Portanto, todas as partículas a baixas energias, com *spin*-2 e $m = 0$ acoplam-se de maneira igual. Deste ponto de vista, a RG pode ser encarada como uma consequência da teoria quântica.

Ademais, é importante mencionar, para utilização no último capítulo desta tese, que o operador de propagação correspondente ao campo quântico do gráviton é de natureza diferencial invertível, permitindo-se definir tal objeto frente às regras de Feynman de maneira direta, apesar da construção explícita da gravidade apresentar uma complexidade em termos de notação devido à proliferação dos índices de Lorentz, como se pode observar em tHooft e Veltman (1993). Em torno do espaço-tempo minkoskiano, o propagador de Feynman-Dyson associado ao gráviton no espaço dos *momentum*, via o *gauge* harmônico (4.14), é definido por Donoghue (1995):

$$\mathcal{D}_{FD}^{\mu\nu,\alpha\beta}(k) = \frac{1}{2} \frac{(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta})}{k^2 + i\epsilon}, \quad (4.38)$$

em que $\epsilon = 4 - d \rightarrow 0^+$, quando $d \rightarrow 0$ para dimensão do espaço-tempo adotada, e k denota o momento do gráviton que se propaga do ponto $\mu\nu$ ao ponto $\alpha\beta$.

O capítulo subsequente tem o propósito de descrever o acoplamento entre o férmion *MDO* e o campo gravitacional, analisando certas bases para um estudo canônico da dita interação.

5 INTERAÇÃO *MDO*-GRAVIDADE: UMA ABORDAGEM CANÔNICA

No capítulo em questão, apresentamos uma forma de ampliar a ação gravitacional quanto à incorporação da matéria fermiônica de dimensão de massa um e $spin-1/2$, através do formalismo de tetrada-*ADM* em uma generalização da ação de Einstein-Hilbert para Palatini-Holst. Desenvolvemos, na sequência, uma análise dos vínculos hamiltoniano e de difeomorfismo oriundos deste campo de matéria escura acrescido à gravidade, que trouxe à tona sua densidade de energia e sua densidade direcional de fluxo de energia associada. Ademais, propusemos uma condição de acoplamento entre o campo *MDO* e a gravitação, de modo a garantir uma função semelhante à constante cosmológica. Por fim, uma discussão conceitual e qualitativa acerca de um possível programa de quantização canônica da teoria é realizada.

5.1 FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DA RELATIVIDADE GERAL

No Capítulo 2, a descrição clássica do campo gravitacional foi realizada através da variação funcional da densidade de lagrangiana associada à gravidade, pelo princípio da mínima ação, resultando nas equações de Einstein para a dinâmica da RG. Uma formulação hamiltoniana dessa teoria fornece meios para melhor compreensão de alguns aspectos da natureza dessa dinâmica, como será apresentado na sequência, tornando-se um alicerce, inclusive, para a busca de uma possível quantização canônica. O arcabouço teórico desta seção está sustentado em Kiefer (2007), Doná e Speziale (2010) e Dias (2011).

O formalismo *ADM* (Arnowitt-Deser-Misner) foi construído entre o fim dos anos 50 e início dos anos 60 (ARNOWITT; DESER; MISNER, 1959; ARNOWITT; DESER; MISNER, 1962), com a finalidade de descrever as equações de movimento da gravitação, através de uma análise hamiltoniana, estabelecendo um tratamento canônico que identifica as variáveis de configuração e seus respectivos momentos conjugados. Isso é obtido folheando o espaço-tempo descrito por uma variedade munido de uma métrica $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ em um conjunto de hipersuperfícies tipo espaço Σ_t , com t denotando função de tempo global. A condição necessária é que tal variedade deve ser globalmente hiperbólico, ou seja, possuir uma superfície de Cauchy¹ Σ em um instante de tempo na qual os dados iniciais podem ser descritos para determinar exclusivamente todo o espaço-tempo, tal como relatado em Wald (1984).

Há um importante teorema, denominado teorema de Geroch, no qual é afirmado que para um espaço-tempo globalmente hiperbólico existe uma “função tempo” global f tal que cada superfície f constante é uma superfície de Cauchy (DIAS, 2011). Vê-se que $t \in \mathbb{R}$ faz o papel de f . Assim, \mathcal{M} pode ser folheada em hipersuperfícies de Cauchy (Σ), tendo sua topologia como um produto direto

$$\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times \Sigma. \quad (5.1)$$

Realizando-se uma folheação do espaço-tempo nas superfícies de Cauchy, Σ_t , por uma decompo-

¹ Uma subvariedade Lorentziana, interpretada como definição para um “instante de tempo”.

sição (3 + 1), o campo vetorial correspondente ao “fluxo de tempo” é denotado por t^μ , obedecendo a $t^\mu \nabla_\mu t = 1$. Com isso, assumindo-se, a princípio, uma assinatura métrica $(-, +, +, +)$, a métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$ induz uma trimétrica em cada Σ_t , expresso por

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad (5.2)$$

em que $n_\mu = -\delta_\mu^0 / \sqrt{-g^{00}}$ representa um vetor normal à Σ_t , com $n^\mu n_\mu = -1$ (sendo $n^\mu = -g^{0\mu} / \sqrt{-g^{00}}$). A trimétrica $q_{\mu\nu}$ atua como um projetor em Σ_t , $q_{\mu\nu} n^\nu = 0$ e $q_{\mu\nu} q^{\nu\rho} = 0$.

A decomposição de t^μ pode ser feita em termos de componentes normal e tangencial à hipersuperfície Σ_t , dada por

$$\dot{X}^\mu \equiv t^\mu = N n^\mu + N^\mu, \quad (5.3)$$

em que N é a chamada função *lapso*, uma distância puramente temporal entre as hipersuperfícies, e $N^\mu = (0, N^a)$ um objeto tridimensional denominado vetor *shift*, designando um vetor que parte do ponto com coordenadas x^a em t (constante) para um ponto na própria hipersuperfície, com as mesmas coordenadas x^a que flui para $t + dt$ (constante). Assim, pode-se interpretar $t^\mu \equiv \dot{X}^\mu$ como um vetor que aponta de um ponto com coordenadas (espaciais) x^a em t para um ponto com as idênticas coordenadas em uma hipersuperfície vizinha $t + dt$. Observe a Figura 2 para melhor visualização da decomposição presente na equação (5.3). Nessa representação, $X^\mu \equiv (T, X^a) = X^\mu(x^\nu)$ descreve uma família de hipersuperfícies em Minkowski parametrizada em termos de coordenadas gerais e arbitrárias $x^\nu \equiv (t, x^a)$, como discutido em Kiefer (2007).

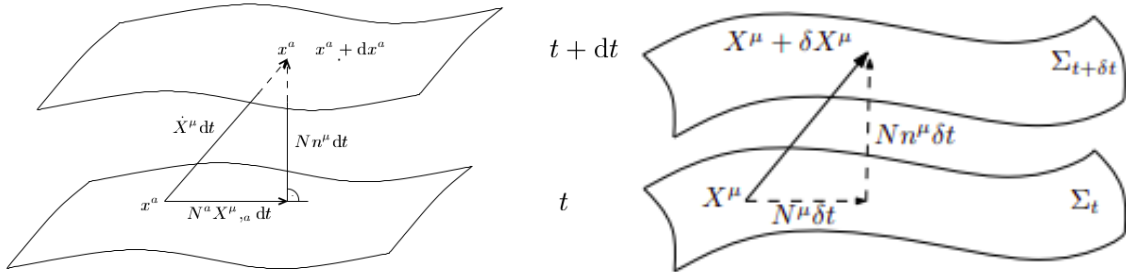


Figura 2 – Interpretação geométrica da função *lapso* N e do vetor *shift* $N^\mu \equiv N^a X^\mu_{,a} = N^a \partial_a X^\mu$, via $t^\mu \equiv \dot{X}^\mu$. Imagens reproduzidas de Kiefer (2007) e Doná e Speziale (2010).

Consequentemente, as componentes da métrica $g_{\mu\nu}$ (e sua inversa) podem ser decompostas em termos das componentes temporal e espacial devido à folheação, sendo expressas por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N_a N^a - N^2 & N_a \\ N_b & q_{ab} \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/N^2 & N^a/N^2 \\ N^b/N^2 & q^{ab} - N^a N^b/N^2 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

em que q^{ab} é a inversa da métrica espacial q_{ab} , obedecendo $q^{ab} q_{bc} = \delta_c^a$. Assim, o elemento de linha quadrimensional, após a folheação, torna-se

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= -N^2 dt^2 + q_{ab} (dx^a + N^a dt)(dx^b + N^b dt) \\ &= (q_{ab} N^a N^b - N^2) dt^2 + 2q_{ab} N^a dx^b dt + q_{ab} dx^a dx^b. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Para estabelecer uma “velocidade” associada à trimétrica q_{ab} na hipersuperfície Σ , define-se um campo tensorial simétrico

$$K_{\mu\nu} \equiv q_\mu^\rho q_\nu^\sigma \nabla_\rho n_\sigma = q_\mu^\rho \nabla_\rho n_\nu = K_{\nu\mu}, \quad (5.6)$$

que caracteriza uma forma puramente espacial, assim como $q_{\mu\nu}$, pois também é ortogonal a n^μ ($K_{\mu\nu}n^\mu = K_{\mu\nu}n^\nu = 0$). Por esses atributos, é possível mapear tal objeto para sua versão tridimensional como uma contração entre a conexão afim e n_μ , ou seja, $K_{ab} = \Gamma_{ab}^\mu n_\mu = -\Gamma_{ab}^0 / \sqrt{-g^{00}}$.

A interpretação geométrica de $K_{\mu\nu}$ pode ser observada na Figura 3: toma-se os vetores normais em dois pontos diferentes P e Q de uma hipersuperfície Σ . Estabelece-se \tilde{n}^μ o vetor em P que resulta do transporte paralelo de n^μ ao longo de uma geodésica de Q para P . A diferença entre n^μ e \tilde{n}^μ garante uma medida para a curvatura que incorpora Σ na variedade \mathcal{M} em P . Assim, pode-se reconhecer o uso do campo tensorial (5.6) para descrever essa curvatura, também chamada de curvatura extrínseca, uma vez que ela desaparece quando $n^\mu = \tilde{n}^\mu$. Em suma, este objeto desenvolve o papel da conexão afim ($\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$) sobre a correção de transporte de um vetor em Σ . Não obstante, essa curvatura pode ser reanalisada como uma derivada de Lie²,

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} q_\mu^\rho q_\nu^\sigma (2\nabla_{\{\rho} n_{\sigma\}}) \equiv \frac{1}{2} q_\mu^\rho q_\nu^\sigma (\mathcal{L}_n g)_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} q_\mu^\rho q_\nu^\sigma (\mathcal{L}_n g - \underbrace{\mathcal{L}_n (n \otimes n)}_0)_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{\mu\nu}, \quad (5.7)$$

em que $\mathbf{n} = n^\mu \otimes e_\mu$ denota o campo vetorial normal ao percurso, já sendo empregado o conceito entre a atuação da derivada covariante em n e sua relação com a derivada de Lie em g sobre n , livre de torção no operador ∇ . Deve-se observar que a ortogonalidade aqui também é garantida, ou seja, $n^\mu \mathcal{L}_n q_{\mu\nu} = 0$.

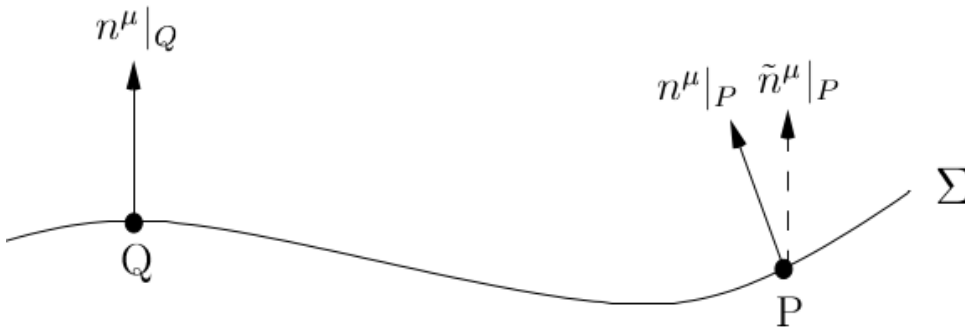


Figura 3 – Interpretação geométrica da curvatura extrínseca. Imagem reproduzida de Kiefer (2007).

Ademais, o traço desta curvatura é definido como

$$K \equiv K_a^a = q^{ab} K_{ab}, \quad (5.8)$$

² Resumidamente, é uma derivação na álgebra de funções diferenciáveis sobre uma variedade diferenciável \mathcal{M} , cuja definição pode estender-se à álgebra tensorial da variedade em questão. Seja X um campo diferenciável de vetores, define-se a derivada de Lie em relação a X como a única derivação tensorial tal que, em ausência de torção, segundo O’neill (1983): $\mathcal{L}_X Y$ para todo campo diferenciável Y . No caso de um campo escalar ϕ , $\mathcal{L}_X \phi = X^\alpha \nabla_\alpha \phi = X^\alpha \partial_\alpha \phi$. Para um campo tensorial de *ranking* 1, $\mathcal{L}_X T_\beta = X^\alpha \nabla_\alpha T_\beta + (\nabla_\beta X^\alpha) T_\alpha$. E assim sucessivamente para objetos de *ranking* n . Em nosso caso particular: $\mathcal{L}_n g_{\rho\sigma} = n^\alpha \nabla_\alpha g_{\rho\sigma} + (\nabla_\rho n^\alpha) g_{\alpha\sigma} + (\nabla_\sigma n^\alpha) g_{\rho\alpha} = \nabla_\rho n_\sigma + \nabla_\sigma n_\rho \equiv 2\nabla_{\{\rho} n_{\sigma\}}$.

sendo interpretado como expansão de mesma equivalência da geodésica ortogonal a Σ , segundo Kiefer (2007).

Garantindo-se as duas formas fundamentais em Σ , $(q_{\mu\nu}, K_{\mu\nu})$, é imprescindível estabelecer uma derivada covariante sobre a métrica $q \in \Sigma$ que surta o mesmo efeito da derivada covariante usual da RG sobre a métrica $g \in \mathcal{M}$, ou seja, uma derivada covariante D tal que $D_\alpha q^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0$. Dito isto, sejam f uma quantidade escalar e \mathbf{u} uma quantidade vetorial ($u_\mu n^\mu = 0$) em Σ . E, sejam \tilde{f} uma quantidade escalar e $\tilde{\mathbf{u}}$ uma quantidade vetorial em \mathcal{M} (e vizinha a Σ). Define-se a derivada covariante D (DIAS, 2011) de tal forma que:

$$D_\mu f \equiv q_\mu^\nu \nabla_\nu \tilde{f} \quad (5.9)$$

e

$$D_\mu u_\nu \equiv q_\mu^\rho q_\nu^\sigma \nabla_\rho \tilde{u}_\sigma, \quad (5.10)$$

sendo o raciocínio estendido para formas tensoriais de ranking superiores, com uma projeção do tipo q_ν^μ para cada índice tensorial. Assim, como os tensores em $(3+1)$ da variedade podem ser projetados em $(3+1)$ na hipersuperfície, a t fixo, não é necessário o uso do “til” daqui em diante. A condição da derivada covariante sobre a métrica de Σ é, portanto, estabelecida como:

$$D_\mu q_{\nu\rho} = q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} \nabla_{\mu'} (g_{\nu'\rho'} + n_{\nu'} n_{\rho'}) = q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\rho^{\rho'} [(\nabla_{\mu'} n_{\nu'}) n_{\rho'} + n_{\nu'} (\nabla_{\mu'} n_{\rho'})] = 0, \quad (5.11)$$

assegurada também a comutação das derivadas sobre a quantidade escalar f ,

$$D_{[\mu} D_{\nu]} f = 1/2 (D_\mu D_\nu f - D_\nu D_\mu f) = q_\mu^\lambda q_\nu^\sigma (\nabla_\lambda \nabla_\sigma f - \nabla_\sigma \nabla_\lambda f) / 2 = 0. \quad (5.12)$$

Em suma, a operação de D sobre tensores espaciais é equivalente a operar ∇ da maneira usual em RG, seguida da projeção espacial em Σ de todos os índices que aparecem, incluindo aquele na qual a derivada é tomada.

De posse da definição (5.10), o tensor de Riemann e o escalar curvatura de Ricci podem ser obtidos para hipersuperfície em termos das formas fundamentais q_{ab} e K_{ab} , relacionando as curvaturas já estabelecidas na RG em $(3+1)$ de \mathcal{M} com $(3+1)$ de Σ_t (veja a demonstração no Apêndice (A)):

$${}^{(3)}R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho = q_\mu^{\mu'} q_\nu^{\nu'} q_\lambda^{\lambda'} q_\rho^\rho R_{\mu'\nu'\lambda'}{}^{\rho'} - K_{\mu\lambda} K_\nu{}^\rho + K_{\nu\lambda} K_\mu{}^\rho, \quad (5.13)$$

$${}^{(3)}R = R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}, \quad (5.14)$$

em que $K = K_\mu{}^\mu$ é o traço da curvatura extrínseca, ${}^{(3)}R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho$ e ${}^{(3)}R$ designam o tensor de Riemann e o escalar curvatura em Σ , com $R_{\mu'\nu'\lambda'}{}^{\rho'}$ e R sendo o tensor de Riemann e o escalar curvatura quadrimensionais em \mathcal{M} , nessa ordem. As equações (5.13) e (5.14) recebem os nomes de equação de Gauss e Codazzi, respectivamente.

Desconsiderando os termos de borda da variedade ($\partial\mathcal{M}$) e munido do termo de constante cosmológica, a ação de Einstein-Hilbert é reescrita em cenário de folheações $\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times \Sigma$ aplicando o

escalar curvatura de Ricci proveniente da equação (5.14):

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{EH} &= \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{q} (K_{ab} K^{ab} - K^2 + {}^{(3)}R - 2\Lambda) \\ &\equiv \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N (G^{abcd} K_{ab} K_{cd} + \sqrt{q} [{}^{(3)}R - 2\Lambda]) = \mathcal{S}_{ADM},\end{aligned}\quad (5.15)$$

em que $\sqrt{-g} = N\sqrt{q}$ é o termo de elemento de volume métrico (q elucida o determinante de q_{ab}), $K_{ab} = (2N)^{-1}(\dot{q}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a)$, com a notação $\dot{q}_{ab} \equiv \mathcal{L}_t q_{ab}$, e $G^{abcd} K_{cd} = \sqrt{q}(K^{ab} - Kq^{ab})$, sendo G^{abcd} a chamada métrica de DeWitt que é expressa em Kiefer (2007), juntamente com sua inversa, por

$$G^{abcd} = \frac{\sqrt{q}}{2}(q^{ac}q^{bd} + q^{ad}q^{bc} - 2q^{ab}q^{cd}) \quad \text{e} \quad G_{abcd} = \frac{1}{2\sqrt{q}}(q_{ac}q_{bd} + q_{ad}q_{bc} - 2q_{ab}q_{cd}), \quad (5.16)$$

obedecendo a relação de identidade $G^{abcd}G_{cdef} = 1/2(\delta_e^a\delta_f^b + \delta_f^a\delta_e^b)$. A ação (5.15) é denominada ação ADM em reconhecimento aos trabalhos de Arnowitt, Deser e Misner, cuja densidade de lagrangiana é claramente identificada, $\mathcal{L}_{ADM} = (16\pi G)^{-1}N(G^{abcd}K_{ab}K_{cd} + \sqrt{q}[{}^{(3)}R - 2\Lambda])$.

A fim de construir e analisar uma hamiltoniana associada à gravidade nesse cenário de folheações, via uma transformação de Legendre a partir da densidade de lagrangiana \mathcal{L}_{ADM} , é necessário explorar os momentos canonicamente conjugados. Estes são dados por

$$p_N \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial \dot{N}} = 0, \quad (5.17)$$

$$p_{N^a} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial \dot{N}^a} = 0 \quad \text{e} \quad (5.18)$$

$$p^{ab} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial \dot{q}_{ab}} = \frac{1}{2N} \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial K_{ab}} = \frac{1}{16\pi G} G^{abcd} K_{cd} = \frac{\sqrt{q}}{16\pi G} (K^{ab} - Kq^{ab}), \quad (5.19)$$

sendo p_N e p_{N^a} multiplicadores de Lagrange, uma vez que a densidade de lagrangiana \mathcal{L}_{ADM} não possui quaisquer “velocidades” ligadas à função *lapso* e ao vetor *shift*. Por não possuírem nenhum envolvimento com a equação dinâmica, são também chamados vínculos primários. O parênteses de Poisson³ entre a coordenada métrica q_{ab} e seu momento canonicamente conjugado p^{cd} é estabelecida, segundo Kiefer (2007), através das relações:

$$\{q_{ab}(x), p^{cd}(x')\} = \int d^3z \left(\frac{\delta q_{ab}(x)}{\delta q_{cd}(z)} \frac{\delta p^{cd}(x')}{\delta p^{ab}(z)} - \frac{\delta p^{cd}(x')}{\delta q_{cd}(z)} \frac{\delta q_{ab}(x)}{\delta p^{ab}(z)} \right) = \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta(x - x'), \quad (5.20)$$

$$\{q_{ab}(x), q_{cd}(x')\} = 0, \quad (5.21)$$

$$\{p^{ab}(x), p^{cd}(x')\} = 0. \quad (5.22)$$

Uma vez que a curvatura extrínseca pode ser escrita em termos de \dot{q}_{ab} , $K_{ab} = (2N)^{-1}(\dot{q}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a)$, e levando esse fato à equação (5.19), já que esta pode ser invertida, a velocidade em

³ Definido, para duas grandezas A e B em função das coordenadas generalizadas q_{ab} e momentos canonicamente conjugados p^{ab} , como: $\{A(y), B(z)\} = \int d^3x \left(\frac{\delta A(y)}{\delta q_{ab}(x)} \frac{\delta B(z)}{\delta p^{ab}(x)} - \frac{\delta B(z)}{\delta q_{ab}(x)} \frac{\delta A(y)}{\delta p^{ab}(x)} \right)$.

termos do momento se concretiza como

$$\dot{q}_{ab} = \frac{16\pi GN}{\sqrt{q}} (2p_{ab} - pq_{ab}) + D_a N_b + D_b N_a, \quad (5.23)$$

em que $p \equiv p^c_c = p^{cd} q_{dc}$.

Assim, em posse das equações (5.19) e (5.23), a densidade de hamiltoniana canônica emergente da ação ADM pode ser encontrada pela transformada de Legendre:

$$\mathcal{H}_{ADM} = p^{ab} \dot{q}_{ab} - \mathcal{L}_{ADM} = 16\pi GN G_{abcd} p^{ab} p^{cd} - N \frac{\sqrt{q}({}^{(3)}R - 2\lambda)}{16\pi G} - 2N_b (D_a p^{ab}), \quad (5.24)$$

sendo $N_b (D_a p^{ab}) = N^a D_b p_a^b = N^a \sqrt{q} \nabla_b (p_a^b / \sqrt{q})$. Através da expressão (5.24), tem-se a respectiva hamiltoniana

$$H_{ADM} \equiv \int_{\Sigma} d^3x \mathcal{H}_{ADM} \equiv \int_{\Sigma} d^3x (N \mathcal{H}_{\perp} + N^a \mathcal{H}_a), \quad (5.25)$$

sendo \mathcal{H}_{\perp} e \mathcal{H}_a identificáveis como

$$\mathcal{H}_{\perp} = 16\pi G G_{abcd} p^{ab} p^{cd} - \frac{\sqrt{q}}{16\pi G} ({}^{(3)}R - 2\Lambda) \quad e \quad (5.26)$$

$$\mathcal{H}_a = -2D_b p_a^b. \quad (5.27)$$

Retomando à ação ADM,

$$\mathcal{S}_{ADM} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x (p^{ab} \dot{q}_{ab} - \mathcal{H}_{ADM}) = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x (p^{ab} \dot{q}_{ab} - N \mathcal{H}_{\perp} - N^a \mathcal{H}_a), \quad (5.28)$$

verifica-se que variando a mesma com respeito aos multiplicadores de Lagrange N e N^a , nota-se que $\mathcal{H}_{\perp} \approx 0$ e $\mathcal{H}_a \approx 0$ (KIEFER, 2007). Por essa razão, os objetos $(\mathcal{H}_{\perp}, \mathcal{H}_a)$ são denominados vínculo hamiltoniano e vínculo de difeomorfismo (ou *momentum*), respectivamente.

Isso implica que a densidade de hamiltoniana para a RG deve desaparecer com a equação de Einstein do vácuo $G_{\mu\nu} = 0$ ($\rho_m = 0$): $H_{ADM} = 0$. Em outras palavras, os vínculos $\mathcal{H}_{\perp} \approx 0 \approx \mathcal{H}_a$ são precisamente as quatro equações de Einstein como restrições às condições iniciais. Portanto, não há um hamiltoniano adequado que não seja trivial na superfície de vínculos. Isso está em consonância com a não existência de um tempo absoluto na RG, uma vez que um possível hamiltoniano não nulo poderia gerar a evolução do tempo frente um parâmetro de tempo externo. Em vez disso, a dinâmica é determinada pelos vínculos, de modo que a evolução como um fluxo de medidor pode ser parametrizada arbitrariamente pelas quantidades q_{ab} e p^{ab} . Também é importante frisar que estes vínculos recebem tais nomes por serem equivalentes aos vínculos $K^2 - K_{ab} K^{ab} + {}^{(3)}R = 0$ e $D_b K_a^b - D_a K = 0$ nas análises das componentes tempo-tempo e espaço-tempo para a equação de Einstein no vácuo. A partir dessas estruturas pode-se, ainda, interpretar o papel vinculante gravitacional da equação (5.26) com o mesmo desenvolvido pelo vínculo associado a uma partícula na concha de massa $p^2 + m^2 \approx 0$, cuja hamiltoniana nesse contexto é determinada por $H(x, p) = p_{\mu} \dot{x}^{\mu} - L = -p^0 \dot{x}^0 + \mathbf{p} \dot{\mathbf{x}} - L = -p^0 \dot{x}^0 + \mathbf{p}^2 \dot{x}^0 / \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + m \sqrt{(\dot{x}^0)^2 - \dot{\mathbf{x}}^2} = \dot{x}^0 (-p^0 + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) \approx 0$, com $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Enquanto a equação (5.27) desenvolve uma função similar ao vínculo da Lei

de Gauss no contexto da eletrodinâmica, $\partial_a E^a(x) \equiv \nabla \mathbf{E}(x) \approx 0$, em que o fluxo de campo elétrico é nulo em uma certa região do espaço, onde há privação de fonte de carga elétrica, $\rho_e = 0$, como bem discutido em Kiefer (2007). Essa analogia demarca uma correlação entre o formalismo *ADM*, levantada para uma proposta hamiltoniana da RG, e a geometrodinâmica. Ademais, assim como constatado em Wald (1984), as equações de movimento são designadas pelos parênteses de Poisson $\dot{q}_{ab} = \{q_{ab}, H_{ADM}\}$ e $\dot{p}^{ab} = \{p^{ab}, H_{ADM}\}$, detalhadamente demonstrados em Dias (2011).

Se, por ventura, houver incorporação de matéria ao espaço-tempo no formalismo *ADM*, as equações de Einstein tornam-se naturalmente $G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 8\pi G T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \equiv 8\pi G \rho$ e consequentemente os vínculos (5.26) e (5.27) são generalizados para

$$\mathcal{H}_\perp = 16\pi G G_{abcd}p^{ab}p^{cd} - \frac{\sqrt{q}}{16\pi G}({}^{(3)}R - 2\Lambda) + \rho \approx 0 \quad e \quad (5.29)$$

$$\mathcal{H}_a = -2D_b p_a^b + J_a \approx 0, \quad (5.30)$$

sendo ρ a densidade de matéria de um certo campo de interesse e $J_a \equiv q_a^\mu T_{\mu\nu}n^\nu$ a corrente representando o “vetor de Poynting”⁴ associado.

Motivados por esta última argumentação, a seção seguinte trata de apresentar uma forma de ampliar a ação gravitacional quanto à incorporação da matéria *MDO* sob o arcabouço tetrada-*ADM* em uma generalização de Einstein-Hilbert para Palatini-Holst, além de uma análise dos vínculos hamiltoniano e de difeomorfismo oriundos deste campo de matéria escura acoplada à gravidade.

5.2 FÉRMION *MDO* ACOPLADO À GRAVIDADE VIA FORMALISMO CANÔNICO

A ação de Einstein-Hilbert juntamente com a ação do férmion *MDO* para caracterização da matéria escura em espaço curvo, segundo Boehmer et al. (2010), Silva e Pereira (2014), Pereira e Lima (2017), são expressas por

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathcal{S}_{EH} + \mathcal{S}_{\bar{\lambda}, \lambda} \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \bar{\lambda} \nabla_\nu \lambda) - m^2 \bar{\lambda} \lambda - \xi R \bar{\lambda} \lambda], \end{aligned} \quad (5.31)$$

em que g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$, R é o escalar curvatura de Ricci, $\nabla_\mu \bar{\lambda}$ e $\nabla_\nu \lambda$ são as derivadas covariantes atuando nos campos *MDO* usual e dual, respectivamente, m a massa do espinor presente no termo de auto-interação $(\bar{\lambda}, \lambda)$, e ξ uma constante de acoplamento entre o campo espinorial *MDO* e o campo gravitacional, proveniente de TQC em espaços curvos. O termo de borda $(\partial\mathcal{M})$ da variedade \mathcal{M} é negligenciado na análise, sendo considerado uma contribuição nula.

É importante frisar que em TQC é recorrente a utilização da assinatura métrica $(+, -, -, -)$, no espaço-tempo de fundo para tratar campos de matéria e de interação, ao contrário da assinatura comumente usada na literatura da RG, cuja notação métrica é demarcada por $(-, +, +, +)$. Para transcrever campos fermiônicos em TQC à RG, obedecendo a assinatura métrica, basta multiplicar as matrizes de Dirac por $i \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$, conforme esclarecido em Bojowald e Das (2008). Note que, de fato, a

⁴ Uma analogia, já que o vetor de Poynting é a densidade direcional do fluxo de energia de um campo eletromagnético.

álgebra de Clifford é mantida,

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_{(TQC)} = 2g^{\mu\nu} = 2(+, -, -, -) &\mapsto \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_{(RG)} = \{i\gamma^\mu, i\gamma^\nu\} = i^2\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_{(TQC)} \Leftrightarrow \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_{(RG)} = -2g^{\mu\nu} = 2(-, +, +, +), \end{aligned} \quad (5.32)$$

e vice-versa. Além disso, a densidade de lagrangiana de matéria em (5.31) para o campo fermiônico *MDO*, $\mathcal{L}_{\lambda, \bar{\lambda}} = 1/2\sqrt{-g}[g^{\mu\nu}(\nabla_\mu \bar{\lambda} \nabla_\nu \lambda) - m^2 \bar{\lambda} \lambda - \xi R \bar{\lambda} \lambda]$ com assinatura métrica $(+, -, -, -)$ é equivalente a $\mathcal{L}_{\lambda, \bar{\lambda}} = 1/2\sqrt{-g}[-g^{\mu\nu}(\nabla_\mu \bar{\lambda} \nabla_\nu \lambda) - m^2 \bar{\lambda} \lambda - \xi R \bar{\lambda} \lambda]$ com assinatura métrica $(-, +, +, +)$, devido a mudança $g^{\mu\nu} \leftrightarrow -g^{\mu\nu}$ de uma assinatura para outra.

Em espaço curvo, as derivadas covariantes atuantes nos campos usual e dual do férmion *MDO* são definidas por Boehmer et al. (2010), na forma:

$$\nabla_\mu \lambda \equiv \partial_\mu \lambda - \Gamma_\mu \lambda, \quad \nabla_\mu \bar{\lambda} \equiv \partial_\mu \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \Gamma_\mu, \quad (5.33)$$

sendo Γ_μ a conexão de *spin*, um elemento interpretado como campo de *gauge*, gerado por transformações locais de Lorentz, cumprindo uma função similar à conexão afim para vetores, no contexto de estruturas espinoriais em espaços de curvatura não nula. Este objeto bem como a comutação de duas derivadas covariantes atuando no espinor λ (veja a demonstração no Apêndice (B)) podem ser expostos como:

$$\Gamma_\mu = \frac{i}{4}\omega_\mu^{ab}\sigma_{ab}, \quad [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\lambda = -\frac{i}{4}F_{\mu\nu}^{ab}\sigma_{ab}\lambda, \quad (5.34)$$

em que $\omega_\mu^{ab} = e_\nu^a \partial_\mu e^{\nu b} + e_\nu^a e^{\rho b} \Gamma_{\mu\rho}^\nu$ é a conexão escrita via campos de tetradas⁵ e_α^a (YEPEZ, 2011) e a conexão de Levi-Civita, sob índices do espaço-tempo (índices externos μ) e de Lorentz (índices internos a). O termo $F_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + \omega_\mu^{ac} \omega_{\nu c}^b - \omega_\nu^{ac} \omega_{\mu c}^b$ é a “curvatura” devido a conexão do espinor λ , similar a curvatura de Riemann para a gravidade e $\sigma_{ab} = i/2[\gamma_a, \gamma_b]$.

A ação de Holst (1996) foi originalmente desenvolvida no contexto de um formalismo para o tratamento de uma possível teoria de gravitação quântica não perturbativa. Esta ação é constituída pela junção da ação de Hilbert-Palatini somado o termo dual de Holst. Partiremos dessa mesma premissa a fim de estabelecer uma ação mais completa possível para o acoplamento entre o férmion de dimensão de massa um com a gravidade.

Reescrevendo a ação (5.31) em termos dos campos de tetradas à lá Einstein-Cartan, considerando a ação gravitacional \mathcal{S}_{EH} equivalente à ação de Palatini-Holst (veja a demonstração no Apêndice (C)) e usando explicitamente a conexão de *spin* (5.33)-(5.34) sob o férmion *MDO*, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x (e e_I^\mu e_J^\nu P^{IJ}{}_{KL} F_{\mu\nu}{}^{KL}(\omega)) (1 - 8\pi G \xi \bar{\lambda} \lambda) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x (e) [(e_I^\mu e_J^\nu \eta^{IJ} \partial_\mu \bar{\lambda} \partial_\nu \lambda) - m^2 \bar{\lambda} \lambda] \\ &+ \frac{i}{8} \int_{\mathcal{M}} d^4x (e e_I^\mu e_J^\nu \eta^{IJ}) [\bar{\lambda} \omega_\mu^{IJ} \sigma_{IJ}(\partial_\nu \lambda) - (\partial_\mu \bar{\lambda}) \omega_\nu^{MN} \sigma_{MN} \lambda - i/4 \bar{\lambda} (\omega_\mu^{IJ} \omega_\nu^{MN} \sigma_{IJ} \sigma_{MN}) \lambda], \end{aligned} \quad (5.35)$$

⁵ Construído usualmente como $g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x) e_\nu^b(x) \eta_{ab}$, sendo $e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu$, $e_\mu^a e_a^\mu = \delta_a^b e |e| = |\sqrt{-g}|$.

sendo a curvatura $F_{\mu\nu}{}^{KL}(\omega) = 2\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}^{KL} + [\omega_{\mu}, \omega_{\nu}]$ descrita em termos da conexão de Lorentz ω_{μ}^{KL} , com os índices latinos maiúsculos representando as componentes espaciais dos índices internos de Lorentz (a, b) . Enquanto o termo $P^{IJ}{}_{KL}$ da ação de Holst, bem como seu inverso na forma compacta são explicitados por Holst (1996), Bojowald e Das (2008):

$$P^{IJ}{}_{KL} = \delta_K^{[I}\delta_L^{J]} - \frac{1}{\gamma} \frac{\epsilon^{IJ}{}_{KL}}{2}, \quad P_{IJ}{}^{KL} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1} \left(\delta_I^{[K}\delta_J^{L]} + \frac{1}{\gamma} \frac{\epsilon_{IJ}{}^{KL}}{2} \right), \quad (5.36)$$

em que γ (não confundir com as matrizes de Dirac γ^{μ}) é o parâmetro de Barbero-Immirzi (G., 1995; IMMIRZI, 1997) e $\epsilon^{IJ}{}_{KL}$ um tensor completamente antissimétrico, análogo ao tensor de Levi-Civita. É importante elucidar que o termo de acoplamento entre o campo gravitacional e o campo fermiônico foram aglutinados na ação de Palatini-Holst a fim de propormos $\xi = 2G^{-1}\rho_{vac}/(R \bar{\lambda} \lambda)$, dependente de fatores puramente escalares e, portanto, invariantes, assumindo uma função similar à constante cosmológica Λ nas equações de campo de Einstein em cenários cosmológicos para modelos do tipo $\Lambda(t)$ Peebles e Ratra (1988), uma vez que $\Lambda = 8\pi\rho_{vac}$, sendo ρ_{vac} a densidade do vácuo⁶. Ou mesmo para teorias escalares-tensoriais à lá Brans e Dicke (1961). Esta proposta está sendo realizada para os quadros em que o termo de Holst recupera o exato escalar curvatura de Ricci, R , originalmente presente na ação de Einstein-Hilbert. Além disso, é notado que a parte descompactada para a matéria, em nosso caso, revela a soma de duas parcelas na ação do campo *MDO*: uma parte que se assemelha à dinâmica de um campo escalar massivo e uma parte que carrega a informação quadrática da porção fermiônica pura com conexão de *spin* (último termo integrado sobre a variedade \mathcal{M} da ação (5.35)). Isso se deve à natureza dinâmica de Klein-Gordon para a conservação de energia e à estrutura desse campo fermiônico, respectivamente.

Um formalismo canônico (hamiltoniano) é construído frente a uma transformada de Legendre na densidade de lagrangiana da ação. Por isso, será necessário transcrevermos a ação (5.35), a partir da variedade \mathcal{M} , para uma família de folheações Σ_t constante, munida de uma métrica e orientada por uma função no tempo t , imersos na variedade: $(\mathcal{M}, g_{ab}) \mapsto (\Sigma_t, t) \equiv \Sigma_t \times \mathbb{R} \subseteq \mathcal{M}$, tal como originalmente prescrito pelo formalismo *ADM* da seção anterior. Ou seja, ao invés de trabalharmos com tensores do espaço-tempo, usaremos a descrição de como um campo vetorial t^{μ} evolui de uma hipersuperfície Σ_t para outra $\Sigma_{t+\delta t}$, em direção ao futuro, uma vez que estamos assegurados sob a condição de Lorentz. Seguindo a dotação dessa norma, vimos pela seção anterior que um quadrivetor arbitrário no espaço-tempo, t^{μ} , é decomposto em

$$t^{\mu} = Nn^{\mu} + N^{\mu}, \quad (5.37)$$

sendo n^{μ} e N^{μ} os vetores normal e tangente à hipersuperfície Σ_t , com N realizando a função de ditar a transição temporal de uma hipersuperfície a outra, sendo, portanto, (n^{μ}, N^{μ}) ortogonais $N^{\mu}n_{\mu} = 0$. A evolução espacial de t^a deve obedecer $t^a\nabla_a t = 1$, sendo a, b, c, \dots os índices tensoriais espaciais.

⁶ A constante cosmológica possui o mesmo efeito de uma densidade de energia intrínseca do vácuo, onde conversões modernas da RG já estão inseridas. Segundo estudos recentes, Ade et al. (2016), há um indicativo de que a densidade do vácuo assume um valor próximo de $\rho_{vac} \simeq 5,96 \times 10^{-27} \text{kg/m}^3$.

Em virtude disso, relembremos que a métrica $g_{\mu\nu}$ é decomposta em

$$g_{\mu\nu} = q_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu, \quad (5.38)$$

com $q_{\mu\nu}$ designando a projeção em Σ_t .

Tendo em vista que o tratamento de férmions ocorre em espaços curvos, é natural o uso da formulação de campos de tetrada. Simultaneamente ao formalismo *ADM* para gravitação, será necessário estabelecer uma fixação de *gauge* sobre os vetores internos da tetrada, que se decompõe em uma unidade de tempo, como um vetor e uma *triad*. Configurando o campo de vetor interno constante $n_I = -\delta_I^0$, em que $n^I n_I = 1$, segundo Das (2008), temos que

$$n^a = n^I e_I^a, \quad e_I^a = \varepsilon_I^a - n^a n_I, \quad (5.39)$$

sendo n^a a unidade normal à folheação, $\varepsilon_I^a n_a = \varepsilon_I^a n^I = 0$, com $\varepsilon_I^a := \text{triad}$ (parte espacial da tetrada). A partir da expressão (5.37),

$$n^a = N^{-1}(t^a - N^a), \quad (5.40)$$

temos a projeção das componentes normal e tangencial em Σ_t .

Sabendo que $|e| = |\sqrt{-g}| = N\sqrt{q}$ e $|\det(e_i^a)| = \sqrt{q}$ (parte espacial), o termo de densidade de lagrangiana gravitacional presente na ação (5.35) sobre a hipersuperfície Σ_t é expresso por

$$ee_I^\mu e_J^\nu P^{IJ}{}_{KL} F_{\mu\nu}{}^{KL}(\omega) \mapsto N\sqrt{q} e_I^a e_J^b P^{IJ}{}_{KL} F_{ab}{}^{KL}(\omega), \quad (5.41)$$

no qual, decompondo-se as tetradas via equação (5.39), temos

$$\begin{aligned} N\sqrt{q} e_I^a e_J^b P^{IJ}{}_{KL} F_{ab}{}^{KL}(\omega) &= N\sqrt{q}(\varepsilon_I^a - n^a n_I)(\varepsilon_J^b - n^b n_J) P^{IJ}{}_{KL} F_{ab}{}^{KL}(\omega) \\ &= N\sqrt{q}(\varepsilon_I^a \varepsilon_J^b - \varepsilon_I^a n^b n_J - n^a n_I \varepsilon_J^b + n^a n_I n^b n_J) P^{IJ}{}_{KL} F_{ab}{}^{KL}(\omega), \end{aligned} \quad (5.42)$$

onde os últimos três termos entre parênteses da expressão acima são, a partir da relação (5.40) e a condição de *gauge* n_I , descritos como

$$\begin{aligned} n^a n_I n^b n_J - \varepsilon_I^a n^b n_J - n^a n_I \varepsilon_J^b &= (N^{-1}(t^a - N^a))n_I(N^{-1}(t^b - N^b))n_J - \varepsilon_I^a(N^{-1}(t^b - N^b))n_J \\ &\quad - (N^{-1}(t^a - N^a))n_I \varepsilon_J^b \\ &= N^{-2}(t^a - N^a)(t^b - N^b)(\delta_I^0 \delta_J^0) - N^{-1} \varepsilon_I^a t^b n_J + N^{-1} \varepsilon_I^a N^b n_J \\ &\quad - N^{-1} t^a n_I \varepsilon_J^b + N^{-1} N^a n_I \varepsilon_J^b \\ &= -N^{-1}[\varepsilon_I^a t^b n_J + \varepsilon_J^b t^a n_I] + N^{-1}[N^a n_I \varepsilon_J^b + N^b n_J \varepsilon_I^a] \\ &= -2N^{-1} n_I t^a \varepsilon_J^b + 2N^{-1} N^a n_I \varepsilon_J^b. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Assim, utilizando a relação (5.43) em (5.42), o termo de densidade lagrangiana gravitacional se torna

$$ee_I^\mu e_J^\nu P^{IJ}{}_{KL} F_{\mu\nu}{}^{KL}(\omega) \mapsto N\sqrt{q}(\varepsilon_I^a \varepsilon_J^b - 2N^{-1} n_I t^a \varepsilon_J^b + 2N^{-1} N^a n_I \varepsilon_J^b) P^{IJ}{}_{KL} F_{ab}{}^{KL}(\omega). \quad (5.44)$$

Seguindo as mesmas considerações para os termos caráter “escalar” e fermiônico da dinâmica do campo espinorial *MDO*, presente originalmente na ação (5.35), temos como resultado as parcelas:

$$e[(e_I^\mu e_J^\nu \eta^{IJ} \partial_\mu \bar{\lambda} \partial_\nu \lambda) - m^2 \bar{\lambda} \lambda] \mapsto N \sqrt{q} [(\varepsilon_I^a \varepsilon_J^b - 2N^{-1} n_{It}^a \varepsilon_J^b + 2N^{-1} N^a n_I \varepsilon_J^b) \eta^{IJ} (\partial_a \bar{\lambda} \partial_b \lambda) - m^2 \bar{\lambda} \lambda] \quad (5.45)$$

e

$$\begin{aligned} & ee_I^\mu e_J^\nu \eta^{IJ} [\bar{\lambda} \omega_\mu^{IJ} \sigma_{IJ} (\partial_\nu \lambda) - (\partial_\mu \bar{\lambda}) \omega_\nu^{MN} \sigma_{MN} \lambda - i/4 \bar{\lambda} (\omega_\mu^{IJ} \omega_\nu^{MN} \sigma_{IJ} \sigma_{MN}) \lambda] \\ & \mapsto \\ & N \sqrt{q} [\varepsilon_I^a \varepsilon_J^b - 2N^{-1} n_{It}^a \varepsilon_J^b + 2N^{-1} N^a n_I \varepsilon_J^b] \eta^{IJ} \{ i/2 (\bar{\lambda} \omega_a^{IJ} [\gamma_I \gamma_J - \gamma_J \gamma_I] (\partial_b \lambda) \\ & - (\partial_a \bar{\lambda}) \omega_b^{MN} [\gamma_M \gamma_N - \gamma_N \gamma_M] \lambda) + i/16 \bar{\lambda} (\omega_a^{IJ} \omega_b^{MN} [\gamma_I \gamma_J - \gamma_J \gamma_I] [\gamma_M \gamma_N - \gamma_N \gamma_M]) \lambda \}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Desse modo, através das transformações (5.44), (5.45) e (5.46), obtemos a ação associada ao campo de matéria escura *MDO* acoplada à gravidade de Palatini-Holst descrita em formalismo *ADM*-tetrad, configurado na forma compacta:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\varepsilon, \omega, \lambda] &= \mathcal{S}_{PH, \xi} + \mathcal{S}_{\lambda, \bar{\lambda}_E} + \mathcal{S}_{\lambda, \bar{\lambda}_F} \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{q} \Omega_{IJ}^{ab} P^{IJ}{}_{KL} F_{ab}{}^{KL}(\omega) (1 - 8\pi G \xi \bar{\lambda} \lambda) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{q} [\Omega_{IJ}^{ab} \eta^{IJ} (\partial_a \bar{\lambda} \partial_b \lambda) - m^2 \bar{\lambda} \lambda] \\ &\quad - \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{q} \Omega_{IJ}^{ab} \eta^{IJ} \{ i/2 (\bar{\lambda} \omega_a^{IJ} [\gamma_I, \gamma_J] (\partial_b \lambda) \\ &\quad - (\partial_a \bar{\lambda}) \omega_b^{MN} [\gamma_M, \gamma_N] \lambda) + i/16 \bar{\lambda} (\omega_a^{IJ} \omega_b^{MN} [\gamma_I, \gamma_J] [\gamma_M, \gamma_N]) \lambda \}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

em que $\Omega_{IJ}^{ab} = (\varepsilon_I^a \varepsilon_J^b - 2N^{-1} n_{It}^a \varepsilon_J^b + 2N^{-1} N^a n_I \varepsilon_J^b)$. Os subíndices na ação de matéria, $\mathcal{S}_{\lambda, \bar{\lambda}_S}$ e $\mathcal{S}_{\lambda, \bar{\lambda}_F}$, são postos para diferenciar propositalmente a parcela de caráter à lá Klein Gordon (escalar) e à lá Dirac quadrático puro (fermiônico) devido à já mencionada natureza do campo espinorial aqui tratado.

A ação (5.47) e a densidade de lagrangiana emergente dela se encontram na forma mais completa para análises dentro do formalismo hamiltoniano em termos do campo de matéria de interesse. No escopo desta tese, o cenário admitido será sem torção e com o quadro de Palatini-Holst recuperando o escalar curvatura de Ricci. Portanto, admitindo tais requisitos, a mencionada ação recai naturalmente na ação entre o campo gravitacional somada ao férmion de dimensão de massa um, expressa em (5.31). Sob uma família de folheações Σ na variedade e com o auxílio da expressão (5.15), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N (G^{abcd} K_{ab} K_{cd} + \sqrt{q} {}^{(3)}R) [1 - 8\pi G \xi \bar{\lambda} \lambda] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{q} [(q^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu) (q_\mu^\alpha D_\alpha \bar{\lambda} q_\nu^\beta D_\beta \lambda) - m^2 \bar{\lambda} \lambda]. \end{aligned} \quad (5.48)$$

A fim de buscar o tratamento canônico (hamiltoniano) que acopla este candidato à descrição da matéria escura com a gravidade, e levando em consideração a discussão tratada no parágrafo da equação (5.32) sobre a assinatura métrica, começaremos com a escolha de uma variável de configuração e a definição do momento para o MDO ($p = \partial L / \partial \dot{q}$), de modo que garanta a transformada de Legendre:

$$H_{\lambda, \bar{\lambda}} = p_{\lambda} \dot{\lambda} + p_{\bar{\lambda}} \dot{\bar{\lambda}} - \mathcal{L}_{\lambda, \bar{\lambda}}. \quad (5.49)$$

Partindo-se da densidade de lagrangiana do férmion em questão,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\lambda, \bar{\lambda}} &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} (\nabla_{\mu} \bar{\lambda} \nabla_{\nu} \lambda) - m^2] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \Gamma_{\mu}) (\partial_{\nu} \lambda - \Gamma_{\nu} \lambda) - m^2 \bar{\lambda} \lambda] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} [\partial^{\nu} \bar{\lambda} \partial_{\nu} \lambda - \partial^{\nu} \bar{\lambda} \Gamma_{\nu} \lambda + \bar{\lambda} \Gamma^{\nu} \partial_{\nu} \lambda - \bar{\lambda} \Gamma^{\nu} \Gamma_{\nu} \lambda - m^2 \bar{\lambda} \lambda], \end{aligned} \quad (5.50)$$

os operadores

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\lambda, \bar{\lambda}}}{\partial (\partial_{\alpha} \lambda)} &= \frac{\sqrt{-g}}{2} \left[\frac{\partial (\partial^{\nu} \bar{\lambda} \partial_{\nu} \lambda)}{\partial (\partial_{\alpha} \lambda)} + \frac{\partial (\bar{\lambda} \Gamma^{\nu} \partial_{\nu} \lambda)}{\partial (\partial_{\alpha} \lambda)} \right] = \frac{\sqrt{-g}}{2} \left[\partial^{\nu} \bar{\lambda} \frac{\partial (\partial_{\nu} \lambda)}{\partial (\partial_{\alpha} \lambda)} + \bar{\lambda} \Gamma^{\nu} \frac{\partial (\partial_{\nu} \lambda)}{\partial (\partial_{\alpha} \lambda)} \right] \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2} (\partial^{\nu} \bar{\lambda} \delta_{\nu}^{\alpha} + \bar{\lambda} \Gamma^{\nu} \delta_{\nu}^{\alpha}) \end{aligned} \quad (5.51)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\lambda, \bar{\lambda}}}{\partial (\partial_{\alpha} \bar{\lambda})} &= \frac{\sqrt{-g}}{2} \left[\frac{\partial (\partial^{\nu} \bar{\lambda} \partial_{\nu} \lambda)}{\partial (\partial_{\alpha} \bar{\lambda})} - \frac{\partial (\partial^{\nu} \bar{\lambda} \Gamma_{\nu} \lambda)}{\partial (\partial_{\alpha} \bar{\lambda})} \right] = \frac{\sqrt{-g}}{2} \left[\frac{\partial (g^{\nu\beta} \partial_{\beta} \bar{\lambda} \partial_{\nu} \lambda)}{\partial (\partial_{\alpha} \bar{\lambda})} - \frac{\partial (g^{\nu\beta} \partial_{\beta} \bar{\lambda} \Gamma_{\nu} \lambda)}{\partial (\partial_{\alpha} \bar{\lambda})} \right] \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2} \left[\frac{\partial (\partial_{\beta} \bar{\lambda})}{\partial (\partial_{\alpha} \bar{\lambda})} g^{\nu\beta} \partial_{\nu} \lambda - \frac{\partial (\partial_{\beta} \bar{\lambda})}{\partial (\partial_{\alpha} \bar{\lambda})} g^{\nu\beta} \Gamma_{\nu} \lambda \right] \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2} (\delta_{\beta}^{\alpha} \partial^{\beta} \lambda - \delta_{\beta}^{\alpha} \Gamma^{\beta} \lambda) \end{aligned} \quad (5.52)$$

são obtidos, permitindo declarar seus momentos conjugados como

$$p_{\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\lambda, \bar{\lambda}}}{\partial (\partial_0 \lambda)} = \frac{\sqrt{-g}}{2} (\partial^0 \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \Gamma^0) \quad e \quad (5.53)$$

$$p_{\bar{\lambda}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\lambda, \bar{\lambda}}}{\partial (\partial_0 \bar{\lambda})} = \frac{\sqrt{-g}}{2} (\partial^0 \lambda - \Gamma^0 \lambda). \quad (5.54)$$

Em seguida, as respectivas “velocidades” do campo em termos dos momentos são determinadas, com o auxílio de (5.53) e (5.54),

$$\dot{\lambda} = \nabla_0 \lambda = (\partial_0 \lambda - \Gamma_0 \lambda) = \frac{2}{\sqrt{-g}} g_{00} p_{\bar{\lambda}} \quad e \quad (5.55)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = \nabla_0 \bar{\lambda} = (\partial_0 \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \Gamma_0) = \frac{2}{\sqrt{-g}} g_{00} p_{\lambda}. \quad (5.56)$$

Notemos, ainda, que a densidade de lagrangina (5.50) pode ser explicitamente encarada como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\lambda,\bar{\lambda}} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}[\underbrace{\partial^0\bar{\lambda}\partial_0\lambda - \partial^0\bar{\lambda}\Gamma_0\lambda + \bar{\lambda}\Gamma^0\partial_0\lambda - \bar{\lambda}\Gamma^0\Gamma_0\lambda}_A] - \frac{1}{2}\sqrt{-g}[\partial^i\bar{\lambda}\partial_i\lambda + m^2\bar{\lambda}\lambda] \\ &- \frac{1}{2}\sqrt{-g}[\bar{\lambda}\Gamma^i\partial_i\lambda - \partial^i\bar{\lambda}\Gamma_i\lambda - \bar{\lambda}\Gamma^i\Gamma_i\lambda],\end{aligned}\quad (5.57)$$

sendo

$$A = (\partial^0\bar{\lambda} + \bar{\lambda}\Gamma^0)(\partial_0\lambda - \Gamma_0\lambda) = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{2g_{00}}{\sqrt{-g}}(p_\lambda p_\lambda^-).\quad (5.58)$$

Assim,

$$\mathcal{L}_{\lambda,\bar{\lambda}} = \frac{2}{\sqrt{-g}}g_{00}(p_\lambda p_\lambda^-) - \frac{1}{2}\sqrt{-g}[\partial^i\bar{\lambda}\partial_i\lambda + m^2\bar{\lambda}\lambda] - \frac{1}{2}\sqrt{-g}[\bar{\lambda}\Gamma^i\partial_i\lambda - \partial^i\bar{\lambda}\Gamma_i\lambda - \bar{\lambda}\Gamma^i\Gamma_i\lambda].\quad (5.59)$$

Com a transformada de Legendre realizada sobre $\mathcal{L}_{\lambda,\bar{\lambda}}$ de (5.59), desenvolvemos a densidade de hamiltoniana do férmion escuro em espaço curvo,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\lambda,\bar{\lambda}} &= p_\lambda\dot{\lambda} + p_\lambda^-\dot{\bar{\lambda}} - \mathcal{L}_{\lambda,\bar{\lambda}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{-g}}g_{00}(p_\lambda p_\lambda^- + p_\lambda^- p_\lambda) - \frac{2}{\sqrt{-g}}g_{00}(p_\lambda p_\lambda^-) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}(\partial^i\bar{\lambda}\partial_i\lambda + m^2\bar{\lambda}\lambda) \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{-g}[\bar{\lambda}\Gamma^i\partial_i\lambda - \partial^i\bar{\lambda}\Gamma_i\lambda - \bar{\lambda}\Gamma^i\Gamma_i\lambda],\end{aligned}\quad (5.60)$$

obtendo

$$\mathcal{H}_{\lambda,\bar{\lambda}} = \frac{2}{\sqrt{-g}}g_{00}(p_\lambda^- p_\lambda) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}(\partial^i\bar{\lambda}\partial_i\lambda + m^2\bar{\lambda}\lambda) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}[\bar{\lambda}\Gamma^i\partial_i\lambda - \partial^i\bar{\lambda}\Gamma_i\lambda - \bar{\lambda}\Gamma^i\Gamma_i\lambda],\quad (5.61)$$

que por sua vez nos permite finalmente descrever a hamiltoniana do férmion *MDO* em cenário de folheações Σ_t à lá *ADM* na forma:

$$\begin{aligned}H_{\lambda,\bar{\lambda}} &= \int_\Sigma d^3x \mathcal{H}_{\lambda,\bar{\lambda}} \\ &= \int_\Sigma d^3x N \left(\frac{2p_\lambda^- p_\lambda}{\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}}{2}(q^{ab}\partial_a\bar{\lambda}\partial_b\lambda + m^2\bar{\lambda}\lambda) \right) \\ &+ \int_\Sigma d^3x N^a \left(\frac{1}{2}q_a^b[\bar{\lambda}\Gamma_b\partial_c\lambda - \partial_b\bar{\lambda}\Gamma_c\lambda - \bar{\lambda}\Gamma_b\Gamma_c\lambda]n^c \right) \\ &\equiv \int_\Sigma d^3x (N\mathcal{H}_{\perp,\lambda,\bar{\lambda}} + N^a\mathcal{H}_{a,\lambda,\bar{\lambda}}),\end{aligned}\quad (5.62)$$

observando que as transformações $\sqrt{-g} \mapsto N\sqrt{q}$ e $\sqrt{-g}g^{ij}A_jB_i \mapsto N^a q_a^b(A_bB_c)n^c$ foram realizadas para mapear $\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} \times \Sigma$.

O resultado presente na equação (5.62) nos permite visualizar $\mathcal{H}_{\perp,\lambda,\bar{\lambda}}$ como a densidade de energia

do campo fermiônico MDO ($T_{00} = \rho_{\lambda, \bar{\lambda}}$), que “flui” através da função *lapso*, e consequentemente ortogonal a Σ em um dado instante de tempo t fixo. Enquanto o termo $\mathcal{H}_{a, \lambda, \bar{\lambda}}$ pode ser interpretado como uma “corrente” ($J_{a, \lambda, \bar{\lambda}} \equiv q_a^b T_{bc} n^c$) associado ao férmion, que se desloca através do vetor *shift* N^a tangencial a hipersuperfície Σ_t . É notável que esta densidade direcional de fluxo de energia depende exclusivamente da derivada espacial e da conexão de *spin* do campo espinorial de dimensão de massa um.

Como discutido no parágrafo das equações (5.29) e (5.30) no final da Seção 5.1, há uma generalização para os vínculos hamiltoniano e de difeomorfismo devido a incorporação de matéria à ação de Einstein-Hilbert em formalismo *ADM*. Portanto, para a gravidade em junção com o férmion *MDO* provenientes da ação (5.48), declaramos tais vínculos por:

$$\mathcal{H}_{\perp} = \left(16\pi G G_{abcd} p^{ab} p^{cd} - \frac{\sqrt{q}}{16\pi G} {}^{(3)}R \right) [1 - 8\pi G \xi \bar{\lambda} \lambda] + \rho_{\lambda, \bar{\lambda}} \approx 0 \quad \text{e} \quad (5.63)$$

$$\mathcal{H}_a = -2D_b p_a^b [1 - 8\pi G \xi \bar{\lambda} \lambda] + J_{a, \lambda, \bar{\lambda}} \approx 0, \quad (5.64)$$

ou ainda mais explicitamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\perp} = & \left(16\pi G G_{abcd} p^{ab} p^{cd} - \frac{\sqrt{q}}{16\pi G} {}^{(3)}R \right) [1 - 8\pi G \xi \bar{\lambda} \lambda] \\ & + \left(\frac{2p_{\lambda}^{\mu} p_{\mu}^{\lambda}}{\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}}{2} (q^{ab} \partial_a \bar{\lambda} \partial_b \lambda + m^2 \bar{\lambda} \lambda) \right) \approx 0 \quad \text{e} \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\mathcal{H}_a = -2D_b p_a^b [1 - 8\pi G \xi \bar{\lambda} \lambda] + \left(\frac{1}{2} q_a^b [\bar{\lambda} \Gamma_b \partial_c \lambda - \partial_b \bar{\lambda} \Gamma_c \lambda - \bar{\lambda} \Gamma_b \Gamma_c \lambda] n^c \right) \approx 0, \quad (5.66)$$

lembrando que o termo $-8\pi G \xi \bar{\lambda} \lambda$ foi unido ao escalar de Ricci na parcela geométrica da ação a fim de garantir um comportamento similar à constante cosmológica em modelos $\Lambda(t)$ a partir da constante de acoplamento ξ entre o *MDO* e a gravidade, e da invariância ortonormal $\bar{\lambda}(x)\lambda(x') = \pm 2m\delta(x-x')$ para as mesmas helicidades do férmion em sua forma autoconjugado (*S*) e anti-autoconjugado (*A*), respectivamente.

Apenas como análise comparativa, ao incorporar um campo escalar de densidade de lagrangiana $\mathcal{L}_{\phi} = \sqrt{-g}(-1/2g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi - 1/2m^2\phi^2)$ ao espaço-tempo (KIEFER, 2007), os vínculos de ϕ adicionados aos vínculos \mathcal{H}_{\perp} e \mathcal{H}_a da gravidade são dados por

$$\mathcal{H}_{\perp, \phi} = \rho_{\phi} = \left(\frac{p_{\phi}^2}{2\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}}{2} (q^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + m^2 \phi^2) \right) \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_{a, \phi} = J_{a, \phi} = p_{\phi} \partial_a \phi. \quad (5.67)$$

É possível notar, entre (5.65)-(5.66) e (5.67), que a densidade de energia do campo fermiônico *MDO* ($\rho_{\lambda, \bar{\lambda}}$) se assemelha muito com o campo escalar (ρ_{ϕ}), uma vez que a equação dinâmica de ambos os campos seguem a mesma forma de Klein Gordon. Contudo, enquanto a “corrente” - densidade direcional de fluxo de energia - na hipersuperfície Σ_t do campo *MDO* ($J_{a, \lambda, \bar{\lambda}}$) está em função das derivadas espaciais e das conexões de *spin*, a corrente do campo escalar, embora também esteja em função da derivada espacial, não possui termo de conexão de *spin*, obviamente. A diferença é aclarada

devido a estrutura espinorial do férmion em espaço curvo.

Em suma, os vínculos (5.65) e (5.66) não somente nos permite interpretar as equações de Einstein com adição de um candidato à descrição da matéria escura ao conteúdo material, como também nos dá a liberdade de conceber esse férmion como contribuinte da energia escura, visto que este substitui a função de uma energia intrínseca e fundamental do espaço codificada em Λ , geralmente apresentado como representante mais simples para esta hipotética fonte de energia e pressão, que tendem a expandir aceleradamente o universo nos dias de hoje.

Como uma observação adicional, cabe mencionar que a construção para os vínculos hamiltonianos, devido à gravidade e ao campo *MDO*, foi realizada sobre uma métrica geral $g_{\mu\nu}$, cujo elemento de linha geral em espaço curvo é $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (q_{ab}N^aN^b - N^2)dt^2 + 2q_{ab}N^adx^bdt + q_{ab}dx^adx^b$. Desse modo, as equações (5.65) e (5.66) fornecem as bases canônicas para tratamentos desse férmion via métricas particulares em cenários de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (modelo FLRW), *black holes*, *wormholes* e diversos outros panoramas cosmológicos de interesse físico.

5.3 UMA POSSÍVEL QUANTIZAÇÃO CANÔNICA (?)

Uma vez obtidos os vínculos hamiltoniano e de difeomorfismo associados à gravidade e ao férmion de dimensão de massa um, o programa de quantização canônica será discutido no intuito de prescrever prováveis “passos seguintes” quanto ao desenvolvimento deste trabalho.

Primeiramente, é válido discutir certos aspectos relacionados aos vínculos. No Capítulo 4 foi visto que, em uma abordagem covariante para a RG, a estrutura das equações de campo linearizadas mostra que apenas duas componentes do campo de gráviton $h_{\mu\nu}$ se propagam, correspondendo às duas helicidades de uma partícula não massiva de *spin*-2, para a contagem do número de graus de liberdade na teoria. Uma vantagem do formalismo canônico é que ele nos permite confirmar essa contagem de uma forma mais geral e robusta.

Recorrendo à física clássica, cada ponto no espaço de fase (“posição e momento”) caracteriza uma trajetória física, e o número de graus de liberdade é definido como metade da dimensionalidade do espaço de fase. Em teorias com vínculos, como a RG e teorias de *gauge*, é preciso ter uma atenção quanto às restrições. Desse modo, é comum distinguir uma noção de espaço de fase *cinemático* e de espaço de fase *físico*. O espaço de fase cinemático é definido pela estrutura de Poisson da teoria. Assim, caracterizando a métrica $q_{ab}(x)$ por seis números por ponto de espaço, muitas vezes denotado simbolicamente por $6 \cdot \infty^3$, e $p^{ab}(x')$ por $6 \cdot \infty^3$ também, tem-se que a dimensionalidade do espaço de configuração $(q_{ab}(x), p^{ab}(x'))$ é $(6 + 6) \cdot \infty^3 = 12 \cdot \infty^3$. Admitindo os vínculos hamiltoniano \mathcal{H}_\perp e de difeomorfismo \mathcal{H}_a com $1 \cdot \infty^3$ e $3 \cdot \infty^3$ graus de liberdade, respectivamente, tem-se que a dimensionalidade reduz-se a $(12 - 1 - 3) \cdot \infty^3 = 8 \cdot \infty^3$. Levando em conta que os vínculos geram quatro conjuntos de parâmetros de transformações de *gauge* na hipersuperfície Σ_t , então $4 \cdot \infty^3$ graus de liberdade devem ser subtraídos a fim de fixar esses *gauges*. Logo, restam $(8 - 4) \cdot \infty^3 = 4 \cdot \infty^3$ variáveis no espaço de fase. Este é o chamado espaço de fase físico. Possui quatro dimensões por ponto de espaço, ou seja, a teoria possui dois graus de liberdades físicos por ponto de espaço (ou simplesmente dois graus de liberdade), um resultado consistente com a análise linearizada. Mais detalhes sobre essa contagem podem ser vislumbradas em Wipf (1994). A Figura 4 sintetiza a diferença

entre os espaços de fase cinemático e físico aqui discutidos. Assim, para saber os dois graus físicos de liberdade da RG, é necessário controlar a solução geral da teoria. Esta é uma tarefa nada trivial devido à alta não linearidade das equações de Einstein (DONÁ; SPEZIALE, 2010).

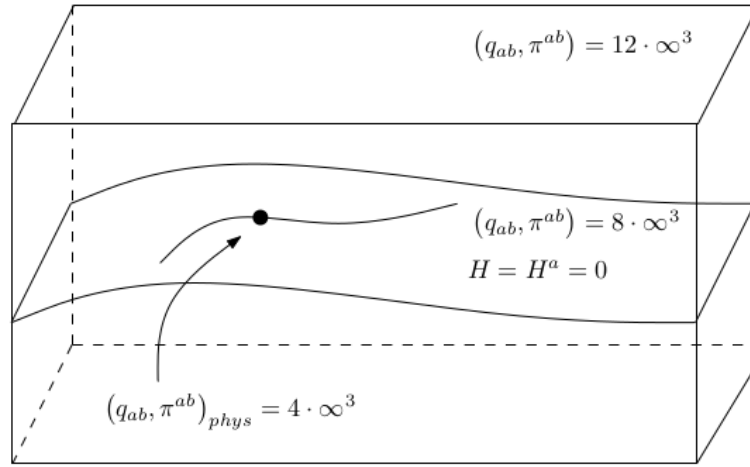


Figura 4 – Interpretação da diferença do espaço de fase cinemático $(q_{ab}, \pi^{ab}) = 12 \cdot \infty^3$ e espaço de fase físico (*phys*) $(q_{ab}, \pi^{ab}) = 4 \cdot \infty^3$, reduzido devido aos vínculos. Na notação da figura, $\pi^{ab} \equiv p^{ab}$. Imagem reproduzida de Doná e Speziale (2010).

Estando todo o conteúdo dinâmico da RG nesses quatro vínculos $(\mathcal{H}_\perp, \mathcal{H}_a)$, uma abordagem de quantização pelo programa de Dirac (1951) se torna interessante, visto que nesse prospecto os estados físicos dinâmicos podem ser aniquilados pelos vínculos. Resumidamente, o procedimento pode ser dividido em três etapas:

- Encontrar uma representação para as variáveis do espaço de fase da teoria como operadores em um espaço de Hilbert cinemático auxiliar \mathcal{H}_c , desde que satisfaçam as relações de comutação padrão previstos pela Mecânica Quântica, $\{\cdot, \cdot\} \rightarrow (1/i\hbar)[\cdot, \cdot]$;
- Promover os vínculos $(\mathcal{H}_\perp, \mathcal{H}_a)$ para operadores $(\hat{\mathcal{H}}_\perp, \hat{\mathcal{H}}_a)$ em \mathcal{H}_{cin} ;
- Caracterizar o espaço de soluções dos vínculos que pertençam a um espaço de Hilbert físico \mathcal{H}_f , de modo que $\hat{\mathcal{H}}_\perp \Psi = 0$ e $\hat{\mathcal{H}}_a \Psi = 0, \forall \Psi \in \mathcal{H}_f$.

Sabendo que o procedimento de Dirac é mais geral que a própria teoria da RG, podendo ser empregado a qualquer sistema com vínculos, tomando o formalismo ADM original com a ausência de matéria no espaço-tempo, $G_{\mu\nu} = 0$, tem-se que a álgebra de Poisson presente em (5.20)-(5.22) sofre a transformação quantizada (KIEFER, 2007)

$$[\hat{q}_{ab}(\mathbf{x}), \hat{p}^{cd}(\mathbf{x}')] = i\hbar \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (5.68)$$

$$[\hat{q}_{ab}(\mathbf{x}), \hat{q}_{cd}(\mathbf{x}')] = 0, \quad (5.69)$$

$$[\hat{p}^{ab}(\mathbf{x}), \hat{q}^{cd}(\mathbf{x}')] = 0, \quad (5.70)$$

em que $\hat{q}_{ab}(\mathbf{x})$ e $\hat{p}^{cd}(\mathbf{x})$ são os operadores associados a métrica e momento conjugado q_{ab} e p_{ab} , respectivamente, de modo que suas atuações sobre um funcional de onda $\Psi[q_{ab}(\mathbf{x})]$ associada às

folheações do espaço-tempo, pertencente a \mathcal{H}_f , são dadas por

$$\hat{q}_{ab}(\mathbf{x})\Psi[q_{ab}(\mathbf{x})] = q_{ab}(\mathbf{x}) \cdot \Psi[q_{ab}(\mathbf{x})], \quad (5.71)$$

$$\hat{p}^{cd}(\mathbf{x})\Psi[q_{ab}(\mathbf{x})] = -i\hbar \frac{\delta}{\delta q_{cd}(\mathbf{x})} \Psi[q_{ab}(\mathbf{x})], \quad (5.72)$$

em que $\Psi[q_{ab}(\mathbf{x})]$ precisa necessariamente ser dotado de produto interno $\langle \Psi | \Psi' \rangle$ bem definido.

Assim, em posse das regras de comutação (5.68)-(5.70) e de sua implementação formal diretamente presente em (5.71)-(5.72), chega-se à “dinâmica” com a quantização dos vínculos (5.26) e (5.27), obtendo-se as seguintes equações para o funcional de onda:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\perp,ADM}\Psi \equiv \left(-16\pi G\hbar^2 G_{abcd} : \frac{\delta^2}{\delta q_{ab}\delta q_{cd}} : -\frac{\sqrt{q}}{16\pi G} ({}^{(3)}R - 2\Lambda) \right) \Psi = 0, \quad (5.73)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{a,ADM}\Psi \equiv 2D_b q_{ac} i\hbar \frac{\delta \Psi}{\delta q_{bc}} = 0, \quad (5.74)$$

em que os dois pontos ($:$) indicam que uma ordem nos operadores precisa ser prescrita. As equações (5.73) e (5.74) são conhecidas como equações de Wheeler-DeWitt (KIEFER, 2007), devido ao trabalho desenvolvido por estes no final dos anos 60, na tentativa de achar uma proposta para quantização da gravidade à época.

É natural pensar que, com a incorporação de conteúdo material no espaço-tempo, como na ampliação obtida por nós em (5.65) e (5.66) para matéria e energia escura providas do campo fermiônico *MDO*, um processo de quantização análogo ao mencionado pelas equações de Wheeler-DeWitt ocorra. Contudo, além de ser necessário encontrar a forma com que os operadores do campo *MDO* ($\hat{\mathcal{H}}_{\perp,\lambda,\bar{\lambda}}, \hat{\mathcal{H}}_{a,\lambda,\bar{\lambda}}$) atuariam em um hipotético espaço de Hilbert munido de funcionais de onda $\Psi[q_{ab}(\mathbf{x})]$, teríamos, a princípio, um problema para caracterização de suas soluções.

Nessa perspectiva, uma provável solução para tal quantização canônica seria recorrer à ação de Palatini-Holst com a inclusão do campo *MDO* em folheações *ADM*-tetrad que alcançamos na equação (5.47) e trabalhar com a reformulação de Ashtekar (1987), onde este promove as variáveis $(q_{ab}(x), p^{ab}(x'))$ para as chamadas novas variáveis canônicas $(E_i^a(x), A_b^j(x'))$, *triad* densitizada e conexão de Sen-Ashtekar-Immirzi-Barbero, respectivamente. Esses objetos são estruturados em uma teoria de *gauge* $SU(2)$ e apresentados, segundo Kiefer (2007) e Thiemann (2008), nas formas:

$$E_i^a(x) \equiv \sqrt{q}\varepsilon_i^a(x) \quad \text{e} \quad (5.75)$$

$$A_b^j(x') \equiv \Gamma_b^j(x') + \gamma K_b^j(x'), \quad (5.76)$$

em que $\varepsilon_i^a(x)$ é a *triad* (componente espacial da tetrad), $\Gamma_b^j(x') = 1/2(\epsilon_{ik}^j \omega_b^{ik})$ é a conexão para o transporte paralelo de um vetor v^j com rotação infinitesimal $\delta\omega^j = \Gamma_b^j dx^b$, $K_b^j(x') \equiv K_{ba}(x')e^{aj}(x')$ é a curvatura extrínseca contraída com a tetrad e γ é o parâmetro de Barbero-Immirzi.

Essa reformulação analítica é a base para uma das modernas propostas de quantização da gravidade, a *LQG*. Pretendemos abarcá-la em investigações futuras, tendo como pretensão o estudo de uma possível quantização do campo gravitacional acoplado ao férmion *MDO*.

6 INTERAÇÃO *MDO*-GRAVIDADE: UMA ABORDAGEM COVARIANTE

Neste capítulo, investigamos em detalhes a interação entre o campo fermiônico de *spin*-1/2, dotado de dimensão de massa um, e a partícula associada à gravidade em nível quântico, o gráviton, à luz da prescrição covariante. Obtemos um vértice de interação que mescla as características dos vértices de campo escalar-gráviton e campo férmion (à lá Dirac)-gráviton, devido ao atributo dinâmico escalar e a estrutura fermiônica do campo *MDO*. Mostramos que este vértice obedece à identidade da Ward-Takahashi, assegurando a invariância de *gauge* para a interação. Derivamos a contribuição do férmion *MDO* para o propagador do gráviton, a nível de um *loop* e encontramos suas condições fisicamente possíveis de existir com um contra-termo cosmológico. Em seguida, calculamos o processo de espalhamento entre *MDOs* mediados por um gráviton. Ademais, verificamos que, para baixas energias, o resultado elucidado somente a contribuição do setor escalar presente no vértice para o potencial gravitacional, permitindo-nos avaliar que no limite não relativístico da interação gravitacional chega-se naturalmente ao potencial newtoniano, obedecendo as circunstâncias necessárias para um candidato de matéria escura no cenário cosmológico atual, alicerçado pelo modelo Λ CDM.

6.1 VÉRTICE DE INTERAÇÃO *MDO*-GRÁVITON

A ação do férmion de dimensão de massa um e *spin*-1/2 em cenário de espaço curvo de variedade pseudo-Riemanniana é, como visto nos trabalhos de Boehmer et al. (2010), Silva e Pereira (2014), dada por

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} \left(g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \bar{\lambda} \nabla_{\nu} \lambda - m^2 \bar{\lambda} \lambda \right) d^4x, \quad (6.1)$$

em que $\lambda = \lambda(x)$ e $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(x)$ denotam o campo espinorial e sua correspondente estrutura adjunta de massa m . O determinante da métrica é descrito como $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$, com assinatura $(+, -, -, -)$. Neste caso, diferentemente do capítulo antecedente, consideramos a situação de que o acoplamento entre o campo fermiônico e a curvatura R seja nula, ou seja, um quadro de acoplamento mínimo, $\xi = 0$. As derivadas covariantes atuantes no férmion *MDO* são, novamente, explicitadas como

$$\nabla_{\mu} \bar{\lambda} = \partial_{\mu} \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \Gamma_{\mu} \quad \text{e} \quad \nabla_{\mu} \lambda = \partial_{\mu} \lambda - \Gamma_{\mu} \lambda, \quad (6.2)$$

com a conexão de *spin* seguindo a notação¹ $\Gamma_{\mu} = A_{\mu ab} \sigma^{ab}/2$. Sendo os geradores de transformação $\sigma^{ab} = -1/2[\gamma^a, \gamma^b]$, em que γ^a são as matrizes de Dirac mapeadas em espaço localmente plano, para que assim possa descrever a conexão via campos de tetradas e_{α}^a (YEPEZ, 2011). Expressamente, o termo da conexão $A_{\mu ab}$ é designado na forma

$$A_{\mu}^a{}_b = -e_b^{\nu} \partial_{\mu} e_{\nu}^a + e_b^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} e_{\alpha}^a, \quad (6.3)$$

¹ Sutilmente diferente da notação do capítulo anterior, no tratamento do formalismo canônico, e para fins de comparação com trabalhos existentes na literatura em estudos de interação de campo de matéria e gráviton, segundo o formalismo covariante.

em função da conexão de Levi-Civita e munido de índices internos (a) para mapeamento de Lorentz e externos (μ) para o espaço-tempo.

Tendo em vista que a abordagem para obtenção do vértice de interação constituirá em analisar a dinâmica no espaço dos *momentum* entre o férmion *MDO* e o gráviton, é importante que se estenda a métrica genérica $g_{\mu\nu}$, e consequentemente os campos de tetradas e_α^a , com uma perturbação $h_{\mu\nu}$ em torno da métrica de Minkowski. Em outras palavras, iremos seguir uma prescrição a campo fraco, assim como apresentado no Capítulo 4 nos estudos da natureza do gráviton. Dito isso, a métrica e a tetrada tornam-se expressas como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad |\kappa h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (6.4)$$

$$e_a^\alpha = \eta_a^\alpha - 1/2\kappa h_a^\alpha + 3/8\kappa^2 h_a^\chi h_\chi^\alpha + \mathcal{O}(\kappa^3), \quad (6.5)$$

$$e_\alpha^a = \eta_\alpha^a + 1/2\kappa h_\alpha^a - 1/8\kappa^2 h_{\alpha\chi} h^{a\chi} + \mathcal{O}(\kappa^3), \quad (6.6)$$

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \kappa h^{\alpha\beta} + \kappa^2 h^{\alpha\chi} h_\chi^\beta + \mathcal{O}(\kappa^3), \quad (6.7)$$

sendo $\kappa^2 = 16\pi G$ e $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(x)$ o campo associado ao bóson gráviton.

A partir da equação (6.4), o elemento de volume do espaço-tempo perturbado fracamente torna-se

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{\kappa}{2}h - \frac{\kappa^2}{4}h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} + \frac{\kappa^2}{8}h^2 + \mathcal{O}(\kappa^3). \quad (6.8)$$

De modo a preservar as contribuições mais relevantes na perturbação da métrica, as componentes de ordem igual ou superior a κ^2 serão negligenciadas de agora em diante. Assim, o termo de conexão afim presente na expressão (6.3), com auxílio das equações (6.4)-(6.7), é denotado por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \simeq \frac{\kappa}{2}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\mu h_{\beta\nu} + \partial_\nu h_{\beta\mu} - \partial_\beta h_{\mu\nu}). \quad (6.9)$$

Reescrevendo as tetradas (6.5)-(6.6) em primeira ordem de κ como $e_\mu^a \equiv \delta_\mu^a + \kappa c_\mu^a$, $e_b^\mu = \delta_b^\mu - \kappa c_b^\mu$ com $c_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}/2$ (HOLSTEIN, 2006) ($\eta_a^\alpha = \delta_a^\alpha$ e $\eta_\alpha^a = \delta_\alpha^a$), e utilizando a conexão afim (6.9), chegamos à versão perturbativa da conexão $A_\mu^a{}_b$ (veja a demonstração no Apêndice (D)) presente em (6.3):

$$A_\mu^a{}_b \simeq \frac{\kappa}{2}\eta^{a\sigma}(\partial_b h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\mu b}). \quad (6.10)$$

Tomando-se o gerador de transformação² σ^{ab} , atentando para o fato de que $[\gamma^a, \gamma^b] = \delta_\alpha^a \delta_\beta^b [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$, juntamente com a conexão (6.10), a conexão de *spin* no limite de campo fraco é estabelecida

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}A_{\mu ab}\sigma^{ab} \simeq -\frac{\kappa}{4}(\partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\beta\mu})\gamma^\alpha\gamma^\beta. \quad (6.11)$$

A densidade de lagrangiana do campo *MDO* extraída da ação em espaço curvo (6.1), sob um

² Lembrando que através das relações $\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}$ e $[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] = -2\sigma^{\alpha\beta}$ tem-se $\sigma^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \gamma^\alpha\gamma^\beta$.

cenário de perturbação à métrica de Minkowski, é descrita por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\lambda,\bar{\lambda}} &= \sqrt{-g}[\nabla_\mu \bar{\lambda} g^{\mu\nu} \nabla_\nu \lambda - m^2 \bar{\lambda} \lambda] \\ &= \mathbb{G} \left[[\partial_\mu \bar{\lambda} - \bar{\lambda} \frac{\kappa}{4} (\partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\beta\mu}) \gamma^\alpha \gamma^\beta] (\eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu}) [\partial_\nu \lambda + \frac{\kappa}{4} (\partial_\rho h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma h_{\rho\nu}) \gamma^\sigma \gamma^\rho \lambda] \right. \\ &\quad \left. - m^2 \bar{\lambda} \lambda \right],\end{aligned}\tag{6.12}$$

em que \mathbb{G} é o termo de elemento de volume métrico $\sqrt{-g}$ em limite de campo gravitacional fraco (6.8), denotado até a primeira ordem de perturbação em κ como $\mathbb{G} = (1 + \kappa h/2)$. A conexão de *spin* presente na equação (6.11) já está empregada após a atuação da derivada covariante nos espinores nesse regime adotado, observando a prescrição $\nabla_\mu \bar{\lambda} = \partial_\mu \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \Gamma_\mu$ e $\nabla_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda - \Gamma_\mu \lambda$.

Desenvolvendo a equação (6.12) (veja a demonstração no Apêndice (D)) e desprezando-se, novamente, os termos de ordem $\geq \kappa^2$, segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\lambda,\bar{\lambda}} &= \overbrace{(\partial_\mu \bar{\lambda} \partial^\mu \lambda - m^2 \bar{\lambda} \lambda)}^{\mathcal{L}_{0\bar{\lambda},\lambda}} + \frac{\kappa}{2} h (\partial_\mu \bar{\lambda} \partial^\mu \lambda - m^2 \bar{\lambda} \lambda) - \kappa \partial_\mu \bar{\lambda} h^{\mu\nu} \partial_\nu \lambda \\ &\quad + \frac{\kappa}{4} [\partial_\mu \bar{\lambda} (\partial_\rho h_\sigma^\mu - \partial_\sigma h_\rho^\mu) \gamma^\sigma \gamma^\rho \lambda + \bar{\lambda} (\partial_\alpha h_{\beta\mu} - \partial_\beta h_{\alpha\mu}) \gamma^\alpha \gamma^\beta \partial^\mu \lambda],\end{aligned}\tag{6.13}$$

em que $\mathcal{L}_{0\bar{\lambda},\lambda}$ é a parcela referente à densidade de lagrangiana livre, emergente da métrica minkowskiana, e os demais termos tratam da parte interagente em primeira ordem, provindos da perturbação do *background* em Minkowski. Os campos *MDO* e gráviton, descritos a princípio no espaço das posições, podem ser expressos em função do espaço dos *momentum* com as transformadas de Fourier:

$$\lambda(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \lambda(p) d^4 p,\tag{6.14}$$

$$\bar{\lambda}(y) = \int \frac{1}{(2\pi)^4} e^{+iqy} \bar{\lambda}(q) d^4 q\tag{6.15}$$

e

$$h(z) = \int \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-irz} h_\omega^\omega(r) d^4 r,\tag{6.16}$$

obedecendo as direções de propagações dos campos, estabelecidas à priori, para a aniquilação dos férmions usuais de momento p e duais de momento q quando ocorrer a interação na configuração da troca de momentos com o gráviton de momento r . Desse modo, a transcrição da integração da densidade de lagrangiana de interação *MDO*-gráviton no espaço das posições, Γ , para o três campos envolvidos, $\mathcal{L}_{int\bar{\lambda},\lambda} = \mathcal{L}_{\bar{\lambda},\lambda} - \mathcal{L}_{0\bar{\lambda},\lambda}$, em função do espaço dos *momentum* é escrita como:

$$\int_\Gamma \mathcal{L}_{int\bar{\lambda},\lambda}(x, y, z) d\Gamma = \int \mathcal{L}_{int\bar{\lambda},\lambda}(p, q, r) \delta^4(y-x) \delta^4(y-z) d^4 x d^4 y d^4 z,\tag{6.17}$$

sendo $d\Gamma$ o elemento de integração na tripla $(d^4 x, d^4 y, d^4 z)$, levando em conta a interação dos campos *MDO*-usual, *MDO*-dual e gráviton em y , de propagação regressiva do campo dual.

Inserindo as transformações dos campos presentes nas equações (6.14)-(6.16), no espaço dos

momentum, sobre a expressão (6.17) e absorvendo as integrações em δ no ponto de interação y , segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathcal{L}_{int\lambda,\bar{\lambda}}(x, y, z) d\Gamma &= \int d^4q d^4p d^4r \int (d^4y)^3 e^{i(q-p-r)y} \frac{1}{[(2\pi)^4]^3} \\ &\left[\frac{\kappa}{2} (h_{\omega}^{\omega}(r) q_{\mu} p^{\mu} \bar{\lambda}(q) \lambda(p) - h_{\omega}^{\omega}(r) m^2 \bar{\lambda}(q) \lambda(p)) - \kappa (q_{\mu} p_{\nu} \bar{\lambda}(q) h^{\mu\nu}(r) \lambda(p)) \right. \\ &\left. + \frac{\kappa}{4} \bar{\lambda}(q) (r_{\rho} h_{\sigma}^{\mu}(r) - r_{\sigma} h_{\rho}^{\mu}(r)) \gamma^{\sigma} \gamma^{\rho} q_{\mu} \lambda(p) + \frac{\kappa}{4} \bar{\lambda}(q) (r_{\beta} h_{\alpha\mu}(r) - r_{\alpha} h_{\beta\mu}(r)) \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} p^{\mu} \lambda(p) \right]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Em geral as regras de Feynman para o vértice de interação de uma teoria quântica, em "nível de árvore"³, podem ser definidas como a variação funcional da integração da densidade de lagrangiana de interação (GREINER; SCHAEFER, 1995) p. 145, em Γ , com respeito aos campos (ϕ_1, \dots, ϕ_n) no espaço dos *momentum*:

$$V_{int\phi_1, \dots, \phi_n} \stackrel{def}{=} i \frac{\delta \int_{\Gamma} \mathcal{L}_{int\phi_1, \dots, \phi_n} d\Gamma}{\delta \phi_1(a) \dots \delta \phi_n(z)}, \quad (6.19)$$

em que i é a unidade imaginária inserida na definição e sendo a, b, \dots, z os momentos associados a cada um dos campos (ϕ_1, \dots, ϕ_n) . Didaticamente falando, é de conhecimento prévio que a variação funcional da ação, no espaço das posições, com respeito aos campos de uma teoria resulta nas equações de movimento desta. O vértice de interação é fisicamente um processo análogo, trazendo consigo as informações da dinâmica dos campos via suas trocas de momentos.

Uma vez que a parcela de integração dos três campos no ponto de interação y , junto ao termo de normalização de Fourier, é sintetizado na forma das δ no espaço dos *momentum* como

$$\int d^4y e^{i(q-p-r)y} = (2\pi)^4 \delta(q-p-r) \Rightarrow \left[\int (d^4y) e^{i(q-p-r)y} \frac{1}{[(2\pi)^4]} \right]^3 = \delta^3(q-p-r), \quad (6.20)$$

sendo usada, daqui em diante, a notação $\delta(q-p-r) = \delta^{(n)}(q-p-r)$ compactamente para n dimensões, e partindo do fato que os campos associados ao gráviton podem ser expressos por

$$h_{\omega}^{\omega}(r) = \eta_{\theta\pi} h^{\theta\pi}(r); \quad (6.21)$$

$$h_{\sigma}^{\mu}(r) = \eta_{\sigma\theta} h^{\mu\theta}(r); \quad h_{\rho}^{\mu}(r) = \eta_{\rho\theta} h^{\mu\theta}(r); \quad (6.22)$$

$$h_{\alpha\mu}(r) = \eta_{\alpha\theta} \eta_{\mu\pi} h^{\theta\pi}(r); \quad h_{\beta\mu}(r) = \eta_{\beta\theta} \eta_{\mu\pi} h^{\theta\pi}, \quad (6.23)$$

³ No livro de Matthew Schwartz, *Quantum Field Theory And The Standard Model*, p. 29, o autor declara: "... Começaremos examinando cuidadosamente algumas das previsões de que uma teoria acerta sem infinitos. Elas são chamados de processos em nível de árvore, o que significa que elas estão liderando a ordem em uma expansão em \hbar . Uma vez que ao tomar $\hbar \rightarrow 0$ se obtém o limite clássico, os cálculos em nível de árvore estão intimamente relacionados aos cálculos na Teoria de Clássica de Campos." (SCHWARTZ, 2014). Significa que nível de árvore é o nome dado quando não se leva em conta termos de ordem superior à correção quântica ($\hbar^n, n \geq 2$) da teoria estudada, ou seja, não é posto em consideração os efeitos de *loop*. Geralmente as teorias em nível de árvore possuem uma representação via diagramas de Feynman a partir de seu vértice de interação, por trocas de momentos, que se assemelha a um galho de árvore.

ao aplicar a expressão (6.18) sobre a definição do vértice em (6.19), temos:

$$\begin{aligned}
V_{int\lambda,\bar{\lambda},h} &= i \frac{\delta \int_{\Gamma} \mathcal{L}_{int\lambda,\bar{\lambda}}(x, y, z) d\Gamma}{\delta \bar{\lambda}(a) \delta \lambda(b) \delta h^{\xi\tau}(c)} = i \int d^4 q d^4 p d^4 r \delta(q - p - r) \delta(q - a) \delta(p - b) \delta(r - c) \\
&\cdot \left[\frac{\kappa}{2} \frac{\eta_{\theta\pi}}{2} (\eta^{\xi\pi} \eta^{\theta\tau} + \eta^{\theta\xi} \eta^{\pi\tau}) (q_{\mu} p^{\mu} - m^2) - \kappa \frac{(\eta^{\mu\tau} \eta^{\nu\xi} + \eta^{\mu\xi} \eta^{\nu\tau})}{2} q_{\mu} p_{\nu} \right. \\
&+ \frac{\kappa}{4} \left((r_{\rho} \eta_{\sigma\theta} - r_{\sigma} \eta_{\rho\theta}) \frac{(\eta^{\mu\tau} \eta^{\theta\xi} + \eta^{\mu\xi} \eta^{\theta\tau})}{2} \gamma^{\sigma} \gamma^{\rho} q_{\mu} \right. \\
&\left. \left. + (r_{\beta} \eta_{\alpha\theta} \eta_{\mu\pi} - r_{\alpha} \eta_{\beta\theta} \eta_{\mu\tau}) \frac{(\eta^{\xi\pi} \eta^{\theta\tau} + \eta^{\theta\xi} \eta^{\pi\tau})}{2} \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} p^{\mu} \right) \right], \quad (6.24)
\end{aligned}$$

valendo-se do fato que $\delta \bar{\lambda}(q) / \delta \bar{\lambda}(a) = \delta(q - a)$ e $\delta \lambda(p) / \delta \lambda(b) = \delta(p - b)$. Na expressão acima foi usada a identidade que surge da variação de um campo de gráviton com relação a outro (HOLSTEIN, 2006), prescrito na forma

$$\frac{\delta h^{\sigma\rho}(r)}{\delta h^{\alpha\beta}(c)} = \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\rho} \eta^{\sigma\beta} + \eta^{\rho\beta} \eta^{\alpha\sigma}) \delta(r - c). \quad (6.25)$$

Condensando as componentes das métricas de Minkowski emergentes das variações dos campos de gráviton no vértice resultante, tomando em seguida ($a \rightarrow q, b \rightarrow p, c \rightarrow r$) e operando a integração da equação (6.24), chegamos à expressão

$$\begin{aligned}
V_{int\lambda,\bar{\lambda},h} &= i \delta(q - p - r) \left[\frac{\kappa}{2} (p \cdot q - m^2) \eta^{\xi\tau} - \frac{\kappa}{2} (q^{\tau} p^{\xi} + q^{\xi} p^{\tau}) + \frac{\kappa}{8} [r_{\rho} (\gamma^{\xi} \gamma^{\rho} q^{\tau} + \gamma^{\tau} \gamma^{\rho} q^{\xi}) \right. \\
&\left. - r_{\sigma} (\gamma^{\sigma} \gamma^{\xi} q^{\tau} + \gamma^{\sigma} \gamma^{\tau} q^{\xi}) + r_{\beta} (\gamma^{\tau} \gamma^{\beta} p^{\xi} + \gamma^{\xi} \gamma^{\beta} p^{\tau}) - r_{\alpha} (\gamma^{\alpha} \gamma^{\tau} p^{\xi} + \gamma^{\alpha} \gamma^{\xi} p^{\tau}) \right], \quad (6.26)
\end{aligned}$$

podendo esta ser visualizada mais compactamente como

$$\begin{aligned}
V_{int\lambda,\bar{\lambda},h} &= i \frac{\kappa}{8} \delta(q - p - r) [4(p \cdot q - m^2) \eta^{\xi\tau} - 4(q^{\tau} p^{\xi} + q^{\xi} p^{\tau}) + (\gamma^{\xi} \not{r} - \not{r} \gamma^{\xi}) q^{\tau} \\
&+ (\gamma^{\tau} \not{r} - \not{r} \gamma^{\tau}) q^{\xi} + (\gamma^{\tau} \not{p} - \not{p} \gamma^{\tau}) p^{\xi} + (\gamma^{\xi} \not{p} - \not{p} \gamma^{\xi}) p^{\tau}], \quad (6.27)
\end{aligned}$$

sendo aqui empregada a notação de Feynman para contração de um vetor e uma matriz gama, $v_{\mu} \gamma^{\mu} = v^{\mu} \gamma_{\mu} = \not{v}$.

Transcrevendo os índices da expressão (6.27) na forma contravariante para a forma covariante e renomeando estes em ($\xi \rightarrow \alpha, \tau \rightarrow \beta$), temos que o vértice de interação MDO-gráviton em nível de árvore é descrito por

$$V_{\alpha\beta}(q, p, r) = i \frac{\kappa}{8} \delta(q - p - r) [4(p \cdot q - m^2) \mathbb{1}_{\eta_{\alpha\beta}} - 4(q_{\alpha} p_{\beta} + q_{\beta} p_{\alpha}) \mathbb{1} + [\gamma_{\alpha}, \not{r}](p + q)_{\beta} + [\gamma_{\beta}, \not{r}](p + q)_{\alpha}], \quad (6.28)$$

em que $r = q - p$ e $\mathbb{1} = \mathbb{1}_4$ a matriz identidade.

O diagrama de Feynman representativo ao vértice MDO-gráviton é evidenciado pela ilustração a seguir. A troca de momentos entre os campos MDO usual $\lambda(p)$, MDO dual $\bar{\lambda}(q)$ e o gráviton $h_{\mu\nu}(r)$, exibida na Figura 5, ocorre via o vértice $V_{\alpha\beta}(q - p - r)$ expresso matematicamente pela equação (6.28), em que esses obedecem as referências de propagação definidas em (6.14)-(6.16), sendo $e^{-i(\square)}$ e

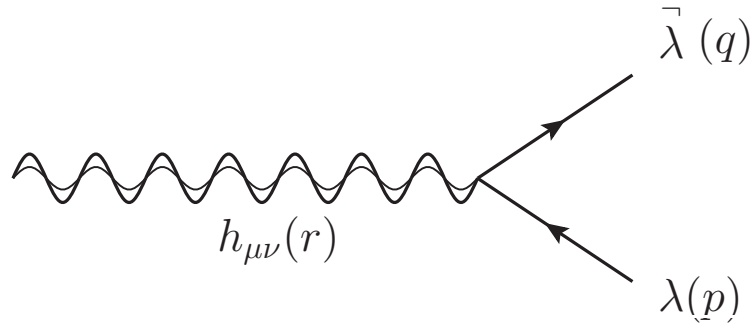


Figura 5 – Vértice de interação *MDO*-gráviton em nível de árvore na ordem de κ . Fonte: Produção própria do autor.

$e^{+i(\blacksquare)}$ as direções de entrada e saída dos campos no vértice, nessa ordem.

A critério de comparação, os vértices de interações gravitacionais para campos de *spin*-0 (escalar) e de *spin*-1/2 (de Dirac) são dados por

$$V_{\alpha\beta}(p, q) = i\frac{\kappa}{2}\delta(p - q)((p \cdot q - m^2)\eta_{\alpha\beta} - p_{\alpha}q_{\beta} - q_{\alpha}p_{\beta}) \quad (6.29)$$

e

$$V_{\alpha\beta}(p, q) = i\frac{\kappa}{2}\delta(p - q)\left[\frac{1}{2}(\not{p} + \not{q}) - m\right]\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}(\gamma_{\alpha}(p + q)_{\beta} + \gamma_{\beta}(p + q)_{\alpha}), \quad (6.30)$$

respectivamente, segunda análise desenvolvida por Holstein (2006).

É possível notar que o vértice de interação da equação (6.28) é composto de duas parcelas: a primeira ($4(p \cdot q - m^2)\mathbb{1}\eta_{\alpha\beta} - 4(q_{\alpha}p_{\beta} + q_{\beta}p_{\alpha})\mathbb{1}$) elucida um comportamento tipicamente conhecido entre um campo escalar-gráviton, enquanto a segunda ($[\gamma_{\alpha}, \not{f}](p + q)_{\beta} + [\gamma_{\beta}, \not{f}](p + q)_{\alpha}$) explicita uma característica similar à fermiônica de Dirac-gráviton, quando equiparado à análise de Holstein (2006). Este comportamento peculiar também é verificado em outros contextos ao se estudar espinores de dimensão de massa um, como em Pereira, Silva e Santos (2017), Pereira e Costa (2019). A provável razão para esse aspecto particular é ancorada sobre o perfil mesclado do campo *MDO*, cuja característica atende sua dinâmica governada pela equação de Klein-Gordon e simultaneamente sua estrutura espinorial.

Historicamente, sob o arcabouço da TQC, John C. Ward e posteriormente Yasushi Takahashi analisaram certas condições às funções de correlação que decorrem de simetrias globais ou de *gauge* para que uma teoria permaneça válida após sua renormalização. Dentro da Eletrodinâmica Quântica, Ward e Takahashi obtiveram uma identidade relacionada à renormalização da função de onda do elétron ao seu fator de renormalização de vértices (WARD, 1950; TAKAHASHI, 1957), o que possibilitou o cancelamento da divergência ultravioleta nas ordens superiores de perturbação. Expondo de forma mais didática, pode-se dizer que uma identidade de Ward-Takahashi é a versão quântica correspondente à conservação de corrente clássica associada a uma simetria contínua pelo teorema de Noether. A fim de explorar a invariância de *gauge* para a interação entre férmions de dimensão de massa um e o gráviton, a relação de Ward-Takahashi com viés de aplicação gravitacional, como explorado em Just e Rossberg (1965), Capper e Medrano (1974), será necessária para esse contexto.

Aplicando-se o momento do gráviton, $r = q - p$, sobre o vértice *MDO*-gráviton (6.28), temos

$$\begin{aligned} r^\alpha V_{\alpha\beta} &= i\frac{\kappa}{8}[4(q-p)^\alpha(p \cdot q - m^2)\eta_{\alpha\beta} - 4(q-p)^\alpha(q_\alpha p_\beta + q_\beta p_\alpha) \\ &+ (q-p)^\alpha([\gamma_\alpha, \gamma_\mu](q-p)^\mu(p+q)_\beta + [\gamma_\beta, \gamma_\nu](q-p)^\nu(p+q)_\alpha)]. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Desenvolvendo a equação (6.31), chegamos a

$$r^\alpha V_{\alpha\beta} = i\frac{\kappa}{8}[4q_\beta(p^2 - m^2) - 4p_\beta(q^2 - m^2) + (q-p)^\alpha([\gamma_\alpha, \gamma_\beta](q^2 - p^2) - [\gamma_\beta, \gamma_\alpha](p^2 - q^2))]. \quad (6.32)$$

Valendo-se do fato que $S(p) = (p^2 - m^2)\mathbb{1}$ é o operador inverso⁴ ao propagador de Feynman–Dyson do campo *MDO* com momento p , como mostrado em Ahluwalia (2017b) e que $[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] = -2\sigma_{\alpha\beta} = 2\sigma_{\beta\alpha}$, após algumas manipulações algébricas concluímos que a identidade de Ward–Takahashi para esse caso específico é ditada por:

$$W_\beta(p, q) = 2r^\alpha V_{\alpha\beta} = i\kappa[q_\beta S(p) - p_\beta S(q) + (q-p)^\alpha(\omega_{\{\alpha\beta\}}S(p) - S(q)\omega_{\{\alpha\beta\}})], \quad (6.33)$$

em que $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}$, sendo $\omega_{\{\alpha\beta\}} = \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} = 0$, caracterizando uma contribuição nula à parcela de aspecto fermiônico da identidade para a relação *MDO*-gráviton.

6.2 CORREÇÃO A UM LOOP NO PROPAGADOR DO GRÁVITON VIA FÉRMION *MDO*

Veremos, nesta seção, o desenvolvimento e os conceitos físicos adjacentes à correção a um *loop* do propagador do gráviton mediado pelo campo fermiônico *MDO*.

Em torno da métrica de Minkowski, o propagador de Feynman–Dyson associado ao gráviton, no espaço dos *momentum*, é expresso em Donoghue (1995), Kiefer (2007) como⁵

$$i\mathcal{G}_{\mu\nu,\alpha\beta}(k) = \frac{i}{2} \frac{(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})}{k^2 + i\epsilon}, \quad (6.34)$$

em que $\epsilon = 0^+$ e k o momento do gráviton que se propaga do ponto $\mu\nu$ ao ponto $\alpha\beta$.

A influência da criação de pares virtuais de férmions *MDO*-usual/dual sob o propagador do gráviton (6.34) é modificada por uma correção de ordem κ^n , dada por

$$i\mathcal{G}'_{\mu\nu,\alpha\beta}(k) = i\mathcal{G}_{\mu\nu,\alpha\beta}(k) + i\mathcal{G}_{\mu\nu,\delta\epsilon}(k)\Pi^{\delta\epsilon,\rho\sigma}(k)i\mathcal{G}_{\rho\sigma,\alpha\beta}(k) + \dots + \mathcal{O}(\kappa^n), \quad (6.35)$$

em que $\Pi^{\delta\epsilon,\rho\sigma}(k)$ é chamado tensor de polarização e corresponde à primeira parcela divergente em um *loop* da correção da auto-energia do gráviton (κ^2), como mostrado por meio de diagramas de Feynman na Figura 6. Esse conceito é muito próximo à noção aplicada para o entendimento da

⁴ A descrição propriamente dita do propagador de Feynman–Dyson, no espaço das posições, do campo *MDO* é dado por $S_{FD}(x' - x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip^\mu(x'_\mu - x_\mu)} \left[\frac{\mathbb{1}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right]$, que satisfaz $(\partial'_\mu \partial'^\mu - m^2)S_{FD}(x' - x) = -\delta^4(x' - x)$ (AHLUWALIA, 2017b).

⁵ A notação comumente utilizada para o propagador do gráviton $D_{F\mu\nu,\alpha\beta}(k) \rightarrow \mathcal{G}_{\mu\nu,\alpha\beta}(k)$ foi propositalmente alterada por nós, a fim de diferenciar dos propagadores para fótons $D_{F\mu\nu}(k)$ ou mesmo para outros bósons de interação com notação similar, presentes na literatura.

polarização no vácuo, por meio dos fótons, pela Eletrodinâmica Quântica (GREINER; REINHARDT, 1996, p. 234-246).

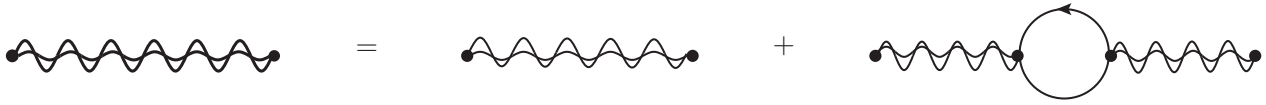


Figura 6 – Propagador do gráviton com correção à primeira ordem em um *loop* de κ^2 . Fonte: Produção própria do autor.

O tensor de polarização, que não está na concha de massa, para o gráviton de momento p e o *MDO* de momento q e massa m , é definido na forma

$$\Pi_{(a)}^{\mu\nu,\alpha\beta}(p) = - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{Tr[V^{\mu\nu} i\mathbb{1} V^{\alpha\beta} i\mathbb{1}]}{(q^2 - m^2)[(p - q)^2 - m^2]}, \quad (6.36)$$

sendo $d = 4 - 2\epsilon$ a dimensão de regularização da integração, $Tr[]$ o operador traço, $V^{\mu\nu} = V^{\mu\nu}(-q, p, q - p)$ e $V^{\alpha\beta} = V^{\alpha\beta}(q, -p, p - q)$ os pontos de entrada e saída do vértice de interação *MDO*-gráviton, já respeitando os propagadores dos férmions $\frac{1}{(q^2 - m^2)}$ e $\frac{1}{[(p - q)^2 - m^2]}$. Vide sua representação na Figura 7 denotada por (a). É importante enfatizar que a orientação de propagação

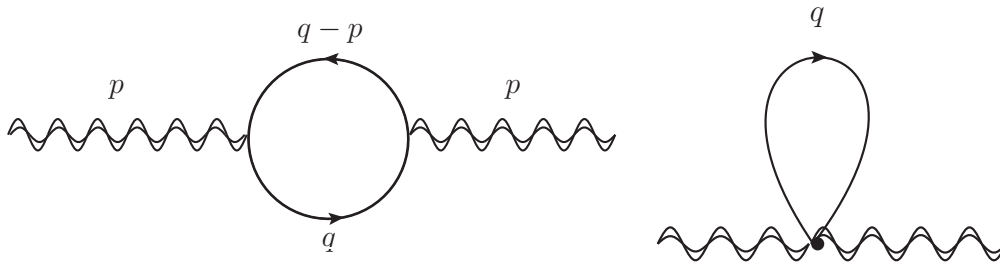


Figura 7 – Dois diagramas, (a)–esquerda e (b)–direita (veja (D.8) do Apêndice (D)), que representam os tensores de polarização, pelas criações de férmions *MDO* virtuais associadas à auto-energia do propagador do gráviton. Fonte: Produção própria do autor.

para o momento do férmion *MDO* na parte superior em (a), $(q - p) \rightarrow (p - q)$, altera se for invertido seu sentido. Mas, para ambas situações, a polarização é indistinguível. Já a ilustração (b) corresponde a um vértice de dois grávitons e um férmion *MDO* cuja equação é ditada por

$$\Pi_{(b)}^{\mu\nu,\alpha\beta}(p) = - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{Tr[V^{\mu\nu\alpha\beta} i\mathbb{1}]}{(q^2 - m^2)}, \quad (6.37)$$

em que $V^{\mu\nu\alpha\beta} = V^{\mu\nu\alpha\beta}(-p, q, -q, p)$.

Com o auxílio do programa Mathematica⁶ Versão 10.0 (WOLFRAM, 2014), do pacote FeynCalc⁷ 9.0 (SHTABOVENKO; MERTIG; ORELLANA, 2016) e das bases de Bateman (1953), Capper (1975), a

⁶ Um programa de computador, originalmente concebido por Stephen Wolfram, e continuamente desenvolvido pela empresa Wolfram Research, localizada em Champaign (Illinois), que implementa um sistema de álgebra computacional <<https://www.wolfram.com/mathematica/new-in-10/>>.

⁷ Um pacote do Mathematica para avaliação simbólica de diagramas de Feynman e cálculos algébricos em Teoria Quântica de Campos e Física de Partículas Elementares <<https://feynCalc.github.io/>>.

partir do vértice (6.28) na equação (6.36), obtemos (veja a demonstração no Apêndice (E)):

$$\begin{aligned}
\Pi_{(a)}^{\mu\nu,\alpha\beta}(p) &= \kappa^2 \delta(q-p-r) \{ (\eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} [2(p \cdot q) m^2 - (p \cdot q)^2 - m^4] - p^\alpha p^\beta p^\mu p^\nu) J_1 \\
&+ (\mathcal{A}^{\alpha\mu\beta\nu} + \mathcal{A}^{\alpha\nu\beta\mu} + \mathcal{A}^{\beta\mu\alpha\nu} + \mathcal{A}^{\beta\nu\alpha\mu}) J_1 \\
&+ (p^\alpha \mathcal{B}^{\beta\{\mu\nu\}} + p^\beta \mathcal{B}^{\alpha\{\mu\nu\}} + p^\mu \mathcal{B}^{\nu\{\alpha\beta\}} + p^\nu \mathcal{B}^{\mu\{\alpha\beta\}}) J_2 \\
&+ (\eta^{\alpha\beta} J_3 + p^\alpha p^\beta J_4) p^\mu p^\nu + (\eta^{\mu\nu} J_3 + p^\mu p^\nu J_4) p^\alpha p^\beta + (\eta^{\alpha\mu} J_3 + p^\alpha p^\mu J_4) \mathcal{C}^{\beta\nu} \\
&+ (\eta^{\alpha\nu} J_3 + p^\alpha p^\nu J_4) \mathcal{C}^{\beta\mu} + (\eta^{\beta\mu} J_3 + p^\beta p^\mu J_4) \mathcal{C}^{\alpha\nu} + (\eta^{\beta\nu} J_3 + p^\beta p^\nu J_4) \mathcal{C}^{\alpha\mu} \\
&- (p^\alpha p^\beta p^\mu p^\nu) J_7 - (\eta^{\alpha\beta} p^\mu p^\nu + \eta^{\mu\nu} p^\alpha p^\beta + 4p^{(\alpha} \eta^{\beta)(\mu} p^{\nu)}) J_8 \\
&- (2\eta^{\alpha(\nu} \eta^{\mu)\beta} + \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu}) J_9 \}, \tag{6.38}
\end{aligned}$$

em que os termos do tipo \mathcal{A} são descritos compactamente por $\mathcal{A}^{\alpha\mu\nu\beta} \equiv 1/4 \cdot \eta^{\alpha\mu} [p^\beta p^\nu (p^2 + q^2 - 2 \cdot q)]$, \mathcal{B} por $\mathcal{B}^{\alpha\{\mu\nu\}} \equiv 1/4 \cdot [\eta^{\alpha\mu} p^\nu (p^2 - 2p \cdot q) + \eta^{\alpha\nu} p^\mu (p^2 - 2p \cdot q) + 4p^\alpha \eta^{\mu\nu} (p \cdot q - m^2) + (\eta^{\alpha\mu} p^\nu + \eta^{\alpha\nu} p^\mu) q^2]$ e \mathcal{C} por $\mathcal{C}^{\alpha\mu} \equiv 1/4 \cdot \eta^{\alpha\mu} (p^2 + q^2 - 2p \cdot q) - p^\alpha p^\mu$, tendo ainda a notação $\eta^{\alpha(\nu} \eta^{\mu)\beta} = 1/2 \cdot (\eta^{\alpha\nu} \eta^{\mu\beta} + \eta^{\alpha\mu} \eta^{\nu\beta})$. Os termos J_i são objetos que levam em si as divergências da integração sobre (6.36), expressos como:

$$J_1 = \pi^2 \Gamma(\epsilon) \frac{1}{(2\pi)^4}, \tag{6.39}$$

$$J_2 = \frac{J_1}{2} = \frac{\pi^2}{2} \Gamma(\epsilon) \frac{1}{(2\pi)^4}, \tag{6.40}$$

$$J_3 = \pi^2 \Gamma(\epsilon) \frac{(-m^2)}{(-2)(2\pi)^4} \frac{1}{3} (3 - 2z), \tag{6.41}$$

$$J_4 = \pi^2 \Gamma(\epsilon) \frac{1}{6(2\pi)^4}, \tag{6.42}$$

$$J_7 = \pi^2 \Gamma(\epsilon) \frac{1}{5(2\pi)^4}, \tag{6.43}$$

$$J_8 = \pi^2 \Gamma(\epsilon) \frac{(-m^2)}{(-6)(2\pi)^4} \left(1 - \frac{3}{5} z \right) \tag{6.44}$$

e

$$J_9 = \pi^2 \Gamma(\epsilon) \frac{m^4}{8(2\pi)^4} \frac{1}{15} (15 - 20z + 8z^2), \tag{6.45}$$

já expandidos em torno de $d \rightarrow 4$, sendo $\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma$, na qual Γ é a função gama de Euler, $\epsilon = 0^+$, γ a constante de Euler-Mascheroni⁸ e $z = p^2/4m^2$. Observa-se que não existem os correspondentes J_5 e J_6 pois as componentes que deveriam dar origem a esses termos de divergência têm a forma $p^\alpha p^\beta p^\mu$, estando esses ausentes no resultado (6.38) por consequências puramente matemáticas na tomada do traço do produto de dois vértices de interação *MDO*-gráviton.

⁸ Constante definida pela primeira vez pelo matemático Leonhard Euler (1740), podendo ser expressa como $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$ tendo as primeiras aproximações decimais da série: $\gamma = 0,5772156\dots$ Não foi provado se γ é algébrico, transcendente ou até irracional (COURANT; JOHN; GOLDBERG, 1974).

Como pode ser notado no Apêndice (E), em junção com o resultado proferido na equação (6.38), a resolução analítica para o primeiro tensor de polarização se mostrou um tanto quanto extensa e trabalhosa. Contudo, a aplicação dos chamados operadores de Barnes–Rivers a esse contexto traz uma solução inteiramente processada pelo FeynCalc, além de mais compacta.

Sabe-se que o propagador do gráviton (6.34) é simétrico entre a combinação de índices $(\mu\nu)$ - $(\alpha\beta)$ e antissimétrico na combinação de seus pares. Barnes e Rivers mostraram a existência de um conjunto completo de operadores que abrangem as simetrias mencionadas, sendo esses definidos no espaço dos *momentum* por Rivers (1964), Accioly et al. (2000)

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^0 = \frac{1}{3}\Theta_{\mu\nu}\Theta_{\alpha\beta}, \quad (6.46)$$

$$\bar{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}^0 = \omega_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta}, \quad (6.47)$$

$$\bar{\bar{P}}_{\mu\nu,\alpha\beta}^0 = \Theta_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\mu\nu}\Theta_{\alpha\beta}, \quad (6.48)$$

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^1 = \frac{1}{2}(\Theta_{\mu\alpha}\omega_{\nu\beta} + \Theta_{\mu\beta}\omega_{\nu\alpha} + \Theta_{\nu\alpha}\omega_{\mu\beta} + \Theta_{\nu\beta}\omega_{\mu\alpha}), \quad (6.49)$$

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^2 = \frac{1}{2}(\Theta_{\mu\alpha}\Theta_{\nu\beta} + \Theta_{\mu\beta}\Theta_{\nu\alpha}) - \frac{1}{3}\Theta_{\mu\nu}\Theta_{\alpha\beta}, \quad (6.50)$$

em que $\Theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ são os respectivos operadores de projeção longitudinal e transversal, denotados como

$$\Theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad (6.51)$$

para grávitons não massivos de momento k_μ . Tais operadores de projeção satisfazem as relações:

$$\Theta_{\mu\alpha}\Theta_{\nu}^{\alpha} = \Theta_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\alpha}\omega_{\nu}^{\alpha} = \omega_{\mu\nu}, \quad \Theta_{\mu\alpha}\omega_{\nu}^{\alpha} = 0. \quad (6.52)$$

A coleção dos quatro elementos $\{P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0\}$ consiste em um conjunto completo de operadores de projeção para tensores simétricos de segunda ordem. São idempotentes, mutuamente ortogonais e satisfazem a relação de completude (ACCIOLY et al., 2000). A partir da própria definição do conjunto de operadores $\{P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0, \bar{\bar{P}}^0\}$, dados em função dos operadores de projeção do gráviton (6.51), pode-se obter

$$\frac{1}{2}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}) = [P^1 + P^2 + P^0 + \bar{P}^0]_{\mu\nu,\alpha\beta}, \quad (6.53)$$

$$\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} = [3P^0 + \bar{P}^0 + \bar{\bar{P}}^0]_{\mu\nu,\alpha\beta}, \quad (6.54)$$

$$\eta_{\mu\alpha}k_\nu k_\beta + \eta_{\mu\beta}k_\nu k_\alpha + \eta_{\nu\alpha}k_\mu k_\beta + \eta_{\nu\beta}k_\mu k_\alpha = k^2[2P^1 + 4\bar{P}^0]_{\mu\nu,\alpha\beta}, \quad (6.55)$$

$$\eta_{\mu\nu}k_\alpha k_\beta + \eta_{\alpha\beta}k_\mu k_\nu = k^2[2\bar{P}^0 + \bar{\bar{P}}^0]_{\mu\nu,\alpha\beta}, \quad (6.56)$$

$$k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta = k^4 \bar{P}^0_{\mu\nu,\alpha\beta}. \quad (6.57)$$

É possível perceber que parte dos elementos contidos no lado esquerdo das equações (6.53)-(6.57) se assemelham com as combinações métricas-métricas ou métricas-momentos presentes na equação do tensor de polarização (6.38), em termos de um gráviton com momento p . Isso é um informativo prévio de que tensores de polarização para correção do propagador do gráviton a um *loop* podem ser escritos em termos dos operadores de Barnes-Rivers.

Diante desse conceito apresentado e em posse dos operadores de Barnes-Rivers (6.46)-(6.50), o tensor de polarização (a) (6.36) e sua soma com (b) (6.37) são computados diretamente pelo FeynCalc 9.0 (SHTABOVENKO; MERTIG; ORELLANA, 2016), sendo expressos por:

$$\begin{aligned} \Pi_{(a)}^{\mu\nu,\alpha\beta}(p) &= \frac{\kappa^2}{\pi^2\epsilon} \left[\left(\frac{m^4}{2 \cdot 16} - \frac{8m^2p^2}{3 \cdot 16} \right) P^{0\mu\nu,\alpha\beta} + \left(-\frac{m^4}{2 \cdot 16} \right) \bar{P}^{0\mu\nu,\alpha\beta} + \left(\frac{m^4}{2 \cdot 16} \right) \bar{\bar{P}}^{0\mu\nu,\alpha\beta} \right. \\ &+ \left. \left(-\frac{m^4}{16} - \frac{m^2p^2}{16} \right) P^{1\mu\nu,\alpha\beta} + \left(-\frac{5m^2p^2}{3 \cdot 8} - \frac{m^4}{16} + \frac{3p^4}{10 \cdot 16} \right) P^{2\mu\nu,\alpha\beta} \right] \end{aligned} \quad (6.58)$$

e

$$\begin{aligned} \Pi_{(a)+(b)}^{\mu\nu,\alpha\beta} &= \frac{\kappa^2}{16\pi^2\epsilon} \left[- (m^4 - 2m^2p^2) P^{0\mu\nu,\alpha\beta} + (m^4) \bar{P}^{0\mu\nu,\alpha\beta} - (m^4) \bar{\bar{P}}^{0\mu\nu,\alpha\beta} \right. \\ &+ \left. (2m^4 + m^2p^2) P^{1\mu\nu,\alpha\beta} + (2m^4 + 2m^2p^2) P^{2\mu\nu,\alpha\beta} \right], \end{aligned} \quad (6.59)$$

respectivamente.

Agora vamos focar no termo de *tadpole*⁹ e sua correspondente contribuição. É preciso, antes de tudo, mencionar que no arcabouço da TQC, um *tadpole* é um diagrama de Feynman de um *loop* com uma "perna externa" que contribui para uma função de correlação de um ponto, ou seja, o valor esperado de vácuo do campo analisado. Para muitas teorias não massivas, esses diagramas desaparecem na regularização dimensional¹⁰. Portanto, correções de *tadpoles* são necessárias se o campo externo correspondente tiver um valor esperado de vácuo diferente de zero, como o campo de Higgs (ROJAS, 2015).

O termo de *tadpole* associado ao propagador do gráviton devido à função de correção pelo férmion *MDO* é elucidado na Figura 8.

Sua parcela divergente é simplesmente dada por

$$W_{\mu\nu} = -\kappa \frac{m^4}{16\pi^2\epsilon} \eta_{\mu\nu}, \quad (6.60)$$

⁹ Tradução literal: girino. Justamente pelo seu formato característico. Os diagramas de Feynman com a forma de *tadpole* foram utilizados nos anos de 1960 pela primeira vez. Um dos pioneiros foi Abdus (SALAM, 1961) mas, o mesmo não assumiu a autoria do nome para esse diagrama. Posteriormente, os físicos Sidney Coleman e Glashow (1964) aplicaram *tadpoles* para explicar a quebra de simetria presente na interação forte, durante meados dos anos 1960.

¹⁰ Por análise dimensional e pela ausência de qualquer escala de massa inerente na integração do *loop*.

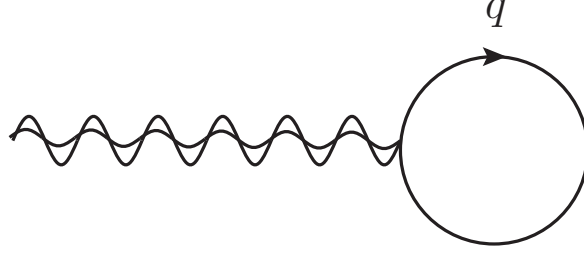


Figura 8 – Diagrama do termo de *tadpole* para o propagador do gráviton. Fonte: Produção própria do autor.

extraída a partir da integração

$$\int \frac{d^d q q^\mu q^\nu}{q^2 - m^2} = \frac{i\pi^2 m^4}{4\epsilon} \eta^{\mu\nu} + \text{termos finitos}, \quad (6.61)$$

para o propagador e o *loop* externo a esse, respectivamente.

Sabe-se que o funcional gerador para o gráviton $Z[g_{\alpha\beta}] = \int d[h_{\alpha\beta}] e^{i \int d^4 x \mathcal{L}}$ é invariante baixo uma transformação usual de coordenadas na forma $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$. Essa invariância é dada por

$$\delta Z = \int d^4 x \frac{\delta Z}{\delta g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} = \int d^4 x \hat{A}_{\alpha\beta\lambda} \frac{\delta Z}{\delta h_{\alpha\beta}} = 0, \quad (6.62)$$

segundo Kiefer (2007), que por meio de uma integração por partes, garante-se o operador

$$\hat{A}_{\alpha\beta\lambda} = -\eta_{\alpha\lambda} \partial_\beta - \kappa \left(h_{\alpha\lambda} \partial_\beta + \partial_\beta h_{\alpha\lambda} - \frac{1}{2} \partial_\lambda h_{\alpha\beta} \right). \quad (6.63)$$

Em posse dessa análise, tomando-se a derivada funcional de $Z[g_{\alpha\beta}]$ com respeito a $h_{\alpha\beta}$ e convertendo o resultado para o espaço dos *momentum*, com o uso das identidades de Barnes-Rivers,

$$p^\mu P_{\mu\nu,\alpha\beta}^2 = p^\mu P_{\mu\nu,\alpha\beta}^0 = 0, \quad (6.64)$$

$$p^\mu P_{\mu\nu,\alpha\beta}^1 = \frac{1}{2} (\Theta_{\nu\alpha} p_\beta + \Theta_{\nu\beta} p_\alpha), \quad (6.65)$$

$$p^\mu \bar{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}^0 = p_\nu \Theta_{\alpha\beta}, \quad (6.66)$$

$$p^\mu \bar{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}^0 = p_\nu \omega_{\alpha\beta}, \quad (6.67)$$

computamos, auxiliado pelo FeynCalc 9.0 (SHTABOVENKO; MERTIG; ORELLANA, 2016), a identidade de Ward para essas correções a um *loop* devido ao férmion *MDO*:

$$p_\mu \Pi^{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{\kappa}{2} (\eta^{\nu\alpha} p_\mu W^{\beta\mu} + \eta^{\nu\beta} p_\mu W^{\alpha\mu} - p^\nu W^{\alpha\beta}) = 0. \quad (6.68)$$

Sob uma verificação de consistência importante, observamos que a equação (6.68) é realmente satisfeita por $\Pi^{\mu\nu,\alpha\beta} = \Pi_{(a)}^{\mu\nu,\alpha\beta} + \Pi_{(b)}^{\mu\nu,\alpha\beta}$ (6.59) junto com a contribuição do termo de *tadpole* apresentada na equação (6.60), como esperado.

Além disso, notamos que se pode adicionar um termo cosmológico à densidade de lagrangiana original, presente na ação (6.1), assim como realizado em Capper (1975),

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \Lambda\sqrt{-g}, \quad (6.69)$$

a fim de que o termo de constante cosmológica Λ possa cancelar a contribuição do *tadpole*. A densidade de lagrangiana (6.69), em primeira ordem de κ , leva ao reconhecimento de que a parcela oriunda de Λ implica em $\left[\Lambda\sqrt{-g} \Rightarrow \kappa\frac{m^4}{8\pi^2\epsilon}\right]$ que, por sua vez, é um contratermo ao *tadpole* para a auto-energia do gráviton.

Finalizamos esta seção fazendo duas advertências importantes. Certamente, em ordens superiores de κ , outros termos podem aparecer, modificando profundamente a auto-energia do gráviton, mas não exploraremos esses termos nesta tese. Além disso, como está claro, temos uma teoria com mais termos de momento no propagador do que no caso fermiônico de Dirac. Esse fato pode levar a alguma preocupação com a unitariedade, no sentido de que a teoria em questão poderia ser encarada, portanto, como uma teoria fermiônica de "dimensão superior". Observamos, no entanto, que os férmions *MDO* também são limitados pelas equações subsidiárias de primeira ordem, como elucidado nas equações (3.36)-(3.39) de Ahluwalia (2017b), não dinâmica no presente caso que, por hipótese, poderia auxiliar a fornecer uma fatoração de modo a garantir (ou preservar) a unitariedade, via Regras de Cutkoski.

6.3 AMPLITUDE DE ESPALHAMENTO E POTENCIAL GRAVITACIONAL *MDO*-GRÁVITON

O cálculo adjacente a um processo de espalhamento pode ser realizado associando os respectivos diagramas de Feynman em uma determinada ordem de perturbação. Tal procedimento, como é bem conhecido na TQC (PESKIN; SCHROEDER, 1995), reproduz os resultados da Mecânica Quântica Relativística, onde a interação entre partículas é descrita por um potencial $V(\mathbf{x})$. Como nosso interesse aqui está na análise do conteúdo físico codificado na interação entre os férmions *MDO* e o gráviton, estudaremos nesta seção o limite não relativístico de tal interação, após realizar os cálculos da amplitude de espalhamento¹¹ relativística completa de dois férmions *MDO* mediados por um gráviton a nível de árvore.

A relação entre o potencial $V(\mathbf{x})$ e a amplitude de espalhamento \mathcal{M} é dado por

$$V(\mathbf{x}) = \frac{-i}{2E_1} \frac{1}{2E_2} \int \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^3} (i\mathcal{M}(\mathbf{r})) e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{x}}, \quad (6.70)$$

em que \mathbf{r} representa a troca de momento do gráviton, com E_1 e E_2 sendo as trocas de energias das partículas de matéria envolvidas no processo. A amplitude de espalhamento $\mathcal{M}(\mathbf{r})$ é designada por

¹¹ Partindo da definição e dos princípios da Mecânica Quântica, a amplitude de espalhamento é a mensuração de probabilidade entre a onda esférica de saída em relação à onda plana de entrada em um dado processo de espalhamento de estado estacionário da interação entre partículas. Dito de forma mais simplificada, é uma amplitude de probabilidade de um certo processo com interação (ZETTILI, 2003, p. 600-601).

$$\mathcal{M} = \frac{1}{m^2} \left(\overset{\neg}{\lambda}_\xi^{S/A}(k) V^{\alpha\beta} \lambda_\xi^{S/A}(p) \mathcal{G}_{\mu\nu\alpha\beta} \overset{\neg}{\lambda}_\xi^{S/A}(k') V^{\mu\nu} \lambda_\xi^{S/A}(p') \right), \quad (6.71)$$

em que m é a massa do férmion *MDO* e os pares $(V^{\alpha\beta}, V^{\mu\nu})$ são os vértices de interação *MDO*-gráviton em dois pontos do processo, mediados pelo gráviton. As demais quantidades que compõem a amplitude de espalhamento são expressas por:

$$\overset{\neg}{\lambda}_\xi^S(k) = \tilde{\lambda}_\xi^S(k) \mathcal{A}, \quad \overset{\neg}{\lambda}_\xi^A(k) = \tilde{\lambda}_\xi^A(k) \mathcal{B}, \quad (6.72)$$

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2r^2} (\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\beta\mu} \eta_{\alpha\nu} - \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu}). \quad (6.73)$$

O termo $\mathcal{G}_{\alpha\beta\mu\nu}$ é o propagador do gráviton no espaço dos *momentum*, já apresentado na equação (6.34), e aqui omitido o fator infinitesimal ϵ . A sua construção e fixação de *gauge* estão apresentadas, também, em Capper, Leibbrandt e Medrano (1973). O índice inferior ξ que aparece em (6.71)-(6.72), nos espinores usuais e duais, representa as possibilidades de helicidade dos espinores $\{\pm, \mp\}$. Os operadores \mathcal{A} e \mathcal{B} são escritos em termos da redefinição do espinor dual, necessária para que a teoria seja invariante de Lorentz, como visto na Seção 3.3. Isso pode ser verificado analisando as somas de *spin* no limite de $\tau \rightarrow 1$, embutido implicitamente nesses mesmos operadores. Lembrando que as relações de ortonormalidade também são mantidas intactas, assim como era na definição original do espinor *Elko*, de acordo com Ahluwalia (2017b). É importante elucidar que esse parâmetro, bem como seu limite, como veremos, não desempenha nenhum papel em nossa análise, pela forma que está composta na definição da amplitude de probabilidade. Além disso, na amplitude (6.71), deve-se escolher qual espinor usual/dual do *MDO* prescrever. Optamos pelo uso dos espinores autoconjugados de carga (*S*). O resultado final seria o mesmo, caso estivéssemos optado em usar os espinores anti-autoconjugados de carga (*A*).

O gráfico de Feynman associado ao espalhamento $\lambda_\xi^S(p) \lambda_\xi^S(p') \rightarrow \overset{\neg}{\lambda}_\xi^S(k) \overset{\neg}{\lambda}_\xi^S(k')$, mediado por um gráviton, pode ser visto na Figura 9.

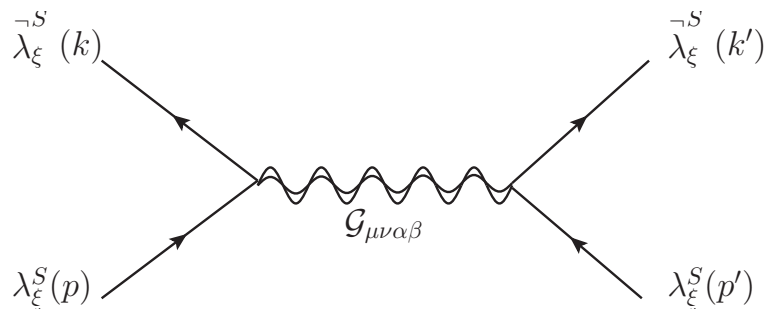


Figura 9 – Diagrama de Feynman para férmions *MDO* com espalhamento mediado por um gráviton. Fonte: Produção própria do autor.

Uma vez escolhido os espinores autoconjugados, a amplitude de espalhamento dada pela equação (6.71) é reescrita como

$$\mathcal{M} = \frac{1}{m^2} \left(\tilde{\lambda}_\xi^S(k) \mathcal{A} V^{\alpha\beta} \lambda_\xi^S(p) \mathcal{G}_{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{\lambda}_\xi^S(k') \mathcal{A} V^{\mu\nu} \lambda_\xi^S(p') \right), \quad (6.74)$$

em que $\tilde{\lambda}_\xi^{-S}(k) \mapsto \tilde{\lambda}_\xi^S(k)\mathcal{A}$, sendo o operador $\mathcal{A} = 2[(\mathbb{1} - \tau\mathcal{G})/(1 - \tau^2)]$, na qual $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\varphi)$ é uma matriz 4×4 constituída por elementos de função angular azimutal presente na soma de *spin* da antiga forma do espinor *Elko*. Adotando-se, ainda, uma notação mais compacta para o vértice de interação¹², temos a descrição

$$\begin{aligned} V^{\mu\nu} &= \frac{\kappa}{16} \underbrace{[4(k' \cdot p' - m^2)\eta^{\mu\nu} - 4(k'^\mu p'^\nu + k'^\nu p'^\mu)]}_{E^{\mu\nu}} + \underbrace{[\gamma^\mu, \not{p}](p' + k')^\nu + [\gamma^\nu, \not{p}](p' + k')^\mu}_{M^{\mu\nu}} \\ &= \frac{\kappa}{16} (E^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (6.75)$$

válida da mesma forma para os momentos de entrada em $V^{\alpha\beta}$. Os símbolos $E^{\mu\nu}$ e $M^{\mu\nu}$ representam os setores à lá “escalar” (com uma matriz de identidade implícita) e fermiônico, respectivamente, compondo o vértice *MDO-gráviton*.

Em posse da compactação (6.75), a amplitude de espalhamento (6.74) torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{\kappa^2}{256m^2} \left(\tilde{\lambda}_\xi^S(k) E^{\alpha\beta} \lambda_\xi^S(p) + \tilde{\lambda}_\xi^S(k) \cdot 2 \left(\frac{\mathbb{1} - \tau\mathcal{G}}{1 - \tau^2} \right) \Bigg|_{\tau} M^{\alpha\beta} \lambda_\xi^S(p) \right) \\ &\cdot \mathcal{G}_{\mu\nu\alpha\beta} \left(\tilde{\lambda}_\xi^S(k') E^{\mu\nu} \lambda_\xi^S(p') + \tilde{\lambda}_\xi^S(k') \cdot 2 \left(\frac{\mathbb{1} - \tau\mathcal{G}}{1 - \tau^2} \right) \Bigg|_{\tau} M^{\mu\nu} \lambda_\xi^S(p') \right), \end{aligned} \quad (6.76)$$

sendo admitido o fato de que $\mathcal{A}E^{\alpha\beta}\lambda_\xi^S(p) \mapsto E^{\alpha\beta}\mathcal{A}\lambda_\xi^S(p) = E^{\alpha\beta}\lambda_\xi^S(p)$, por $E^{\alpha\beta}$ ser uma quantidade escalar acompanhado de uma matriz identidade e pela propriedade do operador \mathcal{A} ser tal que $\mathcal{A}\lambda_\xi^S(p) = \lambda_\xi^S(p)$, já que $\mathcal{G}\lambda_\xi^S(p) = \lambda_\xi^S(p)$. A mesma explicação ocorre para a aplicação $\mathcal{A}E^{\mu\nu}\lambda_\xi^S(p)$. A indexação $|_{\tau}$ à direita do operador \mathcal{A} , explicitamente atuando na matriz $M^{\alpha\beta}$ (e $M^{\mu\nu}$), é uma alusão de que ao fim do dia será tomado o limite de $\tau \mapsto 1$.

É possível notar que a matriz \mathcal{G} atua sobre as parcelas matriciais fermiônica $M^{\alpha\beta}$ (e $M^{\mu\nu}$) na equação (6.76). Essas parcelas são estruturas compostas pela comutação de matrizes gama de Dirac, na forma $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Assim, atentemos para a propriedade

$$\mathcal{G}\gamma^\mu\gamma^\nu = \gamma^\mu\gamma^\nu\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}M^{\mu\nu} = M^{\mu\nu}\mathcal{G}, \quad (6.77)$$

sendo válido lembrar, também, que $\mathcal{G}\lambda_\xi^S(p) = \lambda_\xi^S(p)$. Munido da propriedade acima, seguimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{\kappa^2}{256m^2} \left(\tilde{\lambda}_\xi^S(k) E^{\alpha\beta} \lambda_\xi^S(p) + \left[\frac{2}{1 - \tau^2} - \frac{2\tau}{1 - \tau^2} \right] \Bigg|_{\tau \rightarrow 1} \tilde{\lambda}_\xi^S(k) M^{\alpha\beta} \lambda_\xi^S(p) \right) \\ &\cdot \mathcal{G}_{\mu\nu\alpha\beta} \left(\tilde{\lambda}_\xi^S(k') E^{\mu\nu} \lambda_\xi^S(p') + \left[\frac{2}{1 - \tau^2} - \frac{2\tau}{1 - \tau^2} \right] \Bigg|_{\tau \rightarrow 1} \tilde{\lambda}_\xi^S(k') M^{\mu\nu} \lambda_\xi^S(p') \right). \end{aligned} \quad (6.78)$$

¹² Para uma enfatização de simetria mais precisa no processo de espalhamento, inserimos um fator global 1/2 na ação do espinor *MDO*, expressa via equação (6.1). Por consequência, o vértice de interação passa a ter esse fator global acrescido em sua forma original, apresentada na equação (6.28).

Tomando-se o limite $\tau \rightarrow 1$, a parcela entre colchetes assume o valor [1] e assim temos

$$\mathcal{M} = \frac{\kappa^2}{256m^2} \left(\tilde{\lambda}_\xi^S(k) E^{\alpha\beta} \lambda_\xi^S(p) + \tilde{\lambda}_\xi^S(k) M^{\alpha\beta} \lambda_\xi^S(p) \right) \mathcal{G}_{\mu\nu\alpha\beta} \left(\tilde{\lambda}_\xi^S(k') E^{\mu\nu} \lambda_\xi^S(p') + \tilde{\lambda}_\xi^S(k') M^{\mu\nu} \lambda_\xi^S(p') \right). \quad (6.79)$$

Após contrair o propagador do gráviton (6.73) com um dos vértices e substituir explicitamente o par $(E^{\alpha\beta}, M^{\alpha\beta})$ presente em (6.75) (veja a demonstração no Apêndice (F)), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \mathcal{C} \left[64m^2(4m^2(p' \cdot k') - 4m^4 + 2(k \cdot k')(p \cdot p')) + 16m^3 \tilde{\lambda}_{\{+, -\}}^S(k) [k' + p', \not{r}] \lambda_{\{+, -\}}^S(p') \right. \\ & - 16mk \cdot (k' + p') \tilde{\lambda}_{\{+, -\}}^S(k') [\not{p}, \not{r}] \lambda_{\{+, -\}}^S(p') - 16mp \cdot (k' + p') \tilde{\lambda}_{\{+, -\}}^S(k') [k, \not{r}] \lambda_{\{+, -\}}^S(p') \\ & + 16m[m^2 \tilde{\lambda}_{\{+, -\}}^S(k) [k' + p', \not{r}] \lambda_{\{+, -\}}^S(p) - p' \cdot (k + p) \tilde{\lambda}_{\{+, -\}}^S(k) [k', \not{r}] \lambda_{\{+, -\}}^S(p) \\ & - k' \cdot (k + p) \tilde{\lambda}_{\{+, -\}}^S(k) [\not{p}', \not{r}] \lambda_{\{+, -\}}^S(p)] + 2\tilde{\lambda}_{\{+, -\}}^S(k) [\gamma^\alpha, \not{r}] \lambda_{\{+, -\}}^S(p) \tilde{\lambda}_{\{+, -\}}^S(k') \\ & \left. \times [\gamma_\alpha, \not{r}](p' + k') \cdot (p + k) \lambda_{\{+, -\}}^S(p') \right], \quad (6.80) \end{aligned}$$

em que $\mathcal{C} = \kappa^2/(256m^2r^2)$, sendo r o momento do gráviton.

Claramente, a amplitude de probabilidade expressa pela equação (6.80) está descrita de forma generalizada, com todas as trocas de energia e momento linear possíveis, em nível de árvore, para um processo de espalhamento *MDO*-gráviton. Agora, vamos considerar um espalhamento no referencial do centro de massa para nos aproximarmos de uma melhor simulação de detecção experimental, caso isso fosse possível. No referencial de centro de massa, tem-se a condição $r^0 = 0$. Definimos os momentos para os férmions e para o gráviton presentes na interação como $p^\mu = (E, 0, p, 0)$, $k^\mu = (E, p \sin \theta, p \cos \theta, 0)$, $r^\mu = p^\mu - k^\mu = (0, -p \sin \theta, p - p \cos \theta, 0)$, $p'^\mu = (E, 0, -p, 0)$ e $k'^\mu = (E, -p \sin \theta, -p \cos \theta, 0)$. Assim, dado essas condições e após o auxílio do programa MAPLE 13 (MAPLE, 2016) em paralelo com algumas manipulações analíticas, chegamos à amplitude de espalhamento de momento arbitrário no referencial de centro de massa para o processo *MDO*-gráviton:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \mathcal{C} \left\{ -256m^6 + 128m^2 E^2 (E^2 + 2p^2 + 2m^2) + 128m^2 p^2 (p^2 - 2m^2 \cos \theta) \right. \\ & + \frac{256m}{E + m} [(E + m)^2 - p^2] (2E^2 - m^2 + p^2 (1 + \cos \theta)) [-Ep \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \sin \theta] \\ & \left. - \frac{8(4E^2 + p^2)}{(E + m)^2} [(E + m)^2 - p^2]^2 [4p^2 (\cos \theta - 1) \cos^2(\theta/2) \sin^2(\theta/2) (1 + \cos \theta)] \right\}, \quad (6.81) \end{aligned}$$

em que $r^2 = (p^\mu - k^\mu)(p_\mu - k_\mu) = 2p^2(\cos \theta - 1)$ no fator \mathcal{C} . Durante o cálculo, foi levado em consideração as estruturas explícitas do férmion *MDO* em coordenadas esféricas (veja Apêndice (G)) e tomado o limite do ângulo azimutal $\varphi \rightarrow 0$, já que tal parâmetro se anula no referencial adotado.

Com o propósito de analisar a validade do potencial $V(\mathbf{x})$ a baixas energias, é útil realizarmos o limite não relativístico nesse processo. Esse limite corresponde em tomar $(\mathbf{p} \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0)$ na amplitude de espalhamento, já que $E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2 = m^2(1 + \mathbf{p}^2/m^2)$ e $\mathbf{p}^2 \ll m^2 \Rightarrow E \simeq m$. Sendo, portanto, $p^\mu \simeq (m, \mathbf{0})$. Tal procedimento equivale a $\mathcal{M}_{NR} = -\kappa^2(128m^6/256m^2r^2)$, já que $r^2 = r_0^2 - \mathbf{r}^2 \simeq -\mathbf{r}^2$, com o subscrito *NR* designando “Não-Relativístico”. Ocorre que nesse limite a

amplitude final contém uma contribuição oriunda apenas do setor à lá “escalar” contido no vértice de interação. Desse modo, vemos que $\mathcal{M}_{NR} = -\kappa^2(128m^6/256m^2\mathbf{r}^2) = -\kappa^2m^4/(2\mathbf{r}^2) \mapsto i\mathcal{M}_{NR} = -i8\pi Gm^4/\mathbf{r}^2$, já que $\kappa^2 = 16\pi G$. Agora, por meio da equação (6.70), temos

$$V_{NR}(\mathbf{x}) = \frac{-i}{2E_p} \frac{1}{2E_{k'}} \int \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^3} (i\mathcal{M}_{NR})(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{x}} = -\frac{1}{4m^2} \int \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^3} \left(\frac{8\pi Gm^4}{\mathbf{r}^2} \right) e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{x}}, \quad (6.82)$$

que reescrita em coordenadas esféricas resulta em

$$V_{NR}(R) = -2\pi Gm^2 \int \frac{\text{sen}(\theta)d\theta d\varphi d\mathbf{r}}{(2\pi)^3} e^{i|\mathbf{r}||\mathbf{R}|\cos(\theta)} = -Gm^2 \cdot \frac{1}{R} \text{Sgn}(R), \quad (6.83)$$

em que $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ e $\text{Sgn}(R) = \pm R$. É importante observar que mesmo o momento do gráviton estando escrito em termos das diferenças dos momentos dos férmions de dimensão de massa um no limite não relativístico, este foi absorvido ao fim da integração. Considerando $R \in [0, \infty)$, obtemos, finalmente, o potencial no regime não relativístico¹³ do processo de interação MDO-gráviton:

$$V_{NR}(R) = -G \frac{m^2}{R}, \quad (6.84)$$

que, por sua vez, reproduz a energia potencial gravitacional, e conseqüentemente o potencial gravitacional atrativo newtoniano. Este resultado pode ser encarado como um suporte adicional para a afirmação de que campos espinoriais de dimensão de massa um são candidatos à matéria escura atual. Isso porque o modelo cosmológico Λ CDM entende a matéria escura como fria (não termalizada e a baixas energias), não-bariônica e sem colisões, implicando que suas partículas interagem entre si e com outras partículas apenas por meio da gravidade, sendo essa realizada possivelmente a campo fraco, e constituindo cerca de 26,5% (TANABASHI; GROUP et al., 2019) da densidade de massa e energia do universo. Ademais, o fator Λ deste modelo corrobora, como visto na Seção 6.2, para que termos de *tadpole* sejam dissipados e, por conseguinte, permitem eliminar uma divergência a mais presente dentro da primeira ordem de correção a um *loop* da interação entre o férmion MDO e a gravidade.

¹³ A título de curiosidade, a derivação do potencial newtoniano da gravidade quântica linear foi realizada pela primeira vez por Bronstein Bronstein (1936).

7 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste último capítulo apresentamos as conclusões em relação às nossas contribuições, retomando, naturalmente, aos resultados originais outrora discutidos e com destaques para certos detalhes. Não obstante, algumas considerações e ideias para possíveis trabalhos futuros também são postos nos parágrafos seguintes, visto que, em nosso entendimento, a finalização de uma tese, embora configurando parte imprescindível para o doutoramento, nem sempre demarca um fim em si mesma.

Os capítulos 2, 3 e 4 constituem as sínteses das bases fundamentais para o entendimento conceitual das teorias relacionadas à teoria da Relatividade Geral, ao férmion de dimensão de massa um e ao gráviton, respectivamente. Peças elementares que alicerçaram os capítulos seguintes.

No Capítulo 5 apresentamos uma proposta investigativa para incorporação do férmion de dimensão de massa um e $spin-1/2$ à gravidade sob uma abordagem canônica. Iniciamos a primeira seção com a prescrição hamiltoniana da RG, através do formalismo *ADM* (ARNOWITT; DESER; MISNER, 1962), que folheia uma variedade tratável pseudo-Riemanniana munida de uma métrica física $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$, para um espaço-tempo globalmente hiperbólico, em hipersuperfícies de Cauchy Σ_t para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo, no molde $\mathcal{M} \simeq \mathbb{R} \times \Sigma$. Nessa formulação, a existência de duas formas fundamentais, representadas pela decomposição trimétrica e da curvatura extrínseca $(q_{\mu\nu}, K_{\mu\nu})$, em junção com a derivada covariante projetável D_μ na hipersuperfície, são responsáveis em caracterizar a chamada ação *ADM*, cuja transformação de Legendre sobre a densidade de lagrangiana desta resulta em vínculos geométricos hamiltonianos e de difeomorfismo associados à gravidade e que estabelecem a dita dinâmica da teoria sob ausência de matéria. Na seção subsequente, incorporamos efetivamente o férmion *MDO* à ação de Einstein-Hilbert. Em busca de maior completude via interação fermiônica e gravitacional, a parte geométrica devido à Einstein-Hilbert foi reescrita em termos de tetradas a uma extensão de Palatini-Holst (1996), que detém um campo dual à teoria gravitacional original. A parcela associada à constante de acoplamento entre o férmion e a gravidade foram reescritas de modo a conformar, futuramente, o comportamento de uma constante cosmológica. Realizando o mesmo processo de folheação, à luz da prescrição *ADM*, construímos uma ação que une a matéria escura *MDO* e a gravidade via Palatini-Holst em *ADM*-tetrada, vide equação (5.47), comportando a forma mais completa para uma análise hamiltoniana em termos do campo de matéria de interesse.

Partindo da análise em que o termo de Palatini-Holst recupera o escalar de Ricci para a ação original, onde este último possui uma hamiltoniana conhecida graças à prescrição canônica, nos debruçamos a investigar a densidade de hamiltoniana ligada ao férmion *MDO*. Após a devida transformação de Legendre para a densidade de lagrangiana do férmion em espaço curvo, conseguimos declarar a hamiltoniana em cenário de folheações Σ_t à lá *ADM*, que explicitou a componente hamiltoniana $\mathcal{H}_{\perp, \lambda, \bar{\lambda}}$ como a densidade de energia do campo fermiônico *MDO* ($T_{00} = \rho_{\lambda, \bar{\lambda}}$), que “flui” através da função *lapso*, ortogonal a Σ em um dado instante de tempo t fixo. E, a decomposição $\mathcal{H}_{a, \lambda, \bar{\lambda}}$ como uma densidade direcional de fluxo de energia em função das derivadas espaciais e das conexões de *spin* do campo espinorial de dimensão de massa um sob a representação $(J_{a, \lambda, \bar{\lambda}} \equiv q_a^b T_{bc} n^c)$, que se desloca através do vetor *shift* N^a tangencial a hipersuperfície Σ_t . Desse modo, obtivemos os vínculos

hamiltoniano e de difeomorfismo devido à incorporação da matéria *MDO* à ação *ADM*, expressos pelas equações (5.65)-(5.66), que elucidam três ingredientes para a dinâmica canônica, a saber: gravidade, matéria escura e energia escura, visto que esta última pode ser interpretada através da constante cosmológica em modelos $\Lambda(t)$, agora codificada no termo $-8\pi G\xi \bar{\lambda} \lambda$, sendo $\bar{\lambda} \lambda$ um invariante ortonormal para todo e qualquer observável, $\bar{\lambda}(x)\lambda(x') = \pm 2m\delta(x-x')$, ditado para as mesmas helicidades do férmion em sua forma autoconjugado (*S*) e anti-autoconjugado (*A*), respectivamente. O papel desse acoplamento devido a ξ pode, ainda, ser interpretado como parcela contribuinte em teorias escalares-tensoriais tipo Brans-Dicke (SJ, 2021). Percebemos, ainda, que a densidade de energia $\rho_{\lambda, \bar{\lambda}}$ proveniente de $\mathcal{H}_{\perp, \lambda, \bar{\lambda}}$ tem forma similar ao esperado para um campo escalar (ρ_ϕ) no mesmo cenário, diferentemente da estrutura observada para fluxo direcional de energia entre ambos os campos de matéria, J_a . Cabe observar que essa construção relativa aos vínculos foi realizada sobre uma métrica geral $g_{\mu\nu} = q_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$, podendo assim ser aplicada a diversos cenários de interesses cosmológicos como FLRW, *black holes*, *wormholes* entre outros.

Examinando conceitualmente o programa de Dirac (1951), a fim de obter uma dinâmica de quantização à lá equações de Wheeler-DeWitt ($\hat{\mathcal{H}}_{\perp, ADM}\Psi = 0, \hat{\mathcal{H}}_{a, ADM}\Psi = 0$), aplicável aos operadores adicionais de vínculos, devido a presença do férmion *MDO* ($\hat{\mathcal{H}}_{\perp, \lambda, \bar{\lambda}}, \hat{\mathcal{H}}_{a, \lambda, \bar{\lambda}}$), nos deparamos com dois problemas: além de desconhecer como tais operadores de matéria atuariam em um hipotético espaço de Hilbert físico \mathcal{H}_f munido de funcionais de onda $\Psi[q_{ab}(x)]$, teríamos, ainda, um obstáculo para caracterização de suas respectivas soluções. Para contornar tal situação, uma possível hipótese levantada para investigações futuras seria recorrer às novas variáveis canônicas de Ashtekar ($E_i^a(x), A_b^j(x')$), que hoje sustentam as bases da moderna teoria de quantização canônica da gravidade (*LQG*)¹, e utilizá-las diretamente sobre a ação (5.47) em busca dos novos vínculos *MDO*-gravidade que sejam potenciais à quantização.

Ainda no âmbito da natureza *MDO*-gravidade, no Capítulo 6 investigamos a interação entre o campo fermiônico de *spin*-1/2 e dimensão de massa e a gravidade sob a óptica covariante. Preliminarmente, partimos da densidade de lagrangiana do respectivo férmion em espaço curvo e acomodamos esta em uma métrica fixa de *background* minkowskiano sob a perturbação: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$, sendo $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(x)$ o campo associado ao bóson gráviton não massivo. Desenvolvemos a densidade de lagrangiana na primeira ordem de κ e transpomos ela no espaço dos *momentum*. Essa prescrição foi necessária para tomar sua variação com relação aos campos de matéria envolvido ($\bar{\lambda}(q), \lambda(p)$) e assim chegar ao vértice de interação, em nível de árvore, entre o *MDO* e o gráviton $V_{\alpha\beta}(q, p, r)$, expresso pela equação (6.28). Interessantemente, observamos que a configuração desse vértice é um “misto” entre os vértices de interação escalar-gráviton e Dirac-gráviton. Essa peculiaridade ocorre de forma recorrente em outros trabalhos presentes na literatura para esse férmion escuro e deve-se, exclusivamente, ao fato dele possuir uma dinâmica tipo Klein-Gordon, embora tenha uma estrutura espinorial. Na sequência, aplicamos o momento do bóson de *spin*-2 intermediador sobre o vértice *MDO*-gráviton e encontramos a identidade de Ward-Takahashi W_β (6.33) nesse caso específico que, de certo modo, nos diz o comportamento da corrente à nível quântico da teoria em $\kappa^{(1)}$.

¹ Uma teoria quântica da gravitação baseada numa formulação geométrica, cuja pretensão é unir a Mecânica Quântica e a Relatividade Geral, incorporando a matéria do Modelo Padrão ao arcabouço estabelecido para o caso da gravidade quântica pura.

Com o intuito de entender a correção sobre o propagador relacionado à auto-energia do gráviton, através do férmion *MDO*, uma análise a um *loop* no propagador do bóson foi realizada. Os termos de divergência para o tensor de polarização $\Pi_{(a)}^{\mu\nu,\alpha\beta}(p)$ emergiram de nossa solução analítica, como se nota pela equação (6.38). Levando em conta que era necessário obter o tensor de polarização de dois grávitons, a resolução analítica se tornou um tanto quanto trabalhosa e uma possível saída foi reescrever as combinações métricas-métricas e métricas-momentos via os chamados operadores de Barner-Rivers (1964) que, com o auxílio do programa FeynCalc 9.0, nos permitiu extrair a devida soma dos tensores de polarização $\Pi_{(a)+(b)}^{\mu\nu,\alpha\beta}(p)$ (6.59). Sob a mesma linha procedimental, o termo de divergência oriundo do *loop* de “perna externa” ao propagador do gráviton pela função de correlação do férmion *MDO*, chamado *tadpole* $W_{\mu\nu}$, foi obtido na equação (6.60). Isso nos permitiu identificar a identidade de Ward para as correções a um *loop* do bóson gravitacional devido ao férmion, configurado na equação (6.68). Ademais, reparamos, assim como Capper (1975), que o termo de constante cosmológica ($-\sqrt{-g}\Lambda$) incorporada à ação original do *MDO* em espaço curvo consegue reproduzir um termo análogo ao *tadpole* com sinal oposto, permitindo que ambos sejam auto-excludentes. Em outras palavras, a presença da constante cosmológica somada à densidade de lagrangiana do férmion elimina a contribuição de *tadpole* para a auto-energia do gráviton.

Como último tópico, estudamos a reação $\lambda_{\xi}^S(p)\lambda_{\xi}^S(p') \rightarrow \lambda_{\xi}^{-S}(k)\lambda_{\xi}^{-S}(k')$ (o resultado seria o mesmo se optássemos pelos espinores anti-autoconjugados (*A*)) mediada por um gráviton, com o propósito de obter a amplitude de espalhamento e observar o comportamento do potencial interagente associado. Nessa perspectiva, foi necessário utilizar diretamente as novas definições para o dual do campo espinorial *MDO* (AHLUWALLA, 2017b), com o atributo da τ -deformação. Atingimos, com isso, a amplitude de espalhamento arbitrária \mathcal{M} (6.80) e a amplitude para o referencial no centro de massa para o processo *MDO*-gráviton relativístico, como expresso na equação (6.81). Em uma aplicação direta, constatamos que no limite de baixas energias (6.84), o potencial newtoniano é alcançado, dando um suporte adicional para o candidato à matéria escura dentro do modelo cosmológico Λ CDM atual, visto que o objeto em questão torna-se frio (não relativístico), atrativo e autointeragente. Além disso, o próprio fator Λ do modelo já vem na linha contributiva para eliminação do termo de *tadpole*.

Nessa premissa covariante, duas advertências se fazem importantes: primeiramente, em ordens superiores de κ , outros termos aparecem e podem modificar consideravelmente a auto-energia do gráviton. Em segundo lugar, tal fato provoca alguma preocupação com a unitariedade da teoria, fazendo-a ser encarada até como uma teoria fermiônica de “dimensão superior”. No entanto, vale observar que os férmions *MDO* podem ser limitados pelas equações subsidiárias de primeira ordem, como elucidado nas equações (3.36)-(3.39) de Ahluwalia (2017b). Todavia, não exploramos essas consequências, ainda. Isso, por sua vez, abre espaço para estudos futuros.

Ressalta-se, portanto, que os capítulos 5 e 6 trazem elementos com nossas contribuições originais para a área de Física de Partículas e Campos, tendo como foco a interação entre o férmion de *spin*-1/2 dotado de dimensão de massa um e a gravidade. Observa-se que, nesse último capítulo citado, tivemos os resultados publicados (ROGERIO et al., 2019) no periódico *EPL (Europhysics Letters)*.

Finaliza-se esta tese.

“The very foundation of science is to keep the door open to doubt.” — Carlo Rovelli

REFERÊNCIAS

- ACCIOLY, A. et al. Algorithm for computing the propagator for higher derivative gravity theories. **Int. J. Theor. Phys.**, v. 39, p. 1599–1608, 2000.
- ADE, P. A. R. et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. **Astron. Astrophys.**, v. 594, p. A13, 2016.
- AHLUWALIA, D. **Mass dimension one fermions**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- AHLUWALIA, D.; JOHNSON, M.; GOLDMAN, T. Majorana-like $(j, 0) \oplus (0, j)$ representation spaces: Construction and physical interpretation. **Modern Physics Letters A**, World Scientific, v. 9, n. 05, p. 439–450, 1994.
- AHLUWALIA, D. V. Evading weinberg's no-go theorem to construct mass dimension one fermions: Constructing darkness. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 118, n. 6, p. 60001, 2017.
- AHLUWALIA, D. V. The theory of local mass dimension one fermions of spin one half. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, v. 27, n. 3, p. 2247–2285, 2017.
- AHLUWALIA, D. V.; GRUMILLER, D. Dark matter: A Spin one half fermion field with mass dimension one? **Phys. Rev. D**, v. 72, p. 067701, 2005.
- AHLUWALIA, D. V.; GRUMILLER, D. Spin half fermions with mass dimension one: Theory, phenomenology, and dark matter. **JCAP**, v. 07, p. 012, 2005.
- AHLUWALIA, D. V.; HORVATH, S. Very special relativity as relativity of dark matter: the elko connection. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2010, n. 11, p. 78, 2010.
- ALFARO, J. A sim (2) invariant dimensional regularization. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 772, p. 100–104, 2017.
- ALFARO, J.; RIVELLES, V. O. Very Special Relativity and Lorentz Violating Theories. **Phys. Lett. B**, v. 734, p. 239–244, 2014.
- ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. The dynamics of general relativity, gravitation: An introduction to current research. **Chap**, v. 7, p. 227–265, 1962.
- ARNOWITT, R. L.; DESER, S.; MISNER, C. W. Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity. **Phys. Rev.**, v. 116, p. 1322–1330, 1959.
- ASHTEKAR, A. New hamiltonian formulation of general relativity. **Physical Review D**, APS, v. 36, n. 6, p. 1587, 1987.
- BARATA, J. Notas para um curso de física-matemática, disponível em: <http://denebola.if.usp.br/~jbarata>. **Notas_de_aula/capitulos.html**, acessado em **Cap. 15**, 2021.
- BATEMAN, H. **Higher transcendental functions [volumes i-iii]**. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1953. v. 1.
- BERGMANN, P. G. Quantization of the gravitational field, 1930–1988. **Studies in the History of General Relativity**, Springer Science & Business Media, v. 3, p. 364, 1992.
- BLOKHINTSEV, D. I.; GAL'PERIN, F. Gipoteza neutrino i zakon sokhraneniya energii. **Pod znamenem marxisma**, v. 6, p. 147–157, 1934.

- BOEHMER, C. G. et al. Dark spinor models in gravitation and cosmology. **JHEP**, v. 07, p. 053, 2010.
- BOJOWALD, M.; DAS, R. Canonical gravity with fermions. **Phys. Rev. D**, v. 78, p. 064009, 2008.
- BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. **Physical review**, APS, v. 124, n. 3, p. 925, 1961.
- BRONSTEIN, M. P. Quantentheorie schwacher gravitationsfelder. **Phys. Z. Sowjetunion**, v. 9, n. 2-3, p. 140–157, 1936.
- BUONANNO, A. Gravitational waves. **arXiv preprint arXiv:0709.4682**, 2007.
- CAPPER, D. On quantum corrections to the graviton propagator. **Il Nuovo Cimento A (1965-1970)**, Springer, v. 25, n. 1, p. 29–46, 1975.
- CAPPER, D.; LEIBBRANDT, G.; MEDRANO, M. R. Calculation of the graviton self-energy using dimensional regularization. **Physical Review D**, APS, v. 8, n. 12, p. 4320, 1973.
- CAPPER, D. M.; MEDRANO, M. R. Gravitational slavnov-ward identities. **Phys. Rev. D**, v. 9, p. 1641–1647, 1974.
- CARMO, M. P. D. **Geometria diferencial de curvas e superficies**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- CARROLL, S. **Spacetime and Geometry: Pearson New International Edition**. [S.l.]: Pearson Higher Ed, 2014.
- CARTAN, E. Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. **Bulletin de la Société Mathématique de France**, v. 41, p. 53–96, 1913.
- CHEON, S.; LEE, C.; LEE, S. J. Sim (2)-invariant modifications of electrodynamic theory. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 679, n. 1, p. 73–76, 2009.
- COHEN, A. G.; GLASHOW, S. L. Very special relativity. **Physical review letters**, APS, v. 97, n. 2, p. 021601, 2006.
- COLEMAN, S. R.; GLASHOW, S. L. Departures from the eightfold way: Theory of strong interaction symmetry breakdown. **Phys. Rev.**, v. 134, p. B671–B681, 1964.
- COURANT, R.; JOHN, F.; GOLDBERG, S. H. **Introducción al cálculo y al análisis matemático**. [S.l.], 1974.
- DAM, H. van; VELTMAN, M. Massive and mass-less yang-mills and gravitational fields. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 22, n. 2, p. 397–411, 1970.
- DAS, R. **Fermions and Bosons in Loop Quantum Gravity and Its Cosmological Implications**. Tese (Doutorado) – Vanderbilt U., 12 2008.
- DIAS, R. G. **Formulações alternativas da relatividade geral: da geometrodinâmica à estrutura de Gauge de Ashtekar-Barbero**. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 2011.
- DIRAC, P. A. The quantum theory of the electron. **Proc. Roy. Soc. Lond. A**, v. 117, p. 610–624, 1928.
- DIRAC, P. A. The hamiltonian form of field dynamics. **Canadian Journal of Mathematics**, Cambridge University Press, v. 3, p. 1–23, 1951.
- DONÁ, P.; SPEZIALE, S. Introductory lectures to loop quantum gravity. **arXiv preprint arXiv:1007.0402**, 2010.

- DONOGHUE, J. F. Introduction to the effective field theory description of gravity. In: **Advanced School on Effective Theories**. [S.l.: s.n.], 1995.
- DUARTE, L.; DIAS, M.; CAMPOS, F. de. A tutorial approach on mass dimension one fermions phenomenological analysis. **Eur. Phys. J. ST**, v. 229, n. 11, p. 2133–2146, 2020.
- DUARTE, L. et al. An alternative approach concerning elko spinors and the hidden unitarity. **Advances in Applied Clifford Algebras**, Springer, v. 29, n. 4, p. 1–14, 2019.
- EINSTEIN, A. The field equations of gravitation. **Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)**, v. 1915, p. 844–847, 1915.
- EULER, L. De progressionibus harmonicis observationes. **Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae**, p. 150–161, 1740.
- FERMI, E. Tentativo di una teoria della emissione di raggi. **Ric**, v. 4, p. 491, 1934.
- FIERZ, M. *Helv. phys. Acta*, **12**, v. 1, 1939.
- FUKUDA, Y. et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. **Phys. Rev. Lett.**, v. 81, p. 1562–1567, 1998.
- G., J. F. B. Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space times. **Phys. Rev. D**, v. 51, p. 5507–5510, 1995.
- GREINER, W.; REINHARDT, J. **Quantum Electrodynamics, 2nd corrected ed.** [S.l.]: Springer, New York, 1996.
- GREINER, W.; SCHAEFER, A. **Quantum chromodynamics**. [S.l.: s.n.], 1995. ISBN 978-3-540-57103-2.
- GRØN, Ø.; HERVIK, S. Homogeneous and isotropic universe models. **Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology**, Springer, p. 267–303, 2007.
- HASSAN, S. F.; ROSEN, R. A. On Non-Linear Actions for Massive Gravity. **JHEP**, v. 07, p. 009, 2011.
- HILBERT, D. Die grundlagen der physik. nachrichten von der kon. gessellschaft der wiss. gottingen. **Math.-phys. K I**, v. 3, p. 395–407, 1915.
- HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. **General relativity: an introduction for physicists**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- HOLST, S. Barbero's Hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action. **Phys. Rev. D**, v. 53, p. 5966–5969, 1996.
- HOLSTEIN, B. R. Graviton Physics. **Am. J. Phys.**, v. 74, p. 1002–1011, 2006.
- HOŘAVA, P. Quantum gravity at a lifshitz point. **Physical Review D**, APS, v. 79, n. 8, p. 084008, 2009.
- HORVATH, S. On the relativity of elko dark matter. **Master's thesis, University of Canterbury**, 2011.
- IMMIRZI, G. Real and complex connections for canonical gravity. **Class. Quant. Grav.**, v. 14, p. L177–L181, 1997.
- JUST, K.; ROSSBERG, K. Ward relations for gravity. **Il Nuovo Cimento A (1965-1970)**, Springer, v. 40, n. 4, p. 1077–1087, 1965.

- KIEFER, C. Quantum gravity, vol. 136 of. **International Series of Monographs on Physics**, 2007.
- KREBS, R. E. **Scientific development and misconceptions through the ages: a reference guide**. [S.l.]: Greenwood Publishing Group, 1999.
- LANCASTER, T.; BLUNDELL, S. J. **Quantum field theory for the gifted amateur**. [S.l.]: OUP Oxford, 2014.
- LEE, T.; WICK, G. Space inversion, time reversal, and other discrete symmetries in local field theories. **Physical Review**, APS, v. 148, n. 4, p. 1385, 1966.
- LIMA, R. d. C. Criação de partículas espinoriais elko por efeitos gravitacionais. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2017.
- LINTON, C. M. **From Eudoxus to Einstein: a history of mathematical astronomy**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- MAJORANA, E. Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone. **Il Nuovo Cimento (1924-1942)**, Springer, v. 14, n. 4, p. 171, 1937.
- MAPLE, M. a division of waterloo maple inc. **Waterloo, Ontario**, 2016.
- MARINOV, M. Construction of invariant amplitudes for interactions of particles with any spin. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 49, n. 3, p. 357–392, 1968.
- NEWTON, I. **Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica**. [S.l.]: I Ed.” The British Library, 1687.
- O'NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity**. [S.l.]: Academic press, 1983.
- PAIS, A. Inward bound: of matter and forces in the physical world. 1986.
- PAIS, A. **Subtle is the Lord (edition with Penrose's forward)**. [S.l.]: Oxford: Oxford University Press, 2005.
- PAL, P. B. Dirac, Majorana and Weyl fermions. **Am. J. Phys.**, v. 79, p. 485–498, 2011.
- PALATINI, A. Deduzione invariante delle equazioni gravitazionali dal principio di hamilton. **Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)**, Springer, v. 43, n. 1, p. 203–212, 1919.
- PAULI, W. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. **Zeitschrift für Physik**, v. 43, n. 9-10, p. 601–623, 1927.
- PAULI, W. Dear radioactive ladies and gentlemen. **Phys. Today**, v. 31, n. 9, p. 27, 1978.
- PAULI, W.; FIERZ, M. On relativistic field equations of particles with arbitrary spin in an electromagnetic field. **Helv. Phys. Acta**, v. 12, n. 297-300, p. 71, 1939.
- PAULI, W.; KRONIG, R. **Collected scientific papers: in 2 volumes**. [S.l.]: Interscience Publ., 1964.
- PEEBLES, P.; RATRA, B. Cosmology with a time-variable cosmological'constant'. **The Astrophysical Journal**, v. 325, p. L17–L20, 1988.
- PEREIRA, S.; COSTA, R. S. Partition function for a mass dimension one fermionic field and the dark matter halo of galaxies. **Modern Physics Letters A**, World Scientific, v. 34, n. 16, p. 1950126, 2019.

- PEREIRA, S.; SILVA, J. H. da; SANTOS, R. D. Casimir effect for elko fields. **Modern Physics Letters A**, World Scientific, v. 32, n. 22, p. 1730016, 2017.
- PEREIRA, S. H.; LIMA, R. C. Creation of mass dimension one fermionic particles in asymptotically expanding universe. **Int. J. Mod. Phys. D**, v. 26, n. 12, p. 1730028, 2017.
- PEREIRA, S. H. et al. Cosmology with mass dimension one fields: recent developments. **Eur. Phys. J. ST**, v. 229, n. 11, p. 2079–2116, 2020.
- PESKIN, M.; SCHROEDER, D. An introduction to quantum field theory, addison-wesley advanced book program. Westview, 1995.
- PURI, R. R. **Mathematical methods of quantum optics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001. v. 79.
- RAMOND, P. Field theory. a modern primer front. **Phys**, v. 51, p. 1–397, 1981.
- REINES, F.; COWAN, C. L. The neutrino. **Nature**, Springer, v. 178, n. 4531, p. 446–449, 1956.
- RIVERS, R. Lagrangian theory for neutral massive spin-2 fields. **Il Nuovo Cimento (1955-1965)**, Springer, v. 34, n. 2, p. 386–403, 1964.
- ROGERIO, R. B.; SILVA, J. H. da. The local vicinity of spin sums for certain mass-dimension-one spinors. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 118, n. 1, p. 10003, 2017.
- ROGÉRIO, R. J. B. Aspectos clássicos e quânticos de espinores de dinâmica não-usual: espinores de dimensão de massa um. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2018.
- ROGERIO, R. J. B. et al. Mass dimension one fermions and their gravitational interaction. **EPL**, v. 128, n. 2, p. 20004, 2019.
- ROJAS, E. The higgs boson at lhc and the vacuum stability of the standard model. **arXiv preprint arXiv:1511.03651**, 2015.
- ROSENFELD, L. Zur quantelung der wellenfelder. **Annalen der Physik**, WILEY-VCH Verlag Leipzig, v. 397, n. 1, p. 113–152, 1930.
- ROVELLI, C. Notes for a brief history of quantum gravity. **arXiv preprint gr-qc/0006061**, 2000.
- RYDER, L. H. **Quantum field theory**. [S.l.]: Cambridge university press, 1996.
- SALAM, A. Some speculations on the new resonances. **Rev. Mod. Phys.**, v. 33, p. 426–430, 1961.
- SCHWARTZ, M. D. **Quantum field theory and the standard model**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014.
- SELVAGANAPATHY, J.; KONAR, P.; DAS, P. K. Inferring the covariant Θ -exact noncommutative coupling in the top quark pair production at linear colliders. **JHEP**, v. 06, p. 108, 2019.
- SHTABOVENKO, V.; MERTIG, R.; ORELLANA, F. New Developments in FeynCalc 9.0. **Comput. Phys. Commun.**, v. 207, p. 432–444, 2016.
- SILVA, J. H. da et al. On the bilinear covariants associated to mass dimension one spinors. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 76, n. 10, p. 1–7, 2016.
- SILVA, J. M. Hoff da; PEREIRA, S. H. Exact solutions to Elko spinors in spatially flat Friedmann-Robertson-Walker spacetimes. **JCAP**, v. 03, p. 009, 2014.

- SJ, G. G. Canonical analysis of brans-dicke theory addresses hamiltonian inequivalence between the jordan and einstein frames. **PHYSICAL REVIEW D Phys Rev D**, APS, v. 103, p. 024022, 2021.
- SOUZA, G. S. d. The representations of $hom(2)$ and $sim(2)$ in the context of very special relativity: As representações de $hom(2)$ e $sim(2)$ no contexto da very special relativity. [sn], 2015.
- SPERANCA, L. D. An Identification of the Dirac Operator with the Parity Operator. **Int. J. Mod. Phys. D**, v. 23, n. 14, p. 1444003, 2014.
- TAKAHASHI, Y. On the generalized Ward identity. **Nuovo Cim.**, v. 6, p. 371, 1957.
- TANABASHI, M.; GROUP, P. D. et al. Astrophysical constants and parameters. **Physical Review D. Particle Data Group**, v. 98, n. 3, p. 030001, 2019.
- THIEMANN, T. **Modern canonical quantum general relativity**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008.
- THOOF, G.; VELTMAN, M. One-loop divergencies in the theory of gravitation. In: **EUCLIDEAN QUANTUM GRAVITY**. [S.l.]: World Scientific, 1993. p. 3–28.
- THORNE, K. S.; MISNER, C. W.; WHEELER, J. A. **Gravitation**. [S.l.]: Freeman, 2000.
- TOMONAGA, S.-I. **The story of spin**. [S.l.]: University of Chicago Press, 1997.
- TU, L.-C.; LUO, J.; GILLIES, G. T. The mass of the photon. **Rept. Prog. Phys.**, v. 68, p. 77–130, 2005.
- TURYSHEV, S. G. Experimental tests of general relativity. **Annual Review of Nuclear and Particle Science**, Annual Reviews, v. 58, p. 207–248, 2008.
- VILLALOBOS, C. C.; ROGERIO, R. B. The connection between dirac dynamic and parity symmetry. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 116, n. 6, p. 60007, 2017.
- VISHWANATH, A. Where the weyl things are. **Physics**, APS, v. 8, p. 84, 2015.
- WALD, R. M. General relativity(book). **Chicago, University of Chicago Press, 1984, 504 p**, 1984.
- WARD, J. C. An Identity in Quantum Electrodynamics. **Phys. Rev.**, v. 78, p. 182, 1950.
- WEINBERG, S. **The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. ISBN 978-0-521-67053-1, 978-0-511-25204-4.
- WEYL, H. Elektron und gravitation. i. **Zeitschrift für Physik**, Springer, v. 56, n. 5-6, p. 330–352, 1929.
- WHEELER, J. A.; FORD, K. **Geons, black holes and quantum foam: a life in physics**. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2000.
- WIGNER, E. On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. **Annals of mathematics**, JSTOR, p. 149–204, 1939.
- WIGNER, E. Unitary representations of the inhomogeneous lorentz group including reflections. In: **The Collected Works of Eugene Paul Wigner**. [S.l.]: Springer, 1993. p. 564–607.
- WINTERBERG, F. On “belated decision in the hilbert-einstein priority dispute”, published by l. corry, j. renn, and j. stachel. **Zeitschrift für Naturforschung A**, Verlag der Zeitschrift für Naturforschung, v. 59, n. 10, p. 715–719, 2004.

WIPF, A. Hamilton's formalism for systems with constraints. In: **Canonical Gravity: From Classical to Quantum**. [S.l.]: Springer, 1994. p. 22–58.

WOAN, G. **The Cambridge handbook of physics formulas**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000.

WOLFRAM. Mathematica version 10.0. Wolfram Research, 2014.

YEPEZ, J. Einstein's vierbein field theory of curved space. 6 2011.

ZETTILI, N. **Quantum mechanics: concepts and applications**. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2003.

APÊNDICE A – CURVATURA SOB FOLHEAÇÕES DO FORMALISMO ADM

Demonstração da equação de Gauss-Codazzi, baseada em Doná e Speziale (2010) e Dias (2011). O cálculo tem por finalidade obter a caracterização de ${}^{(3)}R$ em termos de derivadas covariantes D definidas como a projeção de ∇ em Σ via q_{ν}^{μ} , pois esse termo entrará na ação de Einstein-Hilbert. Para isso, deve-se primeiramente encontrar o tensor curvatura ${}^{(3)}R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}$, que parte da definição à lá RG: ${}^{(3)}R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}u_{\sigma} = (D_{\mu}D_{\nu} - D_{\nu}D_{\mu})u_{\rho}$, sendo u_{σ} a componente de um quadrivetor $u = u_{\sigma} \otimes e^{\sigma}$.

A ação dupla de uma derivada covariante D sobre um quadrivetor u_{ρ} é

$$\begin{aligned} D_{\mu}D_{\nu}u_{\rho} &= q_{\mu}^{\mu'}q_{\nu}^{\nu'}q_{\rho}^{\rho'}\nabla_{\mu'}D_{\nu'}u_{\rho'} = q_{\mu}^{\mu'}q_{\nu}^{\nu'}q_{\rho}^{\rho'}\nabla_{\mu'}(q_{\nu'}^{\nu''}q_{\rho'}^{\rho''}\nabla_{\nu''}u_{\rho''}) = \underbrace{q_{\mu}^{\mu'}q_{\nu}^{\nu'}q_{\rho}^{\rho'}[(\nabla_{\mu'}q_{\nu'}^{\nu''})q_{\rho'}^{\rho''}\nabla_{\nu''}u_{\rho''}]}_A \\ &+ \underbrace{q_{\mu}^{\mu'}q_{\nu}^{\nu'}q_{\rho}^{\rho'}[q_{\nu'}^{\nu''}(\nabla_{\mu'}q_{\rho'}^{\rho''})\nabla_{\nu''}u_{\rho''}]}_B + q_{\mu}^{\mu'}q_{\nu}^{\nu'}q_{\rho}^{\rho'}[q_{\nu'}^{\nu''}q_{\rho'}^{\rho''}\nabla_{\mu'}\nabla_{\nu''}u_{\rho''}]. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Uma vez que $\nabla_c q_a^b = \nabla_c(g_a^b + n_a n^b) = [(\nabla_c n_a)n^b + n_a \nabla_c n^b]$, tem-se que A pode ser visualizado como

$$\begin{aligned} A &= q_{\mu}^{\mu'}q_{\nu}^{\nu'}q_{\rho}^{\rho'}[(\nabla_{\mu'}n_{\nu'})n^{\nu''}q_{\rho'}^{\rho''}\nabla_{\nu''}u_{\rho''} + n_{\nu'}(\nabla_{\mu'}n^{\nu''})q_{\rho'}^{\rho''}\nabla_{\nu''}u_{\rho''}] \\ &= q_{\mu}^{\mu'}q_{\nu}^{\nu'}q_{\rho}^{\rho'}(\nabla_{\mu'}n_{\nu'})n^{\nu''}(g_{\rho'}^{\rho''} + n_{\rho'}n^{\rho''})\nabla_{\nu''}u_{\rho''} \\ &= q_{\mu}^{\mu'}q_{\nu}^{\nu'}q_{\rho}^{\rho'}[(\nabla_{\mu'}n_{\nu'})n^{\nu''}g_{\rho'}^{\rho''}\nabla_{\nu''}u_{\rho''} + (\nabla_{\mu'}n_{\nu'})n^{\nu''}n_{\rho'}n^{\rho''}\nabla_{\nu''}u_{\rho''}] = q_{\mu}^{\mu'}q_{\nu}^{\nu'}q_{\rho}^{\rho'}(\nabla_{\mu'}n_{\nu'})(\nabla_n u_{\rho'}), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

sendo $(\nabla_n u_{\rho'}) \equiv n^{\nu''}\nabla_{\nu''}u_{\rho'}$ e

$$\begin{aligned} B &= q_{\mu}^{\mu'}q_{\nu}^{\nu'}q_{\rho}^{\rho'}q_{\nu'}^{\nu''}[(\nabla_{\mu'}n_{\rho'})n^{\rho''}\nabla_{\nu''}u_{\rho''} + n_{\rho'}(\nabla_{\mu'}n^{\rho''})\nabla_{\nu''}u_{\rho''}] = q_{\mu}^{\mu'}q_{\nu}^{\nu'}q_{\rho}^{\rho'}(\nabla_{\mu'}n_{\rho'})n^{\rho''}\nabla_{\nu''}u_{\rho''} \\ &= -q_{\mu}^{\mu'}q_{\nu}^{\nu'}q_{\rho}^{\rho'}(\nabla_{\mu'}n_{\rho'})(\nabla_{\nu'}n^{\rho''})u_{\rho''}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

já que $\nabla_{\nu'}(n^{\rho''}u_{\rho''}) = (\nabla_{\nu'}n^{\rho''})u_{\rho''} + n^{\rho''}\nabla_{\nu'}u_{\rho''} = 0$. Desse modo, em posse de A e B , a equação (A.1) torna-se

$$D_{\mu}D_{\nu}u_{\rho} = q_{\mu}^{\mu'}q_{\nu}^{\nu'}q_{\rho}^{\rho'}[(\nabla_{\mu'}n_{\nu'})(\nabla_n u_{\rho'}) - (\nabla_{\mu'}n_{\rho'})(\nabla_{\nu'}n^{\rho''})u_{\rho''} + \nabla_{\mu'}\nabla_{\nu'}u_{\rho'}]. \quad (\text{A.4})$$

Assim, com uso de (A.4),

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}u_{\sigma} &= (D_{\mu}D_{\nu} - D_{\nu}D_{\mu})u_{\rho} \\ &= q_{\mu}^{\mu'}q_{\nu}^{\nu'}q_{\rho}^{\rho'}[(\nabla_{\mu'}n_{\nu'})(\nabla_n u_{\rho'}) - (\nabla_{\nu'}n_{\mu'})(\nabla_n u_{\rho'}) - (\nabla_{\mu'}n_{\rho'})(\nabla_{\nu'}n^{\rho''})u_{\rho''} \\ &+ (\nabla_{\nu'}n_{\rho'})(\nabla_{\mu'}n^{\rho''})u_{\rho''} + \nabla_{\mu'}\nabla_{\nu'}u_{\rho'} - \nabla_{\nu'}\nabla_{\mu'}u_{\rho'}] \\ &= -K_{\mu\rho}q_{\nu}^{\nu'}(\nabla_{\nu'}n^{\rho''})q_{\rho'}^{\rho''}u_{\sigma} + K_{\nu\rho}q_{\mu}^{\mu'}(\nabla_{\mu'}n^{\rho''})q_{\rho'}^{\rho''}u_{\sigma} + \nabla_{\mu'}\nabla_{\nu'}u_{\rho'} - \nabla_{\nu'}\nabla_{\mu'}u_{\rho'} \\ &= [K_{\nu\rho}K_{\mu}{}^{\sigma} - K_{\mu\rho}K_{\nu}{}^{\sigma} + q_{\mu}^{\mu'}q_{\nu}^{\nu'}q_{\rho}^{\rho'}R_{\mu'\nu'\rho'}{}^{\sigma}]u_{\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

em que $K_{\mu\nu}$ é identificada como a curvatura extrínseca em Σ e $R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}$ o tensor curvatura usual da RG em $(3+1)$ para uma variedade pseudo-Riemanniana \mathcal{M} . Portanto, a equação de Gauss é expressa por:

$${}^{(3)}R_{\mu\nu\rho\sigma} = q_{\mu}^{\mu'} q_{\nu}^{\nu'} q_{\rho}^{\rho'} q_{\sigma}^{\sigma'} R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} - 2K_{\rho[\mu} K_{\nu]\sigma}. \quad (\text{A.6})$$

Na sequência, é possível determinar o escalar curvatura ${}^{(3)}R$, objeto de interesse para a ação gravitacional. Tem-se

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R &= {}^{(3)}R_{\mu\nu\rho\sigma} q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} = [K_{\nu\rho} K_{\mu\sigma} - K_{\mu\rho} K_{\nu\sigma}] q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} + q_{\mu}^{\mu'} q_{\nu}^{\nu'} q_{\rho}^{\rho'} q_{\sigma}^{\sigma'} R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} \\ &= K^{\mu\sigma} K_{\mu\sigma} - K^2 + q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

em que $K^{\mu\nu} \equiv q_{\mu\rho} q^{\nu\sigma} K_{\rho\sigma}$ e $K \equiv q^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = K_{\mu}^{\mu}$ é o traço da curvatura extrínseca. A contração que ocorre no tensor de Riemman para produzir R oficial da ação de Einstein-Hilbert se dá por meio da métrica do espaço-tempo g , e não via q de Σ ,

$$\begin{aligned} R &= R_{\mu\nu\rho\sigma} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} (q^{\mu\rho} - n^{\mu} n^{\rho}) (q^{\nu\sigma} - n^{\nu} n^{\sigma}) \\ &= R_{\mu\nu\rho\sigma} [q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} - q^{\mu\rho} n^{\nu} n^{\sigma} - n^{\mu} n^{\rho} q^{\nu\sigma} + n^{\mu} n^{\rho} n^{\nu} n^{\sigma}]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Por outro lado, $R_{\mu\nu\rho\sigma} n^{\sigma} = 2\nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]} n_{\rho}$. Assim,

$$\begin{aligned} R &= R_{\mu\nu\rho\sigma} q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} - q^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma} n^{\nu} n^{\sigma} - q^{\nu\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} n^{\mu} n^{\rho} + R_{\mu\nu\rho\sigma} n^{\mu} n^{\rho} n^{\nu} n^{\sigma} \\ &= R_{\mu\nu\rho\sigma} q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} - 2q^{\mu\rho} n^{\nu} \nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]} n_{\rho} - 2q^{\nu\sigma} n^{\mu} \nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]} n_{\sigma} + 2(\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu}) n_{\rho} n^{\rho} n^{\mu} n^{\nu} \\ &= R_{\mu\nu\rho\sigma} q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} - 2n^{\nu} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] n^{\mu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} n^{\mu} n^{\nu} + \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} n^{\nu} n^{\mu} \\ &= R_{\mu\nu\rho\sigma} q^{\mu\rho} q^{\nu\sigma} - 2n^{\nu} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] n^{\mu}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

sendo o último termo, a menos da constante -2 , identificado como

$$n^{\nu} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] n^{\mu} = \nabla_{\mu} (n^{\nu} \nabla_{\nu} n^{\mu} - n^{\mu} \nabla_{\nu} n^{\nu}) - (\nabla_{\mu} n^{\nu}) (\nabla_{\nu} n^{\mu}) + (\nabla_{\mu} n^{\nu}) (\nabla_{\nu} n^{\mu}), \quad (\text{A.10})$$

observando que

$$\nabla_{\mu} (n^{\nu} n_{\nu}) = (\nabla_{\mu} n^{\nu}) n_{\nu} + n^{\nu} (\nabla_{\mu} n_{\nu}) = \nabla_{\mu} (n_{\rho} g_{\nu}^{\rho}) n_{\nu} + n^{\nu} (\nabla_{\mu} n_{\nu}) = (\nabla_{\mu} n_{\rho}) n^{\rho} + n^{\nu} (\nabla_{\mu} n^{\nu}) = \cancel{2n^{\nu} \nabla_{\mu} n_{\nu}} \rightarrow 0 \quad (\text{A.11})$$

Com base nesses preceitos, tem-se

$$\begin{aligned} K &= K_{\mu\nu} q^{\mu\nu} = q_{\mu}^{\rho} q_{\nu}^{\sigma} \nabla_{\rho} n_{\sigma} q^{\mu\nu} = q^{\rho\nu} q_{\nu}^{\sigma} \nabla_{\rho} n_{\sigma} = q^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} n_{\sigma} \\ &= g^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} n_{\sigma} + n^{\rho} n^{\sigma} \nabla_{\rho} n_{\sigma} = g^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} n_{\sigma} = \nabla_{\rho} n^{\rho} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

e

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} &= (q_{\mu}^{\rho} q_{\nu}^{\sigma} \nabla_{\rho} n_{\sigma}) (q^{\mu\alpha} q^{\nu\beta} q_{\beta}^{\lambda} q_{\alpha}^{\delta} \nabla_{\lambda} n_{\delta}) = q^{\rho\delta} q^{\sigma\lambda} \nabla_{\rho} n_{\sigma} \nabla_{\lambda} n_{\delta} \\ &= (g^{\rho\delta} + n^{\rho} n^{\delta}) (g^{\sigma\lambda} + n^{\sigma} n^{\lambda}) \nabla_{\rho} n_{\sigma} \nabla_{\lambda} n_{\delta} = (\nabla_{\rho} n^{\lambda}) (\nabla_{\lambda} n^{\rho}), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

que por sua vez, permite retomar à equação (A.7) e explicitar a chamada equação de Codazzi,

$${}^{(3)}R = R + 2\nabla_\mu(n^\nu\nabla_\nu n^\mu - n^\mu\nabla_\nu n^\nu) + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} \quad (\text{A.14})$$

ou

$${}^{(3)}R = R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}, \quad (\text{A.15})$$

uma vez que o termo das derivadas covariantes entre parênteses só tem validade quando a ação leva em conta o termo de borda da variedade $\partial\mathcal{M}$ sendo, portanto, nula para nosso interesse no Capítulo 5.

APÊNDICE B – OPERADOR CURVATURA ASSOCIADA AO FÉRMION *MDO*

Partindo-se da definição da conexão de *spin* e aplicando-a na derivada covariante previamente definida, com a realização de comutação de duas derivadas covariantes sobre o espinor *MDO*, temos:

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\lambda &= \nabla_\mu \nabla_\nu \lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu \lambda = \nabla_\mu \left(\partial_\nu - \frac{i}{4} \omega_\nu^{ab} \sigma_{ab} \right) \lambda - \nabla_\nu \left(\partial_\mu - \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \right) \lambda \\
&= \left[\partial_\mu \left(\partial_\nu - \frac{i}{4} \omega_\nu^{ab} \sigma_{ab} \right) \lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \left(\partial_\rho - \frac{i}{4} \omega_\rho^{ab} \sigma_{ab} \right) \lambda - \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} (\partial_\nu \lambda) + \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \frac{i}{4} \omega_\nu^{cd} \sigma_{cd} \lambda \right] \\
&\quad - \left[\partial_\nu \left(\partial_\mu - \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \right) \lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\rho \left(\partial_\rho - \frac{i}{4} \omega_\rho^{ab} \sigma_{ab} \right) \lambda - \frac{i}{4} \omega_\nu^{ab} \sigma_{ab} (\partial_\mu \lambda) + \frac{i}{4} \omega_\nu^{cd} \sigma_{cd} \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \lambda \right].
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Sendo a parcela $(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \lambda = 0$ e assumindo um cenário livre de torção $(\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho) = 0$, segue que

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\lambda &= -\frac{i}{4} \partial_\mu (\omega_\nu^{ab} \sigma_{ab} \lambda) - \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} (\partial_\nu \lambda) + \frac{i}{4} \partial_\nu (\omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \lambda) + \frac{i}{4} \omega_\nu^{ab} \sigma_{ab} (\partial_\mu \lambda) \\
&\quad + \frac{i}{4} \frac{i}{4} (\omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \omega_\nu^{cd} \sigma_{cd} - \omega_\nu^{cd} \sigma_{cd} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab}) \lambda \\
&= -\frac{i}{4} (\partial_\mu \omega_\nu^{ab}) \sigma_{ab} \lambda - \frac{i}{4} \omega_\nu^{ab} \sigma_{ab} (\partial_\mu \lambda) - \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} (\partial_\nu \lambda) + \frac{i}{4} (\partial_\nu \omega_\mu^{ab}) \sigma_{ab} \lambda \\
&\quad + \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} (\partial_\nu \lambda) + \frac{i}{4} \omega_\nu^{ab} \sigma_{ab} (\partial_\mu \lambda) + \frac{i}{4} \frac{i}{4} (\omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \omega_\nu^{cd} \sigma_{cd} - \omega_\nu^{cd} \sigma_{cd} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab}) \lambda \\
&= -\frac{i}{4} (\partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab}) \sigma_{ab} \lambda + \frac{i}{4} \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \omega_\nu^{cd} (\sigma_{ab} \sigma_{cd} - \sigma_{cd} \sigma_{ab}) \lambda.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Uma vez que $\sigma^{ab} = i/2[\gamma^a, \gamma^b]$ e $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}$, temos de imediato que $\gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab} - \gamma^a \gamma^b$ e $\sigma^{ab} = i/2[\gamma^a, \gamma^b] = i/2(\gamma^a \gamma^b - 2\eta^{ab} + \gamma^a \gamma^b) = i(\gamma^a \gamma^b - \eta^{ab})$. Usando σ^{ab} neste formato para o último termo de (B.2), então

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\lambda &= -\frac{i}{4} (\partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab}) \sigma_{ab} \lambda - \frac{i}{4} (\omega_\mu^{ac} \omega_{\nu c}{}^b - \omega_\nu^{ac} \omega_{\mu c}{}^b) \sigma_{ab} \lambda \\
&= -\frac{i}{4} [(\partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab}) + (\omega_\mu^{ac} \omega_{\nu c}{}^b - \omega_\nu^{ac} \omega_{\mu c}{}^b)] \sigma_{ab} \lambda.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Portanto, tomando como base a equação acima, é possível escrever a comutação das derivadas covariantes sob o campo *MDO* na forma:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\lambda = -\frac{i}{4} F_{\mu\nu}{}^{ab} \sigma_{ab} \lambda, \tag{B.4}$$

em que $F_{\mu\nu}{}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + \omega_\mu^{ac} \omega_{\nu c}{}^b - \omega_\nu^{ac} \omega_{\mu c}{}^b$, caracterizando assim uma espécie de operador curvatura agindo sobre o campo espinorial *MDO*, λ , para sua análise em espaço-tempo curvo, dentro do contexto formulado na Seção 5.2.

APÊNDICE C – DA AÇÃO DE EINSTEIN-HILBERT À AÇÃO DE PALATINI-HOLST

É fato estabelecido na literatura que, através da Geometria Riemanniana para tratamento da RG (THORNE; MISNER; WHEELER, 2000, p. 270-275), o tensor de Riemann pode ser extraído da comutação de duas derivadas covariantes atuantes em um vetor presente em uma variedade \mathcal{M} . Em componentes, para um quadrivetor $\mathbf{V} = V_\rho \otimes \hat{e}^\rho$ em uma variedade pseudo-Riemanniana, isso significa que

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V_\rho = R_{\nu\ \mu\rho}^\alpha V_\alpha, \quad R_{\nu\ \mu\rho}^\alpha = \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\alpha + \Gamma_{\rho\mu}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\rho\nu}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha. \quad (\text{C.1})$$

A relação entre o tensor de curvatura $R_{\nu\ \mu\rho}^\alpha$ e $F_{\mu\nu}^{ab}$, presente na Seção 5.2, origina-se da comutação entre as derivadas covariantes em um objeto de índice interno S_a . Assim $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]S_a$:

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]S_a &= \nabla_\mu \nabla_\nu S_a - \nabla_\nu \nabla_\mu S_a = [\partial_\mu (\partial_\nu S_a + \omega_{\nu a}^b S_b) - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha (\partial_\alpha S_a + \omega_{\alpha a}^b S_b) \\ &\quad + \omega_{\mu a}^c (\partial_\nu S_c + \omega_{\nu c}^b S_b)] - [\partial_\nu (\partial_\mu S_a + \omega_{\mu a}^b S_b) - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha (\partial_\alpha S_a + \omega_{\alpha a}^b S_b) \\ &\quad + \omega_{\nu a}^c (\partial_\mu S_c + \omega_{\mu c}^b S_b)], \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

que novamente, por estarmos em um cenário livre de torção $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha = 0$, nos permite escrever

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]S_a &= \partial_\mu \partial_\nu S_a + (\partial_\mu \omega_{\nu a}^b) S_b + \omega_{\nu a}^b (\partial_\mu S_b) + \omega_{\mu a}^c (\partial_\nu S_c) + \omega_{\mu a}^c \omega_{\nu c}^b S_b \\ &\quad - \partial_\nu \partial_\mu S_a - (\partial_\nu \omega_{\mu a}^b) S_b - \omega_{\mu a}^b (\partial_\nu S_b) - \omega_{\nu a}^c (\partial_\mu S_c) - \omega_{\nu a}^c \omega_{\mu c}^b S_b \\ &= (\partial_\mu \omega_{\nu a}^b) S_b - (\partial_\nu \omega_{\mu a}^b) S_b + \omega_{\mu a}^c \omega_{\nu c}^b S_b - \omega_{\nu a}^c \omega_{\mu c}^b S_b, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

onde podemos concluir que

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]S^a = F_{\mu\nu}^{ab} S_b, \quad (\text{C.4})$$

em que $F_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu \omega_{\nu}^{ab} - \partial_\nu \omega_{\mu}^{ab} + \omega_{\mu}^{ac} \omega_{\nu c}^b - \omega_{\nu}^{ac} \omega_{\mu c}^b$. Agora, reescrevendo (C.1), com o vetor V_α em termos de tetradas e conhecendo o comportamento da comutação da derivada covariante neste objeto, a partir da expressão (C.4), temos

$$R_{\nu\ \mu\rho}^\alpha V_\alpha = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]V_\rho = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]e_\rho^a V_a = e_\rho^a [\nabla_\mu, \nabla_\nu]V_a = e_\rho^a F_{\mu\nu a}^b V_b = e_\rho^a F_{\mu\nu a}^b e_b^\alpha V_\alpha, \quad (\text{C.5})$$

assentindo a relação entre tensor curvatura e $F_{\mu\nu}^{ab}$ serem escritos na forma:

$$R_{\nu\ \mu\rho}^\alpha = e_\rho^a F_{\mu\nu a}^b e_b^\alpha. \quad (\text{C.6})$$

Da expressão acima, temos ainda que a seguinte simetria é satisfeita:

$$\begin{aligned} R_{\nu\sigma\mu\rho} &= g_{\sigma\alpha} R_{\nu\ \mu\rho}^\alpha = g_{\sigma\alpha} e_\rho^a F_{\mu\nu a}^b e_b^\alpha = \eta_{cd} e_\sigma^c e_\rho^d e_\rho^a F_{\mu\nu a}^b e_b^\alpha = \eta_{cd} e_\sigma^c e_\rho^a F_{\mu\nu a}^b \delta_b^d = \eta_{cd} e_\sigma^c e_\rho^a F_{\mu\nu a}^d \\ &= R_{\mu\rho\nu\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Uma vez que o escalar curvatura de Ricci é $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu\sigma} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}$, através de (C.7), obtemos

$$\begin{aligned}
R &= \eta_{cd} e_\sigma^c e_\rho^a F_{\mu\nu a}{}^d \eta^{gh} e_g^\mu e_h^\nu \eta^{jk} e_j^\rho e_k^\sigma = \eta_{cd} e_\sigma^c e_\rho^a F_{\mu\nu a}{}^d \eta^{ch} e_c^\mu e_h^\nu \eta^{ak} e_a^\rho e_k^\sigma \\
&= \eta_{cd} \eta^{ch} \eta^{ak} e_\sigma^c e_\rho^a e_\rho^a e_h^\nu e_k^\sigma F_{\mu\nu a}{}^d = \delta_d^h \delta_\sigma^\mu e_h^\nu e_k^\sigma \eta^{ak} F_{\mu\nu a}{}^d \\
&= e_d^\nu e_k^\mu \eta^{ak} F_{\mu\nu a}{}^d \\
&= e_d^\nu e_k^\mu F_{\mu\nu}{}^{kd},
\end{aligned} \tag{C.8}$$

em que fazendo-se a mudança indicial $k \rightarrow a$ e $d \rightarrow b$, o escalar curvatura via tetradas e conexão (e, ω) é expresso por:

$$R = F_{\mu\nu}{}^{ab} e_a^\mu e_b^\nu. \tag{C.9}$$

O termo jacobiano para correção de volume em espaço curvo, $\sqrt{-g}$, em função das tetradas é caracterizado por

$$\sqrt{-g} = [-\det(\eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b)]^{1/2} = [-\det(\eta_{ab}) \det(e_\mu^a) \det(e_\nu^b)]^{1/2} = [\det(e_\mu^a) \det(e_\nu^b)]^{1/2} = (e^2)^{1/2} = e. \tag{C.10}$$

Desse modo, a ação de Einstein-Hilbert pode ser equivalentemente escrito com o formalismo de Riemann-Cartan, com o uso das expressões (C.9) and (C.10), chamada assim de ação de Palatini (1919)-Hilbert:

$$\mathcal{S}_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R \mapsto \mathcal{S}_{PH} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x (e) F_{\mu\nu}{}^{ab} e_a^\mu e_b^\nu. \tag{C.11}$$

Mais de 70 anos após o desenvolvimento de Palatini, Holst (1996) obteve um duplo termo associado à curvatura $F_{\mu\nu}{}^{ab}$ no tratamento Hamiltoniano da gravidade, agora chamado de termo de Holst (autodual da ação Palatini), dada por

$$-\frac{1}{2\gamma} e e_I^\mu e_J^\nu F_{\mu\nu}{}^{IJ}(\omega), \tag{C.12}$$

em que (I, J) são as componentes espaciais dos índices internos de Lorentz (a, b) e γ o parâmetro de Barbero-G. (1995), Immirzi (1997), com sua função reconhecida por ambos, no qual a autoformulação do dual corresponde a escolha de $\gamma = -i$. Esse termo de Holst permite que a ação Palatini-Hilbert seja generalizada para

$$\mathcal{S}_{PH} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x (e e_I^\mu e_J^\nu P^{IJ}{}_{KL} F_{\mu\nu}{}^{KL}(\omega)), \tag{C.13}$$

em que o valor $\gamma = \pm i$ não pode ser escolhido para lidar com o seu inverso:

$$P^{IJ}{}_{KL} = \delta_K^{[I} \delta_L^{J]} - \frac{1}{\gamma} \frac{\epsilon^{IJ}{}_{KL}}{2}, \quad P_{IJ}{}^{-1}{}^{KL} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1} \left(\delta_I^{[K} \delta_J^{L]} + \frac{1}{\gamma} \frac{\epsilon_{IJ}{}^{KL}}{2} \right). \tag{C.14}$$

APÊNDICE D – OBTENÇÃO DO VÉRTICE DE INTERAÇÃO *MDO*-GRÁVITON

Antes de chegar à descrição da densidade de lagrangiana do campo *MDO* em perturbação à campo fraco presente na Seção 6.1, devemos primeiramente obter a conexão de *spin* para uso prático dentro desse contexto. Para isso, é necessário recordar que a derivada covariante de um campo de tetrada deve ser nula, justamente porque esse campo faz o mapeamento de uma variedade (índice α) sobre uma plataforma localmente lorentziana (índice a):

$$\nabla_{\mu} e_{\alpha}^a = \partial_{\mu} e_{\alpha}^a - \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma} e_{\sigma}^a + A_{\mu}^a{}_b e_{\alpha}^b = 0, \quad (\text{D.1})$$

sendo a conexão expressa por

$$A_{\mu}^a{}_b = -e_b^{\nu} \partial_{\mu} e_{\nu}^a + e_b^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} e_{\alpha}^a. \quad (\text{D.2})$$

Tomando-se a conexão afim em termos de tetradas à campo fraco em primeira ordem de κ , temos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\beta\nu} + \partial_{\nu} g_{\beta\mu} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} e_b^{\alpha} \eta^{ab} e_a^{\beta} [\partial_{\mu} (\eta_{cd} e_c^d e_{\nu}^d) + \partial_{\nu} (\eta_{fg} e_f^g e_{\mu}^g) - \partial_{\beta} (\eta_{ij} e_i^i e_{\mu}^j)] \\ &= \frac{\kappa}{2} (\delta_b^{\alpha} - \kappa c_b^{\alpha}) (\delta_a^{\beta} - \kappa c_a^{\beta}) \eta^{ab} [\partial_{\mu} h_{\beta\nu} + \partial_{\nu} h_{\beta\mu} - \partial_{\beta} h_{\mu\nu}] \\ &= \frac{\kappa}{2} \eta^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} h_{\beta\nu} + \partial_{\nu} h_{\beta\mu} - \partial_{\beta} h_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

visto que a métrica em função das tetradas é $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_{\mu}^a e_{\nu}^b$, as tetradas em campo fraco são ($e_{\alpha}^a = \delta_{\alpha}^a + \kappa c_{\alpha}^a$, $e_a^{\alpha} = \delta_a^{\alpha} - \kappa c_a^{\alpha}$) com $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu} = h_{\mu\nu}/2$, tendo o elemento $\partial_{\mu} g_{\alpha\beta} = \kappa \partial_{\mu} h_{\alpha\beta}$. Além disso, aplicando-se as mesmas condições sobre a parcela $e_b^{\nu} \partial_{\mu} e_{\nu}^a$, obtemos

$$e_b^{\nu} \partial_{\mu} e_{\nu}^a = (\delta_b^{\nu} - \kappa c_b^{\nu}) \partial_{\mu} (\delta_{\nu}^a + \kappa c_{\nu}^a) = (\delta_b^{\nu} - \kappa c_b^{\nu}) \kappa \partial_{\mu} c_{\nu}^a = \kappa \delta_b^{\nu} \partial_{\mu} c_{\nu}^a = \kappa \partial_{\mu} c_b^a = \frac{\kappa}{2} \partial_{\mu} h_b^a. \quad (\text{D.4})$$

Aplicando os resultados das expressões (D.3) e (D.4) na equação (D.2), a conexão pode ser visualizada como

$$\begin{aligned} A_{\mu}^a{}_b &= -e_b^{\nu} \partial_{\mu} e_{\nu}^a + e_b^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} e_{\alpha}^a = -\frac{\kappa}{2} \partial_{\mu} h_b^a + \Gamma_{\mu b}^a \\ &= -\frac{\kappa}{2} \partial_{\mu} h_b^a + \frac{\kappa}{2} \eta^{a\rho} (\partial_{\mu} h_{\rho b} + \partial_b h_{\rho\mu} - \partial_{\rho} h_{\mu b}) \\ &= -\frac{\kappa}{2} \partial_{\mu} h_b^a + \frac{\kappa}{2} \partial_{\mu} h_b^a + \frac{\kappa}{2} \eta^{a\rho} (\partial_b h_{\rho\mu} - \partial_{\rho} h_{\mu b}) \\ &= \frac{\kappa}{2} \eta^{a\rho} (\partial_b h_{\rho\mu} - \partial_{\rho} h_{\mu b}), \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

em cenário de primeira ordem perturbativa da gravidade. Outro modo de apresentar esse termo de conexão é

$$A_{\mu ab} = \frac{\kappa}{2} (\partial_b h_{a\mu} - \partial_a h_{\mu b}), \quad (\text{D.6})$$

dando as bases para o estabelecimento da conexão de *spin*, Γ_μ .

A densidade de lagrangiana do campo *MDO* em espaço curvo, sob um cenário de perturbação à métrica de Minkowski, é descrita por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\lambda,\bar{\lambda}} &= \sqrt{-g}[\nabla_\mu \bar{\lambda} g^{\mu\nu} \nabla_\nu \lambda - m^2 \bar{\lambda} \lambda] \\ &= \mathbb{G} \left[[\partial_\mu \bar{\lambda} - \bar{\lambda} \frac{\kappa}{4} (\partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\beta\mu}) \gamma^\alpha \gamma^\beta] (\eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu}) [\partial_\nu \lambda + \frac{\kappa}{4} (\partial_\rho h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma h_{\rho\nu}) \gamma^\sigma \gamma^\rho \lambda] \right. \\ &\quad \left. - m^2 \bar{\lambda} \lambda \right],\end{aligned}\tag{D.7}$$

em que \mathbb{G} é o termo de elemento de volume métrico $\sqrt{-g}$ em limite de campo gravitacional fraco, denotado como $\mathbb{G} = (1 + \kappa h/2)$, e observando a prescrição $\nabla_\mu \bar{\lambda} = \partial_\mu \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \Gamma_\mu$ e $\nabla_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda - \Gamma_\mu \lambda$. Desse modo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\lambda,\bar{\lambda}} &= \left(1 + \frac{\kappa}{2} h\right) \left[\partial_\mu \bar{\lambda} \partial^\mu \lambda - \kappa \partial_\mu \bar{\lambda} h^{\mu\nu} \partial_\nu \lambda - m^2 \bar{\lambda} \lambda + \frac{\kappa}{4} \partial_\mu \bar{\lambda} (\partial_\rho h_\sigma^\mu - \partial_\sigma h_\rho^\mu) \gamma^\sigma \gamma^\rho \lambda \right. \\ &\quad - \frac{\kappa}{4} \bar{\lambda} (\partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\beta\mu}) \gamma^\alpha \gamma^\beta \partial^\mu \lambda - \frac{\kappa^2}{16} \bar{\lambda} (\partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\beta\mu}) \gamma^\alpha \gamma^\beta (\partial_\rho h_\sigma^\mu - \partial_\sigma h_\rho^\mu) \gamma^\sigma \gamma^\rho \lambda \\ &\quad - \frac{\kappa^2}{4} \partial_\mu \bar{\lambda} h^{\mu\nu} (\partial_\rho h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma h_{\rho\nu}) \gamma^\sigma \gamma^\rho \lambda + \frac{\kappa^2}{4} \bar{\lambda} (\partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\beta\mu}) \gamma^\alpha \gamma^\beta h^{\mu\nu} \partial_\nu \lambda \\ &\quad \left. + \frac{\kappa^3}{16} \bar{\lambda} (\partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\beta\mu}) \gamma^\alpha \gamma^\beta h^{\mu\nu} (\partial_\rho h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma h_{\rho\nu}) \gamma^\sigma \gamma^\rho \lambda \right].\end{aligned}\tag{D.8}$$

Negligenciando os termos de ordem $\geq \kappa^2$, segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\lambda,\bar{\lambda}} &= \overbrace{(\partial_\mu \bar{\lambda} \partial^\mu \lambda - m^2 \bar{\lambda} \lambda)}^{\mathcal{L}_{0\bar{\lambda},\lambda}} + \frac{\kappa}{2} h (\partial_\mu \bar{\lambda} \partial^\mu \lambda - m^2 \bar{\lambda} \lambda) - \kappa \partial_\mu \bar{\lambda} h^{\mu\nu} \partial_\nu \lambda \\ &\quad + \frac{\kappa}{4} [\partial_\mu \bar{\lambda} (\partial_\rho h_\sigma^\mu - \partial_\sigma h_\rho^\mu) \gamma^\sigma \gamma^\rho \lambda + \bar{\lambda} (\partial_\alpha h_{\beta\mu} - \partial_\beta h_{\alpha\mu}) \gamma^\alpha \gamma^\beta \partial^\mu \lambda],\end{aligned}\tag{D.9}$$

em que $\mathcal{L}_{0\bar{\lambda},\lambda}$ é a parcela referente à densidade de lagrangiana livre, emergente da métrica minkowskiana, e os demais termos tratam da parte interagente em primeira ordem, provindos da perturbação do *background* em Minkowski. Os campos *MDO* e gráviton, descritos a princípio no espaço das posições, podem ser expressos em função do espaço dos *momentum* com as transformadas de Fourier:

$$\lambda(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \lambda(p) d^4 p,\tag{D.10}$$

$$\bar{\lambda}(y) = \int \frac{1}{(2\pi)^4} e^{+iqy} \bar{\lambda}(q) d^4 q\tag{D.11}$$

e

$$h(z) = \int \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-irz} h_\omega^\omega(r) d^4 r,\tag{D.12}$$

obedecendo as direções de propagações dos campos, já escolhidas à priori, para a aniquilação dos férmions conjugados e anticonjugados quando ocorrer a interação na configuração da troca de momentos. Desse modo, a transcrição da integração da densidade de lagrangiana de interação *MDO*-

gráviton no espaço das posições, Γ , para o três campos envolvidos, $\mathcal{L}_{int\bar{\lambda},\lambda} = \mathcal{L}_{\bar{\lambda},\lambda} - \mathcal{L}_{0\bar{\lambda},\lambda}$, em função do espaço dos *momentum* é escrita como:

$$\int_{\Gamma} \mathcal{L}_{int\bar{\lambda},\lambda}(x, y, z) d\Gamma = \int \mathcal{L}_{int\bar{\lambda},\lambda}(p, q, r) \delta^4(y-x) \delta^4(y-z) d^4x d^4y d^4z, \quad (D.13)$$

sendo $d\Gamma$ o elemento de integração na tripla (d^4x, d^4y, d^4z) , levando em conta a interação dos campos *MDO-usual*, *MDO-dual* e gráviton em y , de propagação regressiva do campo dual.

Inserindo as transformações dos campos presentes nas equações (D.10)-(D.12), no espaço dos *momentum*, sobre a expressão (D.13), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathcal{L}_{int\bar{\lambda},\lambda}(x, y, z) d\Gamma = & \int \frac{\kappa}{2} \left[\int \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-irz} h_{\omega}^{\omega}(r) d^4r \left(\int \frac{1}{(2\pi)^4} (iq_{\mu}) e^{iqy} \bar{\lambda}(q) d^4q \cdot \int \frac{1}{(2\pi)^4} (-ip^{\mu}) e^{-ipx} \lambda(p) d^4p \right. \right. \\ & \left. \left. - m^2 \int \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{(2\pi)^4} \bar{\lambda}(q) \lambda(p) e^{iqy} e^{-ipx} d^4q d^4p \right) \right] \delta^4(y-x) \delta^4(y-z) d^4x d^4y d^4z \\ & - \int \kappa \left[\left(\int \frac{1}{(2\pi)^4} (iq_{\mu}) e^{iqy} \bar{\lambda}(q) d^4q \right) \int \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-irz} h^{\mu\nu}(r) d^4r \right. \\ & \left. \cdot \left(\int \frac{1}{(2\pi)^4} (-ip_{\nu}) e^{-ipx} \lambda(p) d^4p \right) \right] \delta^4(y-x) \delta^4(y-z) d^4x d^4y d^4z \\ & + \int \frac{\kappa}{4} \left[\int \frac{1}{(2\pi)^4} (iq_y) e^{iqy} \bar{\lambda}(q) d^4q \left(\int \frac{1}{(2\pi)^4} (-ir_{\rho}) e^{-irz} h_{\sigma}^{\mu}(r) d^4r - \int \frac{1}{(2\pi)^4} (-ir_{\sigma}) e^{-irz} h_{\rho}^{\mu}(r) d^4r \right) \right. \\ & \left. \cdot \gamma^{\sigma} \gamma^{\rho} \int \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \lambda(p) d^4p \right] \delta^4(y-x) \delta^4(y-z) d^4x d^4y d^4z \\ & + \int \frac{\kappa}{4} \left[\int \frac{1}{(2\pi)^4} e^{iqy} \bar{\lambda}(q) d^4q \left(\int \frac{1}{(2\pi)^4} (-ir_{\alpha}) e^{-irz} h_{\beta\mu}(r) d^4r - \int \frac{1}{(2\pi)^4} (-ir_{\beta}) e^{-irz} h_{\alpha\mu}(r) d^4r \right) \right. \\ & \left. \cdot \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} \int \frac{1}{(2\pi)^4} (-ip^{\mu}) e^{-ipx} \lambda(p) d^4p \right] \delta^4(y-x) \delta^4(y-z) d^4x d^4y d^4z. \end{aligned} \quad (D.14)$$

Absorvendo as integrações em δ no ponto de interação y , segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathcal{L}_{int\bar{\lambda},\lambda}(x, y, z) d\Gamma = & \int d^4q d^4p d^4r \int (d^4y)^3 e^{i(q-p-r)y} \frac{1}{[(2\pi)^4]^3} \\ & \left[\frac{\kappa}{2} (h_{\omega}^{\omega}(r) q_{\mu} p^{\mu} \bar{\lambda}(q) \lambda(p) - h_{\omega}^{\omega}(r) m^2 \bar{\lambda}(q) \lambda(p)) - \kappa (q_{\mu} p_{\nu} \bar{\lambda}(q) h^{\mu\nu}(r) \lambda(p)) \right. \\ & \left. + \frac{\kappa}{4} \bar{\lambda}(q) (r_{\rho} h_{\sigma}^{\mu}(r) - r_{\sigma} h_{\rho}^{\mu}(r)) \gamma^{\sigma} \gamma^{\rho} q_{\mu} \lambda(p) + \frac{\kappa}{4} \bar{\lambda}(q) (r_{\beta} h_{\alpha\mu}(r) - r_{\alpha} h_{\beta\mu}(r)) \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} p^{\mu} \lambda(p) \right]. \end{aligned} \quad (D.15)$$

Uma vez que a parcela de integração dos três campos no ponto y , junto ao termo de normalização de Fourier, é sintetizado na forma das δ no espaço dos *momentum* como

$$\int d^4y e^{i(q-p-r)y} = (2\pi)^4 \delta(q-p-r) \Rightarrow \int (d^4y)^3 e^{i(q-p-r)y} \frac{1}{[(2\pi)^4]^3} = \delta(q-p-r), \quad (D.16)$$

sendo usada, daqui em diante, a notação $\delta(q-p-r) = \delta^{(n)}(q-p-r)$ compactamente para n

dimensões, e partindo do fato que os campos associados ao gráviton podem ser expressos por

$$h_{\omega}^{\omega}(r) = \eta_{\theta\pi} h^{\theta\pi}(r); \quad (D.17)$$

$$h_{\sigma}^{\mu}(r) = \eta_{\sigma\theta} h^{\mu\theta}(r); \quad h_{\rho}^{\mu}(r) = \eta_{\rho\theta} h^{\mu\theta}(r); \quad (D.18)$$

$$h_{\alpha\mu}(r) = \eta_{\alpha\theta} \eta_{\mu\pi} h^{\theta\pi}(r); \quad h_{\beta\mu}(r) = \eta_{\beta\theta} \eta_{\mu\pi} h^{\theta\pi}, \quad (D.19)$$

a expressão (D.15) torna-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \mathcal{L}_{int\lambda, \bar{\lambda}}(x, y, z) d\Gamma = \\ & \int d^4 q d^4 p d^4 r \delta(q - p - r) \left[\frac{\kappa}{2} (\eta_{\theta\pi} h^{\theta\pi}(r) q_{\mu} p^{\mu} \bar{\lambda}(q) \lambda(p) - \eta_{\theta\pi} h^{\theta\pi}(r) m^2 \bar{\lambda}(q) \lambda(p)) \right. \\ & - \kappa (q_{\mu} p_{\nu} \bar{\lambda}(q) h^{\mu\nu}(r) \lambda(p)) + \frac{\kappa}{4} \bar{\lambda}(q) (r_{\rho} \eta_{\sigma\theta} h^{\mu\theta}(r) - r_{\sigma} \eta_{\rho\theta} h^{\mu\theta}(r)) \gamma^{\sigma} \gamma^{\rho} q_{\mu} \lambda(p) \\ & \left. + \frac{\kappa}{4} \bar{\lambda}(q) (r_{\beta} \eta_{\alpha\theta} \eta_{\mu\pi} h^{\theta\pi}(r) - r_{\alpha} \eta_{\beta\theta} \eta_{\mu\pi} h^{\theta\pi}(r)) \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} p^{\mu} \lambda(p) \right]. \end{aligned} \quad (D.20)$$

O vértice de interação, em "nível de árvore", de uma teoria quântica pode ser definido como a variação funcional da integração da densidade de lagrangiana de interação, em Γ , com respeito aos campos (ϕ_1, \dots, ϕ_n) no espaço dos *momentum*:

$$V_{int\phi_1, \dots, \phi_n} \stackrel{def}{=} i \frac{\delta \int_{\Gamma} \mathcal{L}_{int\phi_1, \dots, \phi_n} d\Gamma}{\delta \phi_1(a) \dots \delta \phi_n(z)}, \quad (D.21)$$

em que i é a unidade imaginária inserida na definição e sendo a, b, \dots, z os momentos associados a cada um dos campos (ϕ_1, \dots, ϕ_n) . Aplicando a expressão (D.20) sobre a definição do vértice em (D.21), temos

$$\begin{aligned} V_{int\lambda, \bar{\lambda}, h} &= i \frac{\delta \int_{\Gamma} \mathcal{L}_{int\lambda, \bar{\lambda}}(x, y, z) d\Gamma}{\delta \bar{\lambda}(a) \delta \lambda(b) \delta h^{\xi\tau}(c)} = i \int d^4 q d^4 p d^4 r \delta(q - p - r) \delta(q - a) \delta(p - b) \delta(r - c) \\ & \cdot \left[\frac{\kappa}{2} \frac{\eta_{\theta\pi}}{2} (\eta^{\xi\pi} \eta^{\theta\tau} + \eta^{\theta\xi} \eta^{\pi\tau}) (q_{\mu} p^{\mu} - m^2) - \kappa \frac{(\eta^{\mu\tau} \eta^{\nu\xi} + \eta^{\mu\xi} \eta^{\nu\tau})}{2} q_{\mu} p_{\nu} \right. \\ & + \frac{\kappa}{4} \left((r_{\rho} \eta_{\sigma\theta} - r_{\sigma} \eta_{\rho\theta}) \frac{(\eta^{\mu\tau} \eta^{\theta\xi} + \eta^{\mu\xi} \eta^{\theta\tau})}{2} \gamma^{\sigma} \gamma^{\rho} q_{\mu} \right. \\ & \left. \left. + (r_{\beta} \eta_{\alpha\theta} \eta_{\mu\pi} - r_{\alpha} \eta_{\beta\theta} \eta_{\mu\pi}) \frac{(\eta^{\xi\pi} \eta^{\theta\tau} + \eta^{\theta\xi} \eta^{\pi\tau})}{2} \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} p^{\mu} \right) \right], \end{aligned} \quad (D.22)$$

valendo-se do fato que $\delta \bar{\lambda}(q) / \delta \bar{\lambda}(a) = \delta(q - a)$ e $\delta \lambda(p) / \delta \lambda(b) = \delta(p - b)$. Na expressão acima foi usado a identidade que surge da variação de um campo de gráviton com relação a outro (HOLSTEIN, 2006), prescrito na forma

$$\frac{\delta h^{\sigma\rho}(r)}{\delta h^{\alpha\beta}(c)} = \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\rho} \eta^{\sigma\beta} + \eta^{\rho\beta} \eta^{\alpha\sigma}) \delta(r - c). \quad (D.23)$$

Condensando os termos da expressão (D.22), via as métricas de Minkowski emergentes da variação

dos campos de gráviton, obtemos

$$\begin{aligned}
V_{int\lambda,\bar{\lambda},h} &= i \int d^4q d^4p d^4r \delta(q-p-r) \delta(q-a) \delta(p-b) \delta(r-c) \left[\frac{\kappa}{4} (\delta_\theta^\xi \eta^{\theta\tau} + \delta_\pi^\xi \eta^{\pi\tau}) (q_\mu p^\mu - m^2) \right. \\
&\quad - \frac{\kappa}{2} (\eta^{\mu\tau} \eta^{\nu\xi} + \eta^{\mu\xi} \eta^{\nu\tau}) q_\mu p_\nu + \frac{\kappa}{8} [(r_\rho (\eta^{\mu\tau} \delta_\sigma^\xi + \eta^{\mu\xi} \delta_\sigma^\tau) - r_\sigma (\eta^{\mu\tau} \delta_\rho^\xi + \eta^{\mu\xi} \delta_\rho^\tau)) \gamma^\sigma \gamma^\rho q_\mu \\
&\quad \left. + (r_\beta (\delta_\alpha^\tau \delta_\mu^\xi + \delta_\alpha^\xi \delta_\mu^\tau) - r_\alpha (\delta_\beta^\tau \delta_\mu^\xi + \delta_\beta^\xi \delta_\mu^\tau)) \gamma^\alpha \gamma^\beta p^\mu \right]. \tag{D.24}
\end{aligned}$$

Tomando ($a \rightarrow q, b \rightarrow p, c \rightarrow r$) e operando a integração da equação acima, chegamos a expressão

$$\begin{aligned}
V_{int\lambda,\bar{\lambda},h} &= i\delta(q-p-r) \left[\frac{\kappa}{2} (p \cdot q - m^2) \eta^{\xi\tau} - \frac{\kappa}{2} (q^\tau p^\xi + q^\xi p^\tau) + \frac{\kappa}{8} [r_\rho (\gamma^\xi \gamma^\rho q^\tau + \gamma^\tau \gamma^\rho q^\xi) \right. \\
&\quad \left. - r_\sigma (\gamma^\sigma \gamma^\xi q^\tau + \gamma^\sigma \gamma^\tau q^\xi) + r_\beta (\gamma^\tau \gamma^\beta p^\xi + \gamma^\xi \gamma^\beta p^\tau) - r_\alpha (\gamma^\alpha \gamma^\tau p^\xi + \gamma^\alpha \gamma^\xi p^\tau) \right] \tag{D.25}
\end{aligned}$$

podendo esta ser visualizada mais compactamente como

$$\begin{aligned}
V_{int\lambda,\bar{\lambda},h} &= i \frac{\kappa}{8} \delta(q-p-r) [4(p \cdot q - m^2) \eta^{\xi\tau} - 4(q^\tau p^\xi + q^\xi p^\tau) + (\gamma^\xi \not{r} - \not{r} \gamma^\xi) q^\tau \\
&\quad + (\gamma^\tau \not{r} - \not{r} \gamma^\tau) q^\xi + (\gamma^\tau \not{r} - \not{r} \gamma^\tau) p^\xi + (\gamma^\xi \not{r} - \not{r} \gamma^\xi) p^\tau], \tag{D.26}
\end{aligned}$$

sendo empregada a notação de Feynman para contração de um vetor e uma matriz gama, $v_\mu \gamma^\mu = v^\mu \gamma_\mu = \not{v}$.

Transcrevendo os índices da expressão (D.26) na forma contravariante para a forma covariante e renomeando estes em ($\xi \rightarrow \alpha, \tau \rightarrow \beta$), temos que o vértice de interação *MDO*-gráviton em "nível de árvore" é descrito por

$$V_{\alpha\beta}(q, p, r) = i \frac{\kappa}{8} \delta(q-p-r) [4(p \cdot q - m^2) \mathbb{1}_{\alpha\beta} - 4(q_\alpha p_\beta + q_\beta p_\alpha) \mathbb{1} + [\gamma_\alpha, \not{r}](p+q)_\beta + [\gamma_\beta, \not{r}](p+q)_\alpha], \tag{D.27}$$

em que $r = q - p$ e $\mathbb{1} = \mathbb{1}_4$ a matriz identidade.

APÊNDICE E – OBTENÇÃO DA CORREÇÃO A UM LOOP DO GRÁVITON VIA *MDO*

A parcela divergente em um *loop* da correção da auto-energia do gráviton na Seção 6.2 é expressa por

$$\Pi_{(a)}^{\mu\nu,\alpha\beta}(p) = - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{Tr[V^{\mu\nu} i\mathbb{1} V^{\alpha\beta} i\mathbb{1}]}{(q^2 - m^2)[(p - q)^2 - m^2]}, \quad (\text{E.1})$$

sendo $d = 4 - 2\epsilon$ a dimensão de regularização da integração, $Tr[]$ o operador traço, $V^{\mu\nu} = V^{\mu\nu}(-q, p, q - p)$ e $V^{\alpha\beta} = V^{\alpha\beta}(q, -p, p - q)$ os pontos de entrada e saída do vértice de interação *MDO*-gráviton que surge na primeira ordem de correção do propagador do gráviton, respectivamente, já respeitando os propagadores dos férmions $\frac{1}{(q^2 - m^2)}$ e $\frac{1}{[(p - q)^2 - m^2]}$.

Com o auxílio do programa Mathematica Versão 10.0 (WOLFRAM, 2014) e do pacote FeynCalc 9.0 (SHTABOVENKO; MERTIG; ORELLANA, 2016), o traço do produto de dois vértices *MDO*-gráviton terá como resultado a soma de termos acoplados aos momentos dos tipos: sem q^α ; com q^α ; com $q^\alpha q^\beta$; com $q^\alpha q^\beta q^\mu$; com $q^\alpha q^\beta q^\mu q^\nu$. A separação desses termos será necessária para a integração sob os propagadores dos férmions *MDO*, $d^d q (2\pi)^{-d} \{(q^2 - m^2)[(p - q)^2 - m^2]\}^{-1}$, presente em (E.1), posteriormente. Dito isto, segue que o $Tr[V^{\mu\nu} i\mathbb{1} V^{\alpha\beta} i\mathbb{1}]$ é explicitamente composto de:

- Termos sem q^α

$$\begin{aligned} & \kappa^2 \delta(q - p - r) \{ (\eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} [2(p \cdot q) m^2 - (p \cdot q)^2 - m^4] - p^\alpha p^\beta p^\mu p^\nu) \\ & + (\mathcal{A}^{\alpha\mu\beta\nu} + \mathcal{A}^{\alpha\nu\beta\mu} + \mathcal{A}^{\beta\mu\alpha\nu} + \mathcal{A}^{\beta\nu\alpha\mu}) \}, \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

em que $\mathcal{A}^{\alpha\mu\nu\beta} \equiv 1/4 \cdot \eta^{\alpha\mu} [p^\beta p^\nu (p^2 + q^2 - 2 \cdot q)]$.

- Termos com q^α

$$\kappa^2 \delta(q - p - r) \{ q^\alpha \mathcal{B}^{\beta\{\mu\nu\}} + q^\beta \mathcal{B}^{\alpha\{\mu\nu\}} + q^\mu \mathcal{B}^{\nu\{\alpha\beta\}} + q^\nu \mathcal{B}^{\mu\{\alpha\beta\}} \}, \quad (\text{E.3})$$

em que $\mathcal{B}^{\alpha\{\mu\nu\}} \equiv 1/4 \cdot [\eta^{\alpha\mu} p^\nu (p^2 - 2p \cdot q) + \eta^{\alpha\nu} p^\mu (p^2 - 2p \cdot q) + 4p^\alpha \eta^{\mu\nu} (p \cdot q - m^2) + (\eta^{\alpha\mu} p^\nu + \eta^{\alpha\nu} p^\mu) q^2]$.

- Termos com $q^\alpha q^\beta$

$$\kappa^2 \delta(q - p - r) \{ q^\alpha q^\beta p^\mu p^\nu + q^\mu q^\nu p^\alpha p^\beta + q^\alpha q^\mu \mathcal{C}^{\beta\nu} + q^\alpha q^\nu \mathcal{C}^{\beta\mu} + q^\beta q^\mu \mathcal{C}^{\alpha\nu} + q^\beta q^\nu \mathcal{C}^{\alpha\mu} \}, \quad (\text{E.4})$$

em que $\mathcal{C}^{\alpha\mu} \equiv 1/4 \cdot \eta^{\alpha\mu} (p^2 + q^2 - 2p \cdot q) - p^\alpha p^\mu$.

- Termos com $q^\alpha q^\beta q^\mu$

$$0. \quad (\text{E.5})$$

- Termos com $q^\alpha q^\beta q^\mu q^\nu$

$$-q^\alpha q^\beta q^\mu q^\nu. \quad (\text{E.6})$$

Tomando como base os trabalhos¹ de Bateman (1953) e Capper (1975), todos os termos do traço acoplados aos momentos dos tipos ("sem q^α " até os " $q^\alpha q^\beta q^\mu q^\nu$ ") serão integrados em $d^d q$ sobre os respectivos propagadores do férmion *MDO*, que possuem características semelhantes ao propagador de campo escalar. Assim sendo, tem-se que:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - m^2)[(p - q)^2 - m^2]} = J_1, \quad (\text{E.7})$$

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^\alpha}{(q^2 - m^2)[(p - q)^2 - m^2]} = p^\alpha J_2, \quad (\text{E.8})$$

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^\alpha q^\beta}{(q^2 - m^2)[(p - q)^2 - m^2]} = \eta^{\alpha\beta} J_3 + p^\alpha p^\beta J_4 \quad (\text{E.9})$$

e

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^\alpha q^\beta q^\mu q^\nu}{(q^2 - m^2)[(p - q)^2 - m^2]} &= (p^\alpha p^\beta p^\mu p^\nu) J_7 + (\eta^{\alpha\beta} p^\mu p^\nu + \eta^{\mu\nu} p^\alpha p^\beta + 4p^{(\alpha} \eta^{\beta)(\mu} p^{\nu)}) J_8 \\ &+ (2\eta^{\alpha(\nu} \eta^{\mu)\beta} + \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu}) J_9, \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

com a notação $\eta^{\alpha(\nu} \eta^{\mu)\beta} = 1/2 \cdot (\eta^{\alpha\nu} \eta^{\mu\beta} + \eta^{\alpha\mu} \eta^{\nu\beta})$.

Usando as bases de Bateman (1953), Ryder (1996) e o programa (WOLFRAM, 2014), chegamos a

$$\begin{aligned} J_1 &= \pi^{d/2} \Gamma(2 - d/2) \frac{(m^2)^{d/2-2}}{(2\pi)^d} \cdot {}_2F_1(2 - d/2, 1; 3/2; z) \\ \lim_{d \rightarrow 4} J_1 &= \pi^2 \Gamma(\epsilon) \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot 1, \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{J_1}{2} = \frac{\pi^{d/2}}{2} \Gamma(2 - d/2) \frac{(m^2)^{d/2-2}}{(2\pi)^d} \cdot {}_2F_1(2 - d/2, 1; 3/2; z) \\ \lim_{d \rightarrow 4} J_2 &= \frac{\pi^2}{2} \Gamma(\epsilon) \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot 1, \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \pi^{d/2} \Gamma(2 - d/2) \frac{(m^2)^{d/2-1}}{2(1 - d/2)(2\pi)^d} \cdot {}_2F_1(1 - d/2, 1; 3/2; z) \\ \lim_{d \rightarrow 4} J_3 &= \pi^2 \Gamma(\epsilon) \frac{-m^2}{(-2)(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{3} (3 - 2z), \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

¹ É importante enfatizar uma pequena sutileza no desenvolvimento dos cálculos: nos estudos de Capper (1975), como critério de base/comparação, o propagador do campo escalar é colocado na forma $(q^2 + m^2)^{-1}$, enquanto o férmion *MDO* possui o propagador $(q^2 - m^2)^{-1}$. A diferença está na transformação $(q^2 + m^2) \rightarrow (q^2 + (im)^2) = (q^2 - m^2)$ do Capper para o nosso contexto. Assim, a integração sobre $d^d q (2\pi)^{-d} \{(q^2 - m^2)[(p - q)^2 - m^2]\}^{-1}$ ocorre de forma similar a $d^d q (2\pi)^{-d} \{(q^2 + m^2)[(p - q)^2 + m^2]\}^{-1}$ porém, ajustando os termos que levam a quadrática em $m : m^2 \rightarrow (im)^2 = -m^2$ absorvidos em J_3, J_8 e z .

$$\begin{aligned}
J_4 &= \pi^{d/2} \Gamma(2 - d/2) \frac{(m^2)^{d/2-2}}{3(2\pi)^d} \cdot {}_3F_2(2 - d/2, 1, 3; 2, 5/2; z) \\
\lim_{d \rightarrow 4} J_4 &= \pi^2 \Gamma(\epsilon) \frac{1}{6(2\pi)^4} \cdot 1,
\end{aligned} \tag{E.14}$$

$$\begin{aligned}
J_7 &= \pi^{d/2} \Gamma(2 - d/2) \frac{(m^2)^{d/2-2}}{5(2\pi)^d} \cdot {}_3F_2(2 - d/2, 5, 1; 3, 7/2; z) \\
\lim_{d \rightarrow 4} J_7 &= \pi^2 \Gamma(\epsilon) \frac{1}{5(2\pi)^4} \cdot 1,
\end{aligned} \tag{E.15}$$

$$\begin{aligned}
J_8 &= \pi^{d/2} \Gamma(2 - d/2) \frac{(m^2)^{d/2-1}}{6(1 - d/2)(2\pi)^d} \cdot {}_3F_2(1 - d/2, 1, 3; 2, 5/2; z) \\
\lim_{d \rightarrow 4} J_8 &= \pi^2 \Gamma(\epsilon) \frac{-m^2}{(-6)(2\pi)^4} \cdot (1 - 3z/5),
\end{aligned} \tag{E.16}$$

$$\begin{aligned}
J_9 &= \pi^{d/2} \Gamma(2 - d/2) \frac{(m^2)^{d/2}}{4(d/2)(d/2 - 1)(2\pi)^d} \cdot {}_2F_1(-d/2, 1; 3/2; z) \\
\lim_{d \rightarrow 4} J_9 &= \pi^2 \Gamma(\epsilon) \frac{m^4}{8(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{15} (15 - 20z + 8z^2),
\end{aligned} \tag{E.17}$$

em que $\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma$, na qual Γ é a função gama de Euler, $\epsilon = 0^+$, γ a constante de Euler-Mascheroni, $z = p^2/4m^2$, ${}_2F_1(a, b; c; z)$ e ${}_3F_2(a, b, c; d, e; z)$ são funções hipergeométricas².

Portanto, inserindo-se os valores de J_i das equações (E.11)-(E.17) sobre as integrações (E.7)-(E.10) devido aos termos (E.2)-(E.6), obtemos o valor da expressão (E.1) para a correção em um *loop* da auto-energia do gráviton devido ao férmion *MDO*:

$$\begin{aligned}
\Pi_{(a)}^{\mu\nu, \alpha\beta}(p) &= \kappa^2 \delta(q - p - r) \{ (\eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} [2(p \cdot q)m^2 - (p \cdot q)^2 - m^4] - p^\alpha p^\beta p^\mu p^\nu) J_1 \\
&+ (\mathcal{A}^{\alpha\mu\beta\nu} + \mathcal{A}^{\alpha\nu\beta\mu} + \mathcal{A}^{\beta\mu\alpha\nu} + \mathcal{A}^{\beta\nu\alpha\mu}) J_1 \\
&+ (p^\alpha \mathcal{B}^{\beta\{\mu\nu\}} + p^\beta \mathcal{B}^{\alpha\{\mu\nu\}} + p^\mu \mathcal{B}^{\nu\{\alpha\beta\}} + p^\nu \mathcal{B}^{\mu\{\alpha\beta\}}) J_2 \\
&+ (\eta^{\alpha\beta} J_3 + p^\alpha p^\beta J_4) p^\mu p^\nu + (\eta^{\mu\nu} J_3 + p^\mu p^\nu J_4) p^\alpha p^\beta + (\eta^{\alpha\mu} J_3 + p^\alpha p^\mu J_4) \mathcal{C}^{\beta\nu} \\
&+ (\eta^{\alpha\nu} J_3 + p^\alpha p^\nu J_4) \mathcal{C}^{\beta\mu} + (\eta^{\beta\mu} J_3 + p^\beta p^\mu J_4) \mathcal{C}^{\alpha\nu} + (\eta^{\beta\nu} J_3 + p^\beta p^\nu J_4) \mathcal{C}^{\alpha\mu} \\
&- (p^\alpha p^\beta p^\mu p^\nu) J_7 - (\eta^{\alpha\beta} p^\mu p^\nu + \eta^{\mu\nu} p^\alpha p^\beta + 4p^{(\alpha} \eta^{\beta)(\mu} p^{\nu)}) J_8 \\
&- (2\eta^{\alpha(\nu} \eta^{\mu)\beta} + \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu}) J_9 \}.
\end{aligned} \tag{E.18}$$

² Um função hipergeométrica pode ser transcrita pela série ${}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \frac{a \cdot b}{c \cdot 1} z + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{c(c+1) \cdot 1 \cdot 2} z^2 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n$, sendo os subíndices ${}_2$ e ${}_1$ designados ao número de pólos para os coeficientes do numerador e denominador da série, respectivamente. As vírgulas entre os coeficientes a e b indicam que ambos estão no numerador da série, enquanto o ponto e vírgula entre c indica que este permanece ao denominador. Por fim, o último ponto e vírgula indica que o termo a sua direita é a variável da série, como pode ser visto em Barata (2021), cap.15. O mesmo raciocínio vale para ${}_3F_2(a, b, c; d, e; z)$, dentro do escopo das funções hipergeométricas generalizadas, denotadas por ${}_kF_l$.

APÊNDICE F – PARCELAS DA AMPLITUDE *MDO*-GRÁVITON

A amplitude de probabilidade associada ao espalhamento do campo fermiônico *MDO* em junção com o gráviton, como consta na Seção 6.3, é compactamente escrita na forma

$$\mathcal{M} = \frac{\kappa^2}{256m^2} \left(\tilde{\lambda}_\xi^S(k) E^{\alpha\beta} \lambda_\xi^S(p) + \tilde{\lambda}_\xi^S(k) M^{\alpha\beta} \lambda_\xi^S(p) \right) \mathcal{G}_{\mu\nu\alpha\beta} \left(\tilde{\lambda}_\xi^S(k') E^{\mu\nu} \lambda_\xi^S(p') + \tilde{\lambda}_\xi^S(k') M^{\mu\nu} \lambda_\xi^S(p') \right), \quad (\text{F.1})$$

sendo os termos $(E^{\alpha\beta}, E^{\mu\nu})$ e $(M^{\alpha\beta}, M^{\mu\nu})$ oriundos das parcelas de comportamento “escalar” e fermiônico do vértice de interação

$$V^{\mu\nu} = \frac{\kappa}{16} \underbrace{[4(k' \cdot p' - m^2)\eta^{\mu\nu} - 4(k'^\mu p'^\nu + k'^\nu p'^\mu)]}_{E^{\mu\nu}} + \underbrace{[\gamma^\mu, \not{p}'](p' + k')^\nu + [\gamma^\nu, \not{p}'](p' + k')^\mu]}_{M^{\mu\nu}}, \quad (\text{F.2})$$

com o propagador do gráviton expresso por

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2r^2} (\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} + \eta_{\beta\mu}\eta_{\alpha\nu} - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}). \quad (\text{F.3})$$

Realizando a contração do propagador do gráviton com as parcelas do vértice presentes na equação (F.1), temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\alpha\beta\mu\nu} E^{\mu\nu} &= \frac{1}{2r^2} (\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} + \eta_{\beta\mu}\eta_{\alpha\nu} - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}) [4(k' \cdot p' - m^2)\eta^{\mu\nu} - 4(k'^\mu p'^\nu + k'^\nu p'^\mu)] \\ &= \frac{1}{2r^2} [8(m^2\eta_{\alpha\beta} - k'_\alpha p'_\beta - k'_\beta p'_\alpha)] \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\alpha\beta\mu\nu} M^{\mu\nu} &= \frac{1}{2r^2} (\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} + \eta_{\beta\mu}\eta_{\alpha\nu} - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}) [[\gamma^\mu, \not{p}'](p' + k')^\nu + [\gamma^\nu, \not{p}'](p' + k')^\mu] \\ &= \frac{1}{2r^2} [2[\gamma_\beta, \not{p}'](k' + p')_\alpha + 2[\gamma_\alpha, \not{p}'](k' + p')_\beta - 2[(\not{p}' + \not{k}'), \not{p}']\eta_{\alpha\beta}], \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

admitindo-se a simetria $(\mu\nu) - (\alpha\beta)$ no propagador.

Em posse das quantidades (F.4)-(F.5), dos valores explícitos de $E^{\alpha\beta}$ e $M^{\alpha\beta}$ via equação (F.2), a amplitude (F.1) torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{\kappa^2}{256m^2 r^2} [(4(p \cdot k - m^2)\eta^{\alpha\beta} - 4(k^\alpha p^\beta + k^\beta p^\alpha)) \underbrace{\tilde{\lambda}_\xi^S(k) \lambda_\xi^S(p)}_{+2m} + \tilde{\lambda}_\xi^S(k) ([\gamma^\alpha, \not{p}'](p + k)^\beta \\ &+ [\gamma^\beta, \not{p}'](k + p)^\alpha) \lambda_\xi^S(p)] \times [4(m^2\eta_{\alpha\beta} - k'_\alpha p'_\beta - k'_\beta p'_\alpha) \underbrace{\tilde{\lambda}_\xi^S(k') \lambda_\xi^S(p')}_{+2m} + \tilde{\lambda}_\xi^S(k') ([\gamma_\beta, \not{p}'](k' + p')_\alpha \\ &+ [\gamma_\alpha, \not{p}'](k' + p')_\beta - [(\not{p}' + \not{k}'), \not{p}']\eta_{\alpha\beta}) \lambda_\xi^S(p')]. \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Fazendo a distributiva do resultado acima, obtemos a contração de quatro parcelas, a saber:

- Primeira parcela

$$64m^2[(p \cdot k - m^2)\eta^{\alpha\beta} - (k^\alpha p^\beta + k^\beta p^\alpha)][m^2\eta_{\alpha\beta} - k'_\alpha p'_\beta - k'_\beta p'_\alpha] = 64m^2[4m^2(p' \cdot k') - 4m^4 + 2(k' \cdot k)(p' \cdot p)]; \quad (\text{F.7})$$

- Segunda parcela

$$\begin{aligned} & 8m((p \cdot k - m^2)\eta^{\alpha\beta} - (k^\alpha p^\beta + k^\beta p^\alpha))\tilde{\lambda}_\xi^S(k')([\gamma_\beta, \not{p}](k' + p')_\alpha \\ & + [\gamma_\alpha, \not{p}](k' + p')_\beta - [(\not{p}' + \not{k}'), \not{p}]\eta_{\alpha\beta})\lambda_\xi^S(p') = \\ & 16m^3\tilde{\lambda}_\xi^S(k')[(\not{k}' + \not{p}'), \not{p}]\lambda_\xi^S(p') - 16mk(k' + p')\tilde{\lambda}_\xi^S(k')[\not{p}', \not{p}]\lambda_\xi^S(p') \\ & - 16mp(p' + k')\tilde{\lambda}_\xi^S(k')[\not{k}'', \not{p}]\lambda_\xi^S(p'); \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

- Terceira parcela

$$\begin{aligned} & \tilde{\lambda}_\xi^S(k)([\gamma^\alpha, \not{p}](p + k)^\beta + [\gamma^\beta, \not{p}](k + p)^\alpha)\lambda_\xi^S(p)8(m^2\eta_{\alpha\beta} - k'_\alpha p'_\beta - k'_\beta p'_\alpha) = \\ & 16m[m^2\tilde{\lambda}_\xi^S(k)[(\not{p}' + \not{k}''), \not{p}]\lambda_\xi^S(p) - p' \cdot (p + k)\tilde{\lambda}_\xi^S(k)[\not{k}'', \not{p}]\lambda_\xi^S(p)] - k' \cdot (p + k)\tilde{\lambda}_\xi^S(k)[\not{p}', \not{p}]\lambda_\xi^S(p)]; \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

- Quarta parcela

$$\begin{aligned} & \tilde{\lambda}_\xi^S(k)([\gamma^\alpha, \not{p}](p + k)^\beta + [\gamma^\beta, \not{p}](k + p)^\alpha)\lambda_\xi^S(p)\tilde{\lambda}_\xi^S(k')([\gamma_\beta, \not{p}](k' + p')_\alpha + [\gamma_\alpha, \not{p}](k' + p')_\beta \\ & - [(\not{p}' + \not{k}'), \not{p}]\eta_{\alpha\beta})\lambda_\xi^S(p') = \\ & 2\tilde{\lambda}_\xi^S(k)[\gamma^\alpha, \not{p}]\lambda_\xi^S(p)\tilde{\lambda}_\xi^S(k')[\gamma_\alpha, \not{p}](\not{p}' + \not{k}'')(p + k)\lambda_\xi^S(p'). \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Portanto, com as parcelas (F.7)-(F.10), obtemos a amplitude de espalhamento em nível de árvore para todas as trocas de quadrimomento possíveis do *MDO* e o gráviton, transcrevendo a equação (F.6) para a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{C} \left[64m^2(4m^2(p' \cdot k') - 4m^4 + 2(k \cdot k')(p \cdot p')) + 16m^3\tilde{\lambda}_{\{+,-\}}^S(k)[\not{k}' + \not{p}', \not{p}]\lambda_{\{+,-\}}^S(p') \right. \\ & - 16mk \cdot (k' + p')\tilde{\lambda}_{\{+,-\}}^S(k')[\not{p}, \not{p}]\lambda_{\{+,-\}}^S(p') - 16mp \cdot (k' + p')\tilde{\lambda}_{\{+,-\}}^S(k')[\not{k}, \not{p}]\lambda_{\{+,-\}}^S(p') \\ & + 16m[m^2\tilde{\lambda}_{\{+,-\}}^S(k)[\not{k}' + \not{p}', \not{p}]\lambda_{\{+,-\}}^S(p) - p' \cdot (k + p)\tilde{\lambda}_{\{+,-\}}^S(k)[\not{k}'', \not{p}]\lambda_{\{+,-\}}^S(p) \\ & - k' \cdot (k + p)\tilde{\lambda}_{\{+,-\}}^S(k)[\not{p}'', \not{p}]\lambda_{\{+,-\}}^S(p)] + 2\tilde{\lambda}_{\{+,-\}}^S(k)[\gamma^\alpha, \not{p}]\lambda_{\{+,-\}}^S(p)\tilde{\lambda}_{\{+,-\}}^S(k') \\ & \left. \times [\gamma_\alpha, \not{p}](p' + k') \cdot (p + k)\lambda_{\{+,-\}}^S(p') \right], \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

em que $\mathcal{C} = \kappa^2/(256m^2r^2)$, sendo r o momento do gráviton.

APÊNDICE G – ESTRUTURA EXPLÍCITA DOS ESPINORES *MDO*

Os espinores *Elko/MDO* são construídos sob as bases dos espinores de mão esquerda de Weyl cujas componentes se revelam como

$$\phi_L^+(k^\mu) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \quad (\text{G.1})$$

e

$$\phi_L^-(k^\mu) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ \cos(\theta/2)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}, \quad (\text{G.2})$$

condicionando-se que para uma teoria com partículas massivas ser consistente, a massa de tal objeto está vinculada a forma m^j , sendo j o *spin* associado à partícula de massa m (MARINOV, 1968). Por essa razão, o fator de massa \sqrt{m} é imposto “à mão” sob as soluções (G.1) e (G.2) (AHLUWALIA; JOHNSON; GOLDMAN, 1994)-(AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005a), uma vez que espinores em repouso no espaço de representação $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ não existem no limite de massa nula. Cabe dizer que o vetor unitário \hat{p} que alicerça esses espinores de Weyl é parametrizado em coordenadas esféricas e representado como

$$\hat{p} = (\text{sen}(\theta)\cos(\varphi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\varphi), \cos(\theta)). \quad (\text{G.3})$$

De forma explícita, as estruturas espinoriais *Elko/MDO* autoconjugados (*S*) e anti-autoconjugados (*A*) são:

$$\lambda_{\{+,-\}}^S(p^\mu) = \mathcal{B}_+ \sqrt{m} \begin{pmatrix} i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ i\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{G.4})$$

$$\lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu) = \mathcal{B}_- \sqrt{m} \begin{pmatrix} -i\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{G.5})$$

$$\lambda_{\{+,-\}}^A(p^\mu) = \mathcal{B}_+ \sqrt{m} \begin{pmatrix} i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ i\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ -\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{G.6})$$

$$\lambda_{\{-,+\}}^A(p^\mu) = \mathcal{B}_- \sqrt{m} \begin{pmatrix} i\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{G.7})$$

em que \mathcal{B}_\pm são os *boosts* aplicados a partir do espinoir no referencial de repouso $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, $\lambda_{\{\pm, \mp\}}^{S/A}(m, \mathbf{0})$, dados por

$$\mathcal{B}_\pm = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 \pm \frac{p}{E+m} \right), \quad (\text{G.8})$$

sendo $p = |\mathbf{p}|$.