



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Câmpus de Presidente Prudente

# Oscilações Periódicas e Caóticas em Sistemas Diferenciais que Modelam Circuitos Elétricos com Memristores Localmente Ativos

Liner Samer Albornoz Sandoval

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Messias

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Outubro de 2021



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Oscilações Periódicas e Caóticas em Sistemas  
Diferenciais que Modelam Circuitos Elétricos  
com Memristores Localmente Ativos**

Liner Samer Albornoz Sandoval

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Messias

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Outubro de 2021

S218o	<p>Sandoval, Liner Samer Albornoz</p> <p>Oscilações Periódicas e Caóticas em Sistemas Diferenciais que Modelam Circuitos Elétricos com Memristores Localmente Ativos / Liner Samer Albornoz Sandoval. -- Presidente Prudente, 2021 90 p.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente Orientador: Marcelo Messias</p> <p>1. Memristor. 2. Sistemas memristivos. 3. Memristor localmente ativo. 4. Oscilações periódicas. 5. Comportamento caótico. I. Título.</p>
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** Oscilações periódicas e caóticas em sistemas diferenciais que modelam circuitos elétricos com memristores localmente ativos

**AUTOR: LINER SAMER ALBORNOZ SANDOVAL**

**ORIENTADOR: MARCELO MESSIAS**

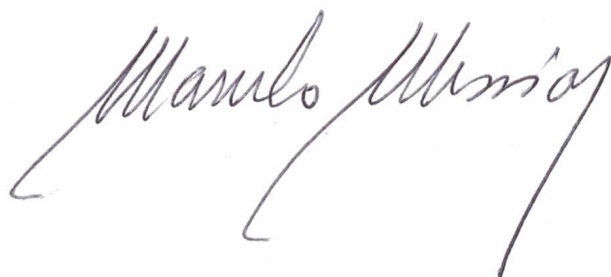
Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO MESSIAS (Participação Virtual)  
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Profa. Dra. VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI (Participação Virtual)  
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Prof. Dr. ANDERSON LUIZ MACIEL (Participação Virtual)  
Departamento de Matemática / Universidade Federal de Santa Maria

Presidente Prudente, 20 de outubro de 2021



*A minha mãe Regina, minha namorada Katy, minha família, amigos e colegas da  
Pós-graduação*

---

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha mãe Regina por me dar vida, família e amigos(as). Agradeço a ela por me ensinar que um abraço dela cura tudo. A Katy, minha namorada e num futuro não muito longe minha companheira na vida, por todo amor, compreensão e apoio.

Aos meus irmãos e irmãs Ronal, Miguel, Deysi, Analí e Rosangela que sempre acreditaram em mim, por sempre me apoiarem.

Ao Professor Marcelo Messias pela paciência, apoio, motivação por todo o seu tempo me guiando nessa fase da minha vida profissional.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da UNESP Professores com muito conhecimento, grandes pesquisadores e, acima de tudo, pessoas muito simpáticas.

A todos os meus colegas da Pós-Graduação pela amizade, principalmente ao Yino que, em pouco tempo nos conhecendo, foi um excelente parceiro de estudos.

Agradeço também a Cinthia, secretária da Pós-Graduação, por ser uma pessoa muito gentil e por toda a ajuda e orientação que ela me deu.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES)-Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

*“ Álgebra é a oferta feita pelo diabo  
para o matemático. O diabo diz:  
Eu vou te dar esta poderosa máquina,  
vai responder a qualquer pergunta  
que você quiser.  
Tudo que você precisa fazer  
é me dar sua alma:  
Desista da geometria e você terá  
esta máquina maravilhosa”.*  
**Michael Atiyah**



# Resumo

---

O memristor (ou resistor com memória) é considerado o quarto elemento passivo fundamental de um circuito elétrico, em adição aos conhecidos resistores, capacitores e indutores. Neste trabalho, apresentamos um pequeno histórico sobre a descoberta deste quarto elemento, sua construção física e descrevemos algumas de suas principais propriedades, em termos das equações que o determinam e de exemplos. Em seguida, apresentamos o estudo de sistemas diferenciais em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , que modelam circuitos elétricos envolvendo um memristor localmente ativo, controlado por corrente. Tais modelos foram propostos no artigo [12], que é a base do estudo aqui apresentado.

O sistema diferencial planar, que modela um circuito envolvendo um memristor, um indutor e um resistor, possui cinco pontos de equilíbrio, duas selas, um nó estável, um nó instável e um foco, que pode ser estável ou instável, dependendo dos valores dos parâmetros. Usando a teoria das bifurcações, mostramos que tal sistema pode apresentar oscilações periódicas, provenientes de uma bifurcação do tipo Hopf, que ocorre no ponto de equilíbrio tipo foco, dando origem a um ciclo limite estável. Em adição a este resultado, obtido também em [12] por meio de propriedades do circuito elétrico, mostramos que o sistema planar pode apresentar uma órbita homoclínica, que delimita uma região no plano de fase no interior da qual o sistema apresenta oscilações periódicas, sendo que no seu exterior as soluções tendem para um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Desse modo, mostramos que as separatrizes dos pontos de sela desempenham um papel importante na dinâmica do modelo estudado. Vale destacar ainda que as oscilações periódicas ocorrem numa região em que o memristor é localmente ativo.

No sistema diferencial definido em  $\mathbb{R}^3$ , que modela o circuito obtido adicionando-se um capacitor ao circuito planar descrito acima, além da ocorrência de oscilações periódicas, podem ocorrer também oscilações caóticas, dependendo dos valores dos parâmetros. Observamos numericamente que as oscilações periódicas existentes evoluem para caótica via uma cascata de duplicação de períodos, uma das conhecidas rotas para o caos, que ocorre ao variarmos um dos parâmetros do sistema. Novamente, as oscilações periódicas e caóticas estão relacionadas à atividade local do memristor.

Ao longo do trabalho são apresentados gráficos de funções e de soluções dos sistemas diferenciais em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , para um melhor entendimento do estudo, os quais são feitos utilizando os softwares *MAPLE<sup>TM</sup>*, MatLab e wxMaxima. Os estudos aqui apresentados contribuem para o entendimento da complexa dinâmica de circuitos elétricos envolvendo memristores como componentes ativos e, conseqüentemente, para a utilização desses componentes em áreas como a criptografia, construção de memórias não voláteis, redes neurais, inteligência artificial, dentre outras.

**Palavras-Chave:** *Memristor, sistemas memristivos, memristor localmente ativo, oscilações periódicas, comportamento caótico.*



# Abstract

---

The memristor (or memory resistor) is considered the fourth fundamental passive element of an electrical circuit, in addition to the well-known resistors, capacitors and inductors. In this paper we present a short history of the discovery of this fourth element, its physical construction and describe some of its main properties, in terms of the equations that determine it and examples. We then present the study of differential systems in  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}^3$ , which model electric circuits involving a locally-active, current-controlled memristor. Such models were proposed in the paper [12], which is the basis of the study presented here.

The planar differential system, which models a circuit involving a memristor, an inductor, and a resistor, has five equilibrium points, two saddles, a stable node, an unstable node, and a focus, which can be stable or unstable depending on the parameter values. Using the theory of bifurcations, we show that such a system can exhibit periodic oscillations, arising from a Hopf-type bifurcation, which occurs at the focus-type equilibrium point, giving rise to a stable limit cycle. In addition to this result, already obtained in [12] by means of properties of the electric circuit, we show that the planar system can present a homoclinic orbit, which delimits a region in the phase plane inside which the system presents periodic oscillations, and in its exterior the solutions tend to an asymptotically stable equilibrium point. Thus, we show that the separatrices of the saddle points play an important role in the dynamics of the studied model. It is also worth noting that the periodic oscillations occur in a region where the memristor is locally active.

In the differential system defined in  $\mathbb{R}^3$ , which models the circuit obtained by adding a capacitor to the planar circuit described above, in addition to the occurrence of periodic oscillations, chaotic oscillations can also occur, depending on the parameter values. We observe numerically that the existing periodic oscillations evolve to chaotic ones via a cascade of period doubling bifurcations, one of the known routes to chaos, which occurs when we vary one of the parameters of the system. Again, the periodic and chaotic oscillations are related to the region where the memristor is locally-active.

Throughout the paper, graphs of functions and solutions of the differential systems in  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}^3$  are presented for a better understanding of the study, which are done using the software *MAPLE<sup>TM</sup>*, MatLab and wxMaxima.

The studies presented here contribute to the understanding of the complex dynamics of electrical circuits involving memristors as active components and, consequently, to the use of these components in areas such as cryptography, construction of non-volatile memories, neural networks, artificial intelligence, among others.

**Keywords:** *Memristor, memristive systems, locally active memristor, periodic oscillations, chaotic behavior.*



# Sumário

---

<b>Resumo</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2 Preliminares</b>	<b>13</b>
2.1 Estudo de estabilidade . . . . .	13
2.1.1 Estabilidade de Lyapunov . . . . .	13
2.2 Órbitas Homoclínicas e Heteroclínicas . . . . .	17
2.2.1 Estabilidade estrutural e teoria de bifurcações . . . . .	20
2.2.2 Estabilidade estrutural e o Teorema de Peixoto . . . . .	20
2.3 Bifurcações em pontos de equilíbrio não hiperbólicos . . . . .	23
2.4 Bifurcação de Hopf e bifurcação de ciclos limites de um foco múltiplo . . . . .	26
2.5 Bifurcações Homoclínicas . . . . .	28
<b>3 Circuitos elétricos</b>	<b>31</b>
3.1 Variáveis do circuito . . . . .	31
3.2 Elementos físicos de um circuito . . . . .	33
3.2.1 Elementos ativos . . . . .	33
3.2.2 Elementos passivos . . . . .	33
3.2.3 Leis físicas . . . . .	38
3.3 Circuitos elétricos . . . . .	41
3.3.1 Circuito LC . . . . .	41
3.3.2 Circuito RLC . . . . .	42
3.4 Memristor: o quarto elemento fundamental . . . . .	44
3.4.1 Histórico sobre a descoberta do memristor . . . . .	44
3.4.2 Memristência e memdutância . . . . .	45
3.4.3 Sistemas memristivos . . . . .	49
3.4.4 Curva ou ciclo (loops) de histerese . . . . .	51
3.4.5 Possíveis aplicações dos sistemas memristivos . . . . .	53
<b>4 Circuitos elétricos envolvendo memristores</b>	<b>55</b>
4.1 Circuito elétrico com memristor localmente ativo . . . . .	55
4.1.1 Não volatilidade do memristor localmente ativo . . . . .	56
4.1.2 Mecanismo de comutação ou de mudança do memristor . . . . .	57
4.1.3 Região localmente ativa do memristor . . . . .	59
4.2 Circuito oscilador periódico com memristor . . . . .	61
4.2.1 Estabilidade dos equilíbrios e bifurcação de Hopf . . . . .	63
4.2.2 Existência de uma órbita homoclínica . . . . .	64
4.3 Circuito equivalente de sinal pequeno . . . . .	66

4.4	De oscilações periódicas ao comportamento caótico . . . . .	68
4.4.1	Estabilidade linear dos equilíbrios . . . . .	69
4.5	Modelo simplificado de memristor localmente ativo . . . . .	75
4.5.1	Modelo oscilatório com memristor simplificado . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>83</b>
	<b>Referências</b>	<b>83</b>

# Introdução

Por cerca de 150 anos, os três elementos passivos fundamentais de um circuito elétrico conhecidos eram o capacitor, descoberto em 1745, o resistor, em 1827, e o indutor, em 1831 [23]. Até que, em 1971, Leon Chua, professor de engenharia elétrica na Universidade da Califórnia, em Berkeley, publicou o artigo [5], no qual postulou (teoricamente) a existência de um quarto elemento fundamental, que chamou de *Memristor*, uma contração de “memory resistor”, pois tal elemento tinha a propriedade de armazenar (ou memorizar) a última informação nele armazenada, mesmo após ser desligado. Além disso, Chua provou no seu artigo que o comportamento do memristor não podia ser duplicado por nenhum circuito construído utilizando os outros três elementos, daí o fato dele ser considerado o quarto elemento passivo fundamental.

De modo simplificado, podemos dizer que um memristor é um resistor com resistência variável. Enquanto que um resistor comum é descrito pela primeira Lei de Ohm,  $V = RI$ , em que  $V$  é a tensão,  $I$  a corrente e  $R$  sua resistência constante, um memristor é descrito pela relação  $V = M(q, x)I$ , onde  $M(q, x)$  pode ser vista como uma “resistência variável”, sendo uma função não-linear chamada de *memristência*. Mesmo quando a tensão for desligada, o memristor guarda sua última memristência, até que a tensão seja ligada novamente, seja um dia ou um ano depois de desligada. No Capítulo 3 deste trabalho, apresentamos de maneira mais detalhada as propriedades do memristor.

Este quarto elemento fundamental dos circuitos elétricos permaneceu como um elemento teórico por mais de 40 anos, até que um grupo de pesquisadores dos laboratórios da HP publicaram o artigo [22] no qual afirmavam ter construído um elemento físico, em escala nanométrica, com as propriedades do memristor postulado por Chua em 1971. Na figura 1.1, mostramos o memristor construído na HP e apresentado no artigo [22]. Essa descoberta teve um grande impacto na comunidade científica e, a partir de então, o interesse no estudo dos memristores e suas propriedades, e também na sua interação com os outros elementos fundamentais, em circuitos elétricos, cresceu exponencialmente. Isto ocorreu devido ao grande potencial de aplicações dos memristores na construção de memórias não voláteis de computadores e, mais do que isso, na construção de dispositivos elétricos capazes de simular as funções do cérebro humano, as chamadas redes neurais artificiais, conforme descrito em [23]. Uma busca atual (Outubro 2021) no dispositivo Google com a palavra “memristor” resultou em 614.000 resultados relacionados, mostrando o interesse da comunidade científica sobre este componente.

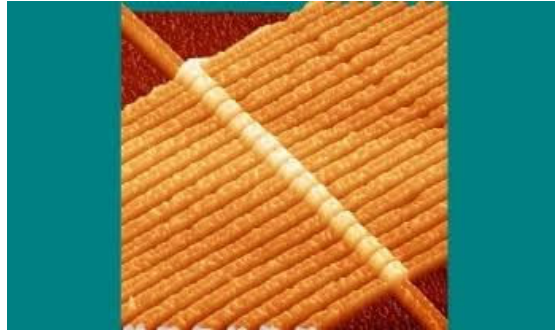


Figura 1.1: Memristor construído nos laboratório da HP (cf. [22]).

Como a produção dos memristores em escala industrial é ainda muito difícil e de alto custo, torna-se importante o estudo teórico de propriedades destes elementos, com base naquelas apresentadas por Chua no artigo seminal [5] e no mais recente [8], além do estudo do seu comportamento quando conectado em circuitos elétricos com os outros componentes fundamentais (resistores, capacitores e indutores). As equações matemáticas que modelam os memristores e também os circuitos elétricos que os contêm envolvem equações diferenciais ordinárias (ou sistemas dessas equações). Assim, é importante o estudo dos sistemas diferenciais que modelam tais circuitos. Neste contexto, o objetivo principal do presente trabalho é o estudo de sistemas diferenciais, no plano e no espaço  $\mathbb{R}^3$ , que modelam alguns circuitos elétricos que envolvem memristores localmente ativos (que serão descritos no Capítulo 3). Os resultados apresentados, envolvendo circuitos com elementos memristivos, foram abordados usando a teoria dos circuitos, como as leis de Kirchhoff e as equações diferenciais ordinárias. Dentro desses modelos, os sistemas memristivos são incluídos e modelados como sistemas dinâmicos. A referência principal para este estudo foi o artigo [12].

O trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 2, apresentamos alguns elementos da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias e da teoria das bifurcações, os quais foram extraídos principalmente das referências [9, 11, 15, 18, 20]. No Capítulo 3, apresentamos uma síntese da teoria dos circuitos elétricos, com base em informações encontradas na literatura, principalmente a referência [14]. Neste capítulo, apresentamos também de forma mais detalhada os conceitos de diferentes tipos de memristores, suas principais propriedades e característica, extraídas da referência [6]. No Capítulo 4, apresentamos um estudo detalhado de um modelo relativamente novo de memristor [12], que possui um comportamento localmente ativo, além de apresentar dois pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis em seu gráfico de desligamento (POP) e, portanto, não exibe volatilidade (conforme descrito no Capítulo 3). Mostra-se que um circuito elétrico construído conectando-se um memristor localmente ativo com os outros elementos básicos de um circuito elétrico, pode apresentar oscilações periódicas (no plano), provenientes de uma bifurcação do tipo Hopf, e também órbitas homoclínicas a um ponto de sela, que determinam regiões no plano de fase onde o circuito é oscilatório e onde tende para um equilíbrio estável. Além disso, conectando-se um elemento a mais no circuito, obtemos um sistema diferencial no  $\mathbb{R}^3$  que apresenta oscilações caóticas.



## Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias e bifurcações de suas soluções, que serão utilizados nos próximos capítulos. Os resultados aqui apresentados tem como base as referências [9, 10, 11, 18, 19, 21, 20].

### 2.1 Estudo de estabilidade

A teoria de estabilidade estuda o comportamento das soluções de equações diferenciais e sistemas dinâmicos, isto é, estuda como diferem as soluções mediante pequenas perturbações nas condições iniciais e qual seu comportamento limite.

#### 2.1.1 Estabilidade de Lyapunov

Consideremos o sistema

$$x' = f(t, x) \tag{2.1}$$

onde  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua,  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  aberto.

**Definição 1** *Seja  $\varphi(t)$  uma solução do sistema (2.1) definida para  $t \geq 0$ . Diz-se que  $\varphi(t)$  é estável (no sentido de Lyapunov) se para todo  $\varepsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que, se  $\psi(t)$  é solução de (2.1) e  $\|\psi(0) - \varphi(0)\| < \delta$ , então  $\psi(t)$  está definida para todo  $t \geq 0$  e  $\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ ,  $\forall t \geq 0$ .*

Se além disso  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\psi(t) - \varphi(t)\| = 0$ , então  $\varphi$  diz-se **assintoticamente estável**.

As figuras 2.1 e 2.2 dão uma ideia dessas definições.

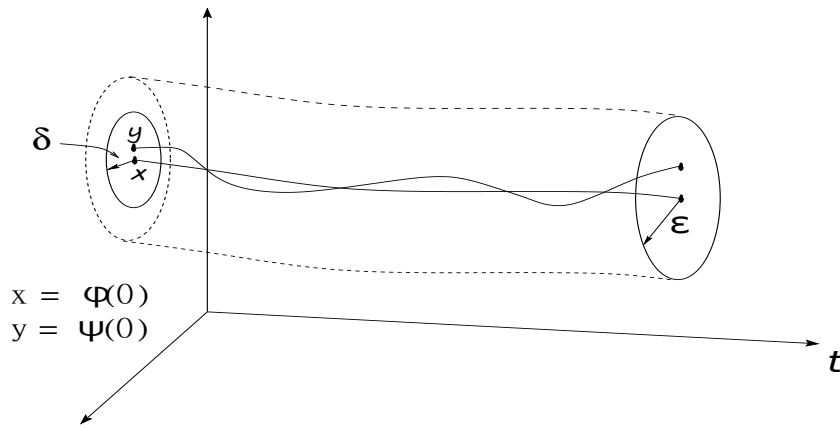


Figura 2.1: Estabilidade no sentido de Lyapounov.

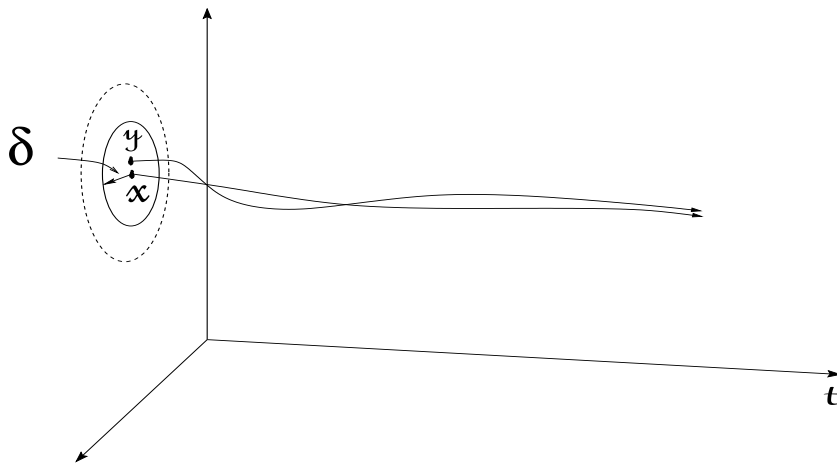


Figura 2.2: Estabilidade assintótica.

**Exemplo. 1** Considere a equação de segunda ordem que modela o movimento de um pêndulo sem amortecimento, dada por  $x'' = -g \sin x$ , ou equivalentemente pelo sistema planar

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -g \sin x. \end{cases}$$

A figura 2.3 mostra um esboço do plano de fase deste sistema, com algumas soluções e o campo de vetores associado. Pode-se observar que a solução constante (ponto de equilíbrio)  $(0,0)$  é estável, porém não é assintoticamente estável. Já a solução constante  $(\pi,0)$  é instável.

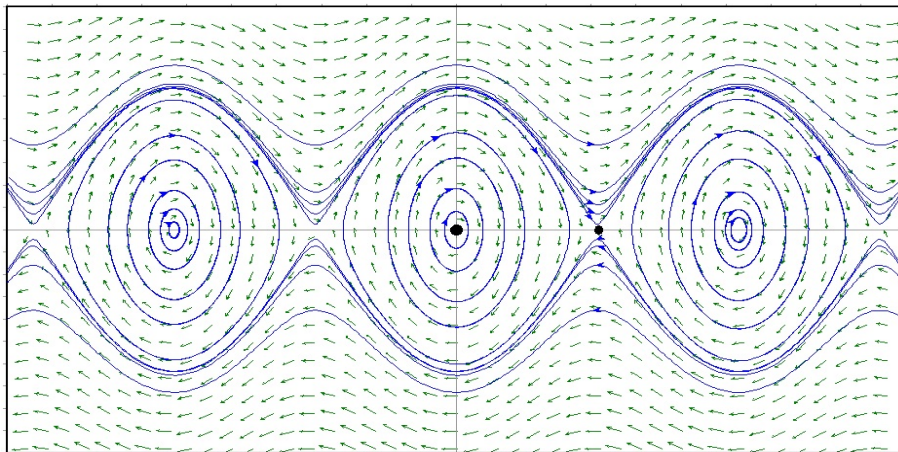


Figura 2.3: Estabilidade em  $(0,0)$  no pêndulo simples.

**Exemplo. 2** Consideremos o sistema linear

$$x' = A(t)x, \quad (2.2)$$

onde  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma função matricial contínua e  $T$ -periódica. Pelo Teorema de Floquet, segue que existem matrizes  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  contínua e  $T$ -periódica,  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tais que  $X(t) = C(t)e^{tB}$  (solução fundamental). Logo se a matriz  $B$  neste teorema for um atrator hiperbólico (ou seja, todos os autovalores da matriz  $B$  tem parte real negativa). Então as trajetórias de (2.2) são assintoticamente estáveis.

De fato:

Se  $x(t) = X(t)x_0$  e  $y(t) = X(t)y_0$  são soluções de (2.2)

Dado  $\varepsilon > 0$  é suficiente tomar  $\delta = \frac{\varepsilon}{K \cdot \max_{t \in \mathbb{R}} \|C(t)\|} > 0$ ; tal que, se  $\|x - y\| < \delta$  então

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &= \|X(t)x_0 - X(t)y_0\| = \|X(t)(x_0 - y_0)\| = \|C(t)e^{tB}(x_0 - y_0)\| \leq \\ &\leq \left( \max_{t \in \mathbb{R}} \|C(t)\| \right) \|e^{tB}(x_0 - y_0)\| \leq \left( \max_{t \in \mathbb{R}} \|C(t)\| \right) K e^{-t\mu} \|x_0 - y_0\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

## O critério de Lyapunov

Seja  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  no aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  e consideremos o sistema autônomo

$$x' = F(x) \quad (2.3)$$

e seja  $x_0 \in U$  um ponto singular (ou estacionário) de (2.3).

Seja  $\varphi_x(t)$ , com  $\varphi_x(0) = x$ , a solução de (2.3) passando pelo ponto  $x \in U$ . Seja  $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função diferenciável. Vamos denotar para cada  $x \in U$ ,  $\dot{V}(x) := DV(x)(F(x))$ , ou seja,  $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(\varphi_x(t))|_{t=0}$  (a igualdade decorre da regra de cadeia).

**Definição 2** Uma função de Lyapunov para  $x_0 \in U$  é uma função  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  satisfazendo as seguintes condições:

$$(a) \quad V(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad V(x) > 0, \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}.$$

- (b)  $\dot{V} \leq 0$  em  $U \iff \dot{V}(x) := DV(x)(F(x)) \leq 0, \forall x \in U$   
 $\iff$  para cada  $x \in U$ :  $\frac{d}{dt}V(\varphi_x(t))|_{t=0} \leq 0$ , onde  $\varphi_x(t)$  é a trajetória de  $x$ .

A função de Lyapunov  $V$  diz-se estrita quando

- (c)  $\dot{V} < 0$  em  $U \setminus \{x_0\}$ .

**Exemplo. 3 (Pêndulo com atrito)** Seja  $x' = F(x)$ , onde  $F : U = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado como  $F(x, y) = (y, -g \sin x - cy)$  onde  $g, c > 0$ , ou equivalentemente o sistema planar

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -g \sin x - cy. \end{cases}$$

O ponto  $(x_0, y_0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$  é um ponto singular pois  $F(0, 0) = (0, 0)$ .

Seja

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + g(1 - \cos x). \end{aligned}$$

**Afirmação.**  $V$  é uma função de Lyapunov para  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

De fato

i)  $V(0, 0) = 0$  e  $V(x, y) > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

ii) Agora seja  $\bar{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  qualquer e seja  $\varphi_{\bar{x}}(t) = (x(t), y(t))$  sua trajetória; logo temos

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &= \frac{d}{dt}V(\varphi_{\bar{x}}(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}V(x(t), y(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}y(t)^2 + g(1 - \cos x(t))\right)|_{t=0} \\ &= y(t) \cdot y'(t) + g \sin x(t) \cdot x'(t)|_{t=0} = [y(t)(-g \sin x(t) - cy(t)) + g \sin x(t)(y(t))]|_{t=0} \\ &= -c \cdot g \cdot y(t)^2|_{t=0} = -c \cdot g \cdot y(0)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto  $\dot{V}(\bar{x}) \leq 0, \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2$ .

**Teorema 1** Seja  $x_0 \in U$ , um ponto estacionário de (2.3), isto é,  $F(x_0) = 0$ . Então,

- a) Se existe uma função de Lyapunov para  $x_0$ , então  $x_0$  é estável.  
b) Se existe uma função de Lyapunov estrita para  $x_0$ , então  $x_0$  é assintoticamente estável.

**Demonstração.**

Por hipótese temos que existe  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Lyapunov para  $x_0$ .

Logo, dado  $\varepsilon > 0$  temos que existe  $M_\varepsilon = \inf\{V(x) : x \in \partial B_\varepsilon(x_0)\} > 0$ , pois  $V(x) > 0$  para todo  $x \in U \setminus \{x_0\}$ .

Logo, pela continuidade de  $V$  em  $x_0$  temos que existe  $\delta > 0$  tal que se  $x \in B_\delta(x_0)$  então  $|V(x) - V(x_0)| < M_\varepsilon$ .

Com isso, temos que

$$V(x) < M_\varepsilon, \quad \forall x \in B_\delta(x_0).$$

Tomando  $\tilde{\delta} = \min\{\delta, \varepsilon\} > 0$ , temos que

$$V(x) < M_\varepsilon, \quad \forall x \in B_{\tilde{\delta}}(x_0). \quad (2.4)$$

Logo, como  $V \circ \varphi_x(\cdot)$  é não crescente, o que implica que para cada  $x \in B_{\tilde{\delta}}(x_0)$  fixo, tem-se:

$$V(\varphi_x(t)) \leq V(\varphi_x(0)) = V(x) < M_\varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

logo

$$\varphi_x(t) \notin \partial B_\varepsilon(x_0), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.5)$$

Agora seja  $C_x = \{\varphi_x(t) : t \geq 0\}$  que é conexo, pois é a imagem contínua do intervalo  $[0, +\infty)$  por  $\varphi_x(\cdot)$ , e seja  $W = B_\varepsilon(x_0)$ .

Assim, temos que  $C_x \cap W \neq \emptyset$ , pois  $\varphi_x(0) = x \in B_\varepsilon(x_0)$ , uma vez que  $\|x - x_0\| < \tilde{\delta} \leq \varepsilon$ .

Pelo Teorema de Alfândega (ver [13, 16]): existe  $t_0 \geq 0$  tal que  $\varphi_x(t_0) \in \partial W = \partial B_\varepsilon(x_0)$ , o que é uma contradição com (2.5).

Assim,  $C_x \cap (\mathbb{R}^n \setminus W) = \emptyset$  implicando que  $C_x \subseteq W$  e portanto  $\varphi_x(t) \in B_\varepsilon(x_0)$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Isto nos diz que  $\varphi_x(t)$  está definida para todo  $t \geq 0$ , e além disso  $\|\varphi_x(t) - \varphi_{x_0}(t)\| < \varepsilon$ , para todo  $t \geq 0$ .

■

## 2.2 Órbitas Homoclínicas e Heteroclínicas

Um separador (ou separatriz) é geralmente uma órbita que separa regiões distintas no plano de fase. Pode ser qualquer uma das órbitas que entram ou saem de um ponto de sela; ou um ciclo limite; ou uma órbita que une dois pontos de equilíbrio. Não é um termo preciso. No entanto, certos tipos de separadores são importantes para nosso trabalho posterior e vamos defini-los aqui no contexto de pontos de equilíbrio.

**Definição 3 (Órbitas Homoclínicas e Heteroclínicas)** *Qualquer órbita no plano de fase que liga um ponto de equilíbrio a si mesmo é uma forma de separador conhecido como órbita **homoclínica**, e qualquer órbita no plano de fase que liga um ponto de equilíbrio a outro é conhecido como órbita **heteroclínica**, ver figura 2.4.*

Para sistemas **autônomos planares**, isso significa que as órbitas homoclínicas só podem ser associadas aos pontos de sela (ou algum tipo generalizado de sela), pois as órbitas de saída e entrada no ponto de equilíbrio são necessárias e, neste caso são exatamente as variedades estável e instável do ponto de equilíbrio.

Vejamos um exemplo.

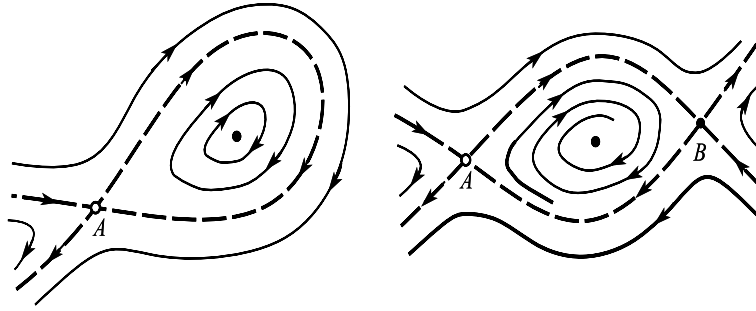


Figura 2.4: No lado esquerdo uma órbita homoclínica no equilíbrio  $A$ , no lado direito duas órbitas heteroclínicas que ligam os equilíbrios  $A$  e  $B$ .

**Exemplo. 4** Consideremos o sistema dado por:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x + x^2, \end{cases}$$

que tem a função  $H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$  como integral primeira. Desta forma, as soluções deste sistema ficam contidas nas curvas de nível

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = C$$

Os pontos de equilíbrio do sistema são  $(0, 0)$  e  $(-1, 0)$  e a matriz Jacobiana é dada por

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,  $J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; assim, obtemos os valores próprios  $\lambda = \pm 1$ , donde segue que o equilíbrio  $(0, 0)$  é um ponto de sela.

Analogamente, obtemos  $J_{(-1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ; assim, obtemos os valores próprios  $\lambda = \pm i$ , donde segue que o equilíbrio  $(-1, 0)$  é um centro, devido à existência da integral primeira.

O gráfico da curva  $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = C$  para o valor  $C = 0$  é mostrado na figura 2.5. O plano de fase do sistema é mostrado na figura 2.6.

Observe que existe uma órbita homoclínica ao ponto de sela na origem, que passa também pelo ponto  $(-3/2, 0)$ , como é mostrado na figura 2.7.

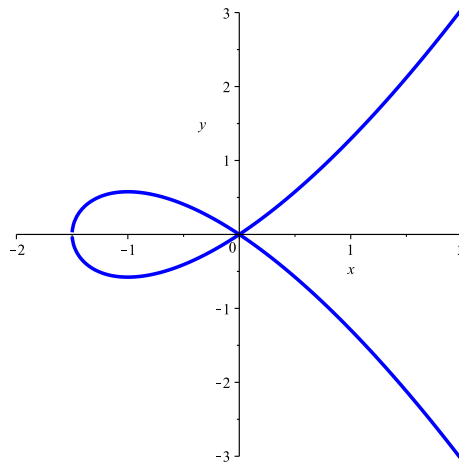


Figura 2.5: Curva para  $C = 0$ .

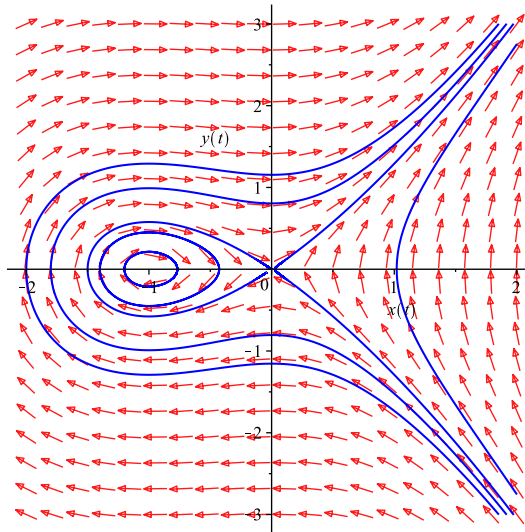


Figura 2.6: Plano de fase do sistema.

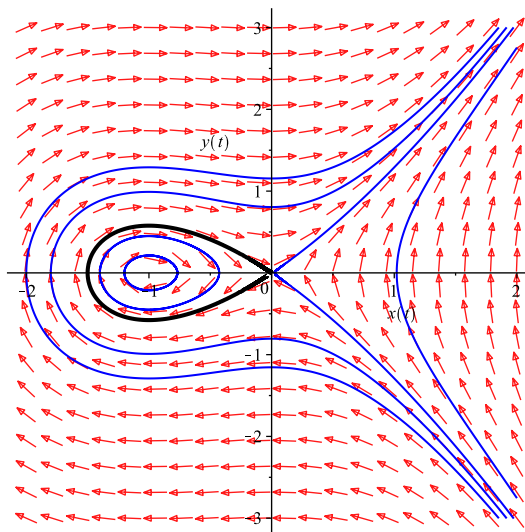


Figura 2.7: Órbita homoclínica no plano fase do sistema.

### 2.2.1 Estabilidade estrutural e teoria de bifurcações

Nesta seção estudaremos a teoria local de sistemas de equações diferenciais não lineares do tipo

$$x' = F(x) \quad (2.6)$$

com  $F \in C(E)$  e onde  $E$  é um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ . Estamos interessados no comportamento qualitativo de (2.6) quando mudamos um pouco (ou perturbamos) o campo de vetores  $F$  em (2.6); intuitivamente, dizemos que, se o comportamento qualitativo for o “mesmo” para todos os campos vetoriais próximos de  $F$ , então o sistema (2.6) ou o campo de vetores  $F$  é chamado de **estruturalmente estável**.

Este é um problema que ocorre naturalmente ao estudarmos bifurcações em  $C^1$ -sistemas da forma

$$x' = F(x, \mu)$$

dependendo de um parâmetro  $\mu \in \mathbb{R}$  (ou de vários parâmetros  $\mu \in \mathbb{R}^m$ ). Pergunta-se o que ocorre com o sistema  $x' = F(x, \mu)$  quando variamos o parâmetro envolvido. Nesta seção, estudaremos bifurcações em pontos de equilíbrio e órbitas periódicas não-hiperbólicas. Estes tipos de bifurcações são chamados bifurcações locais, pois ocorrem numa vizinhança do ponto de equilíbrio ou da órbita periódica. A seguir, daremos uma definição mais precisa destes conceitos.

### 2.2.2 Estabilidade estrutural e o Teorema de Peixoto

Nesta seção, apresentamos o conceito de um campo vetorial estruturalmente estável ou sistema dinâmico, e daremos condições necessárias e suficientes para que um  $C^1$ -campo vetorial  $F$  numa variedade 2-dimensional compacta seja estruturalmente estável.

**Definição 4** Se  $F \in C^1(E)$ , onde  $E$  é um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ , então a norma- $C^1$  de  $F$  é denotada e definida por

$$\|F\|_1 = \sup_{x \in E} |F(x)| + \sup_{x \in E} \|DF(x)\| \quad (2.7)$$

onde  $|\cdot|$  denota a norma euclidiana sobre  $\mathbb{R}^n$ , e  $\|\cdot\|$  denota a norma usual da matriz  $DF(x)$ .

Se  $K$  é um subconjunto compacto de  $E$ , então a  $C^1$ -norma de  $F$  sobre  $K$  é definida por

$$\|F\|_1 = \sup_{x \in K} |F(x)| + \sup_{x \in K} \|DF(x)\| < \infty. \quad (2.8)$$

**Definição 5** Seja  $E$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ , um campo vetorial  $F \in C^1(E)$  é chamado estruturalmente estável se existir  $\varepsilon > 0$  tal que para toda  $g \in C^1(E)$  com  $\|F - g\|_1 < \varepsilon$  tem-se que  $F$  e  $g$  são topologicamente equivalentes em  $E$ , isto é, existe um homeomorfismo  $H : E \rightarrow E$  o qual leva trajetórias de

$$x' = F(x) \quad (2.9)$$

em trajetórias de

$$x' = g(x) \quad (2.10)$$

e, além disso, preserva a orientação no tempo. Neste caso, também dizemos que o **sistema dinâmico** (2.9) é estruturalmente estável. Se o campo vetorial  $F$  não for estruturalmente estável então dizemos que é estruturalmente instável.



Se  $K$  é um subconjunto compacto de  $E$  e  $F \in C^1(E)$  então, se usamos a  $C^1$ -norma (2.8) na Definição 5, dizemos que o campo vetorial  $F$  é estruturalmente estável em  $K$ .

**Definição 6** *Seja  $F$  um campo vetorial  $C^1$  numa variedade diferenciável  $n$ -dimensional  $M$ . Então,  $F \in C^1(M)$  é estruturalmente estável sobre  $M$  se existir  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $g \in C^1(M)$  com*

$$\|F - g\|_1 < \varepsilon,$$

*$g$  é topologicamente equivalente a  $F$ .*

**Exemplo. 5** *Consideremos o sistema*

$$\begin{cases} x' = -y + x(x^2 + y^2 - 1)^2, \\ y' = x + y(x^2 + y^2 - 1)^2. \end{cases}$$

*Este sistema é estruturalmente instável em qualquer subconjunto compacto  $K \subseteq \mathbb{R}^2$  o qual contém o disco unitário no seu interior. Isto pode se verificar considerando o sistema*

$$\begin{cases} x' = -y + x[(x^2 + y^2 - 1)^2 - \mu], \\ y' = x + y[(x^2 + y^2 - 1)^2 - \mu], \end{cases}$$

*o qual está  $\varepsilon$ -perto do sistema acima se  $|\mu| = \frac{\varepsilon}{d+2}$ , onde  $d$  é o diâmetro de  $K$ . Escrevendo este novo sistema em coordenadas polares temos*

$$\begin{cases} r' = r[(r^2 - 1)^2 - \mu], \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

*O sistema acima com  $\mu = 0$  é estruturalmente instável. O número  $\mu = 0$  é chamado de valor de bifurcação, e para  $\mu = 0$  este sistema tem um ciclo limite de multiplicidade dois representado por  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  e, além disso,  $\gamma(t)$  é um ciclo limite não hiperbólico desse sistema.*

*Para ver o comportamento do sistema e comprovar a instabilidade veja seus planos de fase dados nas figuras 2.8, 2.9, 2.10 para diferentes valores de  $\mu$ .*

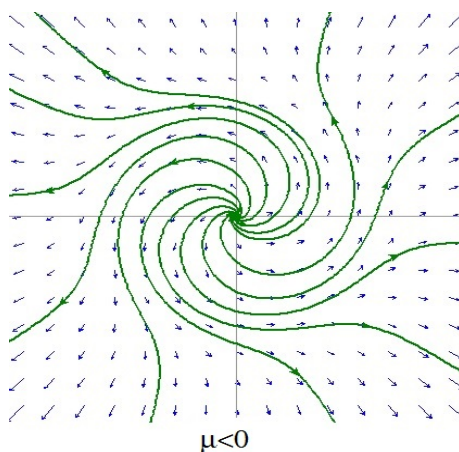


Figura 2.8: Comportamento para o valor de  $\mu < 0$ .

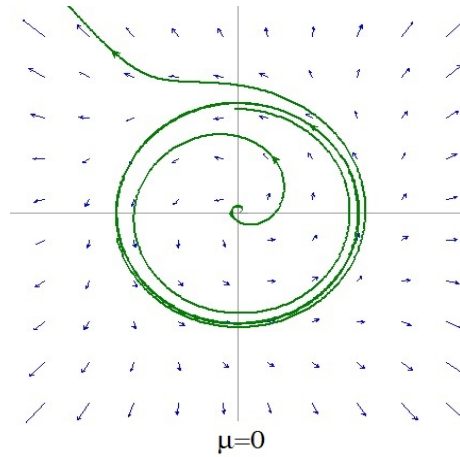


Figura 2.9: Comportamento para o valor de  $\mu = 0$ .

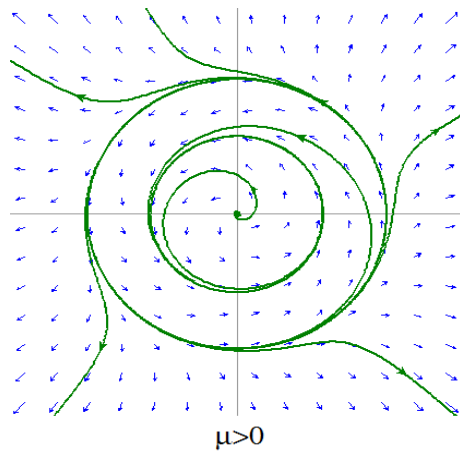


Figura 2.10: Comportamento para o valor de  $\mu > 0$ .

O teorema a seguir nos diz que, na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico, o sistema (2.9) é estruturalmente estável, ou seja, o tipo de ponto de equilíbrio não se altera mediante pequenas perturbações.

**Teorema 2** *Seja  $F \in C^1(E)$ , onde  $E$  é um subconjunto aberto do  $R^n$ , contendo um ponto crítico hiperbólico  $x_0$  de (2.9). Então, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que para todo  $g \in C^1(E)$  com  $\|F - g\|_1 < \delta$  existe um  $y_0 \in B_\varepsilon(x_0)$  tal que  $y_0$  é um ponto crítico hiperbólico de (2.10); portanto,  $DF(x_0)$  e  $Dg(y_0)$  têm o mesmo número de autovalores com parte real negativa (e positiva).*

O teorema a seguir diz respeito à estabilidade estrutural do sistema (2.9) na vizinhança de uma órbita periódica hiperbólica.

**Teorema 3** *Seja  $F \in C^1(E)$ , onde  $E$  é um subconjunto aberto do  $R^n$ , contendo uma órbita periódica hiperbólica  $\Gamma$  de (2.9). Então, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que para todo  $g \in C^1(E)$  com*

$$\|F - g\|_1 < \delta$$

*existe uma órbita periódica hiperbólica  $\Gamma'$  de (2.10) contida numa  $\varepsilon$ -vizinhança de  $\Gamma$ ; além disso, as variedades estáveis  $W^s(\Gamma)$  e  $W^s(\Gamma')$ , e as variedades instáveis  $W^u(\Gamma)$  e  $W^u(\Gamma')$  têm as mesmas dimensões.*

**Definição 7** Um ponto  $x \in E$  (ou  $x \in M$ ) é um **ponto não errante** do fluxo  $\phi_t$  definido por (2.9) se, para qualquer vizinhança  $U$  de  $x$  e para qualquer  $T > 0$ , existir um  $t > T$  tal que

$$\phi_t(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Ao conjunto de pontos não errantes do fluxo  $\phi_t$  denotaremos por  $\Omega$ . Qualquer ponto  $x \in E \setminus \Omega$  (ou em  $M \setminus \Omega$ ) é chamado um ponto errante do fluxo  $\phi_t$ .

O teorema a seguir é um resultado clássico da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias e dá uma caracterização dos sistemas estruturalmente estáveis em dimensão dois.

**Teorema 4 (Peixoto)** *Seja  $F$  um campo vetorial  $C^1$  numa variedade diferenciável 2-dimensional compacta  $M$ . Então,  $F$  é estruturalmente estável em  $M$  se, e somente se,*

- (i) *O número de pontos de equilíbrio e ciclos limites é finito e cada um deles é hiperbólico;*
- (ii) *Não existem trajetórias conectando pontos de sela.*
- (iii) *O conjunto não errante  $\Omega$  consiste apenas em pontos críticos e ciclos limites.*

Além disso, se  $M$  é **orientável**, o conjunto de todos os campos vetoriais de classe  $C^1$  que são estruturalmente estáveis em  $M$  é um subconjunto aberto e denso de  $C^1(M)$ .

A prova deste teorema pode ser encontrada na seguinte referência [17].

Do teorema acima segue que as bifurcações locais, ou mudanças no comportamento local das soluções do sistema (2.9), devem ocorrer em vizinhanças dos pontos críticos e dos ciclos limites não hiperbólicos. É o que veremos nas próximas seções.

## 2.3 Bifurcações em pontos de equilíbrio não hiperbólicos

Nesta seção, estudaremos o comportamento qualitativo das soluções do sistema

$$x' = F(x, \mu). \tag{2.11}$$

Aqui estamos assumindo que  $F \in C^1(E \times J)$  onde  $E$  é um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$  e  $J \subseteq \mathbb{R}$  é um intervalo.

Como já foi mencionado anteriormente, o comportamento qualitativo das soluções deste sistema dependendo do parâmetro  $\mu \in \mathbb{R}$  muda quando o campo vetorial  $F$  passa por um ponto no conjunto de bifurcações ou quando o parâmetro  $\mu$  varia por um valor de bifurcação  $\mu_0$ . Um valor  $\mu_0$  do parâmetro  $\mu$  na equação (2.11) para o qual o  $C^1$ -campo vetorial  $F(x, \mu_0)$  não é estruturalmente estável é chamado de **valor de bifurcação**.

Passamos a estudar as bifurcações de campos de vetores com o tipo mais simples de bifurcações que ocorrem nos sistemas dinâmicos; a saber as bifurcações em pontos de equilíbrio não hiperbólicos.

Consideremos inicialmente em uma dimensão, isto é

$$x' = F(x, \mu) \tag{2.12}$$

com  $x \in \mathbb{R}$  e  $\mu \in J \subseteq \mathbb{R}$ . Os três tipos mais simples de bifurcações que ocorrem num ponto crítico não hiperbólico de (2.12) são ilustrados nos exemplos seguintes.

**Exemplo. 6** Consideremos o sistema unidimensional

$$x' = \mu - x^2.$$

Para  $\mu > 0$  existem dois pontos críticos em  $x = \pm\sqrt{\mu}$ ;  $DF(x, \mu) = -2x$ , logo  $DF(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = \mp 2\sqrt{\mu}$  e vemos que o ponto crítico em  $x = \sqrt{\mu}$  é estável enquanto que o ponto crítico em  $x = -\sqrt{\mu}$  é instável.

Para  $\mu = 0$ , existe apenas um ponto crítico em  $x = 0$ , e é um ponto crítico não hiperbólico desde que  $DF(0, 0) = 0$ ; o campo vetorial  $F(x) = -x^2$  é estruturalmente instável; e  $\mu = 0$  é um valor de bifurcação.

Para  $\mu < 0$  não existem pontos críticos.

Para  $\mu > 0$  as variedades 1-dimensionais estável e instável para a equação diferencial nesse exemplo, são dados por  $W^s(\sqrt{\mu}) = (-\sqrt{\mu}, \infty)$  e  $W^u(-\sqrt{\mu}) = (-\infty, \sqrt{\mu})$ .

Para  $\mu = 0$ , a variedade 1-dimensional centro é dada por  $W^c(0) = (-\infty, +\infty)$ .

**Exemplo. 7** Consideremos o sistema unidimensional

$$x' = \mu x - x^2.$$

Os pontos críticos são  $x = 0$  e  $x = \mu$ .

Para  $\mu = 0$ , temos um único ponto crítico em  $x = 0$ , o qual é não hiperbólico, uma vez que  $DF(0, 0) = 0$ . O campo vetorial  $F(x) = -x^2$  é estruturalmente instável, e  $\mu = 0$  é um valor de bifurcação. Os retratos de fase para esta equação diferencial são mostrados na figura 2.11.

Para  $\mu = 0$ , temos  $W^c(0) = (-\infty, \infty)$ ; o diagrama desta bifurcação é mostrado na figura 2.12. Neste caso, vemos que há uma mudança de estabilidade que ocorre nos pontos críticos deste sistema no valor de bifurcação  $\mu = 0$ . Este tipo de bifurcação é chamado uma **bifurcação transcritical**.

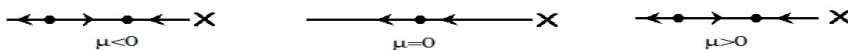


Figura 2.11: Os retratos de fases.

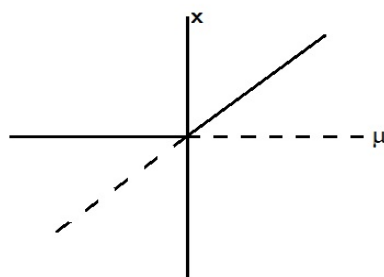


Figura 2.12: Diagrama de bifurcação.

**Exemplo. 8** Consideremos o sistema unidimensional

$$x' = \mu x - x^3.$$

Para  $\mu > 0$ , existem 3 pontos críticos em  $x = 0$  e  $x = \pm\sqrt{\mu}$ .

Para  $\mu \leq 0$ ,  $x = 0$  é o único ponto críticos.

Para  $\mu = 0$ , o ponto crítico é não hiperbólico uma vez que  $DF(0,0) = 0$ . O campo vetorial  $F(x) = -x^3$  é estruturalmente instável; e  $\mu = 0$  é um valor de bifurcação. O retrato de fase é mostrado na figura 2.13.

Para  $\mu < 0$  temos  $W^s(0) = (-\infty, \infty)$ , e para  $\mu = 0$  temos que  $W^s(0) = \emptyset$  e  $W^c(0) = (-\infty, \infty)$

O diagrama da bifurcação é mostrada na figura 2.14 e este tipo de bifurcação é chamado de **bifurcação Pitchfork**.



Figura 2.13: Os retratos de fases.

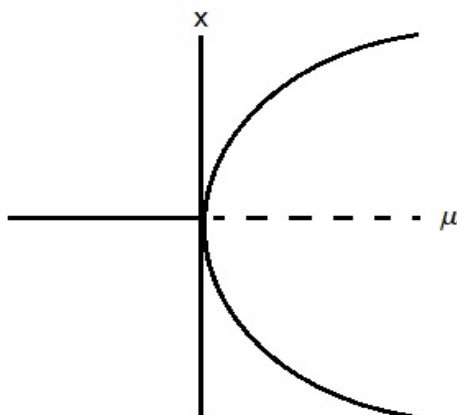


Figura 2.14: Diagrama de bifurcação.

## 2.4 Bifurcação de Hopf e bifurcação de ciclos limites de um foco múltiplo

Nesta seção, consideramos alguns tipos de bifurcações que podem ocorrer quando a matriz  $DF(x_0, \mu_0)$  tem um par simples de autovalores imaginários puros, e nenhum outro autovalor com parte real nula. Neste caso, o Teorema da função implícita garante que para cada  $\mu$  perto de  $\mu_0$  existirá um único ponto de equilíbrio  $x_\mu$  perto de  $x_0$ ; no entanto, se os autovalores de  $DF(x_\mu, \mu)$  mudam para valores imaginários em  $\mu = \mu_0$ , então as dimensões das variedades estável e instável de  $x_\mu$  vai mudar e o retrato de fase local de (2.11) mudará com  $\mu$  conforme passa pelo valor de bifurcação  $\mu_0$ .

No caso genérico, ocorre o que chamamos de bifurcação de Hopf, com a qual uma órbita periódica é criada conforme a estabilidade do ponto de equilíbrio  $x_\mu$  muda. Vejamos um exemplo.

**Exemplo. 9 (Uma bifurcação Hopf)** *Consideremos o sistema planar*

$$\begin{cases} x' &= -y + x(\mu - x^2 - y^2), \\ y' &= x + y(\mu - x^2 - y^2). \end{cases}$$

*O único ponto crítico deste sistema é a origem, e a matriz jacobiana do sistema neste ponto é dada por*

$$DF(0, \mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

*Os autovalores desta matriz são dados por  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$ . Logo, segue to Teorema de Hartman-Grobman que a origem é um foco estável se  $\mu < 0$ , e é um foco instável se  $\mu > 0$ .*

*Para  $\mu = 0$ , a matriz jacobiana tem um par de autovalores imaginários puros, assim a origem é um centro ou um foco (fraco) para este sistema não linear. Escrevendo o sistema em coordenadas polares obtemos*

$$\begin{cases} r' &= r(\mu - r^2), \\ \theta' &= 1, \end{cases}$$

*donde segue, analisando o sinal de  $r'$ , que para  $\mu \leq 0$  a origem é um foco estável, e para  $\mu > 0$  existe um ciclo limite estável*

$$\Gamma_\mu : \gamma_\mu(t) = \sqrt{\mu}(\cos t, \sin t).$$

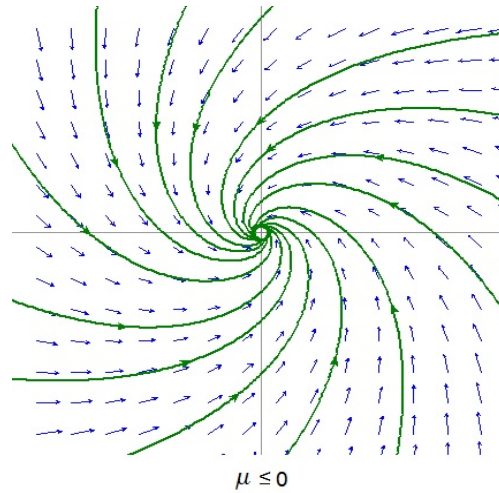
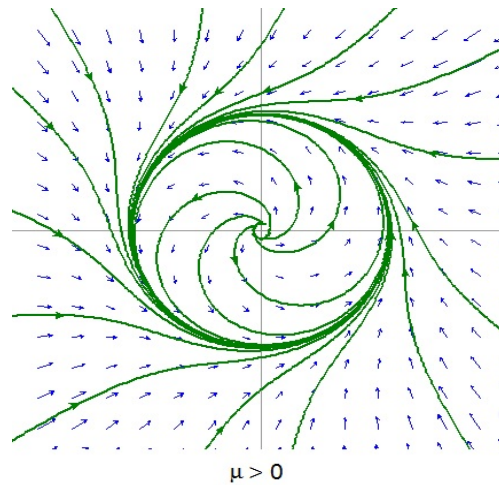
*As curvas  $\Gamma_\mu$  representam uma família de ciclos limite parametrizadas deste sistema. O retrato de fase deste sistema é mostrados nas figura 2.15 e 2.16.*

A bifurcação que ocorre no exemplo acima, quando  $\mu$  passa pelo valor crítico  $\mu = 0$  e, conseqüentemente, os autovalores da matriz jacobiana passam de complexos conjugados com parte real negativa para positiva, sendo imaginários puros para  $\mu = 0$ , levando ao surgimento de um ciclo limite estável para  $\mu > 0$  é chamada de bifurcação de Hopf. Tal bifurcação ocorre mais geralmente em famílias de sistemas de equações diferenciais que satisfazem certas hipóteses, como veremos a seguir.

Consideremos o sistema diferencial

$$\begin{cases} x' &= \mu x - y + P(x, y), \\ y' &= x + \mu y + Q(x, y), \end{cases} \quad (2.13)$$

onde  $P(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j$  e  $Q(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j$  são funções analíticas.

Figura 2.15: Retrato de fase para  $\mu \leq 0$ .Figura 2.16: Retrato de fase para  $\mu > 0$ .

Neste caso temos que, para  $\mu = 0$ ,  $DF(0, 0)$  tem um par de autovalores imaginários puros e a origem é chamada de foco fraco, ou um foco múltiplo. A multiplicidade  $m$  de um foco múltiplo é definida em termos da aplicação de Poincaré  $P(s)$  para o foco, veja [18] capítulo 3, seção 3.4. Do Teorema 3 da seção 3.4 da referência [18], temos

$$P'(0) = e^{2\pi\mu}.$$

Para o sistema (2.13), e para  $\mu = 0$  temos  $P'(0) = 1$  ou, equivalentemente,  $d'(0) = 0$ , onde  $d(s) = P(s) - s$  é a função deslocamento.

Para  $\mu = 0$ , em (2.13) o **numero de Lyapunov**  $\sigma$  é dado pela equação

$$\sigma = \frac{3\pi}{2} [3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21}) - 2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) + a_{11}(a_{02} + a_{20}) - b_{11}(b_{02} + b_{20})]. \quad (2.14)$$

Em particular, se  $\sigma \neq 0$  então a origem é um foco fraco de multiplicidade um, e é estável se  $\sigma < 0$ , e instável se  $\sigma > 0$ , e uma bifurcação Hopf ocorre na origem com valor de bifurcação  $\mu = 0$ . Tal resultado é sintetizado no seguinte teorema (ver [3, 18].)

**Teorema 5 (Bifurcação de Hopf)** *Se  $\sigma \neq 0$ , então ocorre uma bifurcação de Hopf na origem do sistema planar (2.13) no valor de bifurcação  $\mu = 0$ . Em particular, se  $\sigma < 0$ , então, um único ciclo limite estável bifurca a partir da origem de (2.13) conforme  $\mu$  aumenta de zero e se  $\sigma > 0$ , então um único ciclo limite instável bifurca desde a origem de (2.13) conforme  $\mu$  decresce de zero.*

A prova do teorema pode-se achar em [3]

No primeiro caso, ( $\sigma < 0$ ) no Teorema (5), onde o ponto crítico gera um ciclo limite estável com  $\mu$  que passa através do valor de bifurcação  $\mu = 0$ , é chamado uma **bifurcação de Hopf supercrítica**, e no segundo caso para  $\sigma > 0$ , onde o ponto crítico gera um ciclo limite instável com  $\mu$  que passa através do valor de bifurcação  $\mu = 0$ , é chamado uma **bifurcação de Hopf subcrítica**.

## 2.5 Bifurcações Homoclínicas

Nesta seção, estudaremos as chamadas bifurcações de loop homoclínicas para campos vetoriais planares

$$x' = F(x). \quad (2.15)$$

Assumimos que o sistema planar analítico (2.15) tem um ciclo separatriz  $S_0$  no ponto de sela (topológico)  $x_0$ .

**Definição 8** *Um ciclo separatriz  $S_0$  é chamado separatriz simples se a quantidade*

$$\sigma_0 \equiv \nabla \dot{F}(x_0) \neq 0.$$

$S_0$  é estável (respectivamente instável) se todas as trajetórias em alguma vizinhança de  $S_0$  se aproximam de  $S_0$  com  $t \rightarrow +\infty$  (respectivamente  $t \rightarrow -\infty$ ).

As demonstrações dos seguintes resultados podem ser encontradas na referência [2].

**Teorema 6** *Seja  $x_0$  um ponto de sela (topologicamente) do sistema planar analítico (2.15), e seja  $S_0$  um ciclo separatriz simples em  $x_0$ . Então,  $S_0$  é estável se, e somente se,  $\sigma_0 < 0$ .*

**Teorema 7** *Se  $S_0$  é um ciclo separatriz simples do ponto de sela (topologicamente)  $x_0$  do sistema planar analítico (2.15), então*

- a) *existem  $\delta > 0$  e  $\varepsilon > 0$  tais que qualquer sistema  $\varepsilon$ -próximo de (2.15) na  $C^1$ -norma tem pelo menos um ciclo limite numa  $\delta$ -vizinhança de  $S_0$ ,  $N_\delta(S_0)$ , e*
- b) *para quaisquer  $\delta > 0$  e  $\varepsilon > 0$ , existe um sistema analítico  $\varepsilon$ -próximo de (2.15) na  $C^1$ -norma e tem exatamente um ciclo limite simples em  $N_\delta(S_0)$ .*

Além disso, se existir tal ciclo limite, ele tem a mesma estabilidade que  $S_0$ ; isto é, ele será estável se  $\sigma < 0$  e instável se  $\sigma > 0$ .

Vejamos um exemplo.



**Exemplo. 10** Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x + x^2 - xy + \mu y, \end{cases} \quad (2.16)$$

que define uma família de campos vetoriais com parâmetro  $\mu \in \mathbb{R}$ . Os pontos de equilíbrio do sistema são  $(0, 0)$  e  $(-1, 0)$ .

A matriz Jacobiana do sistema é dada por

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + 2x - y & -x + \mu \end{pmatrix}.$$

Assim, temos  $J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$ , com autovalores  $\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4}}{2}$ , logo o equilíbrio  $(0, 0)$  é uma sela para todo  $\mu \in \mathbb{R}$ .

No equilíbrio  $(-1, 0)$  temos  $J_{(-1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 + \mu \end{pmatrix}$ , com autovalores

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\mu + 1) \pm \sqrt{\mu^2 + 2\mu - 3}}{2},$$

onde temos que o equilíbrio  $(-1, 0)$  é um foco estável fraco para  $\mu = -1$  como pode ser mostrado na figura 2.5 (b). Por outro lado, calculando o número de Lyapunov na equação obtemos  $\sigma = -\frac{3\pi}{2} < 0$ , isto é, também obtemos que existe um único ciclo limite estável gerando uma bifurcação de Hopf supercrítica em  $(-1, 0)$  no valor de bifurcação  $\mu = -1$ . Este ciclo limite expande monotonicamente com  $\mu$  crescente até cruzar o ponto sela na origem e forma uma órbita homoclínica estável  $S_0$ , no valor de bifurcação  $\mu_0 \approx -0.85$ . Pelo Teorema 6 o ciclo separatriz  $S_0$  é estável, pois  $\sigma = \mu_0 \leq 0$ . Essa sequência de bifurcações é mostrada na figura 2.5.

Neste exemplo, pudemos observar que uma bifurcação de laço homoclínico pode ocorrer em conjunto com uma bifurcação de Hopf. De fato, observamos que o ciclo limite que teve origem em uma bifurcação do tipo Hopf cresce à medida que o parâmetro  $\mu$  se afasta do parâmetro de bifurcação  $\mu = -1$ , fazendo com que as variedades estável e instável do ponto de sela se aproximem (conforme mostrado na figura 2.5), até que, para um valor crítico do parâmetro, neste caso  $\mu_0 \approx -0.85$ , observa-se a existência de uma órbita homoclínica.

Desta forma, a ocorrência da órbita homoclínica é responsável pela existência de regiões no plano de fase para as quais o sistema apresenta oscilações periódicas ou não, ou seja, ela desempenha um papel importante na dinâmica do sistema (2.16). Veremos, no capítulo 4, que este mesmo tipo de fenômeno dinâmico (a associação de uma bifurcação de Hopf com a existência de uma órbita homoclínica) ocorre em um sistema diferencial planar que modela um circuito elétrico envolvendo um memristor localmente ativo, conectado em série com um resistor e um indutor, levando à existência de oscilações periódicas no sistema (cf. seções 4.2.1 e 4.2.2).

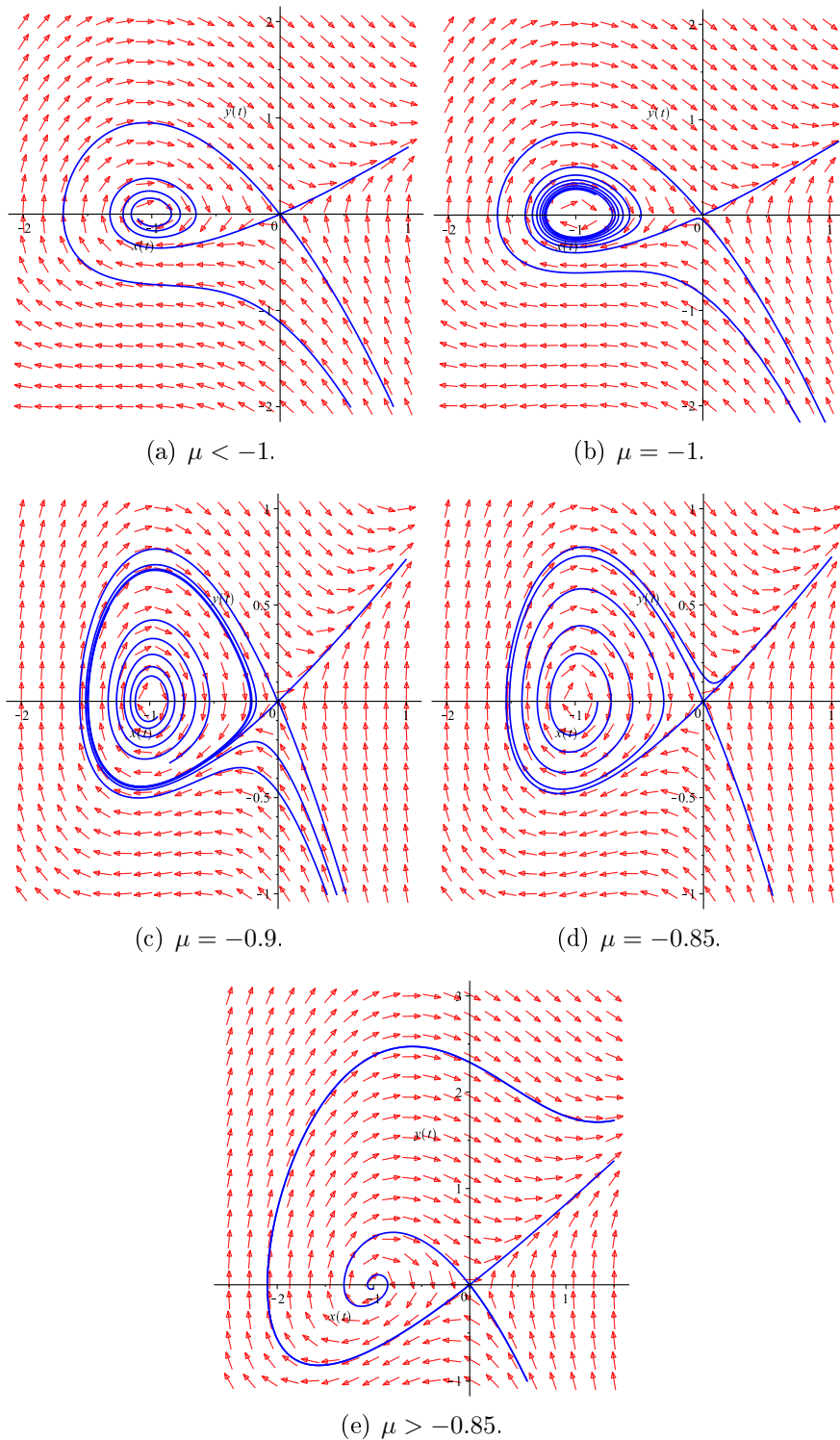


Figura 2.17: Retratos de fase do sistema 2.16, (a)  $(-1, 0)$  é um foco estável, (b)  $(-1, 0)$  foco estável fraco, (c) Existência de um ciclo limite, (d) Órbita homoclínica, (e)  $(-1, 0)$  é foco instável.

## Circuitos elétricos

Um circuito elétrico é um conjunto de elementos conectados de tal forma que existe a possibilidade de originar uma corrente elétrica. Para poder entender um pouco mais as leis que regem os fenômenos associados a estes circuitos, particularmente do ponto de vista matemático, precisamos de alguns ingredientes que estão apresentados nas seções seguintes, que tem como base a referência [14].

### 3.1 Variáveis do circuito

As principais variáveis envolvidas no estudo dos circuitos elétricos são: a corrente (representada pela letra  $i$ ), a tensão ( $v$ ) e o fluxo magnético ( $\phi$ ).

#### Corrente elétrica: $i(t)$

A origem de todos os fenômenos elétricos é a existência da carga elétrica  $q(t)$  e o movimento da mesma. A unidade de carga no sistema internacional (SI) é o **Coulomb**, e é representada pela letra  $C$ . As cargas elétricas podem ser positivas ou negativas. É demonstrado experimentalmente que a carga elétrica somente existe em múltiplos inteiros positivos ou negativos do valor da carga do elétron, que é  $q_e = -1,602 \times 10^{-19}C$ ; isto implica que a carga está quantizada. A corrente elétrica é o movimento das cargas elétricas ao longo de caminhos específicos. É representada pela letra  $I$  ou  $i$ , caso a magnitude dependa ou não do tempo.

A corrente elétrica representa a variação da carga  $q(t)$  em relação ao tempo que ocorre na seção transversal de um condutor, isto é:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}. \quad (3.1)$$

A unidade da corrente elétrica é o **Ampère** [A]. A corrente elétrica é considerada como o movimento de cargas positivas (devido a Benjamin Franklin), porém sabemos que a condução nos metais é na verdade devido ao movimento dos elétrons livres (que possuem carga negativa).

#### Tensão: $v(t)$

O potencial eletrostático  $U$  num ponto de uma rede é a energia potencial por unidade de carga, de uma carga colocada nesse ponto. O potencial eletrostático num circuito é

análogo ao potencial gravitacional. Como no caso do campo gravitacional, o nível zero do potencial elétrico é arbitrário; somente tem significado físico as diferenças da energia potencial. É por isso que a diferença de potencial (*d.d.p.*) ou **tensão** entre dois pontos  $A$  e  $B$  de um circuito, é definida como sendo o trabalho feito para mover a unidade de carga entre esses dois pontos. Se o trabalho realizado for chamado por  $dw$  (em joules,  $J$ ) para mover um diferencial de carga  $dq$  entre dois pontos  $A$  e  $B$ , cujos potenciais elétricos são  $v_A$  e  $v_B$ , respectivamente, e se designarmos por  $v_{AB}$  a tensão ou diferença de potencial entre esses dois pontos, que pode ser escrito em geral como  $v(t)$ , o valor desta tensão é:

$$v_{AB} = v(t) = v_A - v_B = \frac{dw}{dq}. \quad (3.2)$$

A unidade tanto para o potencial como para a tensão é o **Volt** [ $V$ ].

### Fluxo magnético $\phi$

Assim como na natureza existe um campo gravitacional e campos elétricos, também existe um **campo magnético**  $\vec{B}$  (sua unidade é o Tesla  $T$ ), que interage com os corpos devido à existência de uma **força magnética**. Esta força magnética é também um tipo de força que atua à distância, sem a necessidade de um meio nem de contato, tal como a força gravitacional e a força elétrica. Ela pode ser atrativa ou repulsiva, o que fez com que fosse confundida com a força elétrica, desde a época dos gregos em que já eram conhecidas essas duas forças. Pensou-se assim até 1600, quando William Gilbert identificou a força magnética como uma força diferente da elétrica.

Se  $\vec{B}$  é um campo magnético, então o **fluxo magnético** sobre uma superfície  $S$  é definido por

$$\phi_{\vec{B}} = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS \quad (3.3)$$

onde  $\hat{n}$  é um vetor unitário e normal à superfície. Além disso, em geral  $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$ , ou seja, o campo magnético depende da posição sobre a superfície. No caso em que  $\vec{B}$  e  $\hat{n}$  são constantes, temos

$$\phi_{\vec{B}} = \vec{B} \cdot \hat{n} \int_S dS = \vec{B} \cdot \hat{n} A(S) = \|\vec{B}\| \cos \angle(\vec{B}, \hat{n}) A(S).$$

Onde  $\angle(\vec{B}, \hat{n})$  é o ângulo formado pelo vetor unitário normal  $\hat{n}$  e o campo vetorial constante, a expressão  $A(S)$  representa a área da superfície  $S$ .

A unidade de medida do fluxo magnético é o **Weber** [ $Wb$ ].

## 3.2 Elementos físicos de um circuito

Para descrever matematicamente um circuito elétrico, que é a interligação de diversos dispositivos físicos, é necessário modelar o comportamento elétrico de cada elemento que o compõe. Para diferenciar o dispositivo físico do modelo matemático que o descreve, o último é chamado de elemento de circuito.

Existem três atributos principais de um circuito elétrico: resistência, capacitância e indutância. Por sua vez, existem três elementos de circuito para modelar cada atributo: o resistor, capacitor e o indutor.

### 3.2.1 Elementos ativos

Os elementos ativos são chamados também de fontes ou geradores e são os encarregados de fornecer energia elétrica ao circuito. Os dois modelos básicos usados no estudo dos circuitos elétricos são: geradores de tensão e geradores de corrente.

### 3.2.2 Elementos passivos

São os componentes dos circuitos que dissipam ou armazenam energia elétrica, e portanto, constituem os receptores ou cargas do circuito. Os elementos físicos do circuito podem apresentar, individualmente, as seguintes propriedades:

- a) dissipação de energia elétrica, conhecida como resistência, e representada pela letra  $R$ ;
- b) armazenamento de energia em campos magnéticos, chamada indutância, representada por  $L$ ;
- c) armazenamento de energia em campos elétricos, ou capacitância, representada por  $C$ .

Esses elementos podem ser lineares ou não lineares, autônomos ou não autônomos, com dois ou mais terminais.

As três propriedades podem ocorrer em maior ou menor grau no comportamento de um componente de um circuito real, portanto, as características dos componentes práticos podem ser sintetizadas por meio de uma combinação adequada de  $R$ ,  $L$  e  $C$ .

## Resistência

Conforme já indicado nos parágrafos anteriores, a resistência é o elemento do circuito no qual a energia elétrica é dissipada. As figuras 3.1 e 3.2 mostram os símbolos das resistências elétricas constante e variável.



Figura 3.1: Símbolo da resistência (constante).

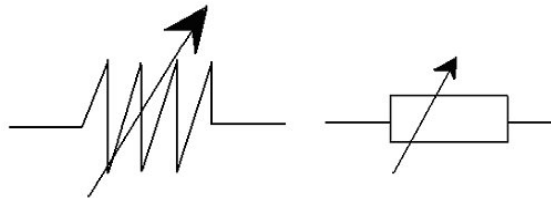


Figura 3.2: Símbolo da resistência (variável).

A resistência elétrica é medida em **Ohms** (símbolo  $\Omega$ ). A resistência  $R$  de um condutor de resistividade  $\rho$ , largura  $l$  e secção transversal uniforme  $S$ , é

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad [\Omega].$$

A Lei de Ohm estabelece que quando um material é submetido a um campo elétrico,  $E$ , é gerado neste uma densidade de corrente,  $J$ , dada por

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E},$$

onde  $g$  é a condutividade do material. Essa relação é amplamente conhecida em termos da corrente e da tensão

$$V(t) = Ri(t),$$

que descreve o comportamento de um resistor linear. A constante  $R$  é chamada de **resistência**. A partir dessa relação, o resistor pode ser definido incluindo elementos não lineares. Portanto, temos:

**Definição 9 (Resistor)** *Um Resistor é qualquer elemento do circuito descrito por uma relação entre corrente elétrica e a tensão.*

$$R(i, V) = 0. \quad (3.4)$$

Se a função que descreve o elemento é uma função que apenas depende da tensão ( $i = i(V)$ ), então temos que

$$R(V) := R(i, V) = R(i(V), V).$$

Neste caso, diz-se que é controlado pela tensão. Se, por outro lado, é uma função que depende apenas da corrente ( $V = V(i)$ ), diz-se que é controlado pela corrente.

## Indutor

É o elemento do circuito capaz de armazenar energia magnética. Os indutores são construídos envolvendo um condutor em torno de um núcleo, que pode ser ou não de material ferromagnético, tal como é mostrado na figura 3.3, e o símbolo de um indutor é mostrado na figura 3.4.

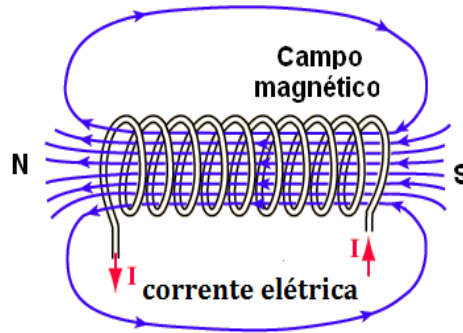


Figura 3.3: Indutor.



Figura 3.4: Símbolo do Indutor em circuitos elétricos.

Quando uma corrente flui através do indutor, as linhas de campo magnético são estabelecidas, e o número total destas linhas que atravessam a seção do núcleo é chamada fluxo magnético e é representada por  $\phi(t)$ . No sistema *SI*, sua unidade de medida é o **Weber** (*Wb*).

O fluxo magnético total concatenado pelo indutor completa é representada por  $\Phi(t)$  e se tem  $N$  voltas cumpre-se que  $\Phi(t) = N\phi(t)$ . Se o circuito elétrico é linear, o fluxo total  $\Phi(t)$  concatenado pelo indutor é proporcional à corrente  $i(t)$  que passa por ele

$$\Phi(t) = N\phi(t) = Li(t), \quad (3.5)$$

onde a constante  $L$  da equação anterior é chamada coeficiente de autoindução do indutor, ou simplesmente indutância, e é medido em **Henry** (*H*).

De outro lado, se o fluxo magnético  $\Phi(t)$  varia ao longo do tempo, é gerada no indutor, de acordo com a lei de Faraday (veremos mais adiante), uma tensão induzida  $\varepsilon_{ind}(t)$  (ou força contra eletromotriz), que quando não tem resistência elétrica do indutor coincide com a tensão externa aplicada e que obedece à seguinte expressão:

$$\varepsilon_{ind}(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = N \frac{d\phi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}. \quad (3.6)$$

Pela mesma razão que no resistor, para incluir elementos não lineares, a equação (3.5) deve ser usada. Portanto, temos:

**Definição 10 (Indutor)** *Um indutor é qualquer elemento do circuito descrito por uma relação entre o fluxo magnético e a corrente elétrica.*

$$L(\phi, i) = 0. \quad (3.7)$$

Este elemento pode ser controlado pelo fluxo ou pela corrente.

A relação inversa de (3.6) também é possível obter, de fato:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}\varepsilon_{ind}(t),$$

integrando de  $t_0$  até  $t$  temos

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t \varepsilon_{ind}(\tau) d\tau.$$

Assim, temos:

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t \varepsilon_{ind}(\tau) d\tau.$$

Em particular, para  $t_0 = 0$  temos

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t \varepsilon_{ind}(\tau) d\tau. \quad (3.8)$$

Analisando a equação (3.8), é observado que o indutor tem um efeito de **memória**, já que a corrente (saída ou resposta) em um tempo  $t = t_1$  depende não somente da tensão (entrada ou excitação aplicada) no tempo atual  $t = t_1$ , mas também do valor passado da entrada ( $t < t_1$ ).

Outro aspecto a considerar, deduzido da equação (3.6), é que a corrente num indutor não pode variar abruptamente, já que a tensão se tornaria infinita, o que é fisicamente impossível. Portanto, a corrente num indutor não pode ter descontinuidades. Em particular, é cumprido:

$$i(0^+) = i(0^-).$$

### Energia armazenada por um indutor

Quando conectamos uma bobina a uma força eletromotriz  $\varepsilon_0$  (por exemplo, uma bateria) um fluxo magnético crescente é produzido até que a corrente se estabilize. Durante esse intervalo se induz uma força electromotriz  $\varepsilon$ , dada por

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt}.$$

Para produzir essa força eletromotriz, é necessário realizar um trabalho, que é executado pela fonte que produz a corrente. A potência instantânea fornecida pela fonte é

$$P = \frac{dW}{dt} = \varepsilon i.$$

Substituindo o valor de  $\varepsilon$  temos

$$P = \frac{dW}{dt} = Li \frac{di}{dt} \Rightarrow dW = Lid i.$$



Logo, o trabalho realizado para levar de  $i = 0$  a  $i$  é:

$$W = \int dW = \int_0^i LI dI = L \frac{i^2}{2}.$$

Esse trabalho é feito pela bateria e equivale à energia armazenada na forma de um campo magnético pelo indutor, ou seja, a energia magnética armazenada no indutor é dada por

$$U_B = L \frac{i^2}{2}. \quad (3.9)$$

## Capacitor

O capacitor é um dispositivo ou o elemento do circuito capaz de armazenar energia elétrica. A forma mais simples de capacitor é formada por duas placas metálicas paralelas de seção  $S$ , denominadas armaduras, separadas a uma distância  $d$ , nas quais existe um meio dielétrico ou isolante de permissividade  $\varepsilon$ , tal como é mostrado na figura 3.5.

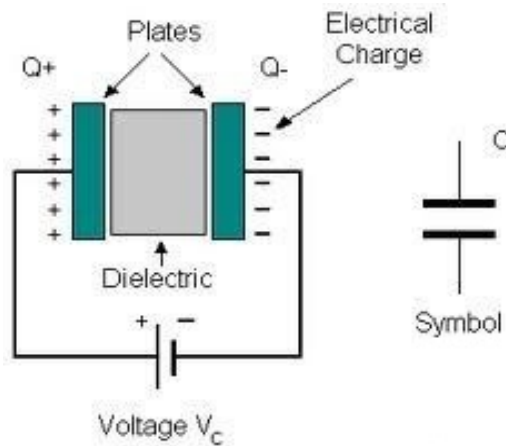


Figura 3.5: Capacitor.

Ao aplicar uma d.d.p. (diferença de potencial)  $v(t)$  entre as placas, esta produz um campo elétrico no interior do capacitor, que provoca uma separação das cargas  $q(t)$  que aparecem nas placas e que são iguais e de sentidos opostos (a carga é positiva /negativa para a placa unida ao terminal positivo/negativo do gerador de alimentação). Num capacitor, o valor da carga armazenada  $q(t)$  é proporcional à tensão aplicada  $v(t)$ , ou seja,

$$q(t) = Cv(t). \quad (3.10)$$

A constante de proporcionalidade  $C$  é a capacitância do capacitor e é medida em Faraday ( $F$ ). O valor da capacitância de um capacitor depende de suas dimensões e da permissividade do meio dielétrico contido entre as placas e sua expressão para um capacitor plano é  $C = \frac{\varepsilon S}{d}$ , onde  $S$  é a área da placa, e  $d$  é a distância entre as placas e  $\varepsilon$  é a constante de permissividade do meio.

A relação entre a tensão aplicada e a corrente num capacitor é, de acordo com (3.10), dada por:

$$q(t) = Cv(t) \implies i(t) := \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}, \quad (3.11)$$

ou seja, a corrente num capacitor é diretamente proporcional à variação da tensão com relação ao tempo. Um aumento da tensão corresponde a uma corrente positiva e uma redução da tensão aplicada ao capacitor corresponde a uma corrente negativa.

A equação (3.10) é que define corretamente o capacitor, pois caso a capacitância dependa do tempo, isto é  $C = C(t)$ , para obter a corrente podemos usar (3.11).

Logo, temos a seguinte definição.

**Definição 11 (Capacitor)** *Um capacitor é qualquer elemento do circuito descrito por uma relação entre a carga e o tensão.*

$$C(q, V) = 0. \quad (3.12)$$

Este elemento pode ser controlado pela carga ou pela tensão.

Observa-se que, se  $v(t)$  é constante, então a corrente  $i(t)$  é igual a zero. Assim, um capacitor alimentado com uma tensão contínua (estacionária) se comporta como um circuito aberto. A relação inversa a (3.11), pode ser obtida integrando entre um tempo inicial  $t_0$  e um tempo final  $t$

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau.$$

Em particular, para  $t_0 = 0$  temos

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau. \quad (3.13)$$

A expressão anterior indica que a tensão no capacitor no tempo  $t > 0$  é igual à tensão inicial  $v(0)$  mais a tensão desenvolvida a partir de  $t_0$ . O capacitor tem um efeito de **memória**, pois a tensão (saída) que se adquire num tempo  $t = t_1$  depende do valor da corrente (entrada) no tempo atual  $t = t_1$  e dos valores anteriores da corrente ( $t < t_1$ ). Outro aspecto a considerar, e que é deduzido de (3.13), é que a tensão num capacitor não pode variar abruptamente, já que a corrente seria infinita, o que é fisicamente impossível. Deste modo, a tensão num capacitor não pode ter descontinuidades. Em particular, é verdadeiro que

$$v(0^-) = v(0^+).$$

### 3.2.3 Leis físicas

Para descrever o comportamento de um circuito é necessário conhecer, por um lado, as relações características dos elementos do circuito que o compõem (apresentadas acima para o resistor, o indutor e o capacitor), e de outro lado, as relações que surgem como resposta da interconexão desses elementos.

#### Lei de Ohm

Quando um condutor conduz uma corrente, existe um campo elétrico  $\vec{E}$  no seu interior. Foi descoberto, experimentalmente para muitos condutores em temperatura constante, que a densidade de corrente  $\vec{J}$  é diretamente proporcional a este campo.

$$\vec{J} = g\vec{E}.$$

Esta expressão é a **lei de Ohm**, onde  $g$  é a condutividade do material. No caso de um determinado condutor, digamos um cabo ou um fio, podemos escrever a lei de Ohm em função da diferença de potencial: escolhemos um segmento pequeno de comprimento  $L$  e área transversal  $A$ , logo desde que  $\Delta V = V_1 - V_2$  (a tensão em  $V_1$  é a maior) e como  $\Delta V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$  é igual em todos os pontos do fio, temos:

$$\Delta V = EL \Rightarrow E = \frac{\Delta V}{L}.$$

Agora, como  $\vec{J} = g\vec{E}$  e a corrente  $i = gEA = \frac{gA}{L}\Delta V$ , temos que  $\Delta V = \frac{L}{gA}i$ , o que nos dá uma relação linear entre  $i$  e  $\Delta V$ , equivalente à lei de Ohm.

A quantidade  $\frac{\Delta V}{i}$  ou  $\frac{V}{i} = \frac{L}{gA}$  é chamada resistência  $R$  do segmento do fio:

$$R = \underbrace{\frac{V}{i}}_{\text{Lei de Ohm}} = \frac{L}{gA},$$

ou seja,  $V = Ri$ , onde  $R$  é a resistência.

## Lei de Faraday

Os fenômenos de indução obedecem uma mesma lei, a lei de Faraday, dada matematicamente por:

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot \hat{n} da.$$

A integral da direita é o fluxo magnético  $\phi$ .

Aplicando esta equação ao caso de um indutor, obtemos a seguinte relação, conhecida como lei de Faraday:

$$\phi(t) = Li(t),$$

onde  $L$  é a indutância.

## Leis de Kirchhoff

As equações básicas dos circuitos foram formuladas a partir de dois lemas simples, expressos pela primeira vez por Gustav Kirchhoff em 1845.

O primeiro lema se aplica às correntes que entram ou saem de um nó e constitui a versão da teoria dos circuitos do princípio de conservação da carga elétrica.

O segundo lema se aplica às tensões ao longo de um circuito fechado (malha) e representa a versão na teoria dos circuitos do princípio de conservação de energia.

### Primeira lei de Kirchhoff ou lei dos nós

Este lema é o resultado direto do princípio de conservação da carga. Se aplica ao nó (é um ponto de união entre três ou mais elementos de um circuito) de um circuito.

Consideremos qualquer nó de um circuito, como aquele mostrado na figura 3.6, no qual são mostradas as direções de referência das correntes nos diferentes ramos.

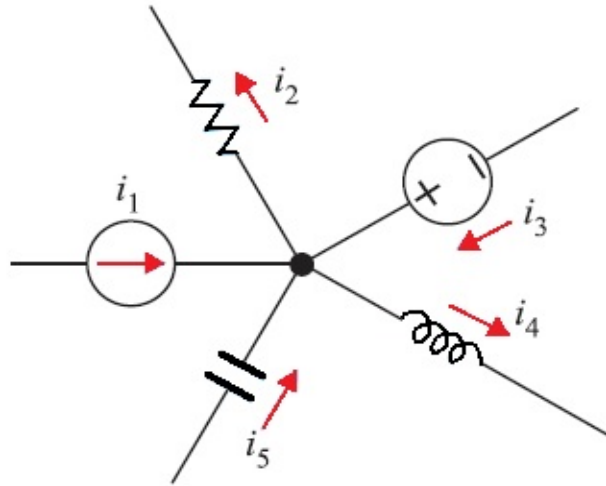


Figura 3.6: Nó de um circuito.

Temos que, em qualquer instante do tempo, a corrente total que entra no nó deve ser igual à corrente total que sai dele.

Assim, para nosso exemplo da figura, temos

$$i_1(t) + i_3(t) + i_5(t) = i_2(t) + i_4(t).$$

Também pode ser escrito como

$$i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) - i_4(t) + i_5(t) = 0.$$

Esta lei também pode ser expressa dizendo: **“Para cada instante do tempo, a soma algébrica de todas as correntes que entram em um nó é igual a zero”**, ou seja,

$$\sum i_k(t) = 0.$$

### Segunda lei de Kirchhoff ou lei das malhas

Esta lei, como já foi dito anteriormente, é uma consequência direta do Princípio de Conservação da Energia. Consideremos o circuito mostrado na figura 3.7, que mostra um caminho fechado ( $ABCD$ ), na figura as polaridades das tensões foram indicadas. A segunda lei de Kirchhoff nos diz: **“Para cada instante do tempo, a soma algébrica de todas as tensões ou diferença de potencial ao longo de um caminho fechado é igual a zero”**, ou seja,

$$\sum v_k(t) = 0.$$

Para nosso exemplo da figura 3.7, temos:

$$v_1(t) + v_2(t) - v_3(t) - v_4(t) + v_5(t) = 0.$$

Na próxima seção, veremos aplicações destas leis no estudo de circuitos elétricos envolvendo os elementos estudados (capacitores, resistores e indutores).

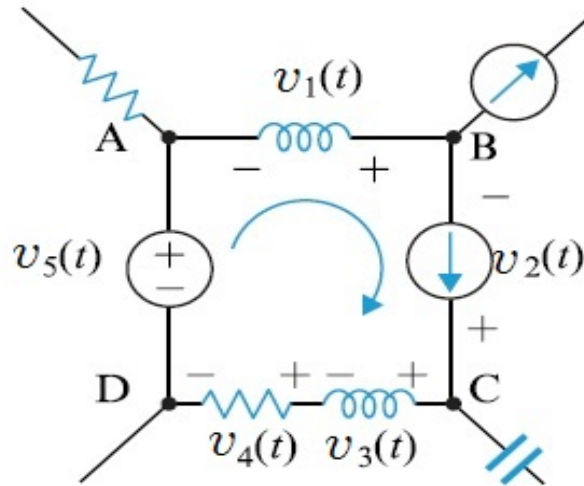


Figura 3.7: Malha de um circuito.

### 3.3 Circuitos elétricos

Nesta seção apresentamos o estudo detalhado de alguns tipos de circuitos conhecidos, chamados de circuitos de primeira e segunda ordem.

#### 3.3.1 Circuito LC

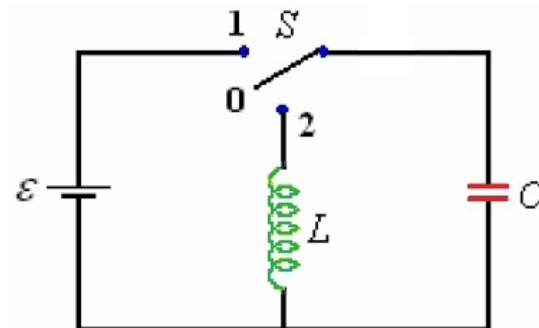


Figura 3.8: Circuito LC.

Na figura 3.8 temos um circuito  $LC$ , formado por um capacitor e um indutor, que vamos considerar ideal (sem resistências próprias). Se colocarmos a chave  $S$  na posição 1, o capacitor é carregado até ter uma tensão igual à força eletromotriz e armazenar uma energia igual a  $U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ , onde  $Q = V_0 C$ .

Se colocarmos a chave na posição 2, o capacitor descarrega através do indutor. Conforme o capacitor descarrega, a energia passa para o indutor. Assim, uma vez que o capacitor esteja descarregado, a corrente atinge seu valor máximo e como não há fonte que continue mantendo essa corrente, ela começa a diminuir, levando uma carga ao capacitor até que a corrente seja zero e o capacitor é carregado. Porém, a polaridade é invertida e desde que o circuito é ideal e não há resistência, o processo é repetido e assim trocam energia de tal maneira que a energia total do circuito é constante, ou seja

$$U_B + U_E = U = \text{constante},$$

ou, equivalentemente

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = U. \quad (3.14)$$

Derivando a equação (3.14) temos:

$$Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = 0,$$

e como  $i = \frac{dq}{dt}$  e  $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ , temos

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Assim, chegamos a uma equação diferencial ordinária linear de ordem 2, que pode ser escrita como um sistema linear de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = i \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{LC}q \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix}.$$

Da teoria estudada sobre sistemas lineares, temos que  $q(t) = A\cos\omega t + \delta$ , onde  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ ,  $A$  é o valor máximo de  $q$  e depende das condições iniciais. Para nosso caso,  $A = Q$  e  $\delta = 0$ , pois  $q$  é máximo no início do processo.

Finalmente, obtemos  $q(t) = Q\cos\omega t$  e  $i(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega Q\sin\omega t$ , donde segue que o circuito é oscilante.

### 3.3.2 Circuito RLC

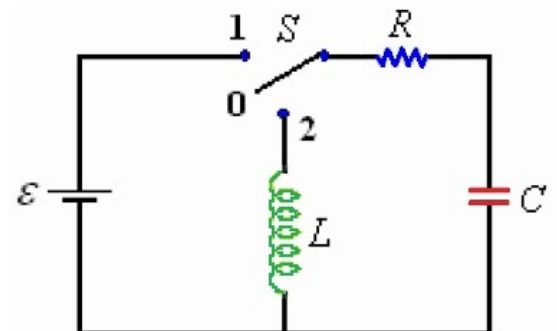


Figura 3.9: Circuito RLC.

A figura 3.9 mostra um circuito  $RLC$ , sendo que, na posição 1 o capacitor é carregado. Na posição 2, a energia armazenada no capacitor é descarregada, uma parte é dissipada pela resistência e uma parte é armazenada na indutância, depois a indutância repete o

processo, uma parte é dissipada pela resistência e uma parte é armazenada no capacitor, e assim por diante, até a energia inicial do capacitor ser dissipada totalmente na resistência.

Aplicando a Segunda lei de Kirchhoff (na segunda malha) temos

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} + Ri = 0.$$

Como  $i = \frac{dq}{dt}$  e  $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ , ficamos com a seguinte equação

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Equivalentemente, temos o sistema linear

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = i, \\ \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{LC}q, \end{cases} \iff \begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix},$$

donde temos o polinômio característico associado  $P_\lambda = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}$ ,

cujas raízes são  $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$ .

Chamando  $\beta = \frac{1}{2} \frac{R}{L}$  e  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ , temos que  $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ .

Portanto, a solução geral do sistema é dada por

$$q(t) = e^{-\beta t} \left( B e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + D e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right),$$

sendo que  $B$  e  $D$  dependem das condições iniciais. Também, evidentemente, a forma da solução depende dos valores de  $R, L$  e  $C$ , os quais determinam se  $\beta^2 - \omega_0^2$  é menor, igual ou maior do que zero. Para cada caso, temos uma oscilação subamortecida, criticamente amortecida e sobre amortecida. Por exemplo, para o caso sub amortecido ( $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$ ), temos  $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \omega_1 i$ ,  $i$  aqui representa a unidade imaginária. Logo,  $q(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \delta)$ . A figura 3.10 mostra o gráfico de  $q(t)$  para o caso  $\delta = 0$ .

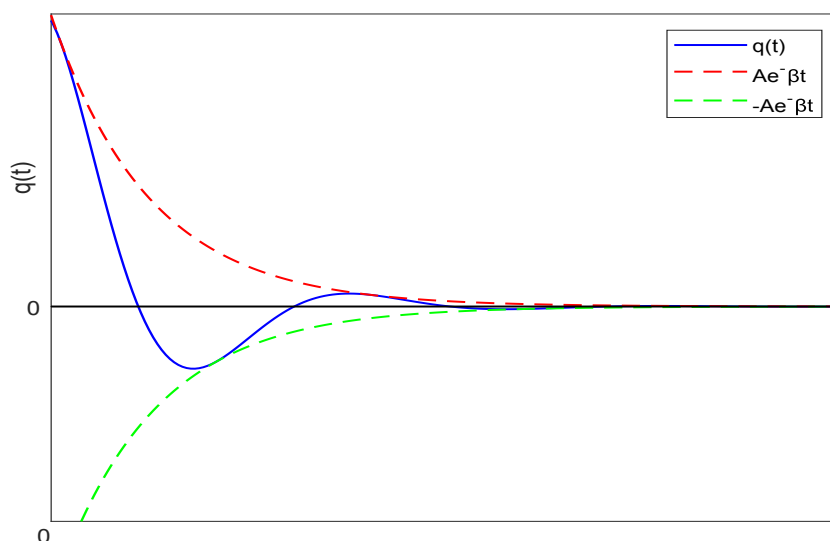


Figura 3.10: Solução sub amortecida para  $q(t)$ .

## 3.4 Memristor: o quarto elemento fundamental



Figura 3.11: Símbolo do memristor.

### 3.4.1 Histórico sobre a descoberta do memristor

O Memristor é uma resistência elétrica com memória, cuja existência foi teoricamente postulada em 1971 por Leon Ong Chua, professor da Universidade da Califórnia em Berkeley, como o quarto elemento fundamental passivo (elemento perdido), que precisava ser encontrado para completar as relações dos três elementos clássicos: resistor, indutor e capacitor. O nome memristor vem da contração de *memory resistor* (resistência com memória). No ano 2008, os pesquisadores da empresa americana Hewlett Packard (HP), especialistas em nanotecnologia, liderados por Stanley Williams, anunciaram no *Jornal Nature* [22], o primeiro memristor que foi construído no mundo.

Chua deduziu a existência dos memristores das relações matemáticas entre os elementos dos circuitos. As quatro magnitudes básicas (carga  $q(t)$ , corrente  $i(t)$ , tensão  $v(t)$  e fluxo magnético  $\phi(t)$ ) podem ser relacionadas entre si de seis formas diferentes. Duas magnitudes estão ligadas mediante leis físicas e outras três são obtidas mediante as equações clássicas dos circuitos, aplicadas à resistência, indutância e capacitância, respectivamente. Sendo assim, Chua percebeu que faltava uma equação para completar estas relações. Para compreender esta situação, na figura 3.12 temos desenhado um gráfico que mostra as relações entre as magnitudes e os elementos básicos. As quatro magnitudes básicas:  $q(t)$ ,  $v(t)$ ,  $i(t)$  e  $\phi(t)$  estão representadas dentro dos círculos.

Nos quatro quadrantes são colocados os componentes passivos. Assim no primeiro quadrante está o primeiro elemento descoberto no ano 1745, o capacitor, o que satisfaz a seguinte equação diferencial básica que relaciona a carga  $q(t)$  e a tensão  $v(t)$ :

$$dq(t) = Cv(t).$$

No segundo quadrante, está a resistência elétrica, descoberta no ano 1827, que satisfaz a relação:

$$dv(t) = Ri(t).$$

No terceiro quadrante, está a indutância elétrica, descoberta no ano 1831, que relaciona o fluxo magnético com a corrente como:

$$d\phi(t) = Ldi(t).$$



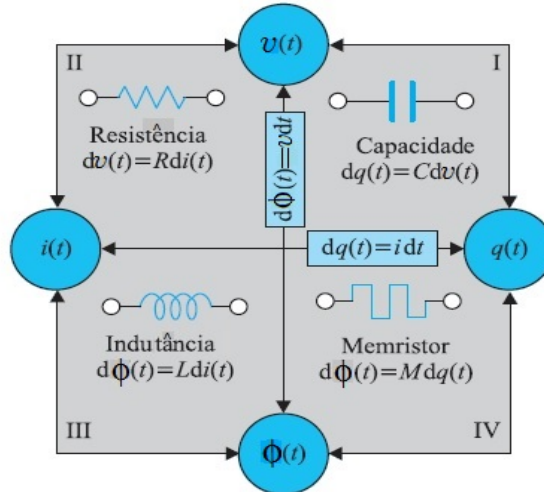


Figura 3.12: Elementos passivos básicos e suas relações matemáticas.

**Observação 1** Deve-se notar que o fluxo magnético encadeado pela bobina é uma generalização da característica do circuito de uma indutância. Não representa aqui o fluxo magnético, simplesmente é a integral da tensão  $v(t)$ .

Fica faltando então um elemento no quarto quadrante, que relaciona o fluxo magnético com a carga. Chua definiu teoricamente este elemento da seguinte forma.

**Definição 12 (Memristor)** Qualquer elemento de circuito descrito por uma relação entre a carga e o fluxo magnético é um memristor

$$M(q, \phi) = 0. \quad (3.15)$$

Da mesma forma, um memristor pode ser controlado por carga ou fluxo magnético. Além disso, este elemento recebe seu próprio atributo: a **memristência**.

### 3.4.2 Memristência e memdutância

No caso de um memristor com carga controlada, sua relação característica  $\phi = \phi(q)$  pode ser escrita em termos de corrente e tensão. Derivando com relação ao tempo temos:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d\phi(q(t))}{dt},$$

ou ainda

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d\phi(q)}{dq} \cdot \frac{dq(t)}{dt}.$$

Assim, temos

$$v_m(t) = M(q)i_m(t), \quad (3.16)$$

onde  $M(q) = \frac{d\phi(q)}{dq}$  tem unidades de resistência e é chamado de **memristência**. Isto nos diz que o **memristor** possui uma **resistência** que depende da variável  $q$ .

Analogamente, no caso de um memristor controlado pelo fluxo, ( $q = q(\phi)$ ) obtemos a relação

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{dq(\phi)}{d\phi} \cdot \frac{d\phi(t)}{dt}.$$

Assim, temos

$$i_m(t) = W(\phi)v_m(t) \quad (3.17)$$

onde  $W(\phi) = \frac{dq(\phi)}{d\phi}$  tem unidades de condutância e é chamado de **memdutância**. Isto nos diz que o **memristor** possui uma propriedade **condutiva** que depende da variável  $\phi$ .

No caso onde  $M(q)$  ou  $W(\phi)$  tenha um valor constante, o memristor é simplesmente um “resistor linear”, por isso, para caracterizar um memristor propriamente dito, este elemento de circuito deve ser estritamente não-linear.

Destas equações segue-se que a memristência é uma resistência (logo, sua unidade de medida também é em Ohms). Porém, há uma diferença com relação à resistência clássica, que oferece sempre o mesmo nível de dificuldade à passagem da corrente elétrica: no memristor a resistência varia com a quantidade de eletricidade que passa por ele (ou seja, o memristor oferece uma resistência variável à corrente elétrica).

**Observação 2** Para conseguir o fato acima, os pesquisadores da HP construíram um protótipo de memristor (escala nanométrica) que essencialmente tem a forma mostrada na figura 3.13, e consiste de um filme de oxido de titânio ( $TiO_2$ ), de comprimento total  $D$  de 50nm, colocado entre dois eletrodos de platina de 5nm de espessura; um lado do filme de  $TiO_2$  está dopado, de modo tal que há uma falta de oxigênio e que segue a formula  $TiO_{2-x}$ , onde  $x$  é da ordem de 0.05nm corresponde à zona dopada da esquerda, no modelo da figura 3.13 e sua largura é  $w$ , a outra parte do  $TiO_2$  tem uma largura  $D - w$ .

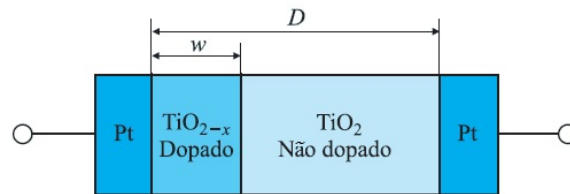


Figura 3.13: Composição interna do Memristor construído pela HP em 2008.

A zona dopada de  $TiO_{2-x}$  tem baixa resistência devido à falta de oxigênio, enquanto a zona não dopada com  $TiO_2$  tem uma alta resistência. Quando  $w = D$ , a resistência do conjunto é  $R_{on}$  e quando  $w = 0$  a resistência do conjunto é  $R_{off}$  (onde  $R_{on} \ll R_{off}$ ). É evidente que a resistência deste dispositivo,  $M(q)$ , será dada pela associação em série das resistências  $R_{dopada}$  e  $R_{naodopada}$ , cujos valores são proporcionais à suas larguras relativas, de onde obtemos a seguinte expressão:

$$M(q) = \frac{w}{D}R_{on} + \left(1 - \frac{w}{D}\right)R_{off}. \quad (3.18)$$

A equação acima nos diz que  $M(q)$  é uma função linear da largura da zona dopada  $w$ , o que quer dizer que, variando  $w$ , pode-se modificar o valor da memristência. Além disso, pode ser demonstrado que a taxa de variação da largura  $w$  em função da corrente tem a forma:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\mu_D R_{on}}{D} i(t), \quad (3.19)$$

onde  $\mu_D$  representa a mobilidade dos portadores de carga. Integrando a equação (3.19) e substituindo na equação (3.18), levando em consideração que  $R_{on} \ll R_{off}$  e  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ , obtemos a seguinte expressão para a memristência:

$$M(q) = R_{off} \left[ 1 - \frac{\mu_D R_{on}}{D^2} q \right]. \quad (3.20)$$

**Observação 3** A equação (3.20) demonstra que a memristência é **função da carga** que passa pelo dispositivo, e daí sua importância, já que o memristor pode memorizar a magnitude da carga, mantendo este valor por muito tempo. Ou seja, o memristor só precisa de energia para ajustar sua resistência, mas depois vai manter seu valor por muito tempo sem consumo de eletricidade.

**Definição 13 (Memristor passivo e memristor ativo)** Um memristor controlado por corrente (respectivamente controlado pela tensão) é chamado de passivo se, e somente se, sua memristência (respectivamente sua memdutância)  $R(x, i) \geq 0$  (respectivamente  $G(x, v) \geq 0$ ).

Um memristor é chamado de ativo se, e somente se, não for um memristor passivo.

**Exemplo. 11 (Memristor ativo)** Consideremos o seguinte memristor controlado por corrente

$$v = R(x)i = \beta(x^2 - 1)i,$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x, i) = i(1 - x) - \alpha x,$$

onde  $\beta > 0$ , logo este memristor é ativo no intervalo  $(-1, 1)$  pois  $R(x) = \beta(x^2 - 1) < 0$  para todo  $x \in (-1, 1)$ .

**Definição 14 (Gráfico de desligamento ou POP (Power off Plot))** Dado um memristor controlado por corrente (respectivamente controlado pela tensão), seja sua equação de estado  $\frac{dx}{dt} = f(x, i)$  (respectivamente  $\frac{dx}{dt} = g(x, v)$ ). O POP é a representação gráfica da função  $f(x, i)$  (respectivamente  $g(x, v)$ ) quando a corrente  $i = 0$  (respectivamente  $v = 0$ ), isto é  $\frac{dx}{dt} \Big|_{i=0} = f(x, 0)$  (respectivamente  $\frac{dx}{dt} \Big|_{v=0} = g(x, 0)$ ). Logo, este gráfico nos dá os estados de equilíbrio da equação de estado do memristor.

**Observação 4** Um termistor é um tipo de resistência (componente eletrônico) cujo valor varia em função da temperatura de forma mais pronunciada do que uma resistência comum.

**Exemplo. 12 (O POP do termistor de coeficiente de temperatura positiva)** *Seja a equação que modela o termistor*

$$i = W(x)v$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\delta_p}{H_{CP}}(T_{op} - x) + \frac{W(x)}{H_{CP}}v^2$$

onde a função memdutância é dada por  $W(x) = [R_{OP}e^{\beta_p(x-T_{op})}]^{-1}$ , e onde  $\delta_p, \beta_p, H_{CP}, R_{OP}, T_{op}$  são constantes.

Temos que  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{v=0} = f(x, 0) = \frac{\delta_p}{H_{CP}}(T_{op} - x)$  representando graficamente temos que o POP é uma reta no plano  $\left(x, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{v=0}\right)$ , como é mostrado na figura 3.14.

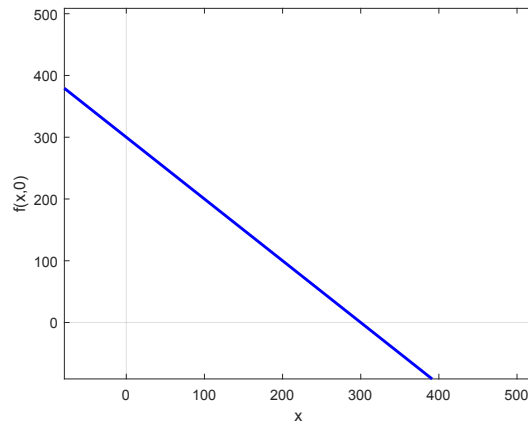


Figura 3.14: POP ou gráfico de desligamento do termistor, com  $\delta_p = H_{CP}$  e  $T_{OP} = 300K$ .

**Definição 15 (Memristor não volátil)** *Segundo [6], um memristor com uma variável de estado escalar  $x$  é não volátil se seu gráfico de desligamento (POP) cruza o eixo- $x$  em dois ou mais pontos com uma inclinação negativa.*

**Observação 5 .** *Um memristor é volátil no sentido de que o efeito dos sinais de entrada anteriores aos quais esse memristor foi submetido foram esquecidos.*

## Propriedades do memristor

Agora apresentamos algumas das propriedades do memristor, que mostram que ele é realmente um novo elemento fundamental.

- 1) **Memória.** A memória é a capacidade de um sistema de armazenar seu estado num tempo dado, sendo possível acessá-lo posteriormente. Isto implica que para saber o estado do sistema num instante do tempo  $t$ , é necessário conhecer a história da evolução temporal do sistema.

Neste sentido, o capacitor e o indutor têm memória, como já foi dito ao apresentarmos as equações (3.8) e (3.13). Um memristor também possui memória, pois a memristância depende do histórico da corrente que flui através dele, de fato temos

$$M(q) = M \left( \int i(t)dt \right).$$

Porém existem diferenças entre a memória de um memristor e a memória de um capacitor ou indutor.

Ao contrário de um capacitor, um memristor não armazena carga, então a dependência da carga é diferente nesses elementos. Este último lembra o valor total da carga que circulou por ele.

Por outro lado, para manter a informação do estado num capacitor (ou indutor), é necessário o fornecimento de energia constantemente. Neste sentido, diz-se que estes elementos tem memória volátil, pois esta não fica armazenada quando desliga-se o suprimento de energia. Em contraste, um memristor tem uma memória não volátil. Em outras palavras, se o memristor for desconectado da fonte de alimentação, ele manterá seu estado indefinidamente.

- 2) **Passividade.** A condição para um **memristor físico** ser passivo é que sua memristância seja não negativa. De fato, temos que a potência  $P_m(t)$  é dada por

$$P_m(t) = V_m(t)i_m(t) = M(q) [i_m(t)]^2$$

que é positiva, desde que a memristância seja positiva. Logo, qualquer dispositivo físico candidato a memristor deve ser passivo (como modelo matemático). De fato, suponhamos que se tem um memristor que possui uma região onde sua memristância é negativa. Então, num ponto desta região se tem

$$d\phi = -kdq.$$

Neste ponto, a tensão e a corrente sempre terão sinais opostos. Aplicando um sinal harmonioso nesta região, o produto entre a tensão e a corrente seria sempre negativo. Isto nos diz que, por este procedimento, se poderia extrair uma quantidade infinita de energia, o que é impossível.

Portanto, um memristor físico real controlado por corrente deve estar representado por uma função  $\phi = \phi(q)$  monótona crescente, para assim ter certeza que este seja passivo.

- 3) **Incapacidade de armazenar energia.** Num memristor a tensão entre seus terminais sempre será zero enquanto a corrente for nula. Isto implica, diferentemente de um capacitor ou indutor, que o memristor não tem a capacidade de armazenar energia, seja magnética ou elétrica. Logo, o memristor é um elemento dissipativo.

### 3.4.3 Sistemas memristivos

O memristor é apenas um membro de uma família mais geral de dispositivos ou sistemas, chamados sistemas memristivos, que foram definidos no ano de 1976, por Chua e Kang (veja [8]), com a finalidade de modelar sistemas cujas propriedades lembram as do memristor, e ainda assim sem poder ser descritos adequadamente por este, por serem mais gerais. Veja também [23].

**Definição 16 (Sistemas memristivos.)** *Os sistemas memristivos são definidos por duas equações: uma equação algébrica que expressa a relação entre a variável de entrada (ou*

seja, o sinal aplicado ao sistema, seja de tensão ou corrente) e a variável de saída (resposta do sistema), e uma equação dinâmica que descreve a evolução temporal das  $n$  variáveis de estado internas do sistema, que modulam o valor da resistência. Assim, um sistema memristivo controlado pela corrente é descrito matematicamente pelo sistema de equações:

$$V_m(t) = R(x, i_m, t)i_m(t), \quad (3.21)$$

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(x, i_m, t), \quad (3.22)$$

onde  $R$  é uma função real de  $n + 2$  variáveis, e  $\mathbf{f}$  é uma função vetorial.

Da mesma forma define-se um sistema memristivo controlado por tensão.

**Exemplo. 13 (Termistor)** O termistor é um resistor cuja resistência é especialmente sensível às mudanças de temperatura. Em geral, todas as resistências variam com a temperatura, mas estes dispositivos são construídos com materiais semicondutores especialmente sensíveis. Em particular, um termistor com coeficiente de temperatura negativo é descrito pela equação

$$v_T = R_0 \left[ e^{\beta \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)} \right] i_T = R(T)i_T, \quad (3.23)$$

onde  $T_0$  é a temperatura inicial e  $T$  a temperatura no tempo  $t$ , em graus Kelvin.  $R_0$  é a resistência inicial do dispositivo, enquanto que  $\beta$  é uma constante característica do material.

Por outro lado, a temperatura na qual o termistor está em um determinado instante de tempo depende da potência dissipada por ele até esse instante. Esta dependência é expressa pela equação de transferência de calor

$$C_h \frac{dT}{dt} = V_T(t)i_T(t) + \delta(T_{amb} - T) = R(T)i_T(t)^2 + \delta(T_{amb} - T) = f(T, i), \quad (3.24)$$

onde  $C_h$  é a capacidade calorífica,  $\delta$  é a constante de dissipação do termistor e  $T_{amb}$  é a temperatura ambiente. Observe que as equações (3.23) e (3.24) fornecem um sistema memristivo, dado por

$$\begin{cases} v_T = R_0 \left[ e^{\beta \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)} \right] i_T = R(T)i_T, \\ \frac{dT}{dt} = \frac{R(T)}{C_h} i_T(t)^2 + \frac{\delta}{C_h} (T_{amb} - T). \end{cases}$$

**Observação 6** Propriedades tais como a passividade e a incapacidade de armazenar energia podem ser estendidas aos sistemas memristivos. De forma similar ao memristor, para que um sistema memristivo seja passivo deve-se ter que a função  $R(x, i_m, t)$  seja não negativa.

## Classificação de memristores e sistemas memristivos

De acordo com as definições dadas anteriormente, existe uma classificação dos memristores e sistemas memristivos, de acordo com as equações que o descrevem. Tal classificação é apresentada na tabela 3.1 por ordem crescente de complexidade (ou seja, o memristor representado na primeira linha será o mais simples e o da última será o mais complexo).

Na tabela 3.1, além das variáveis do sistema  $v$ ,  $i$ ,  $q$  e  $\phi$ , aparece a variável  $x$ , que representa a variável de estado do memristor. Esta variável está relacionada com características próprias do memristor como, por exemplo, sua composição química (ou física).

Memristor	Controlado por Corrente	Controlado por Tensão
Memristor Ideal	$v = R(q)i$ $\frac{dq}{dt} = i$	$i = G(\phi)v$ $\frac{d\phi}{dt} = v$
Memristor Ideal Genérico	$v = R(x)i$ $\frac{dx}{dt} = \hat{f}(x)i$	$i = G(x)v$ $\frac{dx}{dt} = \hat{g}(x)v$
Memristor Genérico	$v = R(x)i$ $\frac{dx}{dt} = f(x, i)$	$i = G(x)v$ $\frac{dx}{dt} = g(x, v)$
Memristor Estendido	$v = R(x, i)i,$ $R(x, 0) \neq \infty$ $\frac{dx}{dt} = F(x, i)$	$i = G(x, v)v,$ $G(x, 0) \neq \infty$ $\frac{dx}{dt} = g(x, v)$

Tabela 3.1: Classificação dos sistemas memristivos.

### 3.4.4 Curva ou ciclo (loops) de histerese

Esta curva geralmente surge em materiais ferromagnéticos ao representar graficamente a magnetização do material em relação ao campo externo aplicado. Neste caso, o material é capaz de lembrar seu estado de magnetização, mesmo que a fonte ou campo externo seja retirado.

Da mesma forma, quando um sistema memristivo é submetido a um sinal de entrada periódico e sua resposta é periódica com a mesma frequência de sinal aplicado, uma curva de histerese é obtida no plano  $(v, i)$  (tensão vs corrente). Se tivermos que a corrente é zero sempre que a tensão é zero, ou vice-versa, (ou seja, a curva sempre passa pela origem) diremos que é uma curva de **histerese pinçada**.

**Exemplo. 14** Consideremos um memristor ideal, controlado pela tensão, descrito pela relação constitutiva

$$q = q(\phi) = 0.01\phi + 0.04|\phi + 0.25| - 0.04|\phi - 0.25|. \quad (3.25)$$

Conectamos uma fonte de tensão  $v(t) = 1.2 \sin(t)$  através deste memristor com a condição inicial no fluxo  $\phi(0) = -0.25$ ; a figura 3.15 mostra o comportamento da função  $q = q(\phi)$ .

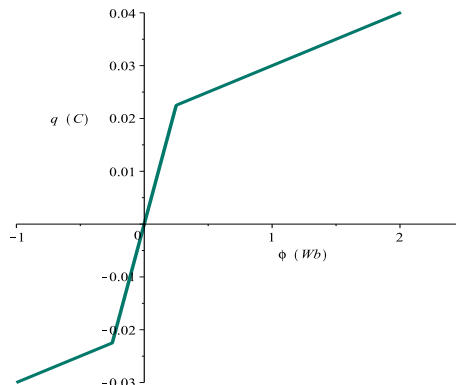


Figura 3.15: Plano fluxo - corrente.

Da relação  $\frac{d\phi}{dt} = v(t)$ , podemos encontrar  $\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t v(\tau)d\tau = 0.95 - 1.2 \cos(t)$ .

Depois, para encontrar a corrente,  $i(t)$ , usamos a relação  $i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{dq(\phi)}{d\phi} \Big|_{\phi(t)} \cdot \frac{d\phi(t)}{dt}$ . Assim temos que  $i(t) = [0.01 + 0.04\text{sgn}(\phi(t) + 0.25) - 0.04\text{sgn}(\phi(t) - 0.25)]1.2 \sin(t)$ .

Finalmente, uma vez que a corrente e a tensão foram obtidas, podemos representar graficamente o ciclo de histerese pinçado como mostrado na figura 3.16.

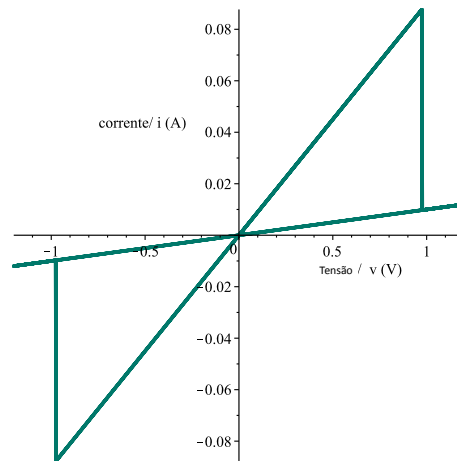


Figura 3.16: Curva de histerese do memristor no exemplo 14.

**Exemplo. 15** Consideremos um memristor ideal controlado por corrente descrito por

$$\phi = \phi(q) = q + \frac{1}{3}q^3. \quad (3.26)$$

Aplicando um sinal de corrente  $i(t) = A \sin(\omega t)$ , a tensão entre os terminais deste memristor é dada por

$$v_m(t) = A \left[ 1 + \frac{A^2}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t))^2 \right] \sin(\omega t).$$

A figura 3.17 mostra os loops de histerese pinçados para três frequências diferentes.

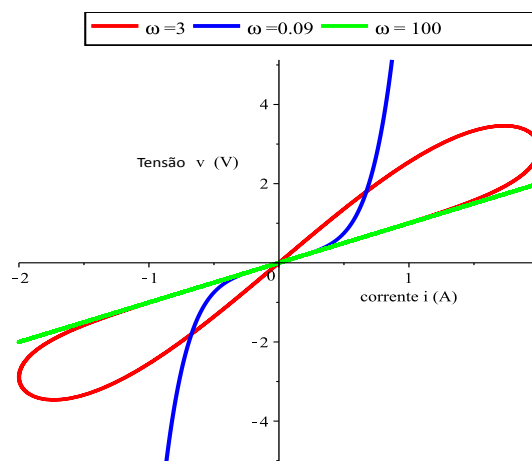


Figura 3.17: Curva de histerese do exemplo 15.



As propriedades dos sistemas memristivos estão, em geral, incluídas na curva de histerese. Por exemplo, pode-se observar na figura 3.17 que os loops de histerese estão confinados no primeiro e terceiro quadrantes, o que indica que o sistema memristivo físico é passivo, pois o produto de  $V$  e  $i$  será sempre positivo.

### 3.4.5 Possíveis aplicações dos sistemas memristivos

Pelo fato de que o memristor lembra da última tensão que foi aplicada nele, esta informação pode ser considerada como um dado, como zeros e uns na lógica binária. Portanto, os memristores são considerados bastante promissores como futuros substitutos das memórias voláteis RAM (Memória de Acesso Aleatório, ou no inglês, Random Access Memory), que permitem a operação de um computador. De fato, a informação que fica armazenada nas memórias RAM é temporária, o que significa que ela se apaga ou desaparece quando o computador é desligado; é por isso que toda vez que o computador é ligado, o sistema é reiniciado e tem-se que aguardar um certo tempo para que as memórias RAM do computador carreguem os dados do sistema. Se fossem construídas com memristores, os dados permaneceriam guardados mesmo que o computador fosse desligado, retornando instantaneamente ao ligá-lo.

Memristores podem tornar as memórias flash ou discos rígidos obsoletos, multiplicando a densidade de armazenamento e a velocidade do computador por cem, conforme observado em [23],

“... o potencial do memristor vai muito além dos computadores instantâneos para abraçar um dos maiores desafios da tecnologia: imitar as funções do cérebro humano. Dentro de uma década, os memristors podem nos permitir **emular**, em vez de apenas **simular**, redes de neurônios e sinapses...”

Muitos grupos de pesquisa têm trabalhado no desenvolvimento de um sistema que possa funcionar como um cérebro in silico: projeto Blue Brain da IBM, Howard Hughes Medical Institute Janelia Farm e o Harvard's Center for Brain Science são apenas três exemplos. No entanto, mesmo uma simulação de cérebro de rato em tempo real envolve a resolução de um número astronômico de equações diferenciais parciais acopladas. Um computador digital capaz de lidar com essa carga de trabalho impressionante precisaria ser do tamanho de uma cidade pequena e alimentá-lo exigiria várias usinas nucleares. Os memristores podem ser extremamente pequenos (em escala nanométrica) e funcionam como sinapses. Usando-os, seremos capazes de construir circuitos eletrônicos analógicos que cabem em uma caixa de sapatos e funcionam de acordo com os mesmos princípios físicos do cérebro. Um circuito híbrido, contendo muitos memristores e transistores conectados, poderia nos ajudar a pesquisar funções e distúrbios cerebrais reais. Tais circuitos podem até levar as máquinas a reconhecer padrões da mesma forma que os humanos, nessas formas críticas os computadores podem, por exemplo, escolher um rosto específico em uma multidão, mesmo que tenha mudado significativamente desde seu último registro [23].



# Circuitos elétricos envolvendo memristores

Neste capítulo, estudaremos o comportamento dinâmico dos memristores estudados no Capítulo 3, quando estes são combinados com os outros elementos fundamentais (capacitores, indutores e resistores). Veremos que os circuitos elétricos formados por tais elementos podem apresentar um rico comportamento dinâmico, nos espaços  $\mathbb{R}^n$ , com  $n = 2, 3$ , como pontos de equilíbrio estáveis, instáveis, bifurcações, oscilações periódicas e também caóticas (no  $\mathbb{R}^3$ ).

## 4.1 Circuito elétrico com memristor localmente ativo

Nesta seção, consideramos um memristor genérico (conforme tabela 3.1 no Capítulo 3), controlado por corrente, proposto no artigo [12], o qual segundo [7] pode se escrever, de modo geral, como

$$v_M = R_M(x)i_M, \quad (4.1)$$

$$\frac{dx}{dt} = (a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m) + (b_1i_M + b_2i_M^2 + \dots + b_ni_M^n) + \sum_{j,k=1}^{p,r} c_{jk}x^j i_M^k \quad (4.2)$$

onde  $x$ ,  $v_M$  e  $i_M$  denotam a variável de estado, a tensão e a corrente elétrica no memristor, respectivamente.  $R_M(x)$  é a função memristência,  $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$  e os  $c_{jk}$  são parâmetros reais do desenvolvimento do memristor na equação (4.2).

Ao definirmos a memristência  $R_M(x)$  e os parâmetros de desenvolvimento  $a_m$ ,  $b_n$  e  $c_{jk}$ , uma série de modelos matemáticos do memristor com diferentes características de histerese podem ser obtidos. Para ter as características de ser biestável e localmente ativo, consideraremos as seguintes equações, conforme feito em [12]

$$\begin{cases} v_M = R_M(x)i_M = k_1(x - 0.5)i_M, \\ \frac{dx}{dt} = k_2(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + b_1i_M + c_{11}xi_M) = f(x, i_M), \end{cases} \quad (4.3)$$

onde consideraremos os valores dos parâmetros como sendo  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = -1$ ,  $a_3 = -2$ ,  $a_4 = 1$ ,  $b_1 = 5.4$ ,  $c_{11} = -2.8$ ,  $k_1 = -1.5$  e  $k_2 = 250$  (os demais são considerados nulos).

Quando o memristor determinado pelas equações (4.3) é acionado pela excitação de uma corrente senoidal com amplitude de 2A e diferentes frequências  $\omega$ , os ciclos (ou loops)

de histerese pinçados que se obtém para este memristor são como os mostrados na figura 4.1.

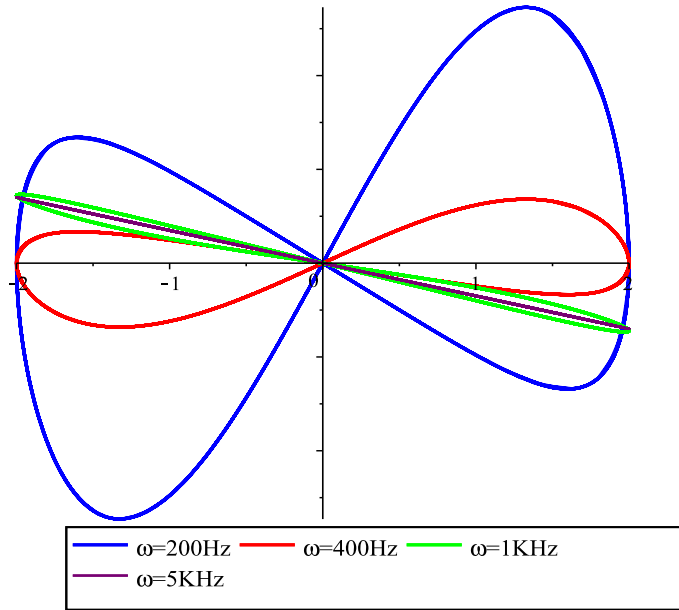


Figura 4.1: Ciclo de histerese no plano  $v_M - i_M$  com frequências diferentes e  $x(0) = 0$ , relativos ao memristor 4.3.

Observamos que, com o aumento da frequência  $\omega$ , o ciclo de histerese se reduz gradualmente a uma função linear (reta com inclinação negativa), ou seja, se degenera em uma resistência linear negativa. Isto já é esperado, conforme observado em [1]. Quando  $\omega \geq 600Hz$ , os ciclos de histerese passam pelos quatro quadrantes e alternam entre as regiões ativas e passivas, para frente e para trás, com a mudança da corrente  $i_M$ . Assim, pode-se observar que o memristor é localmente ativo.

#### 4.1.1 Não volatilidade do memristor localmente ativo

O teorema da não-volatilidade de Chua diz que um memristor com variável de estado escalar é não volátil se o seu POP (Power off-plot, gráfico de desligamento) tiver duas ou mais inclinações negativas nas interseções com o eixo- $x$  [4]. Como vimos, o gráfico de desligamento representa o diagrama do caminho dinâmico de  $\frac{dx}{dt}$  em relação ao eixo  $x$  quando o memristor está desligado, ou seja,  $i_M = 0$  para o memristor controlado por corrente, e  $v_M = 0$  para o memristor controlado pela tensão. Para o memristor controlado por corrente aqui considerado, quando  $i_M = 0$ , a segunda equação (4.3) pode ser escrita como

$$\frac{dx}{dt} \Big|_{i_M=0} = 250(2x - x^2 - 2x^3 + x^4) = f(x, 0). \quad (4.4)$$

De acordo com a equação (4.4), o POP do memristor é mostrado na figura 4.2. Observe que o memristor tem quatro pontos de equilíbrio, a saber:  $Q_1(-1, 0)$ ,  $Q_2(0, 0)$ ,  $Q_3(1, 0)$  e  $Q_4(2, 0)$ . Na região onde  $\frac{dx}{dt} > 0$ , o estado  $x$  se moverá para a direita ao longo do POP, enquanto na região onde  $\frac{dx}{dt} < 0$ , o estado  $x$  se moverá para a esquerda ao longo do POP.

Temos então que  $Q_1$  e  $Q_3$  são dois pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis, enquanto  $Q_2$  e  $Q_4$  são dois pontos de equilíbrio instáveis da equação  $dx/dt = f(x, 0)$ . Se o

memristor desligar em  $t = 0$ , o memristor tende a um dos pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis para diferentes condições iniciais  $x(0)$ . De acordo com a figura 4.2, os domínios de atração de  $Q_1$  e  $Q_3$  são  $(-1.5, 0)$  e  $(0, 2)$ , respectivamente. As memristências correspondentes nos dois pontos de equilíbrio estáveis são calculadas usando a primeira equação (4.3) da seguinte forma:

$$R_M(x_{Q_1}) = -1.5(-1 - 0.5) = 2.25\Omega \quad \text{e} \quad R_M(x_{Q_3}) = -1.5(1 - 0.5) = -0.75\Omega.$$

O memristor tem dois pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis, que correspondem a memristências não voláteis, em que uma é negativa e a outra positiva. Portanto, o memristor operado nos pontos  $Q_1$  e  $Q_3$  atua como um memristor passivo e um memristor ativo, respectivamente.

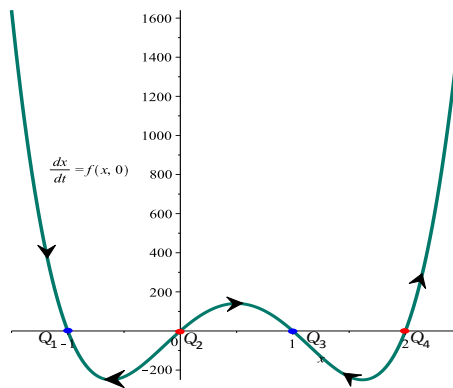


Figura 4.2: Gráfico de desligamento (POP) do memristor (4.3).

#### 4.1.2 Mecanismo de comutação ou de mudança do memristor

O gráfico da trajetória dinâmica do memristor acionado por diferentes correntes externas é mostrado na figura 4.3, para três trajetórias dinâmicas parametrizadas pelas amplitudes de corrente de  $-0.2 A$ ,  $0 A$  e  $0.2 A$ .

De acordo com a direção da seta,  $x$  se moverá para a direita ao longo do caminho dinâmico (segmento de reta) onde  $\frac{dx}{dt} > 0$ , enquanto se moverá para a esquerda ao longo do caminho dinâmico onde  $\frac{dx}{dt} < 0$ .

Se um pulso de corrente apropriado ( $i_M \neq 0$ ) for aplicado ao memristor, o estado irá pular para outro caminho dinâmico e então se moverá para a esquerda ou direita para um ponto de estado ao longo do novo caminho. Quando o memristor é desligado ( $i_M = 0$ ), o estado  $x$  vai voltar para o POP, e então se estabilizará assintoticamente em um ponto de equilíbrio estável no POP (ver figura 4.3). Desta forma, é possível alternar com êxito entre os dois estados estáveis.

Este exemplo é usado para ilustrar o processo de mudança de estado acima. Na tabela 4.1 e na figura 4.4, as variações da memristência  $R_M$ , a variável de estado  $x$  e o ponto operacional  $Q$  do memristor são descritos quando o memristor é acionado por pulsos de corrente positiva e negativa ( $i_M \neq 0$ , ver equação (4.3)).

Observe a partir da figura 4.4 que para mudar com sucesso de  $Q_1$  para  $Q_3$  ou vice-versa, a largura de pulso (respectivamente, a amplitude) deve ser pelo menos longa (respectivamente, alta) o suficiente para que o ponto de salto para baixo caia dentro do intervalo  $x(Q_2) < x < x(Q_4)$  (respectivamente  $x < x(Q_2)$ ), o que leva o estado  $x$  a atingir  $Q_3$  (respectivamente  $Q_1$ ).

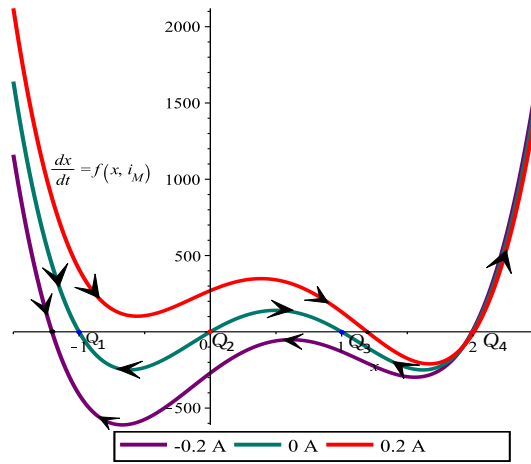


Figura 4.3: Trajetórias dinâmicas do memristor (4.3).

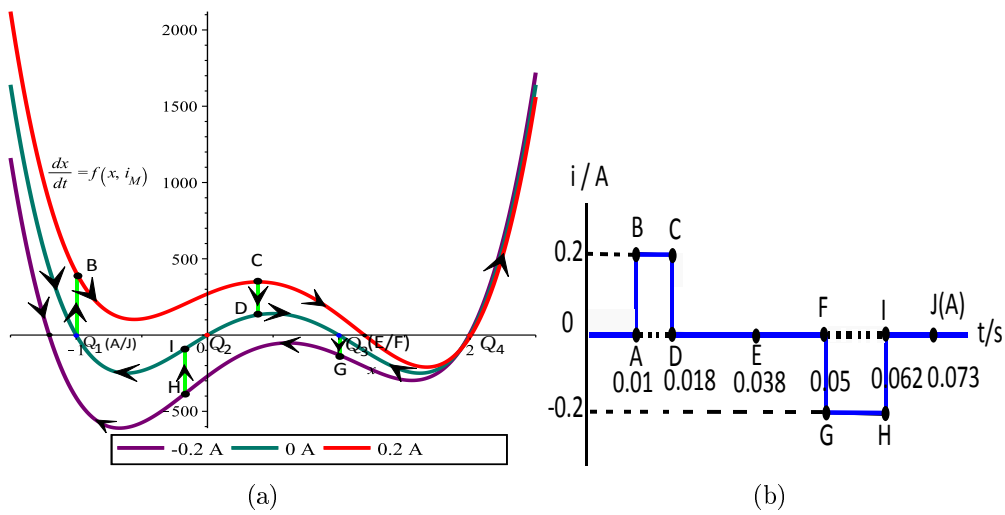


Figura 4.4: Exemplo de mudança de estado para o memristor (4.3).

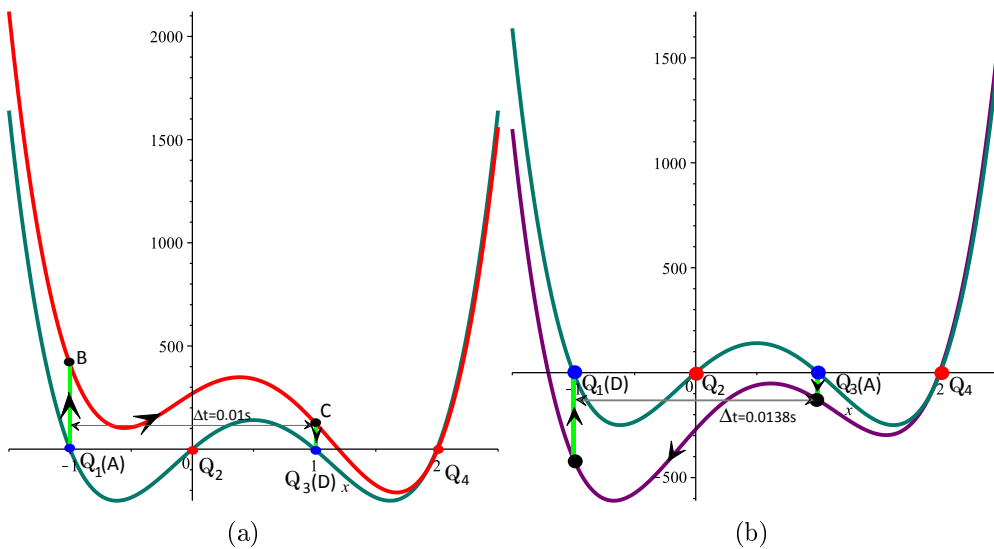


Figura 4.5: Mudança rápida de estado do memristor: (a)  $E = 0.2A$  e  $w = 0.01s$ , (b)  $E = -0.2A$  e  $w = 0.0138s$ .

No entanto, essa mudança de  $Q_1$  (respectivamente  $Q_3$ ) para  $Q_3$  (respectivamente  $Q_1$ ) é muito lenta porque os equilíbrios  $Q_1$  e  $Q_3$  são assintoticamente estáveis. Felizmente, a

Tempo/s	Memristência	Estado $x$	Trajétória de movimento do estado $x$
$[0, 0.01)$	2.25	-1	Estável em $Q_1(A/J)$ (curva azul)
0.01	2.25	-1	Saltou de $Q_1(A/J)$ para $B$ (curva vermelha)
$(0.01, 0.018)$	$(2.25, 0.065)$	$(-1, 0.543)$	Mova de $B$ para $C$ (curva vermelha) ao longo da direção da seta na curva vermelha
0.018	0.065	0.543	Saltou de $C$ para $D$ (curva azul)
$(0.018, 0.038)$	$(0.065, -0.75)$	$(0.543, 1)$	Mova de $D$ para $Q_3(E/F)$ (curva azul) ao longo da direção da seta na curva azul
$[0.038, 0.05)$	-0.75	1	Estável em $Q_3(E/F)$ (curva azul)
0.05	-0.75	1	Saltou de $Q_3(E/F)$ para $G$ (curva roxa)
$(0.05, 0.062)$	$(-0.75, 0.883)$	$(1, -0.089)$	Mova de $G$ para $H$ (curva roxa) ao longo da direção da seta na curva roxa
0.062	0.883	-0.089	Saltou de $H$ para $I$ (curva azul)
$(0.062, 0.073)$	$(0.883, 2.25)$	$(-0.089, -1)$	Mova de $I$ para $Q_1(A/J)$ (curva azul) ao longo da direção da seta na curva azul
$[0.073, 0.08]$	2.25	-1	Estável em $Q_1(A/J)$ (curva azul)

Tabela 4.1: Processo de mudança de  $Q_1$  para  $Q_3$  ou vice-versa.

mudança mais rápida pode ser alcançada por meio de uma troca ideal entre a largura de pulso  $w$  e a amplitude do pulso  $A$ , que é obtido integrando ambos os lados da equação (4.3) da seguinte forma

$$w = \int_{x_{Q_1}}^{x_{Q_3}} \frac{1}{f(x, E)} dx = \int_{x_{Q_3}}^{x_{Q_1}} \frac{1}{f(x, E)} dx, \quad (4.5)$$

ou seja, se a compensação satisfizer a equação (4.5), o estado  $x$  pode mudar diretamente de  $Q_1$  (respectivamente  $Q_3$ ) para  $Q_3$  (respectivamente  $Q_1$ ) sem a evolução da curva POP, conforme é mostrado em figura 4.5

### 4.1.3 Região localmente ativa do memristor

A região localmente ativa de um memristor pode ser identificada por seu gráfico  $DC$  ( $I_M, V_M$ ), que pode ser obtido usando o seguinte método. Fazendo  $\frac{dx}{dt} = 0$ ,  $x = X$ ,  $v_M = V_M$  e  $i_M = I_M$ , da segunda equação em (4.3) obtemos

$$i_M(X) = \frac{2X - X^2 - 2X^3 + X^4}{2.8X - 5.4} = I_M, \quad (4.6)$$

e substituindo a equação (4.6) na primeira equação de (4.3), obtemos

$$v_M(X) = \frac{-1.5(X - 0.5)(2X - X^2 - 2X^3 + X^4)}{2.8X - 5.4} = V_M. \quad (4.7)$$

As equações (4.6) e (4.7) determinam a corrente e a tensão no memristor como funções da variável de estado  $X$ . Os gráficos de  $I_M(X)$  e  $V_M(X)$  são mostrados na figura 4.6. Observe que estas duas funções tem uma singularidade no ponto  $X_0 = \frac{5.4}{2.8} \approx 1.928$  e, além disso, temos que  $\lim_{X \rightarrow X_0^\pm} V_M = \pm\infty$  e  $\lim_{X \rightarrow X_0^\pm} I_M = \mp\infty$ , ou seja, tanto a corrente quanto a tensão tendem para infinito quando  $X \rightarrow X_0$ .

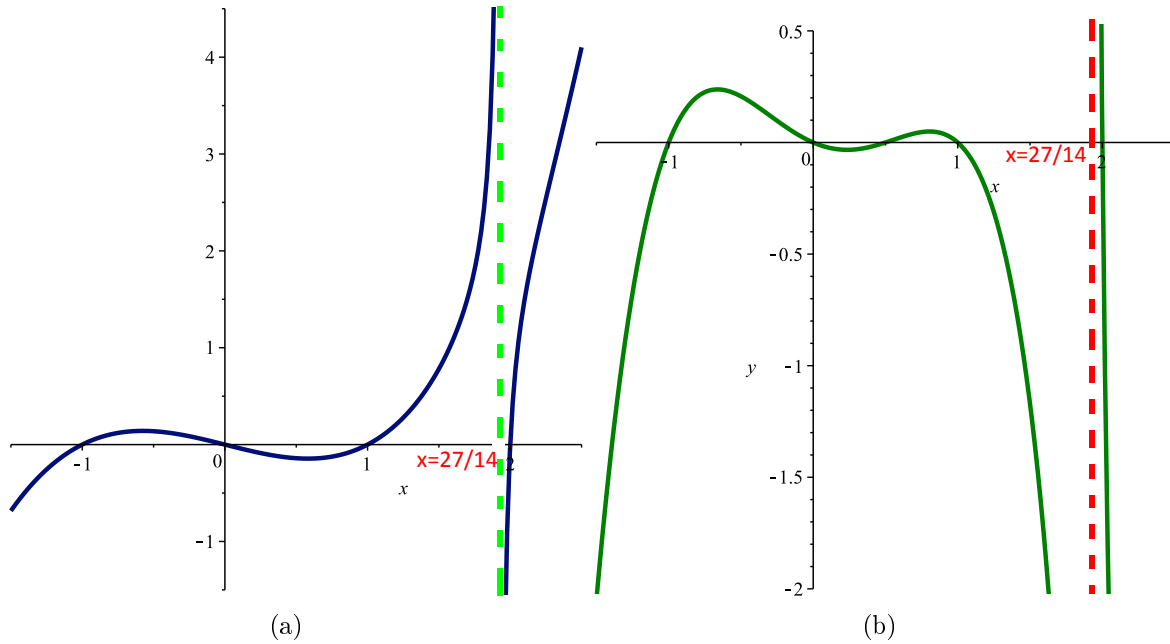


Figura 4.6: (a) Gráfico  $I_M(X)$ . (b) Gráfico  $V_M(X)$ .

A partir das equações (4.6) e (4.7) podemos obter também uma curva no plano  $(I_M - V_M)$ , parametrizada pela variável de estado  $X$ , ou seja,

$$X \mapsto (I_M(X), V_M(X)),$$

cujo traço é mostrado na figura 4.7 (a) para  $X$  no domínio  $[-1.2, 1.2]$ . A figura 4.7 (b), obtida considerando-se  $X$  no domínio  $[1.2, 2.038]$ , é a versão ampliada de uma parte da figura 4.7. (a).

Analisando o gráfico  $DC$   $(I_M - V_M)$  na figura 4.7, podemos obter as regiões localmente ativas do memristor dado pelas equações (4.3). Tais regiões estão listadas na Tabela 4.2. Podemos ver que existem quatro regiões de resistência diferencial  $\Delta V_M / \Delta I_M$  negativa, logo nessas regiões o memristor (4.3) é localmente ativo.

Também observamos que há um salto no gráfico de fase em  $X_0 = 1,928$ , onde a corrente salta de mais infinito para menos infinito, enquanto a tensão salta de menos infinito para mais infinito.

Calculando as inclinações dos arcos nos pontos de equilíbrio  $Q_1(X = -1)$  e  $Q_2(X = 0)$ , onde a derivada da variável de estado do memristor se anula (ou seja,  $dx/dt = 0$ ) obtemos os valores positivos  $9/4$  e  $3/4$ , respectivamente, como também pode ser deduzido diretamente do gráfico. Por outro lado, observamos que os arcos nos pontos de equilíbrio  $Q_3(X = 1)$  e  $Q_4(X = 2)$  têm inclinações negativas. Com isso, podemos concluir que  $Q_1$  e  $Q_2$  são pontos de equilíbrio localmente passivos, enquanto que  $Q_3$  e  $Q_4$  são pontos de equilíbrio localmente ativos.



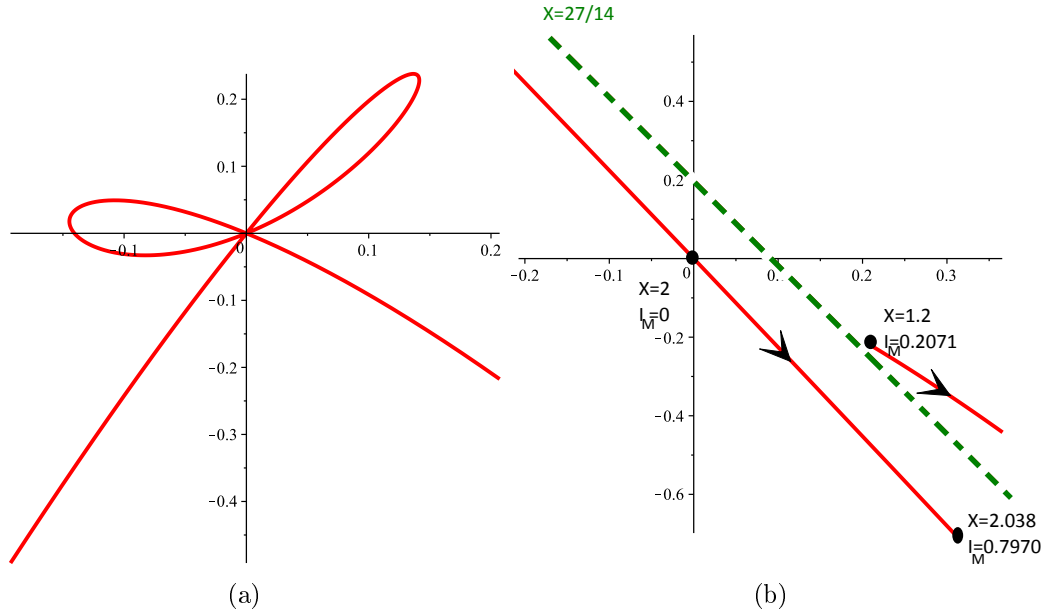


Figura 4.7: (a) Curva  $(I_M(X), V_M(X))$  para  $X \in [-1.2, 1.2]$ ; (b) Curva  $(I_M(X), V_M(X))$  para  $X \in [1.2, 2.038]$ .

Variável de estado $X$	Resistência diferencial $\Delta V_M / \Delta I_M$	Caraterísticas	Corrente $I_M/A$
$[-1.200, -0.662]$	Positivo	Localmente passivo	$[-0.1929, 0.1365]$
$[-0.662, -0.575]$	Negativo	Localmente ativo	$[0.1365, 0.1414]$
$[-0.575, 0.236]$	Positivo	Localmente passivo	$[0.1414, -0.0830]$
$[0.236, 0.583]$	Negativo	Localmente ativo	$[-0.0830, -0.1474]$
$[0.583, 0.806]$	Positivo	Localmente passivo	$[-0.1074, -0.1073]$
$[0.806, 1.928]$	Negativo	Localmente ativo	$[-0.1073, +\infty)$
$(1.928, 2.038]$	Negativo	Localmente ativo	$(-\infty, 0.7970)$

Tabela 4.2: Análise da região de atividade local do memristor (4.3).

Na próxima seção, vamos utilizar as propriedades do memristor (4.3) para construir um oscilador periódico, conectando-o em série com outros dois elementos fundamentais, um resistor e um indutor.

## 4.2 Circuito oscilador periódico com memristor

Consideremos o circuito da figura 4.8, proposto no artigo [12], formado por um indutor  $L$ , um resistor  $R$  e o memristor definido na seção anterior, dado pelas equações (4.3).

De acordo com a primeira lei de Kirchhoff, temos  $I_S = i_L + i_R$ , e pela segunda lei de Kirchhoff aplicada ao circuito, temos que  $v_R = v_L + v_M$ , isto é:

$$i_R R = L \frac{di_L}{dt} - 1.5(x - 0.5)i_L,$$

assim temos a seguinte equação para a corrente  $i_L$ :

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} [(I_S - i_L)R + 1.5(x - 0.5)i_L]. \quad (4.8)$$

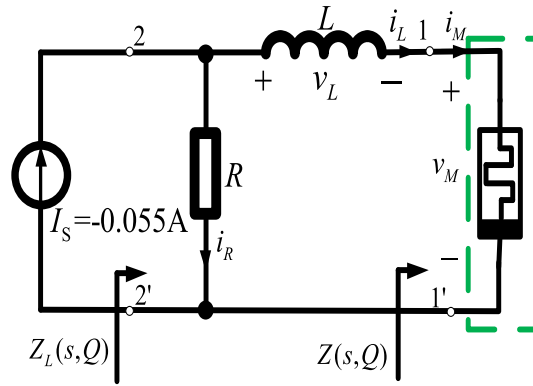


Figura 4.8: Memristor oscilador periódico.

Juntando a equação de estado (4.3) do memristor e a equação (4.8), obtemos que o sistema diferencial associado ao circuito da figura 4.8 é dado por (para detalhes ver [12]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 250[2x - x^2 - 2x^3 + x^4 + (5.4 - 2.8x)i_L], \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}[(I_S - i_L)R + 1.5(x - 0.5)i_L]. \end{cases} \quad (4.9)$$

Faremos agora uma análise da estabilidade linear dos pontos de equilíbrio do sistema (4.9), fixando os valores dos parâmetros  $I_S = -0.055$  e  $R = 0.088$ , seguindo o que foi feito em [12]. Porém, em nossa análise, vamos variar o parâmetro  $L$ , que representa a indutância no circuito, e será considerado como parâmetro de bifurcação em nosso estudo. Mostraremos que, para certos valores de  $L$ , o sistema (4.9) apresenta oscilações periódicas, decorrentes da existência de um ciclo limite estável originado em uma bifurcação do tipo Hopf, que ocorre para um valor crítico  $L_0$ . Além disso, ao variarmos  $L$  afastando-o do ponto de bifurcação  $L_0$ , observamos um aumento na amplitude do ciclo limite, e determinamos numericamente outro valor crítico,  $L_1$ , para o qual o sistema (4.9) apresenta uma órbita homoclínica a um ponto de sela. Veremos que tal órbita, que não foi detectada explicitamente no artigo [12], desempenha um papel importante na dinâmica do sistema (4.9), determinando as regiões de estabilidade e oscilações periódicas no plano de fase do sistema.

Fazendo  $dx/dt = di_L/dt = 0$  na equação (4.9) obtemos cinco pontos de equilíbrio do circuito, que são dados por:

$$S_1 = (-1.0028, -0.0021), \quad S_2 = (0.0161, -0.0059), \quad S_3 = (0.5362, -0.1434), \\ S_4 = (1.0092, 0.0072) \quad \text{e} \quad S_5 = (2.0001, 0.0022).$$

É importante observar que a existência destes pontos de equilíbrio independe do valor do parâmetro  $L$ . Porém, sua estabilidade sim, depende de  $L$ . De fato, a matriz Jacobiana do sistema (4.9), com os valores dos parâmetros  $I_S$  e  $R$  definidos acima, é dada por:

$$J(x, i_L) = \begin{pmatrix} 250(2 - 2x - 6x^2 + 4x^3 - 2.8i_L) & 250(5.4 - 2.8x) \\ \frac{1.5i_L}{L} & \frac{-0.838 + 1.5x}{L} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Calculando os autovalores da matriz (4.10) em cada um dos pontos de equilíbrio  $S_1$  a  $S_5$ , obtemos as seguintes expressões (que obviamente dependem do parâmetro  $L$ ).

**Autovalores no Equilíbrio  $S_1$ :**

$$-\frac{10^{-4}}{L} \left( 7.5700 \times 10^6 L + 11711 \pm \sqrt{5.7305 \times 10^{13} L^2 - 1.7796 \times 10^{11} L + 1.3715 \times 10^8} \right);$$

**Autovalores no Equilíbrio  $S_2$ :**

$$\frac{2.5 \times 10^{-5}}{L} \left( 9.9140 \times 10^6 L - 16277. \pm \sqrt{9.8287 \times 10^{13} L^2 + 3.0379 \times 10^{11} L + 2.6494 \times 10^8} \right);$$

**Autovalores no Equilíbrio  $S_3$ :**

$$\frac{5 \times 10^{-5}}{L} \left( 551770 L - 337. \pm \sqrt{3.0445 \times 10^{11} L^2 - 8.3488 \times 10^{10} L + 113570} \right);$$

**Autovalores no Equilíbrio  $S_4$ :**

$$-\frac{10^{-4}}{L} \left( 2.5476 \times 10^6 L - 3379. \pm \sqrt{6.4900 \times 10^{12} L^2 + 1.7912 \times 10^{10} L + 1.1418 \times 10^7} \right);$$

**Autovalores no Equilíbrio  $S_5$ :**

$$\frac{2.5 \times 10^{-5}}{L} \left( 2.9980 \times 10^7 L + 43243. \pm \sqrt{8.9880 \times 10^{14} L^2 - 2.5932 \times 10^{12} L + 1.8700 \times 10^9} \right).$$

### 4.2.1 Estabilidade dos equilíbrios e bifurcação de Hopf

Analisando as expressões dos autovalores, obtemos que, para  $L > 0$ , o ponto de equilíbrio  $S_1$  é um nó estável,  $S_2$  e  $S_4$  são pontos de sela e  $S_5$  é um nó instável. Por outro lado, para  $1.4 \times 10^{-6} < L < 0.2742$ , os autovalores da matriz Jacobiana no ponto  $S_3$  são complexos conjugados, sendo portanto do tipo foco. Além disso, a parte real destes autovalores é negativa se  $0 < L < 0.000610$ , e positiva se  $L > 0.000610$ , ou seja, ocorre uma mudança na estabilidade do foco, de estável para instável, quando  $L$  passa pelo valor crítico  $L_0 \approx 0.000610$ . Na figura 4.9 mostramos o retrato de fase do sistema (4.9) para  $L = 0.0004 < L_0$ . Na figura da esquerda, pode-se ver os pontos de sela  $S_2$  e  $S_4$ , os nós  $S_1$  e  $S_5$ , e o foco estável  $S_3$ . Na figura da direita, vê-se em detalhe que a variedade instável do ponto de sela  $S_2$  (que se encontra próximo da origem) tende para o foco estável  $S_3$ .

Aumentando o valor de  $L$  para  $L = 0.00061$ , bastante próximo do valor de bifurcação, observamos que o ponto de equilíbrio  $S_3$  torna-se um “foco estável fraco” (ver figura 4.10, pois as soluções convergem para este ponto de forma muito lenta. Esta é uma característica típica do ponto de bifurcação de Hopf.

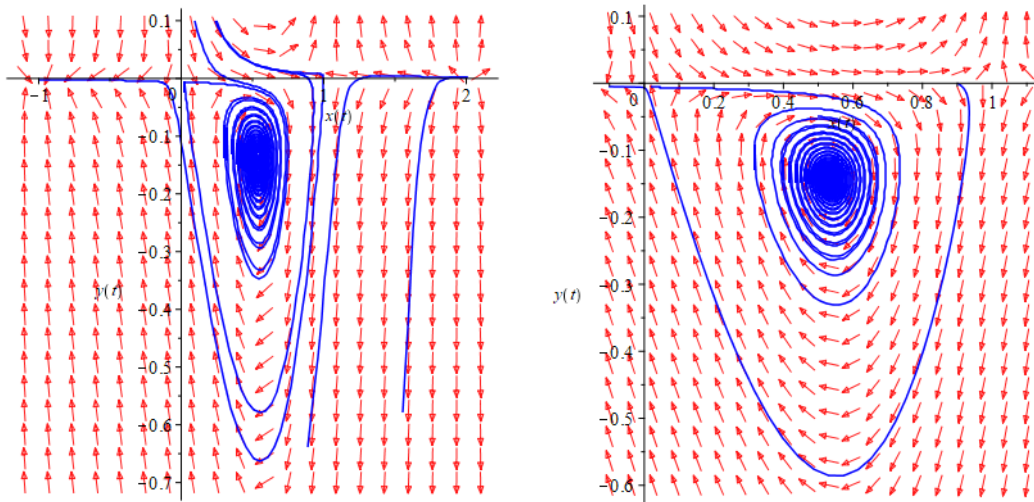


Figura 4.9: Retrato de fase do sistema (4.9) para  $L = 0.0004$ . Na figura da esquerda pode-se ver os pontos de sela, os nós e o foco estável. Na da direita, vê-se o foco estável em detalhe.

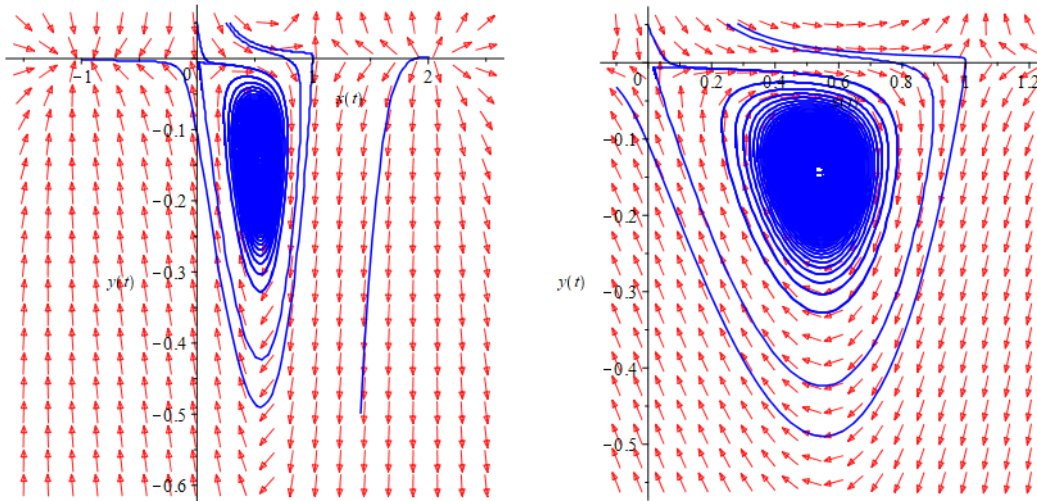


Figura 4.10: Retrato de fase do sistema (4.9) para  $L = 0.00061$ . O ponto de equilíbrio  $S_3$  se torna um “foco estável fraco”.

Para  $L = 0.00063$ , ou seja, maior que o ponto de bifurcação  $L_0 \approx 0.00061$ , observa-se que o foco  $S_3$  se torna instável e um ciclo limite estável surge em torno dele, conforme mostrado na figura 4.11 (o ciclo limite encontra-se na região branca do plano de fase). Tal ciclo limite aumenta de amplitude, conforme  $L$  se afasta do ponto de bifurcação (ver figura 4.12).

#### 4.2.2 Existência de uma órbita homoclínica

Da discussão anterior, segue que existe então um valor limite aproximado,  $L_1 \approx 0.00104$ , para o qual o sistema (4.9) apresenta uma órbita homoclínica ao ponto de sela  $S_2$ , conforme mostrado na figura 4.11. Esta órbita homoclínica desempenha um papel importante na dinâmica do sistema (4.9), pois, para condições iniciais no seu interior, as soluções oscilam em torno da órbita homoclínica. Por outro lado, as soluções no seu exterior e no semi-plano  $i_L < 0$  tendem para o nó estável  $S_1$ , localizado aproximadamente no ponto  $(-1, 0)$ , ou seja, tendem para um ponto de equilíbrio estável do sistema.

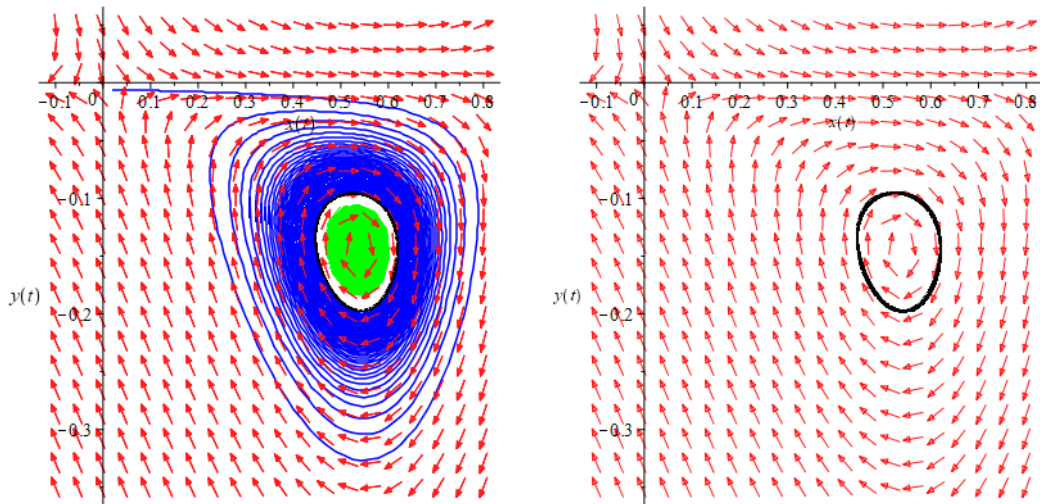


Figura 4.11: Retrato de fase do sistema (4.9) para  $L = 0.00063$ . O foco  $S_3$  é instável e surge um ciclo limite em torno dele, na região branca da figura da esquerda, que é mostrado na figura da direita.

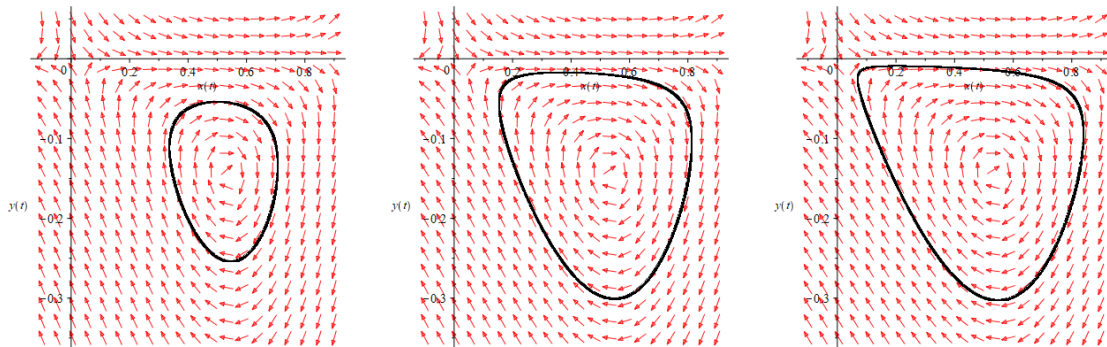


Figura 4.12: Aumentando o valor do parâmetro desde  $L = 0.00063$ , os ciclos limites aumentam de amplitude. Na figura tomamos, da esquerda para a direita,  $L = 0.0007$ ,  $L = 0.0009$ ,  $L = 0.001$ .

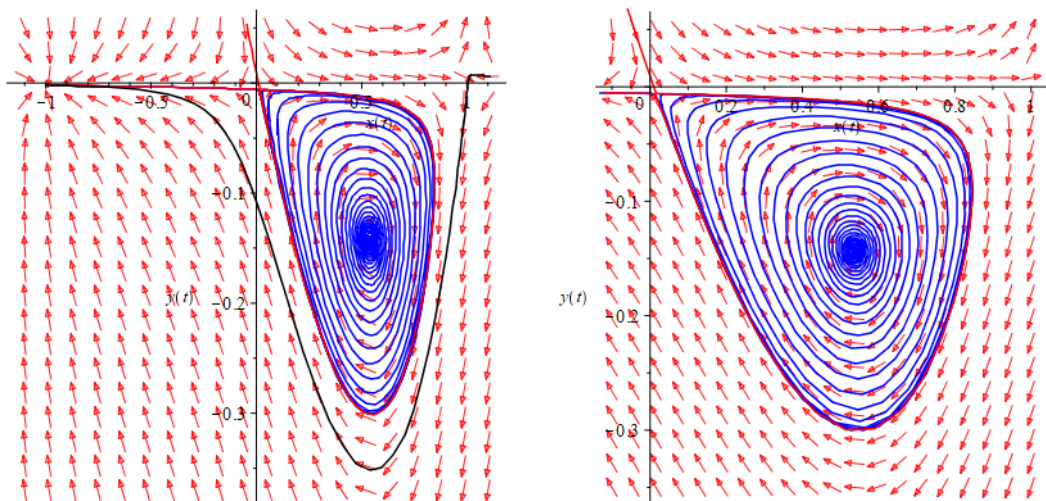


Figura 4.13: Retrato de fase do sistema (4.9) para  $L = 0.00104$ . Na figura da esquerda pode-se ver a existência de uma órbita homoclínica ao ponto de sela  $S_2$ , que limita a região de oscilação em torno do foco instável  $S_4$ . Ver detalhes na figura da direita.

Para valores de  $L$  maiores que o valor crítico  $L = 0.00104$ , a órbita homoclínica se quebra, e as soluções que iniciam próximas do foco instável  $S_3$  não oscilam mais, mas

tendem para o nó estável  $S_1$ , conforme mostrado na figura 4.13. Desta forma, para  $0.00104 < L < 0.2742$ , o sistema (4.9) não apresenta mais oscilações periódicas, pois as soluções que se encontram em uma certa região de estabilidade do sistema, determinada pelas separatrizes dos pontos de sela  $S_2$  e  $S_4$ , tendem para o nó estável  $S_1$ , ver figuras 4.13. As demais soluções, exceto as variedades estáveis das selas, tendem para infinito.

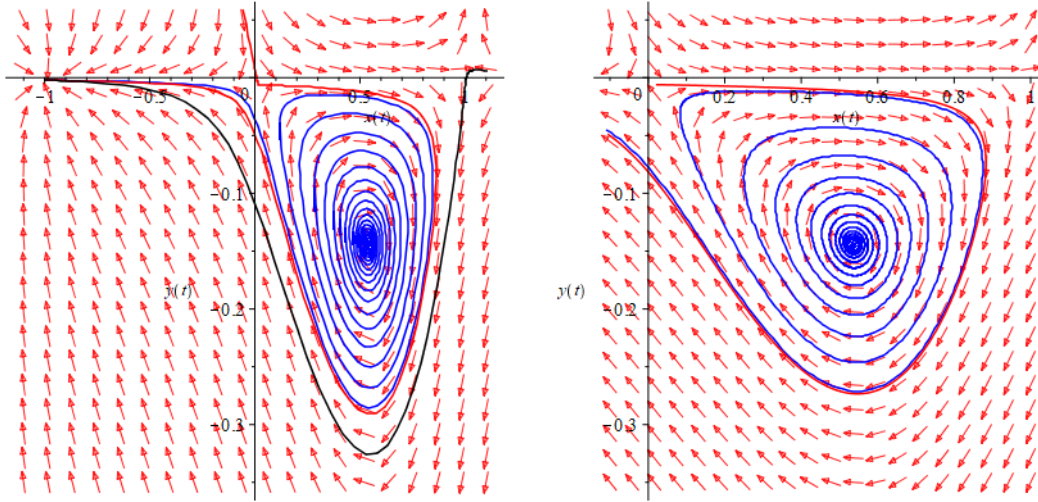


Figura 4.14: Retrato de fase do sistema (4.9) para  $L = 0.0012$  (esquerda) e  $L = 0.0015$  (direita). Na figura da esquerda pode-se ver a existência de uma órbita homoclínica ao ponto de sela  $S_2$ , que limita a região de oscilação em torno do foco instável  $S_4$ . Ver detalhes na figura da direita.

### 4.3 Circuito equivalente de sinal pequeno

Ao linearizar as equações não lineares do memristor sobre um ponto operacional localmente ativo no gráfico DC, podemos obter um circuito de sinal pequeno que é usado para analisar o comportamento dinâmico local, próximo ao ponto operacional, conforme descrito em [12]. Para tanto, suponha que o ponto operacional  $Q(I_M, V_M)$  do memristor esteja na região localmente ativa. Quando uma perturbação pequena é aplicada ao memristor, as respostas correspondentes são  $\delta x$  e  $\delta v_M$ , conforme mostrado na Figura 4.15. Tanto  $\delta v_M$  quanto  $\delta x$  podem ser obtidos usando a série Taylor e desconsiderando os termos de ordem superior, assim temos (para detalhes, ver [12]):

$$\begin{aligned} \frac{d(v_M)}{dt} &= \frac{d(R_M(x)i_M)}{dt} = \frac{dR_M(x)}{dt}i_M + \frac{d(i_M)}{dt}R_M(x) = \frac{dR_M(x)}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{di_M}{dt}R_M(x), \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) &= \frac{df(x, i_M)}{dt} = \frac{\partial f(x, i_M)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x, i_M)}{\partial i_M} \frac{di_M}{dt}, \end{aligned}$$

com o que, o sistema perturbado, próximo ao ponto  $Q(I_M, V_M)$ , pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \delta v_M = a_{11}(Q)\delta x + a_{12}(Q)\delta i_M, \\ \frac{d(\delta x)}{dt} = b_{11}(Q)\delta x + b_{12}(Q)\delta i_M, \end{cases} \quad (4.11)$$

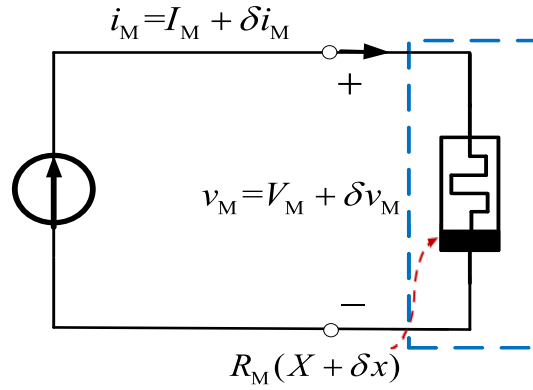


Figura 4.15: Memristor localmente ativo perturbado.

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}(Q) = i_M \frac{dR_M(x)}{dx} \Big|_Q = -1.5I_M, \\ a_{12}(Q) = R_M(x) \Big|_Q = -1.5(X - 0.5), \\ b_{11}(Q) = \frac{\partial f(x, i_M)}{\partial x} \Big|_Q = 250(2 - 2X - 6X^2 + 4X^3 - 2.8I_M), \\ b_{12}(Q) = \frac{\partial f(x, i_M)}{\partial i_M} \Big|_Q = 250(5.4 - 2.8X). \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Aplicando a Transformada de Laplace à equação (4.11), temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{v}_M(s) = a_{11}(Q)\hat{x}(s) + a_{12}(Q)\hat{i}_M(s), \\ s\hat{x}(s) = b_{11}(Q)\hat{x}(s) + b_{12}(Q)\hat{i}_M(s), \end{array} \right. \quad (4.13)$$

onde  $\hat{v}_M(s)$ ,  $\hat{i}_M(s)$  e  $\hat{x}(s)$  são as transformadas de Laplace de  $\delta v_M$ ,  $\delta i_M$  e  $\frac{d(\delta x)}{dt}$ , respectivamente. De acordo com a equação (4.13), a função de impedância do memristor de sinal pequeno localmente ativo sobre o ponto operacional  $Q$  é dada por

$$Z(s, Q) = \frac{\hat{v}_M(s)}{\hat{i}_M(s)} = \frac{a_{11}(Q)b_{12}(Q)}{s - b_{11}(Q)} + a_{12}(Q). \quad (4.14)$$

A equação (4.14) pode ser escrita como

$$Z(s, Q) = \frac{1}{sC + \frac{1}{R_1}} + R_2 \quad (4.15)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \frac{1}{a_{11}(Q)b_{12}(Q)}, \\ R_1 = -\frac{a_{11}(Q)b_{12}(Q)}{b_{11}(Q)}, \\ R_2 = a_{12}(Q). \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Observamos a partir da equação (4.15) que nosso memristor perturbado pode ser equivalente a um circuito que consiste em uma conexão paralela entre um resistor  $R_1$  e um capacitor  $C$ , e essa conexão é conectada em série com um resistor  $R_2$  (ver figura 4.16)

Supondo que o ponto operacional  $Q(X, I_M)$  seja, por exemplo  $(0, 5362, -0, 1434)$ , conforme visto na figura 4.7 (a), e substituindo os valores de  $I_M$  e  $X$  na equação (4.12), obtemos os valores  $a_{11} = 0.2151$ ,  $a_{12} = -0.0543$ ,  $b_{11} = 55.1775$ ,  $b_{12} = 974.66$ . Portanto, os parâmetros  $R_1$ ,  $R_2$  e  $C$  do circuito de pequena sinal equivalente são mostrados na figura 4.16. Além disso, tais parâmetros podem ser calculados pela equação (4.16) achando  $C = 0.00477F$ ,  $R_1 = -3.7995\Omega$  e  $R_2 = -0.0543\Omega$ .

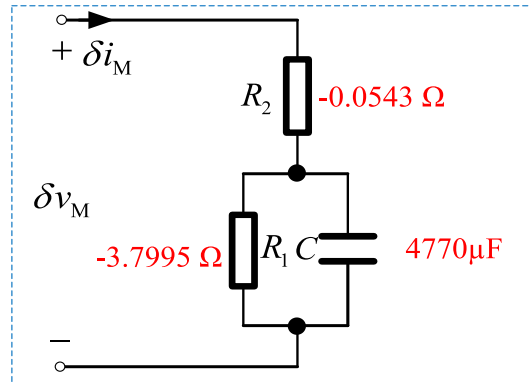


Figura 4.16: Circuito equivalente de sinal pequeno no ponto  $Q(-0.1434, 0.5362)$ .

O parâmetro  $C = 4770\mu F > 0$  indica que o memristor tem características capacitivas no ponto operacional  $Q$ . O parâmetro  $R_1 = -3,7995\Omega < 0$  significa que o memristor tem uma característica de resistência diferencial negativa no ponto operacional  $Q$ . A característica de ser localmente ativo pode fornecer a energia para a oscilação. E também, a resistência diferencial negativa pode compensar a perda de energia causada pela resistência positiva no circuito de oscilação, de modo que o circuito possa oscilar continuamente.

A análise acima explica a ocorrência das oscilações periódicas, provenientes da bifurcação de Hopf, do circuito (4.9), estudada na seção 4.2.

## 4.4 De oscilações periódicas ao comportamento caótico

Atualmente, há muito interesse no estudo de circuitos elétricos que apresentam comportamento caótico, pois tais circuitos podem ser usados em problemas relacionados à criptografia, redes neurais artificiais, tratamento de imagens e outros [23]. Dessa forma, com base no estudo do circuito elétrico que apresenta oscilações periódicas e órbita homoclínica, desenvolvido nas seções anteriores, foi proposto em [12] um circuito elétrico que apresenta comportamento caótico. Como este tipo de comportamento em sistemas autônomos de equações diferenciais ordinárias só pode ocorrer para sistemas definidos no espaço  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 3$ , para construir um circuito caótico a partir do oscilador periódico (4.9), acrescentamos um capacitor no circuito da figura 4.8, com o que obtemos o circuito mostrado na figura 4.17 (para detalhes, ver [12]).

A partir da relação entre tensão e carga em um capacitor e da primeira e segunda leis de Kirchhoff, temos as seguintes relações entre a tensão e a corrente no circuito da figura 4.17:  $i_c + i_R + i_M = 0$ ,  $i_M = -i_L$ ,  $v_C = v_R$  e também

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{C} i_C = \frac{1}{C} (i_L - i_R) = \frac{1}{C} (i_L - \frac{v_R}{R}) = \frac{1}{C} (i_L - \frac{v_C}{R}).$$



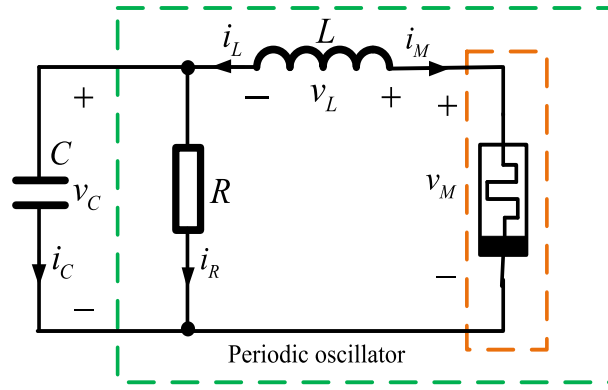


Figura 4.17: Oscilador periódico acrescido de um capacitor  $C$ .

Assim, acrescentando esta equação às equações do circuito oscilatório dado pelo sistema (4.9), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias em  $\mathbb{R}^3$ , que descreve a dinâmica do circuito 4.17:

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}[1.5(x - 0.5)i_L - v_C], \\ \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C}(i_L - \frac{v_C}{R}), \\ \frac{dx}{dt} = 2x - x^2 - 2x^3 + x^4 - 5.4i_L + 2.8xi_L, \end{cases} \quad (4.17)$$

onde  $i_L$  e  $v_C$  representam a corrente do indutor  $L$  e a tensão através do capacitor  $C$ , respetivamente. Os parâmetros na equação de estado são definidos como  $k_2 = 1$ ,  $C = 0.16 F$ ,  $L = 0.24 H$  e  $R = 10 \Omega$ .

#### 4.4.1 Estabilidade linear dos equilíbrios

Fazendo  $di_L/dt, dv_C/dt = dx/dt = 0$  em (4.17), obtemos os cinco pontos de equilíbrio do sistema, sendo que quatro deles correspondem aos pontos de equilíbrio do memristor, isto é  $S_1(0, 0, -1)$ ,  $S_2(0, 0, 0)$ ,  $S_3(0, 0, 1)$  e  $S_4(0, 0, 2)$ . Estes equilíbrios são obtidos ao se considerar  $i_L = 0$  no sistema (4.17), com o que obtemos os pontos do gráfico de desligamento (POP) do memristor. Para  $i_L \neq 0$ , o quinto ponto de equilíbrio é dado por  $S_5(-127.14, -1271.4, 7.167)$ .

A matriz Jacobiana do sistema (4.17) em um ponto genérico  $(i_L, v_C, x)$  é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1.5(x - 0.5)}{L} & -\frac{1}{L} & \frac{1.5i_L}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} & 0 \\ -5.4 + 2.8x & 0 & 2 - 2x - 6x^2 + 4x^3 + 2.8i_L \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Estudemos os autovalores desta matriz nos pontos de equilíbrio encontrados.

(a) A matriz Jacobiana em  $S_1(0, 0, -1)$  é

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2.25}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} & 0 \\ -8.2 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Calculando os autovalores obtemos  $\lambda_1 = -6$ ,  $\lambda_{2,3} = -5 \pm 2.627i$ . Logo, o ponto de equilíbrio  $S_1(0, 0, -1)$  é assintoticamente estável e, portanto, o sistema não pode oscilar numa vizinhança deste ponto. Observe que este ponto corresponde exatamente ao equilíbrio estável localmente passivo  $Q_1 = (-1, 0)$  do sistema oscilatório com memristor no plano (4.9), conforme seu POP mostrado na figura 4.2, que não pode causar oscilações.

(b) Para ponto de equilíbrio  $S_2(0, 0, 0)$ , calculamos os autovalores da matriz Jacobiana, obtendo  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_{2,3} = -1.8750 \pm 4.9476i$ , o que mostra que este equilíbrio é do tipo sela-foco de índice 1 (ou seja, variedade instável de dimensão 1 e variedade estável de dimensão 2).

(c) A matriz Jacobiana no equilíbrio  $S_3(0, 0, 1)$  é dada por

$$J_1 = \begin{pmatrix} \frac{0.75}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} & 0 \\ -2.6 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculando os autovalores obtemos  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_{2,3} = 1.25 \pm 4.7462i$ . Logo, o equilíbrio  $S_3(0, 0, 1)$  é do tipo sela-foco de com índice 2 (isto é, variedade estável de dimensão 1 e variedade instável de dimensão 2), o que dá a possibilidade de geração de atratores caóticos, conforme os Teoremas de Silnikov [11]. Portanto, é possível excitar uma oscilação caótica no equilíbrio  $S_3(0, 0, 1)$ . Este equilíbrio corresponde exatamente ao ponto de equilíbrio localmente ativo  $Q_3 = (0, 1)$  do sistema planar (4.9), conforme seu POP mostrado na figura 4.2, que é um ponto de sela do sistema com memristor no plano, dado pelo sistema (4.9).

(d) O equilíbrio  $S_4(0, 0, 2)$  corresponde ao equilíbrio  $Q_4 = (0, 2)$  do sistema planar com memristor ativo, dado pelas equações (4.9), que é um equilíbrio instável localmente passivo. Logo, não pode ser excitado para obtenção de oscilações caóticas em sua vizinhança. De fato, calculamos os autovalores correspondentes e obtemos  $\lambda_1 = 6$  e  $\lambda_{2,3} = 4.3750 \pm 1.0206i$ , que mostra que  $S_4$  é um ponto instável e, portanto, o circuito não pode oscilar numa vizinhança deste ponto de equilíbrio.

(e) Para o ponto de equilíbrio  $S_5(-127.14, -1271.4, 7.167)$  encontramos os autovalores  $\lambda_1 = 780.2562$ ,  $\lambda_2 = 56.9873$  e  $\lambda_3 = -0.1639$ , o mostra que este é um ponto de sela com variedade estável de dimensão 1, e variedade instável de dimensão 2, portanto as soluções tendem a divergir numa vizinhança deste ponto.

Mesmo com a análise da estabilidade local dos pontos de equilíbrio, feita acima, é muito difícil descrever o retrato de fase do sistema (4.17) no  $\mathbb{R}^3$ . De fato, existem pontos iniciais cuja solução tende para o atrator localizado no equilíbrio  $S_1(0, 0, -1)$ ; existem trajetórias que podem tender a infinito, guiadas pelas variedades instáveis dos pontos de sela; e existem soluções que podem tender a oscilações periódicas e também caóticas, em torno do ponto de equilíbrio  $S_3(0, 0, 1)$ , conforme observado acima.

Para entendermos um pouco da complexa dinâmica do sistema (4.17), podemos recorrer às propriedades do memristor considerado, dado pelas equações (4.3), conforme feito em [12].

Quando as condições iniciais são  $(0.2, 0.2, 0.4)$ , a variável de estado  $x$  muda com  $i_M$  (que corresponde a  $-i_L$ , como variável do sistema (4.17)). A figura 4.18 (a) (apresentada em [12]) mostra o *DRM* ("Dynamic Route Maps" em português trajetórias dinâmicas) do memristor para cinco trajetórias dinâmicas, cada uma parametrizada por uma corrente  $i_M$  no memristor. Observe que o *DRM* consiste em um número denso de trajetórias dinâmicas diferentes, onde apenas cinco rotas são exibidas. Se o estado  $x$  estiver em uma rota dinâmica onde  $dx/dt > 0$  (respectivamente  $dx/dt < 0$ ), ele deve se mover para a direita (respectivamente para a esquerda) ao longo da trajetória dinâmica.

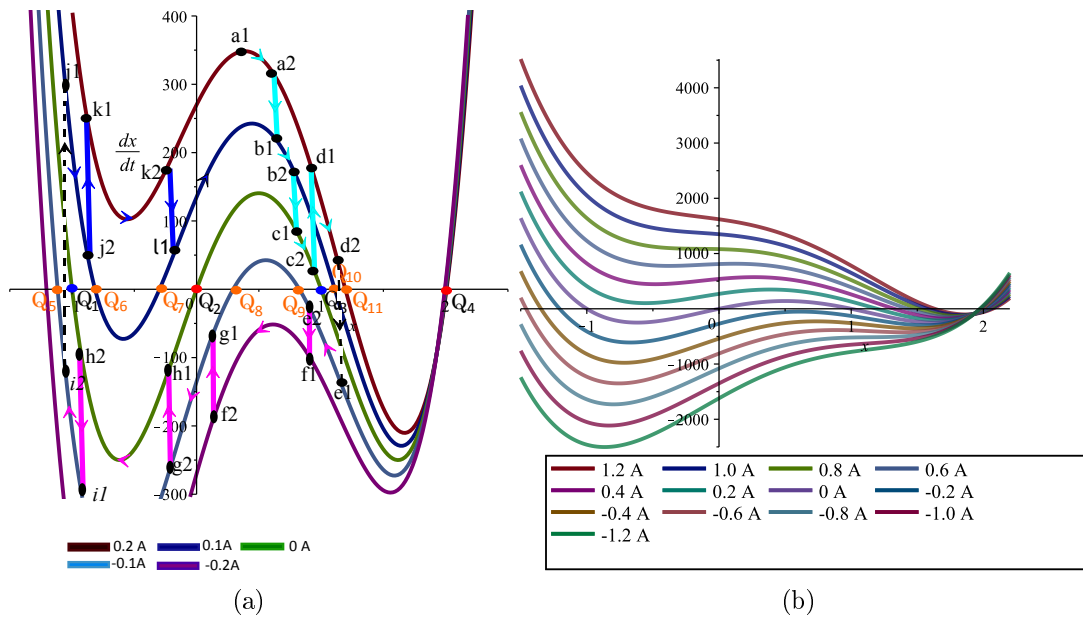


Figura 4.18: Trajetórias dinâmicas do oscilador caótico: (a) Cinco trajetórias dinâmicas, (b) Trajetórias dinâmicas do memristor em diferentes correntes em 0 – 15s.

Para a condição inicial  $(i_{L_0}, v_{C_0}, x_0) = (0.2, 0.2, 0.4)$ , ou seja,  $x_0 = 0.4$ , quando a corrente do memristor  $i_M$  muda, o estado  $x$  se moverá na direção das setas nas diferentes trajetórias dinâmicas ao longo do caminho  $a_1 - a_2 - b_1 - b_2 - c_1 - c_2 - d_1 - d_2$ , acima do eixo  $x$ . No entanto, ele não pode alcançar a interseção  $Q_{11}$  da trajetória dinâmica e o eixo  $x$ , porque a interseção é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável onde  $dx/dt < 0$ .

Se a corrente  $i_M$  atual do memristor torna-se negativa antes que o estado  $x$  alcance a interseção,  $x$  imediatamente salta para a trajetória dinâmica correspondente abaixo do eixo  $x$  e, em seguida, move-se para a esquerda nas diferentes trajetórias dinâmicas ao longo do caminho  $e_1 - e_2 - f_1 - f_2 - g_1 - g_2 - h_1 - h_2 - i_1 - i_2$ , mas nunca atinge o intersecção  $Q_5$  da trajetória e o eixo  $x$ , porque esta intersecção é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável onde  $dx/dt < 0$ .

Depois disso, se a corrente de memristor se tornar novamente um valor positivo, o estado  $x$  salta para outra trajetória dinâmica acima do eixo  $x$ , e se move para a direita ao longo do caminho  $j_1 - j_2 - k_1 - k_2 - l_1 \dots$ . O estado  $x$  vai para frente e para trás, formando assim uma oscilação caótica. Em outras palavras, o memristor alterna entre as regiões localmente ativas e localmente passivas com a mudança de  $i_M$  no intervalo de  $x \in [-1.68189, 1.60129]$  e continua oscilando sobre a excitação do ponto operacional localmente ativo, como é mostrado na figura 4.18 (b), onde é desenhado apenas as órbitas caóticas a partir dos valores iniciais  $(0.2, 0.2, 0.4)$ , dentro de  $0 - 15s$ , em 13 trajetórias dinâmicas.

Conclui-se que a variável de estado  $x$  muda com a corrente do memristor com as diferentes condições iniciais, exibindo co-existência entre atratores pontuais e atratores caóticos, e também dinâmicas divergentes. Incluímos a análise gráfica mostrada na figura 4.18 para ilustrar a utilidade de se conhecer as propriedades do memristor considerado para construção do circuito da figura 4.17, na análise dinâmica do sistema (4.17).

Com base na análise apresentada acima e nas demais análises apresentadas no artigo [12], desenvolvemos simulações computacionais com o software Maple, com as quais obtivemos a formação de um atrator caótico para o sistema (4.17), ao variarmos o valor do parâmetro  $C$  naquele sistema. De fato, obtivemos uma cascata de duplicação de períodos, que convergiu para a formação de um atrator caótico, ao variarmos o parâmetro  $C$  no intervalo  $[7.210, 7.560]$ , conforme mostrado na figura 4.20 (a) até (f). Observamos que, como o parâmetro  $C$  comparece no sistema (4.17) no denominador (ou seja, na forma  $1/C$ ), a referida cascata de duplicação de períodos ocorre quando variamos  $C$  de 7.560 até 7.210, o que acarreta que  $1/C$  é crescente.

Para verificar que o atrator mostrado na figura 4.20 (f) é mesmo caótico, plotamos duas soluções com condições iniciais bastante próximas,  $(0.2, 0.2, 0.4)$  e  $(0.2001, 0.2, 0.4)$ , uma em azul e a outra em vermelha, que são mostradas na figura 4.19 (a), sendo sua coordenada  $x(t)$  contra  $t$  apresentada na figura 4.19 (b), mostrando a sensibilidade das soluções com relação às condições iniciais (próximas). O atrator aqui obtido é do tipo de uma faixa de Möbius, pois as soluções apresentam uma dobra, sendo que as mais externas retornam na parte interna do atrator (ver figura 4.19).

No artigo [12] foram obtidos outros atratores caóticos e também oscilações periódicas, para diferentes valores do parâmetro  $C$ , enquanto que os valores dos parâmetros  $L$  e  $R$  foram mantidos fixos em  $L = 0.24 H$  e  $R = 10 \Omega$ . Isso mostra que um circuito memristivo em  $\mathbb{R}^3$  pode apresentar um comportamento bastante complexo, restando muito ainda a ser estudado sobre estes circuitos.

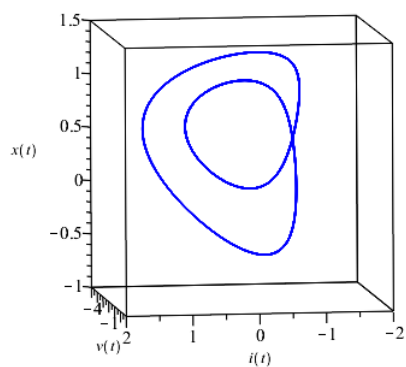
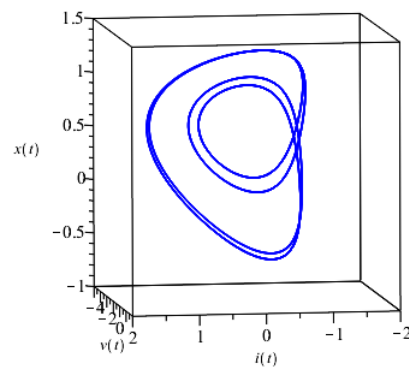
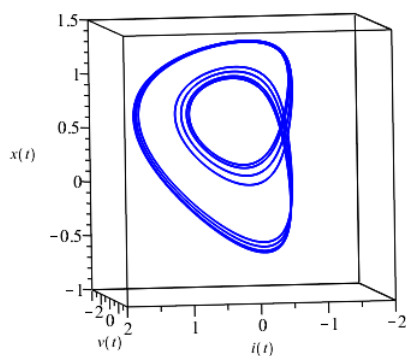
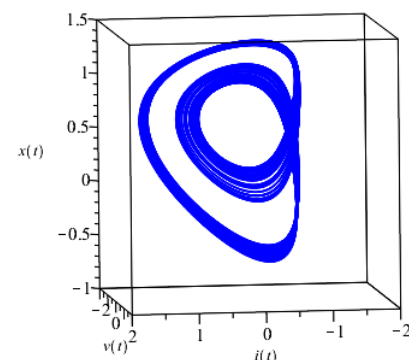
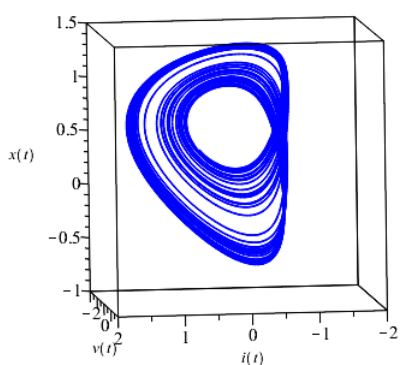
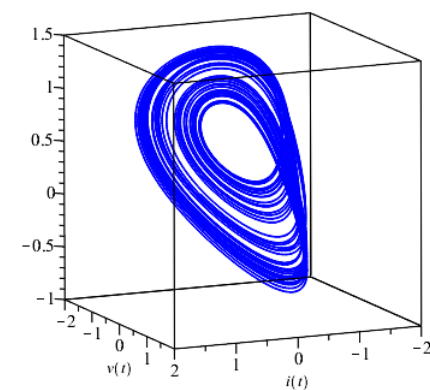
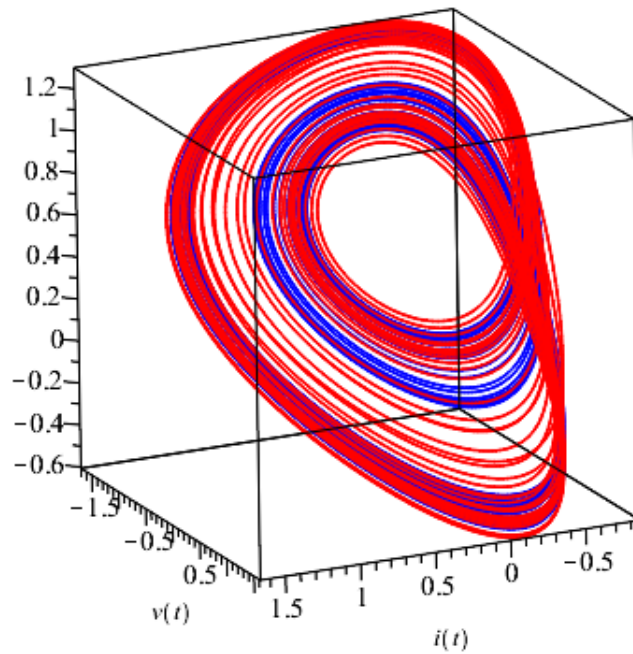
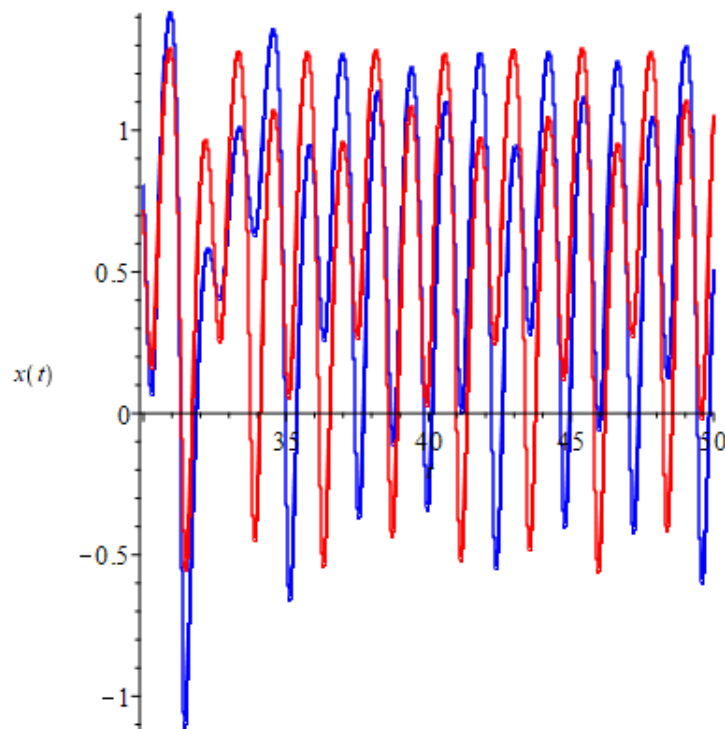
(a)  $C = 7.560$ (b)  $C = 7.360$ (c)  $C = 7.250$ (d)  $C = 7.225$ (e)  $C = 7.213$ (f)  $C = 7.210$ 

Figura 4.19: Solução do sistema (4.17) com condição inicial  $(0.2, 0.2, 0.4)$  e diferentes valores do parâmetro  $C$ : (a)  $C = 7.560$ ; (b)  $C = 7.360$ ; (c)  $C = 7.250$ ; (d)  $C = 7.225$ ; (e)  $C = 7.213$ ; (f)  $C = 7.210$ .



(a)



(b)

Figura 4.20: (a) Atrator caótico do sistema (4.17) com  $C = 7.210$ , soluções com condições iniciais  $(0.2, 0.2, 0.4)$  (azul) e  $(0.2001, 0.2, 0.4)$  (vermelha); (b) coordenada  $x(t)$  contra  $t$ , mostrando sensibilidade com relação às condições iniciais.

## 4.5 Modelo simplificado de memristor localmente ativo

Para a construção do modelo oscilatório 4.9, os autores de [12] consideraram um memristor localmente ativo e não volátil, ou seja, seu gráfico POP, dado por  $f(x, i_M) = 0$  com  $i_M = 0$ , possui duas raízes simples onde a derivada da função  $f'(x, 0)$  é negativa. Com base principalmente nestas hipóteses (atividade local e não volatilidade), e nos estudos apresentados nas seções anteriores, propomos considerar, ao invés do memristor utilizado em [12], o seguinte memristor genérico controlado por corrente

$$\begin{cases} v_M = R_M(x)i_M = -1.5(x - 0.5)i_M, \\ \frac{dx}{dt} = x - x^3 + i_M = f(x, i_M), \end{cases} \quad (4.19)$$

que, supostamente, tem a vantagem de possui uma expressão bem mais simples.

O gráfico de desligamento (POP) do memristor (4.19) é mostrado na figura 4.21

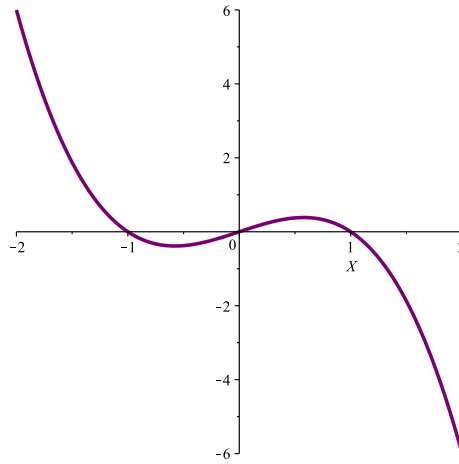


Figura 4.21: POP do memristor (4.19).

Dessa forma, o memristor proposto também possui a propriedade de **não volatilidade**, pois o seu gráfico de desligamento (POP ou Power Off Plot) possui dois pontos de equilíbrio estáveis, ou seja, pontos onde  $dx/dt = f(x, 0) = 0$  e  $f'(x, 0) < 0$ . Os pontos de equilíbrio são  $Q_1 = (-1, 0)$ ,  $Q_2 = (0, 0)$  e  $Q_3 = (1, 0)$ . Seguindo o mesmo raciocínio das seções anteriores, temos que  $Q_1$  e  $Q_3$  são assintoticamente estáveis, enquanto que  $Q_2$  é um ponto de equilíbrio instável.

Além disso, como a equação para a tensão  $v_M$  é a mesma de (4.3) e os pontos de equilíbrio também são os mesmos, as memristências correspondentes nos dois pontos de equilíbrio estáveis são as mesmas obtidas para o memristor dado por (4.3).

Para determinar a região de atividade local do memristor, seguindo as mesmas técnicas já apresentadas anteriormente, obtemos as equações que o governam, fazendo  $\frac{dx}{dt} = 0$ ,  $x = X$ ,  $i_M = I_M$  e  $v_M = V_M$  de onde obtemos

$$I_M = X^3 - X, \quad (4.20)$$

$$V_M = -1.5(X - 0.5)(X^3 - X). \quad (4.21)$$

A partir das equações (4.20) e (4.21), podemos desenhar seus respectivos gráficos com  $X$  como a variável independente, como é mostrado na figura 4.22.

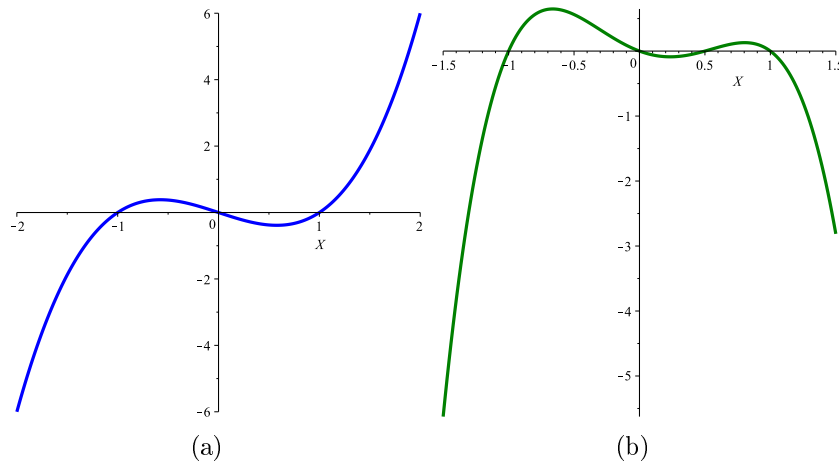


Figura 4.22: (a) Gráfico  $I_M$ , (b) Gráfico  $V_M$ .

Também podemos desenhar a curva DC no plano  $(I_M, V_M)$ , como mostrado na figura 4.23 que é plotada no domínio  $[-1.2, 1.2]$  da variável  $X$ . Observe que esta curva tem a forma de um laço, e foi por isso chamada de *shoelace plot* do memristor, conforme [7].

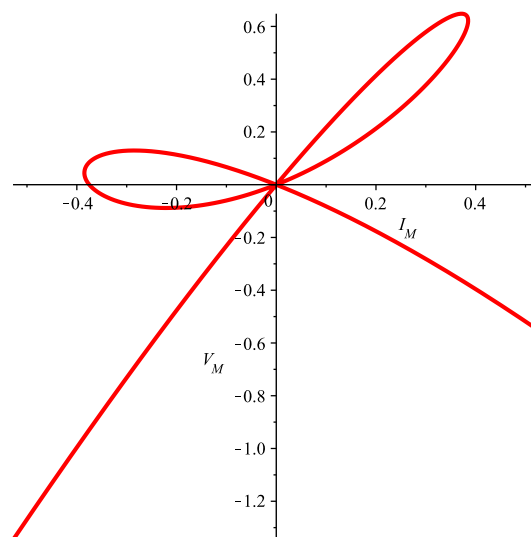


Figura 4.23: Gráfico DC  $(I_M, V_M)$ .

Do gráfico DC, as regiões localmente ativas do memristor são obtidas, conforme é listado na Tabela 4.3 de onde podemos ver que existem quatro regiões de resistência diferencial negativa logo essas regiões são localmente ativas.

Da mesma forma que no caso do memristor anterior, obtemos que os equilíbrios  $Q_1$  e  $Q_3$  são localmente passivos, enquanto que  $Q_2$  é localmente ativo.

#### 4.5.1 Modelo oscilatório com memristor simplificado

Seguindo o que foi feito em [12] para a construção do oscilador periódico, utilizando o memristor localmente ativo determinado pela equação (4.3), nesta seção propomos um novo circuito oscilador, também como o mostrado na figura 4.8, mas com a equação dinâmica do memristor simplificado, dada pelas equações 4.19. Utilizando novamente as equações de Kirchhoff obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais que modela o



Variável de estado $X$	Resistência diferencial $\Delta V_M/\Delta I_M$	Caraterísticas	Corrente $I_M/A$
$[-1.2, -0.662)$	Positivo	Localmente passivo	$[-0.526, 0.374)$
$[-0.662, -0.575)$	Negativo	Localmente ativo	$[0.374, 0.385)$
$[-0.575, 0.236)$	Positivo	Localmente passivo	$[0.385, -0.219)$
$[0.236, 0.583)$	Negativo	Localmente ativo	$[-0.219, -0.385)$
$[0.581, 0.805)$	Positivo	Localmente passivo	$[-0.385, -0.284)$
$[0.805, 1.2]$	Negativo	Localmente ativo	$[-0.284, 0.527]$

Tabela 4.3: Análise da região localmente ativa e passiva.

circuito:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - x^3 + i_L, \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}[(I_S - i_L)R + 1.5(x - 0.5)i_L]. \end{cases} \quad (4.22)$$

Apresentamos agora uma análise da estabilidade linear dos pontos de equilíbrio do sistema (4.22), fixando os valores dos parâmetros  $I_S = -0.055$  e  $R = 0.088$ , seguindo o que foi feito em [12]. Na nossa análise, vamos variar o parâmetro  $L$ , que representa a indutância no circuito, e será considerado como parâmetro de bifurcação em nosso estudo.

Fazendo  $dx/dt = di_L/dt = 0$  no sistema (4.22), obtemos quatro pontos de equilíbrio do circuito, que são dados por:  $S_1 = (-1.0010, -0.002068)$ ,  $S_2 = (0.0058368, -0.0058366)$ ,  $S_3 = (1.0036, 0.007251)$ , e  $S_4 = (0.55026, -0.38365)$ .

Como no caso anterior, observamos que os pontos de equilíbrio são independentes do parâmetro  $L$ , mas para o estudo da estabilidade dependerá deste parâmetro, de fato a matriz Jacobiana do sistema (4.22), com os valores dos parâmetros  $I_S$  e  $R$  definidos acima, é dada por:

$$J(x, i_L) = \begin{pmatrix} 1 - 3x^2 & 1 \\ \frac{1.5i_L}{L} & \frac{-0.838 + 1.5x}{L} \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Calculando os autovalores da matriz (4.23) em cada um dos pontos de equilíbrio  $S_1$  a  $S_4$ , obtemos as seguintes expressões, dependentes do parâmetro  $L$ :

**Autovalores no equilíbrio  $S_1$ :**

$$-\frac{2.5 \times 10^{-4}}{L}(4012.L + 4679. \pm 1.\sqrt{1.6096 \times 10^7 L^2 - 3.7593 \times 10^7 L + 2.1893 \times 10^7})$$

**Autovalores no equilíbrio  $S_2$ :**

$$\frac{4. \times 10^{-7}}{L}(1.2499 \times 10^6 L - 1.0366 \times 10^6 \pm \sqrt{1.5622 \times 10^{12} L^2 + 2.5364 \times 10^{12} L + 1.10744 \times 10^{12}})$$

**Autovalores no equilíbrio  $S_3$ :**

$$-\frac{10^{-4}}{L}(10108.L - 3337. \pm \sqrt{1.0217 \times 10^8 L^2 + 6.8549 \times 10^7 L + 1.1136 \times 10^7})$$

**Autovalores no equilíbrio  $S_4$ :**

$$\frac{1. \times 10^{-6}}{L}(45821.L - 6305. \pm \sqrt{2.0996 \times 10^9 L^2 - 5.749 \times 10^{11} L + 3.9753 \times 10^7})$$

Analisando as expressões acima, obtemos que o equilíbrio  $S_1$  é um nó estável para qualquer valor positivo do parâmetro  $L$ , os pontos de equilíbrio  $S_2$  e  $S_3$  são pontos de sela para qualquer valor positivo do parâmetro  $L$ , e  $S_4$  é um foco instável para  $L > 0.1376006635$ . Por outro lado, para  $0 < L < 0.1376006635$  o equilíbrio  $S_4$  é um foco estável, e para o valor do parâmetro  $L_0 \approx 0.1376006635$  os autovalores da matriz Jacobiana no ponto  $S_4$  são complexos com parte real zero, sendo portanto do tipo foco fraco, que é uma das condições para a ocorrência de uma bifurcação de Hopf neste ponto. Assim, ocorre uma mudança na estabilidade do foco, de estável para instável, quando  $L$  passa pelo valor crítico  $L_0 \approx 0.1376$ .

Na figura 4.24 mostramos o retrato de fase do sistema (4.22) para  $L = 0.1 < L_0$ . Na figura da esquerda, pode-se ver os pontos de sela  $S_2$  e  $S_3$ , o nó  $S_1$  e o foco estável  $S_4$ . Na figura da direita, vê-se em detalhe que duas das variedades instáveis dos pontos de sela  $S_2$  e  $S_3$  (que se encontra próximo da origem e próxima do ponto  $(1, 0)$ , respectivamente) tendem para o foco estável  $S_4$ .

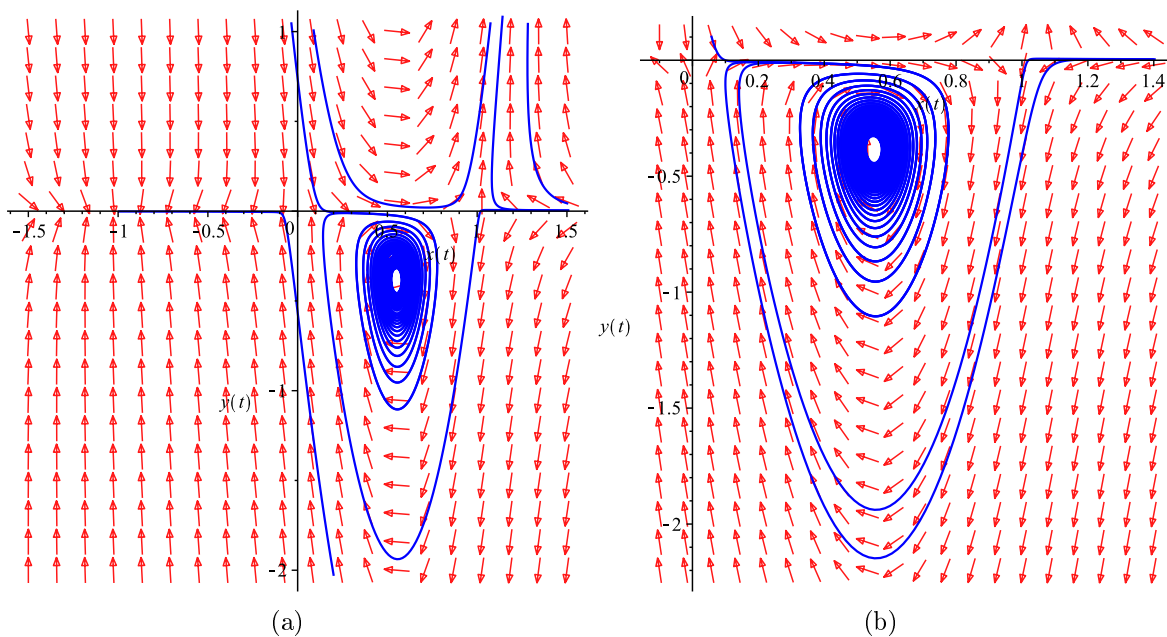


Figura 4.24: Retrato de fase do sistema (4.22) para  $L = 0.1$ . Na figura da esquerda pode-se ver os pontos de sela, o nó e o foco estável. Na da direita, vê-se o foco estável e as variedades instáveis das selas em detalhe.

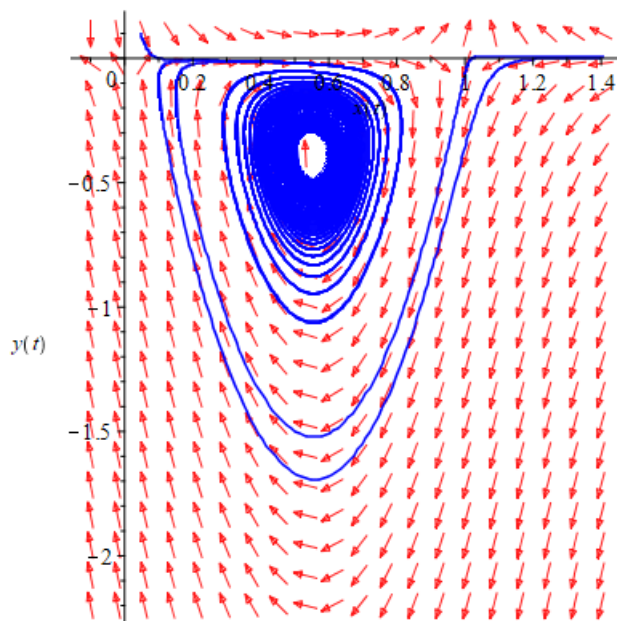
Aumentando o valor de  $L$  para  $L = 0.137$ , bastante próximo do valor de bifurcação, observamos que o ponto de equilíbrio  $S_4$  torna-se um “foco fraco” (ver figura 4.25), pois as soluções demoram muito para convergir para o equilíbrio.

Para  $L = 0.14$ , ou seja, maior que o ponto de bifurcação  $L_0 \approx 0.137$ , observa-se que o foco  $S_4$  se torna instável, e um pequeno ciclo limite estável surge em torno dele, conforme mostrado na figura 4.26. Tal como no sistema anterior, o ciclo limite aumenta de amplitude, conforme  $L$  se afasta do ponto de bifurcação (ver figura 4.27).

Existe então um valor limite aproximado,  $L_1 = 1.234$ , para o qual o sistema (4.22) apresenta uma órbita heteroclínica que liga os dois pontos de sela, ou seja, uma das variedades instáveis da sela  $S_3$  coincide com uma das variedade estáveis de  $S_2$ , conforme mostrado na figura 4.28.

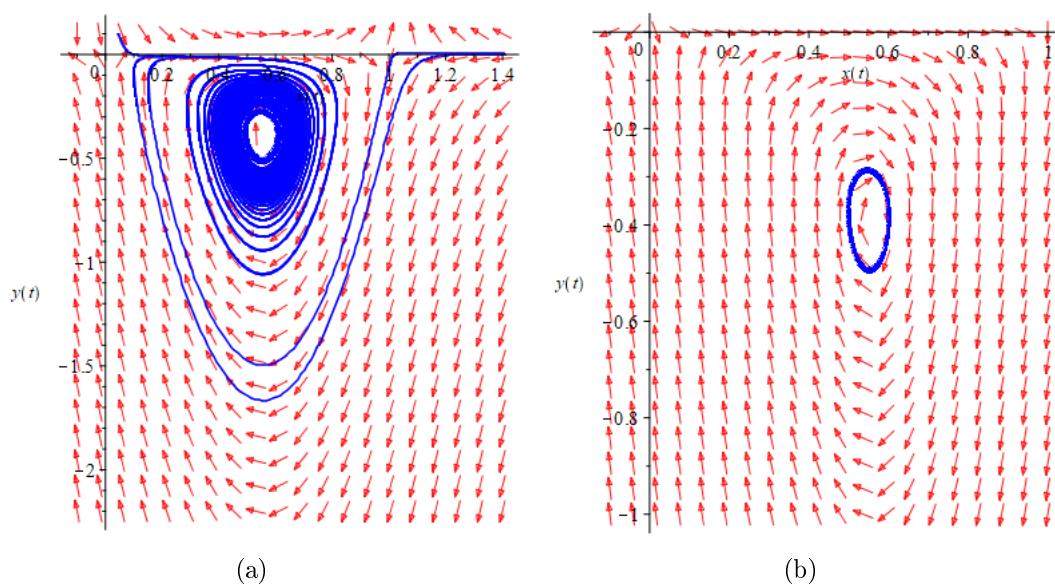
Para  $L > L_1 = 1.234$ , não há mais oscilações periódicas. As soluções tendem para o nó estável  $S_1$ , conforme mostrado na figura 4.29.

Novamente podemos perceber o papel importante das separatrizes das selas  $S_2$  e  $S_3$  na dinâmica do modelo. Na verdade, essas separatrizes determinam as regiões do plano



(a)

Figura 4.25: Retrato de fase do sistema (4.22) para  $L = 0.137$ , valor aproximado do ponto de bifurcação de Hopf. O ponto de equilíbrio  $S_4$  se torna um foco fraco.



(a)

(b)

Figura 4.26: Retrato de fase do sistema 4.22 para  $L = 0.14$ . O foco  $S_4$  é instável e surge um ciclo limite em torno dele, o ciclo limite estável é mostrada na figura da direita.

de fase onde ocorrem as oscilações periódicas. A existência da órbita heteroclínica constitui uma fronteira para essas regiões: após a ocorrência desta, não há mais oscilações periódicas.

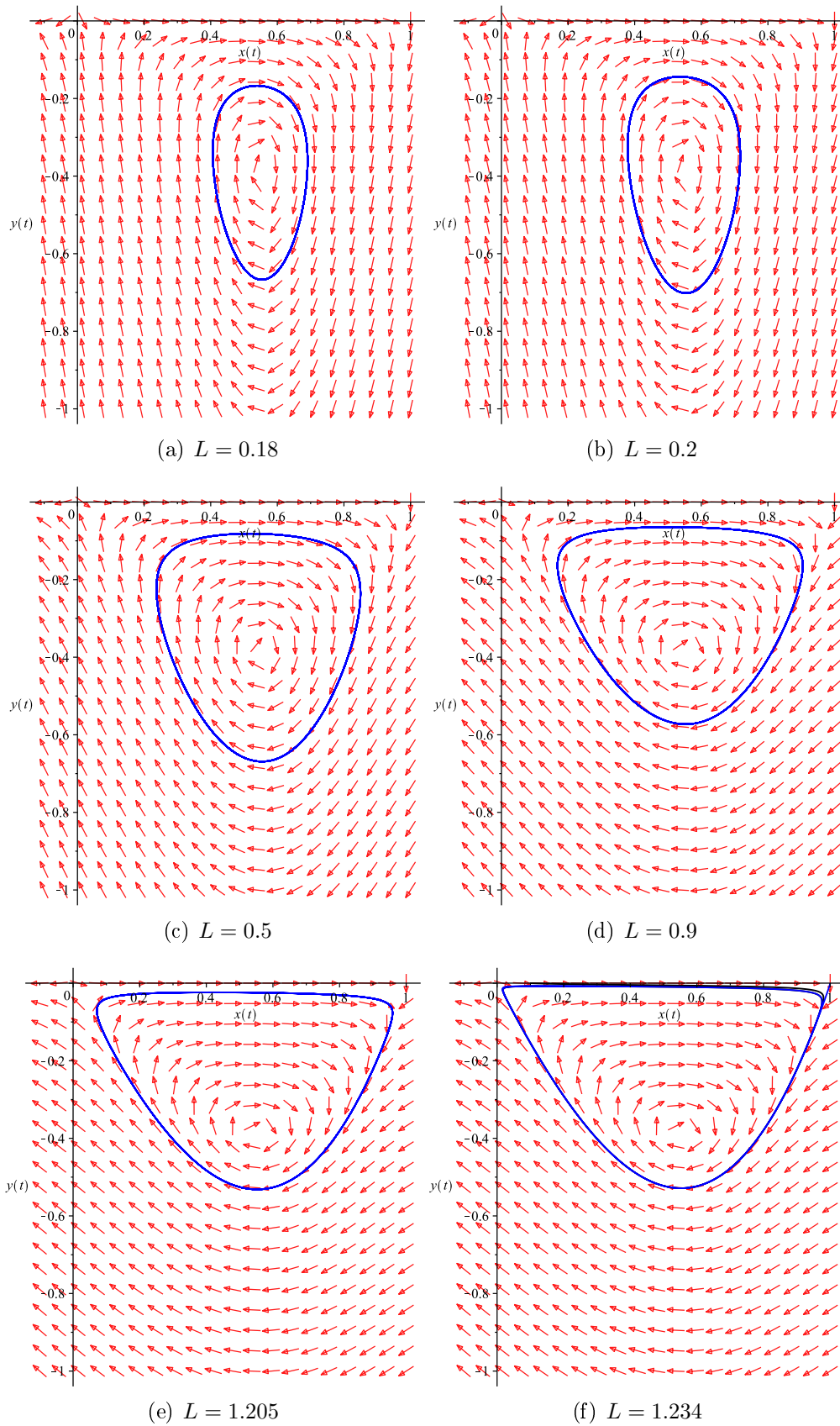


Figura 4.27: Aumentando o valor do parâmetro desde  $L = 0.18$ , os ciclos limites aumentam de amplitude.

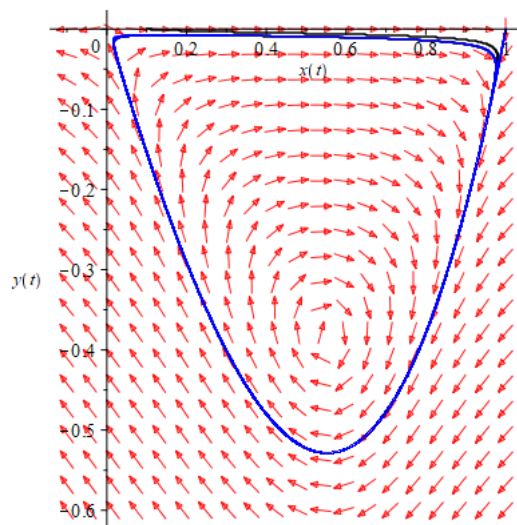


Figura 4.28: Órbita heteroclínica que conecta os pontos de sela  $S_2$  e  $S_3$ , para  $L = 1.234$ .

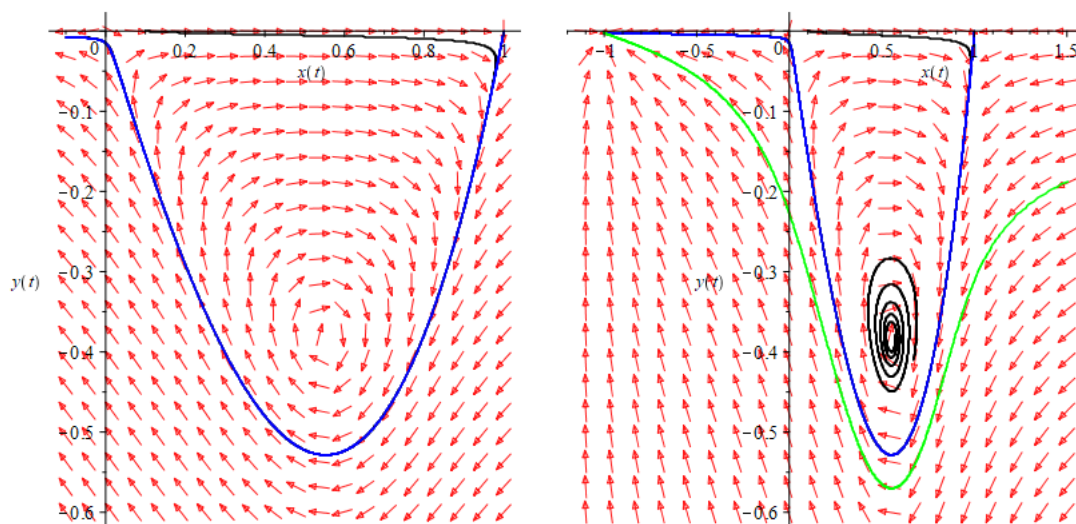


Figura 4.29: Para valores do parâmetro  $L > 1.234$  não há mais oscilações e as soluções tendem para o nó estável  $S_1$ .



## Conclusões

A solução de vários sistemas que incluem memristores e sistemas memristivos amplia o conhecimento atual dos sistemas dinâmicos e da teoria dos circuitos, por este motivo pode-se inferir que os sistemas com Memristor e, portanto, os sistemas memristivos podem ser considerados como novas categorias de estudo, tanto de sistemas dinâmicos quanto de teoria de circuitos não lineares, e neste trabalho tentamos apresentá-los e estudá-los do ponto de vista matemático.

Ao longo deste trabalho, as principais características do memristor e dos sistemas memristivos foram expostas do ponto de vista clássico, incluindo seu comportamento dentro de circuitos elétricos.

O modelo matemático apresentado no Capítulo 4 (o memristor controlado por corrente), é biestável e não volátil, localmente ativo, tem dois estados estáveis e quatro regiões localmente ativas. A análise teórica e simulação (todas elas foram obtidas da referência [12]) mostraram que o memristor pode mudar rapidamente seu comportamento, ao se aplicar sinais de pulso de corrente apropriados.

Também foi estudado que o memristor operando em um ponto ativo pode ser equivalente a um circuito capacitivo (com um capacitor), de modo que o memristor pode gerar oscilações periódicas, ao se conectar um indutor em série com ele. A dinâmica oscilatória do circuito é analisada através da teoria da bifurcação de Hopf e atratores coexistentes (como o ponto de equilíbrio estável e o ciclo limite). Além disso, um circuito caótico autônomo tridimensional é estabelecido pela adição de um capacitor ao circuito oscilatório periódico do memristor, que pode exibir vários comportamentos dinâmicos, como ponto fixo, ciclo limite, oscilação caóticas e vários atratores coexistentes. A partir dos fenômenos dinâmicos estudados, concluimos que a atividade local do memristor causa e mantém as oscilações periódicas e caóticas, o que mostra que a atividade local pode ser considerada com uma fonte de complexidade nos sistemas elétricos.

Além do estudo aqui apresentado, podemos dizer que ainda há muito o que se estudar sobre circuitos elétricos envolvendo memristores e/ou sistemas memristivos. Em estudos subsequentes, pode-se tentar generalizar alguns conceitos aqui apresentados, sobre memristores, sistemas memristivos e circuitos elétricos que combinem tais elementos com outros elementos fundamentais dos circuitos elétricos (resistores, capacitores e indutores).





---

## Referências

- [1] ADHIKARI, S. P., SAH, M. P., KIM, H., AND CHUA, L. O. Three fingerprints of memristor. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 60, 11 (2013), 3008–3021.
- [2] ANDRONOV, A., LEONTOVICH, E., GORDON, I., AND MAIER, A. Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane. *NASATT F-556* (1971).
- [3] ANDRONOV, A., LEONTOVICH, E., GORDON, I., MAIER, A., AND GUTZWILLER, M. C. Qualitative theory of second-order dynamic systems. *Physics Today* 27, 8 (1974), 53.
- [4] ASCOLI, A., SLESAZECK, S., TETZLAFF, R., MÄHNE, H., AND MIKOLAJICK, T. Unfolding the local activity of a memristor. In *2014 14th International Workshop on Cellular Nanoscale Networks and their Applications (CNNA)* (2014), IEEE, pp. 1–2.
- [5] CHUA, L. Memristor-the missing circuit element. *IEEE Transactions on circuit theory* 18, 5 (1971), 507–519.
- [6] CHUA, L. Everything you wish to know about memristors but are afraid to ask. *Radioengineering* 24, 2 (2015), 319.
- [7] CHUA, L. Resistance switching memories are memristors. In *Handbook of memristor networks*. Springer, 2019, pp. 197–230.
- [8] CHUA, L. O., AND KANG, S. M. Memristive devices and systems. *Proceedings of the IEEE* 64, 2 (1976), 209–223.
- [9] CODDINGTON, E. A., AND LEVINSON, N. *Theory of ordinary differential equations*. Tata McGraw-Hill Education, 1955.
- [10] DE CASTRO JÚNIOR, A. A. Curso de equações diferenciais ordinárias. *Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)* (2009).
- [11] DOERING, C. I., AND LOPES, A. O. *Equações diferenciais ordinárias*. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 2008.
- [12] GU, M., WANG, G., LIU, J., LIANG, Y., DONG, Y., AND YING, J. Dynamics of a bistable current-controlled locally-active memristor. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 31, 06 (2021), 2130018.
- [13] LIMA, E. L. Espaços métricos. *Rio de Janeiro, Projeto Euclides*.
- [14] MORA, J. F. *Circuitos eléctricos*. Pearson Educación, 2012.
- [15] PALIS, J., AND DE MELO, W. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.

- 
- [16] PEIXOTO, M. Teoria geométrica das equações diferenciais. *Bras. de Mat., Rio de Janeiro: IMPA, 75pp* (1969).
- [17] PEIXOTO, M. M. Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology* 1, 2 (1962), 101–120.
- [18] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*, vol. 7. Springer Science and Business Media, 2013.
- [19] PUTZER, E. J. Avoiding the jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients. *The American Mathematical Monthly* 73, 1 (1966), 2–7.
- [20] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias Projeto Euclides IMPA. Brasil*, 1979.
- [21] SPIVAK, M. *Cálculo en variedades*. Reverté, 1988.
- [22] STRUKOV, D. B., SNIDER, G. S., STEWART, D. R., AND WILLIAMS, R. S. The missing memristor found. *nature* 453, 7191 (2008), 80–83.
- [23] TETZLAFF, R. *Memristors and memristive systems*. Springer, 2013.