

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
BACHARELADO EM ENGENHARIA ELETRÔNICA
E DE TELECOMUNICAÇÕES

VITOR HENRIQUE ALBERTO

POSIÇÃO DA PRIMEIRA CURVA INVARIANTE *SPANNING* NO GUIA DE ONDAS
PERIODICAMENTE CORRUGADO

São João da Boa Vista

2021

Vitor Henrique Alberto

**POSIÇÃO DA PRIMEIRA CURVA INVARIANTE *SPANNING* NO GUIA DE ONDAS
PERIODICAMENTE CORRUGADO**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações do Campus de São João da Boa Vista, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações .

Orientador: Profº Dr. Juliano Antonio de Oliveira

São João da Boa Vista

2021

A334p

Alberto, Vitor Henrique

Posição da primeira curva invariante spanning no guia de ondas periodicamente corrugado / Vitor Henrique Alberto. -- São João da Boa Vista, 2021

32 p. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia de Telecomunicações) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Câmpus Experimental de São João da Boa Vista, São João da Boa Vista

Orientador: Prof^o Dr. Juliano Antonio de Oliveira

1. Guias de ondas. 2. Sistemas não lineares. 3. Comportamento caótico nos sistemas. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Câmpus Experimental de São João da Boa Vista. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
BACHARELADO EM ENGENHARIA ELETRÔNICA
E DE TELECOMUNICAÇÕES

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**POSIÇÃO DA PRIMEIRA CURVA INVARIANTE *SPANNING* NO GUIA DE ONDAS
PERIODICAMENTE CORRUGADO**

Aluno: Vitor Henrique Alberto

Orientador: Profº Dr. Juliano Antonio de Oliveira

Banca Examinadora:

- Profº Dr. Juliano Antonio de Oliveira (Orientador)
- Profº Dr. Júlio César David da Fonseca (Examinador)
- Profº Dr. Wilian Miranda dos Santos (Examinador)

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no prontuário do aluno
(Expediente nº 090/2021)

São João da Boa Vista , 07 de dezembro de 2021

Dedico esse trabalho aos meus pais, que sempre estiveram presentes em minha vida me dando forças e apoio para seguir em frente.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, gostaria de agradecer a Deus por sempre estar presente em minha vida, dando-me forças e amparo nos momentos mais difíceis, sempre me ajudando a superar os obstáculos e trilhar o caminho do bem.

Agradeço imensuravelmente aos meus pais, que sempre se desdobraram para me ajudar da melhor forma possível, com carinho, atenção e apoio em todos os momentos de minha vida.

Agradeço as amizades construídas na UNESP - SJBV, por todo o apoio e troca de conhecimento ao longo dos cinco de anos de graduação. Certamente, terei inúmeras lembranças que ficaram registradas para sempre em minha memória.

Por fim, agradeço imensamente ao meu orientador Professor Dr. Juliano Antonio de Oliveira, por toda a dedicação, paciência e apoio durante o desenvolvimento desse trabalho.

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):

Processo nº 2018/14685-9, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Processos 303242/2018-3 e 421254/2016-5 e o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

*“Entrega o teu caminho ao Senhor; confia nEle, e Ele tudo fará.”
(Salmo 37:5)*

RESUMO

Neste trabalho, será realizado o estudo do comportamento reflexivo de um feixe de luz que incide entre dois espelhos, sendo um deles liso e outro periodicamente corrugado. O objetivo consiste em analisar as propriedades dinâmicas do sistema e explorar comportamentos regulares e caóticos de órbitas, compreender a influência das condições iniciais e do parâmetro de controle, além da construção do espaço de fases composto por ilhas periódicas e um grande mar de caos limitado por curvas invariantes *spanning*, que serão obtidas de duas formas, analiticamente utilizando uma conexão entre o mapa padrão e o modelo do guia de ondas periodicamente corrugado e computacionalmente através de extensas simulações numéricas. Além disso, os expoentes de Lyapunov serão utilizados para caracterizar o comportamento das órbitas caóticas. Para descrever a dinâmica do modelo do guia de ondas periodicamente corrugado será utilizado um mapeamento bidimensional discreto e não linear que relaciona o ângulo de reflexão θ_n e o ponto de reflexão x_n , onde n indica a n -ésima reflexão do feixe de luz no plano inferior. Com isso, pôde-se obter a localização das curvas invariantes *spanning* utilizando recursos analíticos, tal como métodos computacionais, constatando a influência do parâmetro de controle δ nesse resultado.

PALAVRAS-CHAVE: sistemas dinâmicos; guia de ondas periodicamente corrugado; comportamento caótico; espaço de fases; curvas invariantes *spanning*.

ABSTRACT

In this work, the study of the reflective behavior of a light beam that falls between two mirrors will be carried out one being smooth and the other periodically corrugated. The objective is to analyze the dynamic properties of the system and explore regular and chaotic behaviors of orbits, understand the influence of initial conditions and the control parameter, as well as the construction of a phase space composed of periodic islands and a large sea of chaos limited by invariant curves *spanning*, which will be obtained in two ways, analytically using a connection between the standard map and the periodically corrugated waveguide model and computationally through extensive numerical simulations. Furthermore, Lyapunov exponents will be used to characterize the behavior of chaotic orbits. To describe the dynamics of the periodically corrugated waveguide model, will be used a discrete and non-linear two-dimensional mapping that relates the reflection angle θ_n and the reflection point x_n , where n show the n -th reflection of the light beam in the lower plane. With this, it is possible to obtain the location of the invariant curves *spanning* using analytics resources, such as computational methods, verifying the influence of the control parameter δ in this work.

KEYWORDS: dynamic systems; periodically corrugated waveguide; chaotic behavior; phase space; invariant spanning curves.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Esboço de um bilhar e das variáveis usadas em sua descrição	17
Figura 2	Ilustração do afastamento exponencial entre duas condições iniciais próximas .	18
Figura 3	Geometria do guia de ondas periodicamente corrugado	19
Figura 4	Detalhamento da trajetória do feixe antes e após a reflexão com as fronteiras do guia de ondas	20
Figura 5	Espaço de fases gerado por 10^4 iterações do mapa 4 utilizando os parâmetros de controle: (a) $\delta = 2 \times 10^{-2}$ e (b) $\delta = 2 \times 10^{-3}$	21
Figura 6	Convergência dos expoentes positivos de Lyapunov obtidos através da evolução de cinco órbitas para o modelo do guia de ondas periodicamente corrugado. O parâmetro de controle utilizado foi: $\delta = 10^{-2}$	23
Figura 7	Espaço de fases obtido para o mapa padrão adotando os seguintes parâmetros de controle: (a) $K = 0,5$; (b) $K = 0,75$; (c) $K = 0,97$ e (d) $K = 2$	25
Figura 8	Espaço de fases do modelo simplificado do guia de ondas para os parâmetros de controle: (a),(b) $\delta = 2 \times 10^{-2}$ e (c),(d) $\delta = 2 \times 10^{-3}$	27
Figura 9	Localização da primeira curva invariante no guia de ondas, utilizando os parâmetros de controle: (a) $\delta = 2 \times 10^{-2}$ e (b) $\delta = 2 \times 10^{-3}$	29
Figura 10	Aproximação através de lei de potência para a equação que descreve a posição da primeira curva invariante <i>spanning</i>	30

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UNESP Universidade Estadual Paulista

SJBV São João da Boa Vista

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Letra Grega Alfa
β	Letra Grega Beta
λ	Letra Grega Lambda minúsculo
Λ	Letra Grega Lambda maiúsculo
θ	Letra Grega Teta
ϕ	Letra Grega Fi
ψ	Letra Grega Psi
π	Letra Grega Pi
δ	Letra Grega Delta minúsculo
Δ	Letra Grega Delta maiúsculo
γ	Letra Grega Gamma minúsculo
x_n	Posição de reflexão do feixe de luz
K	Parâmetro de controle
K_c	Valor crítico do parâmetro K
K_{eff}	Parâmetro de controle efetivo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Objetivos	15
1.2	Organização	15
2	REVISÃO TEÓRICA	16
2.1	Sistemas dinâmicos lineares e não lineares	16
2.2	Dinâmica de bilhares	16
2.3	Mapa padrão	17
2.4	Curvas invariantes <i>spanning</i>	17
2.5	Expoentes de Lyapunov	18
3	MODELO UTILIZADO NA DESCRIÇÃO DO GUIA DE ONDAS PERIODI- CAMENTE CORRUGADO	19
4	INVESTIGAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE ÓRBITAS CAÓTICAS UTI- LIZANDO OS EXPOENTES DE LYAPUNOV	22
5	LOCALIZAÇÃO DAS CURVAS INVARIANTES <i>SPANNING</i>	24
5.1	Obtenção analítica da posição da primeira curva invariante <i>spanning</i>	24
5.2	Obtenção da posição da primeira curva invariante <i>spanning</i> através de simulações numéricas	26
6	CONCLUSÃO	31
	REFERÊNCIAS	33

1 INTRODUÇÃO

Ao decorrer do tempo, diversos estudos científicos tiveram avanços significativos, um deles é referente a Teoria do Caos, que compõe uma área muito abrangente do conhecimento, proporcionando uma ferramenta extremamente útil para a investigação e compreensão de fenômenos em diversas áreas como (SOUSA; KLAFKE; BASSINI, 2020) a engenharia, matemática, dinâmica de populações biológicas, economia, laser, meteorologia, circuitos eletrônicos, sistemas mecânicos, reações químicas (BOLTT, 2003), medicina, ciências sociais, astronomia, dentre outros (FEY; ROSA, 2012).

Através de mapeamentos compostos por variáveis dinâmicas e parâmetros de controle é possível realizar a descrição de sistemas dinâmicos. Ao alterar os parâmetros de controle o sistema poderá sofrer alterações, podendo assumir as seguintes comportamentos: (i) periódico (ii) quase-periódico (iii) caótico (RAMOS, 2019). No caso (i) a dinâmica se repete em intervalos de tempo bem definidos, refletindo previsibilidade e regularidade da dinâmica em questão. Em (ii) não se observa uma repetição bem definida em intervalos regulares como em (i), nesse caso a evolução dinâmica ocorre ao longo de um conjunto compacto no espaço de fases, não exibindo afastamento no decorrer do tempo, levando em consideração duas configurações iniciais próximas. Por fim, um sistema é classificado como caótico, quando o mesmo apresenta sensibilidade as condições iniciais, isso quer dizer que duas condições iniciais próximas se afastam exponencialmente uma da outra ao decorrer do tempo (COSTA, 2014), acarretando em falta de previsibilidade de acordo com a evolução do sistema (RAMOS, 2019).

Embora existam relatos que os primeiros estudos sobre sistemas dinâmicos se deram por volta do século XV e XVI, seu progresso veio através de Issac Newton e suas leis de movimento, trazendo mudanças na modelagem matemática (LEONEL, 2019). Avançando para o final do século XIX, o matemático e astrônomo francês Henri Poincaré, com toda a sua genialidade (AGUIAR, 1994) foi um dos primeiros cientistas a descrever o fenômeno do caos, ao realizar o estudo do Sistema Solar, denominado problema dos três corpos, pois se considerava que o Sol e Júpiter atuavam gravitacionalmente em uma terceira massa, dessa forma, Poincaré descobriu que o comportamento geral de um corpo sob a influência gravítica de outros dois muito mais pesados era irregular (FÍSICA, 2010), verificando que órbitas apresentavam sensibilidade a pequenas variações das condições iniciais (FÍSICA, 2010).

Posteriormente em 1960, os estudos na área de comportamento caótico em sistemas complexos (RAMOS, 2019) voltaram a ficar em evidência através do matemático e meteorologista Edward Lorenz, quando percebeu que ao desconsiderar algumas casas decimais em seus cálculos, suas previsões sofriam alterações significativas, surgindo então a mundialmente conhecida frase metafórica: “É como se o bater das asas de uma borboleta no Brasil causasse, tempos depois, um tornado no Texas”, fomentando ainda mais o interesse da comunidade científica sobre sistemas caóticos (SOUSA; KLAFKE; BASSINI, 2020).

Neste trabalho, será realizado o estudo do comportamento reflexivo de um feixe de luz que incide entre dois espelhos, sendo um deles liso e outro periodicamente corrugado. A dinâmica será descrita analiticamente através de mapas discretos, possibilitando a construção do espaço de fases e a análise

em relação ao comportamento do sistema.

1.1 OBJETIVOS

Considerar um guia de ondas periodicamente corrugado a fim de explorar comportamentos regulares e caóticos de órbitas. Construir o espaço de fases para analisar o comportamento do sistema. Para isso será realizada uma conexão do modelo com o mapa padrão para localizar analiticamente a posição da primeira curva invariante *spanning*. Além disso, extensivas simulações numéricas serão implementadas para localizar a posição da primeira curva invariante no espaço de fases.

1.2 ORGANIZAÇÃO

Para melhor expressar nossas intenções, organizamos nosso trabalho da seguinte forma: O Capítulo 2 é composto pela revisão teórica que engloba os principais assuntos abordados no trabalho, como sistemas dinâmicos lineares e não lineares, dinâmica de bilhares, curvas invariantes *spanning*, o mapa padrão e expoentes de Lyapunov.

Já o Capítulo 3 aborda de maneira objetiva o modelo geométrico e os aspectos cruciais para a descrição da dinâmica do guia de ondas periodicamente corrugado, de modo que seja possível construir o espaço de fases e observar ilhas periódicas, um grande mar de caos e curvas invariantes *spanning*.

O Capítulo 4 apresenta o cálculo dos expoentes de Lyapunov, possibilitando a realização de uma breve análise sobre o comportamento das órbitas caóticas.

O Capítulo 5 apresenta o desenvolvimento analítico utilizado para a obtenção da posição da primeira curva invariante no espaço de fases, tal como a localização da posição da primeira curva invariante *spanning* no espaço de fases, através de extensivas simulações numéricas, possibilitando explorar comportamentos regulares e caóticos de órbitas.

Por fim, o Capítulo 6 contempla as considerações finais decorrentes do desenvolvimento do trabalho proposto.

2 REVISÃO TEÓRICA

2.1 SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES E NÃO LINEARES

Os primeiros relatos que se tem das investigações sobre sistemas dinâmicos datam dos séculos XV e XVI e estão particularmente relacionados com o estado da mecânica celeste (LEONEL, 2019). Entretanto, a modelagem matemática de um sistema evoluindo no tempo só teve progressos com Issac Newton e suas leis de movimento (LEONEL, 2019). Em um sistema dinâmico existe uma relação matemática que, a partir do conhecimento de um estado configuracional em um determinado instante, geralmente caracterizado com condição inicial do sistema, é possível obter o estado em um instante de tempo posterior (LEONEL, 2019). Um estado fornece a caracterização da configuração de um sistema em um dado instante (LEONEL, 2019).

Um sistema dinâmico pode apresentar comportamento linear, descrito por equações com potências de primeira ordem. Por outro lado, sistemas dinâmicos não lineares, são caracterizados por equações que apresentam potências diferentes de um, tal como funções seno, exponencial, cosseno, dentre outras, além disso, podem apresentar dependência de mais de uma variável. Cabe ressaltar que as equações não lineares não estão limitadas a sistemas mecânicos descritos pelas equações de Newton, já que podem englobar sistemas elétricos/eletrônicos compostos por elementos de circuitos que apresentam características não lineares, como diodos, transistores, além de sistemas relacionados a fluídos, sistemas lasers, a própria mecânica celeste (LEONEL, 2019), estatística e probabilidade (FILDER-FERRARA; PRADO, 1994).

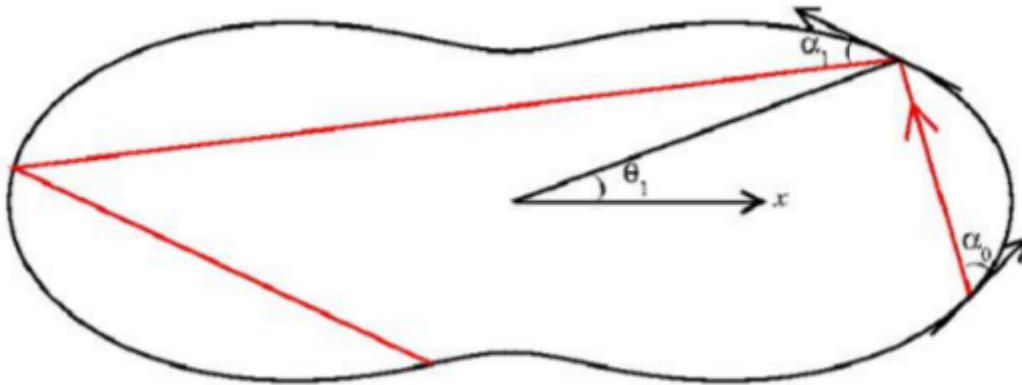
2.2 DINÂMICA DE BILHARES

Outro ponto importante que merece atenção é a dinâmica de bilhares, descrita como uma partícula ou conjunto não interagente delas se movendo no interior de uma fronteira fechada e colidindo com as paredes rígidas da estrutura que compõe a região que comporta as partículas. Para descrever problemas dessa natureza, usualmente se emprega mapeamentos não lineares (LIEBERMAN; LICHTENBERG, 1992), em relação as variáveis que descrevem a posição da partícula na fronteira bem como sua orientação após o impacto. A Figura 1 apresenta o esboço de uma dinâmica de bilhar planar descrita pelas variáveis (θ_n, α_n) , onde θ_n corresponde a posição da partícula e α_n indica o ângulo formado entre a trajetória da partícula em relação ao vetor tangente à fronteira na posição θ_n (LEONEL, 2019). O subíndice n indica a n ésima colisão ocorrida (LEONEL, 2019).

De maneira análoga, o guia de ondas periodicamente corrugado estudado nesse trabalho apresenta o mesmo comportamento, já que o feixe de luz incide entre dois espelhos (fronteira), sendo no caso um liso e outro periodicamente corrugado.

Os bilhares podem ser divididos basicamente em três classes, sendo elas: (i) bilhares integráveis (ii) bilhares ergódicos e (iii) bilhares mistos (LEONEL, 2019). A primeira classe apresenta características periódicas ou quase-periódicas quando analisado o espaço de fases (RABELO, 2008), estando a integrabilidade relacionada a conservação de energia mecânica e momento angular quanto ao bilhar

Figura 1 – Esboço de um bilhar e das variáveis usadas em sua descrição



Fonte: Imagem retirada de (LEONEL, 2019).

circular sendo que o mesmo acontece similarmente com o relação ao bilhar elíptico, no entanto em relação aos focos da fronteira (LEONEL, 2019). No caso da classe (ii), levando em consideração determinada combinação de parâmetros de controle e evoluindo apenas uma condição inicial é possível preencher todo o espaço de fases (RABELO, 2008). O bilhar de Sinai e bilhar de Bunimovich são exemplos do tipo (ii) (LEONEL, 2019). Já o caso (iii), corresponde a uma estrutura no espaço de fases em que dependendo dos parâmetros de controle e das condições iniciais empregadas, o espaço de fases exibe uma estrutura diversificada, composto por uma mar de caos limitado pelas curvas invariantes (em alguns casos denominadas tori invariantes), além de ilhas KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) (LEONEL, 2007).

2.3 MAPA PADRÃO

O mapa padrão é outro ponto que merece destaque, trata-se de uma mapeamento discreto e não linear, onde as duas variáveis dinâmicas \$(I, \theta)\$ mantém uma relação de não linearidade através da função periódica seno, conforme a equação 1 (LEONEL, 2019).

$$\begin{cases} I_{n+1} = [I_n + K \text{sen}(\theta_n)] \quad \text{mod } 2\pi \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \quad \text{mod } 2\pi \end{cases} \quad (1)$$

O parâmetro de controle representado por \$K\$ indica qual a intensidade da não linearidade. Para o caso em que \$K = 0\$, a primeira equação pode ser reescrita como \$I_{n+1} = I_n = I\$, com isso a variável se mantém preservada e o mapa é integrável. Quando \$K \neq 0\$, a variável dinâmica \$I\$ passa a possuir não linearidade associada a função periódica seno, podendo apresentar valores distintos de acordo com as iterações realizadas, assim o mapa se torna não integrável. Com isso, tem-se que o parâmetro de controle \$K\$ é responsável por controlar a transição entre integrável e não integrável (LEONEL, 2019).

2.4 CURVAS INVARIANTES *SPANNING*

Conhecer a posição da primeira curva invariante *spanning* é uma ferramenta extremamente útil, possibilitando analisar comportamentos regulares e caóticos de órbitas e compreender como a variação

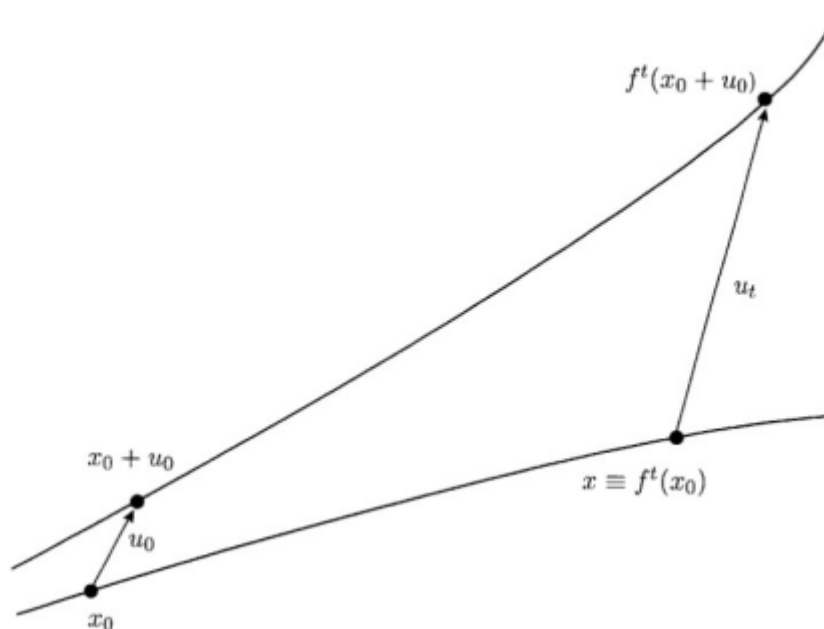
de diferentes parâmetros de controle afetam o espaço de fases (LEONEL, 2019). Abaixo da curva invariante *spanning* nota-se comportamento caótico. Acima da curva pode haver a presença de caos, porém a dinâmica se apresenta cada vez mais regular (LEONEL, 2019).

Em determinados mapeamentos, uma opção para obter a posição da primeira curva invariante trata-se da utilização do mapa padrão através de sua propriedade apresentada anteriormente, onde dependendo do parâmetro de controle ocorre a transição de caos local para caos global (LEONEL, 2019). O processo analítico é bem extenso, e está apresentado em detalhes na seção 5.1 deste trabalho, onde ocorre a conexão entre o mapa do guia de ondas periodicamente corrugado e o mapa padrão, permitindo a localização da primeira curva invariante.

2.5 EXPOENTES DE LYAPUNOV

O cálculo dos expoentes de Lyapunov (λ) constitui uma importante ferramenta para caracterização do comportamento das órbitas caóticas (RAMOS, 2019). A Figura 2 ilustra o conceito, mostrando que ao evoluirmos duas órbitas no tempo com condições iniciais próximas, no caso x_0 e $x_0 + u_0$, ocorre o afastamento exponencial em relação as condições iniciais (PERRE, 2017). Além disso, para uma solução caótica é necessário que ao menos um expoente de Lyapunov calculado seja positivo ($\gamma > 0$) (PERRE, 2017; FILDER-FERRARA; PRADO, 1994).

Figura 2 – Ilustração do afastamento exponencial entre duas condições iniciais próximas



Fonte: Imagem retirada de (SANDRI, 1996).

O desenvolvimento analítico utilizado no cálculo dos expoentes de Lyapunov está apresentado no Capítulo 4, sendo aplicado no mapa do guia de ondas periodicamente corrugado.

3 MODELO UTILIZADO NA DESCRIÇÃO DO GUIA DE ONDAS PERIODICAMENTE CORRUGADO

O modelo consiste na dinâmica do comportamento reflexivo de um feixe de luz que incide entre dois espelhos, sendo um deles liso e outro periodicamente corrugado. Uma das superfícies é paralela ao eixo das abscissas em $y = 0$, enquanto a outra é periodicamente corrugada descrita matematicamente por $y(x) = y_0 + d \cos(kx)$ (RABELO, 2008). Onde, y_0 corresponde a distância média entre as duas superfícies, d é a amplitude da corrugação e k o número de onda (RABELO, 2008). Cabe ressaltar que o mapeamento sofre iteração sempre que o feixe de luz incide sobre a fronteira plana, evitando assim a ocorrência de reflexões sucessivas. (RABELO, 2008). O modelo geométrico que descreve o modelo está ilustrado na Figura 3 .

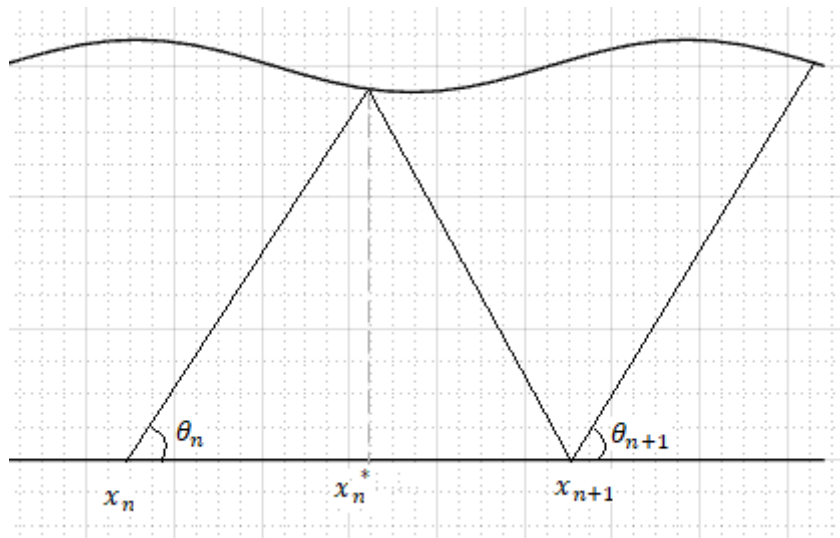


Figura 3 – Geometria do guia de ondas periodicamente corrugado

A partir do modelo acima, visa-se a obtenção de um mapeamento $T(\theta_n, x_n) = (\theta_{n+1}, x_{n+1})$ em que n corresponde a n -ésima reflexão do feixe de luz com a superfície inferior. Com isso, uma vez fornecidas as condições iniciais (θ_n, x_n) , torna-se possível obter a nova posição e o novo ângulo (θ_{n+1}, x_{n+1}) através de recursos estritamente geométricos, conforme apresentado na Figura 4 (RABELO, 2008).

Tomando a primeira parte da trajetória do feixe de luz é possível obter

$$x_n^* - x_n = \frac{y_0 + d \cos(kx_n^*)}{\theta_n} . \quad (1)$$

Já a segunda parte da trajetória do feixe, é descrita pela seguinte equação

$$x_{n+1} - x_n^* = \frac{y_0 + d \cos(kx_n^*)}{\theta_{n+1}} , \quad (2)$$

sendo x^* a variável que fornece a posição exata do feixe de luz refletido com a superfície periodicamente

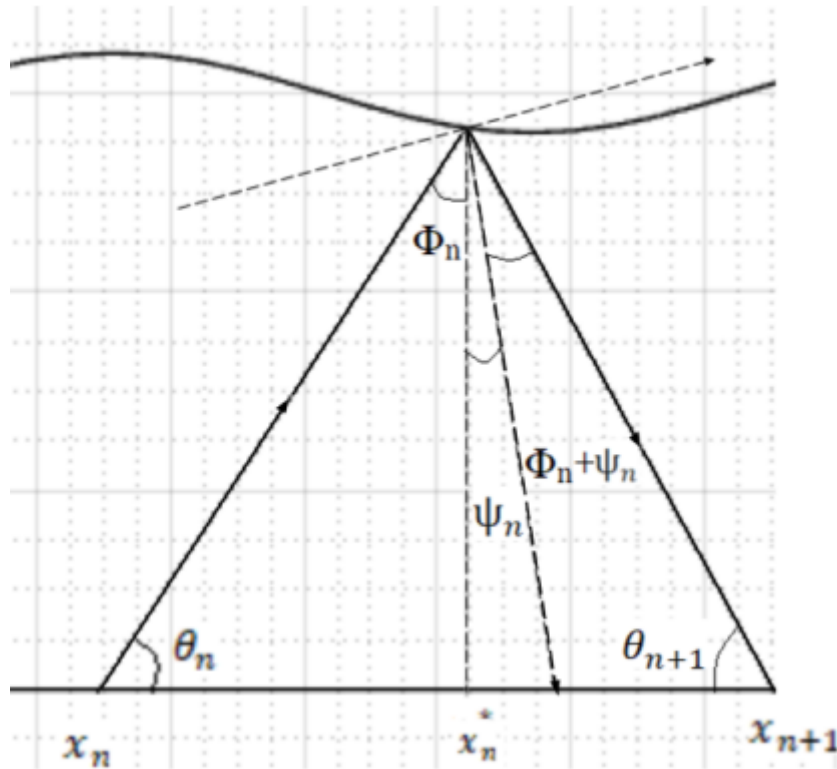


Figura 4 – Detalhamento da trajetória do feixe antes e após a reflexão com as fronteiras do guia de ondas

corrugada. Além disso, o ângulo θ_n é dado por

$$\theta_{n+1} = \theta_n - 2\psi_n, \quad (3)$$

sendo ψ_n a inclinação da superfície corrugada em $x = x_n^*$ obtido através da $\tan(\psi_n(x)) = dy(x)/dx = -dk \sin(x_n^*)$. Cabe ressaltar que x_n^* pode ser obtido apenas numericamente, através da solução da equação 1.

No estudo realizado, serão assumidos valores pequenos para a amplitude de corrugação d , desse modo, uma versão simplificada do modelo será considerada. Inicialmente, serão utilizadas duas aproximações para o modelo. Assumindo que a superfície possui uma corrugação muito pequena, tem-se que, $y_0 + d \cos(kx_n^*) \approx y_0$. Neste caso, considerando o limite da corrugação da superfície, utiliza-se $\tan(\psi_n) \approx \psi_n$ (RABELO, 2007).

Assumindo as aproximações acima, percebe-se que quando a amplitude da corrugação é nula, o sistema é integrável e para esta situação somente linhas paralelas são vistas no espaço de fases. Porém, para $d \neq 0$, o sistema é não integrável e uma estrutura mista no espaço de fases pode ser observada, contendo ilhas KAM circundadas por um mar caótico que é delimitado por um conjunto de curvas invariantes *spanning*. Com isso, tem-se que a transição de integrável para não integrável depende do parâmetro de controle d (LEONEL, 2007). É interessante definir algumas variáveis apropriadas, sendo elas: $\delta = d/y_0$, $\gamma_n = \theta_n/k$ e $X_n = kx_n/y_0$. A partir de então, utilizando essas novas variáveis, pode-se escrever o mapa que descreve simplificada o comportamento dinâmico do sistema, conforme a

equação 4 (RABELO, 2008)

$$T : \begin{cases} X_{n+1} = \left[X_n + \frac{1}{\gamma_n} + \frac{1}{\gamma_{n+1}} \right] \bmod 2\pi \\ \gamma_{n+1} = \gamma_n + 2\delta \operatorname{sen} \left[X_n + \frac{1}{\gamma_n} \right] \end{cases} \quad (4)$$

É possível notar que a variável δ será o parâmetro de controle responsável por caracterizar a intensidade da não-linearidade. A Figura 5 apresenta o resultado obtido através da iteração do mapeamento 4 (RABELO, 2008). Conforme pode ser visto, o espaço de fases é misto, composto por um grande mar de caos delimitado por duas curvas invariantes *spanning* (positiva e negativa) além de ilhas KAM (RABELO, 2008). O processo utilizado para obtenção desta figura está descrito na seção 5.2.

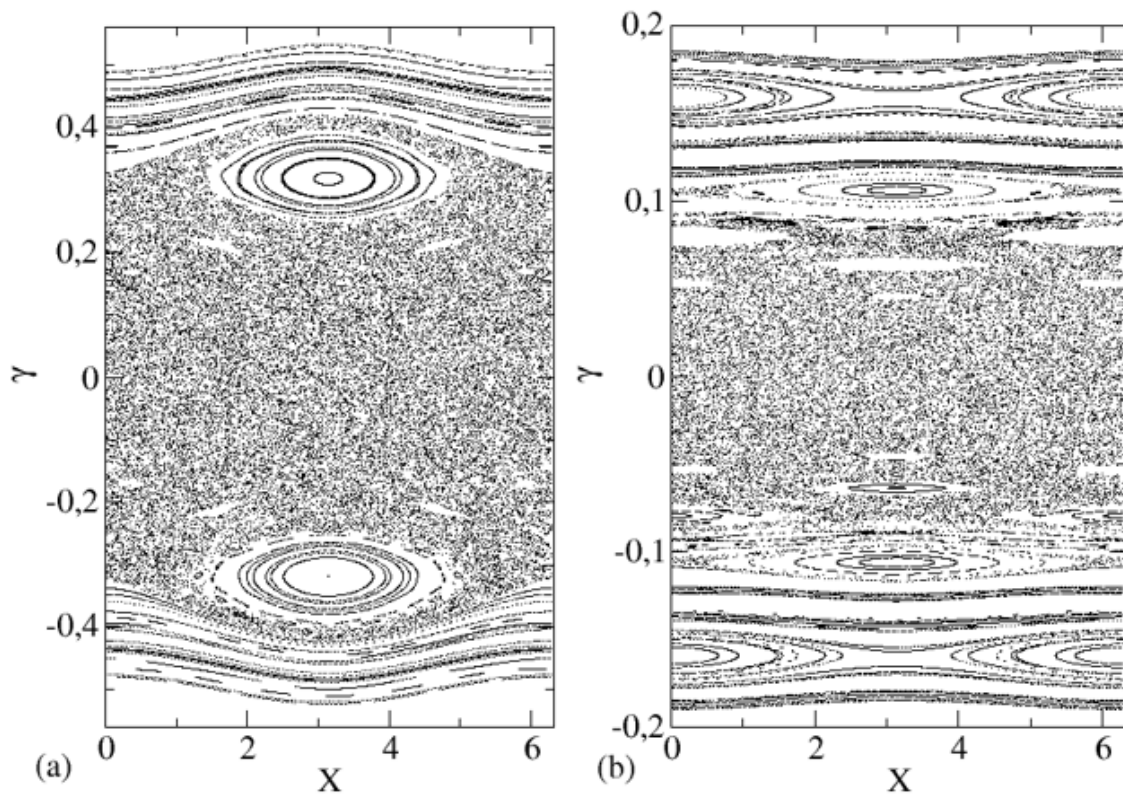


Figura 5 – Espaço de fases gerado por 10^4 iterações do mapa 4 utilizando os parâmetros de controle: (a) $\delta = 2 \times 10^{-2}$ e (b) $\delta = 2 \times 10^{-3}$

4 INVESTIGAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE ÓRBITAS CAÓTICAS UTILIZANDO OS EXPOENTES DE LYAPUNOV

Neste Capítulo, apresentaremos os cálculos aplicados para obtenção dos expoentes de Lyapunov em relação ao mapeamento que descreve a dinâmica do guia de ondas periodicamente corrugado. Em casos bidimensionais, os expoentes de Lyapunov para órbitas caóticas podem ser obtidos de acordo com a seguinte expressão (LEONEL, 2019; PERRE, 2017)

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^n| \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

sendo $\Lambda^{(n)}$ os autovalores da matriz $M = \prod_{i=1}^n J_i(\gamma, X)$ e J_i a matriz Jacobiana do mapeamento evoluída ao longo da órbita (PERRE, 2017). Nos cálculos dos expoentes de Lyapunov se utiliza o método de triangulação das matrizes, sendo a matriz Jacobiana dada por (PERRE, 2017):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial(X_{n+1})}{\partial X_n} & \frac{\partial(X_{n+1})}{\partial \gamma_n} \\ \frac{\partial(\gamma_{n+1})}{\partial X_n} & \frac{\partial(\gamma_{n+1})}{\partial \gamma_n} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

As derivadas parciais que compõem os elementos da matriz Jacobiana, são:

$$\frac{\partial(X_{n+1})}{\partial X_n} = 1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(X_{n+1})}{\partial \gamma_n} = -\frac{1}{\gamma^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\gamma_{n+1})}{\partial X_n} = 2\delta \cos\left(X_n + \frac{1}{\gamma_n}\right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\gamma_{n+1})}{\partial \gamma_n} = 1 - 2\delta \cos\left(X_n + \frac{1}{\gamma_n}\right) \left[\frac{1}{\gamma^2}\right]. \quad (6)$$

Substituindo os resultados das equações 3, 4, 5 e 6 em 2, temos que:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\gamma^2} \\ 2\delta \cos\left(X_n + \frac{1}{\gamma_n}\right) & 1 - 2\delta \cos\left(X_n + \frac{1}{\gamma_n}\right) \left[\frac{1}{\gamma^2}\right] \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Com isso, o determinante da matriz Jacobiana pode ser obtido através da diferença entre o produto da diagonal principal e secundária:

$$\begin{aligned}
 \det(J) &= 1 \times \left[1 - 2\delta \cos \left(X_n + \frac{1}{\gamma_n} \right) \left[\frac{1}{\gamma^2} \right] \right] - 2\delta \cos \left(X_n + \frac{1}{\gamma_n} \right) \times \left[-\frac{1}{\gamma^2} \right], \\
 &= 1 - \frac{2\delta}{\gamma^2} \cos \left(X_n + \frac{1}{\gamma_n} \right) + \frac{2\delta}{\gamma^2} \cos \left(X_n + \frac{1}{\gamma_n} \right), \\
 &= 1.
 \end{aligned} \tag{8}$$

O teorema de Liouville estabelece que quando o determinante da matriz Jacobiana é ± 1 o sistema é caracterizado como conservativo, dessa forma o espaço de fases é preservado. Isso significa que para regiões de forma geométrica distintas dentro do espaço de fases, a área dessas regiões não serão alteradas (CARNEIRO, 2018).

Para a construção da Figura 6, foram realizadas 5×10^8 de iterações para garantir a convergência dos expoentes de Lyapunov. Foram utilizadas cinco pares de condições iniciais distintas, conforme destacado na Figura 6. Embora em alguns pontos as curvas apresentem certa oscilação, é possível notar claramente que todas convergem para um valor positivo, sendo o valor médio $\bar{\lambda} = 1,19(3)$ com desvio padrão 3. Portanto, como os expoentes de Lyapunov são positivos, nota-se a existência de órbitas caóticas.

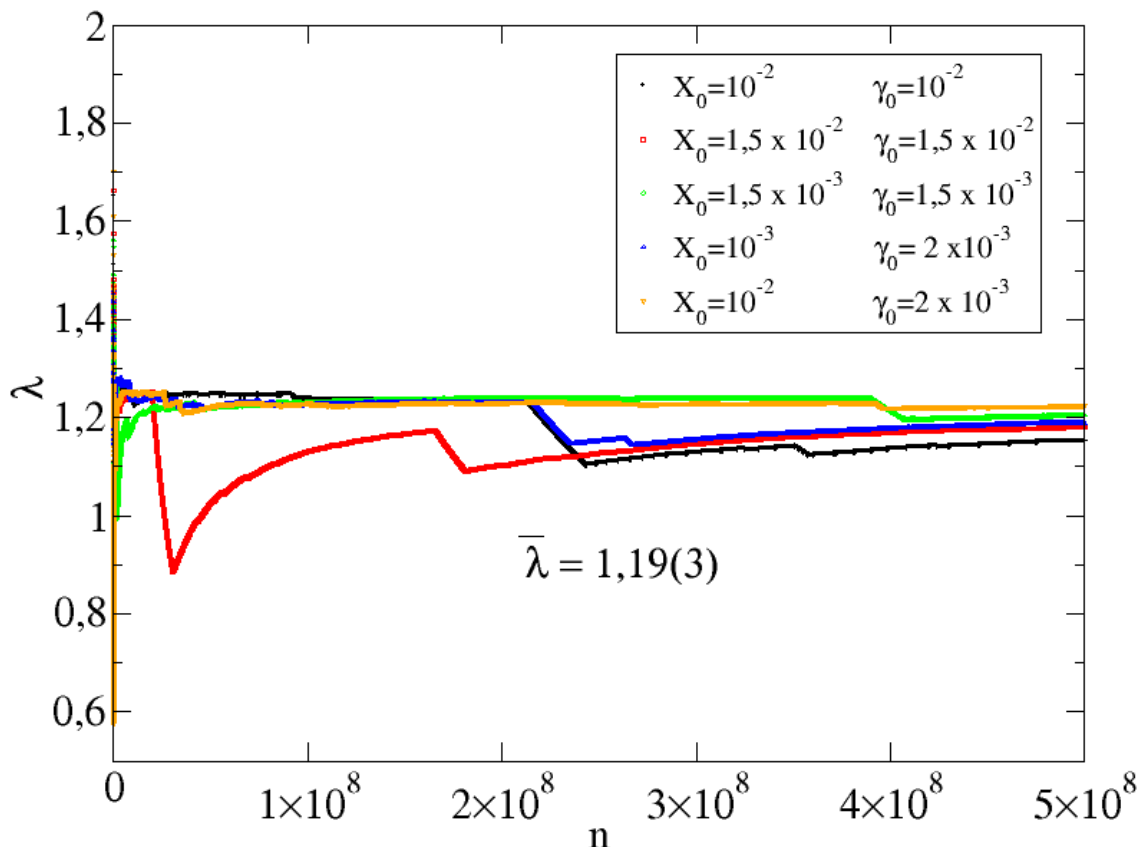


Figura 6 – Convergência dos expoentes positivos de Lyapunov obtidos através da evolução de cinco órbitas para o modelo do guia de ondas periodicamente corrugado. O parâmetro de controle utilizado foi: $\delta = 10^{-2}$

5 LOCALIZAÇÃO DAS CURVAS INVARIANTES *SPANNING*

5.1 OBTENÇÃO ANALÍTICA DA POSIÇÃO DA PRIMEIRA CURVA INVARIANTE *SPANNING*

Apresentado o modelo utilizado para descrever o guia de ondas periodicamente corrugado, partiremos para o método que será empregado para localizar a posição das curvas invariantes *spanning*, que consiste em realizar a conexão entre o modelo do guia de ondas e o mapa padrão, apresentado na equação 1, muito utilizado para caracterizar a dinâmica de rotores discretos (FEUDEL et al., 1996).

$$S_{ms} : \begin{cases} I_{n+1} = [I_n + K \text{sen}(\theta_n)] \pmod{2\pi} \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \pmod{2\pi} \end{cases} . \quad (1)$$

Nesse mapa o parâmetro de controle é representado por K , além disso as duas variáveis dinâmicas são definidas dentro do intervalo 0 a 2π . Esse modelo possui uma interessante propriedade pelo fato de apresentar a transição de caos local para global condicionada pelo parâmetro de controle K (LEONEL, 2019). O ponto crítico que marca esta mudança de comportamento é $K_c = 0.9716\dots$ (LIEBERMAN; LICHTENBERG, 1992). Dessa forma, no caso em que $K < K_c$ o espaço de fases apresenta curvas invariantes *spanning* circundando diferentes partes do espaço de fases (LEONEL, 2019). No entanto, para $K > K_c$ todas as curvas invariantes *spanning* são destruídas e o mar de caos se difunde sobre o espaço de fases (LEONEL, 2019).

O espaço de fases gerado pela iteração da equação 1 considerando 4 diferentes parâmetros de controle, sendo eles: (a) $K = 0,5$; (b) $K = 0,75$; (c) $K = 0,97$ e (d) $K = 2$, está apresentado na Figura 7.

Vemos que para $K > K_c$, conforme a figura Figura 7(d), as curvas invariantes não existem no espaço de fases. O processo analítico utilizado na conexão do mapa padrão com o guia de ondas periodicamente corrugado consiste basicamente em supor que próximo as curvas invariantes *spanning*, as quais limitam a dimensão do mar de caos, o ângulo de reflexão pode ser escrito como

$$\gamma_{n+1} \approx \gamma^* + \Delta_{\gamma_{n+1}} , \quad (2)$$

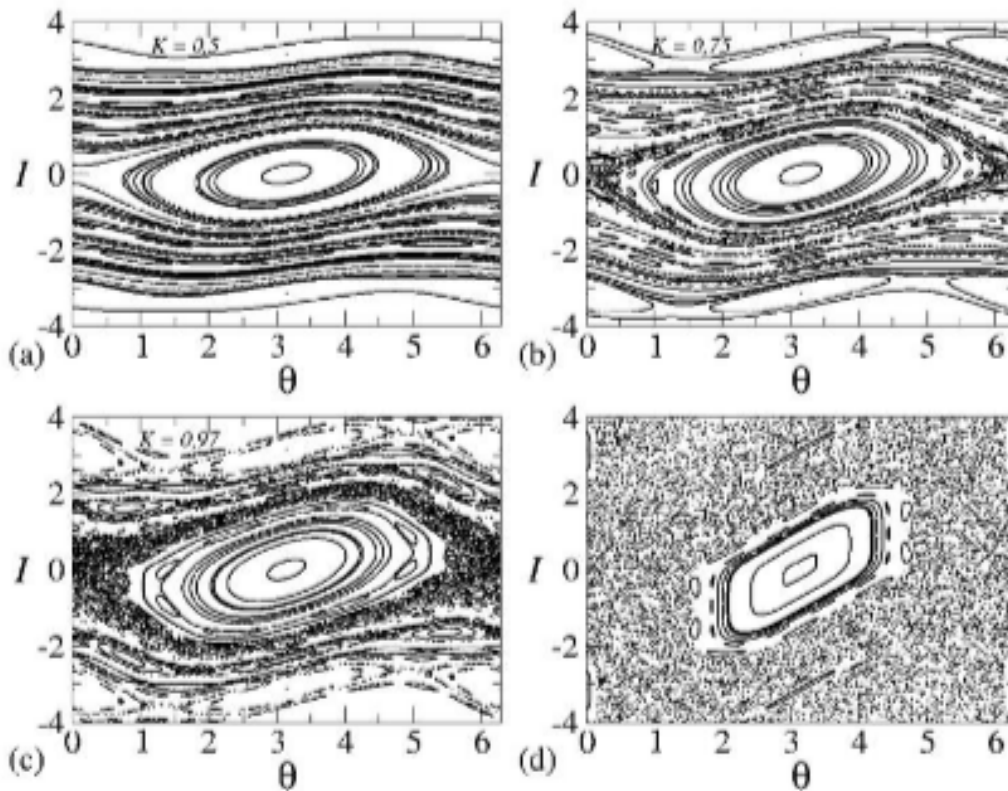
onde, γ^* é um valor típico do ângulo de reflexão ao logo da curva invariante *spanning* e $\Delta_{\gamma_{n+1}}$ é uma pequena perturbação do ângulo (RABELO, 2008). Definindo $Z_n = X_n + 1/\gamma_n$, podemos reescrever a primeira equação do mapeamento 4 apresentado no Capítulo 3, como

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{2}{\gamma_{n+1}} . \quad (3)$$

Usando a equação 2, podemos reescrever a equação 3 como

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{2}{\gamma^*} \left[1 + \frac{\Delta_{\gamma_{n+1}}}{\gamma^*} \right]^{-1} . \quad (4)$$

Figura 7 – Espaço de fases obtido para o mapa padrão adotando os seguintes parâmetros de controle: (a) $K = 0,5$; (b) $K = 0,75$; (c) $K = 0,97$ e (d) $K = 2$



Fonte: Imagem retirada de (LEONEL, 2019).

Expandindo a equação 4 em série de Taylor, tem-se que

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{2}{\gamma^*} \left[1 - \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\gamma^*} + O\left(\left(\frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\gamma^*}\right)^2\right) \right]. \quad (5)$$

Considerando apenas os termos de primeira ordem, é possível reescrever a equação 5 como

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{2}{\gamma^*} \left[1 - \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\gamma^*} \right]. \quad (6)$$

A segunda equação do mapeamento 4 que descreve o modelo do guia de ondas periodicamente corrugado pode ser reescrita como

$$\gamma^* + \Delta\gamma_{n+1} = \gamma^* + \Delta\gamma_n + 2\delta \sin(Z_n). \quad (7)$$

Multiplicando ambos os lados da equação 7 por $-2/\gamma^{*2}$ e somando $2/\gamma^*$ em ambos os lados, encontramos a seguinte equação

$$I_{n+1} = -\frac{2\Delta\gamma_{n+1}}{\gamma^{*2}} + \frac{2}{\gamma^*}. \quad (8)$$

Introduzindo agora $\phi_n = Z_n + \pi$, pode-se reescrever o mapeamento 4 do Capítulo 3 como

$$S_{ms} : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + \left(\frac{4\delta}{\gamma^{*2}}\right) \text{sen}(\phi_n) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + I_{n+1} \end{cases} . \quad (9)$$

Nesse ponto é possível notar que o mapa padrão descrito pela equação 1 e o mapeamento 9 são equivalentes, existindo um parâmetro de controle efetivo K_{eff} descrito por (LEONEL, 2019)

$$K_{eff} \approx \frac{4\delta}{\gamma^{*2}} . \quad (10)$$

Com isso, a localização da primeira curva invariante *spanning* deverá ocorrer na transição de caos local para global em $K_{eff} \approx 0.971\dots$, de acordo com a equação abaixo (RABELO, 2008)

$$\gamma^* \approx \pm 2 \sqrt{\frac{\delta}{0,971\dots}} \approx \pm 2,0296 \times \delta^{0,5} . \quad (11)$$

Dessa forma, é possível notar que a dimensão mar de caos definida por ambos os lados positivo e negativo, sendo proporcional a $\sqrt{\delta}$ (RABELO, 2008).

5.2 OBTENÇÃO DA POSIÇÃO DA PRIMEIRA CURVA INVARIANTE *SPANNING* ATRAVÉS DE SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção, apresentaremos os procedimentos computacionais utilizados no estudo do guia de ondas periodicamente corrugado, permitindo explorar a dinâmica do sistema. A primeira parte desenvolvida foi direcionada à implementação de uma rotina que fosse capaz de gerar o espaço de fases descrito pelo mapeamento 4 apresentado no Capítulo 3. Nesse momento, apenas uma condição inicial e 10^6 iterações foram utilizadas para gerar cada um dos espaços de fases apresentados na Figura 8.

No caso da Figura 8(a) a seguinte condição inicial foi utilizada: $\gamma_0 = 10^{-3}$ e $X_0 = 10^{-3}$, já o parâmetro de controle foi fixado em $\delta = 2 \times 10^{-2}$.

A Figura 8(b) foi plotada a partir de uma condição inicial extraída da região do espaço de fases Figura 8(a) que apresenta comportamento regular. Esses valores são: $\gamma_0 = 4,07122$ e $X_0 = 0,330537$, assumindo o parâmetro de controle $\delta = 2 \times 10^{-2}$.

Já na Figura 8(c) foi utiliza a condição inicial: $\gamma_0 = 10^{-3}$ e $X_0 = 10^{-3}$ e o parâmetro de controle foi fixado em $\delta = 2 \times 10^{-3}$.

Por fim, a Figura 8(d) foi construída similarmente a Figura 8(b), no entanto a condição inicial foi retirada de uma região regular da Figura 8(c). Os valores selecionados foram: $\gamma_0 = 3,18417$ e $X_0 = 0,0634491$ e $\delta = 2 \times 10^{-3}$.

Através dessa simulação numérica inicial, foi possível observar a influência do parâmetro de controle, evidenciada pela diferença entre os mapas Figura 8(a) e Figura 8(c). Além disso, aplicando condições iniciais de regiões onde o caos não está difundido no mapa que modela o guia de ondas periodicamente corrugado, pode-se notar detalhadamente a existência de órbitas periódicas nessa

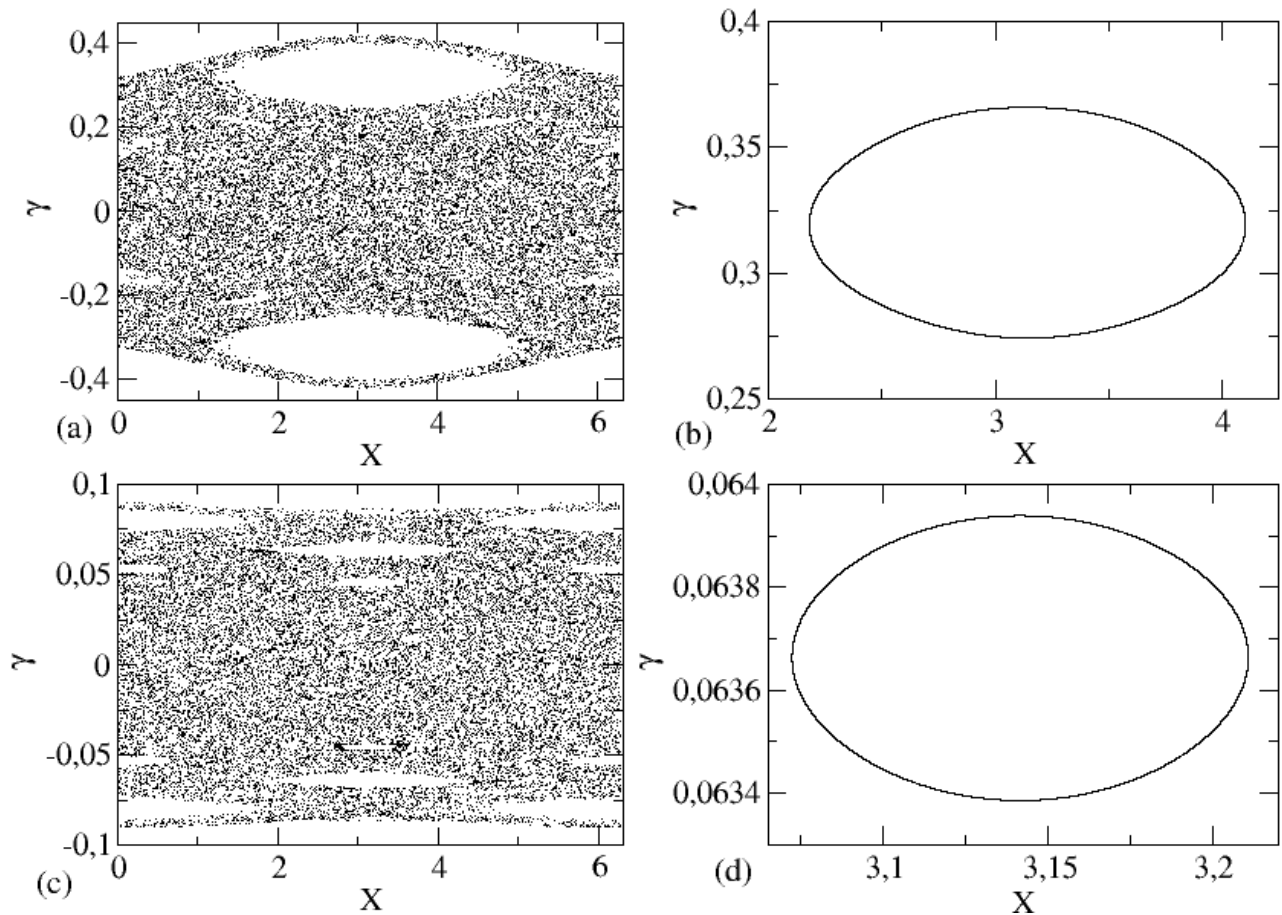


Figura 8 – Espaço de fases do modelo simplificado do guia de ondas para os parâmetros de controle: (a),(b) $\delta = 2 \times 10^{-2}$ e (c),(d) $\delta = 2 \times 10^{-3}$

situação, no entanto cabe salientar que uma pequena variação nas condições iniciais pode levar a comportamento que se afastam exponencialmente, caracterizando o caos.

Posteriormente, uma nova rotina foi desenvolvida, similarmente a apresentada acima, porém, ao invés de um uma condição inicial foram empregadas 250 condições geradas dinamicamente e iteradas 10^4 , para ambos os parâmetros de controle: $\delta = 2 \times 10^{-2}$ e $\delta = 2 \times 10^{-3}$. O resultado dessa simulação é a Figura 5 que está apresentada no Capítulo 3. A geração das condições foi implementada de acordo com três parâmetros, sendo eles: o valor inicial e final para a variável dinâmica γ além do passo utilizado. O mesmo procedimento foi utilizado para a variável dinâmica X . Nessas circunstâncias um espaço de fases mais complexo foi obtido, contendo ilhas periódicas além de um grande mar de caos circundado por curvas invariantes *spanning*.

Nesse sentido, o objetivo da próxima simulação foi de identificar graficamente a localização da primeira curva invariante *spanning* positiva e negativa conforme a Figura 9(a) e a Figura 9(b). O procedimento utilizado consistiu em obter a estimativa dos valores máximos e mínimos da curva invariante *spanning* para a variável dinâmica γ , utilizando os parâmetros de controle $\delta = 2 \times 10^{-2}$ e $\delta = 2 \times 10^{-3}$. Essa combinação de valores são justamente os pontos que descrevem a curva invariante. Utilizando uma ferramenta de plotagem adequada foi possível sobrepor esses pontos com a Figura 5 e obter o espaço de fases apresentado na Figura 9, onde as curvas invariantes aparecem destacadas em

vermelho.

Na sequência, uma nova simulação numérica foi desenvolvida a fim de obter uma expressão matemática que descrevesse a localização das curvas invariantes *spanning*. Utilizando a rotina desenvolvida para construção da Figura 9, realizou-se a obtenção da estimativa dos valores máximos e mínimos da variável dinâmica γ respectivos a trinta e seis diferentes valores para o parâmetro de controle, nos seguintes intervalos: $\delta = 1 \times 10^{-5}$ até $\delta = 9 \times 10^{-5}$, com passo de 10^{-5} ; $\delta = 1 \times 10^{-4}$ até $\delta = 9 \times 10^{-4}$, com passo de 10^{-4} ; $\delta = 1 \times 10^{-3}$ até $\delta = 9 \times 10^{-3}$, com passo de 10^{-3} e $\delta = 1 \times 10^{-2}$ até $\delta = 9 \times 10^{-2}$, com passo de 10^{-2} . Em posse dessa base de dados, foi possível plotar um gráfico de γ_{max} por δ , com escala logarítmica em ambos os eixos. Utilizando uma lei de potência dada por: $\gamma_{max} = A \times \delta^\beta$, onde A é o coeficiente da lei de potência, δ o parâmetro de controle do mapa que descreve o guia de ondas e β o expoente da lei potência, foi possível aproximar a curva tracejada composta pela interligação dos círculos, através da seguinte expressão:

$$\gamma_{max} = A \times \delta^\beta = 2,6683 \times \delta^{0,529(4)} . \quad (12)$$

Comparando o resultado original acima com a equação 11 apresentada na seção 5.1 de acordo com (RABELO, 2008), pode-se notar grande proximidade entre os resultados, sendo as diferenças numéricas atribuídas à pequenas flutuações quanto aos pontos utilizados. Dessa forma, pôde-se validar a simulação desenvolvida visando a obtenção da primeira curva invariante *spanning*.

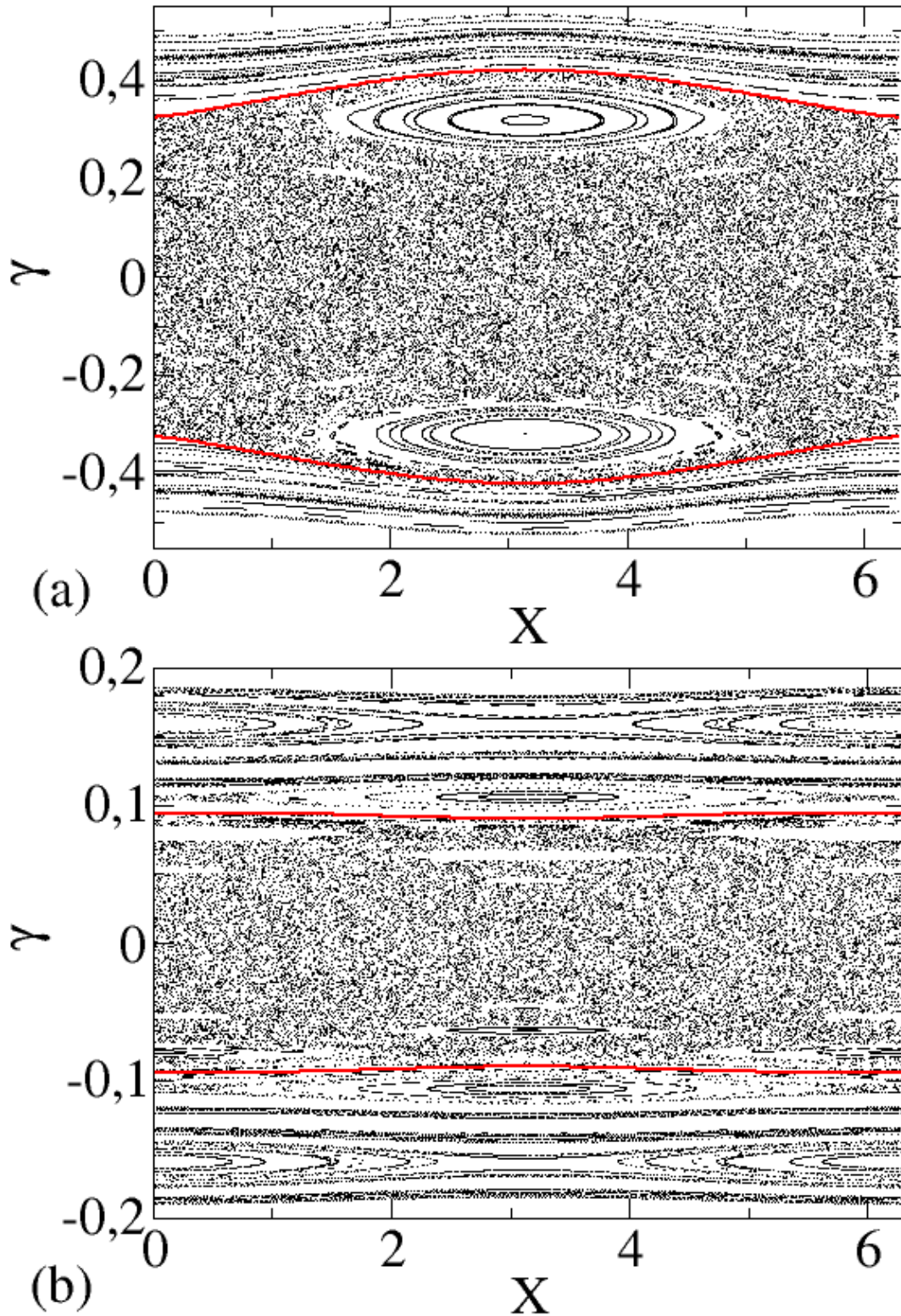


Figura 9 – Localização da primeira curva invariante no guia de ondas, utilizando os parâmetros de controle: (a) $\delta = 2 \times 10^{-2}$ e (b) $\delta = 2 \times 10^{-3}$

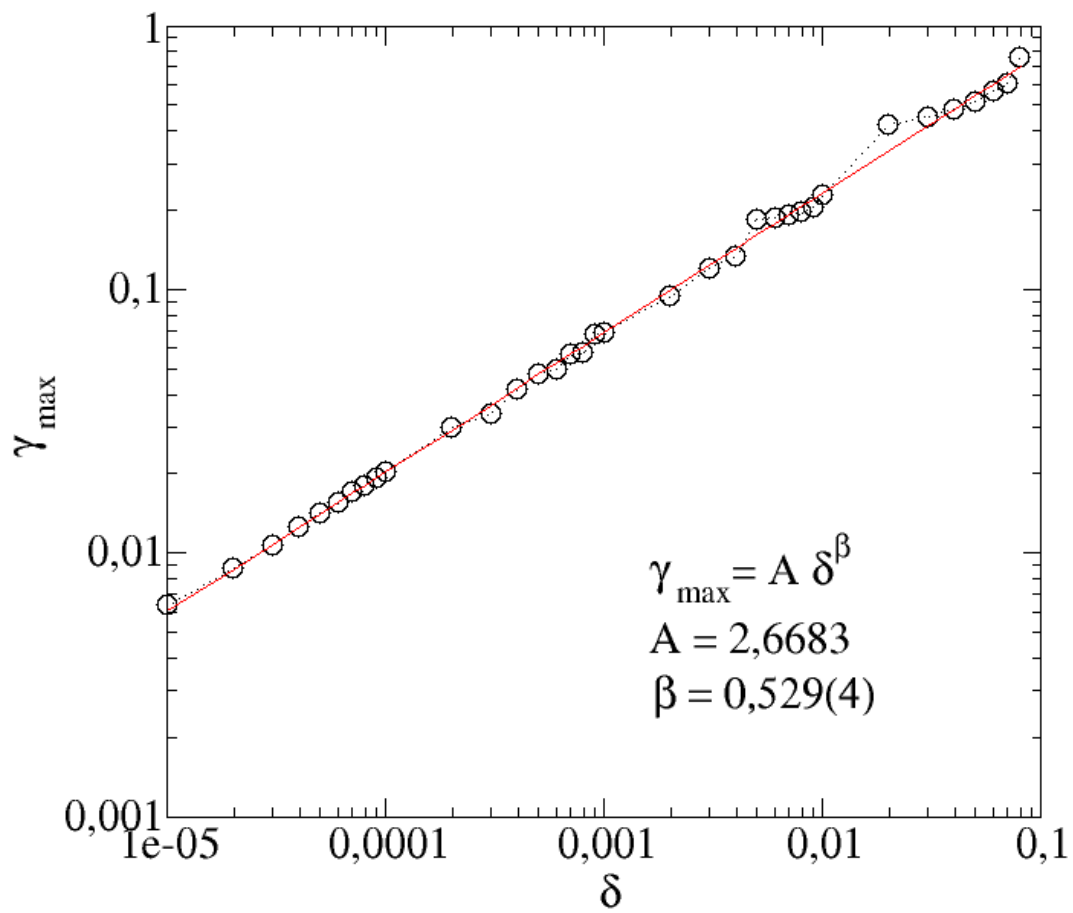


Figura 10 – Aproximação através de lei de potência para a equação que descreve a posição da primeira curva invariante *spanning*

6 CONCLUSÃO

O foco inicial do trabalho consistiu em realizar o estudo do comportamento reflexivo de um feixe de luz que incide entre duas superfícies, sendo uma delas lisa e outra periodicamente corrugada. Antes de partir para o desenvolvimento que descreve o comportamento do guia de ondas, foi necessário a realização de uma busca bibliográfica a fim de compreender conceitos fundamentais para a descrição de um sistema dinâmico não linear, como o proposto. A partir de então, utilizando uma abordagem geométrica e procedimentos matemáticos foi possível dar início ao desenvolvimento da caracterização do modelo através de uma mapa bidimensional, composto pelas variáveis dinâmicas X , γ e o parâmetro de controle δ , responsável por caracterizar a não linearidade.

Em seguida, através do cálculo dos expoentes de Lyapunov foi possível analisar o comportamento das órbitas caóticas, já que para isso ao menos um expoente deve ser positivo. No caso estudado, para as cinco condições iniciais utilizadas se chegou a convergência no valor médio $\bar{\lambda} = 1,19(3)$, conforme pode ser visto na Figura 6. Além disso, ao realizar o cálculo do determinante da matriz Jacobiana, chegamos ao valor unitário, mostrando que o sistema é conservativo e preserva o espaço de fases, conforme o teorema de Liouville.

Posteriormente, abordamos um método analítico visando obter a posição da primeira curva invariante *spanning*. Realizamos a conexão entre o mapa do guia de ondas e o mapa padrão amplamente conhecido na literatura. Esse modelo apresenta transição entre caos local e global de acordo com o parâmetro de controle K , sendo o ponto crítico $K_c = 0,9176\dots$. Quando $K < K_c$ o espaço de fases exibe curvas invariantes *spanning* delimitando as diferentes regiões do espaço de fases, no entanto em $K > K_c$ todas as curvas invariantes *spanning* são destruídas e o mar de caos se difunde por todo o espaço de fases. Utilizando esses fundamentos e aplicando um longo desenvolvimento analítico, foi possível reescrever o mapeamento e obter em seguida uma expressão que descreve a posição da primeira curva invariante, possuindo uma relação de proporcionalidade dada por $\sqrt{\delta}$, mostrando assim a influência do parâmetro de controle.

Além disso, desenvolvemos originalmente extensivas simulações numéricas para obtenção da primeira curva invariante *spanning*. Inicialmente uma rotina foi implementada em linguagem de programação Fortran a fim de gerar o espaço de fases correspondente ao mapa que descreve o modelo do guia de ondas, nesse caso, apenas uma condição inicial foi utilizada, no entanto, proporcionou importantes resultados, permitindo analisar a influência do parâmetro de controle δ e visualizar comportamentos regulares através de órbitas periódicas obtidas através da evolução de condições iniciais específicas. Aumentamos a complexidade da rotina ao utilizarmos 250 condições iniciais, produzindo um rico espaço de fases composto por ilhas periódicas e um grande mar de caos circundado por curvas invariantes *spanning*. Conseguimos então, apresentar graficamente a posição da primeira curva invariante positiva e negativa, no espaço de fases. E por fim, após a aquisição de um grande conjunto de dados, foi possível através do *software* Xmgrace, realizar uma aproximação por lei de potência e extrair a expressão correspondente a localização da primeira curva invariante *spanning*. Comparando o resultado analítico com o obtido numericamente, é possível notar a grande proximidade

alcançada, validando dessa forma toda a simulação desenvolvida. Com isso, podemos notar como a utilização correta de recursos computacionais pode proporcionar dinamismo e precisão na obtenção de resultados sólidos.

Portanto, ao longo desse trabalho foi possível explorar inúmeros conceitos relacionados a sistemas dinâmicos, comportamentos caóticos e regulares, tornando evidente a aplicabilidade e dimensão dessa área em inúmeros seguimentos, como engenharia, biologia, economia, eletrônica/elétrica dentre tantos outros.

REFERÊNCIAS

- AGUIAR, M. A. M. de. Caos em sistemas clássicos conservativos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 16, p. 1 – 4, 1994.
- BOLTT, E. M. **Chaos Control Theory and Applications**. Potsdam, Brandemburgo - Alemanha: Springer, 2003.
- CARNEIRO, B. P. **Análise de escala no mapa padrão dissipativo descontínuo**. Rio Claro, São Paulo - Brasil: [s.n.], 2018.
- COSTA, D. R. da. **Transporte, escape de partículas e propriedades dinâmicas de mapeamentos não lineares**. Tese (Doutorado) — USP, São Paulo, São Paulo - Brasil, 2014.
- FEUDEL, U. et al. Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors. **Phys. Rev.**, v. 54, n. 71, p. 71 – 81, 1996.
- FEY, F.; ROSA, J. A. da. Teoria do caos: a ordem na não-linearidade. **Universo Acadêmico, Taquara**, v. 5, n. 1, 2012.
- FILDER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. do. **Caos: uma introdução**. São Paulo, São Paulo - Brasil: Edgard Blücher, 1994.
- FÍSICA, P. luz da. **Dinâmica não linear e caos**. 2010. Disponível em: <<https://cftc.ciencias.ulisboa.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo1/topico2.php>>.
- LEONEL, E. D. Corrugated waveguide under scaling investigation. **Physical Review Letters**, v. 98, n. 114102, p. 1 – 4, 2007.
- LEONEL, E. D. **Invariância de escala em sistemas dinâmicos não lineares**. São Paulo, São Paulo - Brasil: Editora Blucher, 2019.
- LIEBERMAN, A. J.; LICHTENBERG, M. A. **Regular and Chaotic Dynamics**. New York, New York - States United: Springer Verlag, 1992.
- PERRE, R. M. **Propriedades de transporte caótico em um rotor pulsado dissipativo descontínuo**. São João da Boa Vista, São Paulo - Brasil: [s.n.], 2017.
- RABELO, A. F. Finding invariant tori in the problem of a periodically corrugated waveguide. **Brazilian Journal of Physics**, v. 38, n. 1, 2007.
- RABELO, A. F. **Propriedades de escala de um guia de ondas periodicamente corrugado**. Rio Claro, São Paulo - Brasil: [s.n.], 2008.
- RAMOS, L. C. N. **Propriedades dinâmicas e leis de escala em mapeamentos unidimensionais discretos: aplicações em circuitos**. São João da Boa Vista, São Paulo - Brasil: [s.n.], 2019.
- SANDRI, M. Numerical calculation of lyapunov exponents. **The Mathematica Journal**, v. 6, n. 3, p. 78 – 84, 1996.
- SOUSA, D. P. de; KLAFKE, J.; BASSINI, A. M. **Teoria do Caos**. 2020. Disponível em: <<https://www.parquecientec.usp.br/passeio-virtual/matematica/teoria-do-caos>>.