

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
CAMPUS EXPERIMENTAL DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA  
BACHARELADO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA

ANTONIO LUCAS DE OLIVEIRA

Soluções preliminares para missões espaciais no sistema Terra-Lua

SÃO JOÃO DA BOA VISTA

2021

Antonio Lucas de Oliveira

Soluções preliminares para missões espaciais no sistema Terra-Lua

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" como requisito para obtenção de título de Bacharel em Engenharia Aeronáutica.

Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Priscilla Andressa de Sousa Silva

SÃO JOÃO DA BOA VISTA

2021

O48s Oliveira, Antonio Lucas de  
Soluções preliminares para missões espaciais no sistema Terra-Lua  
/ Antonio Lucas de Oliveira. -- São João da Boa Vista, 2021  
48 f. : il., tabs.

Trabalho de conclusão de curso ( - ) - Universidade Estadual  
Paulista (Unesp), Câmpus Experimental de São João da Boa Vista,  
São João da Boa Vista  
Orientadora: Priscilla Andressa de Sousa Silva

1. Astrodinâmica. 2. Órbitas. 3. Problema de muitos corpos. I.  
Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Câmpus  
Experimental de São João da Boa Vista. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
**CÂMPUS EXPERIMENTAL DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA**  
**GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**SOLUÇÕES PRELIMINARES PARA MISSÕES ESPACIAIS NO SISTEMA**  
**TERRA-LUA**

Aluno: Antonio Lucas de Oliveira

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Priscilla Andressa de Sousa Silva

Banca Examinadora:

- Priscilla Andressa de Sousa Silva (Orientadora)
- Luiz Alberto de Paula (Examinador)
- Rita de Cássia Domingos (Examinadora)

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no prontuário do aluno (Expediente nº 040/2021)

São João da Boa Vista, 15 de dezembro de 2021

Aos meus pais Antonio e Adriana  
e à minha irmã Ana, obrigado por tudo.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pelo dom da vida e por ter iluminado todo o meu caminho.

Agradeço à minha família, aos meus pais, Antonio Luis e Adriana e à minha irmã Ana Luisa, por todo amor, carinho, paciência e ensinamentos. Obrigado por todo apoio de vocês, e, também, por compreenderem as minhas ausências durante esse ciclo. Não existem palavras suficientes para demonstrar toda a minha gratidão à vocês, sem vocês eu não teria chegado até aqui.

Agradeço à Prof<sup>ª</sup>. Priscilla, minha orientadora e amiga. Obrigado pelas oportunidades, pelo apoio, pela convivência e pelos conselhos, todos fundamentais, não só para a elaboração deste trabalho, mas, também, valiosos para o meu desenvolvimento profissional e pessoal.

Agradeço aos professores e colaboradores da UNESP de São João da Boa Vista, por todo o comprometimento e dedicação, que tornaram o ambiente da universidade o mais agradável e produtivo possível.

Agradeço, também, aos meus grandes amigos, Amanda, Felipe, Lucas e Marcos, por compartilharem comigo diversos momentos felizes, e outros nem tanto, durante estes cinco anos de graduação. Obrigado pela amizade e pelo carinho de vocês. Que os próximos anos fortaleçam, ainda mais, a amizade que nos une.

*“Eis o meu segredo.  
É muito simples: só se vê bem com o coração.  
O essencial é invisível aos olhos.”  
(Antoine de Saint-Exupéry)*

## RESUMO

Este trabalho objetivou o cálculo de estimativas do consumo de energia para diferentes perfis de missão no sistema Terra-Lua, utilizando como base a modelagem matemática proporcionada pelo Problema Restrito de Três Corpos Circular Planar (PR3CCP). A partir da detecção de trajetórias do tipo trânsito nesse modelo, foram determinadas condições de contorno para resolver as equações do PR3CCP por meio de um Problema de Valor de Contorno. Após uma transformação de referencial e considerando o Modelo de Dois Corpos, trechos das soluções obtidas foram aproximados por elipses osculantes. Por fim, foram estimados os incrementos de velocidade necessários para a realização de manobras orbitais levando em conta três perfis de missão espaciais. Os resultados preliminares obtidos se mostraram satisfatórios e coerentes com os encontrados na literatura. Contudo, faz-se necessária uma investigação mais aprofundada a fim de validar a metodologia proposta.

**PALAVRAS-CHAVE:** Astrodinâmica, Órbitas, Problema de muitos corpos.



## **ABSTRACT**

The aim of this work was to estimate the energy consumption needed for different mission profiles in the Earth-Moon system, using the mathematical framework provided by the Planar Circular Restricted Three-Body Problem (PCR3BP). Starting with the detection of transit-type trajectories in this model, boundary conditions to solve the PR3CCP by means of a Boundary Value Problem were determined. Then, using a transformation of variables and considering the Two-Body Model, portions of the solutions were approximated by oscillating ellipses. Finally, velocity increments to perform orbital maneuvers were estimated, considering three mission profiles. The preliminary results are satisfactory and consistent with those found in the literature. However, further investigation is needed to validate the proposed methodology.

**KEYWORDS:** Astrodynamics, Orbits, Many-body problem.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1	Coordenadas fixas (sideral) e rotacionais (sinódico).	15
Figura 2.2	Pontos de equilíbrio do PR3CCP no referencial sinódico para $\mu = 0, 1$ .	19
Figura 2.3	Representação das quatro primeiras configurações das regiões de Hill.	21
Figura 2.4	Geometria de uma Órbita Elíptica.	21
Figura 2.5	Transferência de Hohmann entre duas órbitas elípticas.	23
Figura 3.1	Possíveis posições $(x, y)$ selecionadas como parte das condições iniciais.	30
Figura 4.1	Trajatória obtidas do tipo Trânsito.	37
Figura 4.2	Condições de contorno selecionadas.	38
Figura 4.3	Trajatória obtidas a partir do Problema de Valor de Contorno.	39
Figura 4.4	Trajatória 1 - Referencial Sideral em Variáveis Físicas.	40
Figura 4.5	Trajatória 2 - Referencial Sideral em Variáveis Físicas.	40
Figura 4.6	Trajatória 3 - Referencial Sideral em Variáveis Físicas.	40
Figura 4.7	Trechos selecionados a partir da primeira rodada.	41
Figura 4.8	Trechos selecionados a partir da segunda rodada.	41
Figura 4.9	Trecho selecionado a partir da terceira rodada.	42
Figura 4.10	Representação gráfica de um perfil de missão completo.	44
Figura 4.11	Órbita de Lyapunov e Trajetória resultante da 3ª rodada.	45

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Parâmetros que identificam uma órbita elíptica. . . . .	22
Tabela 3.1 – Parâmetros Iniciais. . . . .	28
Tabela 3.2 – Valores máximos e mínimos de $x$ e $y$ que definem a grade de posições. . . . .	29
Tabela 3.3 – Parâmetros que definem os valores das Constantes de Jacobi utilizados. . . . .	31
Tabela 3.4 – Parâmetros para $\dot{x}$ . . . . .	31
Tabela 3.5 – Parâmetros temporais utilizados na integração das condições iniciais obtidas. . . . .	31
Tabela 4.1 – Condições Iniciais de Trajetórias do tipo Trânsito. . . . .	36
Tabela 4.2 – Condições de Contorno. . . . .	38
Tabela 4.3 – Características das Órbitas aproximadas. . . . .	42
Tabela 4.4 – Velocidades no Apocentro e no Pericentro para cada caso. . . . .	42
Tabela 4.5 – Velocidades no Apocentro e no Pericentro para cada caso. . . . .	43
Tabela 4.6 – Os módulos dos incrementos de velocidade - Primeira Rodada. . . . .	43
Tabela 4.7 – O somatório dos módulos dos incrementos de velocidade - Primeira Rodada. . . . .	43
Tabela 4.8 – Os módulos dos incrementos de velocidade - Segunda Rodada. . . . .	44
Tabela 4.9 – O somatório dos módulos dos incrementos de velocidade - Segunda Rodada. . . . .	44
Tabela 4.10–Os módulos dos incrementos de velocidade - Manobra Inicial. . . . .	45
Tabela 4.11–Os módulos dos incrementos de velocidade - Manobra Final. . . . .	46
Tabela 4.12–O somatório dos módulos dos incrementos de velocidade - Total. . . . .	46

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
GTO	<i>Geostationary Transfer Orbit</i>
LEO	<i>Low Earth Orbit</i>
PR3C	Problema Restrito de Três Corpos
PR3CCP	Problema Restrito de Três Corpos Circular Planar

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>14</b>
2.1	O Problema Restrito de Três Corpos Circular Planar	14
2.1.1	Definição	14
2.1.2	Equações de Movimento	14
2.1.3	Pontos Equilíbrio	19
2.1.4	Regiões de Movimento	19
2.2	Problema de Dois Corpos	20
2.3	Manobras Orbitais	22
2.3.1	Transferência de Hohmann	22
2.4	Métodos Numéricos	24
2.4.1	Método de Runge Kutta	24
2.4.2	Método de Newton para Sistemas Não Lineares	25
2.4.3	Método de Interpolação - <i>Spline</i> Cúbico	26
2.4.4	Método de <i>Shooting</i>	26
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>28</b>
3.1	Parâmetros Iniciais	28
3.2	Detecção Extensiva	28
3.3	Análise das Trajetórias Trânsito e Problema de Valor de Contorno	32
3.4	Transformação para Sistema de Coordenadas Sideral	32
3.5	Aproximação por uma Órbita Osculante	33
3.6	Cálculo dos Incrementos de Velocidade das Transferências Terra-Lua	34
3.7	Cálculo do Incremento de Velocidade para Injeção em Órbitas de Lyapunov	34
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>36</b>
4.1	Detecção Extensiva	36
4.2	Análise das Trajetórias Trânsito e Problema de Valor de Contorno	36
4.3	Transformação de Referencial	39
4.4	Órbitas Osculantes	40
4.5	Incrementos de Velocidade - Órbita Lunar	43
4.6	Incremento de Velocidade - Injeção em uma Órbita de Lyapunov	45
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>47</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>48</b>

## 1 INTRODUÇÃO

No início da exploração espacial, nas décadas de 50 e 60, o projeto das trajetórias utilizadas em missões espaciais foi baseado em modelos matemáticos que eram compatíveis com as ferramentas e com o conhecimento teórico disponíveis na época. Em particular, o Problema de Dois Corpos foi amplamente utilizado para modelar o comportamento de uma espaçonave, considerando sua interação gravitacional com um único corpo massivo por vez (BATE; MUELLER; WHITE, 1971; BROWN, 1998). Considerando a modelagem de dois corpos, a construção de trajetórias de transferência, tais como as usadas no programa Apollo para levar uma espaçonave da Terra à Lua, era baseada, de forma preliminar, na Transferência de Hohmann que permite estimar o consumo de combustível necessário para transferir a espaçonave entre duas órbitas circulares coplanares (BROWN, 1998).

Atualmente, o projeto de missões modernas como tem demandado a utilização de modelos alternativos, uma vez que as agências espaciais se propõem a estabelecer novos perfis de missão com objetivos ainda mais desafiadores, ao mesmo tempo que buscam minimizar o uso de combustível (KOON et al., 2006; YAGASAKI, 2004; KOON et al., 2001). Este é o caso, por exemplo, da missão *Lunar Gateway Station*, uma futura estação espacial planejada entre a Terra e Lua para ser um ponto de partida para eventuais viagens à Marte <sup>1</sup>, ou ainda, da missão *Terrestrial Planet Finder* da Nasa <sup>2</sup> e do Projeto Darwin <sup>3</sup> da ESA com o objetivo de buscar planetas semelhantes à Terra em torno de outras estrelas.

Tais iniciativas corroboram com a necessidade de se buscar novas soluções de baixa energia que viabilizem os elevados requisitos de missão. Estas missões modernas requerem que a dinâmica natural do problema seja utilizada tanto quanto possível, demandando a utilização de modelos mais refinados que descrevam as perturbações devidas à presença de um terceiro corpo ou de mais corpos simultaneamente (CONLEY, 1968; YAGASAKI, 2004). Neste contexto, o termo baixa energia refere-se à minimização do combustível dispendido para controlar uma espaçonave descrevendo uma trajetória que a leve de uma condição inicial prescrita até a condição final desejada (KOON et al., 2006).

Assim, nas últimas décadas, o modelo matemático conhecido como Problema Restrito de Três Corpos (PR3C) tem sido usado para projetar trajetórias de transferências espaciais (KOON et al., 2006; ZAZZERA; TOPPUTO; MASSARI, 2004; CAPUZZO-DOLCETTA; GIANCOTTI, 2013). O PR3C modela a dinâmica de um corpo de massa desprezível movendo-se sob a influência das forças gravitacionais oriundas de outros dois corpos de massas significativas, denominados primários (SZEBEHELY, 1967). Apesar de não ter soluções analíticas fechadas, este modelo apresenta um conjunto de soluções estacionárias, conhecidos como pontos de equilíbrios, que se mostraram muito adequadas para determinadas aplicações em astrodinâmica. As missões *Solar and Heliospheric Observatory* (SOHO) e *Advanced Composition Explorer* (ACE) são exemplos de projetos que utilizam os pontos de equilíbrios do PR3C (KOON et al., 2006).

Considerando as ideias apresentadas, o objetivo deste trabalho foi buscar soluções preliminares

<sup>1</sup> <<https://www.nasa.gov/gateway/overview>>

<sup>2</sup> <<https://science.nasa.gov/missions/tpf>>

<sup>3</sup> <[https://www.esa.int/Science\\_Exploration/Space\\_Science/Darwin\\_overview](https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Darwin_overview)>

para alguns perfis de missão de transferência no sistema Terra-Lua por meio da detecção de trajetórias do tipo trânsito do Problema Restrito de Três Corpos Circular Planar (PR3CCP) e de aproximações de dois corpos na saída da Terra e na chegada à Lua. De forma simplificada, uma trajetória ou órbita trânsito do PR3CCP é uma solução que possibilita utilizar os canais de transporte proporcionados pelas soluções invariantes relacionadas aos pontos de equilíbrio do modelo para transitar entre um primário e outro (CONLEY, 1968; KOON et al., 2006). No caso deste trabalho, o termo trânsito foi utilizado para nomear uma trajetória que conecta o entorno da Terra com o entorno da Lua. Assim, a partir da resolução numérica do PR3CCP, foram obtidas algumas trajetórias trânsito e, em seguida, pontos dessas trajetórias foram utilizados como condições de contorno para um Problema de Valor de Contorno que fornece arcos de transferência que se conectam a órbitas elípticas osculantes na partida e na chegada.

O gasto de energia para realização das transferências foi estimado com base nos incrementos de velocidade necessários para transferir a espaçonave entre as partes que compõem a trajetória de transferência completa, partindo da Terra e chegando à Lua. As manobras orbitais impulsivas foram modeladas utilizando uma metodologia baseada em Transferência de Hohmann, considerando transferências iniciadas em órbitas do tipo LEO (*Low Earth Orbits*) e GEO (Geostationary Equatorial Orbit). Consideram-se LEO, órbitas em torno da Terra com altitudes entre 150 km e 1.000 km, enquanto GEO refere-se às órbitas em torno da Terra com altitude de 35.786 km para na qual a espaçonave tem a mesma velocidade angular que a Terra (CURTIS, 2013). Além das transferências Terra-Lua mencionadas, também considerou-se o caso adicional de uma missão de estacionamento em torno de um dos pontos de equilíbrio do PR3CCP.

Vale ressaltar que o propósito deste trabalho foi investigar a factibilidade de se obter perfis diversos de missão no sistema Terra-Lua, utilizando uma abordagem numérica e a combinação de modelos conhecidos para simplificar o cálculo da estimativa de gasto de energia, podendo assim, subsidiar uma análise preliminar de um possível perfil de missão. No entanto, o refinamento das soluções obtidas em modelos mais realistas se mostrou necessário para aplicação efetiva das soluções preliminares obtidas utilizando a metodologia proposta.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica e os métodos numéricos utilizados no decorrer do trabalho. No Capítulo 3 descreve-se a metodologia utilizada para obtenção dos resultados apresentados no Capítulo 4. Por fim, o Capítulo 5 apresenta alguns comentários e conclusões a respeito dos resultados obtidos.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção apresenta-se um resumo dos principais tópicos teóricos que fundamentaram o desenvolvimento deste trabalho.

Inicia-se descrevendo dois modelos matemáticos que podem ser utilizados para modelar a dinâmica orbital de uma espaçonave nas proximidades da Terra e da Lua e que foram utilizados para obter trajetórias de transferência neste trabalho. Também descreve-se a formulação empregada para estimar o consumo de energia nas manobras orbitais e são apresentados os principais métodos numéricos necessário à obtenção dos resultados.

### 2.1 O PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS CIRCULAR PLANAR

#### 2.1.1 Definição

O Problema Restrito de Três Corpos (PR3C) permite o estudo da dinâmica de uma partícula  $P_3$  de massa negligenciável  $m_3$ , a qual se move sob a influência de forças gravitacionais provenientes de outros dois corpos  $P_1$  e  $P_2$ , conhecidos como primários, de massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente. A distribuição de massa interna em ambos os primários é tal que estes podem ser considerados como massas puntiformes. Para fins de modelagem, considera-se que movimento de cada primário não é influenciado gravitacionalmente pela partícula  $P_3$ , ou seja, ambos os primários movimentam-se em órbitas determinadas pela atração gravitacional mútua que um primário exerce sobre o outro (SZEBEHELY, 1967).

Na forma planar do PR3C, conhecido como Problema Restrito de Três Corpos Circular Planar (PR3CCP), os primários  $P_1$  e  $P_2$  descrevem órbitas circulares e coplanares em torno do baricentro do sistema formado por esses dois corpos, e o movimento da partícula  $P_3$  é restrito ao mesmo plano orbital dos primários (SILVA, 2011).

#### 2.1.2 Equações de Movimento

Considera-se o sistema de coordenadas inercial  $(X, Y)$ , conhecido também como referencial fixo ou sideral, cuja origem coincide com o baricentro do sistema formado pelos corpos  $P_1$  e  $P_2$ . Neste sistema de coordenadas, as posições dos corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$  são dependentes do tempo e dadas por  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$ , respectivamente. Estas posições são obtidas a partir da análise da Figura 2.1 e são dadas por:

$$\begin{aligned} X_1 &= b \cos nt', & X_2 &= -a \cos nt', \\ Y_1 &= b \sin nt', & Y_2 &= -a \sin nt', \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde,  $b = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$  e  $a = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}$  são as distâncias de  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente, em relação à origem,  $n$  é a velocidade angular dos primários, também chamada de movimento médio, e  $t'$  é a



representação do tempo. Utiliza-se  $t'$  de forma a reservar a variável  $t$  para a representação do tempo adimensional, que será introduzido mais adiante (SZEBEHELY, 1967).

Considerando o sistema de dois corpos formados pelos primários  $P_1$  e  $P_2$ , aplica-se a lei universal de gravitação de Newton pela qual todos os corpos celestes são atraídos uns pelos outros:

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{l^2}, \quad (2.2)$$

onde  $l = a + b$  é a distância entre os primários e  $G$  é a constante universal de gravitação (BROWN, 1998).

O equilíbrio entre as forças gravitacional e centrípeta requer que

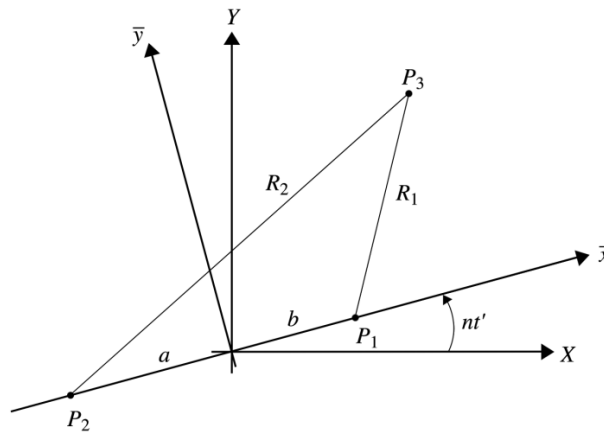
$$\frac{Gm_1m_2}{l^2} = m_2an^2 = m_1bn^2. \quad (2.3)$$

Logo, pela Equação (2.3), é possível determinar as seguintes relações

$$Gm_1 = an^2l^2, \quad Gm_2 = bn^2l^2 \quad \text{e} \quad G(m_1 + m_2) = n^2l^3. \quad (2.4)$$

A terceira equação corresponde à terceira lei de Kepler (SZEBEHELY, 1967), segundo a qual, o quadrado do período de revolução de um corpo secundário em torno de um corpo primário é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da órbita elíptica descrita pelo secundário em um referencial fixo no primário (BROWN, 1998).

Figura 2.1 – Coordenadas fixas (sideral) e rotacionais (sinódico).



fonte: (SILVA, 2011)

As equações de movimento da partícula  $P_3$  no sistema de coordenadas sideral são,

$$\frac{d^2X}{dt'^2} = -\frac{\partial U}{\partial X} \quad \text{e} \quad \frac{d^2Y}{dt'^2} = -\frac{\partial U}{\partial Y}, \quad (2.5)$$

onde  $U(X, Y, t')$  o potencial gravitacional que depende do tempo por causa do movimento dos primários

e é dado pela seguinte relação,

$$U(X, Y, t') = -G \left( \frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} \right), \quad (2.6)$$

sendo  $R_1$  e  $R_2$  os módulos das distâncias da partícula  $P_3$  em relação aos primários  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente, dadas por

$$R_1 = \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2} \quad \text{e} \quad R_2 = \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2}. \quad (2.7)$$

A energia total de  $P_3$  por unidade de massa é

$$h_3 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dX}{dt'} \right)^2 + \left( \frac{dY}{dt'} \right)^2 \right] + U(X, Y, t'), \quad (2.8)$$

enquanto que a energia dos primários é dada pela seguinte equação:

$$H_{12} = \frac{1}{2} n^2 (m_1 b^2 + m_2 a^2) - \frac{G m_1 m_2}{l}. \quad (2.9)$$

Portanto, a energia total do sistema formado por esses três corpos é definida como

$$H = m_3 h_3 + H_{12}. \quad (2.10)$$

Isto é, a energia total do sistema é a soma das energias de cada partícula separadamente, como mostrado na Equação (2.10). Essa energia não é constante ao longo de uma órbita, uma vez que  $h_3$  é dependente do tempo devido ao movimento dos primários no referencial sideral, como mostrado na Equação (2.8) pela presença do potencial gravitacional que é uma função do tempo (SILVA, 2011).

Uma vez, que a dependência temporal explícita é consequência do movimento dos primários em um referencial fixo (sideral), é possível obter uma equação independente do tempo para o potencial, considerando um sistema de coordenadas no qual os primários sejam fixos. Assim, tem-se uma maior facilidade de análise quando comparando o uso desse novo referencial ao uso do referencial sideral (SZEBEHELY, 1967).

De fato, é possível estabelecer uma transformação de coordenadas, com a finalidade de encontrar as equações de movimento da partícula  $P_3$  em um novo sistema de coordenadas rotacionais  $(\bar{x}, \bar{y})$ , conhecido como referencial sinódico, no qual os corpos  $P_1$  e  $P_2$  estão fixos. A transformação é dada por

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos nt' & -\sin nt' \\ \sin nt' & \cos nt' \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Aplicando a transformação de coordenadas e realizando as devidas manipulações algébricas nas

equações de movimento, obtêm-se um novo conjunto de equações de movimento dado por:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{x}}{dt'^2} - 2n\frac{d\bar{y}}{dt'} &= -\frac{\partial U^*}{\partial \bar{x}}, \\ \frac{d^2\bar{y}}{dt'^2} + 2n\frac{d\bar{x}}{dt'} &= -\frac{\partial U^*}{\partial \bar{y}},\end{aligned}\quad (2.13)$$

sendo

$$U^*(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{n^2}{2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) - G\left(\frac{m_1}{\bar{r}_1} + \frac{m_2}{\bar{r}_2}\right) \quad (2.14)$$

o novo potencial gravitacional, obtido a partir da aplicação da transformação de coordenadas juntamente com a Equação (2.6), onde  $\bar{r}_1 = \sqrt{(\bar{x} - b)^2 + \bar{y}^2}$  e  $\bar{r}_2 = \sqrt{(\bar{x} + a)^2 + \bar{y}^2}$ .

As equações de movimento dadas pela Equação (2.13), possuem uma integral de movimento. Tal integral é obtida multiplicando a primeira equação por  $d\bar{x}/dt'$ , a segunda por  $d\bar{y}/dt'$ , somando as equações resultantes e integrando em relação ao tempo  $t'$ , e ainda utilizando a seguinte relação:

$$dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial \bar{x}}d\bar{x} + \frac{\partial U^*}{\partial \bar{y}}d\bar{y}. \quad (2.15)$$

Obtêm-se, assim:

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\bar{x}}{dt'} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{y}}{dt'} \right)^2 \right] = - \int_{t'_0}^{t'} \left( \frac{\partial U^*}{\partial \bar{x}}d\bar{x} + \frac{\partial U^*}{\partial \bar{y}}d\bar{y} \right) = -U^* - \frac{C^*}{2}, \quad (2.16)$$

ou ainda:

$$J^* \left( \bar{x}, \bar{y}, \frac{d\bar{x}}{dt'}, \frac{d\bar{y}}{dt'} \right) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\bar{x}}{dt'} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{y}}{dt'} \right)^2 \right] + U^* = -\frac{C^*}{2} \quad (2.17)$$

que é a integral de movimento do PR3CCP (SILVA, 2011).

Dadas as equações de movimento de  $P_3$  no referencial sinódico em variáveis dimensionais, Equação (2.13), pode-se obter uma forma simplificada dessas equações expressas em variáveis adimensionais. Assim, a distância entre os primários, a soma de suas massas e suas velocidades angulares em torno do baricentro são normalizadas (SILVA, 2011). Para tal, é necessário estabelecer as seguintes relações

$$\begin{aligned}x &= \bar{x}/l, & y &= \bar{y}/l, & t &= nt', & r_1 &= \bar{r}_1/l, \\ r_2 &= \bar{r}_2/l, & \mu_1 &= m_1/(m_1 + m_2), & \mu_2 &= m_2/(m_1 + m_2).\end{aligned}\quad (2.18)$$

A partir dessas relações, as equações de movimento da partícula  $P_3$  podem ser expressas no referencial sinódico em variáveis adimensionais como:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y,\end{aligned}\quad (2.19)$$

onde os pontos representam as derivadas em relação ao tempo adimensional  $t$  e os subscritos indicam

as derivadas parciais em relação à  $x$  e  $y$ . A função  $\Omega$  é dada por

$$\Omega = \frac{1}{2} (\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}, \quad (2.20)$$

sendo  $r_1$  e  $r_2$  os módulos das distâncias da partícula  $P_3$  em relação aos primários  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente, dados por

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x - \mu_2)^2 + y^2 \\ r_2^2 &= (x + \mu_1)^2 + y^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Utilizando a relação  $\mu_1 + \mu_2 = 1$  é possível definir um novo parâmetro  $\mu = \mu_2$ , tal que as equações do PR3CCP dependam apenas desse um único parâmetro de massa, com  $0 \leq \mu \leq 1$ . Para  $\mu = 0$  e  $\mu = 1$ , o modelo matemático corresponde a uma massa unitária em unidades adimensionais posicionada na origem, já para  $\mu = 1/2$ , tem-se dois corpos de mesma massa, de valor adimensional igual à  $1/2$ , localizados em  $x = \pm 1/2$ . Por outro lado, quando  $0 \leq \mu < 1/2$ , o primário de maior massa  $P_1$ , conhecido como primário maior, está localizado em  $0 \leq x < 1/2$  e o primário de massa menor  $P_2$ , nomeado de primário menor ou secundário, está localizado em  $-1 < x \leq -1/2$ . Já, quando  $1/2 < \mu \leq 1$ , o primário maior encontra-se em  $-1/2 < x \leq 0$  e primário menor encontra-se em  $1/2 < x \leq 1$  (SZEBEHELY, 1967). Neste trabalho, utiliza-se  $\mu = 0,0121506683$  que corresponde ao sistema que tem a Terra como primário maior e a Lua como secundário.

Segundo Szebehely (1967), a função  $\Omega$  pode ser reescrita como

$$\Omega = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2}, \quad (2.22)$$

onde o termo constante  $\frac{1}{2}\mu(1 - \mu)$  é acrescentado para manter a uniformização encontrada na literatura tradicional, para a situação em que  $P_1$  está localizado em  $(x_{P_1}, y_{P_1}) = (\mu, 0)$ , à direita da origem do sistema de coordenadas sinódico e  $P_2$  está à esquerda da origem em  $(x_{P_2}, y_{P_2}) = (-1 + \mu, 0)$  (SILVA, 2011).

A constante de movimento do PR3CCP, definida pela Equação (2.17), considerando, agora, variáveis adimensionais, conhecida como integral de Jacobi, torna-se

$$J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 2\Omega(x, y) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 = C \quad (2.23)$$

A constante de Jacobi é habitualmente relacionada à energia do terceiro corpo,  $E$ , no referencial sinódico. De fato, tem-se que  $C = -2E$ . Assim, há referências que utilizam o valor de  $E$  como uma alternativa à ao valor de  $C$  para identificar os níveis de energia do terceiro corpo (SILVA, 2011).

A conservação associada à  $J$  define uma variedade invariante de três dimensões em um espaço de estado de quatro dimensões:

$$\mathcal{M}(\mu, C) = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in \mathbb{R}^4 \mid J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \text{constante}\}, \quad (2.24)$$

de forma que o movimento no espaço de estados é limitado pela variedade  $\mathcal{M}(\mu, C)$  (SILVA, 2011).

### 2.1.3 Pontos Equilíbrio

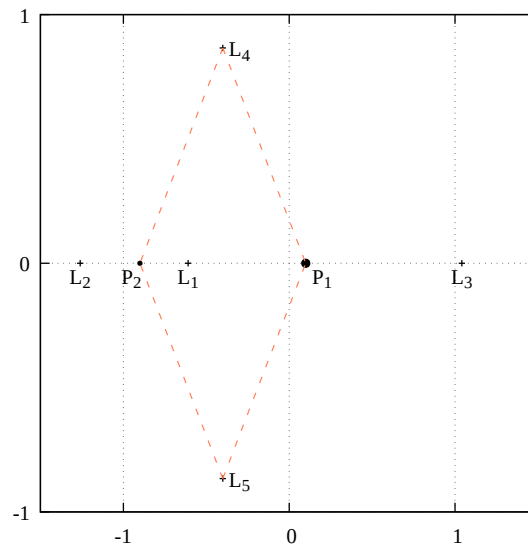
O modelo matemático do PR3CCP possui cinco pontos de equilíbrio ( $L_k$ ,  $k = 1, \dots, 5$ ), também conhecidos como pontos de Lagrange, obtidos a partir das seguintes relações:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \Omega_x = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial y} = \Omega_y = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \dot{y}} = 0 \Rightarrow \dot{y} = 0. \quad (2.25)$$

Tais pontos são soluções estacionárias no referencial sinódico, ou seja, a partícula  $P_3$  posicionada em qualquer um desses pontos e respeitando as relações dadas pela Equação (2.25) permanece em repouso no referencial sinódico. Em outras palavras, as forças que atuam sobre  $P_3$  se anulam. Vale ressaltar que no referencial sideral, nessa situação, a partícula se move em uma órbita circular em torno da origem do sistema com a mesma frequência angular que os primários. (SILVA, 2011).

Três das soluções de equilíbrio, denotadas por  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , estão sobre o eixo  $x$  e são chamados de soluções colineares. As outras duas, denotadas por  $L_4$  e  $L_5$ , encontram-se nos vértices de triângulos equiláteros formados com as posições dos primários, sendo conhecidas como soluções triangulares. A Figura 2.2 ilustra as posições dos pontos de Lagrange quando  $\mu = 0, 1$ . Para determinar esses valores pontos de equilíbrio é necessário resolver o sistema de equações decorrente da Equação (2.25) conforme descrito por Szebehely (1967).

Figura 2.2 – Pontos de equilíbrio do PR3CCP no referencial sinódico para  $\mu = 0, 1$ .



fonte: Produção do próprio autor.

### 2.1.4 Regiões de Movimento

A projeção da variedade  $\mathcal{M}$ , definida pela Equação (2.24), no espaço de configurações  $(x, y)$ , define regiões nas quais o movimento da partícula  $P_3$  é possível ou não para valores específicos de  $C$ , isto é, para valores específicos de energia. Tais regiões são chamadas de regiões de Hill,  $H$ , e são definidas da seguinte forma:

$$H(\mu, C) = \{(x, y) \mid \Omega(x, y) \geq C/2\}. \quad (2.26)$$

As regiões de Hill são delimitadas pelas curvas de velocidade zero, as quais são lugares geométricos no plano  $(x, y)$  onde a energia cinética do corpo  $P_3$  é nula, ou seja, ambas as componentes das velocidades, tanto em  $x$  quanto em  $y$ , são iguais a zero.

Para cada valor do parâmetro de massa  $\mu$  do modelo, existem cinco configurações básicas possíveis para as regiões de Hill de acordo com os valores da Constante de Jacobi das soluções estacionárias, dados por  $C_k$ ,  $k = 1, \dots, 5$ . A fim de melhor compreender as possibilidades em cada configuração, definem-se, primeiramente, os seguintes termos:  $R^{P_1}$  como sendo a região acessível em torno de  $P_1$ ;  $R^{P_2}$  como a região acessível em torno de  $P_2$  e  $R^E$  a região acessível externa ao domínio de ambos os primários, que, matematicamente, se estende até o infinito (SILVA, 2011). A Figura 2.3 ilustra as cinco configurações possíveis para as regiões de Hill, que são descritas a seguir.

**Caso 1:** Quando  $C > C_1$ , a partícula é incapaz de se mover entre  $R^{P_1}$  e  $R^{P_2}$ . Ademais,  $P_3$  não pode transitar entre essas regiões e  $R^E$ . Ou seja, as três regiões acessíveis não estão conectadas umas com as outras.

**Caso 2:** Quando  $C_1 > C > C_2$ , as regiões em torno dos primários,  $R^{P_1}$  e  $R^{P_2}$ , estão conectados através da abertura de uma região acessível em torno de  $L_1$ . Por consequência, existe a possibilidade da partícula transitar entre as regiões acessíveis em torno dos primários.

**Caso 3:** Quando  $C_2 > C > C_3$ , surge uma região acessível em torno de  $L_2$  semelhante àquela em torno de  $L_1$ , explicada no caso anterior. Entretanto, neste caso, a região em torno de  $L_2$  conecta a região acessível em torno do segundo primário,  $R^{P_2}$ , com a região externa,  $R^E$ . Assim,  $P_3$  consegue se mover para a região externa ao domínio dos primários.

**Caso 4:** Quando  $C_3 > C > C_4 = C_5$ , abre-se uma região acessível aparece em torno de  $L_3$ , aumentando, ainda mais, a possibilidade de trânsito entre as regiões  $R^{P_1}$ ,  $R^{P_2}$  e  $R^E$ .

**Caso 5:** Por fim,  $C_4 = C_5 > C$ , todo o plano  $x - y$  se torna acessível à partícula. Assim, as regiões inacessíveis, também chamadas de regiões proibidas, diminuem conforme o valor de  $C$  diminui. (SILVA, 2011)

## 2.2 PROBLEMA DE DOIS CORPOS

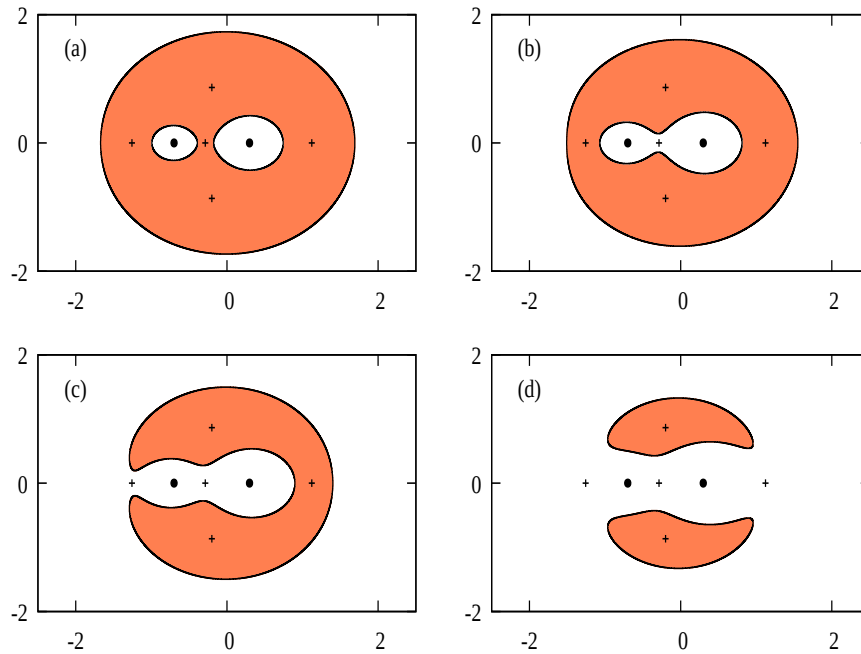
O Problema de Dois Corpos modela a dinâmica de dois corpos que interagem gravitacionalmente (BROWN, 1998) e é o único dentre os chamados Problemas de N-Corpos que possui soluções analíticas fechadas. Essas soluções são descritas unicamente por secções cônicas, isto é, círculos, elipses, parábolas ou hipérbolas, sendo que o corpo central está no foco dessas cônicas (BROWN, 1998).

Uma vez que o presente trabalho trata de trajetórias de transferência, são apresentadas apenas as soluções circulares e elípticas, bem como algumas de suas propriedades. Antes de apresentar as equações características de tais órbitas, é conveniente definir um parâmetro gravitacional  $\mu_e$  como o produto entre a massa do corpo central  $M$  e a constante universal de gravitação  $G$ . Assim,

$$\mu_e = MG, \quad (2.27)$$

onde o subscrito  $e$  foi incluído para diferenciar o parâmetro gravitacional do Problema de Dois Corpos

Figura 2.3 – Representação das quatro primeiras configurações das regiões de Hill, para  $\mu = 0,3$ . As áreas em branco e em coral representam às regiões de Hill e as regiões proibidas, respectivamente. As linhas pretas correspondem às curvas de velocidade zero, os pontos circulares representam os primários e os sinais de soma correspondem aos pontos de equilíbrio. (a) **Caso 1**  $C > C_1$ ; (b) **Caso 2**  $C_1 > C > C_2$ ; (c) **Caso 3**  $C_2 > C > C_3$ ; (d) **Caso 4**  $C_3 > C > C_4 = C_5$ .

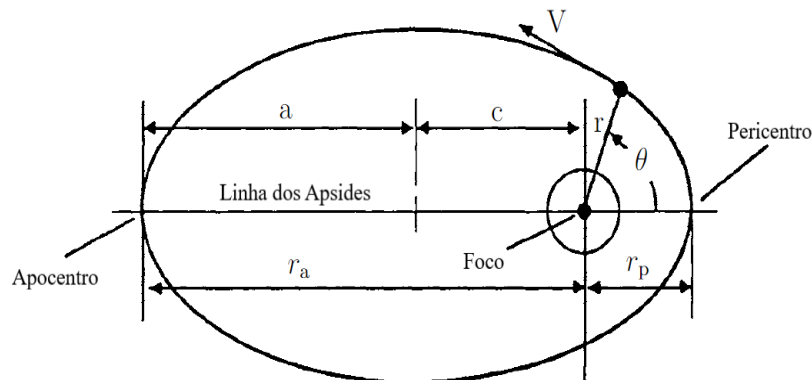


fonte: Baseado em (KOON et al., 2006)

e o parâmetro de massa  $\mu$  do Problema de Três Corpos, dado pela Equação (2.18).

Entre as possíveis soluções do Problema de Dois Corpos, as órbitas elípticas podem ser caracterizadas pelos seguintes elementos orbitais: semi-eixo maior ( $a$ ), excentricidade ( $e$ ), raio do apocentro ( $r_a$ ) e raio do pericentro ( $r_p$ ). O apocentro e o pericentro são os pontos da órbita mais afastado e mais distante, respectivamente, em relação ao corpo central que se encontra em um dos focos da elipse. A linha que une o apocentro e o pericentro passa pelo centro de massa do primário é chamada de linha dos apsides (BROWN, 1998). A Figura 2.4 ilustra a geometria de uma órbita elíptica.

Figura 2.4 – Geometria de uma Órbita Elíptica.



fonte: Figura baseada em (BROWN, 1998)

Tabela 2.1 – Parâmetros que identificam uma órbita elíptica.

Semi-Eixo Maior	$a = \frac{r_a + r_p}{2}$
Metade da Distância Focal	$c = \frac{r_a - r_p}{2}$
Excentricidade	$e = \frac{c}{a} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$
Raio	$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$
Anomalia Verdadeira	$\cos \theta = \frac{r_p(1 + e)}{re} - \frac{1}{e}$
Velocidade	$V = \sqrt{\frac{2\mu_e}{r} - \frac{\mu_e}{a}}$
Período	$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_e}}$

fonte: (BROWN, 1998)

Na Figura 2.4, o parâmetro  $c$  indica a metade da distância entre os focos. A posição da espaçonave na órbita é definida pelo raio  $r$  e pelo ângulo de posição  $\theta$ , chamado de anomalia verdadeira, que é medida a partir do pericentro até a espaçonave no sentido do movimento. Já a velocidade da espaçonave nesta trajetória é denotada por  $V$ . A Tabela 2.1 apresenta as equações dos parâmetros que caracterizam uma órbita elíptica (BROWN, 1998).

As órbitas circulares são casos limites das órbitas elípticas nos quais a excentricidade é nula e o semi-eixo maior é igual ao seu raio  $r$  (CURTIS, 2013).

### 2.3 MANOBRAS ORBITAIS

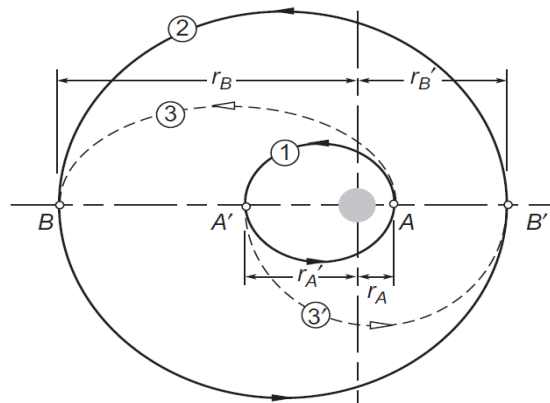
Uma manobra orbital transporta uma espaçonave de uma órbita para outra. Este tipo de manobra é embasada no princípio fundamental que uma órbita é determinada tão somente pela posição e a pela velocidade em cada ponto. Assim, alterar o vetor velocidade em qualquer ponto de uma órbita implica mudar a trajetória que a espaçonave está descrevendo (BROWN, 1998). A variação do módulo da velocidade ( $\Delta V$ ) é obtida, por exemplo, utilizando um ou mais impulsos resultantes da queima de combustível através do acionamento de propulsores (CURTIS, 2013).

#### 2.3.1 Transferência de Hohmann

Dos diversos modelos que descrevem uma manobra orbital, a chamada Transferência de Hohmann, proposta por Walter Hohmann em 1925, é um modelo que utiliza dois-impulsos para colocar a espaçonave em uma órbita elíptica intermediária de transferência entre duas órbitas circulares coplanares. Dentre os modelos de manobras orbitais que utilizam dois impulsos, a Transferência de Hohmann é



Figura 2.5 – Transferência de Hohmann entre duas órbitas elípticas.



fonte: (CURTIS, 2013)

aquela que possui a melhor eficiência energética se a razão entre os raios da órbita alvo circular e da órbita circular de partida for menor que 15.58 (CURTIS, 2013).

Para os fins deste trabalho, aborda-se a generalização desta manobra na qual a transferência ocorre entre duas órbitas elípticas, as quais compartilham a mesma linha dos apses, como mostrado na Figura 2.5.

A Figura 2.5 ilustra duas possíveis trajetórias que podem ser utilizadas para transferir a espaçonave da órbita interna, 1, para a órbita externa, 2. A princípio não é possível dizer qual dentre as duas semi-elipses de transferência, 3 ou 3', é aquela em que o consumo de energia é menor. Para tal, é preciso determinar os incrementos do módulo da velocidade necessários em A e B ou A' e B' para efetivar a transferência. Sabe-se que a energia total consumida pelos impulsos é proporcional ao incremento do módulo da velocidade total necessário para realizar a transferência entre órbitas. Portanto, a órbita elíptica de transferência mais eficiente é aquela que possui o menor incremento no módulo da velocidade total (CURTIS, 2013).

Assim, com o intuito de identificar qual órbita é mais propícia, é necessário calcular os acréscimos do módulo da velocidade para as trajetórias 3 e 3'. Sendo assim, considera-se que a órbita de transferência 3 possui raio de pericentro ( $r_A$ ) igual ao raio de pericentro da órbita elíptica interna ( $r_{p1}$ ). Por outro lado, o raio de apocentro desta órbita de transferência ( $r_B$ ) é igual ao raio de apocentro da órbita externa ( $r_{a2}$ ), ou seja,

$$\begin{aligned} r_A &= r_{p1} \\ r_B &= r_{a2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Uma vez determinados os valores dos raios de apocentro e pericentro da órbita 3, utiliza-se a equação encontrada na Tabela 2.1 para determinar o valor do seu semi-eixo maior  $a_{tr}$ . Em seguida, calculam-se os valores dos módulos das velocidades no pericentro e no apocentro desta trajetória,  $V_{p_{tr}}$  e  $V_{a_{tr}}$ , respectivamente, através da equação encontrada na Tabela 2.1. Portanto, os incrementos do

módulo das velocidade nos pontos A e B são dados por:

$$\begin{aligned}\Delta V_A &= V_{\text{ptr}} - V_i \\ \Delta V_B &= V_{\text{atr}} - V_f,\end{aligned}\tag{2.29}$$

sendo  $V_i$  a velocidade da espaçonave no pericentro da órbita interna e  $V_f$  a velocidade da espaçonave no apocentro da órbita externa (BROWN, 1998).

No caso da órbita de transferência  $3'$ , consideram-se os pontos  $A'$  e  $B'$  no lugar dos pontos A e B. Dessa forma, os raios de pericentro e de apocentro são redefinidos como  $r_{A'}$  e  $r_{B'}$ , respectivamente. E, agora, estes raios são iguais ao raio de apocentro da órbita elíptica interna e ao raio de pericentro da órbita elíptica externa, nesta ordem. Dessa forma, tem-se

$$\begin{aligned}r_{A'} &= r_{a_1} \\ r_{B'} &= r_{p_2}.\end{aligned}\tag{2.30}$$

De maneira semelhante, determinam-se as velocidades no pericentro e no apocentro da órbita elíptica  $3'$ ,  $V'_{\text{ptr}}$  e  $V'_{\text{atr}}$ , e seu semi-eixo maior,  $a'_{\text{tr}}$ . Assim, os incrementos de velocidade nos pontos  $A'$  e  $B'$  são dados por:

$$\begin{aligned}\Delta V'_A &= V'_{\text{ptr}} - V'_i \\ \Delta V'_B &= V'_{\text{atr}} - V'_f,\end{aligned}\tag{2.31}$$

sendo  $V'_i$  a velocidade da espaçonave no apocentro da órbita interna e  $V'_f$  a velocidade da espaçonave no pericentro da órbita externa.

O gasto de energia necessário para transferir uma espaçonave da órbita interna 1 até a órbita externa 2, como ilustrado na Figura 2.5, é o mesmo se a transferência ocorrer se uma espaçonave partir da órbita externa 2 até a órbita interna 1. Dessa forma, o incremento total do módulo de velocidade representa a mesma quantidade de propelente consumida, independente da direção que o propulsor é acionado (CURTIS, 2013).

## 2.4 MÉTODOS NUMÉRICOS

Nesta seção apresentam-se brevemente os principais métodos numéricos utilizados no decorrer deste trabalho. Para uma abordagem mais detalhada, recomendam-se as referências Boyce e DiPrima (1985), Kondapalli e Kuga (1986), Franco (2006), Press et al. (1992), que serão citadas conforme os métodos forem abordados.

### 2.4.1 Método de Runge Kutta

Segundo Boyce e DiPrima (1985), o método de Runge-Kutta, assim como as fórmulas de Euler, Euler inversa e Euler aprimorada, é um procedimento utilizado para resolver numericamente o problema

de valor inicial, definido como:

$$y' = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.32)$$

O método de Runge-Kutta de quarta ordem em quatro estágios, ou simplesmente, método de Runge-Kutta, envolve uma média ponderada de valores de  $f(t, y)$  em pontos diferentes no intervalo  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ , dada por

$$y_{n+1} = y_n + h \left( \frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6} \right), \quad (2.33)$$

onde

$$\begin{aligned} k_{n1} &= f(t_n, y_n), \quad k_{n2} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}\right), \\ k_{n3} &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}\right), \quad k_{n4} = f(t_n + h, y_n + hk_{n3}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Para problemas nos quais o erro de truncamento local varia muito no intervalo de interesse, o método de Runge-Kutta apresenta um defeito relacionado ao tamanho do passo fixo. Esse problema levou ao desenvolvimento de métodos de Runge-Kutta adaptativos, os quais modificam o tamanho do passo automaticamente ao longo dos cálculos, de maneira a manter o erro de truncamento local próximo de, ou menor do que, um nível de tolerância especificado. Um destes métodos adaptativos é o Método de Runge-Kutta de 7ª e 8ª ordem. Neste trabalho, utilizou-se um integrador de Runge-Kutta de 7ª e 8ª ordem implementado e validado por R. R. Kondapalli e H. K. Kuga (KONDAPALLI; KUGA, 1986) utilizando a linguagem de programação FORTRAN.

#### 2.4.2 Método de Newton para Sistemas Não Lineares

Segundo Franco (2006), o método de Newton é uma das técnicas mais usadas para determinar raízes de equações não-lineares, podendo ser utilizado, também, para a solução de um sistema formado por equações deste tipo. Dado um sistema composto por equações não-lineares,

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

e considerando  $(x_0, y_0)$  uma aproximação inicial para a solução  $(\bar{x}, \bar{y})$  da Equação (2.35) para um determinado intervalo, onde nele está presente esta solução. Dessa forma, é possível expandir  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  através da série de Taylor para funções de duas variáveis, assumindo que  $f$  e  $g$  sejam suficientemente diferenciáveis. Desprezando os termos de mais alta ordem da expansão, determina-se uma nova aproximação para a raiz  $(\bar{x}, \bar{y})$ , fazendo  $f(x, y) = g(x, y) = 0$ . Obtêm-se, portanto, um novo sistema,

$$\begin{cases} f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) = -f \\ g_x(x - x_0) + g_y(y - y_0) = -g, \end{cases} \quad (2.36)$$

onde está entendido que todas as funções e derivadas parciais na Equação (2.36) devem ser calculadas em  $(x_0, y_0)$ .

A solução do sistema de equações dado pela Equação (2.36), fornece uma solução  $(x_1, y_1)$ , a qual espera-se estar mais próxima de  $(\bar{x}, \bar{y})$  do que  $(x_0, y_0)$ . Resolvendo este sistema por meio da Regra de Cramer, tem-se

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= \left[ \frac{-fg_y + gf_y}{J(f, g)} \right]_{(x_0, y_0)}, \\ y_1 - y_0 &= \left[ \frac{-gf_x + fg_x}{J(f, g)} \right]_{(x_0, y_0)}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde  $J(f, g)$  é o Jacobiano das funções  $f$  e  $g$ , definido por  $J(f, g) = f_x g_y - f_y g_x \neq 0$  em  $(x_0, y_0)$ . A repetição deste processo conduz ao Método de Newton para Sistemas Não Lineares, que pode ser escrito como:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \left[ \frac{fg_y - gf_y}{J(f, g)} \right]_{(x_k, y_k)} \\ y_{k+1} = y_k - \left[ \frac{gf_x - fg_x}{J(f, g)} \right]_{(x_k, y_k)} \end{cases}, \quad (2.38)$$

com  $J(f, g) = f_x g_y - f_y g_x$ .

### 2.4.3 Método de Interpolação - *Spline* Cúbico

Considera-se uma função  $f(x)$  cujos valores são conhecidos apenas para um conjunto específico de pontos  $x_1, x_2, \dots, x_N$  e que não possui uma expressão analítica explícita que permita determinar o valor desta função em um ponto arbitrário. Como exemplo do problema em questão, pode-se considerar uma função  $f(x_i)$  obtida resultante de uma simulação numérica, que, em princípio, não pode ser aproximada por uma função simples (PRESS et al., 1992).

O processo de estimar o valor da função  $f(x)$  para qualquer ponto  $x$  por meio da suavização da curva obtida numericamente entre pontos consecutivos  $x_i$  da aproximação, denomina-se interpolação. Segundo Press et al. (1992), os métodos de interpolação tem como objetivo modelar a função, de uma maneira plausível, entre os pontos conhecidos. Dentre as diversas formas de se modelar tais função, a mais utilizada é por meio de polinômios.

Dentre estes métodos, o Método de Interpolação por *Spline* Cúbico é uma das formas de interpolação mais conhecida, sendo amplamente utilizada em situações onde a continuidade das derivadas da função é uma preocupação. Este método é um refinamento baseado na fórmula geral de interpolação de Lagrange (PRESS et al., 1992).

Neste trabalho, utilizou-se a implementação em FORTRAN do Método de Interpolação por *Spline* Cúbico disponível em Press et al. (1992).

### 2.4.4 Método de *Shooting*

O método de *Shooting* (PRESS et al., 1992) é uma das duas classes de métodos numéricos utilizadas para solucionar um Problema de Valor de Contorno definido da seguinte forma: deseja-se determinar a

solução de um conjunto de  $N$  equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem acopladas,

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = g_i(x, y_1, y_2, \dots, y_N) \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.39)$$

que satisfaçam  $n_1$  condições de contorno no ponto inicial  $x_1$ , e  $n_2 = N - n_1$  condições de contorno no ponto final  $x_2$ .

Em  $x_1$ , a solução é pressuposta para satisfazer

$$B_{1j}(x_1, y_1, y_2, \dots, y_N) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n_1, \quad (2.40)$$

enquanto que, em  $x_2$ , presume-se que a solução satisfaz

$$B_{2k}(x_2, y_1, y_2, \dots, y_N) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n_2. \quad (2.41)$$

Sendo assim, o método de *Shooting* possibilita a escolha de valores para todas as variáveis dependentes no ponto inicial. Estes valores devem ser consistentes com quaisquer condições de contorno para este ponto específico, ao passo que são organizados para depender dos parâmetros arbitrários livres, cujos os valores iniciais são arbitrários. Posto isso, as EDOs são integradas numericamente através de métodos de integração para resolver um Problema de Valor Inicial, como, por exemplo, o método de Runge Kutta, integrando as equações até alcançar o ponto final requerido. Geralmente, os valores finais encontrados por integração são diferentes dos valores finais prescritos. Assim, ajustam-se, iterativamente, os parâmetros livres no ponto de partida a fim de anular a discrepância entre os valores encontrados e os requeridos. Esse ajuste pode ser realizado, por exemplo, utilizando o Método de Newton para sistema de equações não lineares (PRESS et al., 1992). Neste trabalho, utilizou-se a implementação em FORTRAN do Método de *Shooting* disponível em (PRESS et al., 1992).

### 3 METODOLOGIA

Neste capítulo apresenta-se a metodologia aplicada para obtenção dos resultados deste trabalho. Assim, descreve-se, passo a passo, as etapas seguidas para obter os resultados apresentados no próximo capítulo.

#### 3.1 PARÂMETROS INICIAIS

Nesta seção são apresentados os valores dos parâmetros que foram utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Para obtenção das trajetórias espaciais de interesse, utilizou-se o sistema de três corpos formado pela Terra, pela Lua e pela Espaçonave, chamado de sistema Terra-Lua-Espaçonave. Conforme a nomenclatura encontrada usualmente na literatura, estes corpos correspondem, respectivamente, aos primários,  $P_1$  e  $P_2$ , e à partícula,  $P_3$  do PR3CCP.

Os parâmetros físicos do sistema Terra-Lua-Espaçonave, bem como o parâmetro adimensional de massa do PR3CCP e os parâmetros de massa dos Problemas de Dois Corpos Terra-Espaçonave e Lua-Espaçonave, são apresentados na Tabela 3.1. Esses parâmetros foram utilizados ao longo de todo o trabalho, e foram obtidos nas seguintes referências: Brown (1998), Silva (2011).

Tabela 3.1 – Parâmetros Iniciais.

Parâmetro	Abreviatura	Valor	Unidades
Raio da Terra	$R_{Terra}$	6378,14	km
Raio da Lua	$R_{Lua}$	1737,4	km
Massa da Terra	$M_{Terra}$	$5,9742 \cdot 10^{24}$	kg
Massa da Lua	$M_{Lua}$	$7,3483 \cdot 10^{22}$	kg
Distância entre a Terra e a Lua	$D_{TL}$	384.400	km
Parâmetro de Massa Lua-Espaçonave	$\mu_e$	4.902,8	$\text{km}^3/\text{s}^2$
Parâmetro de Massa Terra-Espaçonave	$\mu_e$	398.600,4	$\text{km}^3/\text{s}^2$
Parâmetro de Massa Terra-Lua-Espaçonave	$\mu$	0,0121506683	-

fonte: (BROWN, 1998; SILVA, 2011)

#### 3.2 DETECÇÃO EXTENSIVA

A primeira etapa deste trabalho consistiu na obtenção de condições iniciais, em posição e velocidade, que correspondessem a trajetórias do tipo transito do PR3CCP, ou seja, trajetórias que permitem a transferência entre regiões próximas à Terra e regiões próximas à Lua.

O procedimento consistiu em construir uma grade de possíveis posições  $(x,y)$  com o formato de um quadrado no sistema de coordenadas sinódico em função de variáveis adimensionais em torno da Terra localizada em  $(x_{Terra}, y_{Terra}) = (0,0121506683; 0)$ . Foram definidas as posições mínimas  $(x_{min}, y_{min})$  e máximas  $(x_{max}, y_{max})$  em ambas as direções como os as posições limite da grade quadrada, sendo

dadas por:

$$\begin{aligned} x_{\min} &= x_{\text{Terra}} - \frac{d}{D_{\text{TL}}}, & x_{\max} &= x_{\text{Terra}} + \frac{d}{D_{\text{TL}}}, \\ y_{\min} &= y_{\text{Terra}} - \frac{d}{D_{\text{TL}}}, & y_{\max} &= y_{\text{Terra}} + \frac{d}{D_{\text{TL}}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $d$  é a metade do lado desse quadrado em quilômetros, que foi normalizado pela distância entre a Terra e a Lua ( $D_{\text{TL}}$ ).

As demais posições  $(x, y)$  foram dispostas dentro desta grade de posições de forma que, a partir de um passo fixo  $\Delta$ , as posições foram percorridas em ambas as direções começando de seus valores mínimos  $(x_{\min}, y_{\min})$  até seus valores máximos  $(x_{\max}, y_{\max})$ . Para este trabalho, foram considerados  $d = 60.000\text{km}$  e  $\Delta = 0,01$ , pois após alguns testes iniciais estes valores se mostraram satisfatórios para a busca por soluções trânsito. A tabela 3.2 mostra os valores mínimos e máximos em  $x$  e  $y$  utilizados.

Tabela 3.2 – Valores máximos e mínimos de  $x$  e  $y$  que definem a grade de posições.

Parâmetro	Valor
$x_{\min}$	-0,143936740649
$y_{\min}$	-0,156087408949
$x_{\max}$	0,156087408949
$y_{\max}$	0,168238077249

fonte: Produção do Próprio Autor.

Visando que a saída do entorno da Terra ocorresse em altitudes correspondentes à missões mais usuais, também foram investigadas posições  $(x, y)$  em uma região anelar com distância em relação à Terra próxima à altitude de uma órbita GEO (*Geostationary Equatorial Orbit*). Segundo Curtis (2013), uma órbita GEO possui uma altitude de 35.786 km e o corpo em órbita tem a mesma velocidade angular que a Terra.

Assim, foram definidas duas altitudes,  $d_1$  e  $d_2$ , iguais à 30.000 km e 45.000 km, respectivamente, de forma que as distâncias em relação ao centro da Terra (ou à posição da massa pontual que representa a Terra no modelo matemático) são  $d_1 + R_{\text{Terra}}$  e  $d_2 + R_{\text{Terra}}$ . Para que estas distâncias sejam utilizadas no sistema de coordenadas sinódico em função de variáveis adimensionais elas devem ser normalizadas, ou seja,

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{\text{Terra}} + d_1}{D_{\text{TL}}} = 0,09461785848, \\ R_2 &= \frac{R_{\text{Terra}} + d_2}{D_{\text{TL}}} = 0,133639438085, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde,  $R_1$  e  $R_2$  são as distâncias  $d_1$  e  $d_2$ , respectivamente, no sistema de coordenadas adotado.

Para evitar a necessidade de regularizar as equações de movimento em torno das singularidades durante a integração numérica (SZEBEHELY, 1967), foi introduzida uma distância  $d_s = 4.000$  km,

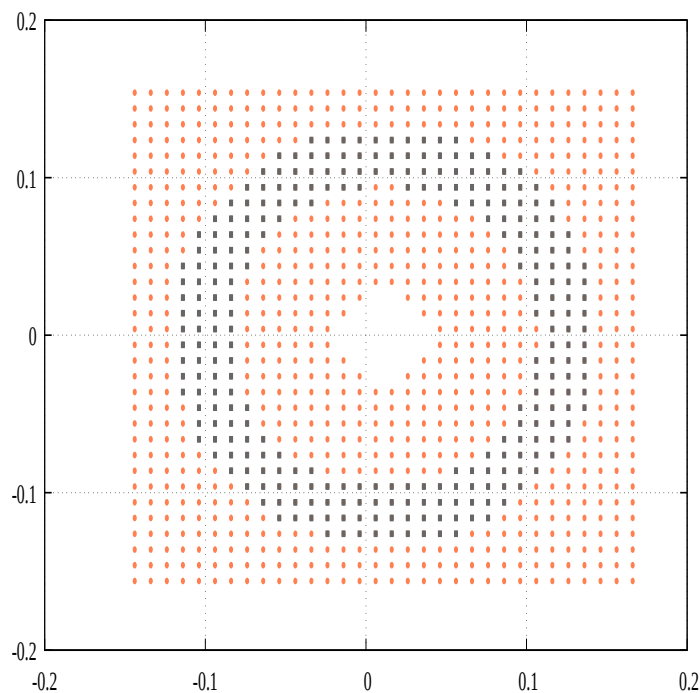
denominada raio de segurança. Em unidades adimensionais esse raio é dado por:

$$R_S = \frac{R_{\text{Terra}} + d_s}{D_{\text{TL}}} = 0,026979708636. \quad (3.3)$$

Se, durante a integração numérica das equações, o raio de segurança fosse cruzado de fora para dentro, o procedimento numérico era interrompido e a solução descartada, evitando o problema dos pequenos denominadores.

As possíveis posições que foram utilizadas como parte das condições iniciais são ilustradas na Figura 3.1, onde os pontos em cinza representam a grade de posições e os pontos em laranja a região anelar que correspondem às posições condizentes com a proposta do trabalho.

Figura 3.1 – Possíveis posições  $(x, y)$  selecionadas como parte das condições iniciais.



fonte: Produção do próprio autor.

O próximo passo foi o de completar as condições iniciais obtendo os valores das velocidades  $(\dot{x}, \dot{y})$ . Como visto na Seção 2.1.4, existe uma relação entre valores específicos da Constante de Jacobi, que correspondem a certos níveis de energia, e as possíveis configurações das regiões de Hill. Assim, foi possível determinar um grupo de valores de  $C$  que varia entre um valor mínimo ( $C_{\min}$ ) e um máximo ( $C_{\max}$ ), através de um passo fixo  $\Delta C$ . Os valores de  $C_{\min}$ ,  $C_{\max}$  e  $\Delta C$  utilizados estão ilustrados pela Tabela 3.3. Estes valores de  $C$  correspondem a configuração das regiões de Hill mostradas pela Figura 2.3(c), onde  $C_{\min}$  e  $C_{\max}$  correspondem aos valores da Constante de Jacobi avaliadas nos pontos de Lagrange  $L_2$  e  $L_3$ , respectivamente.

Dando sequência, foram definidos possíveis valores de velocidades na direção  $x$ . Os valores de  $\dot{x}_{\min}$ ,  $\dot{x}_{\max}$  e  $\Delta \dot{x}$  utilizados são mostrados na Tabela 3.4 e foram escolhidos pois, após a realização de alguns testes preliminares, se mostraram os mais coerentes para proporcionar as soluções trânsito buscadas.



Tabela 3.3 – Parâmetros que definem os valores das Constantes de Jacobi utilizados.

Parâmetro	Valor
$C_{\min}$	3.02415026288
$C_{\max}$	3.18416413176
$\Delta_C$	0,001

fonte: Produção do Próprio Autor.

Tabela 3.4 – Parâmetros para  $\dot{x}$ .

Parâmetro	Valor
$\dot{x}_{\min}$	-1,5
$\dot{x}_{\max}$	1.5
$\Delta\dot{x}$	0,1

fonte: Produção do Próprio Autor.

Para finalizar a definição das condições iniciais, foram determinados os valores das velocidades na direção  $y$ . Os possíveis valores das posições,  $x$  e  $y$ , da velocidade,  $\dot{x}$  e das Constantes de Jacobi foram substituídos na seguinte equação,

$$\dot{y} = \pm \sqrt{2\Omega(x, y) - \dot{x}^2 - C}, \quad (3.4)$$

que foi obtida isolando o termo  $\dot{y}$  na Equação (2.23). Foi estipulado um valor máximo em módulo para a velocidade em  $y$ , de forma a não utilizar valores de  $\dot{y}$  maiores, em módulo. A escolha foi baseada em testes realizados nos quais altos valores de  $\dot{y}$  não se mostraram úteis para a obtenção das soluções procuradas. A partir dos valores ilustrados na Figura 3.1, nas Tabelas 3.3 e 3.4 e utilizando a Equação 3.4 obtiveram-se dois conjuntos de condições iniciais com os mesmos valores de  $x$ ,  $y$  e  $\dot{x}$ , porém um deles com valores positivos e outro com valores negativos de  $\dot{y}$ .

Definidas as possíveis condições iniciais, o próximo passo foi utilizar estas condições para integrar numericamente as equações do PR3CCP, Equação 2.19, por meio do método de Runge-Kutta de 7ª e 8ª ordem utilizando a sub-rotina em FORTRAN escrita por Kondapalli e Kuga (1986). Os parâmetros temporais utilizados nas soluções numéricas são mostrados na Tabela 3.5.

Tabela 3.5 – Parâmetros temporais utilizados na integração das condições iniciais obtidas.

Parâmetro	Valor
$t_{ini}$	0,0
$t_{fim}$	40,39
$\Delta_t$	0,1
$\Delta_{t_{\max}}$	0,1

fonte: Produção do Próprio Autor.

Por fim, foi feita a seguinte classificação das trajetórias obtidas: se durante a integração numérica um ponto da trajetória estiver à esquerda da posição da Lua, a trajetória é classificada como trajetória trânsito e a condição inicial que gerou tal resultado é armazenada. Por outro lado, se durante a

integração numérica não for detectado qualquer ponto da trajetória à esquerda da Lua, esta trajetória é classificada como não trânsito e sua condição inicial é descartada.

### 3.3 ANÁLISE DAS TRAJETÓRIAS TRÂNSITO E PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

Nesta seção descreve-se a obtenção de posições e velocidades que foram utilizadas como condições de contorno para obtenção do trecho de injeção translunar dos perfis de missão investigados neste trabalho. O termo trecho de injeção translunar é usado para identificar o segmento da trajetória que conecta de maneira direta um ponto próximo à Terra e um ponto próximo à Lua.

As trajetórias trânsito que resultaram do procedimento de detecção extensiva foram analisadas visualmente e, a partir destas, foram identificados trechos correspondentes a conexões diretas entre os dois primários. Os pontos extremos desses trechos foram então extraídos fornecendo: (i) um ponto inicial próximo à Terra composto por posições e velocidades e (ii) um ponto final próximo à Lua do qual foram considerados apenas as posições. Esses pontos foram, então, utilizados como condições de contorno do método de *Shooting* iterativo com o tempo como parâmetro livre. O método gera novas trajetórias a partir do ponto inicial dado e verifica se as posições finais são atingidas. Caso isso não ocorra, as velocidades no ponto inicial são alteradas e essa nova condição inicial é integrada, verificando novamente se as posições são atingidas e assim sucessivamente até obter a convergência do problema de valor de contorno. Assim, obtém-se novas soluções trânsito com tempos de transferência inferiores àqueles obtidos por meio da detecção extensiva. Vale notar que a energia destas novas trajetórias é distinta da energia das trajetórias originais, sendo que a redução do tempo implica, em geral, trajetórias trânsito com energia mais elevada.

Com base nessa experiência, além das condições iniciais e finais extraídas a partir dos trechos das trajetórias do tipo trânsito resultantes da detecção extensiva, foram consideradas, ainda, condições iniciais adicionais fora da região anelar investigada inicialmente. Isto é, com o objetivo de estabelecer missões com trajetórias de saída de altitudes correspondentes às órbitas GEO, foram escolhidas condições de contorno adicionais com base em critérios de distância à Terra e à Lua. Especificamente, consideraram-se pontos com distâncias iniciais entre 30.000 km e 40.000 km em relação à superfície da Terra, ou seja, valores próximos à altitude de uma órbita GEO, já as distâncias finais variando entre 1.000 km e 3.000 km em relação à superfície da Lua. Para completar as condições de contorno necessárias para o método de *Shooting*, as velocidades em  $x$  e  $y$  foram escolhidas baseando-se em testes realizados anteriormente.

### 3.4 TRANSFORMAÇÃO PARA SISTEMA DE COORDENADAS SIDERAL

A integração numérica das equações e a resolução do Problema de Valor de Contorno foram efetivadas no referencial sinódico. No entanto, para uma análise das porções de saída da Terra e de chegada à Lua, é mais interessante representar as trajetórias em sistemas de coordenadas centrados nos primários. Assim, o objetivo do procedimento de transformação de coordenadas foi de transformar os resultados obtidos em termos de variáveis adimensionais no referencial sinódico, para resultados em termos de variáveis físicas no referencial sideral.

A partir dos dados das trajetórias, posições  $(x, y)$  e velocidades  $(\dot{x}, \dot{y})$ , no referencial sinódico em unidades adimensionais, aplicou-se o seguinte procedimento: (i) as posições  $(x, y)$  foram multiplicadas pela matriz de rotação  $\mathbf{R}$ , como mostrado pela Equação (2.11), obtendo-se as posições  $(X, Y)$  no referencial sideral centrado no baricentro do sistema Terra-Lua; (ii) as velocidades  $(\dot{X}, \dot{Y})$  foram obtidas a partir da derivação da Equação (2.11) em relação ao tempo; (iii) deslocou-se a origem do sistema para a Terra, para analisar a etapa de partida da transferência completa, ou para a Lua, para analisar a etapa de chegada da transferência completa.

Por fim, foi feita uma conversão de unidades na qual as posições obtidas foram multiplicadas pela distância entre a Terra e a Lua, em quilômetros, e as velocidades foram multiplicadas tanto por esta distância quanto pela velocidade angular do sistema Terra-Lua para obter seus valores em unidades de quilômetro por segundo. Para o sistema em questão, tem-se  $\omega = 2,66170 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$ , referente a um período de  $T = 27,32$  dias (SZEBEHELY, 1967). Com isso, obtiveram-se as posições  $(X, Y)$  e as velocidades  $(\dot{X}, \dot{Y})$  no referencial sideral em variáveis física. O tempo também foi transformado, isto é, seu valor adimensional foi dividido pela velocidade angular do sistema Terra-Lua.

### 3.5 APROXIMAÇÃO POR UMA ÓRBITA OSCULANTE

A seguir descreve-se o processo de aproximação de trechos específicos das trajetórias trânsito por órbitas elípticas osculantes, isto é, órbitas cujos elementos orbitais correspondem, instantaneamente, aos elementos de uma órbita não perturbada (BROWN, 1998). Utilizando a teoria do Problema de Dois Corpos, foi possível tratar porções das soluções trânsito próximas à Terra e à Lua como órbitas elípticas osculantes a fim de calcular os incrementos de velocidades necessários para efetivar as transferências propostas.

Primeiramente, uma trajetória no referencial sideral foi centrada em um dos pontos de interesse, isto é, em torno da Terra ou da Lua. Observando a curva resultante, selecionou-se uma porção da trajetória cujo formato se assemelha a uma elipse. Uma vez selecionado o trecho, calculou-se a partir dos dados, o raios de apocentro ( $r_a$ ) e pericentro ( $r_p$ ) e os demais parâmetros que caracterizam uma órbita elíptica, isto é, o semi eixo maior ( $a$ ) e a excentricidade ( $e$ ).

Por fim, com esses valores em mãos, foi possível determinar o raio e a velocidade em todos pontos específicos desta elipse osculante utilizando as equações encontradas na Tabela 2.1. Para o objetivo proposto neste trabalho, só se fez necessário calcular esses valores em apenas alguns pontos relevantes, isto é, os pontos onde as manobras de transferência devem ser realizadas.

A aproximação desses trechos por órbitas elípticas é razoável neste contexto pois, apesar das soluções terem sido obtidas utilizando o modelo PR3CCP, a influência que, por exemplo, a Terra possui sobre um corpo que se encontra próximo o suficiente à ela, é mais significativa do que qualquer influência de outros primários (BROWN, 1998). O mesmo se verifica para trajetórias muito próximas à Lua. Assim, o uso do modelo do Problema de Dois Corpos torna-se aceitável para fins de uma análise preliminar.

### 3.6 CÁLCULO DOS INCREMENTOS DE VELOCIDADE DAS TRANSFERÊNCIAS TERRA-LUA

Com base no que foi descrito na Seção 2.3, é possível determinar os incrementos de velocidade necessários para realizar a transferência entre duas órbitas de interesse. O procedimento utilizado para tal neste trabalho é descrito no decorrer desta seção.

Inicialmente, de acordo com a Figura 2.5, definiu-se, para cada caso, a órbita que corresponde à órbita interna e a que corresponde à órbita externa. Em seguida, a partir das características geométricas, determinou-se a velocidade em pontos específicos. Especificamente, para o caso de uma órbita circular inicial foi necessário identificar o seu raio ( $r$ ) e o parâmetro gravitacional ( $\mu_e$ ), obtendo-se, assim, a velocidade ao longo da órbita. Já, para uma órbita elíptica, foi necessário identificar o parâmetro gravitacional ( $\mu_e$ ) e os raios de apocentro ( $r_a$ ) e pericentro ( $r_p$ ), e com estes valores, então, determinar as velocidades no apocentro ( $V_{ac}$ ) e no pericentro ( $V_{pc}$ ). Essas velocidades são calculadas utilizando a equação disponível na Tabela 2.1.

Ainda considerando a Figura 2.5 e levando em conta as características determinadas anteriormente, foram calculados os  $\Delta V$ s necessários para as transferências 3 e 3', conforme descrito na Seção 2.3.1. Após o cálculo, os  $\Delta V$ s totais das duas transferências possíveis foram comparados utilizando a seguinte razão,

$$R = \frac{[\Delta V_{total}]_3}{[\Delta V_{total}]_{3'}}. \quad (3.5)$$

No caso, se  $R > 1$  a órbita 3 é mais eficiente e foi considerada como resposta para os fins deste trabalho. Caso contrário, se  $R < 1$  a órbita 3' é mais eficiente.

### 3.7 CÁLCULO DO INCREMENTO DE VELOCIDADE PARA INJEÇÃO EM ÓRBITAS DE LYAPUNOV

Esta seção trata do procedimento utilizado para calcular o incremento de velocidade no caso específico da transferência entre uma solução genérica do PR3CCP com condição inicial no entorno da Terra e uma órbita de Lyapunov em torno de um ponto de Lagrange do sistema Terra-Lua.

As órbitas de Lyapunov constituem famílias uniparamétricas de órbitas em torno dos pontos de Lagrange. Embora essas soluções periódicas sejam instáveis, requerendo consumo de combustível para manter uma espaçonave em órbita, elas têm se mostrado úteis para diversos perfis de missões modernas (KOON et al., 2006). Por exemplo, as órbitas de Lyapunov em torno do ponto  $L_1$  do sistema Terra-Lua podem ser usadas como um *hub* de transporte na exploração continuada da Lua. Já as órbitas de Lyapunov em torno do ponto  $L_2$  podem ser utilizadas para missões de suporte de comunicações na Lua ou para observações lunares. Por fim, as órbitas em torno do ponto  $L_3$  podem constituir órbitas de estacionamento de infraestrutura para missões espaciais no Sistema Solar (SILVA, 2011).

As famílias de órbitas de Lyapunov do PR3CCP podem ser aproximadas numericamente a partir do refinamento das soluções periódicas do sistema linearizado (SILVA, 2011; ZAZZERA; TOPPUTO; MASSARI, 2004). Neste trabalho, a obtenção numérica dessas órbitas foi feita utilizando uma imple-

mentação em FORTRAN do procedimento descrito por Sousa-Silva e Terra (2013), Zazzera, Topputo e Massari (2004).

Conforme será apresentado nos resultados, a detecção extensiva de trajetórias trânsito proporcionou soluções no PR3CCP que se aproximam das regiões do espaço de estados populadas por órbitas de Lyapunov para diversos níveis de energia. Assim, além das transferências Terra-Lua buscadas originalmente, foi possível explorar também transferências entre a Terra e essas soluções periódicas.

Após obter numericamente órbitas de Lyapunov em torno dos Lagrangeanos colineares, essas soluções foram analisadas graficamente em conjunto com uma solução trânsito adequada, a fim de escolher uma órbita de Lyapunov específica que possibilitasse demonstrar o conceito para esse perfil de missão. A escolha da Lyapunov deve ser feita de tal modo que exista um ponto em comum entre as duas trajetórias. Esse ponto em comum é de suma importância, pois é nele que ocorrerá a manobra impulsiva para injetar a espaçonave na órbita de Lyapunov. Caso a intersecção seja vazia, ainda é possível conectar as soluções, mas para isso seria necessário determinar um arco de Lambert (CURTIS, 2013) entre elas, possivelmente, aumentando o consumo de combustível.

Uma vez que tanto a órbita de Lyapunov quanto à solução trânsito foram aproximadas numericamente utilizando um integrador com passo variável, após a detecção visual do cruzamento, recorreu-se à interpolação para refinar as curvas das soluções e identificar, de forma mais precisa, o ponto de intersecção no plano  $x - y$  e as velocidades  $(\dot{x}, \dot{y})$  correspondentes a esse ponto. A interpolação foi realizada utilizando uma rotina em FORTRAN com uma implementação do Método de Interpolação *Spline* Cúbico (PRESS et al., 1992).

Sejam  $(\dot{x}_{LYP}, \dot{y}_{LYP})$  e  $(\dot{x}_{traj}, \dot{y}_{traj})$  as velocidades no ponto de intersecção na órbita de Lyapunov e na trajetória obtida, respectivamente. O incremento no módulo da velocidade necessário para a transferência entre essas órbitas é dado por

$$\Delta V = \sqrt{\Delta V_x^2 + \Delta V_y^2}, \quad (3.6)$$

onde,

$$\begin{aligned} \Delta V_x &= \dot{x}_{LYP} - \dot{x}_{traj}, \\ \Delta V_y &= \dot{y}_{LYP} - \dot{y}_{traj}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

são os incrementos de velocidade necessários nas direções  $x$  e  $y$ , sucessivamente.

## 4 RESULTADOS

Neste capítulo os resultados obtidos neste trabalho são apresentados conforme as etapas relativas à metodologia descrita no Capítulo 3.

### 4.1 DETECÇÃO EXTENSIVA

A Tabela 4.1 mostra cinco condições iniciais dentre as várias encontradas que resultam em trajetórias do tipo trânsito. As trajetórias obtidas pela integração numérica das equações de movimento do PR3CCP a partir dessas condições iniciais utilizando o método de Runge-Kutta de 7ª e 8ª ordem são mostradas na Figura 4.1.

Tabela 4.1 – Condições Iniciais de Trajetórias do tipo Trânsito.

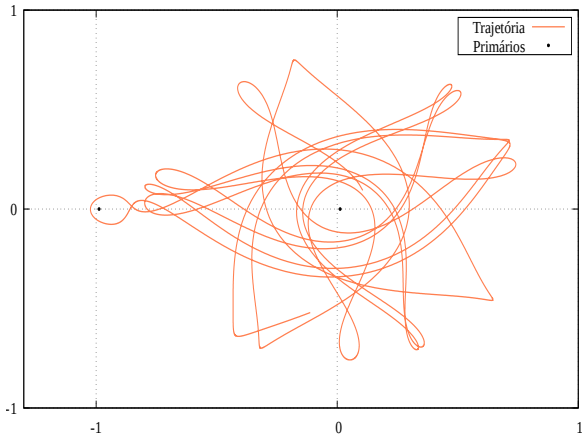
Trajectoria	$x$	$y$	$\dot{x}$	$\dot{y}$	$C$
1	0,1060632593	0,0939125910	-1,3000000000	3,1718628600	3.1793449098
2	0,0960632593	0,1039125910	-1,4000000000	3,1188509403	3.1593449098
3	-0,1039367406	0,0639125910	-1,4000000000	-3,1350978890	3.1743449098
4	-0,1039367406	-0,0660874089	1,4000000000	3,1161728566	3.1743449098
5	-0,1139367406	0,0139125910	-1,5000000000	-3,1953700877	3.1673449098

fonte: Produção do Próprio Autor.

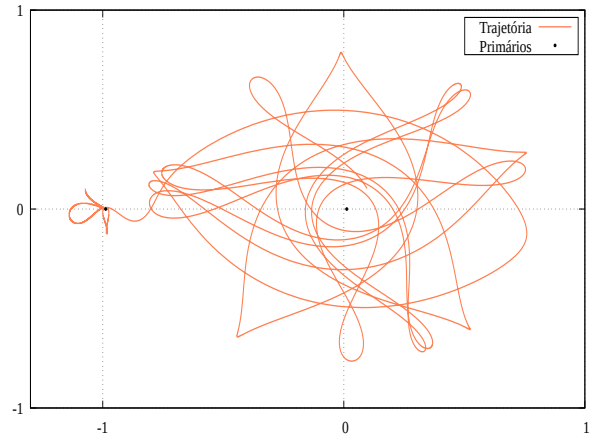
### 4.2 ANÁLISE DAS TRAJETÓRIAS TRÂNSITO E PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

Considerando a metodologia proposta na Seção 3.3, analisaram-se as cinco trajetórias do tipo trânsito ilustradas na Figura 4.1. A partir desta análise, foram selecionados dois pontos na primeira trajetória para serem utilizados na solução numérica do PR3CCP através de um Problema de Valor de Contorno. As condições de contorno obtidas estão representadas na Figura 4.2 para o caso da primeira trajetória trânsito. A Tabela 4.2 mostra os valores desses pontos extraídos da trajetória. Especificamente, tem-se a posição inicial e a posição final e também é dada a velocidade inicial que é utilizada pelo método iterativo para resolver o problema de valor de contorno. Além dessa condição de contorno, a Tabela 4.2 apresenta um segundo conjunto de condições de contorno, estas últimas foram obtidas com base nos critérios, estabelecidos na Seção 3.3, de proximidade à Terra de forma à ser possível projetar missões com saída de órbitas com altitudes próximas à órbitas GEO.

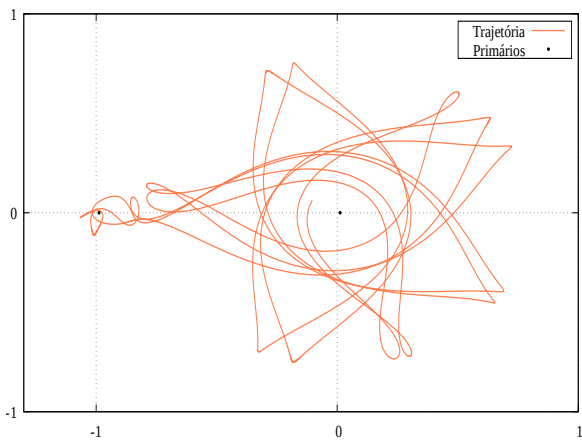
Figura 4.1 – Trajetória obtidas do tipo Trânsito.



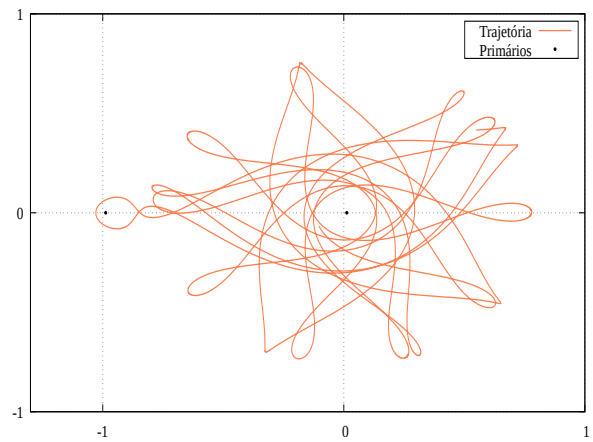
(a) 1ª Trajetória Trânsito



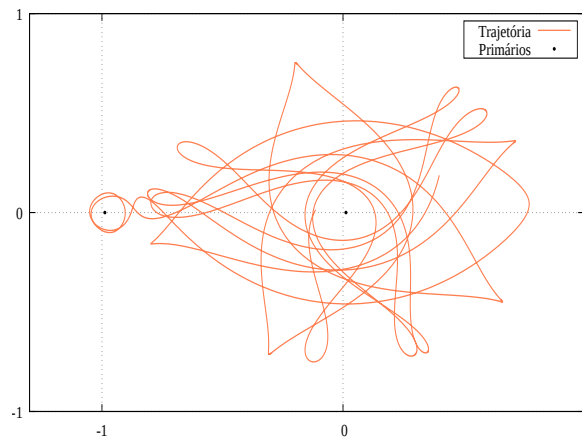
(b) 2ª Trajetória Trânsito



(c) 3ª Trajetória Trânsito



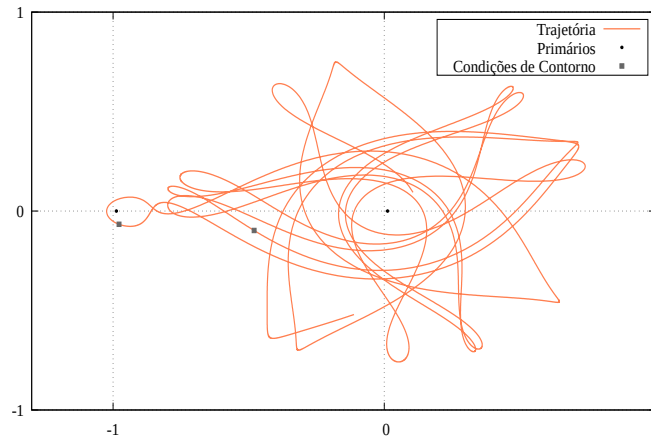
(d) 4ª Trajetória Trânsito



(e) 5ª Trajetória Trânsito

fonte: Produção do próprio autor.

Figura 4.2 – Condições de contorno selecionadas.



fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 4.2 – Condições de Contorno.

Origem	Posição	$x$	$y$	$\dot{x}$	$\dot{y}$
Trajetória	Inicial	-0,4798481762	-0,0977524444	0,7910024523	-0,6575924754
	Final	-0,9779534148	-0,0666546311	-	-
Critérios	Inicial	-0,0839367406	-1,6087408949	3,0	-3,0
	Final	-0,99	-0,002	-	-

fonte: Produção do Próprio Autor.

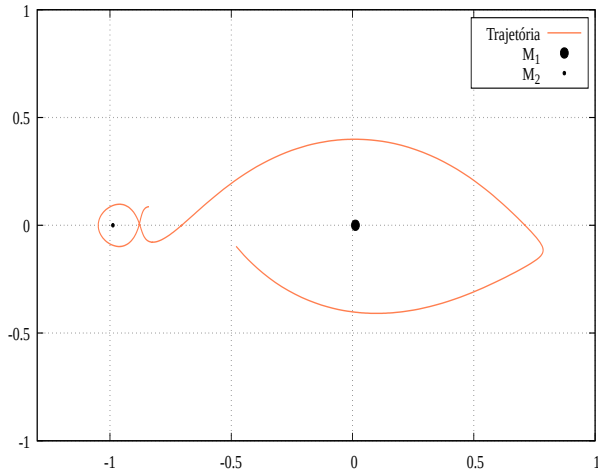
Após a escolha das condições de contorno, resolveu-se o problema de valor de contorno. No caso das condições de contorno obtidas a partir trajetórias obtidas por Detecção Extensiva, considerou-se um tempo de integração de  $t_{\text{int}} = 8$  unidades adimensionais. Nesta rodada de simulações foram obtidas mais de 30 trajetórias diferentes, das quais apenas 12 foram condizentes com os propósitos deste trabalho. Tais respostas foram analisadas e notou-se que suas geometrias eram muito semelhantes entre si, logo escolheu-se trabalhar apenas com uma delas, a título de exemplificação da construção de uma transferência completa. Esta trajetória é mostrada na Figura 4.3a.

Em seguida, as simulações foram repetidas utilizando as mesmas condições de contorno, porém aumentando o tempo de integração para  $t_{\text{int}} = 20$  unidades adimensionais. Neste caso, foram encontradas 13 trajetórias. Dentre estas, 12 apresentaram pequenas diferenças entre si. A décima terceira, ilustrada na Figura 4.3b, apresentou um comportamento diferente das demais na chegada à Lua, permanecendo em órbita natural por mais tempo em torno do satélite, e por isso foi escolhida para representar a resposta da segunda rodada de simulações.

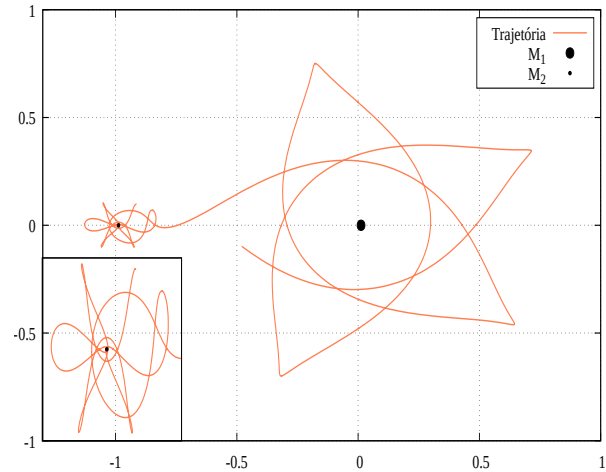
Por fim, utilizaram-se as condições de contorno próximas à Terra e a Lua, considerando um tempo de integração de  $t_{\text{int}} = 15$  unidades adimensionais de tempo. Das respostas obtidas por estas simulações, foram encontradas trajetórias do tipo trânsito com formato bem diferente das trajetórias obtidas até então. Escolheu-se a trajetória mostrada na Figura 4.3c para ilustrar a resposta da terceira rodada. Devido à proximidade da espaçonave com os pontos de Lagrange colineares, esta trajetória foi explorada para exemplificar a possibilidade de transferir a espaçonave para uma órbita de Lyapunov em torno do ponto  $L_3$ .



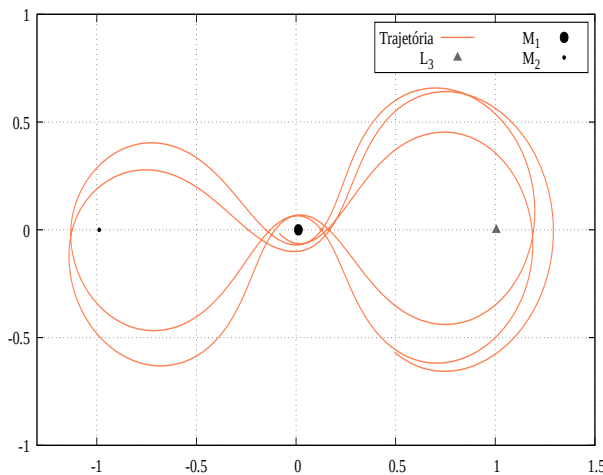
Figura 4.3 – Trajetória obtidas a partir do Problema de Valor de Contorno.



(a) 1ª rodada - Trajetória resultante.



(b) 2ª rodada - Trajetória resultante.



(c) 3ª rodada - Trajetória resultante.

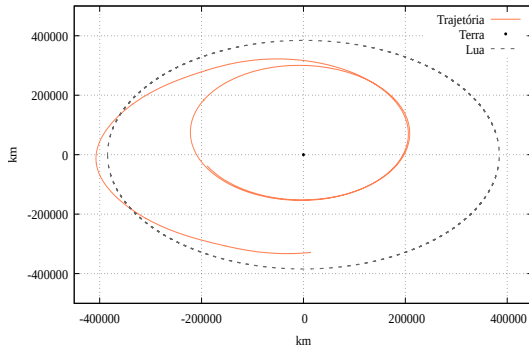
fonte: Produção do próprio autor.

### 4.3 TRANSFORMAÇÃO DE REFERENCIAL

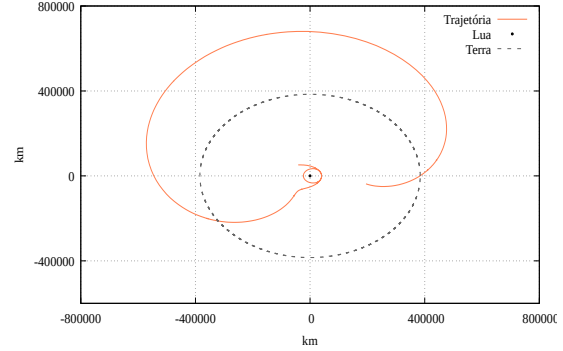
As trajetórias obtidas anteriormente foram representadas no sistema sideral, conforme descrito na Seção 3.4. As trajetórias obtidas nas duas primeiras rodadas foram representadas tanto no sistema sideral com a Terra na origem, como também no sistema sideral com a Lua na origem. Já para o caso da trajetória resultante da última rodada de simulação, a mesma foi representada tanto no sistema sideral com a Terra na origem, quanto no sistema sideral com o ponto de Lagrange  $L_3$  na origem.

A Figura 4.4 ilustra a resposta obtida na primeira rodada no referencial sideral, sendo que a 4.4a ilustra esta trajetória no sistema com a origem posicionada na Terra, enquanto que a 4.4b mostra a mesma trajetória, porém em um sistema com a origem posicionada na Lua. Da mesma forma, a Figura 4.5, também, ilustra a resposta obtida na segunda rodada, mostradas em dois sistemas, o primeiro centrado na Terra e o outro na Lua. As linhas pontilhadas nas Figuras 4.4a e 4.5a mostram a órbita da Lua em relação à Terra. Já as linhas pontilhadas nas Figuras 4.4b e 4.5b ilustram a órbita da Terra em relação à Lua.

Figura 4.4 – Trajetória 1 - Referencial Sideral em Variáveis Físicas.



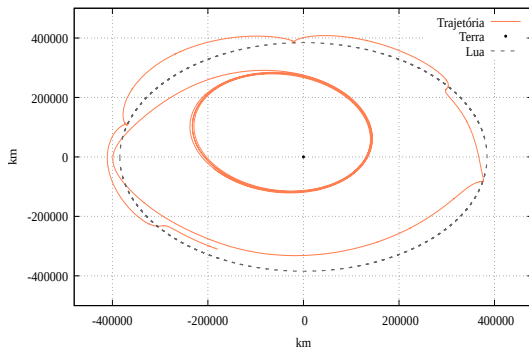
(a) Trajetória 01 - origem centrada na Terra



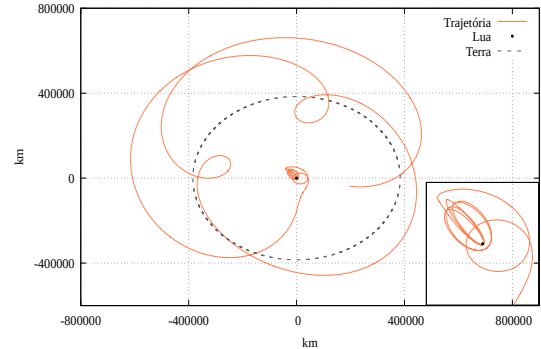
(b) Trajetória 01 - origem centrada na Lua

fonte: Produção do próprio autor.

Figura 4.5 – Trajetória 2 - Referencial Sideral em Variáveis Físicas.



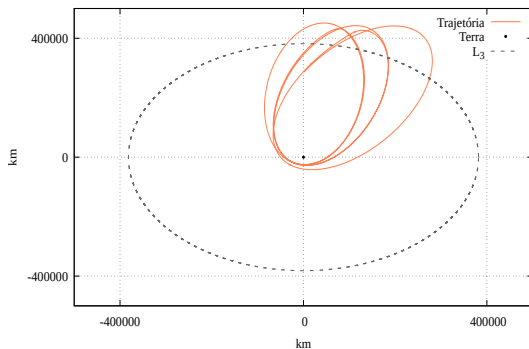
(a) Trajetória 02 - origem centrada na Terra



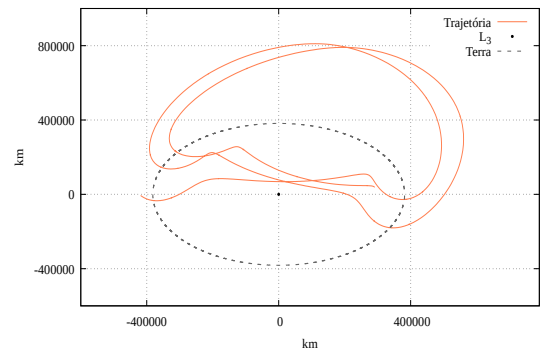
(b) Trajetória 02 - origem centrada na Lua

fonte: Produção do próprio autor.

Figura 4.6 – Trajetória 3 - Referencial Sideral em Variáveis Físicas.



(a) Trajetória 03 - origem centrada na Terra



(b) Trajetória 03 - origem centrada em  $L_3$

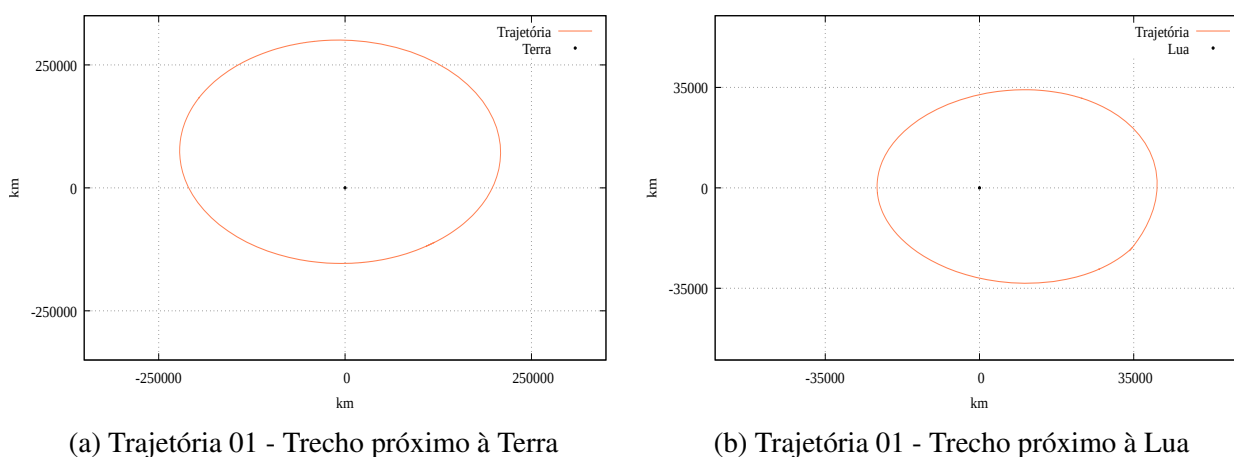
fonte: Produção do próprio autor.

#### 4.4 ÓRBITAS OSCULANTES

A partir dos resultados obtidos através da mudança do referencial, foram selecionados, para as duas primeiras rodadas, trechos destas trajetórias em torno da Terra e da Lua que se assemelhassem à elipses. Já, para a trajetória da terceira rodada, foi selecionada apenas uma parte da órbita próxima à Terra. Na Figura 4.7 e na Figura 4.8 são mostrados o trechos selecionados para as trajetórias da

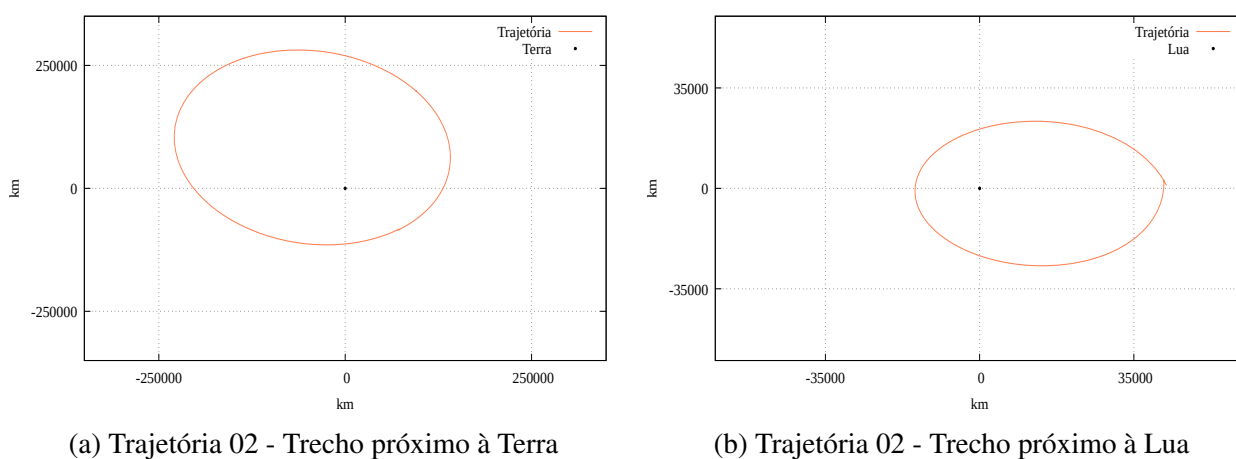
primeira e da segunda rodada, enquanto que na Figura 4.9 é mostrado o trecho da trajetória da terceira rodada.

Figura 4.7 – Trechos selecionados a partir da primeira rodada.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 4.8 – Trechos selecionados a partir da segunda rodada.

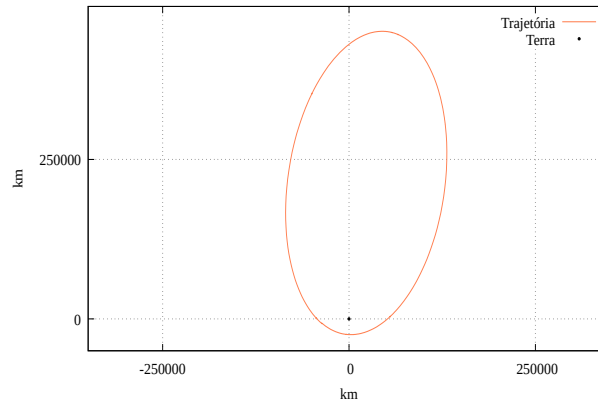


fonte: Produção do próprio autor.

Conforme descrito na metodologia, foram selecionados dois pontos destas trajetórias, o mais próximo e o mais distante em relação ao primário centrado na origem, e a partir destes pontos, foram determinados os raios de pericentro ( $r_p$ ) e apocentro ( $r_a$ ), respectivamente, dessas elipses aproximadas. Em seguida, determinou-se o semi-eixo maior ( $a$ ) e a excentricidade ( $e$ ) de cada órbita aproximada, utilizando as equações encontradas na Tabela 2.1. Os valores destas características para cada um dos trechos estão representados na Tabela 4.3.

Em seguida, calcularam-se os módulos das velocidades nos apocentro e pericentro em cada uma das órbitas osculantes, utilizando a equação na Tabela 2.1. Os valores dos parâmetros de massa  $\mu_e$  utilizados para cada órbita estão dados na Tabela 3.1. Os módulos das velocidades obtidas nos pontos máximo e mínimo de cada órbita encontram-se na Tabela 4.4.

Figura 4.9 – Trecho selecionado a partir da terceira rodada.



fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 4.3 – Características das Órbitas aproximadas.

	$r_p$	$r_a$	a	e
Trajectoria 01 - Terra	153.428, 34 km	300.816, 91 km	227.122, 63 km	0, 32447
Trajectoria 01 - Lua	23.238, 36 km	40.698, 12 km	31.968, 24 km	0, 27308
Trajectoria 02 - Terra	109.020, 85 km	297.495, 51 km	203.258, 18 km	0, 46363
Trajectoria 02 - Lua	14.602, 83 km	43.397, 55 km	29000, 19 km	0, 49646
Trajectoria 03 - Terra	24.561, 18 km	453.503, 44 km	239.032, 31 km	0, 89725

fonte: Produção do Próprio Autor.

Tabela 4.4 – Velocidades no Apocentro e no Pericentro para cada caso.

	$V_p$	$V_a$
Trajectoria 01 - Terra	1, 8549 km/s	0, 9461 km/s
Trajectoria 01 - Lua	0, 5182 km/s	0, 2959 km/s
Trajectoria 02 - Terra	2, 3133 km/s	0, 8477 km/s
Trajectoria 02 - Lua	0, 7088 km/s	0, 2385 km/s
Trajectoria 03 - Terra	5, 5489 km/s	0, 3005 km/s

fonte: Produção do Próprio Autor.

Por fim, para ilustrar a diferença entre os dois modelos utilizados, foi feita uma comparação entre o módulo da velocidade no apocentro obtida através do modelo de Dois Corpos, com aquele obtido numericamente pela solução do PR3CCP, para cada um dos casos apresentados anteriormente.

Pode-se observar que, para as órbitas próximas à Terra a diferença entre os módulos das velocidades calculadas pelos dois métodos é menor que 0,5%, entretanto, para as órbitas próximas à Lua esta diferença torna-se mais significativa, como mostrado no caso da órbita representada pela Figura 4.8b, onde essa diferença é maior que 18%. Essas diferenças podem ser explicadas da seguinte forma, a perturbação que a Terra exercer sobre uma espaçonave que está orbitando à Lua é maior se for comparado com a perturbação que a Lua exercer sobre uma espaçonave que está em uma órbita em torno da Terra.

Tabela 4.5 – Velocidades no Apocentro e no Pericentro para cada caso.

	Método PR3CCP	Método de Dois Corpos	Diferença - %
Trajectoria 01 - Terra	0,9461 km/s	0,9441 km/s	0,21%
Trajectoria 01 - Lua	0,2959 km/s	0,3168 km/s	6,61%
Trajectoria 02 - Terra	0,8477 km/s	0,8464 km/s	0,16%
Trajectoria 02 - Lua	0,2385 km/s	0,2923 km/s	18,42%
Trajectoria 03 - Terra	0,3005 km/s	0,2967 km/s	1,29%

fonte: Produção do Próprio Autor.

#### 4.5 INCREMENTOS DE VELOCIDADE - ÓRBITA LUNAR

Utilizando a metodologia descrita na Seção 3.6, foi possível determinar os incrementos de velocidade necessários para as missões cujos perfis envolvem alcançar uma órbita lunar, considerando duas missões distintas: (i) transferir a espaçonave de uma órbita do tipo LEO, de 400 km de altitude, até a elipse osculatória em torno da Terra, e, após a injeção translunar, transferir a espaçonave de uma elipse osculatória para uma órbita à 100 km do solo lunar, sabendo que órbitas do tipo LEO são órbitas em torno da Terra com altitudes entre 150 km e 1.000 km (CURTIS, 2013); (ii) transferir a espaçonave de uma órbita do tipo GEO até a elipse osculatória em torno da Terra, e, após a injeção translunar, transferir a espaçonave de uma elipse osculatória para uma órbita à 100 km do solo lunar.

A partir das elipses osculatórias obtidas na primeira rodada, ilustrada pela Figura 4.7, os módulos dos incrementos de velocidades necessários para cada transferência,  $\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$ , utilizados nos perfis de missão descritos anteriormente estão mostrados na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Os módulos dos incrementos de velocidade - Primeira Rodada.

Perfil de Missão	Tipo de Transferência	$\Delta V_1$	$\Delta V_2$	$\Delta V_{Total}$
(i)	LEO - Elipse Osculante	3,058 km/s	0,705 km/s	3,763 km/s
	Elipse Osculante - Órbita Lunar	0,626 km/s	0,194 km/s	0,820 km/s
(ii)	GTO - Elipse Osculante	0,998 km/s	0,375 km/s	1,373 km/s
	Elipse Osculante - Órbita Lunar	0,626 km/s	0,194 km/s	0,820 km/s

fonte: Produção do Próprio Autor.

Tabela 4.7 – O somatório dos módulos dos incrementos de velocidade - Primeira Rodada.

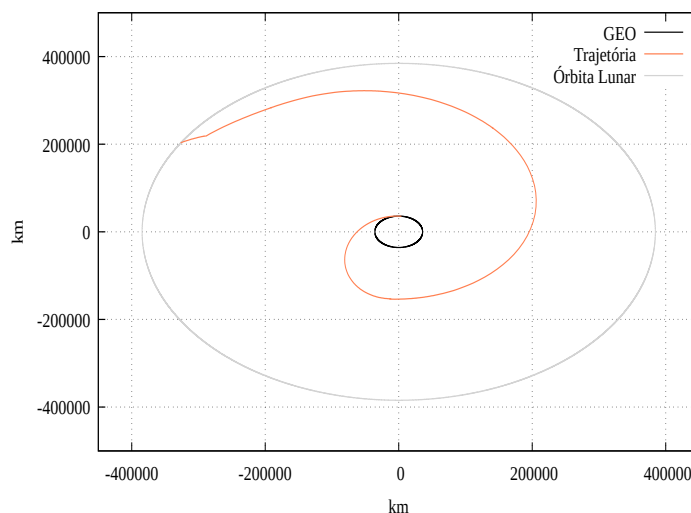
Perfil de Missão	Somatório dos Incrementos de Velocidade $\sum \Delta V$
(i)	4,583 km/s
(ii)	2,193 km/s

fonte: Produção do Próprio Autor.

Logo, a somatória dos módulos dos incrementos necessária para os dois perfis de missão em torno da Lua, através da injeção translunar obtida pela primeira rodada estão ilustrados na Tabela 4.7, onde  $\sum \Delta V$  equivale à somatória, em módulo, dos incrementos de velocidade necessários para a realização de cada manobra orbital.

A fim de mostrar graficamente uma trajetória obtida pela metodologia proposta, foi feita a representação gráfica do perfil de missão (ii) no referencial sideral centrado na Terra, utilizando como injeção translunar o trecho retirado do resultado obtido na primeira rodada. Este exemplo é visto na Figura 4.10.

Figura 4.10 – Representação gráfica de um perfil de missão completo.



fonte: Produção do próprio autor.

Da mesma forma, por meio dos trechos obtidos na segunda rodada de solução, ilustrada pela Figura 4.8, os módulos dos incrementos de velocidade,  $\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$ , para os perfis de missão com órbitas lunares são dados na Tabela 4.8. Por fim, a somatória, em módulo, dos incrementos de velocidade ( $\sum \Delta V$ ) necessária para os dois perfis de missão em torno da Lua, através da injeção translunar obtida pela segunda rodada estão na Tabela 4.9.

Tabela 4.8 – Os módulos dos incrementos de velocidade - Segunda Rodada.

Perfil de Missão	Tipo de Transferência	$\Delta V_1$	$\Delta V_2$	$\Delta V_{\text{Total}}$
(i)	LEO - Elipse Osculante	3,057 km/s	0,603 km/s	3,660 km/s
	Elipse Osculante - Órbita Lunar	0,629 km/s	0,143 km/s	0,772 km/s
(ii)	GTO - Elipse Osculante	0,995 km/s	0,271 km/s	1,266 km/s
	Elipse Osculante - Órbita Lunar	0,629 km/s	0,143 km/s	0,772 km/s

fonte: Produção do Próprio Autor.

Tabela 4.9 – O somatório dos módulos dos incrementos de velocidade - Segunda Rodada.

Perfil de Missão	$\sum \Delta V$
(i)	4,432 km/s
(ii)	2,038 km/s

fonte: Produção do Próprio Autor.

Pelos resultados mostrados pelas Tabelas 4.7 e 4.9, observou-se o seguinte comportamento: o  $\sum \Delta V$  correspondente ao perfil de missão que se inicia a partir de uma órbita LEO, de 400 km, é

maior que o  $\sum \Delta V$  equivalente ao perfil de missão que parte de uma órbita GEO, sendo este último condizente com os valores encontrados na literatura.

#### 4.6 INCREMENTO DE VELOCIDADE - INJEÇÃO EM UMA ÓRBITA DE LYAPUNOV

Nesta seção discute-se o incremento de velocidade necessário ao último perfil de missão proposto neste trabalho. Ou seja, para o perfil de missão em que partindo de uma órbita em torno da Terra e utilizando o trecho da trajetória obtida na terceira rodada de simulações, ilustrada na Figura 4.3c, transfere-se a espaçonave para uma órbita de Lyapunov em torno do ponto de Lagrange  $L_3$ . Após a determinação dos incrementos da velocidade em módulo para as duas manobras necessárias, para efeitos comparativos, os cálculos foram repetidos para o mesmo perfil, porém, considerando uma órbita GTO como ponto de partida.

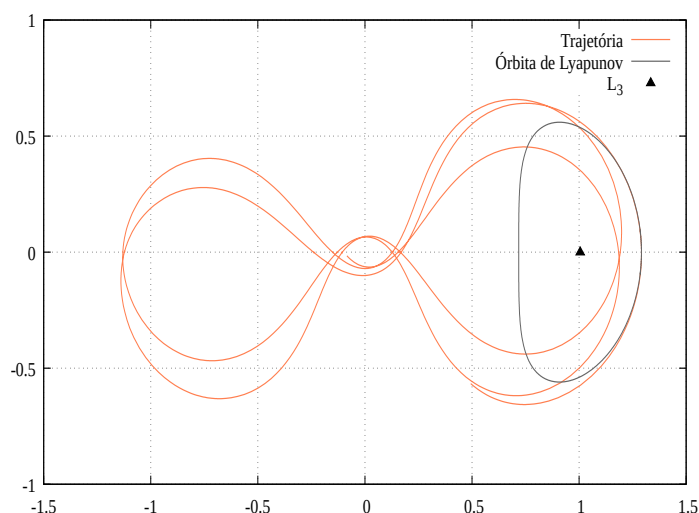
Conforme o que foi descrito na Seção 3.6, foram calculadas os módulos dos acréscimos de velocidade, mostrados na Tabela 4.10, necessários para os dois casos, isto é, partida de uma órbita LEO, com altitude de 400 km e partida de uma GTO, chegando na órbita osculante elíptica obtida por meio de uma aproximação de um trecho obtido na terceira rodada, mostrada na Figura 4.9.

Tabela 4.10 – Os módulos dos incrementos de velocidade - Manobra Inicial.

Tipo de Transferência	$\Delta V_1$	$\Delta V_2$	$\Delta V_{Total}$
LEO - Elipse Osculante	1,934 km/s	2,348km/s	4,282 km/s
GTO - Elipse Osculante	0,436 km/s	4,228 km/s	4,664 km/s

fonte: Produção do Próprio Autor.

Figura 4.11 – Órbita de Lyapunov e Trajetória resultante da 3ª rodada.



fonte: Produção do próprio autor.

Após a obtenção numérica de órbitas de Lyapunov para diversos níveis de energia, foi escolhida entre estas, aquela que tem um ponto, posições em  $x$  e  $y$ , em comum com a trajetória obtida na terceira rodada de simulações. Após essa escolha, trechos de ambas as curvas próximos ao ponto de

contato foram refinados por meio de um método de interpolação, descrito na Seção 3.7. A órbita de Lyapunov escolhida e a trajetória obtida pelo Método de *Shooting* no referencial sinódico, com os trechos interpolados são mostradas na Figura 4.11. Os pontos de intersecção foram transformadas para o referencial sideral centrado na Terra em variáveis físicas, considerando diversos ângulos de fases a fim de recuperar o cruzamento nesse referencial. O ângulo de fase, se refere ao ângulo entre os referenciais sinódico e sideral em  $t = 0$ , isto é, entre os eixos  $X$  e  $\bar{x}$  como mostrado na Figura 2.1.

Assim, a partir destes pontos e utilizando o equacionamento descrito na Seção 3.7, os módulos dos acréscimos de velocidade necessários para realizar a manobra orbital entre a Trajetória resultante da 3ª rodada e a órbita de Lyapunov são mostradas na Tabela 4.11. Por fim, o somatório dos acréscimos de velocidades, em módulo, necessários para o perfil de missão discutido nesta seção é especificado na Tabela 4.12.

Tabela 4.11 – Os módulos dos incrementos de velocidade - Manobra Final.

Tipo de Transferência	$\Delta V_X$	$\Delta V_Y$	$\Delta V_{Total}$
Injeção Translunar - Órbita Lyapunov	0,367 km/s	0,194 km/s	0,415 km/s

fonte: Produção do Próprio Autor.

Tabela 4.12 – O somatório dos módulos dos incrementos de velocidade - Total.

Perfil de Missão	$\sum \Delta V$
LEO - Injeção Translunar - Órbita de Lyapunov	4,697 km/s
GTO - Injeção Translunar - Órbita de Lyapunov	5,079 km/s

fonte: Produção do Próprio Autor.

Nos resultados mostrados pela Tabela 4.12 foi possível observar valores de  $\sum \Delta V$  encontrados são bem maiores daqueles encontrados na literatura, além de fugir do escopo do trabalho na busca por trajetórias de baixa energia. Entretanto, este perfil de missão foi escolhido apenas para mostrar uma missão de objetivo diferente dos dois primeiros, demonstrando a possibilidade de obter missões utilizando soluções periódicas instáveis do sistema.



## 5 CONCLUSÃO

Este trabalho consistiu na investigação de trajetórias trânsito no PR3CCP e sua aplicação em projeto preliminar de transferências Terra-Lua. Primeiramente, realizou-se uma busca por condições iniciais de trajetórias transito a partir de um procedimento de Detecção Extensiva e critérios de proximidade com os primários do Sistema Terra-Lua-Espaçonave. Por meio de tais trajetórias foi possível determinar um grupo de condições iniciais e finais que foram utilizadas como condições de contorno na solução numérica das equações do PR3CCP, utilizando o Método de *Shooting*, com o intuito de buscar soluções com o tempo de integração inferiores ao utilizados na primeira análise.

As trajetórias resultantes foram representadas no referencial sideral em função de variáveis físicas, e alguns trechos dessas soluções próximos à Terra e à Lua foram aproximados por órbitas elípticas osculantes. Assim, foi possível determinar os incrementos de velocidade necessários para efetuar transferências Terra-Lua considerando dois perfis de missão distintos.

O perfil de missão no qual a espaçonave parte de um órbita GEO e utiliza injeções translunares obtidas nas duas primeiras rodadas de simulações, até chegar em uma órbita em torno da Lua com altitude de 100 km, apresentou custo condizente com os encontrados na literatura. Por outro lado, o consumo de combustível dos demais perfis investigados não são apropriados no contexto de missões de baixa energia, requerendo outras modelagens que possibilitem a redução dos custos das manobras.

A metodologia proposta neste trabalho objetivou encontrar trajetórias preliminares de transferência Terra-Lua, obtendo uma estimativa dos custos necessários em termos de incrementos de velocidade, utilizando uma simplificação no cálculo das manobras por meio de aproximações de dois corpos na partida e na chegada e uma modelagem de três corpos na fase de transferência. No entanto, o refinamento das soluções preliminares encontradas é necessário para validar as soluções obtidas, podendo este aspecto ser explorado em trabalho futuros.

## REFERÊNCIAS

- BATE, R.; MUELLER, D.; WHITE, J. **Fundamentals of Astrodynamics**. 1st. ed. New York: Dover Publications, 1971.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. [S.l.]: Guanabara Dois, 1985.
- BROWN, C. D. **Spacecraft mission design**. Virginia: AIAA, 1998.
- CAPUZZO-DOLCETTA, R.; GIANCOTTI, M. A study of low-energy transfer orbits to the moon: towards an operational optimization technique. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 115, n. 3, p. 215–232, 2013.
- CONLEY, C. Low energy transit orbits in the restricted three-body problem. **SIAM Journal of Applied Mathematics**, v. 16, p. 732–746, 1968.
- CURTIS, H. D. **Orbital Mechanics for Engineering Students**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2013.
- FRANCO, N. B. **Cálculo Numérico**. [S.l.]: Pearson, 2006.
- KONDAPALLI, R.; KUGA, H. Manual de uso de um conjunto de integradores numéricos para problemas de condições iniciais. **São José dos Campos: INPE**, 1986.
- KOON, W. et al. Low energy transfer to the Moon. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 81, p. 63–73, 2001.
- KOON, W. S. et al. **Dynamical systems, the three-body problem and space mission design**. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 2006.
- PRESS, W. H. et al. **Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing**. [S.l.]: Press Syndicate of the University of Cambridge, 1992.
- SILVA, P. A. de S. **The Algorithmic Weak Stability Boundary in Earth-to-Moon Mission Design: Dynamical Aspects and Applicability**. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico Aeronáutico, São José dos Campos, 2011.
- SOUSA-SILVA, P.; TERRA, M. O. Efficient numerical tools to investigate hyperbolic dynamical structures in a spatial threebody system. **COBEM - 22 International Congress of Mechanical Engineering**, 2013.
- SZEBEHELY, V. **Theory of Orbits**. New York: Academic Press, 1967.
- YAGASAKI, K. Computation of low energy earth-to-moon transfers with moderate flight time. **Physica D**, v. 197, p. 313–331, 2004.
- ZAZZERA, F. B.; TOPPUTO, F.; MASSARI, M. Assessment of mission design including utilization of libration points and weak stability boundaries. **Ariadna Study id**, v. 3, p. 4103, 2004.