


unesp  UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Campus de Ilha Solteira - SP

DILSON AMANCIO ALVES JUNIOR

**PROJETO DE CONTROLADOR ROBUSTO LQR VIA
DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES**

Ilha Solteira

2022



DILSON AMANCIO ALVES JUNIOR

**PROJETO DE CONTROLADOR ROBUSTO LQR VIA
DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - UNESP Campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Automação.

Prof. Dr. Edvaldo Assunção

Orientador

Ilha Solteira

2022



FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

A474p Alves Junior, Dilson Amancio.
Projeto de controlador robusto LQR via desigualdades matriciais lineares /
Dilson Amancio Alves Junior. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2022
50 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2022

Orientador: Edvaldo Assunção
Coorientador: Marco Antonio Leite Beteto
Inclui bibliografia

1. Regulador Linear Quadrático (LQR). 2. Desigualdades Matriciais Lineares
(LMIs). 3. Lema de finsler. 4. Taxa de decaimento. 5. Helicóptero 3-DOF.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: PROJETO DE CONTROLADOR ROBUSTO LQR VIA DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES.

AUTOR: DILSON AMANCIO ALVES JUNIOR

ORIENTADOR: EDVALDO ASSUNÇÃO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. JEAN MARCOS DE SOUZA RIBEIRO (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA (Participação Virtual) Diogo Ramalho de Oliveira
Departamento de Eletroeletrônica / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - IFMS

Ilha Solteira, 24 de janeiro de 2022

Dedico este trabalho aos meus pais, Dilson e Sonia;

À minha namorada, Ana Flávia;

por todo incentivo, amor e confiança em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os familiares, amigos, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- À Deus, por me dar discernimento, sabedoria e por sempre estar presente em minhas escolhas;
- Aos meus pais, Dilson Amancio Alves e Sonia de Fatima Borges Alves, pelo carinho e total apoio durante toda minha vida;
- Ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção, pela oportunidade, ensinamentos, paciência e confiança;
- Ao Prof. Dr. Rodrigo Cardim, pelo acompanhamento nas bancas, sugestões e incentivo;
- Ao Prof. Dr. Jean Marcos de Souza Ribeiro, pelo acompanhamento nas bancas, sugestões e incentivo;
- Ao Mestre Marco Antonio Leite Beteto, por toda paciência, incentivo e ajuda oferecida na orientação deste trabalho;
- À minha namorada, Ana Flávia, pelo carinho e por estar sempre presente em todos os dias, me apoiando e ajudando nos momentos mais difíceis;
- Aos meus amigos de Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC), que mesmo nesse momento de pandemia, contribuíram direta ou indiretamente;
- Às agências de fomento, uma vez que este trabalho foi parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código Financeiro 001, e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

*“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos
não é senão uma gota de água no mar. Mas o
mar seria menor se lhe faltasse uma gota”*

(Madre Teresa de Calcuta)

RESUMO

Neste trabalho, é apresentada uma nova abordagem com restrição de taxa de decaimento para a resolução do problema do regulador linear quadrático (do inglês, *Linear Quadratic Regulator* – LQR) baseada em desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* – LMIs) para sistemas lineares contínuos e invariantes no tempo (do inglês, *Linear Time Invariant* - LTI) sujeitos a incertezas politópicas no modelo. O projeto de controladores é baseado na realimentação de estados. Para a formulação desta nova abordagem foi utilizada uma função de Lyapunov dependente de parâmetros combinada com o Lema de Finsler, que permitiu o acréscimo de matrizes extras e redução do número de LMIs, encontrando resultados satisfatórios de factibilidade. A abordagem considera uma matriz Q e uma \mathcal{R} para cada vértice do politopo (Q_i, \mathcal{R}_i) , além de permitir priorizar o desempenho de cada vértice do conjunto de incertezas. Um conjunto de matrizes de ponderação para cada vértice permite melhorar o comportamento dinâmico do sistema incerto e/ou do sinal de controle. A partir dos controladores projetados e com o auxílio do *software* Matlab[®] /Simulink, foram feitas simulações para validar as condições propostas em dois exemplos numéricos, massa-mola-amortecedor e helicóptero 3-DOF, e uma implementação prática em um helicóptero 3-DOF (*Degrees Of Freedom* - Graus de liberdade) de bancada, produzido pela Quanser[®].

Palavras-chave: Regulador Linear Quadrático (LQR), Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), Lema de Finsler, Taxa de Decaimento, Helicóptero 3-DOF.

ABSTRACT

In this work, a new approach with decay rate constraint is presented for the resolution of the quadratic linear regulator (LQR) problem based on linear matrix inequalities (LMIs) for continuous and linear time-invariant (LTI) systems subject to polytypic uncertainties in the model. The controller design is based on state feedback. To formulate this new approach, a parameter-dependent Lyapunov function combined with Finsler's Lemma was used, which allowed the addition of extra matrices and the reduction of the number of LMIs, finding satisfactory feasibility results. The approach considers a matrix Q and \mathcal{R} for each vertex of the polytope (Q_i, \mathcal{R}_i) , in addition to allowing prioritizing the performance of each vertex of the set of uncertainties. A set of weighting matrices for each vertex allows to improve the dynamic behavior of the uncertain system and/or the control signal. From the designed controllers, with the help of the Matlab[®] /Simulink software, simulations were carried out to validate the proposed conditions in two numerical examples, mass-spring-damper and 3-DOF helicopter, and a practical implementation in a benchtop 3-DOF (Degrees of Freedom) helicopter, produced by Quanser[®].

Keywords: Linear Quadratic Regulator (LQR), Linear Matrix Inequalities (LMIs), Finsler's Lemma, Decay Rate, Helicopter 3-DOF.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Parâmetros do helicóptero.....	34
---	----

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Região δ para alocação dos autovalores	18
Figura 2 - Massa-mola-amortecedor	29
Figura 3 - Regiões de Factibilidade em 3D com Condições Relaxadas para o Teorema 2.....	31
Figura 4 - Regiões de Factibilidade para o exemplo massa-mola-amortecedor com diferentes valores de c para o Teorema 2.....	32
Figura 5 - Helicóptero 3-DOF da Quanser.....	33
Figura 6 - Modelo esquemático do helicóptero 3-DOF.....	34
Figura 7 - Boeing Chinook.....	36
Figura 8 - Região de factibilidade para o helicóptero 3-DOF com diferentes valores de c e taxa de decaimento para o Teorema 2.....	38
Figura 9 - Comportamento dos três graus de liberdade do helicóptero 3-DOF (ϵ, ρ, λ) para os Teoremas 1 (T1) e 2 (T2), priorizando os estados nos dois vértices.....	40
Figura 10 - Sinais de controle dos Teoremas 1 (T1) e 2 (T2), priorizando os estados nos dois vértices.....	40
Figura 11 - Comportamento dos três graus de liberdade do helicóptero 3-DOF (ϵ, ρ, λ) para os Teoremas 1 (T1) e 2 (T2), priorizando o sinal de controle nos dois vértices.....	41
Figura 12 - Sinais de controle dos Teoremas 1 (T1) e 2 (T2), priorizando o sinal de controle nos dois vértices.....	42
Figura 13 - Implementação prática do controlador Kb , com o comportamento dos três graus de liberdade do helicóptero 3-DOF (ϵ, ρ, λ) e as tensões de entrada para o Teorema 2.....	44
Figura 14 - Implementação prática do controlador Kd , com o comportamento dos três graus de liberdade do helicóptero 3-DOF (ϵ, ρ, λ) e as tensões de entrada para o Teorema 2.....	44
Figura 15 - Implementação prática do controlador Ke , com o comportamento dos três graus de liberdade do helicóptero 3-DOF (ϵ, ρ, λ) e as tensões de entrada para o Teorema 2.....	45

LISTA DE ABREVIações E SIGLAS

ARE	Algebraic Ricatti Equation (Equação Algébrica de Ricatti)
DOF	Degrees of Freedom (Graus de Liberdade)
LMIs	Linear Matrix Inequalities (Desigualdades Matriciais Lineares)
LQR	Linear Quadratic Regulator (Regulador Linear Quadrático)
LTI	Linear Time Invariant (Linear Invariante no Tempo)
MatLab®	Matrix Laboratory
PDLF	Parameter-dependent Lyapunov Function (Função de Lyapunov dependente de parâmetro)
BMI	Bilinear Matrix Inequalities (Desigualdades Matriciais Bilineares)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Objetivos	14
1.1.1	<i>Objetivo Geral</i>	14
1.1.2	<i>Objetivos Específicos</i>	15
1.2	Organização da Dissertação	15
2	CONCEITOS E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS	16
2.1	Desigualdade Matriciais Lineares	16
2.1.1	<i>Propriedades das LMIs</i>	16
2.2	Realimentação de estado	17
2.2.1	<i>Taxa de Decaimento</i>	18
2.3	Controlador LQR	19
2.4	Controlador LQR para sistemas incertos e invariantes no tempo	21
2.5	LQR-LMI e a taxa de decaimento	22
3	CONTROLADOR ROBUSTO LQR VIA LMI	24
4	SIMULAÇÕES	29
4.1	Massa-Mola-Amortecedor	29
4.1.1	<i>Região de factibilidade</i>	30
4.1.2	<i>Região de factibilidade juntamente com o escalar c</i>	31
4.2	Helicóptero 3-DOF	32
5	IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA	43
6	CONCLUSÃO	47
	REFERÊNCIAS	47

1 INTRODUÇÃO

Sistemas de controle desempenham um papel fundamental nas indústrias e no cotidiano das pessoas, que buscam obter um determinado desempenho de um processo ou de uma planta, através de um projeto de controlador (KEVICZKY *et al.*, 2019). Pode-se citar como exemplos, o controle de ambiente, níveis de reservatórios, abastecimento de gás, entre outros. Estes sistemas de controle podem ser do tipo malha aberta ou malha fechada, também chamado sistema de controle com realimentação (do inglês, *feedback*). O sistema em malha fechada é o mais utilizado, onde através de sensores é possível medir a variável de saída (temperatura, velocidade, pressão, aceleração, deslocamento, etc.), compará-la com o sinal de entrada ou referência e utilizar o erro (diferença) como meio de controle (OGATA, 2010).

Devido ao aumento da complexidade envolvendo o elevado número de variáveis de estado e controle entre os anos de 1960 e 1980, veio a necessidade de otimização dinâmica, dando origem ao controle ótimo. Iniciou-se com a programação dinâmica aplicada a problemas de controle ótimo (BELLMAN, 1957) e com Rudolf Kalman, que apresenta o controle de realimentação quadrático linear (KALMAN, 1960). O objetivo da teoria de controle ótimo, visa a obtenção de uma lei de controle $u(t)$, através da otimização de um índice de desempenho, sujeita a restrições nas variáveis de estado e controle (BOYD *et al.*, 1994).

Nessas circunstâncias, o Regulador Linear Quadrático (do inglês, *Linear Quadratic Regulator* - LQR), também conhecido como problema de controle ótimo quadrático, consiste em determinar uma lei de controle que minimize uma função de custo $J(x(t), u(t))$ ou índice de desempenho (FRIEDLAND, 2005), sendo responsável por reduzir o esforço de controle e melhorar o desempenho do controlador.

Desde a década de 60, o LQR pode ser resolvido de forma eficaz obtendo-se o controle ótimo através da resolução da Equação Algébrica de Riccati (do inglês, *Algebraic Riccati Equation* - ARE) (WILLEMS, 1971) da função objetivo, com as

matrizes de ponderação \mathcal{Q} e \mathcal{R} , que são de suma importância e escolhidas de acordo com cada projeto, priorizando determinado aspecto para satisfazer o critério de desempenho esperado (OLALLA *et al.*, 2009). Sendo \mathcal{Q} é nomeada matriz de ponderação de estado, ou seja, quais estados devem ser controlados de forma mais rigorosa, e \mathcal{R} matriz de ponderação de controle.

O LQR vem sendo amplamente difundido na literatura em diversas aplicações, como recentemente em Caun *et al.* (2015), que apresenta o controlador LQR-LMI com restrição de taxa de decaimento aplicado ao helicóptero 3-DOF de bancada, em Beteto *et al.* (2018), que apresenta o controlador LQR usando a realimentação derivativa, em Alcalá *et al.* (2018), que apresenta o controle autônomo de veículos baseada em Lyapunov com um ajuste LQR-LMI, entre outros.

Este trabalho foi desenvolvido e baseado no artigo de Caun *et al.* (2018), que apresenta o controle LQR-LMI aplicado a domínios convexos, com condições menos conservadoras no controle LMI. Para a resolução do controlador LQR e o projeto de controladores, são utilizadas as Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs). As LMIs são uma eficiente ferramenta na busca de soluções numéricas de problemas de otimização de natureza convexa que garante a estabilidade quadrática dependente de parâmetro e do custo garantido, além de ter a vantagem de incluir índices de desempenho e incertezas no modelo do sistema com certa facilidade, como a taxa de decaimento, responsável pelo transitório do sistema (BOYD *et al.*, 1994).

Essas incertezas podem ser erros no sistema, falhas estruturais, desgaste físicos, entre outros (ISERMANN; BALLÉ, 1997), e são eventos que podem ser incluídos no modelo do sistema, em forma de incertezas politópicas (BOYD *et al.*, 1994). Assim, as matrizes incertas pertencem a um domínio politópico descrito como a combinação convexa de vértices conhecidos. Sendo que os problemas de otimização podem ser resolvidos numericamente através de algoritmos implementados em *solvers*, como LMILab (GAHINET *et al.*, 1995) e SeDuMi (Sturm, 1999).

Este trabalho trata da resolução do problema LQR, via LMI, para sistemas incertos e propõe condições com matrizes de ponderação Q e \mathcal{R} para cada vértice do politopo (Q_i, \mathcal{R}_i) (ASSUNÇÃO *et al.*, 2019), como alternativa para o teorema proposto por Caun *et al.* (2018), que considera apenas uma matriz Q e uma matriz \mathcal{R} para todo o domínio das incertezas.

A formulação do método proposto se baseia na função de Lyapunov dependente de parâmetro (do inglês, *Parameter-dependent Lyapunov Function - PDLF*), combinada com o Lema de Finsler (SKELTON; IWASAKI; GRIGORIADIS, 1997), que permite acréscimo de matrizes extras, conhecidas também como multiplicadores matriciais, e a redução do número de LMIs (OLIVEIRA; SKELTON, 2001; OLIVEIRA, 2004). O método desenvolvido permite priorizar o desempenho de cada vértice do conjunto de incertezas que podem ocorrer durante a operação do sistema, e conforme mostrado na implementação, o comportamento do sistema incerto pode ser melhorado e o esforço dos sinais de controle podem ser reduzidos, sendo possível devido a utilização das LMIs.

1.1 Objetivos

Este capítulo apresenta o objetivo geral e específicos deste trabalho.

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo principal deste trabalho é propor a inserção de matrizes de ponderação para cada vértice do politopo (Q_i, \mathcal{R}_i) , utilizando técnicas modernas de controle em sistemas dinâmicos sujeitos a falhas, objetivando a mitigação dos efeitos das falhas e, quando houver, os efeitos de prováveis incertezas presentes no modelo da planta.

1.1.2 *Objetivos Específicos*

- Obter condições considerando uma matriz Q e R para cada vértice do polítopo;
- Simulações em um modelo numérico e de um helicóptero de bancada, produzido pela Quanser®;
- Implementação prática no helicóptero de bancada;
- Apresentar resultados que demonstrem as vantagens do método proposto.

1.2 **Organização da Dissertação**

Este trabalho está organizado na seguinte forma:

- Capítulo 2: apresenta o embasamento teórico, conceitos e propriedades necessárias para a fundamentação do trabalho e para a comparação com a técnica proposta nesta dissertação;
- Capítulo 3: apresenta a metodologia proposta (Controlador Robusto LQR via LMI) com restrição de taxa de decaimento para sistemas lineares incertos e invariantes no tempo utilizando realimentação dos estados;
- Capítulo 4: são apresentados resultados de simulações para validar o teorema proposto, juntamente com uma comparação da teoria já existente na literatura;
- Capítulo 5: o controlador projetado com o uso do teorema proposto é implementado no helicóptero de bancada 3-DOF;
- Capítulo 6: por fim, é apresentado a conclusão a respeito dos resultados obtidos.

2 CONCEITOS E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

Neste capítulo é apresentada uma revisão acerca dos principais tópicos utilizados ao longo do trabalho.

2.1 Desigualdade Matriciais Lineares

A definição de uma Desigualdade Matricial Linear apresenta a seguinte estrutura:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^l x_i F_i \geq 0, \quad (1)$$

$$x = x_1, x_2, \dots, x_l,$$

sendo $x \in \mathbb{R}^l$ a variável vetorial e as matrizes $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{f \times f}$, $i = 0, 1, \dots, l$, conhecidas. Normalmente, os problemas são expressos na forma matricial como, por exemplo, a desigualdade de Lyapunov (BOYD *et al.*, 1994):

$$A^T P + P A < 0, \quad (2)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz conhecida e $P = P^T > 0$.

2.1.1 Propriedades das LMIs

Uma revisão de alguns conceitos utilizados ao longo do texto.

Lema 1 (Complemento de Schur). *Uma matriz simétrica*

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

é definida positiva se e somente se:

$$M_1 > 0 \text{ e } M_3 - M_2^T (M_1)^{-1} M_2 > 0, \quad (4)$$

ou

$$M_3 > 0 \text{ e } M_1 - M_2 (M_3)^{-1} M_2^T > 0, \quad (5)$$

sendo $M_1 = M_1^T$ e $M_3 = M_3^T$.

Prova. Vide (BOYD *et al.*, 1994).

Lema 2 (Finsler): Considere $w \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $\text{rank}(\mathcal{B}) < n$ e \mathcal{B}^\perp uma base para o espaço nulo de \mathcal{B} (isto é, $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$). Então as seguintes condições são equivalentes:

$$(i) \quad w^T \mathcal{L} w < 0, \forall w \neq 0 : \mathcal{B} w = 0;$$

$$(ii) \quad (\mathcal{B}^\perp)^T \mathcal{L} \mathcal{B}^\perp < 0;$$

$$(iii) \quad \exists \sigma \in \mathbb{R} : \mathcal{L} - \sigma \mathcal{B}^T \mathcal{B} < 0;$$

$$(iv) \quad \exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{L} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T < 0,$$

sendo \mathcal{X} e σ são variáveis adicionais (ou multiplicadores).

Prova. Vide (OLIVEIRA; SKELTON, 2001).

2.2 Realimentação de estado

Considere um sistema controlável, linear e invariante no tempo, descrito por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(t_0) = x_0, \quad (6)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ as matrizes que descrevem o comportamento do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada de controle e $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado.

O objetivo é encontrar uma matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaça a condição:

$$u(t) = -Kx(t), \quad (7)$$

e que torna o sistema em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t), \quad (8)$$

assintoticamente estável. Para mais detalhes veja Ogata (2010).

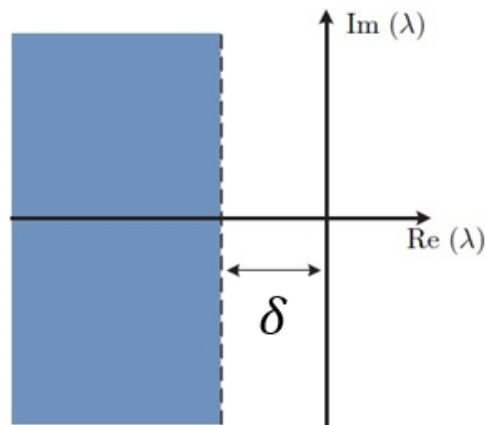
2.2.1 Taxa de Decaimento

Em Boyd *et al.* (1994), a taxa de decaimento é definida como sendo a maior constante positiva δ , tal que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\delta t} \|x(t)\| = 0, \quad (9)$$

para toda solução $x(t)$ de (8), $t > 0$, como mostra a Figura 1.

Figura 1 - Região δ para alocação dos autovalores



Fonte: Do próprio autor.

Pode-se utilizar a função quadrática de Lyapunov:

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) > 0, \quad (10)$$

para estabelecer um limite inferior sobre a taxa de decaimento de (8) com a condição

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\gamma V(x(t)), \quad (11)$$

para todas as trajetórias (BOYD *et al.*, 1994).

De (8) e (10), tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) = \\ & x(t)^T (A - BK)^T P x(t) + x(t)^T P (A - BK) x(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Substituindo (12) em (11) e simplificando, obtém-se:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) \leq -2\gamma P, \quad (13)$$

E para que (10) seja verdadeira, a matriz P precisa ser definida positiva:

$$P > 0. \quad (14)$$

A desigualdade (13) tornou-se uma BMI (do inglês, *Bilinear Matrix Inequalities*). Então é necessário realizar manipulações para adequá-las novamente à condição de LMIs. Pré multiplicando e pós multiplicando (13) e (14) por P^{-1} , e fazendo $W = P^{-1}$ e $Z = KW$ obtém-se:

$$AW + WA^T + BZ + Z^T B^T + 2\gamma W < 0, \quad (15)$$

$$W > 0 \quad (16)$$

Agora as desigualdades (15) e (16) são LMIs e, se forem factíveis, pode-se projetar um controlador que estabilize o sistema, por (BERNUSSOU; PERES; GEROMEL, 1989):

$$K = ZW^{-1}. \quad (17)$$

A próxima seção apresenta o controlador LQR com base na realimentação de estado.

2.3 Controlador LQR

Considerando o sistema (6), o controlador LQR consiste em encontrar uma lei de controle $u(t)$ que minimize o índice de desempenho quadrático, $J(x(t), u(t))$, tal que (KUMAR *et al.*, 2016):

$$J(x(t), u(t)) = \min_u \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt, \quad (18)$$

sendo Q e R matrizes simétricas definidas positivas $n \times n$ e $m \times m$, respectivamente. A matriz Q é a matriz de ponderação do vetor de estado e a matriz R é a matriz de ponderação do vetor de entrada de controle.

Para buscar uma solução para o problema de otimização, considere uma função de Lyapunov quadrática $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, com $P = P^T > 0$, tal que:

$$x(t)^T (Q + K^T \mathcal{R} K) x(t) = -\frac{d}{dt} (x(t)^T P x(t)). \quad (19)$$

Logo, a lei de controle que minimiza a função quadrática $\mathcal{J}(x(t), u(t))$, pode ser expressa por,

$$u(t) = -Kx(t) = -\mathcal{R}^{-1} B^T P x(t), \quad (20)$$

de modo que P satisfaça a equação de Riccati (ARE),

$$A^T P + P A - P B \mathcal{R}^{-1} B^T P + Q = 0. \quad (21)$$

Substituindo (7) em (18), o índice de desempenho $\mathcal{J}(x(t), u(t))$ é minimizado por (22),

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x(t), u(t)) &= \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + (-Kx(t))^T \mathcal{R} (-Kx(t))) dt = \\ &= \int_0^\infty (x(t)^T (Q + K^T \mathcal{R} K) x(t)) dt. \end{aligned} \quad (22)$$

O problema de projeto é encontrar a matriz de ganho de realimentação K de forma que $\mathcal{J}(x(t), u(t))$ seja minimizado, e estabilize o sistema em malha fechada (8) para qualquer estado inicial $x(0)$. Através do cálculo de (22) pode ser obtido a função custo para condição inicial $x(0)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x(t), u(t)) &= \int_0^\infty x(t)^T (Q + K^T \mathcal{R} K) x(t) dt = -x(t)^T P x|_0^\infty \\ &= \\ &= -x(\infty)^T P x(\infty) + x(0)^T P x(0). \end{aligned} \quad (23)$$

Considerando que o sistema em malha fechada (8) seja assintoticamente estável, ou seja, todos os autovalores tem parte real negativa, tem-se $x(\infty) \rightarrow 0$, verificando-se que,

$$\mathcal{J}(x(t), u(t)) = x(0)^T P x(0). \quad (24)$$

Nota-se, que o índice de desempenho $J(x(t), u(t))$ em (24) depende da condição inicial $x(0)$ e da matriz P . O controlador de estado LQR pode ser visto com maiores detalhes em Ogata (2010).

Na próxima seção, é proposto um controlador LQR via LMI que permite a inclusão de incertezas paramétricas no modelo do sistema.

2.4 Controlador LQR para sistemas incertos e invariantes no tempo

Considerando o sistema incerto linear e invariante no tempo, descrito por:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h \alpha_i (A_i x(t) + B_i u(t)) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \quad (25)$$

sendo $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz que descreve o comportamento do sistema incerto, $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada incerta, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle. As matrizes $(A, B)(\alpha)$ pertencem ao domínio politópico \mathcal{A} definido como

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^h \alpha_i = 1; \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, h \right\}, \quad (26)$$

corresponde a um conjunto convexo de h vértices.

Substituindo a lei de controle (7) em (25), o sistema robusto em malha fechada é dado por

$$\dot{x}(t) = (A(\alpha) - B(\alpha)K)x(t). \quad (27)$$

Considerando o sistema (27), o controlador de estado LQR para sistemas incertos consiste em encontrar uma lei de controle $u(t)$ que minimize um custo quadrático ou índice de desempenho $J(x(t), u(t))$. Sendo possível escolher matrizes Q e R para cada vértice do politopo, dessa forma o índice (18) pode ser substituído por (28),

$$\mathcal{J}(x(t), u(t)) = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q(\alpha) x(t) + u(t)^T \mathcal{R}(\alpha) u(t)) dt, \quad (28)$$

sendo as matrizes de ponderação $Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva e $\mathcal{R}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ simétrica definida positiva.

Repetindo os passos visto na Seção 2.3 o problema passa a ser seleccionar o ganho de realimentação K que minimiza o valor da função de custo:

$$\mathcal{J}(x(t), u(t)) = \int_0^{\infty} x(t)^T (Q(\alpha) + K^T \mathcal{R}(\alpha) K) x(t) dt, \quad (29)$$

e estabiliza o sistema de malha fechada (27) para qualquer condição inicial $x(0)$.

2.5 LQR-LMI e a taxa de decaimento

Para continuidade e comparação da metodologia proposta, é apresentado o Teorema 1, proposto por Caun *et al.* (2018), que considera apenas um conjunto de matrizes de ponderação (Q, \mathcal{R}) para todo o domínio de incertezas.

Teorema 1. (CAUN *et al.*, 2018) Para $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, o sistema (25) é estável com $u(t) = -Kx(t)$, usando taxa de decaimento δ e custo garantido $\mathcal{J}(x(t), u(t))$ inferior a μ , se para um dado escalar $b > 0$ existirem matrizes $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $W_i = W_i^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $i = 1, 2, \dots, h$, de tal modo que:

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & W_i, Z, Y \end{aligned}$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} \mu & * \\ x_0 & Y^T + Y - W_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} V_i & * & * & * \\ X_i & -bY - bY^T & * & * \\ Y & 0 & -Q^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & -\mathcal{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (31)$$

sendo $V_i = A_i Y + B_i Z + Y^T A_i^T + Z^T B_i^T + 2\delta W_i$, $X_i = W_i - Y^T + bA_i Y + bB_i Z$, o ganho de realimentação estado é dado por $K = -ZY^{-1}$ e * representa termos deduzidos a partir da simetria.

Prova. Vide (CAUN *et al.*, 2018).

3 CONTROLADOR ROBUSTO LQR VIA LMI

Neste capítulo, será apresentada a metodologia proposta (Teorema 2) para cada vértice do politopo (Q_i, \mathcal{R}_i) , sendo possível escolher uma matriz Q e \mathcal{R} para cada vértice. Essa abordagem permite escolher adequadamente as matrizes, a fim de se obter o bom desempenho de cada vértice do conjunto de incertezas.

Teorema 2. Para $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{R}_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, o sistema incerto (25) é estável com $u(t) = -Kx(t)$, com taxa de decaimento igual a δ , e tem desempenho otimizado se existir custo garantido $J(x(t), u(t))$ inferior a μ , se para um dado escalar $c > 0$ existirem matrizes $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $W_i > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $i = 1, 2, \dots, h$, de tal modo que:

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & W_i = W_i^T, Z, Y \end{aligned}$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} \mu & * \\ x_0 & Y^T + Y - W_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} F_i & * & * & * \\ G_i & -cY - cY^T & * & * \\ Q_i Y & 0 & -Q_i & * \\ \mathcal{R}_i Z & 0 & 0 & -\mathcal{R}_i \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

sendo $F_i = A_i Y + B_i Z + Y^T A_i^T + Z^T B_i^T + 2\delta W_i$, $G_i = W_i - Y^T + cA_i Y + cB_i Z$, $Y \neq Y^T$, $W_i = Y^T P_i Y$ e $P_i = P_i^T > 0$. No valor ótimo, o ganho do estado é dado por $K = -ZY^{-1}$ e $*$ representa termos deduzidos a partir da simetria.

Prova. Considere a unidade simplex $\sum_{i=1}^h \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$. Multiplicando cada bloco (33) por $\alpha_i \geq 0$, e fazendo o somatório de $i = 1$ até h , resulta em (34).

$$\begin{bmatrix} F(\alpha) & * & * & * \\ G(\alpha) & -cY - cY^T & * & * \\ Q(\alpha)Y & 0 & -Q(\alpha) & * \\ \mathcal{R}(\alpha)Z & 0 & 0 & -\mathcal{R}(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \quad (34)$$

sendo $F(\alpha) = A(\alpha)Y + B(\alpha)Z + Y^T A(\alpha)^T + Z^T B(\alpha)^T + 2\delta W(\alpha)$,
 $G(\alpha) = W(\alpha) - Y^T + cA(\alpha)Y + cB(\alpha)Z$ e $W(\alpha) = Y^T P(\alpha)Y$.

Como $Q(\alpha)$ e $\mathcal{R}(\alpha)$ são matrizes simétricas definidas positivas, ambas são invertíveis. Então, pré-multiplicando por $\Delta(\alpha)$, e pós-multiplicando por $\Delta(\alpha)^T$, com

$$\Delta(\alpha) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q(\alpha)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}(\alpha)^{-1} \end{bmatrix} \quad (35)$$

A desigualdade (34) torna-se

$$\begin{bmatrix} F(\alpha) & * & * & * \\ G(\alpha) & -cY - cY^T & * & * \\ Y & 0 & -Q(\alpha)^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & -\mathcal{R}(\alpha)^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (36)$$

sendo $F(\alpha)$ e $G(\alpha)$ mencionadas em (34).

Aplicando o complemento de Schur recursivamente em (36), obtém-se a equivalente LMI,

$$\begin{bmatrix} O(\alpha) & * \\ G(\alpha) & -cY - cY^T \end{bmatrix} < 0, \quad (37)$$

sendo $O(\alpha) = A(\alpha)Y + B(\alpha)Z + Y^T A(\alpha)^T + Z^T B(\alpha)^T + Z^T \mathcal{R}(\alpha)Z + Y^T Q(\alpha)Y + 2\delta W(\alpha)$.

Uma vez que $W(\alpha) = Y^T P(\alpha)Y$, implica que,

$$\begin{bmatrix} U(\alpha) & * \\ S(\alpha) & -cY - cY^T \end{bmatrix} < 0, \quad (38)$$

sendo $U(\alpha) = A(\alpha)Y + B(\alpha)Z + Y^T A(\alpha)^T + Z^T B(\alpha)^T + Z^T \mathcal{R}(\alpha)Z + Y^T Q(\alpha)Y + 2\delta Y^T P(\alpha)Y$ e $S(\alpha) = Y^T P(\alpha)Y - Y^T + cA(\alpha)Y + cB(\alpha)Z$.

Através das mudanças de variáveis $Y = (N^T)^{-1}$ e $Z = -KY$, encontra-se a desigualdade (39)

$$\begin{bmatrix} L(\alpha) & * \\ M(\alpha) & -c(N^T)^{-1} - c(N^T)^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (39)$$

sendo $L(\alpha) = (A(\alpha) - B(\alpha)K)(N^T)^{-1} + N^{-1}(A(\alpha) - B(\alpha)K)^T + N^{-1}K^T \mathcal{R}(\alpha)K(N^T)^{-1} + N^{-1}Q(\alpha)(N^T)^{-1} + 2\delta N^{-1}P(\alpha)(N^T)^{-1}$ e $M(\alpha) = N^{-1}P(\alpha)(N^T)^{-1} - N^{-1} + c(A(\alpha) - B(\alpha)K)(N^T)^{-1}$.

Aplicando a transformação de congruência $\begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$ à esquerda, por $\begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}^T$ à direita, encontra-se,

$$\begin{bmatrix} H(\alpha) & * \\ T(\alpha) & -cN - cN^T \end{bmatrix} < 0, \quad (40)$$

sendo $H(\alpha) = N(A(\alpha) - B(\alpha)K) + (A(\alpha) - B(\alpha)K)^T N^T + K^T \mathcal{R}(\alpha)K + Q(\alpha) + 2\delta P(\alpha)$ e $T(\alpha) = P(\alpha) - N^T + cN(A(\alpha) - B(\alpha)K)$.

Escolhendo arbitrariamente a matriz $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ cN \end{bmatrix}$ e desmembrando (40), obtêm-se

$$\begin{bmatrix} K^T \mathcal{R}(\alpha)K + Q(\alpha) + 2\delta P(\alpha) & * \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1(A(\alpha) - B(\alpha)K) & -X_1 \\ X_2(A(\alpha) - B(\alpha)K) & -X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A(\alpha) - B(\alpha)K)^T X_1^T & (A(\alpha) - B(\alpha)K)^T X_2^T \\ -X_1^T & -X_2^T \end{bmatrix} < 0. \quad (41)$$

Considerando $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$, tal que,

$$\begin{bmatrix} K^T \mathcal{R}(\alpha)K + Q(\alpha) + 2\delta P(\alpha) & * \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{X} [(A(\alpha) - B(\alpha)K) \quad -I] + \begin{bmatrix} (A(\alpha) - B(\alpha)K)^T \\ -I \end{bmatrix} \mathcal{X}^T < 0. \quad (42)$$

Definindo $w = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = [(A(\alpha) - B(\alpha)K) \quad -I]$, $\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} I \\ (A(\alpha) - B(\alpha)K) \end{bmatrix}$ e $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} K^T \mathcal{R}(\alpha)K + Q(\alpha) + 2\delta P(\alpha) & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix}$, com $P(\alpha) = P(\alpha)^T > 0$, a desigualdade (34) é equivalente a (42) que equivale a propriedade (iv) do Lema de Finsler.:

$$(iv) \exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{L} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T < 0.$$

Considere a função de Lyapunov dependente de parâmetro $V(x(t)) = x^T P(\alpha)x > 0$, sendo α constante ao longo do tempo. Para validar a propriedade desenvolveu-se as condições (i) do Lema de Finsler, resultando em:

$$(i) w^T \mathcal{L} w < 0, \forall w \neq 0 : \mathcal{B} w = 0;$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K^T \mathcal{R}(\alpha)K + Q(\alpha) + 2\delta P(\alpha) & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} < 0. \quad (43)$$

Agora, expandindo a multiplicação do vetor,

$$x^T (K^T \mathcal{R}(\alpha)K + Q(\alpha))x + 2\delta x^T P(\alpha)x + x^T P(\alpha)\dot{x} + \dot{x}^T P(\alpha)x < 0. \quad (44)$$

Simplificando, resulta em:

$$x^T P(\alpha)\dot{x} + \dot{x}^T P(\alpha)x + 2\delta x^T P(\alpha)x \leq -x^T (K^T \mathcal{R}(\alpha)K + Q(\alpha))x < 0. \quad (45)$$

Note que $\mathcal{B} w = 0$ corresponde ao sistema realimentado com K :

$$[(A(\alpha) - B(\alpha)K) \quad -I] \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = 0, \quad (46)$$

equivalente a $\dot{x} = (A(\alpha) - B(\alpha)K)x$ e $w^T \mathcal{L} w < 0$ corresponde à restrição de estabilidade a partir da função quadrática de Lyapunov (BOYD *et al.*, 1994).

Agora, desenvolvendo a condição (ii) do Lema de Finsler:

(ii) Se $\exists P(\alpha) = P(\alpha)^T > 0$, de tal modo que, $(\mathcal{B}^\perp)^T \mathcal{L} \mathcal{B}^\perp < 0$ então,

$$\begin{bmatrix} I \\ (A(\alpha) - B(\alpha)K) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K^T \mathcal{R}(\alpha)K + Q(\alpha) + 2\delta P(\alpha) & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ (A(\alpha) - B(\alpha)K) \end{bmatrix} < 0, \quad (47)$$

expandindo,

$$(A(\alpha) - B(\alpha)K)^T P(\alpha) + P(\alpha)(A(\alpha) - B(\alpha)K) + 2\delta P(\alpha) < -(K^T \mathcal{R}(\alpha)K + Q(\alpha)), \quad (48)$$

Observa que as condições (i) e (ii) do Lema de Finsler são satisfeitas. Logo conclui-se a prova de acordo com Lema de Finsler, e as propriedades (i) e (iv) são equivalentes.

A LMI (32) refere-se ao limite superior, que tem como conceito, energia máxima de saída, cuja energia máxima está em um dos vértices do politopo, sua prova pode ser vista em Caun *et al.*, (2018).

4 SIMULAÇÕES

Neste capítulo serão apresentadas uma análise da influência do escalar $c > 0$ na região de factibilidade e no desempenho do controlador LQR via LMI, e duas simulações, massa-mola-amortecedor e o helicóptero 3-DOF de bancada (QUANSER, 2002), com base no Teorema 2 proposto neste trabalho, para explicar as vantagens, comparar os resultados e validar as condições propostas. Para as simulações e resoluções das LMIs utilizou-se o *software* MatLab® e a interface YALMIP (LÖFBERG, 2004), em conjunto com o *solver* LMILab para computar a solução do problema de otimização.

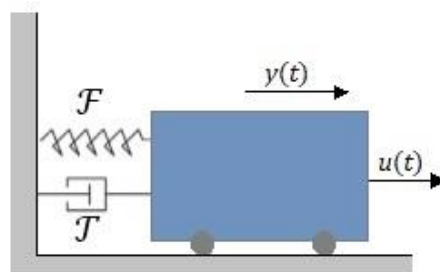
O número de iterações do solucionador precisou ser aumentado para aumentar o espaço de busca, o comando utilizado foi:

```
opts=sdpsettings('solver','lmilab','lmilab.maxiter',1000);
```

4.1 Massa-Mola-Amortecedor

Considere o sistema massa-mola-amortecedor da Figura 2 adaptado de Caun *et al.* (2018) e descrito em (49) e (50). Nesse sistema, \mathcal{F} representa a constante da mola e \mathcal{J} , o coeficiente de atrito viscoso.

Figura 2 - Massa-mola-amortecedor



Fonte: Adaptado de Caun *et al.* (2018).

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mathcal{F} & -\mathcal{J} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (49)$$

$$y(t) = [1 \ 0]x(t), \quad (50)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^2$ o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^1$ a ação da força externa e $y(t) \in \mathbb{R}^1$ a saída.

4.1.1 Região de factibilidade

Nesta seção será mostrada a análise da região de factibilidade considerando o método apresentado pelo Teorema 2 para o sistema massa-mola-amortecedor (Figura 2). Considere o sistema incerto constituído de dois vértices devido a \mathcal{F} , definidos da seguinte forma:

- Vértice 1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1,2 & -2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

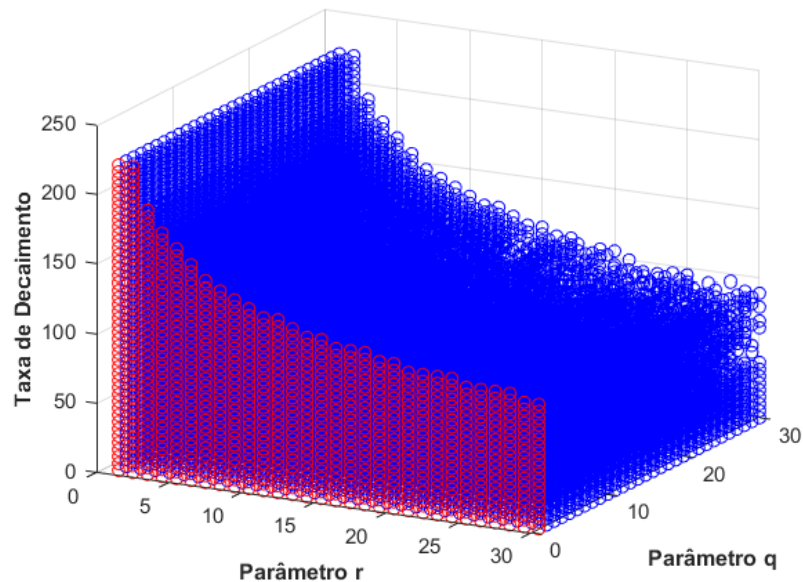
- Vértice 2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,8 & -2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para verificar as regiões de factibilidade do Teorema 2, variou-se a taxa de decaimento de 0 a 250 com passo de 5, o escalar $c = 0,001$ e a condição inicial $x_0 = [1 \ 0]^T$.

Na Figura 3 foi considerado um multiplicador nas matrizes Q_2 e \mathcal{R}_2 com os intervalos $1 \leq r \leq 30$ e $1 \leq q \leq 30$, as matrizes de ponderação são $\mathcal{R}_1 = 10, \mathcal{R}_2 = r \times 5$ sendo, $Q_1 = \text{diag}(1 \ 1)$ e $Q_2 = q \times \text{diag}(10 \ 10)$. Nela é vista a região em 3D em função da taxa de decaimento e os parâmetros r e q .

Figura 3 - Regiões de Factibilidade em 3D com Condições Relaxadas para o Teorema 2



Fonte: Do próprio autor.

Nota-se que os resultados foram satisfatórios para validar o Teorema 2, sendo possível observar que, encontrou-se regiões factíveis para o problema. Observa-se que, o valor máximo da taxa de decaimento atingido, responsável pela curta duração do transitório do sistema decresce à medida que o valor do parâmetro r responsável pela matriz \mathcal{R} aumenta. Vale ressaltar que as soluções encontradas nem sempre são implementáveis devido ao seu limite máximo (ou mínimo) de tensão, podendo levar a saturação e talvez uma redução da vida útil do atuador.

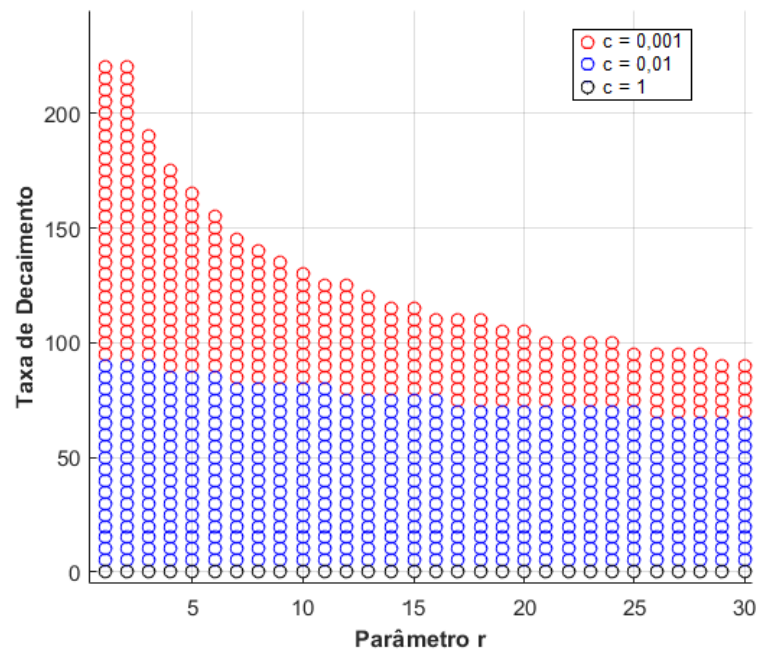
4.1.2 Região de factibilidade juntamente com o escalar c

Em (Geromel e Korugui, 2006), por meio de testes práticos, verificou-se que à medida que o escalar c torna-se pequeno o suficiente, tem-se um aumento da região de factibilidade no projeto de controladores obtido via Lema de Finsler.

Com isso, investigou-se a influência do escalar c , com valores diferentes, a fim de verificar e analisar os resultados.

Fez-se uma varredura simulando o exemplo massa-mola-amortecedor, a fim de encontrar a área factível para o problema com valores de $c = 0,001$, $c = 0,01$ e $c = 1$, utilizando as matrizes $Q_1 = Q_2 = 1$, \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 iguais da seção anterior.

Figura 4 - Regiões de Factibilidade para o exemplo massa-mola-amortecedor com diferentes valores de c para o Teorema 2



Fonte: Do próprio autor.

Analisando a Figura 4, é constatado que com $c = 0,001$ encontra-se uma maior região de factibilidade para o problema, para valores maiores que 0,001 os resultados são muito semelhantes sofrendo pouca variação, e à medida que seu valor aumenta, esta região diminui, corroborando com Geromel e Korugui, (2006).

No próximo capítulo será mostrada uma comparação entre o Teorema 1 e o Teorema 2, com o intuito de avaliar as condições propostas.

4.2 Helicóptero 3-DOF

O helicóptero 3-DOF mostrado na Figura 5 foi desenvolvido pela Quanser® o sistema é composto por dois motores de corrente contínua montados nas duas

extremidades de uma estrutura retangular e que acionam duas hélices propulsoras. Os eixos dos motores são paralelos entre si e o vetor de empuxo é normal à estrutura.

O braço é conectado por uma junta 2-DOF e é livre para inclinar e guinar. Na extremidade oposta do braço existe um contrapeso que torna a massa leve o suficiente para permitir que os motores levistem o helicóptero. As variáveis de controle são as tensões de entrada para os amplificadores de potência que acionam cada um dos dois motores CC conectados às hélices do helicóptero. Uma tensão positiva aplicada ao motor dianteiro (V_f) causa uma inclinação positiva, enquanto uma tensão positiva aplicada ao motor traseiro (V_b) causa uma inclinação negativa (ângulo *pitch*). Uma tensão positiva nos dois motores provoca uma elevação do corpo (ângulo *elevation* do braço). Se o corpo inclinar, o vetor impulsão resulta no deslocamento do corpo (ângulo *travel*). As variáveis ξ e γ , incluídas no modelo artificialmente, representam as integrais dos ângulos de elevação e deslocamento (QUANSER, 2002).

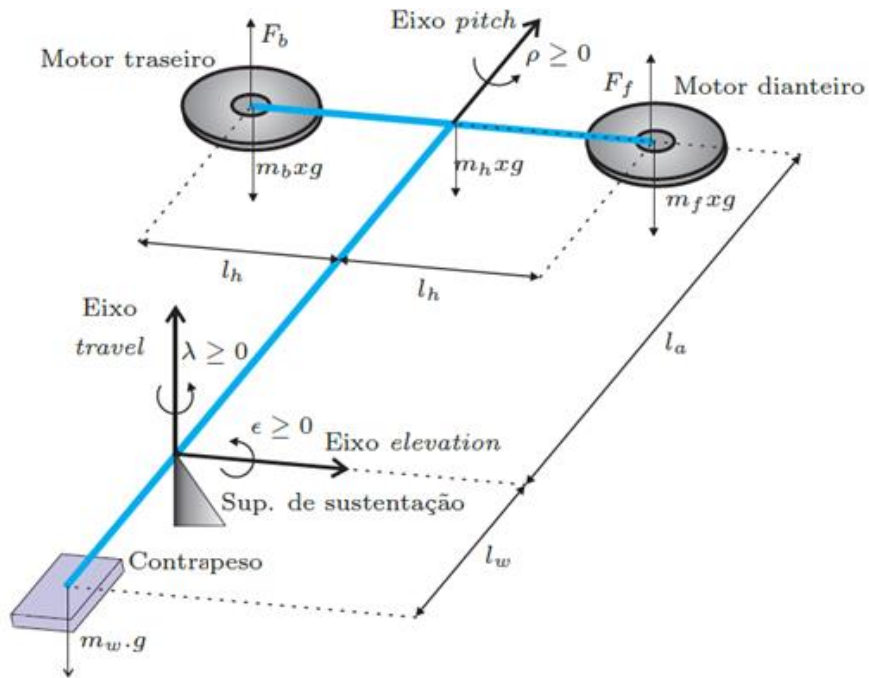
Figura 5 - Helicóptero 3-DOF da Quanser



Fonte: Adaptado de Caun *et al.* (2018).

Considere o modelo esquemático do helicóptero 3-DOF da QUANSER, apresentado na Figura 6.

Figura 6 - Modelo esquemático do helicóptero 3-DOF



Fonte: (QUANSER, 2002).

O modelo de espaço de estados para o sistema incerto que descreve o helicóptero é dado por:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \quad (51)$$

$$y(t) = C(\alpha)x(t), \quad (52)$$

sendo o vetor de estados $x(t) \in \mathbb{R}^8$, o vetor de entrada $u(t) \in \mathbb{R}^2$ e a saída $y(t) \in \mathbb{R}^3$. Os vetores mencionados e as matrizes A , B e C são definidos por:

$$x(t) = [\varepsilon \ \rho \ \lambda \ \dot{\varepsilon} \ \dot{\rho} \ \dot{\lambda} \ \xi \ \gamma]^T, u(t) = \begin{bmatrix} V_f \\ V_b \end{bmatrix},$$

$$y(t) = [\varepsilon \ \rho \ \lambda]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(2m_f L_a - m_w L_w)g}{2m_f L_a^2 + 2m_f L_h^2 + 2m_f L_w^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{L_a K_f}{m_w L_w^2 + 2m_f L_a^2} & \frac{L_a K_f}{m_w L_w^2 + 2m_f L_a^2} \\ \frac{1}{2} \frac{K_f}{m_f L_h} & -\frac{1}{2} \frac{K_f}{m_f L_h} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A variável ε representa a elevação, ρ a inclinação, λ o deslocamento e as integrais da elevação ξ e deslocamento γ .

Observação 1. Todos os parâmetros do helicóptero foram retirados do manual do fabricante (QUANSER, 2002) e suas constantes que aparecem nas matrizes A e B descritas na Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros do helicóptero

Parâmetros	Grandezas	Valores
Constante da força de propulsão da hélice (N=V)	K_f	0,1188
Massa do corpo do helicóptero (kg)	m_h	1,158
Massa do contrapeso (kg)	m_w	1,87
Massa do conjunto da hélice dianteira (kg)	m_f	$m_h/2$
Massa do conjunto da hélice traseira (kg)	m_b	$m_h/2$
Distância: eixo de pitch - cada motor (m)	L_h	0,1778
Distância: eixo de elev. - helicóptero (m)	L_a	0,4699
Distância: eixo de elev. - contrapeso (m)	L_w	0,4699
Constante gravitacional (m/s ²)	g	9,81

Fonte: (QUANSER, 2002).

Para demonstrar um exemplo de modelo real do modelo de bancada estudado, temos a Figura 7.

Figura 7 - Boeing Chinook



Fonte: (Chinook HC2 da Royal Air Force, 2008).

Para verificar a robustez ao sistema, foi implementado uma perda de 30% da potência do motor traseiro. Dessa forma, tem-se um politopo de dois vértices com uma incerteza na matriz de entrada do sistema do helicóptero. Assim, os vértices do politopo são descritos na sequência:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

- Vértice 1 (100% de V_b):

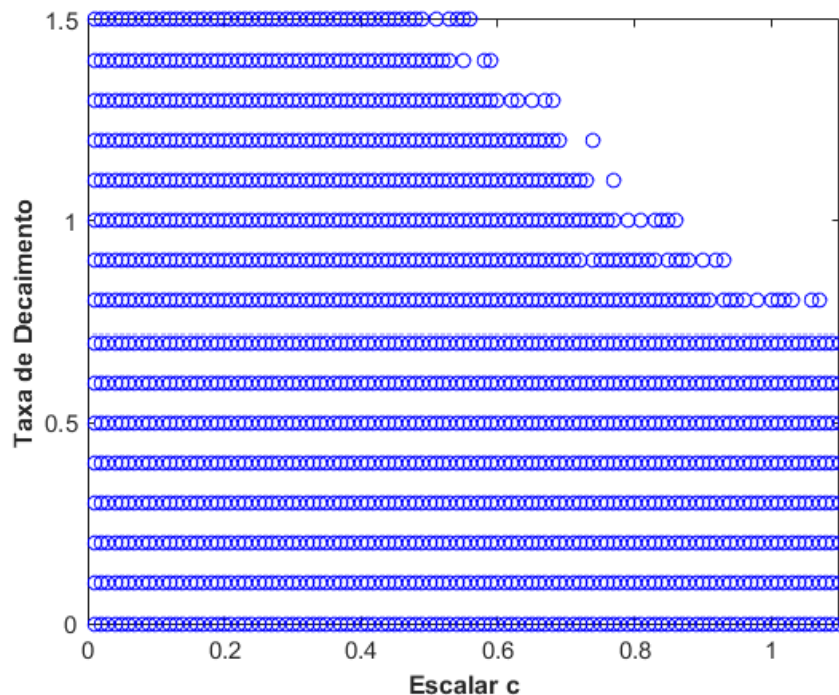
$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0854 & 0,0854 \\ 0,5770 & -0,5770 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

- Vértice 2 (70% de V_b):

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0854 & 0,0598 \\ 0,5770 & -0,4039 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verificou-se as regiões de factibilidade com o Teorema 2 para diferentes valores de c e taxa de decaimento, conforme a Figura 8. As matrizes de ponderação Para o escalar c , foi utilizado uma variação de 0 à 1,1, e a taxa de decaimento variando de 0 à 1,5, com $Q_1 = \text{diag}(350 \ 5 \ 5 \ 0.01 \ 2 \ 0.01 \ 10 \ 1)$, $Q_2 = \text{diag}(150 \ 2 \ 1 \ 0.01 \ 2 \ 0.01 \ 10 \ 1)$, $\mathcal{R}_1 = 0.09 \times \text{diag}(1 \ 1)$ e $\mathcal{R}_2 = 0.05 \times \text{diag}(1 \ 1)$, obtendo.

Figura 8 – Região de factibilidade para o helicóptero 3-DOF com diferentes valores de c e taxa de decaimento para o Teorema 2



Fonte: Do próprio autor

Conforme seu crescimento a taxa de decaimento resultou em uma quantidade menor de regiões factíveis, ou seja, menor o número de regiões que garantem a estabilidade do sistema.

Para as próximas duas simulações, a condição inicial é $x_0 = [-27,5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, sendo a referência do nível do solo, foram fixadas a taxa de decaimento $\delta = 0,3$ e o escalar $c = 0,01$, que está ligado diretamente ao

desempenho do sistema como visto, sendo possível encontrar uma solução factível para o problema.

Observação 2. O estado elevação representa o elemento q_{11} da matriz Q é o que necessita de uma atenção maior, por isso possui um valor maior que os outros elementos em todas as simulações e implementações.

Na primeira simulação priorizou-se os estados nos dois vértices, com $Q = \text{diag}(1050 \ 15 \ 15 \ 0,01 \ 2 \ 0,01 \ 10 \ 1)$ e $\mathcal{R} = 0,1 \times \text{diag}(1 \ 1)$. O controlador robusto encontra pelo Teorema 1 foi:

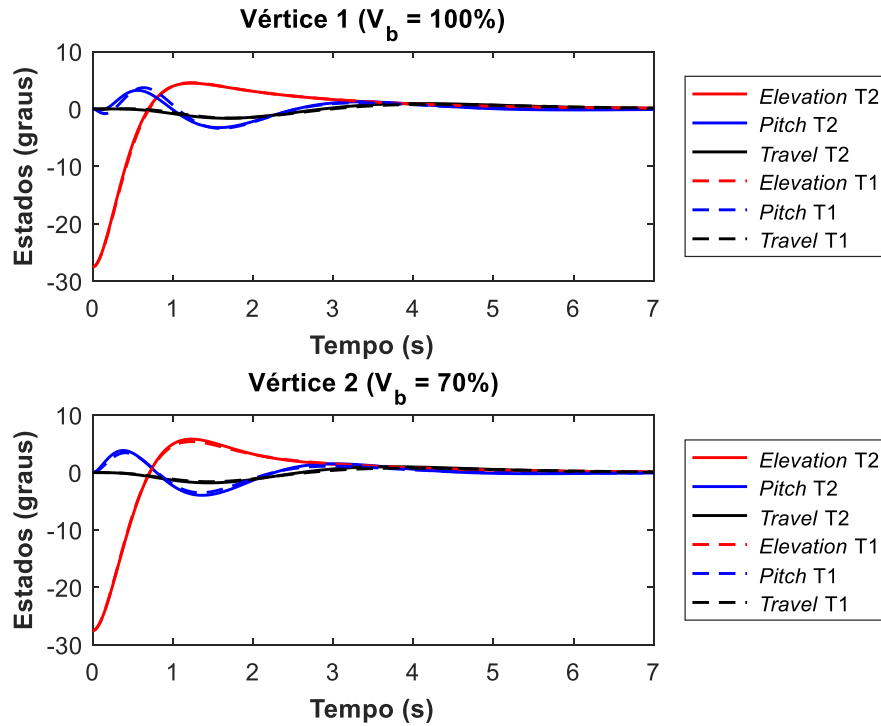
$$K_a = \begin{bmatrix} 93,5678 & 47,1700 & -62,6585 & 32,7184 & 11,3976 & -69,9063 & 47,4960 & -21,4880 \\ 114,9174 & -41,1969 & 49,3397 & 47,7036 & -11,7017 & 57,4689 & 53,8955 & 16,5391 \end{bmatrix},$$

e a partir do Teorema 2, com $Q_1 = \text{diag}(1050 \ 15 \ 15 \ 0,01 \ 2 \ 0,01 \ 10 \ 1)$, $Q_2 = \text{diag}(850 \ 10 \ 10 \ 0,01 \ 2 \ 0,01 \ 10 \ 1)$ e $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = 0,1 \times \text{diag}(1 \ 1)$, obtendo

$$K_b = \begin{bmatrix} 97,9731 & 75,9982 & -90,1279 & 30,3402 & 21,5097 & -108,4676 & 47,3242 & -26,3132 \\ 109,3653 & -16,7188 & 13,3387 & 43,2265 & -6,5578 & 18,3387 & 54,5695 & 4,1073 \end{bmatrix}.$$

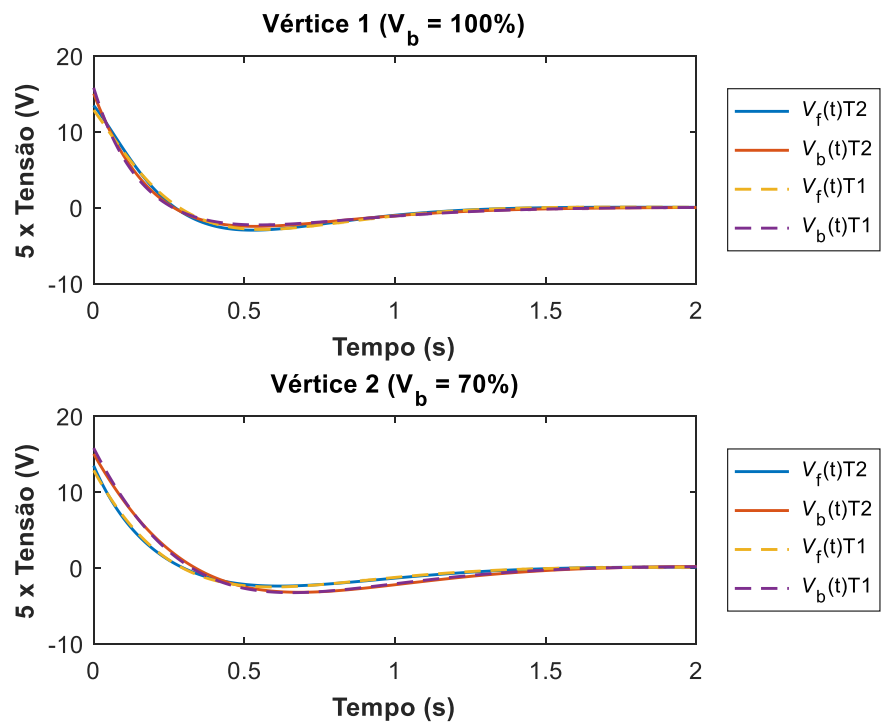
Os resultados de simulação podem ser vistos nas Figura 9 e Figura 10.

Figura 9 - Comportamento dos três graus de liberdade do helicóptero 3-DOF (ϵ, ρ, λ) para os Teoremas 1 (T1) e 2 (T2), priorizando os estados nos dois vértices



Fonte: Do próprio autor

Figura 10 - Sinais de controle dos Teoremas 1 (T1) e 2 (T2), priorizando os estados nos dois vértices



Fonte: Do próprio autor

Para a segunda simulação, é priorizado o sinal de controle nos dois vértices, obtendo-se o seguinte controlador robusto para o Teorema 1, com $Q = \text{diag}(150 \ 2 \ 2 \ 0,01 \ 2 \ 0,01 \ 10 \ 1)$ e $\mathcal{R} = 0,1 \times \text{diag}(1 \ 1)$:

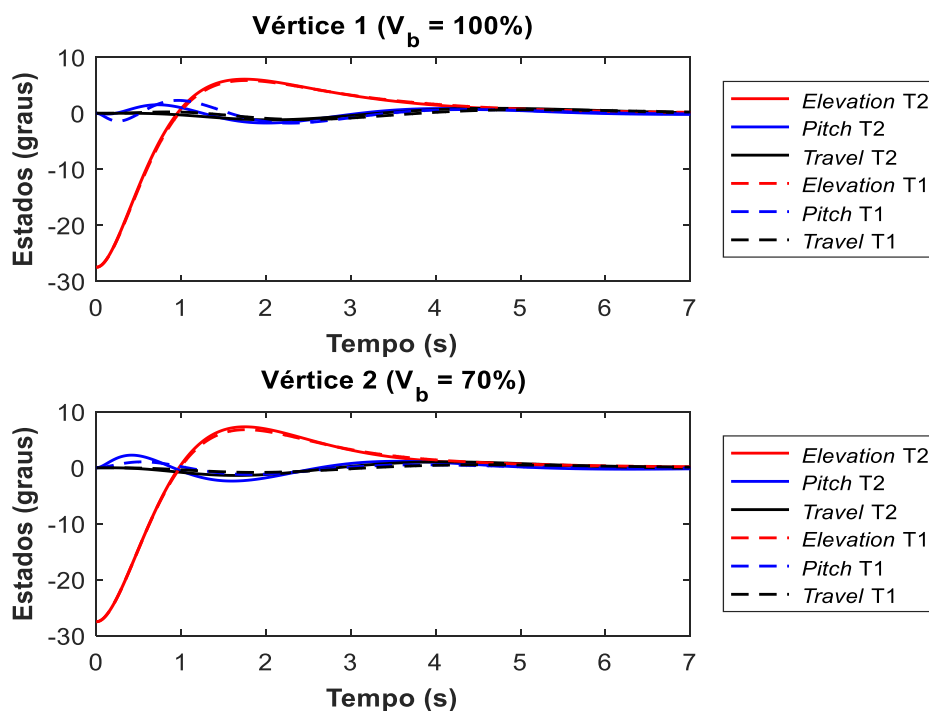
$$K_c = \begin{bmatrix} 42,8365 & 36,7039 & -39,0616 & 23,4365 & 10,8262 & -47,5411 & 20,6897 & -13,6198 \\ 57,7824 & -30,8558 & 29,8819 & 34,1824 & -10,3855 & 37,6666 & 26,2762 & 10,1993 \end{bmatrix}.$$

K_d para o Teorema 2, com $Q_1 = \text{diag}(150 \ 2 \ 2 \ 0,01 \ 2 \ 0,01 \ 10 \ 1)$, $Q_2 = \text{diag}(50 \ 1 \ 1 \ 0,01 \ 2 \ 0,01 \ 10 \ 1)$ e $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = 0,1 \times \text{diag}(1 \ 1)$, é

$$K_d = \begin{bmatrix} 48.5605 & 52.07552 & -50.6321 & 24.4760 & 16.5555 & -64.2946 & 23.7209 & -16.7725 \\ 53.0850 & -26.7666 & 23.2755 & 31.6637 & -9.9397 & 30.7917 & 26.3694 & 7.7432 \end{bmatrix}.$$

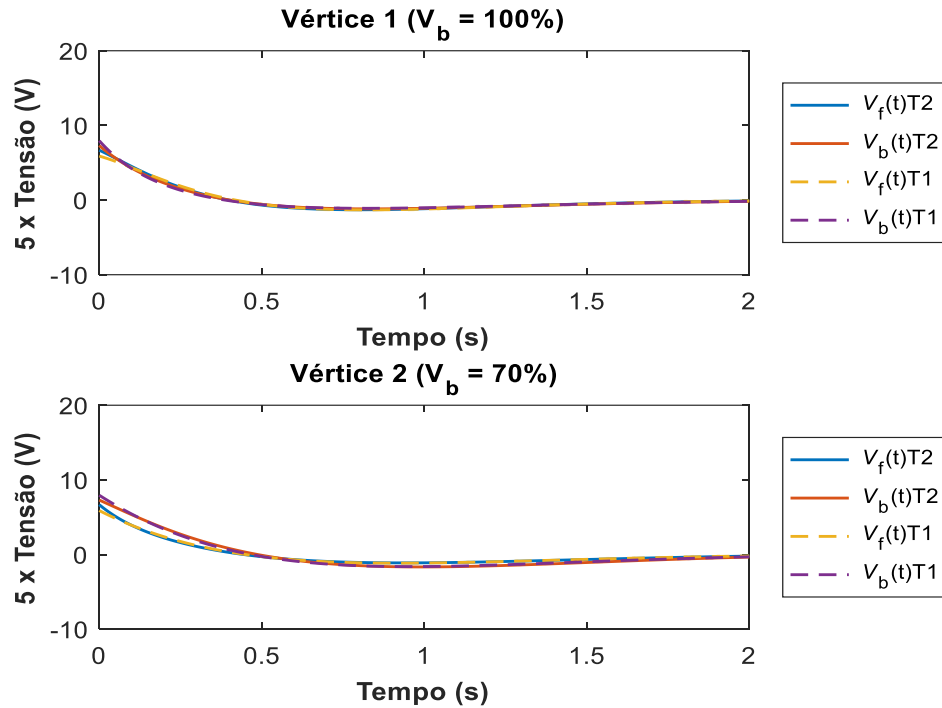
Os resultados de simulação estão mostrados nas Figura 11 e Figura 12.

Figura 11 - Comportamento dos três graus de liberdade do helicóptero 3-DOF $(\epsilon, \rho, \lambda)$ para os Teoremas 1 (T1) e 2 (T2), priorizando o sinal de controle nos dois vértices



Fonte: Do próprio autor

Figura 12 - Sinais de controle dos Teoremas 1 (T1) e 2 (T2), priorizando o sinal de controle nos dois vértices



Fonte: Do próprio autor

Analisando as Figura 9, Figura 10, Figura 11 e Figura 12, nota-se que os controladores robustos projetados pelo método proposto (Teorema 2) apresentam resultados satisfatórios se comparados com o controlador robusto projetado pelo Teorema 1, uma vez que é possível ter um bom desempenho do sistema com um baixo sinal de controle. Com relação aos teoremas, os transitórios e os sinais quase não destoam, tendo pouca diferença.

A maior vantagem, por meio do Teorema 2, se dá em poder escolher matrizes Q e R para cada vértice do politopo (Q_i, R_i), podendo priorizar o vértice que representa a falha. Esta abordagem, utilizada em Alves Jr. *et al.* (2021), permite escolher adequadamente as matrizes a fim de se obter o bom desempenho de cada vértice do conjunto de incertezas.

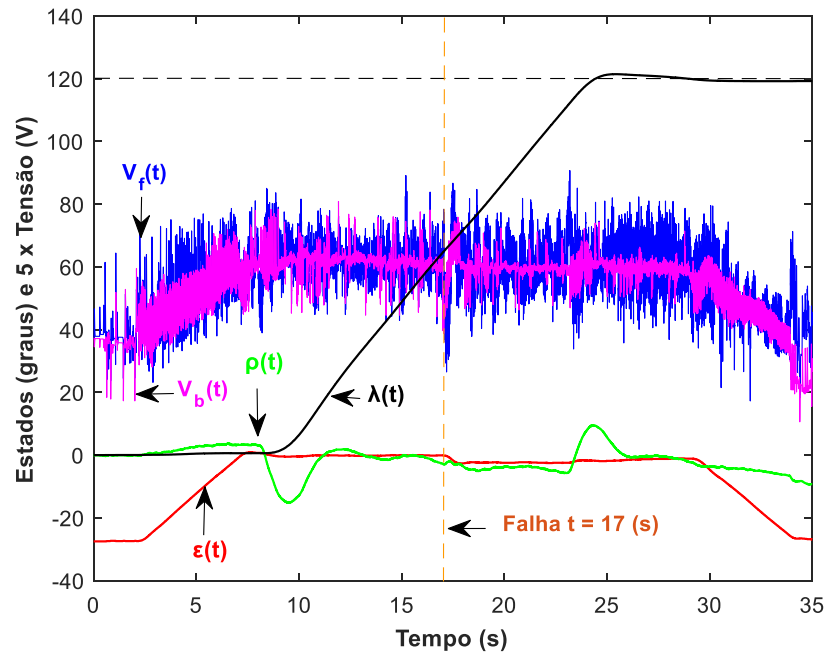
5 IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA

Nesta seção, será apresentado a implementação prática dos controladores projetados pelo Teorema 2 através das LMIs (32) e (33). O objetivo é analisar a influência da possibilidade de se escolher um conjunto de matrizes de ponderação Q e R para cada vértice do politopo, no sistemas do helicóptero 3-DOF produzido pela Quanser®. Vale ressaltar que as matrizes Q e R atuam na performance do controlador nos estados do sistema e no esforço do sinal de controle respectivamente. De maneira prática, as matrizes Q e R são definidas como matrizes diagonais, e quanto maior o valor dos elementos da diagonal principal da matriz Q maior será a prioridade à determinado estado. Já a matriz R , quanto menor for os valores da diagonal principal, maior será o esforço solicitado do sinal de controle. Normalmente o método utilizado para a escolha das matrizes baseia-se na experiência do projetista por meio de simulações.

Realizou-se três implementações, onde em 17 segundos tem-se a ocorrência de uma falha de 30% no motor traseiro (V_b) através da inserção de uma chave temporizadora conectada a um amplificador com ganho de 0,7 diretamente na tensão de atuação sobre o motor. A trajetória do helicóptero foi dividida em três estágios, a primeira é a decolagem, em que o helicóptero se encontra a $\varepsilon = -27,5^\circ$ e busca o ângulo de elevação de $\varepsilon = 0^\circ$, em seguida o helicóptero viaja 120° mantendo a mesma elevação e por fim aterrissa, retornando a posição inicial $\varepsilon = -27,5^\circ$ (MANESCO *et al.*, 2012).

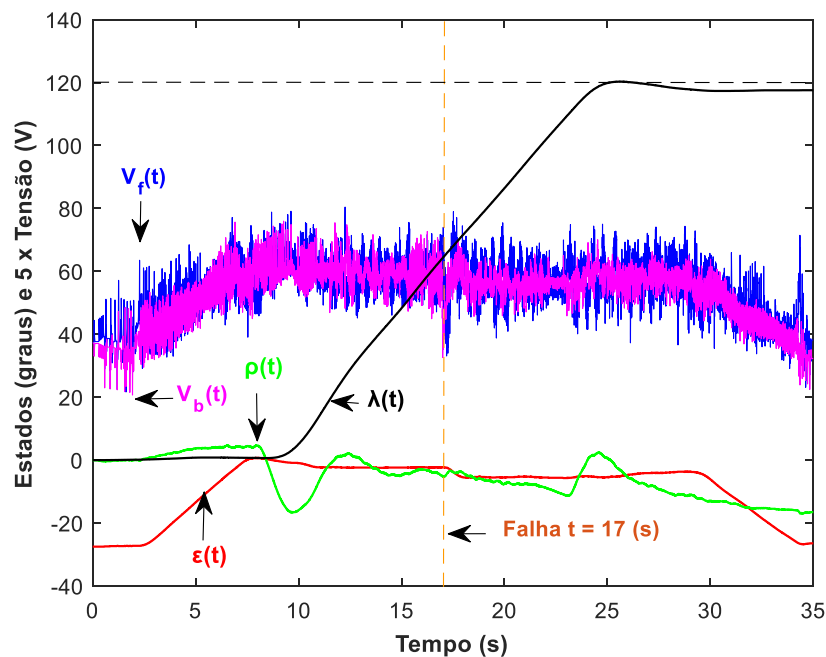
Para a primeira e segunda implementações, seguem os mesmos valores utilizados nas simulações para o Teorema 2 da Seção 4.2. Foram utilizados os valores dos controladores K_b priorizando os estados e K_d priorizando o sinal de controle para obter os dados práticos e reconhecer o comportamento do sistema, conforme apresentado nas Figura 13 e Figura 14 respectivamente.

Figura 13 - Implementação prática do controlador K_b , com o comportamento dos três graus de liberdade do helicóptero 3-DOF (ϵ, ρ, λ) e as tensões de entrada para o Teorema 2



Fonte: Do próprio autor.

Figura 14 - Implementação prática do controlador K_d , com o comportamento dos três graus de liberdade do helicóptero 3-DOF (ϵ, ρ, λ) e as tensões de entrada para o Teorema 2

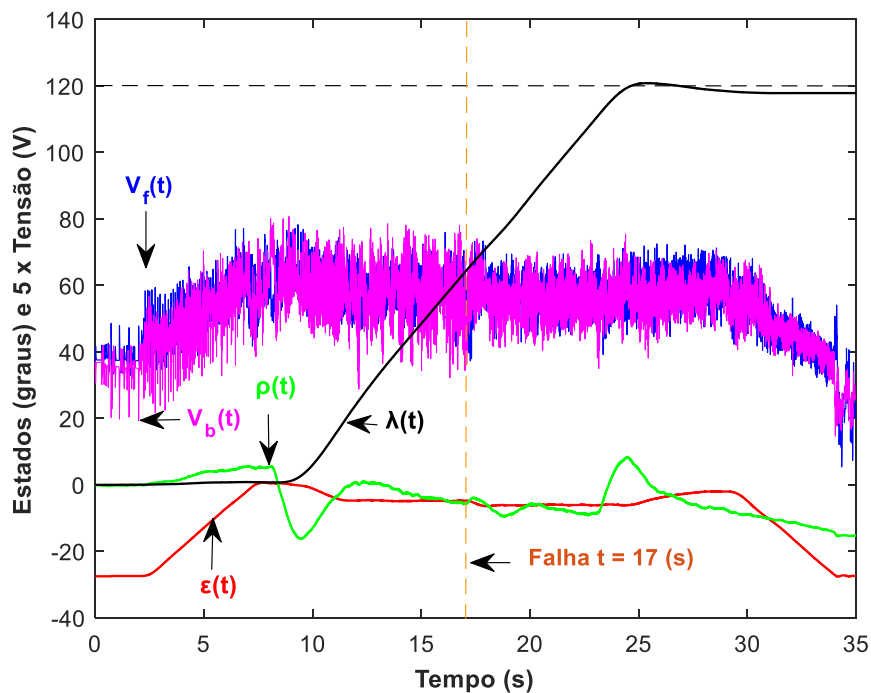


Fonte: Do próprio autor.

A terceira implementação priorizou-se os estados no vértice 1 e o sinal de controle no vértice 2, com as matrizes de ponderação $Q_1 = \text{diag}(350 \ 5 \ 5 \ 0,01 \ 2 \ 0,01 \ 10 \ 1)$, $R_1 = 0,09 \times \text{diag}(1 \ 1)$, $Q_2 = \text{diag}(150 \ 2 \ 1 \ 0,01 \ 2 \ 0,01 \ 10 \ 1)$ e $R_2 = 0,05 \times \text{diag}(1 \ 1)$. O projeto proporcionou o controlador K_e :

$$K_e = \begin{bmatrix} 68,3518 & 36,9462 & -42,6582 & 30,0599 & 10,2169 & -50,5161 & 33,1138 & -14,4713 \\ 68,1686 & -55,4657 & 64,2880 & 30,0189 & -15,3457 & 76,1156 & 33,0305 & 21,8540 \end{bmatrix}$$

Figura 15 - Implementação prática do controlador K_e , com o comportamento dos três graus de liberdade do helicóptero 3-DOF (ϵ , ρ , λ) e as tensões de entrada para o Teorema 2



Fonte: Do próprio autor.

Analisando as Figura 13 e Figura 14, confirma-se as simulações feitas na seção 4.2, quando se prioriza os estados, a respostas do sistema melhora, porém exige-se mais do sinal de controle, e ao priorizar o sinal de controle, se tem um detrimento do desempenho dos estados do helicóptero, vale ressaltar que a manobra realizada na bancada não é igual a manobra realizada na simulação. Agora, analisando a Figura 15, escolhendo um conjunto de matrizes de ponderação

para cada vértice (Q_i, \mathcal{R}_i) , consegue-se ter um equilíbrio entre a resposta do sistema e o sinal de controle, além de se poder priorizar de acordo com a necessidade.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, desenvolveu-se uma nova metodologia para a resolução do problema LQR para sistemas lineares contínuos e invariantes no tempo sujeito a incertezas politópicas. Para a formulação do teorema proposto, baseou-se em uma função de Lyapunov dependente de parâmetro combinada com o Lema de Finsler, garantindo a taxa de decaimento. Foram propostas condições baseadas em LMIs para o tratamento das linearidades e incertezas, resolvidas numericamente por meio do *software* MatLab®, juntamente com o *solver* padrão LMlab e o pacote "YALMIP toolbox".

Para o projeto de controladores robustos, a lei de controle utilizada foi baseada na realimentação de estado do tipo $u(t) = -Kx(t)$, que estabiliza o sistema. Analisando os resultados obtidos, verificou-se que o controlador robusto implementado garante a estabilidade do sistema e encontrou-se regiões factíveis para o problema.

Este trabalho compara os resultados com o método existente na literatura, que considera apenas uma matriz Q e uma matriz R para todo o domínio das incertezas. Como alternativa, o método proposto tem a vantagem de poder definir as matrizes de ponderação Q e R para cada vértice do politopo (Q_i, R_i), sendo a escolha ao critério do projetista, que poderá escolher adequadamente as matrizes de ponderação, permitindo escolher o que priorizar (desempenho dinâmico ou minimização do sinal de controle em ocorrência ou não de falha).

Através da implementação, foi possível verificar que a inclusão de matrizes Q e R para cada vértice do politopo na abordagem do problema é vantajosa, uma vez que se obtém bom desempenho com baixo sinal de controle. Este estudo gerou um artigo publicado num congresso do Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI) 2021.

REFERÊNCIAS

- ALCALA, E.; PUIG, V.; QUEVEDO, J.; ESCOBET, T.; COMASOLIVAS, R. *Autonomous vehicle control using a kinematic Lyapunov-based technique with LQR-LMI tuning*. **Control Engineering Practice**, Terrassa, v. 73, p. 1-12, 2018.
- ALVES JR, D. A.; BETETO, M. A.L., ASUNÇÃO, E., TEIXEIRA, M. C. M. **Projeto de controlador robusto LQR via desigualdades matriciais lineares**. SBAI21, aceito para publicação, 2021.
- ASSUNÇÃO, E.; BETETO, M. A. L.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, E. R. P. *Robust LQR-LMI state-derivative controller: A novel approach*. In: 15th EUROPEANWORKSHOP ON ADVANCED CONTROL AND DIAGNOSIS, Bolonha, 2019. **Anais [...]** Bolonha: UNESP, 2019. p. 1-19.
- BELLMAN, R. **A Markovian decision process**. *Journal of mathematics and mechanics*, v. 6, n. 5, p. 679-684, 1957.
- BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. **Systems & Control Letters**, North-Holland, v. 13, n. 1, p. 65-72, 1989.
- BETETO, M. A. L; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, E. R. P.; BUZACHERO, L. F. S.; CAUN, R. P. New design of robust LQR-state derivative controllers via LMIs. **IFAC-PapersOnLine**, Amsterdam, v. 51, n. 25, p. 422–427, 2018.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. v. (1994) ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1994.
- CAUN, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; LLINS, L. I.; TEIXEIRA, M. C. M. Controlador LQR via aproximação LMI com restrição de taxa de decaimento aplicado ao helicóptero 3-DOF de bancada. In: SBAI - SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA INTELIGENTE, 12, 2015, Natal. **Anais [...]** Natal: UFRN, 2015, p. 49–54, 2015.
- CAUN, R. P.; ASSUNCAO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, A. P. LQR-LMI control applied to convex-bounded domains. **Cogent Engineering**, [s. l.], v. 5 n. 1, p. 1-27, 2018.
- Chinook HC2 da Royal Air Force (2008). Disponível em: [https://stringfixer.com/pt/Boeing_Chinook_\(UK_variants\)](https://stringfixer.com/pt/Boeing_Chinook_(UK_variants)). Acesso em: 10 jan. 2022.
- FRIEDLAND, B. **Control system design**: an introduction to state-space methods (Dover Books on Engineering). New York: Dover, 2005.

GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. *The LMI control toolbox*. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33rd., Lake Buena Vista, 1994. **Anais** [...] Piscataway: IEEE, 1994. p. 2038–2041.

GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent Lyapunov functions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [s. l.], v. 51, p. 1984–1989. 2006

STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Softwares**, London, v. 11, n. 1-4, p. 625 - 653, 1999.

ISERMANN, R.; BALLÉ, P. Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes. **Control Engineering Practice**, Great Britain. v. 5, n. 5, p. 709 - 719, 1997.

KALMAN, R. E. Contributions to the theory of optimal control. **Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana**, Baltimore, v. 5, n. 2, p. 102 - 119, 1960.

KEVICZKY, L.; BARS, R.; HETTHÉSSY, J.; BÁNYÁSZ, C. **Control engineering**. 1. ed. Singapore: Springer, 2019.

KUMAR, E. V.; RAAJA, G. S.; JEROME, J. Adaptive PSO for optimal LQR tracking control of 2 DoF laboratory helicopter. **Applied Soft Computing**, Amsterdã, v. 41, p. 77 - 90, 2016.

LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE. Computer Aided Control Systems Design, IEEE International Symposium on. Linköping, 2004. **Anais** [...] Piscataway: IEEE, 2004. p. 284 - 289.

OGATA, K. **Modern control engineering**. 5. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 2010.

OLALLA, C.; LEYVA, R.; AROUDI, A. E.; QUEINNEC, I. Robust LQR control for PWM converters: An LMI approach. In: IEEE Transactions on industrial electronics, Tarragona, 2009. **Anais** [...] Piscataway: IEEE, 2009. p. 2548 - 2558.

OLIVEIRA, M. C. Novos testes de estabilidade para sistemas lineares. **Revista Controle & Automação**, Campinas, v. 15, n. 1, p. 17 - 23, 2004.

OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: Perspectives in robust control, San Diego, 2001. **Anais** [...] London, 2001. p. 241 – 257.

QUANSER. 3-DOF **helicopter reference manual**. [S. l.: s. n.]. 2002. Disponível em: http://www.quanser.com/english/html/products/fs_product_challenge.asp?lang_code=english&pcat_code=exp-spe&prod_code=S1-3dofheli&tmpl=1. Acesso em: 10 out. 2012.

SKELTON, R. E.; IWASAKI, T.; GRIGORIADIS, K. M. **A unified algebraic approach to control design**. London, 1998. (Taylor & Francis systems and control).

WILLEMS, J. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. **IEEE Transactions on automatic control**, [s. l.], v. 16, n. 6, p. 621-634, 1971.