



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JULIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS



Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

Modelo do Pêndulo para ressonância em Mecânica Celeste

Alan Cefali Signor

Profa. Dra. Maria Helena Moreira Morais

Rio Claro (SP)

2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Alan Cefali Signor

Modelo do Pêndulo para ressonância em Mecânica Celeste

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Helena Moreira Morais

Rio Claro - SP
2022

S578m Signor, Alan Cefali
 Modelo do pêndulo para ressonância em mecânica celeste / Alan
 Cefali Signor. -- Rio Claro, 2022
 54 f. : il., tabs.

 Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) -
 Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e
 Ciências Exatas, Rio Claro
 Orientadora: Maria Helena Moreira Morais

 1. Mecânica celeste. 2. Ressonância de movimento médio. 3.
 Asteroides. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Alan Cefali Signor

Modelo do Pêndulo para ressonância em Mecânica Celeste

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Maria Helena Moreira Morais (orientadora)

Prof. Dr. Tadashi Yokoyama

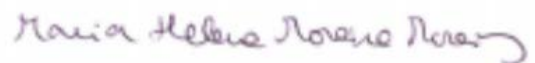
Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Rio Claro, 02 de Fevereiro de 2022.

Assinatura do aluno



Assinatura da orientadora



Agradecimentos

Agradeço a minha orientadora, Maria Helena Moreira Morais, por todo conhecimento e elucidação que me proporcionou nesses 4 anos. Sou muito grato por toda atenção e orientação que recebi até agora, não consigo expressar o quanto fico feliz por poder aprender a cada dia um pouco mais sobre essa área que tanto me interessa.

Não possuo palavras para agradecer minha mãe, meu pai e minha vó por tudo que me ensinaram durante a minha vida e por sempre me apoiar em minhas decisões. Suas contribuições me inspiraram a buscar ser uma pessoa melhor a cada dia e sempre serei grato por isso.

Agradeço também o apoio ao projeto de iniciação científica, denominado "Captura e evolução na ressonância coorbital retrógrada", pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2019/24958-5.

Resumo

Neste trabalho, realizamos o estudo a respeito dos tópicos necessários para o desenvolvimento do modelo analítico para ressonâncias de movimento médio, conhecido como Modelo do Pêndulo. Inicialmente, estudamos sobre a geometria da ressonância de movimento médio, de modo que por meio do tempo de conjunção e da órbita no referencial sinódico para certas ressonâncias foi possível compreender sobre alguns aspectos deste mecanismo. A partir do processo de expansão da função perturbadora usual, realizamos uma mudança de variáveis para desenvolver o Modelo do Pêndulo para a ressonância retrógrada no problema circular restrito de três corpos. Com a aplicação do modelo as ressonâncias retrógradas $2/1$ e $3/1$ comparamos as curvas teóricas de amplitude de libração com mapas de estabilidade obtidos através de integrações numéricas. O processo foi analogamente realizado para as ressonâncias prógradas $2/1$ e $3/1$; desta forma, pudemos também comparar os resultados de nosso problema para os dois tipos de ressonância de movimento médio existentes na natureza.

Palavras-chave: Mecânica Celeste, Ressonâncias de Movimento Médio, Asteroides.

Abstract

In this work, we carry out the study of the necessary topics for the development of the analytical model for mean motion resonances, known as the Pendulum Model. Initially, in order to understand how resonant relationships behave to repeated encounters, we focused on the geometry of the mean motion resonance, thus by conjunction time and rotation frame orbits it was possible to understand some aspects of this mechanism. Through the process of the expansion of the usual disturbing function, we perform a change of variables to develop the Pendulum Model for the retrograde resonance in the circular restricted three-body problem. Through the application of the model for the retrograde resonances $2/1$ and $3/1$ we compare the theoretical curves of the amplitude libration with the stability maps obtained by numerical integrations. The same process was realized for the prograde resonances $2/1$ and $3/1$; in this way, we were able to compare the results of our problem for the two type of mean motion resonances present in nature.

Keywords: Celestial Mechanics, Mean-motion resonances, Asteroids.

Sumário

1	Introdução	8
2	Perturbações Ressonantes	10
3	A Função Perturbadora	18
3.1	Expansão Literal em Excentricidade e Inclinação	20
3.2	As Equações Planetárias de Lagrange	26
4	Ressonância no Problema Circular Restrito de Três Corpos	29
5	O Modelo do Pêndulo	33
6	Amplitude de Libração	37
7	Resultados	42
7.1	A Ressonância Retrógrada 2/1	44
7.2	A Ressonância Retrógrada 3/1	47
8	Conclusão	50
9	Referências Bibliográficas	51
A	O Pêndulo Simples	53

Capítulo 1

Introdução

Sabemos que a interação gravitacional entre os corpos celestes pode originar, em alguns casos, um fenômeno conhecido como ressonância de movimento médio, sendo que este ocorre quando os períodos orbitais de dois corpos podem ser escritos a partir de uma razão de dois números inteiros. Esse mecanismo é observado tanto no sistema solar como em sistema extrassolares, de modo que a interação entre os corpos é periódica e pode causar tanto estabilidade quanto instabilidade ao sistema. No caso em que a estabilidade ocorre, teremos um movimento periódico sem encontros próximos que alterem a dinâmica do sistema; por exemplo, Plutão intersecta a órbita de Netuno e mesmo assim possui uma órbita estável devido aos dois planetas estarem em uma ressonância $2/3$, ou seja, a cada duas voltas de Netuno em torno do Sol, Plutão completa três.

Por outro lado, as lacunas de asteroides, conhecidas como Lacunas de Kirkwood, encontradas no cinturão principal são um exemplo claro de como a ressonância pode conferir instabilidade. Estas estão localizadas nas regiões de ressonância de movimento médio com Júpiter, de modo que a interação ressonante dos asteroides com o planeta impede que a maioria dos asteroides sobreviva nessas regiões ($3/1$, $5/2$, $7/3$ e $2/1$).

Existem dois modelos analíticos para ressonâncias de movimento médio: o primeiro modelo fundamental, baseado no modelo do pêndulo simples, que não é válido para excentricidades próximas de zero e o segundo modelo fundamental que é mais preciso para órbitas com baixas excentricidades. Ambos estão relacionados a expansão da função perturbadora e são importantes para compreender os efeitos da ressonância na natureza. Neste trabalho estudaremos a respeito do primeiro modelo fundamental e buscaremos aplicá-lo a duas ressonâncias retrógradas no problema restrito de três corpos.

Por meio de uma revisão bibliográfica sobre a natureza das ressonâncias de movimento médio, nos aprofundamos no modelo do pêndulo simples. De forma paralela, adicionamos contribuições que não estão presentes na literatura atual, como por exemplo, a comparação do tempo de conjunção entre as ressonâncias prógradas e retrógradas e a aplicação do modelo para as ressonâncias retrógradas $2/1$ e $3/1$.

Primeiramente, no Capítulo 2 abordaremos a respeito da geometria da ressonância de movimento médio, comentando sobre os tempos de conjunções e a órbita no referencial sinódico de algumas ressonâncias interiores e exteriores. No Capítulo 3 será descrito o procedimento para a obtenção da expressão da Função Perturbadora para a ressonância prógrada e retrógrada e como as duas se relacionam através da introdução de novas variáveis. No Capítulo 4, será realizado o estudo sobre o efeito ressonante no problema circular restrito de três corpos quando o caso planar é considerado. Nos Capítulos 5 e 6 será desenvolvido o Modelo do Pêndulo; de forma a utilizá-lo para obter a expressão que descreve a amplitude de libração do ângulo crítico de uma ressonância de movimento médio. A aplicação do modelo buscando a comparação entre as amplitudes de libração das ressonâncias prógradas com as retrógradas foi disposta no Capítulo 7. As conclusões gerais sobre o estudo e aplicação do Modelo do Pêndulo foram dadas no Capítulo 8. No Apêndice A, realizou-se o procedimento para a obtenção da equação de movimento para um pêndulo simples.

Capítulo 2

Perturbações Ressonantes

Considerando um sistema com um planeta e um asteroide, de modo que o planeta completa seu movimento de translação em 1 unidade de tempo e o asteroide demora metade desse tempo para completar sua órbita em torno do Sol; podemos afirmar que a razão entre o período do planeta e do asteroide é igual a 2/1. Para facilitar, será abordado o caso em que ambos estão em órbitas planares e o planeta possui órbita circular; a perturbação entre os objetos também é desconsiderada, pois estamos interessados somente em como a relação ressonante se comporta em função da repetição de encontros próximos.

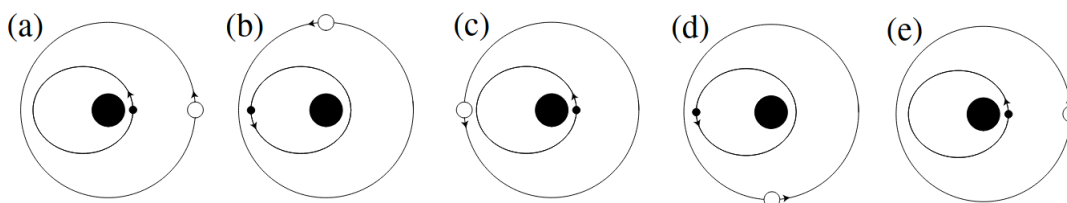


Figura 2.1: Posições relativas do planeta (corpo exterior) e de um asteroide (corpo interior) para a configuração estável quando seus períodos orbitais estão na razão 2/1. As configurações ilustradas na figura são (a) $t = 0$, (b) $t = \frac{1}{4}T_p$, (c) $t = \frac{1}{2}T_p$, (d) $t = \frac{3}{4}T_p$ e (e) $t = T_p$; sendo T_p o período da órbita do planeta. Imagem extraída da página 322 do Murray e Dermott (1999).

A Figura 2.1 ilustra as configurações relativas do asteroide e do planeta ao longo do tempo necessário para que o asteroide complete um período em torno do Sol; sendo que em $t = 0$ ambos estão em conjunção e o asteroide está no periastro de sua órbita (Fig. 2.1a). O tempo será espaçado de um quarto do período do planeta. Negligenciando a interação entre os objetos, o asteroide estará no apoastro de sua órbita e o planeta completou 1/4 de sua órbita (Fig. 2.1b). Apesar da distância mínima entre as duas órbitas ser no apocentro do asteroide, o planeta não está próximo quando o asteroide está nessa posição. De forma similar, na Fig. 2.1c, o planeta completa metade de sua órbita e o asteroide retorna ao periastro. Para $t = \frac{3}{4}T_p$ o asteroide retorna ao apoastro de sua órbita, mas o planeta novamente não está próximo. Finalmente, para $t = T_p$, o sistema retorna a configuração

inicial (Fig. 2.1e). Desse modo, mesmo que aparente que o asteroide sofrerá grandes perturbações do planeta em seu apoastro, fica evidente que estes encontros próximos são evitados devido ao mecanismo ressonante. Este é um exemplo de uma configuração estável que pode ocorrer entre um planeta e um asteroide.

Partindo com os planetas em conjunção no apoastro do asteroide (Figura 2.2), as configurações (b) (c) e (d) são espelhadas e possuem interações gravitacionais similares ao caso anterior, porém devido as configuração (a) e (e) fica claro que a configuração seria instável, pois o encontro próximo observado se repetiria a cada período do planeta.

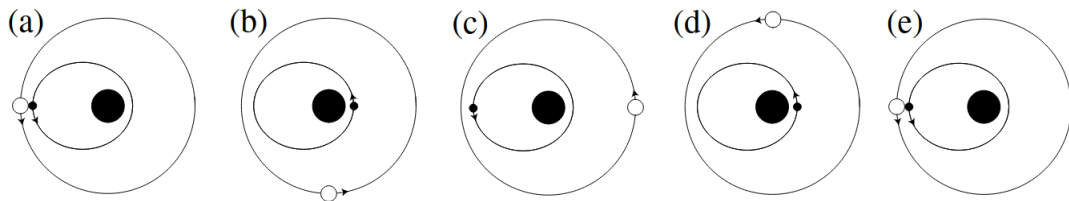


Figura 2.2: Posições relativas do planeta (corpo exterior) e de um asteroide (corpo interior) para a configuração estável quando seus períodos orbitais estão na razão 2/1. As configurações ilustradas na figura são (a) $t = 0$, (b) $t = \frac{1}{4}T_p$, (c) $t = \frac{1}{2}T_p$, (d) $t = \frac{3}{4}T_p$ e (e) $t = T_p$; sendo T_p o período da órbita do planeta. Imagem extraída da página 323 do Murray e Dermott (1999).

De forma mais geral, a ressonância de movimento médio entre dois corpos ocorre quando a razão entre os períodos orbitais destes está próxima da razão de dois números inteiros. Considerando um caso mais geral, onde dois corpos possuem órbitas coplanares em torno de uma estrela, podemos escrever uma relação para o caso de uma ressonância interior e exterior

$$\frac{n}{n'} = \frac{p}{q} \quad e \quad \frac{n'}{n} = \frac{p}{q}, \quad (2.1)$$

onde n e n' são os movimentos médios do corpo interior e exterior respectivamente e p e q são números inteiros. Se considerarmos dois corpos em conjunção em $t = 0$, sabemos que a próxima conjunção irá ocorrer quando

$$nt \mp n't = 2\pi \quad (2.2)$$

em que o sinal negativo é utilizado para o caso prógrado, quando a inclinação orbital é igual a 0° e o sinal positivo para o caso retrógrado com inclinação orbital igual 180° . A partir da Eq. (2.2) sabemos que o período entre conjunções sucessivas pode ser determinado

$$T_{con} = \frac{2\pi}{n \mp n'}. \quad (2.3)$$

Porém, como $pn' = qn$ para uma ressonância interior e $pn = qn'$ para uma ressonância exterior podemos obter uma relação do tempo de conjunção com o período orbital de ambos os corpos;

$$T_{con}^{(int)} = \frac{p}{p \mp q} \frac{2\pi}{n} = \frac{p}{p \mp q} T = \frac{q}{p \mp q} T', \quad (2.4)$$

$$T_{con}^{(ext)} = \frac{q}{q \mp p} \frac{2\pi}{n} = \frac{q}{q \mp p} T = \frac{p}{q \mp p} T'. \quad (2.5)$$

Portanto,

$$(p \mp q) T_{con}^{(int)} = pT = qT', \quad (2.6)$$

$$(q \mp p) T_{con}^{(ext)} = qT = pT'. \quad (2.7)$$

Se o termo multiplicando o T_{con} for igual a 1 sabemos que cada corpo completa um número inteiro de órbitas a cada conjunção, sendo que cada conjunção ocorre na mesma longitude do espaço inercial. Se o termo for igual a 2 sabemos que cada segunda conjunção acontecerá na mesma longitude. Logo, generalizando, quando o termo for igual a i sabemos que a conjunção na mesma longitude ocorrerá a cada i conjunções.

As ressonâncias orbitais podem ser identificadas através da libração de ângulos ressonantes que dependem dos elementos orbitais de ambos os corpos. Como descrito em Namouni & Morais (2018), estes são representados por meio de uma expressão geral

$$\phi_k = -p\lambda' + q\lambda + (p - q)\Omega - k\omega \quad (2.8)$$

em que λ e λ' são respectivamente as longitudes médias da órbita de um asteroide e de um planeta por exemplo, Ω e ω são a longitude do nodo ascendente e o argumento do periastro do asteroide. O termo k é um número inteiro dado por $k = q - p$ para o caso coplanar prógrado e $k = p + q$ para o caso coplanar retrógrado. No caso inclinado, o termo k pode assumir valores pares/ímpares entre $q - p$ e $p + q$ quando $p + q$ e $q - p$ são pares/ímpares, de modo que a libração pode ocorrer para o ângulo ressonante respectivo a qualquer valor de k neste intervalo. De forma geral, o estudo do ângulo ressonante coplanar é relevante em todos os casos, sendo o principal ângulo utilizado para a análise de qualquer ressonância orbital.

A localização aproximada da ressonância de movimento médio pode ser obtida através da proporcionalidade entre semieixo maior e período descrita pela terceira Lei de Kepler, em que a é o semieixo do corpo em uma ressonância interior e a' do corpo em uma ressonância exterior, desse modo, respectivamente

$$a = \left(\frac{q}{p}\right)^{2/3} a' \quad \text{e} \quad a' = \left(\frac{p}{q}\right)^{2/3} a. \quad (2.9)$$

Desse modo, quando a razão entre os períodos dos corpos puder ser escrito como uma razão de dois números inteiros, o ângulo ressonante respectivo a ressonância em questão irá librar geralmente em torno de 0° ou 180° , indicando assim a existência da ressonância de movimento médio. As ressonâncias podem causar tanto estabilidade quanto instabilidade, um exemplo disso é como os asteroides prógrados em ressonância 1/1 com Júpiter foram perturbados quando estavam, durante a migração planetária, na ressonância 2/1 com Saturno.

Retornando ao exemplo de configuração utilizada no começo do capítulo, considera-se o sistema em que o asteroide está em uma ressonância prógrada 2/1 com o planeta. Por meio do conceito de sistema referencial não inercial, sabemos que as posições (x, y, z) do asteroide em um referencial sinódico estão relacionadas com as coordenadas do referencial inercial através de uma simples rotação;

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

em que n é o movimento médio da órbita do planeta, dado por $n = (2\pi)/T$; o termo nt também pode ser substituído por $\theta = \arctan(y_p/x_p)$. Desse modo, com a transformação para o referencial sinódico, a trajetória do asteroide na ressonância 2/1 se aproxima de uma órbita kepleriana de baixa excentricidade com a estrela no centro.

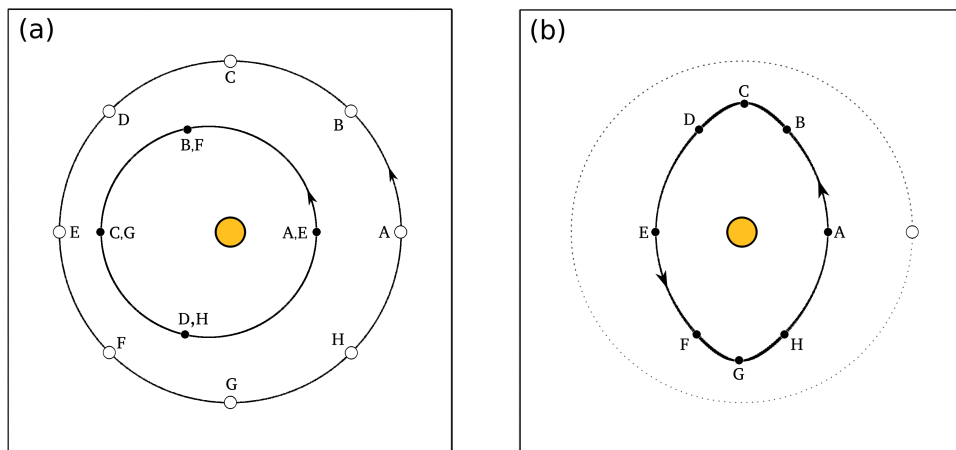


Figura 2.3: (a) Posições relativas do asteroides e do planeta na ressonância de movimento médio 2/1 no referencial inercial. (b) Trajetória do asteroide no referencial sinódico que se move com o movimento médio do planeta. As posições do asteroides ilustradas na Figura (a) também foram representadas na Figura (b). A excentricidade da órbita do asteroide nesse caso é de 0.2.

Por conta da ressonância $2/1$, sabemos que o asteroide irá completar duas órbitas para cada volta do planeta em torno da estrela. Em cada uma de suas passagens pelo seu apoastro, Júpiter está $\pm 90^\circ$ em longitude com o asteroide. Como no apoastro, a velocidade angular do asteroide é mínima e próxima da de Júpiter, os pontos nessa posição se tornam próximos no sistema referencial em rotação. Para valores suficientes de excentricidade, a velocidade angular do asteroide no apoastro é menor do que a velocidade angular fixa do planeta; de modo que no referencial sinódico o asteroide aparentará se movendo na direção contrária do movimento orbital no referencial inercial.

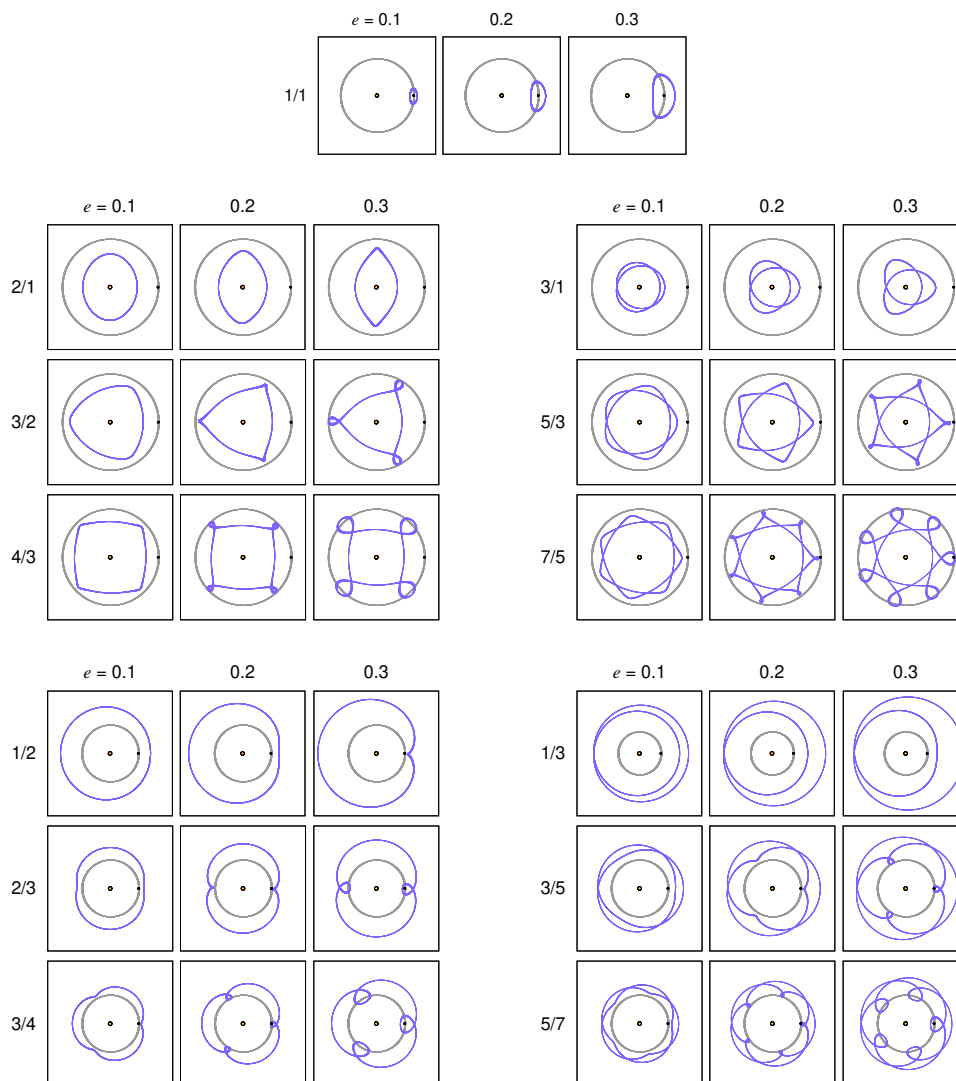


Figura 2.4: Trajetória da partícula teste prógrada no referencial sinódico na ressonância coorbital $1/1$, nas ressonâncias interiores de primeira ordem $2/1$, $3/2$ e $4/3$, nas ressonâncias interiores de segunda ordem $3/1$, $5/3$ e $7/5$, nas ressonâncias exteriores de primeira ordem $1/2$, $2/3$, $3/4$, nas ressonâncias exteriores de segunda ordem $1/3$, $3/5$, $5/7$ para três valores de excentricidade $e = 0.1$, 0.2 e 0.3 . Para ter uma noção da proporção dessas órbitas no referencial sinódico, adicionou-se, em cinza, a órbita do planeta no referencial inercial.

Ilustrando esse comportamento para diferentes excentricidades e ressonâncias, podemos ver como a trajetória do asteroide se altera devido a esses parâmetros. A Figura 2.4 demonstra a trajetória no referencial sinódico de um asteroide prógrado em uma localização de ressonância de primeira-ordem interior, segunda-ordem interior, primeira-ordem exterior e segunda-ordem exterior respectivamente. O referencial não inercial utilizado se movimenta com o movimento médio do planeta, desse modo, a posição do planeta nesse referencial é fixa. Como estamos interessados apenas na geometria relativas dessas órbitas, o código do integrador numérico de n-corpos *Mercury*, Chambers (1999), foi alterado para que as perturbações entre os dois corpos não fossem consideradas.

A trajetória da partícula no referencial em rotação nos mostra uma relação entre a razão da ressonância e a frequência de conjunções com o objeto interno ou externo. No caso em que a partícula está em uma ressonância interior $p > q$ a configuração orbital se repete a cada p orbitas da partícula. Entretanto, quando a partícula está em uma ressonância exterior $q > p$ a configuração orbital se repete a cada q órbitas da partícula.

Através da Figura 2.4, podemos observar que o número de *loops* no referência não inercial para ressonâncias interiores e exteriores é dado por p . Isso pode ser explicado, pois esse efeito no referencial sinódico sempre ocorre no apocentro da órbita da partícula interior e no pericentro da órbita da partícula exterior. Fica claro também que os loops surgem com o aumento da excentricidade, o valor crítico da excentricidade para o surgimento dos *loops* pode ser calculado. Pois, eles apenas aparecem quando a velocidade angular da partícula se aproxima da velocidade angular do perturbador, que nesse caso é constante. Para excentricidades muito grandes, uma boa parte da trajetória da partícula no referencial sinódica seria no sentido contrário. Os valores críticos de excentricidade para que os *loops* ocorram podem ser encontrados, para órbitas internas e externas, pelas seguintes equações cúbicas

$$(1 + e)^3 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 (1 - e), \quad (2.11)$$

$$(1 - e')^3 = \left(\frac{q}{p}\right)^2 (1 + e'). \quad (2.12)$$

Por exemplo, a solução da Eq. (2.11) nos retorna valores críticos de excentricidade para as ressonâncias internas 3/2 e 4/3 de 0.211 e 0.148 respectivamente. Através da Figura 2.4a, fica claro que os valores são consistentes com o comportamento da órbita.

Na Figura 2.5, as mesmas ressonâncias e excentricidades foram obtidas para o asteroide no caso retrógrado, ou seja com inclinação orbital igual a 180° . O sinal de menos foi utilizado na figura apenas para indicar que se trata de uma ressonância entre um corpo prógrado e retrógrado.

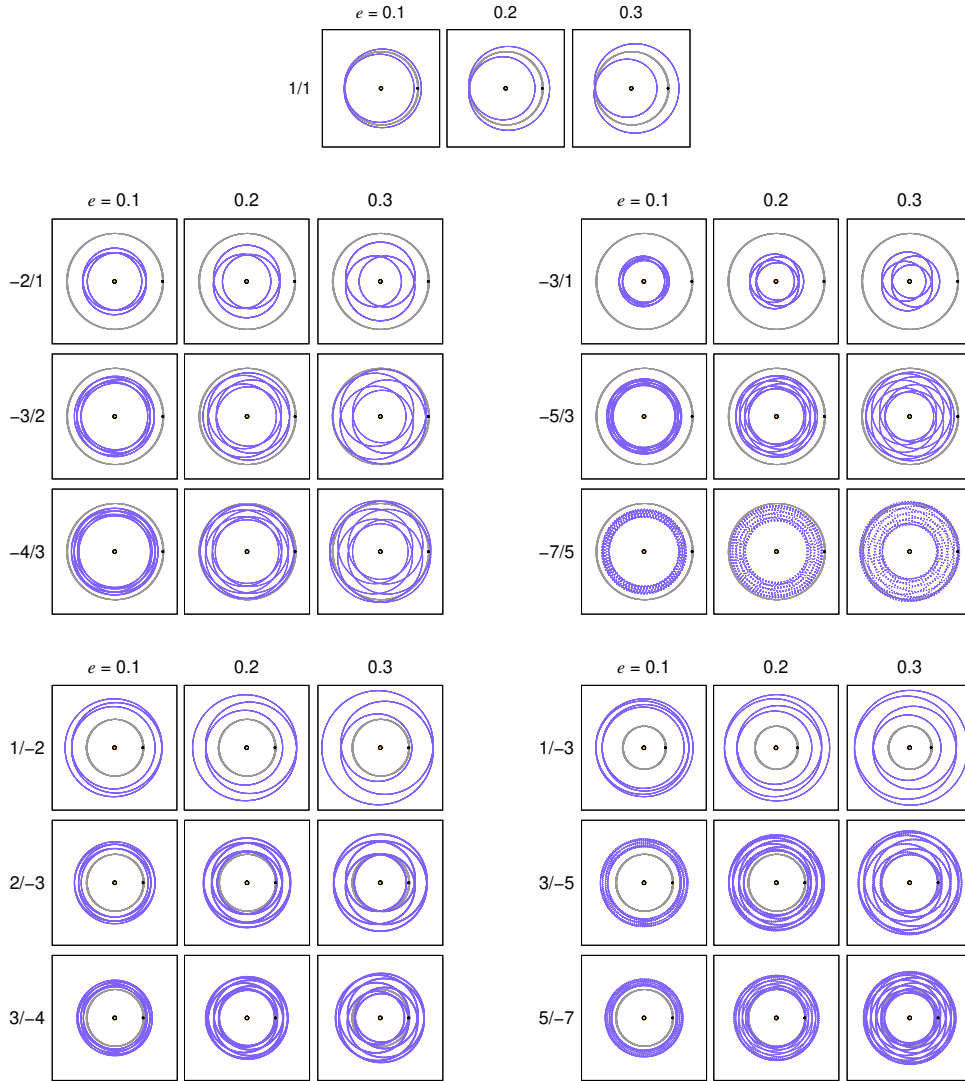


Figura 2.5: Trajetória da partícula teste retrógrada no referencial sinódico na ressonância coorbital 1/1, nas ressonâncias interiores $-2/1$, $-3/2$ e $-4/3$, nas ressonâncias interiores $-3/1$, $-5/3$ e $-7/5$, nas ressonâncias exteriores $1/-2$, $2/-3$, $3/-4$ e nas ressonâncias exteriores $1/-3$, $3/-5$, $5/-7$ para três valores de excentricidade $e = 0.1$, 0.2 e 0.3 . Para ter uma noção da proporção dessas órbitas no referencial sinódico, adicionou-se, em cinza, a órbita do planeta no referencial inercial.

A caracterização das órbitas retrógradadas no referencial sinódico pode ser feita pelo número de laços presentes na órbita no referencial sinódico, sendo que o número de laços é dado por p em cada *camada*. A figura de uma órbita retrógrada no sinódico pode ser obtida através da sobreposição de ressonâncias de menor ordem. Por exemplo, a forma da ressonância retrógrada $-3/2$ no referencial sinódico pode ser representada por 3 ressonâncias $1/-2$ sobrepostas, sendo que cada uma destas deve ser rotacionada em múltiplos de $360^\circ/p$, neste caso, as órbitas da ressonâncias $1/-2$ seriam rotacionadas em 0° , 120° e 240° . O surgimento destes laços está diretamente relacionado a excentricidade.

Os tempos de conjunção para cada ressonância abordada nesse capítulo foram calculados utilizando as Eqs. (2.4) e (2.5) e foram dispostos na Tabela 2.1. Como podemos ver pela tabela, não há diferença no tempo de conjunção no caso de uma ressonância interior ou exterior.

	Prógrada		Retrógrada		
2/1	$2T$	$1T'$	$2/3 T$	$1/3 T'$	1/2
3/2	$3T$	$2T'$	$3/5 T$	$2/5 T'$	2/3
4/3	$4T$	$3T'$	$4/7 T$	$3/7 T'$	3/4
3/1	$3/2 T$	$1/2 T'$	$3/4 T$	$1/4 T'$	1/3
5/3	$5/2 T$	$3/2 T'$	$5/8 T$	$3/8 T'$	3/5
7/5	$7/2 T$	$5/2 T'$	$7/12 T$	$5/12 T'$	5/7

Tabela 2.1: Tabela referente aos tempos de conjunções das ressonâncias interiores e exteriores para o caso prógrado e retrógrado.

Devido a uma indeterminação matemática, não podemos utilizar as equações de tempo de conjunção para o caso da ressonância prógrada 1/1, já no caso da ressonância coorbital retrógrada não podemos considerar os dois corpos com órbitas circulares, pois haveria colisão entre os mesmos. De forma geral, fica evidente que no caso retrógrado o número de conjunções para um mesmo período de tempo é bem maior do que no caso prógrado, isso em um primeiro momento pode instigar um pensamento de que as ressonâncias retrógradas são mais instáveis do que as prógradas, entretanto, estudos recentes demonstram que há diversas situações em que o contrário ocorre.

A recente descoberta do asteroide coorbital retrógrado de Júpiter, 2015 BZ509, que se encontra nessa configuração a milhões de anos é um exemplo claro de como o número de conjunções não é um fator determinante para a instabilidade, Morais e Namouni (2017); Wiegert, Connors e Veillet (2017). Aliás, a captura na ressonância coorbital retrógrada demonstrou ter uma eficiência imensamente superior a prógrada, sendo que um dos picos de captura com mais eficiência é próximo da configuração orbital do asteroide recém-descoberto, Namouni e Morais (2018).

A estabilidade de corpos retrógrados não está limitada apenas ao caso restrito; com o avanço da detecção de exoplanetas, o número de sistemas extrassolares com planetas retrógrados aumenta a cada ano. Devido as localizações de ressonâncias serem regiões que garantem grande estabilidade, sabemos que estes planetas muito provavelmente estarão em configurações ressonantes.

Capítulo 3

A Função Perturbadora

Diferentemente do problema de dois corpos, que é um problema integrável em que as órbitas dos corpos são fixas ao longo do tempo, no problema de três corpos as órbitas são alteradas a cada instante de tempo. Para melhorar nosso entendimento podemos analisar as acelerações dos três corpos. No caso em que o movimento dos corpos são determinados principalmente pelo corpo central ou pelo corpo primário, as órbitas dos corpos secundários são seções cônicas com pequenas variações causadas pelas perturbações gravitacionais mútuas. Essas variações podem ser calculadas pela análise da função perturbadora.

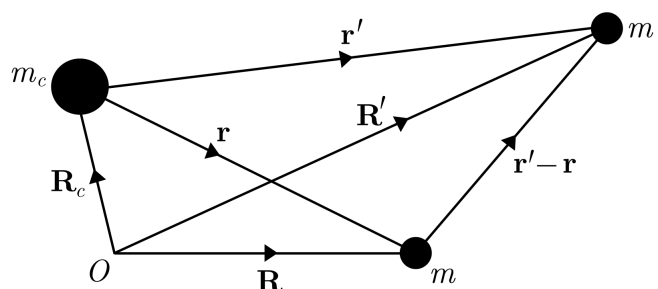


Figura 3.1: Representação dos vetores posição \mathbf{r} e \mathbf{r}' das duas massas m e m' com respeito ao centro de massa m_c . As três massas têm vetores posição \mathbf{R} , \mathbf{R}' e \mathbf{R}_c com relação a uma origem fixa arbitrária O .

Considere duas massas secundárias, uma interna m e a outra externa m' , orbitando um corpo central com massa m_c . Os vetores posição em respeito a origem inercial são representados respectivamente por \mathbf{R}_c , \mathbf{R} e \mathbf{R}' .

Os vetores posição das massas secundárias em relação a massa primária são dados por \mathbf{r} e \mathbf{r}' , sendo que

$$|\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad (3.1)$$

$$|\mathbf{r}'| = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}. \quad (3.2)$$

Desse modo, o vetor $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ ilustrado na Figura 6 pode ser determinado

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{1/2}. \quad (3.3)$$

Pelas leis do movimento e da gravitação desenvolvidas por Newton, obtemos as equações do movimento das três massas no referencial inercial:

$$m_c \ddot{\mathbf{R}}_c = \mathcal{G} m_c m \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathcal{G} m_c m' \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}, \quad (3.4)$$

$$m \ddot{\mathbf{R}} = \mathcal{G} m m' \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} + \mathcal{G} m m_c \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (3.5)$$

$$m' \ddot{\mathbf{R}}' = \mathcal{G} m' m \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \mathcal{G} m' m_c \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}. \quad (3.6)$$

As acelerações das massas secundárias relativas ao corpo central são dadas por

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}} - \ddot{\mathbf{R}}_c, \quad (3.7)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \ddot{\mathbf{R}}' - \ddot{\mathbf{R}}_c. \quad (3.8)$$

Substituindo as Eqs. (3.4) - (3.6) nas expressões anteriores, temos que

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mathcal{G}(m_c + m) \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} = \mathcal{G} m' \left(\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right), \quad (3.9)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}' + \mathcal{G}(m_c + m') \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathcal{G} m \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right). \quad (3.10)$$

Essas acelerações relativas podem ser escritas como gradiente de funções escalares, assim podemos escrever

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla(U + \mathcal{R}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) (U + \mathcal{R}) \quad (3.11)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \nabla(U' + \mathcal{R}') = \left(\frac{\partial}{\partial x'} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y'} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z'} \hat{\mathbf{k}} \right) (U' + \mathcal{R}') \quad (3.12)$$

sendo que

$$U = \mathcal{G} \frac{(m_c + m)}{r} \quad e \quad U' = \mathcal{G} \frac{(m_c + m')}{r'} \quad (3.13)$$

são os termos do problema de dois corpos do potencial.

O termo \mathcal{R} é o potencial da **função perturbadora**, o qual representa o potencial causado pela outra massa secundária. Como os vetores posição \mathbf{r} e \mathbf{r}' não dependem de x, y, z e

x', y', z' , sabemos que as funções perturbadoras da massa secundária interna e externa serão dadas respectivamente por

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{G}m'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \mathcal{G}m' \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3}, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{R}' = \frac{\mathcal{G}m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \mathcal{G}m \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3}. \quad (3.15)$$

Os primeiros termos de cada expressão são denominados de *termos diretos* e estão relacionados as forças gravitacionais entre as massas secundárias enquanto os termos originários da escolha da origem do sistema de coordenadas são conhecidos como *termos indiretos*. Caso, a origem do sistema de coordenadas fosse no centro de massa apenas existiriam os termos diretos nas expressões.

3.1 Expansão Literal em Excentricidade e Inclinação

Devido a complexidade da expansão da função perturbadora é necessário distinguir a parte direta da indireta. Utilizando as Eqs. (3.14) e (3.15) e definindo que $\alpha = a/a'$, podemos escrever que

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{G}m'}{a'} \mathcal{R}_D + \frac{\mathcal{G}m'}{a'} \alpha \mathcal{R}_E, \quad (3.16)$$

$$\mathcal{R}' = \frac{\mathcal{G}m}{a'} \mathcal{R}_D + \frac{\mathcal{G}m}{a'} \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{R}_I, \quad (3.17)$$

sendo que

$$\mathcal{R}_D = \frac{a'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad (3.18)$$

$$\mathcal{R}_E = - \left(\frac{r}{a} \right) \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \cos \psi \quad (3.19)$$

$$\mathcal{R}_I = - \left(\frac{r'}{a'} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos \psi \quad (3.20)$$

Nestas equações, o termo \mathcal{R}_D se refere a parte direta da função perturbadora, \mathcal{R}_E origina a parte indireta devido a perturbação externa, e \mathcal{R}_I está relacionado a parte indireta devido a perturbação interna. Assim, podemos usar a expansão de \mathcal{R}_D para obter a parte direta tanto de \mathcal{R} quanto de \mathcal{R}' .

Com o intuito de isolar qualquer termo apropriado na função perturbadora para algum problema específico, se torna necessário obter a expansão em serie de \mathcal{R} ou \mathcal{R}' em termos dos elementos orbitais dos dois corpos. Esse procedimento exige que as expansões da parte direta e das partes indiretas \mathcal{R}_E e \mathcal{R}_I sejam separadas.

Continuando com um sistema similar ao descrito anteriormente nesse capítulo, iremos considerar que uma partícula teste exterior se move devido ao efeito gravitacional de um corpo central e de uma massa secundária com massa $m \ll m_c$. Nesse novo sistema, a massa m descreve uma órbita circular com raio $r' = a' = 1$ e com ângulo de longitude λ' . A partícula teste possui uma órbita com semieixo maior a , excentricidade e , inclinação I , anomalia verdadeira f , argumento do pericentro ω e longitude do nodo ascendente Ω . O plano de referência é definido pelo plano orbital dos dois corpos massivos.

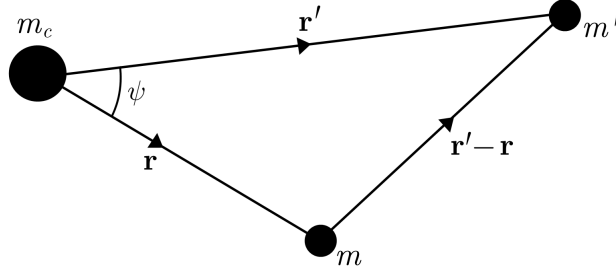


Figura 3.2: Os vetores posição \mathbf{r} e \mathbf{r}' das duas massas m e m' com respeito a massa central m_c , sendo que o ângulo ψ entre essas duas massas também foi representado.

Isolando o triângulo formado pelas três massas na Figura 3.2 podemos definir que o ângulo entre os dois vetores posição dos corpos secundários como ψ . Desse modo, utilizando a lei dos cossenos para o vetor $(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ temos que

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2 = 1 + r^2 - 2r \cos \psi, \quad (3.21)$$

a partir dessa equação e lembrando que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr' \cos \psi$, podemos reescrever a Eq. (3.14) do seguinte modo

$$\mathcal{R} = \mathcal{G}m \left(\frac{1}{\Delta} - \mathbf{r} \cos \psi \right), \quad (3.22)$$

sendo que $\Delta = \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \psi}$. Devido ao produto escalar, podemos também reescrever o $\cos \psi$ da seguinte forma:

$$\cos \psi = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}. \quad (3.23)$$

Podemos rotacionar cada eixo afim de relacionar o plano orbital do sistema de coordenadas com o plano de referência do sistema. Desse modo, temos que

$$\frac{x}{r} = \cos(\Omega) \cos(\omega + f) - \sin(\Omega) \sin(\omega + f) \cos I, \quad (3.24)$$

$$\frac{y}{r} = \sin(\Omega) \cos(\omega + f) + \cos(\Omega) \sin(\omega + f) \cos I, \quad (3.25)$$

$$\frac{z}{r} = \sin(\omega + f) \sin I, \quad (3.26)$$

com expressões similares para o corpo secundário, x'/r' , y'/r' e z'/r' .

Conseqüentemente, podemos reescrever o $\cos \psi$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}\cos \psi &= \cos(\Omega - \lambda') \cos(\omega + f) - \sin(\Omega - \lambda') \sin(\omega + f) \cos I \\ &= \cos^2(I/2) \cos(\omega + f + \Omega - \lambda') + \sin^2(I/2) \sin(\omega + f - \Omega + \lambda'),\end{aligned}\quad (3.27)$$

sendo que a última expressão é obtida por meio das relações trigonométricas de soma dos argumentos do cosseno.

No caso em que a órbita é prógrada e possui inclinação orbital próxima do plano do sistema, $I \approx 0^\circ$, sabemos que $\sin^2(I/2) \ll 1$; dessa forma, definindo o parâmetro

$$\begin{aligned}\Psi &= \cos \psi - \cos(f + \omega + \Omega - \lambda') \\ &= 2 \sin^2(I/2) \sin(\Omega - \lambda') \sin(\omega + f),\end{aligned}\quad (3.28)$$

podemos reescrever o termo direto da Eq. (3.22), expandindo a expressão de Δ^{-1} em série de Taylor em torno de $\Psi = 0$ para assim obter a expressão clássica para uma órbita prógrada

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta} &= [1 + r^2 - 2r(\cos(f + \omega + \Omega - \lambda') + \Psi)]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{\Delta_0} + r\Psi \frac{1}{\Delta_0^3} + \frac{3}{2}(r\Psi)^2 \frac{1}{\Delta_0^5} + \dots \\ \frac{1}{\Delta} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left(\frac{1}{2}r\Psi\right)^i \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}},\end{aligned}\quad (3.29)$$

sendo que

$$\frac{1}{\Delta_0} = [1 + r^2 - 2r \cos(f + \omega + \Omega - \lambda')]^{-1/2}.\quad (3.30)$$

No caso em que a órbita é retrógrada e também possui inclinação orbital próxima do plano, $I \approx 180^\circ$, sabemos que $\cos^2(I/2) \ll 1 \rightarrow \Psi \gg 1$ e portanto a expansão na Eq. (3.29) não pode ser utilizada. Definindo um parâmetro para o caso retrógrado, temos que

$$\begin{aligned}\bar{\Psi} &= \cos \psi - \cos(f + \omega - \Omega + \lambda') \\ &= 2 \cos^2(I/2) \sin(-\Omega + \lambda') \sin(\omega + f),\end{aligned}\quad (3.31)$$

expandindo novamente o termo direto da Eq. (3.22), em torno de $\bar{\Psi} = 0$, obtemos a expansão para o caso retrógrado

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left(\frac{1}{2}r\bar{\Psi}\right)^i \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}},\quad (3.32)$$

sendo que

$$\frac{1}{\Delta_0} = [1 + r^2 - 2r \cos(f + \omega - \Omega + \lambda')]^{-1/2}. \quad (3.33)$$

Como a diferença entre os dois casos ocorre apenas no sinal dos termos dependentes de Ω e λ' no argumento do cosseno podemos escrever uma expressão válida para a ressonância prógrada e retrógrada;

$$\frac{1}{\Delta_{\pm}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left(\frac{1}{2} r \Psi_{(\pm)} \right)^i \frac{1}{\Delta_{0(\pm)}^{2i+1}}, \quad (3.34)$$

em que

$$\frac{1}{\Delta_{0(\pm)}} = [1 + r^2 - 2r \cos(f + \omega \pm \Omega \mp \lambda')]^{-1/2}. \quad (3.35)$$

e

$$\Psi_{(\pm)} = \cos \psi - \cos(f + \omega \pm \Omega \mp \lambda'). \quad (3.36)$$

Definindo,

$$\rho_0 = [a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(f + \omega \pm \Omega \mp \lambda')]^{-1/2} \quad (3.37)$$

podemos expandir a Eq. (3.35) em série de Taylor em torno de a , de modo que

$$\frac{1}{\Delta_{0(\pm)}^{2i+1}} = \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} + (r - a) \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) + (r' - a') \frac{\partial}{\partial a'} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) + \dots \quad (3.38)$$

com intuito de obter uma equação geral, iremos utilizar os valores de r' e a' descritos para o nosso caso depois da obtenção de \mathcal{R}_D .

Definindo $D_{m,n}$ como a notação para o operador diferencial

$$D_{m,n} = a^m a'^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a'^n}, \quad (3.39)$$

e

$$\epsilon = \frac{r}{a} - 1 \quad (3.40)$$

$$\epsilon' = \frac{r'}{a'} - 1 \quad (3.41)$$

podemos utilizar a equação r/a do problema de dois corpos, de modo que ϵ pertence a $\mathcal{O}(e)$ e ϵ' a $\mathcal{O}(e')$. Desse modo, reescrevendo a Eq. (3.38) temos

$$\frac{1}{\Delta_{0(\pm)}^{2i+1}} = \left[1 + \epsilon D_{1,0} + \epsilon' D_{0,1} + \frac{1}{2!} (\epsilon^2 D_{2,0} + 2\epsilon\epsilon' D_{1,1} + \epsilon'^2 D_{0,2}) + \dots \right] \frac{1}{\rho_0^{2i+1}}. \quad (3.42)$$

O termo $(\rho_0^{2i+1})^{-1}$ pode ser expandido em série de cosseno,

$$\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} = [a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(f + \omega \pm \Omega \mp \lambda')]^{-(i+\frac{1}{2})} \quad (3.43)$$

$$\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} = a'^{-(2i+1)} [1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(f + \omega \pm \Omega \mp \lambda')]^{-(i+\frac{1}{2})} \quad (3.44)$$

pois, sabemos que $\alpha = a/a'$. Dessa forma, utilizando os *coeficientes de Laplace* $b_s^{(j)}(\alpha)$, temos que

$$\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} = a'^{-(2i+1)} \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \cos(j(f + \omega \pm \Omega \mp \lambda')), \quad (3.45)$$

sendo que cada coeficiente pode ser expresso por uma serie uniformemente convergente em α para todo $\alpha < 1$. Os coeficientes de Laplace são definidos por

$$b_s^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j \psi d\psi}{(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^s}, \quad (3.46)$$

em que $s = i + 1/2$ é um meio inteiro e $\alpha = a/a'$.

Como os operadores $D_{m,n}$ só atuam nos coeficientes de Laplace, podemos definir certas funções $A_{i,j,m,n}$ por

$$A_{i,j,m,n} = D_{m,n} \left(a'^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \right) = a^m a'^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a'^n} \left(a'^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \right). \quad (3.47)$$

Desse modo, utilizando as funções definidas na Eq. (3.47) podemos substituir a Eq. (3.45) na Eq. (3.42) e assim escrever

$$\frac{1}{\Delta_{0(\pm)}^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [A_{i,j,0,0} + \epsilon A_{i,j,1,0} + \epsilon' A_{i,j,0,1} + \dots] \cos(j(f + \omega \pm \Omega \mp \lambda')). \quad (3.48)$$

Se generalizarmos essa equação obtemos que

$$\frac{1}{\Delta_{0(\pm)}^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \epsilon^k \epsilon'^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos(j(f + \omega \pm \Omega \mp \lambda')) \quad (3.49)$$

Lembrando que $\mathcal{R}_D = a'/\Delta$, podemos substituir a Eq. (3.49) na Eq. (3.34) para assim obter que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left(\frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \Psi \right)^i \frac{a^i a'^{i+1}}{2} \\ &\times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \epsilon^k \epsilon'^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos(j(f + \omega \pm \Omega \mp \lambda')) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Para o caso em que $r' = a' = 1$, sabemos que $\epsilon' = 0$, logo, sabemos que os podemos obter a seguinte expressão para o termo direto da função perturbadora

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left(\frac{1}{2} \frac{r}{a} \Psi \right)^i \frac{a^i}{2} \\ &\times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \epsilon^k A_{i,j,k,0} \right] \cos(j(f + \omega \pm \Omega \mp \lambda')). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Para obtermos a expansão da função perturbadora em segunda ordem da excentricidade e da inclinação é necessário utilizar as expansões elípticas de $\cos f$ e $\sin f$ em termos da anomalia média M , disponíveis na seção 2.5 de Murray e Dermott (1999). Considerando até a segunda ordem, temos que

$$\sin f = \sin M + e \sin 2M + e^2 \left(\frac{9}{8} \sin 3M - \frac{7}{8} \sin M \right), \quad (3.52)$$

$$\cos f = \cos M + e(\cos 2M - 1) + e^2 \left(\frac{9}{8} \cos 3M - \frac{9}{8} \cos M \right). \quad (3.53)$$

Assim, substituindo essas duas expressões nas equações $\cos(\omega + f)$ e $\sin(\omega + f)$, podemos escrever que

$$\begin{aligned} \cos(\omega + f) &= \cos(\omega + M) + e(\cos(\omega + 2M) - \cos(\omega)) \\ &+ e^2 \left(-\cos(\omega + M) - \frac{1}{8} \cos(\omega - M) + \frac{9}{8} \cos(\omega + 3M) \right), \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \sin(\omega + f) &= \sin(\omega + M) + e(\sin(\omega + 2M) - \sin(\omega)) \\ &+ e^2 \left(-\sin(\omega + M) + \frac{1}{8} \sin(\omega - M) + \frac{9}{8} \sin(\omega + 3M) \right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Portanto, através de todo procedimento descrito na seção 6.5 de Murray e Dermott (1999) pode-se finalmente obter a expressão da função perturbadora para a segunda ordem da excentricidade e inclinação em termos das funções dependentes dos coeficientes de Laplace, Eq. (3.47);

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D &= \left(\frac{1}{2} [A_{0,j,0,0} + \epsilon A_{0,j,1,0} + \epsilon^2 A_{0,j,2,0}] + \frac{r}{2} \Psi A_{1,j,0,0} \right) \\ &\times \cos(j(f + \omega \pm \Omega \mp \lambda')). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Utilizando as séries derivadas na seção 6.5 do Murray e Dermott (1999), teremos uma expansão com vinte e três argumentos de cossenos. Estes podem ser separados por ordem do argumento, sendo dada pela soma dos coeficientes de λ e λ' . Para a expansão de segunda ordem podemos escrever que

$$\mathcal{R}_D = \mathcal{R}_D^{(0)} + \mathcal{R}_D^{(1)} + \mathcal{R}_D^{(2)} \quad (3.57)$$

em que a nomenclatura $\mathcal{R}_D^{(i)}$ representa a parte da expansão contendo os argumentos de ordem i . Cada um desses termos e também a própria expressão simplificada da forma final da expansão da parte direta podem ser encontradas na mesma seção. Lembrando que a expansão em segunda ordem somente é válida para ressonâncias de primeira e segunda ordem; no capítulo de aplicação deste trabalho precisaremos da expansão até quarta ordem. O procedimento para obter a expressão da função perturbadora para ordens superiores é análogo ao realizado para a segunda ordem. Os diferentes argumentos do cosseno da expansão até quarta ordem para as partes diretas e indiretas estão organizados no Apêndice B de Murray e Dermott (1999).

Como já comentado anteriormente, a diferença entre as expansões da função perturbadora para a ressonância prógrada, Eq. (3.29), e retrógrada, Eq. (3.32), só ocorre por conta do sinal de certos termos no argumento do cosseno, por conta disso elas podem ser relacionadas por meio das seguintes variáveis

$$I^* = 180^\circ - I \quad \lambda^* = -\lambda' \quad \omega^* = \omega - \pi \quad \Omega^* = -\Omega - \pi. \quad (3.58)$$

Desse modo, simplesmente invertendo o movimento dos corpos massivos, podemos obter uma órbita retrógrada com inclinação I a partir de uma órbita prógrada com inclinação $180^\circ - I$. Assim, utilizando a expansão literal da função perturbadora prógrada descrita em Ellis e Murray (2000), podemos transformar os termos relevantes para certas ressonâncias retrógradas, sendo que para nosso caso $s_* = \cos(I/2)$, $\lambda^* = M + \omega - \Omega$ e $\varpi^* = \omega - \Omega = \varpi - 2\Omega$.

3.2 As Equações Planetárias de Lagrange

A expansão da função perturbadora nos mostra como os elementos orbitais estão relacionados com o potencial perturbativo. Para obtermos a variação do elementos orbitais do corpo perturbado precisamos utilizar as equações planetárias de Lagrange. Todo procedimento para obtê-las pode ser encontrado na seção 4 do capítulo XI do Brouwer e Clemence (1961).

Para a obtenção e a utilização destas equações precisamos introduzir um ângulo adicional.

$$\lambda = M + \varpi = n(t - \tau) + \varpi = nt + \epsilon \quad (3.59)$$

sendo que λ é a longitude média, M é a anomalia média, ϖ é a longitude do pericentro, τ é o tempo de passagem pelo pericentro e o novo ângulo ϵ é a longitude média da época.

A partir dessas definições, as equações planetária de Lagrange convencionais em função desses elementos são dadas por

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon}, \quad (3.60)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi}, \quad (3.61)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2} (1 - \sqrt{1-e^2})}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\tan I/2}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \quad (3.62)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad (3.63)$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\tan I/2}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad (3.64)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\tan I/2}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \right) - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}. \quad (3.65)$$

As variações dos elementos orbitais em relação ao corpo de massa m' são similares as Eqs. (3.60) - (3.65), apenas sendo necessário substituir \mathcal{R} por \mathcal{R}' e substituindo as variáveis sem linha por variáveis com linha.

As equações planetárias de Lagrange também podem serem obtidas nas coordenadas descritas no capítulo anterior, sendo assim as equações serão dependentes de ϵ^* e ϖ^* . Desse modo, como descrito em Kinoshita e Nakai (1987), temos que

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon^*}, \quad (3.66)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon^*} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi^*}, \quad (3.67)$$

$$\frac{d\epsilon^*}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2} (1 - \sqrt{1-e^2})}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cot I/2}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \quad (3.68)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad (3.69)$$

$$\frac{d\varpi^*}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cot I/2}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad (3.70)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\cot I/2}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon^*} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi^*} \right) - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}. \quad (3.71)$$

As diferenças em relação as equações de Lagrange usuais aparecem na expressão de dI/dt e nos termos dependentes da inclinação nas expressões de $d\epsilon^*/dt$ e $d\varpi^*/dt$. Dessa forma, sabemos que, na situação em que o caso inclinado é considerado, as equações que descrevem a variação dos elementos orbitais sofrem alterações, pois há uma diferença nos termos dependentes da inclinação nas equações planetárias de Lagrange convencionais em relação as equações planetárias de Lagrange para o caso retrógrado.

Capítulo 4

Ressonância no Problema Circular Restrito de Três Corpos

Considerando o caso planar, circular e restrito em que o corpo que está em uma órbita externa perturba um corpo interior que possui massa desprezível; de modo que temos um problema de três corpos entre o Sol, um planeta e um asteroide com ambos se movendo no plano de referência. Dessa forma, levando em conta apenas os termos de menor ordem para a excentricidade, podemos reescrever as expressões das Equações Planetárias de Lagrange que são relevantes para o nosso problema. Para comparação, utilizaremos as equações usuais Eqs. (3.60) - (3.65) e as equações em função elementos orbitais derivados da transformada canônica Eqs. (3.66) - (3.71);

$$\dot{n} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} \qquad \dot{n} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda^*}, \quad (4.1)$$

$$\dot{e} = -\frac{1}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \qquad \dot{e} = -\frac{1}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi^*}, \quad (4.2)$$

$$\dot{\varpi} = \frac{1}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \qquad \dot{\varpi}^* = \frac{1}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}, \quad (4.3)$$

$$\dot{e} = \frac{e}{2na^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \qquad \dot{e}^* = \frac{e}{2na^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}, \quad (4.4)$$

utilizando $\dot{n} = (-3/2) \dot{n}a/a$, escolhemos escrever a equação da variação do semieixo maior em termos da variação do movimento médio. Substituímos também as derivadas parciais dependentes da longitude média da época pela longitude média, λ ou λ^* . Ademais, no caso de \dot{e}^* , assumimos que os termos envolvendo os coeficientes de Laplace são constantes, assim ignoramos os termos com derivada em relação ao semieixo maior. As expressões de \dot{I} e $\dot{\Omega}$ foram descartadas pois no caso planar a inclinação orbital não possui variação temporal e a longitude do nodo ascendente não é definida.

Como as Equações Planetárias de Lagrange para um corpo retrógrado se diferenciam das equações usuais apenas nos termos relacionados a inclinação, podemos ver que para o problema em questão as equações da variação dos elementos orbitais são similares. A partir daqui, com intuito de estudar a respeito do problema em que o asteroide se move no sentido contrário que o planeta, utilizaremos as expressões dependentes dos ângulos retrógrados.

Portanto, como a excentricidade e a inclinação do planeta são nulas e a inclinação do asteroide é 180° , temos que o termo geral da expansão média para esse problema pode ser escrito como

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \frac{G m'}{a'} [f_{s,1}(\alpha) e^2 + f_d(\alpha) e^{|j_4|} \cos \phi^*] \quad (4.5)$$

em que $f_{s,1}(\alpha)$ e $f_d(\alpha)$ representam respectivamente os termos seculares e diretos da expansão da função perturbadora. Devido a ambos os corpos estarem no plano de referência e a órbita do planeta se manter constante ao longo do tempo, podemos reescrever ϕ^* da seguinte forma

$$\phi^* = j_1 \lambda^* + j_2 \lambda^* + j_4 \varpi^*, \quad (4.6)$$

comparando a Eq. (4.6) com a expressão geral do ângulo ressonante Eq. (2.8), podemos observar que para o nosso caso, em que $\varpi^* = \omega$, a ordem de ressonância é dada por $|j_4|$.

Realizando as derivadas parciais, as equações do movimento se tornam

$$\dot{n} = 3 j_2 C_r n e^{|j_4|} \sin \phi^*, \quad (4.7)$$

$$\dot{e} = j_4 C_r e^{|j_4|-1} \sin \phi^*, \quad (4.8)$$

$$\dot{\varpi}^* = 2 C_s + |j_4| C_r e^{|j_4|-2} \cos \phi^*, \quad (4.9)$$

$$\dot{\epsilon}^* = C_s e^2 + \frac{1}{2} |j_4| C_r e^{|j_4|} \cos \phi^*. \quad (4.10)$$

Onde as constantes C_r e C_s presentes nas equações representam respectivamente a parte ressonante e secular da função perturbadora e são dadas por

$$C_r = \frac{G m'}{n a^2 a'} f_d(\alpha) = \left(\frac{m'}{m_c} \right) n \alpha f_d(\alpha) \quad (4.11)$$

$$C_s = \frac{G m'}{n a^2 a'} f_{s,1}(\alpha) = \left(\frac{m'}{m_c} \right) n \alpha f_{s,1}(\alpha) \quad (4.12)$$

sendo que foi utilizado a terceira lei de Kepler para reescrever as constantes em termo da massa do corpo central, $G = n^2 a^3 / m_c$. Os valores de f_d e $f_{s,1}$ para cada conjunto dos inteiros j estão representados nas tabelas da seção 8.4 em Murray e Dermott (1999).

Podemos analisar as equações de movimento para assim deduzir de forma geral como os elementos orbitais vão variar ao longo do tempo. Considerando $|j_4| \geq 1$, podemos ver que o movimento médio n e conseqüentemente o semieixo maior são quase constantes, isto ocorre devido ao termo $e^{|j_4|}$, Eq. (4.7). Como a variação da excentricidade é dependente de $e^{|j_4|-1}$ sabemos que essa terá uma maior variação em relação ao movimento médio, Eq. (4.8). Já para a variação da longitude do periastro fica claro que para órbitas quase circulares também ocorrerá variações expressivas, pois o termo ressonante é dominante em relação ao termo secular, Eq. (4.9). O mesmo ocorre para a equação de ϵ para uma ressonância prógrada de primeira ordem, de modo que a contribuição ressonante é dominante em relação a secular, porém para ressonâncias de segunda ordem ambos termos são comparáveis, Eq. (4.10).

Como $\dot{n} = -(3/2)(n/a)\dot{a}$, podemos isolar \dot{a} de modo que

$$\dot{a} = -2 j_2 C_r a e^{|j_4|} \sin \phi^* \quad (4.13)$$

e portanto

$$\frac{da}{de} = -2 (j_2/j_4) a e. \quad (4.14)$$

Desse modo, sabemos que as variações do semieixo maior e da excentricidade sempre estarão correlacionadas. No caso de uma ressonância interior, onde j_2 e j_4 possuem o mesmo sinal, teremos pela última equação que $da/de < 0$ e que o valor máximo do semieixo maior implica em um valor mínimo da excentricidade, sendo que o contrário também ocorre. Já, para o caso de uma ressonância exterior, onde j_2 e j_4 possuem sinais contrários, teremos que $da/de > 0$, logo o semieixo maior e a excentricidade são máximos ou mínimos ao mesmo tempo. Lembrando que no caso ressonante o semieixo maior e a excentricidade são funções periódicas com o mesmo período.

Podemos comparar a Eq. (4.14) com a expressão derivada da relação de Tisserand obtida para o problema restrito de três corpos

$$\frac{1}{2a} + \sqrt{a(1-e^2)} \cos I = \text{constante} \quad (4.15)$$

Utilizando $I = 0$ na equação anterior e a diferenciando em relação a excentricidade obtemos, para a menor ordem de e , que

$$\frac{da}{de} = \frac{2 a^{5/2} e}{a^{3/2} - 1}, \quad (4.16)$$

sendo assim, de forma similar ao descrito para a Eq. (4.14), sabemos que para órbitas interiores com $a < 1$, da/de assumirá valor negativo, já para órbitas exteriores da/de será positivo.

Lembrando que a variação da órbita do corpo externo é nula e que $\lambda^* = \epsilon^* + nt$, podemos obter a derivada temporal do ângulo ressonante ϕ^* , assim temos que

$$\dot{\phi}^* = j_1 n' + j_2 (n + \dot{\epsilon}^*) + j_4 \dot{\omega}^* \quad (4.17)$$

O conjunto de equações (4.7) - (4.10) e (4.17) descrevem a variação dos elementos orbitais e do ângulo ressonante na vizinhança da ressonância no problema planar, circular e restrito. Porém, estas podem ser alteradas para abranger a variação de elementos orbitais de outros casos. Por exemplo, no caso circular inclinado, além da relação entre a excentricidade e o semieixo maior, haveria uma dependência entre o comportamento da inclinação e da longitude do nodo ascendente. Neste caso, as equações de movimento do problema seriam distintas para o caso prógrado e retrógrado.

Capítulo 5

O Modelo do Pêndulo

Nesta secção abordaremos a respeito dos paralelos entre o modelo ressonante descrito nas seções anteriores e o movimento de um pêndulo simples. Realizando a derivada segunda da equação do ângulo ressonante, Eq. (4.6), podemos escrever que

$$\ddot{\phi}^* = j_2 \dot{n} + j_2 \ddot{\epsilon}^* + j_4 \ddot{\omega}^*. \quad (5.1)$$

Assim reescrevendo as equações da variação da longitude do periastro e da variação da longitude média na época, temos que

$$\dot{\omega}^* = 2 C_s + |j_4| C_r G(e) \cos \phi^*, \quad (5.2)$$

$$\dot{\epsilon}^* = C_s e^2 + \frac{1}{2} |j_4| C_r F(e) \cos \phi^*, \quad (5.3)$$

sendo que

$$G(e) = e^{|j_4|-2} \quad \text{e} \quad F(e) = \frac{1}{2} e^{|j_4|}, \quad (5.4)$$

derivando novamente as Eqs. (5.2) e (5.3) e utilizando a regra da cadeia obtemos que

$$\ddot{\omega}^* = |j_4| C_r \left(\frac{dG(e)}{de} \dot{e} \cos \phi^* - G(e) \dot{\phi}^* \sin \phi^* \right), \quad (5.5)$$

$$\ddot{\epsilon}^* = 2 C_s e \dot{e} + |j_4| C_r \left(\frac{dF(e)}{de} \dot{e} \cos \phi^* - F(e) \dot{\phi}^* \sin \phi^* \right). \quad (5.6)$$

Lembrando que \dot{e} e $\dot{\phi}^*$ são dependentes, através das constantes C_r e C_s , do termo $m'/m_c \approx 0$; dessa forma como nas Eqs. (5.5) e (5.6) há multiplicação entre as derivadas e as constantes sabemos que as equações $\ddot{\omega}^*$ e $\ddot{\epsilon}^*$ terão um termo $(m'/m_c)^2$, dessa forma, sua contribuição é insignificante em relação a $\ddot{\phi}^*$. O único caso em que haveria contribuição do termo com $\ddot{\omega}$ seria para uma órbita prógrada com $e \approx 0$ e $|j_4| = 1$, de modo que $G(e) = 1/e$, sendo que isso ocorre apenas para ressonâncias prógradas de primeira ordem.

Desconsiderando as contribuições de $\ddot{\epsilon}^*$ e de $\ddot{\omega}^*$, podemos utilizar a equação de \dot{n} , Eq. (4.7), para reescrever a Eq. (5.1);

$$\ddot{\phi}^* = 3 j_2^2 C_r n e^{|j_4|} \sin \phi^*. \quad (5.7)$$

Através dos valores de $\alpha f_a(\alpha)$ já conhecidos para o caso prógrado, sabemos que a constante C_r é negativa para ressonâncias de ordem ímpar e positiva para ressonâncias de ordem par. Desse modo, vamos restringir nossos resultados as ressonâncias de ordem ímpar; conseqüentemente a equação de $\ddot{\phi}^*$ pode ser escrita da seguinte forma

$$\ddot{\phi}^* = -\omega_0^2 \sin \phi^*. \quad (5.8)$$

sendo que

$$\omega_0^2 = -3 j_2^2 C_r n e^{|j_4|}, \quad (5.9)$$

assumimos também que n , e e ω_0 são aproximadamente constantes. Portanto, considerando apenas o caso das ressonâncias de ordem ímpar, fica claro que a equação de $\ddot{\phi}^*$ é idêntica a expressão para um pêndulo simples estável em torno de $\phi^* = 0$. No caso das ressonâncias de ordem par, o movimento também seria similar ao descrito por um pêndulo simples, porém o seu ponto de estabilidade seria em torno de $\phi^* = \pi$. Esta diferença pode ser observada pela simples substituição de $\phi^{*'} = \phi^* + \pi$ na Eq. (5.8), retornando assim $\ddot{\phi}^* = +\omega_0^2 \sin \phi^{*'}$. De qualquer modo, mesmo com algumas poucas diferenças do caso da ressonância de ordem par, utilizaremos a Eq. (5.8) como a equação para o pêndulo simples.

No Apêndice A descreve-se todo o procedimento para a obtenção da equação diferencial para o problema do pêndulo simples, similar à Eq. (5.8). A partir da energia cinética e potencial deduzida no apêndice, podemos escrever a energia por unidade de massa do sistema do pêndulo simples como;

$$\frac{E}{m} = \frac{l^2 \dot{\theta}^2}{2} + g l (1 - \cos \theta), \quad (5.10)$$

como $2 \sin^2(x/2) = 1 - \cos x$, reescreve-se a última equação

$$\frac{E}{m} = l^2 \left[\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{l} \left(2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \right) \right]. \quad (5.11)$$

Portanto, podemos relacionar a equação diferencial do pêndulo simples com a equação diferencial do $\ddot{\phi}$ e obter a energia total do sistema estudado na Seção 3

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^{*2} + 2 \omega_0^2 \sin^2 \frac{1}{2} \phi^*, \quad (5.12)$$

lembrando que l é apenas uma constante do problema descrito no Apêndice 1.

Podemos analisar os tipos de movimentos para diferentes valores de energia. Através da variação da energia potencial em função da energia, ilustramos na Figura 5.1, três valores de energia total correspondentes a três comportamentos diferentes de ϕ^* .

- Para $E > E_3$ o movimento de ϕ^* é ilimitado, de modo que ocorre a circulação do ângulo ϕ^* , implicando em um movimento de 360° em torno do ponto de suspensão.
- Se $E < E_3$ o movimento de ϕ^* é limitado, ou seja, o pêndulo mantém seu movimento periódico abaixo do ponto de suspensão, ocorrendo a oscilação ou libração do ângulo ϕ^* .
- No caso em que $E = E_3$, o movimento ocorre na separatriz, sendo esta a divisão entre o regime de libração e o regime de circulação do pêndulo.

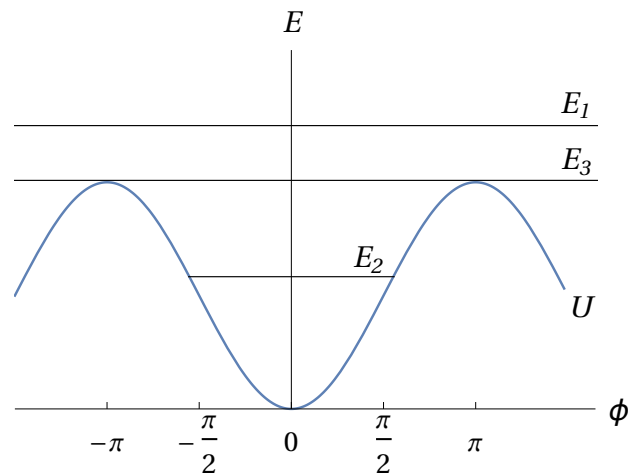


Figura 5.1: Curva da energia potencial U em função do ângulo ϕ comparada com três valores possíveis de energia E_1 , E_2 e E_3 .

As possíveis trajetórias podem ser analisadas pelo espaço de fase de um pêndulo simples, Figura 5.2. Para $E = E_2$, sabemos que o pêndulo terá um movimento periódico e que o $\dot{\phi}^*$ pode ser nulo. No caso de $E = E_1$, $\dot{\phi}^*$ nunca será nulo, implicando em um movimento contínuo de circulação. No limite entre esses dois tipos de movimento, o pêndulo possui um tipo de movimento em que seu período é infinito, $E = E_3$.

Pelo espaço de fase, sabemos que o sistema possui dois pontos fixos em $\dot{\phi}^* = 0$. O primeiro está localizado na origem, sendo esse estável a pequenas variações; é considerado um ponto fixo elíptico. O segundo está em $\phi^* = \pm\pi$ e é instável a pequenas variações, correspondendo assim a um ponto fixo hiperbólico. Desse modo, com essa pequena discussão demonstrou-se para este modelo como os conceitos matemáticos estão relacionados a uma configuração ressonantes estável e instável.

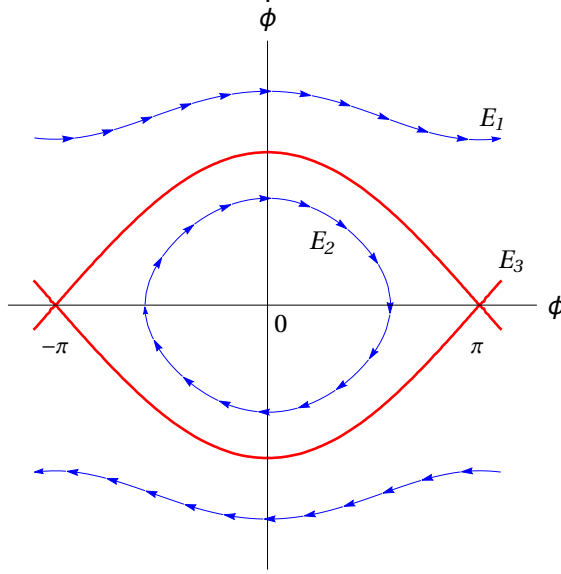


Figura 5.2: Três trajetórias do pêndulo no espaço de fase $(\phi, \dot{\phi})$; as energias E_1 , E_2 e E_3 também foram descritas.

O tempo em que o ϕ^* leva para se mover de $\phi^* = 0$ para $\phi^* = \phi_0^*$ é dado por

$$t = \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\dot{\phi}} \quad (5.13)$$

Se $\dot{\phi} = 0$ quando $\phi = \phi_0$, sabemos que o tempo de uma libração inteira do pêndulo é dado por

$$t = 4 \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\dot{\phi}} \quad (5.14)$$

Portanto, como $E = 2\omega_0^2 \sin^2(\phi_0/2)$,

$$T_{lib} = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 - (E/2\omega_0^2) \sin^2 \theta)^{1/2}} = \frac{4}{\omega_0} K\left(\frac{E}{2\omega_0^2}\right) \quad (5.15)$$

sendo que utilizamos $\sin(\phi/2) = \sin(\phi_0/2) \sin \theta$. Ademais, $K(x)$ é a integral elíptica completa do primeiro tipo, de modo que para $x = 0$ temos que $K(0) = \pi/2$. Portanto, quando a energia E é correspondente a uma baixa amplitude de libração em torno do ponto de equilíbrio, temos que

$$\lim_{\phi_0 \rightarrow 0} T_{lib} = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (5.16)$$

Essa aproximação é equivalente a assumir que $\sin \phi \approx \phi$. Neste caso a equação do pêndulo é reduzida a um movimento harmônico simples, $\ddot{\phi} = -\omega_0^2 \phi$, sendo que o período de libração é independente da amplitude. No caso mais geral, o período é uma função da amplitude, de modo que ao se aproximar da separatriz o tempo de libração tende a infinito.

Capítulo 6

Amplitude de Libração

A principal vantagem da derivação de um modelo analítico de ressonância é a de nos possibilitar estimar uma variação dos parâmetros orbitais devido a ressonâncias individuais. No contexto da dinâmica do Sistema Solar, a parte mais importante é de estimar a extensão da libração do ângulo ressonante em termos do semieixo maior de um objeto em ressonância. Isso é necessário pois precisamos relacionar as extensões de libração conhecida com os fenômenos observacionais, como o estudos de anéis planetários ou a uma separação em uma população de asteroides. Podemos realizar esse processo utilizando o modelo do pêndulo simples descrito na seção anterior e incorporando termos adicionais que surgem para o caso de órbitas com baixas excentricidades que estão próximas de ressonâncias de primeira ordem.

Pela Figura 5.2 sabemos que a energia associada a maior libração de ϕ ocorre quando $\dot{\phi}^* = 0$ e $\phi^* = \pm\pi$, assim utilizando a Eq. (5.12) a energia máxima é dada por;

$$E_{max} = 2\omega_0^2 \quad (6.1)$$

Substituindo a expressão de ω_0^2 , Eq. (5.9), na equação anterior, temos que

$$E_{max} = -6j_2^2 C_r n e^{|j_4|}. \quad (6.2)$$

Utilizando novamente a Eq. (5.12), igualando $E = E_{max}$ e isolando $\dot{\phi}^*$ obtemos

$$\dot{\phi}^* = \pm j_2 (12 |C_r| n e^{|j_4|})^{1/2} \cos \frac{1}{2} \phi^*. \quad (6.3)$$

Através da Eq. (4.7), podemos relacionar a variação de ϕ^* com a variação de n ;

$$dn = 3j_2 C_r n e^{|j_4|} \frac{\sin \phi^*}{\dot{\phi}^*} d\phi^* \quad (6.4)$$

substituindo a Eq. (6.3);

$$dn = \pm (3 |C_r| n e^{|j_4|})^{1/2} \sin \frac{1}{2} \phi^* d\phi^*. \quad (6.5)$$

Integrando a Eq. (6.5), temos

$$n = n_0 \pm (12|C_r|ne^{|j_4|})^{1/2} \cos \frac{1}{2}\phi^*, \quad (6.6)$$

sendo que a mudança máxima no movimento médio ocorre quando $\cos(\phi^*/2) = 1$;

$$\delta n_{max} = \pm(12|C_r|ne^{|j_4|})^{1/2} \quad (6.7)$$

ou seja, quando $\phi^* = 0$. Utilizando a terceira lei de Kepler, podemos obter a relação da mudança máxima do semieixo maior;

$$a = a_0 \pm \left(\frac{16|C_r|}{3n} e^{|j_4|} \right)^{1/2} a_0. \quad (6.8)$$

sendo que a_0 é a localização nominal da ressonância. Como não existem ressonâncias retrógradas de primeira ordem, pois $k = q + p$, sabemos que a Eq. (6.8) descreve aproximadamente a amplitude de libração do ângulo ressonante de qualquer ressonância retrógrada.

No Capítulo 5 vimos que para ressonâncias prógradas de primeira ordem não podemos negligenciar a contribuição de $\ddot{\omega}$ na equação de $\ddot{\phi}$. Desse modo, considerando esse caso com maior detalhe buscaremos observar as modificações na largura máxima de libração. Como neste caso estamos abordando sobre uma ressonância prógrada utilizaremos os elementos orbitais usuais; assumindo uma ressonância interior de primeira ordem, temos que $j_4 = k = -1$ na Eq. (2.8), assim sabemos que a forma geral do argumento ϕ seria dada por

$$\phi = j_1\lambda' + j_2\lambda - \varpi \quad (6.9)$$

logo

$$\dot{\phi} = j_1n' + j_2n - \dot{\varpi}, \quad (6.10)$$

$$\ddot{\phi} = j_2\dot{n} - \ddot{\varpi}. \quad (6.11)$$

Desse modo, lembrando que $G(e) = 1/e$ podemos utilizar as Eqs. (4.8) e (5.5) para obter a expressão de $\ddot{\varpi}$ para esse valor de j_4

$$\ddot{\varpi} = \frac{C_r^2}{e^2} \sin 2\phi - \frac{C_r}{e}(j_1n' + j_2n) \sin \phi, \quad (6.12)$$

consecutivamente, substituindo na Eq. (6.11) e utilizando a Eq. (4.7), temos que

$$\ddot{\phi} = \left[3j_2^2C_rne + \frac{C_r}{e}(j_1n' + j_2n) \right] \sin \phi - \frac{C_r^2}{e^2} \sin 2\phi. \quad (6.13)$$

Assim, como se trata de uma forma modificada da equação do pêndulo, podemos desenvolver uma solução utilizando uma forma modificada da Eq. (6.6):

$$n = n_0 + K \cos \frac{1}{2}\phi, \quad (6.14)$$

sendo que n_0 é o movimento médio do valor da ressonância e K é uma constante que ainda precisa ser determinada. Ignorando a contribuição secular na Eq. (4.9), podemos reescrever a Eq. (6.10) como

$$j_1 n + j_2 n_0 + j_2 K \cos \frac{1}{2}\phi = \dot{\phi} + \frac{C_r}{e} \cos \phi. \quad (6.15)$$

Considerando o caso de libração máxima, com $\dot{\phi} = 0$ e $\phi = \pi$ temos que

$$j_1 n' + j_2 n_0 = -\frac{C_r}{e}, \quad (6.16)$$

utilizando a Eq. (6.14), podemos substituir o n_0 da equação anterior, de modo que

$$j_1 n' + j_2 n = -\frac{C_r}{e} + j_2 K \cos \frac{1}{2}\phi. \quad (6.17)$$

Portanto, substituindo na equação para $\ddot{\phi}$, podemos reescrevê-la como

$$\ddot{\phi} = \left[3j_2^2 C_r n e - \frac{C_r^2}{e^2} \right] \sin \phi + j_2 K \frac{C_r}{e} \cos \frac{1}{2}\phi \sin \phi - \frac{C_r^2}{e^2} \sin 2\phi. \quad (6.18)$$

Através da Eq. (5.12), podemos obter a integral da energia:

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = 2 \left[3j_2^2 C_r n e - \frac{C_r^2}{e^2} \right] \sin^2 \frac{1}{2}\phi - \frac{4}{3} j_2 K \frac{C_r}{e} \cos^3 \frac{1}{2}\phi - \frac{C_r^2}{e^2} \sin^2 \phi + E. \quad (6.19)$$

Isolando a Energia na equação anterior e utilizando a Eq. (6.2) de modo que $E = E_{max}$ podemos encontrar uma equação para $\dot{\phi}$ no caso que $\phi = 0$,

$$\dot{\phi}^2 \Big|_{\phi=0} = -12j_2^2 C_r n e - \frac{8}{3} j_2 K \frac{C_r}{e} + 4 \frac{C_r}{e^2}. \quad (6.20)$$

Utilizando $\phi = 0$ nas Eqs. (6.15) e (6.17) pode-se isolar o $\dot{\phi}$ e elevá-lo ao quadrado de modo que

$$\dot{\phi}^2 \Big|_{\phi=0} = 4 \frac{C_r}{e^2} + j_2^2 K^2 - 4j_2 K \frac{C_r}{e}. \quad (6.21)$$

Igualando a Eq. (6.20) e (6.21) e colocando o termo j_2^2 em evidência obtemos a equação quadrática para a constante desconhecida K:

$$K^2 - \frac{4}{3} \frac{1}{j_2} \frac{C_r}{e} K + 12C_r n e = 0 \quad (6.22)$$

sendo que a solução é dada por

$$K = \frac{2}{3} \frac{1}{j_2} \frac{C_r}{e} \pm (12|C_r|ne)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{27j_2^2e^3} \frac{|C_r|}{n} \right)^{1/2}, \quad (6.23)$$

lembrando que o C_r é menor que zero para ressonâncias de primeira ordem. Substituindo $\phi = 0$ na Eq. (6.14) e utilizando a Eq. (6.16) podemos obter uma equação para a variação máxima do movimento médio

$$\delta n_{max} = K + \frac{|C_r|}{j_2 e} \quad (6.24)$$

e portanto, por meio da solução obtida para K, temos que

$$\delta n_{max} = \pm (12|C_r|ne)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{27j_2^2e^3} \frac{|C_r|}{n} \right)^{1/2} + \frac{|C_r|}{3j_2e}. \quad (6.25)$$

Para valores moderados de excentricidade fica claro que a equação anterior se aproxima da Eq. (6.7) com $j_4 = -1$. Escrevendo em termos do semieixo maior obtemos a expressão de amplitude de libração para as ressonâncias de primeira ordem;

$$a = a_0 \pm a_0 \left(\frac{16}{3} \frac{|C_r|}{n} e \right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{27j_2^2e^3} \frac{|C_r|}{n} \right)^{1/2} - \frac{2}{9j_2e} \frac{|C_r|}{n} a_0. \quad (6.26)$$

Portanto, utilizando as Eqs. (6.8) e (6.26) podemos representar as curvas de amplitude de libração para algumas ressonâncias interiores prógradas e retrógradas. Com esse intuito, necessitamos, para cada ressonância, dos valores de α , αf_d , j_2 e j_4 . Estes valores para as ressonâncias prógradas já são conhecidos e foram dispostos na Tabela 6.1. Em relação as ressonâncias retrógradas é necessário obter o valor de f_d para cada ressonância, dessa forma, o processo para a obtenção da curva das duas ressonâncias retrógradas de menor ordem foi descrito no próximo capítulo.

Prógrada				
$p : q$	j_2	j_4	α	αf_d
3 : 1	1	2	0.480750	0.287852
2 : 1	1	1	0.629961	-0.749964
5 : 3	3	2	0.711379	2.32892
3 : 2	2	1	0.763143	-1.54553
4 : 3	3	1	0.825482	-2.34472

Tabela 6.1: Valores numéricos de α , dos coeficientes αf_d e dos termos j_2 e j_4 para algumas ressonâncias interiores dadas por $p : q$.

O valor de α é o valor nominal para cada ressonância, $\alpha = a/a'$, ou seja para a tabela utilizamos $a' = 1.0$ UA. Para a representação da amplitude máxima de libração consideramos um sistema em que o asteroide está em ressonância interior com Júpiter, desse modo as curvas foram obtidas utilizando que $a' = 5.2033$ UA e $m'/m_c = 9.54 \times 10^{-4}$, sendo que $|C_r|/n = (m'/m_c) \alpha f_d(\alpha)$. As curvas de amplitude máxima de libração para as ressonâncias interiores apresentadas na Tabela 6.1 foram obtidas através das Eqs. (6.8) e (6.26) e foram representadas na Figura 6.1.

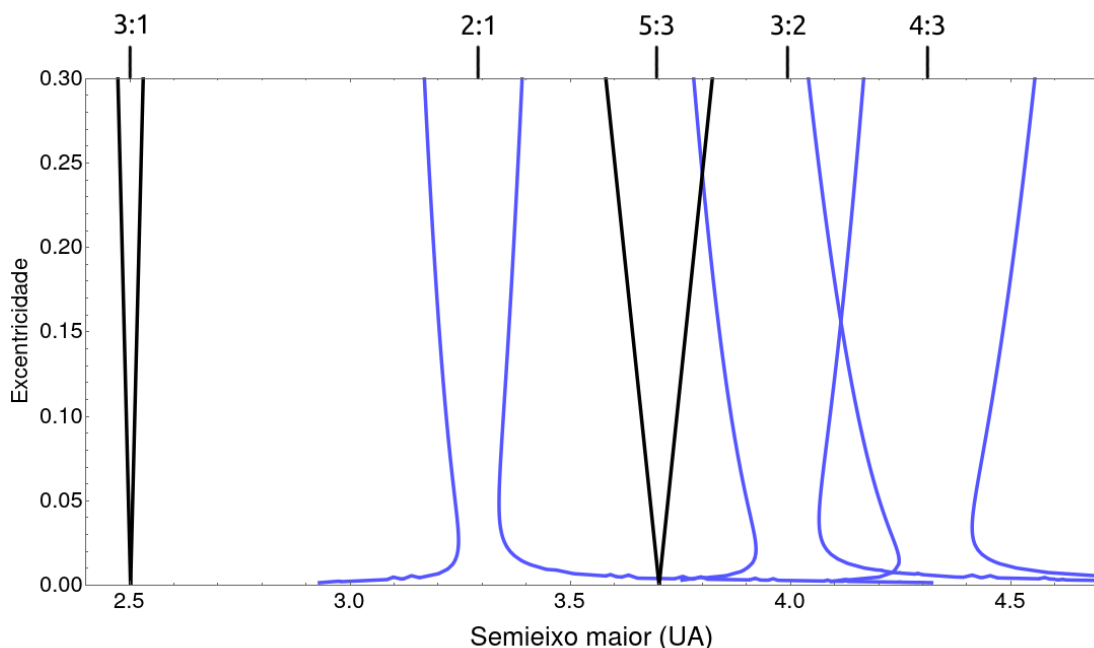


Figura 6.1: Regiões de libração máxima do ângulo ressonante em função do semieixo maior e da excentricidade de algumas ressonâncias prógradas interiores utilizando um modelo analítico baseado no caso circular restrito de três corpos. As curvas pretas e azuis foram obtidas utilizando a Eqs. (6.8) e (6.26) respectivamente.

Como não existem ressonâncias retrógradas de primeira ordem, sabemos que as curvas de um asteroide que se move no sentido contrário do planeta seriam dadas apenas pela Eq. (6.8). Desse modo, todas as curvas teriam um comportamento de aumento da amplitude máxima de libração com o aumento da excentricidade. A figura dessas curvas não foi obtida pois para calcular os valores dos coeficientes f_d para as ressonâncias retrógradas 3/2, 4/3 e 5/3 seria necessário respectivamente da expansão da função perturbadora até a quinta, sétima e oitava ordem. Expansões até essas ordens ainda não foram realizadas, pois, nos dias atuais a maiorias das órbitas estudadas são prógradas, sendo que em geral, as mesmas conseguem ser descritas pela expansão da função perturbadora somente até quarta ordem.

Capítulo 7

Resultados

Utilizando o procedimento descrito nas seções anteriores, aplicamos o modelo para as ressonâncias retrógradas 2/1 e 3/1. Desse modo, ao determinar quais ângulos críticos são relevantes para a ressonância em questão, podemos obter o termo geral da média da expansão perturbadora, Eq. (4.5), e assim teremos a equação de amplitude de libração do ângulo crítico para cada uma das ressonâncias, Eq. (6.8). Além da expressão teórica, podemos observar numericamente, a partir de mapas de estabilidade, em qual região ocorre a libração do ângulo crítico ressonante. Dessa forma, utilizando respectivamente os integradores numéricos de n-corpos *Rebound* e *Mercury*, Rein e Liu (2012); Chambers (1999), calculamos o indicador caótico MEGNO e a variação do ângulo ressonante da órbita de 1040 asteroides em torno da região da ressonância em questão.

O sistema utilizado é composto por uma partícula teste no sistema Sol-Júpiter, $\mu = 0.001$, sendo que Júpiter possui $a_p = 1.0$ UA; desse modo o raio da esfera de Hill será dado por $R_H = (\mu/3)^{1/3}$ para ambas ressonâncias. As equações do movimento e as equações do MEGNO foram integradas por 5×10^6 períodos do planeta, o valor do MEGNO converge a 2 para órbitas regulares e para órbitas caóticas aumenta em uma proporção inversa ao tempo de Lyapunov, Cincotta e Simó (2000). A fim de melhorar a visualização do mapa, limita-se o valor do MEGNO em 8 para representar as órbitas caóticas.

Para a ressonância retrógrada 2/1, os asteroides foram distribuídos no intervalo de semieixo maior $(a_0 - 0.3 R_H, a_0 + 0.3 R_H)$ variando em passos de $0.022 R_H$. Para a ressonância retrógrada 3/1, foi considerado o intervalo de semieixo maior $(a_0 - 0.15 R_H, a_0 + 0.15 R_H)$ com um passo de $0.007 R_H$. A excentricidade para ambos os casos foi limitada em um intervalo de $(0, 1)$ variando em passos de 0.04. Os asteroides iniciam a integração com $I = 180^\circ$ e possuem valores de ω e Ω , de modo que $\phi^* = 0^\circ$ para a ressonância 2/1 e $\phi^* = 180^\circ$ para a ressonância 3/1. Lembrando que no modelo do pêndulo o ponto de estabilidade de uma ressonância de ordem ímpar ocorre em $\phi = 0^\circ$ e em $\phi = 180^\circ$ para uma ressonância de ordem par.

O mesmo procedimento foi realizado para as ressonâncias prógradas 2/1 e 3/1, dessa forma, foi possível observar as diferenças entre as curvas teóricas e as regiões de libração do ângulo ressonante prógrado e retrógrado. Com o intuito de estudar a região da ressonância retrógrada de forma mais consistente, representamos a variação dos elementos orbitais e do ângulo ressonante ϕ^* de duas condições iniciais retrógradas. Escolhemos dois exemplos, um no centro na ressonância e o outro na região em que a libração do ângulo ressonante é menor que 300° ; o tempo de integração, utilizando o *Mercury*, foi de 3×10^4 anos.

Como iremos aplicar o modelo à ressonâncias coplanares, podemos considerar apenas o termo de menor ordem da expansão da função perturbadora. Desse modo, os termos, da ressonância prógrada e retrógrada, correspondentes ao caso coplanar são proporcionais respectivamente a

$$e^{|q-p|} \cos(q\lambda - p\lambda' - (q-p)\varpi), \quad (7.1)$$

$$e^{p+q} \cos(q\lambda^* + p\lambda'^* - (p+q)\varpi^*). \quad (7.2)$$

Sabemos que quando $I = 180^\circ$ existe apenas o ângulo ϕ^* e quando $I = 0^\circ$ existe apenas o ângulo ϕ . Estes dois ângulos críticos relevantes a cada uma dos tipos de ressonâncias podem ser determinados através do argumento do cosseno das Eqs. (7.1) e (7.2).

Os termos da parte direta da função perturbadora que são relevantes a cada ressonância retrógrada foram determinados através da procura pelos argumentos na expansão literal, Ellis e Murray (2000); seus valores foram calculados utilizando o *Mathematica*. Os valores de j_2 , j_4 e de f_d para o caso prógrado e retrógrado foram dispostos na Tabela 7.1.

$p : q$	j_2	j_4	d	f_d
-2 : 1	1	3	82	-0.401837
-3 : 1	1	4	90	0.0884204
2 : 1	1	1	27	-1.190493
3 : 1	1	2	45	0.598756

Tabela 7.1: Tabela de comparação entre os valores do termo f_d para o caso prógrado e retrógrado.

7.1 A Ressonância Retrógrada 2/1

No caso da ressonância retrógrada 2/1, podemos obter o ângulos críticos através da Eq. (7.2), assim utilizando $p = 2$ e $q = 1$, temos que:

$$\phi_{2/1}^* = \lambda^* + 2\lambda'^* - 3\varpi^* = \lambda - 2\lambda' - 3\varpi + 4\Omega, \quad \mathcal{O}(e^3) \quad (7.3)$$

Buscando por esse argumento na expansão literal, Ellis e Murray (2000), podemos ver que o termo 4D3.1 com $j = 2$ está relacionado ao ângulo crítico em questão. Desse modo, utilizando o valor de f_{82} podemos obter a expansão literal de \mathcal{R}_D ;

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{4D3.1} = \frac{1}{48} \left\{ 4b_{1/2}^{(2)} - 3\alpha \frac{db_{1/2}^{(2)}}{d\alpha} - 6\alpha^2 \frac{d^2b_{1/2}^{(2)}}{d\alpha^2} - \alpha^3 \frac{d^3b_{1/2}^{(2)}}{d\alpha^3} \right\} e^3 \\ \times \cos(\lambda^* + 2\lambda'^* - 3\varpi^*). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Dessa forma, com o intuito de estudar como um asteroide com órbita planar se comporta nessa ressonância, podemos seguir o procedimento descrito no Capítulo 5, assim utilizando a expressão do termo geral da expansão média, Eq. (4.5), temos que

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \frac{G m'}{a'} \left[e^2 f_2^{(0)}(\alpha) + f_{82}^{(2)}(\alpha) e^3 \cos(\lambda^* + 2\lambda'^* - 3\varpi^*) \right] \quad (7.5)$$

lembrando que o termo secular de segunda ordem considerado, f_2 e a expressão de f_{82} podem ser consultadas em Ellis e Murray (2000).

Desse modo, por meio das Eqs. (4.7) - (4.10), as equações do movimento correspondente a ressonância em questão são:

$$\dot{n} = 3 C_r n e^3 \sin(\lambda^* + 2\lambda'^* - 3\varpi^*), \quad (7.6)$$

$$\dot{e} = 3 C_r e^2 \sin(\lambda^* + 2\lambda'^* - 3\varpi^*), \quad (7.7)$$

$$\dot{\varpi} = 2 C_s + 3 C_r e \cos(\lambda^* + 2\lambda'^* - 3\varpi^*), \quad (7.8)$$

$$\dot{\epsilon} = C_s e^2 + \frac{3}{2} C_r e^3 \cos(\lambda^* + 2\lambda'^* - 3\varpi^*). \quad (7.9)$$

sendo que, as constantes relacionadas a parte ressonante e secular da função perturbadora, C_r e C_s são dadas por

$$C_r^{(21)} = \frac{G m'}{n a^2 a'} f_{82}^{(2)}(\alpha) = \left(\frac{m'}{m_c} \right) n \alpha f_{82}^{(2)}(\alpha), \quad (7.10)$$

$$C_s^{(21)} = \frac{G m'}{n a^2 a'} f_2^{(0)}(\alpha) = \left(\frac{m'}{m_c} \right) n \alpha f_2^{(0)}(\alpha) \quad (7.11)$$

Para utilizar o Modelo Pendular descrito no Capítulo 5, precisamos obter a segunda derivada do argumento ϕ^* , assim assumindo que $\dot{n}' = 0$, podemos escrever que

$$\ddot{\phi}^* = \dot{n} + \ddot{\epsilon}^* + 3\ddot{\varpi}^*. \quad (7.12)$$

Assim, realizando a derivada segunda de ϵ^* e ϖ^* , temos que

$$\ddot{\epsilon}^* = 2C_s e \dot{e} + \frac{3C_r}{2} \left(3e^2 \dot{e} \cos \phi^* - e^3 \dot{\phi}^* \sin \phi^* \right), \quad (7.13)$$

$$\ddot{\varpi}^* = 3C_r \left(\dot{e} \cos \phi^* - e \dot{\phi}^* \sin \phi^* \right). \quad (7.14)$$

Como descrito no Capítulo 5, as contribuições de $\ddot{\epsilon}$ e $\ddot{\varpi}$ podem ser ignoradas para toda ressonância que não seja de primeira ordem. Isso ocorre pois a multiplicação de C_s com \dot{e} e de C_r com \dot{e} e $\dot{\phi}^*$ produz um fator $(m'/m_c)^2$.

Portanto, negligenciando as contribuições de $\ddot{\epsilon}$ e $\ddot{\varpi}$, e utilizando a expressão de \dot{n} , Eq. (7.6), podemos reescrever a equação de $\ddot{\phi}^*$ como

$$\ddot{\phi}^* = 3C_r^{(21)} n e^3 \sin \phi^*. \quad (7.15)$$

Desse modo, utilizando a Eq. (6.8), podemos obter a expressão da amplitude de libração do ϕ^* para a ressonância 2/1 retrógrada

$$a = a_0 \pm \left(\frac{16 |C_r^{(21)}|}{3 n} e^3 \right)^{1/2} a_0, \quad (7.16)$$

invertendo a última expressão, obtemos a equação que descreve como a excentricidade varia com o semieixo maior na região de libração do ângulo ressonante

$$e = \pm \left[\frac{a - a_0}{a_0 \left(\frac{16 |C_r|}{3 n} \right)^{1/2}} \right]^{2/3} \quad (7.17)$$

sendo que $a_0 \approx 0.6299$.

Por meio das integrações numéricas representa-se, respectivamente, os mapas de estabilidade MEGNO da ressonância 2/1 retrógrada e prógrada junto com as curvas teóricas de amplitude de libração para cada caso.

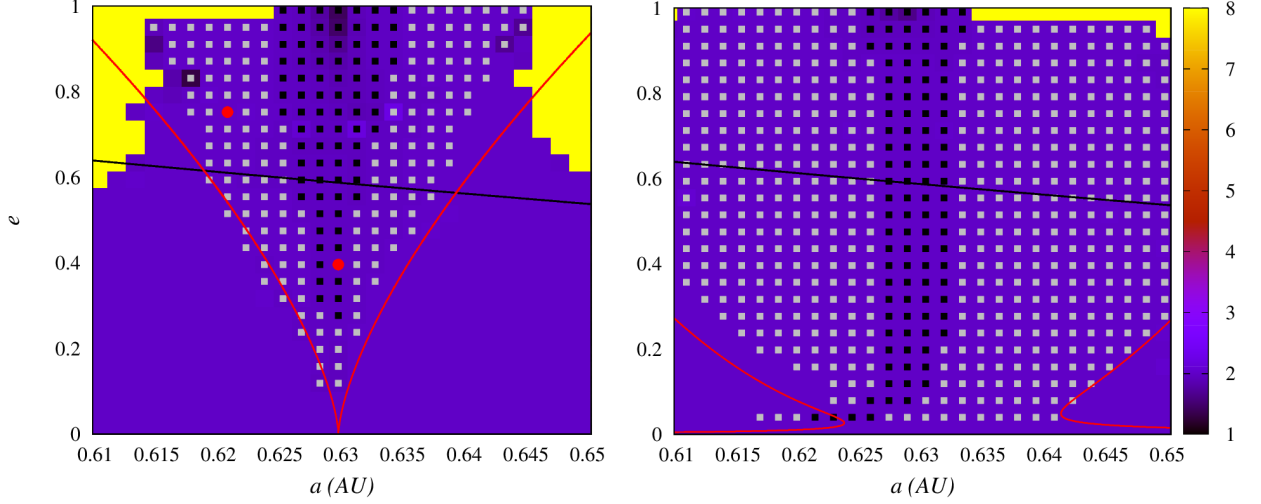


Figura 7.1: Mapas de estabilidade para as ressonâncias 2/1 retrógrada e prógrada, respectivamente. Os quadrados indicam as condições iniciais em que o ϕ_{21} , respectivo a cada ressonância, libra em torno de 0° com amplitude menor que 50° (símbolo preto) e menor que 300° (símbolo cinza). A curva teórica de amplitude máxima de libração e as condições iniciais correspondentes a Figura 7.2 foram representadas em vermelho. A curva preta representa a linha de colisão do apocentro do planeta.

Na Figura 7.2 foram representados dois exemplos da variação dos elementos orbitais do mapa de estabilidade retrógrado; estas condições iniciais foram evidenciadas no mapa por dois pontos vermelhos.

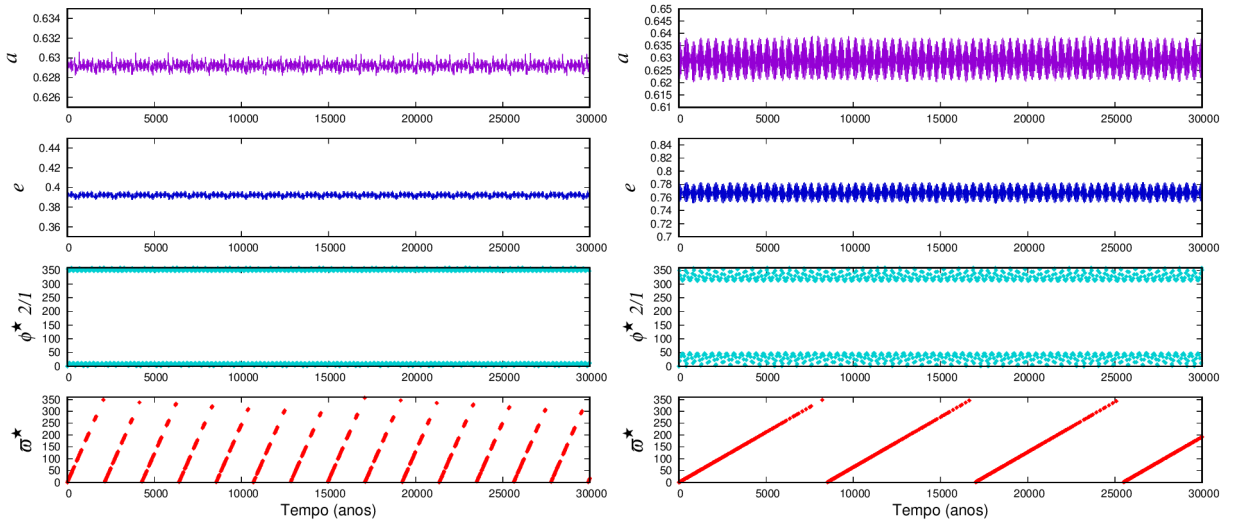


Figura 7.2: Evolução dos elementos orbitais para duas condições iniciais do mapa de estabilidade retrógrado. Sendo, respectivamente, uma pertencente ao centro de ressonância, $\Delta\phi_{21} < 50^\circ$ e a outra correspondente a região que $\Delta\phi_{21} < 300^\circ$.

7.2 A Ressonância Retrógrada 3/1

Utilizando novamente a Eq. (7.2), podemos obter os ângulos críticos da ressonância 3/1. Desse modo, utilizando $p = 3$ e $q = 1$, temos que:

$$\phi_{3/1}^* = \lambda^* + 3\lambda'^* - 4\varpi^* = \lambda - 3\lambda' - 4\varpi + 6\Omega, \quad \mathcal{O}(e^4) \quad (7.18)$$

Procurando pelo argumento na expansão literal, Ellis e Murray (2000), sabemos que o termo 4D4.1 utilizando $j = 3$ está relacionado ao ângulo ressonante da ressonância retrógrada 3/1. Portanto, através do cálculo do valor de f_{90} é possível obter a expansão literal de \mathcal{R}_D para nosso caso;

$$\mathcal{R}_{4D4.1} = \frac{1}{384} \left\{ -15b_{1/2}^{(3)} - 4\alpha \frac{db_{1/2}^{(3)}}{d\alpha} + 30\alpha^2 \frac{d^2b_{1/2}^{(3)}}{d\alpha^2} + 12\alpha^3 \frac{d^3b_{1/2}^{(3)}}{d\alpha^3} + \frac{d^4b_{1/2}^{(3)}}{d\alpha^4} \right\} e^4 \times \cos(\lambda^* + 3\lambda'^* - 4\varpi^*). \quad (7.19)$$

Desse modo, o termo geral da média da expansão perturbadora da ressonância 3/1 para o caso planar, circular e restrito é dado por

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \frac{G m'}{a'} \left[\left(e^2 f_2^{(0)}(\alpha) + e^4 f_4^{(0)}(\alpha) \right) + f_{90}^{(3)}(\alpha) e^4 \cos(\lambda^* + 3\lambda'^* - 4\varpi^*) \right]. \quad (7.20)$$

Diferentemente da ressonância retrógrada 2/1, precisamos considerar, na expressão da média da Função Perturbadora, o termo secular respectivo a e^4 , pois a ressonância retrógrada 3/1 é uma ressonância orbital de quarta ordem. As expressões dos termos seculares considerados f_2 e f_4 e do termo direto f_{90} podem ser encontradas em Ellis e Murray (2000).

Através das Eqs. (4.7) - (4.10) podemos obter as equações do movimento para a ressonância em questão;

$$\dot{n} = 3 C_r n e^4 \sin(\lambda^* + 3\lambda'^* - 4\varpi^*), \quad (7.21)$$

$$\dot{e} = 4 C_r e^3 \sin(\lambda^* + 3\lambda'^* - 4\varpi^*), \quad (7.22)$$

$$\dot{\varpi}^* = 2 C_{s2} + 4 C_{s4} e^2 + 4 C_r e^2 \cos(\lambda^* + 3\lambda'^* - 4\varpi^*), \quad (7.23)$$

$$\dot{\epsilon}^* = C_{s2} e^2 + 2 C_{s4} e^4 + 2 C_r e^4 \cos(\lambda^* + 3\lambda'^* - 4\varpi^*). \quad (7.24)$$

sendo que a constante respectiva a parte secular foi dividida em duas constantes, uma respectiva a f_2 e outra respectiva a f_4 , dessa forma, as constantes C_r , C_{s2} e C_{s4} presentes nas equações anteriores são dadas por

$$C_r^{(31)} = \frac{G m'}{n a^2 a'} f_{90}^{(2)}(\alpha) = \left(\frac{m'}{m_c} \right) n \alpha f_{90}^{(2)}(\alpha), \quad (7.25)$$

$$C_{s_2}^{(31)} = \frac{G m'}{n a^2 a'} f_2^{(0)}(\alpha) = \left(\frac{m'}{m_c} \right) n \alpha f_2^{(0)}(\alpha). \quad (7.26)$$

$$C_{s_4}^{(31)} = \frac{G m'}{n a^2 a'} f_4^{(0)}(\alpha) = \left(\frac{m'}{m_c} \right) n \alpha f_4^{(0)}(\alpha). \quad (7.27)$$

Realizando a derivada segunda da Eq. (7.18), temos que

$$\ddot{\phi}^* = \dot{n} + \ddot{\epsilon}^* + 4\ddot{\varpi}^*. \quad (7.28)$$

Realizando a segunda derivada de ϵ^* e ϖ^* , podemos escrever que

$$\ddot{\epsilon}^* = 2 C_{s_2} e \dot{e} + 8 C_{s_4} e^3 \dot{e} + 4 C_r \left(2 e^3 \dot{e} \cos \phi^* - \frac{1}{2} e^4 \dot{\phi}^* \sin \phi^* \right), \quad (7.29)$$

$$\ddot{\varpi}^* = 8 C_{s_4} e \dot{e} + 4 C_r \left(2 e \dot{e} \cos \phi^* - e^2 \dot{\phi}^* \sin \phi^* \right). \quad (7.30)$$

Como as contribuições de $\ddot{\epsilon}^*$ e $\ddot{\varpi}^*$ podem ser desconsideradas para ressonâncias com ordem maiores que 1, podemos considerar apenas a expressão de \dot{n} , Eq. (7.21), assim, temos que

$$\ddot{\phi}^* = 3 C_r^{(31)} n e^4 \sin \phi^*. \quad (7.31)$$

Dessa forma, a equação que descreve a amplitude de libração para a ressonância retrógrada 3/1 será dada por

$$a = a_0 \pm \left(\frac{16}{3} \frac{|C_r^{(31)}|}{n} e^4 \right)^{1/2} a_0, \quad (7.32)$$

Portanto, invertendo podemos reescrever a ultima expressão; de modo a obter a curva que descreve a variação da excentricidade pelo semieixo maior da órbita do corpo em ressonância

$$e = \pm \left[\frac{a - a_0}{a_0 \left(\frac{16}{3} \frac{|C_r|}{n} \right)^{1/2}} \right]^{1/2} \quad (7.33)$$

em que $a_0 \approx 0.4807$.

De forma similar ao processo realizado para a ressonância 2/1, representa-se, respectivamente, os mapas de estabilidade MEGNO da ressonância 3/1 retrógrada e prógrada com as curvas teóricas de amplitude de libração para cada caso.

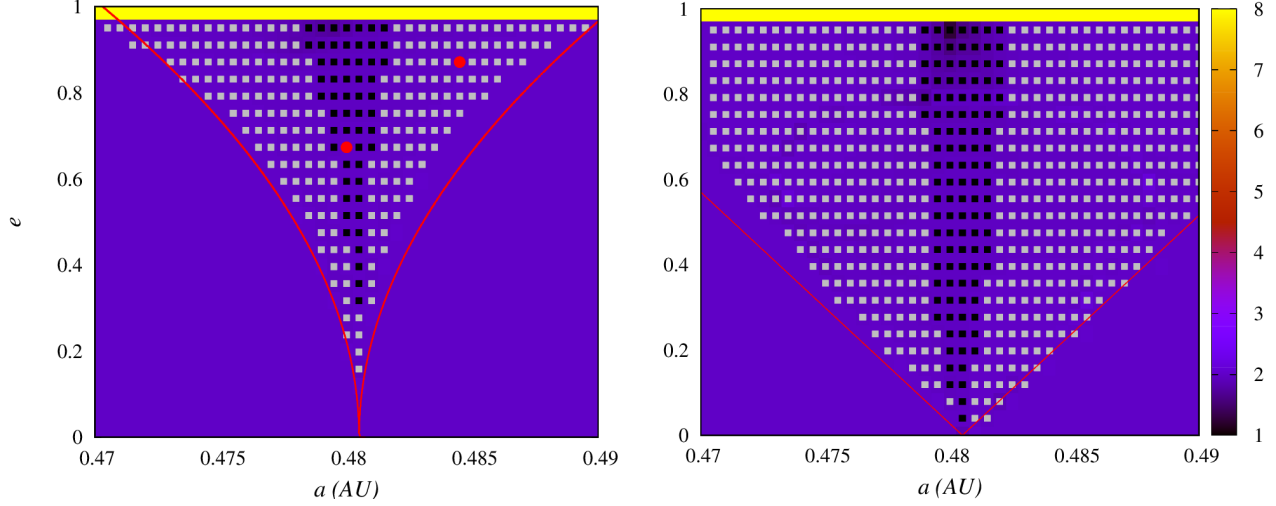


Figura 7.3: Mapas de estabilidade para as ressonâncias 3/1 retrógrada e prógrada, respectivamente. Os quadrados indicam as condições iniciais em que o ϕ_{31} , respectivo a cada ressonância, libra em torno de 180° com amplitude menor que 50° (símbolo preto) e menor que 300° (símbolo cinza). A curva teórica de amplitude máxima de libração e as condições iniciais correspondentes a Figura 7.4 foram representadas em vermelho.

Na Figura 7.4 foram representados dois exemplos da variação dos elementos orbitais do mapa de estabilidade retrógrado; estas condições iniciais foram evidenciadas no mapa por dois pontos vermelhos.

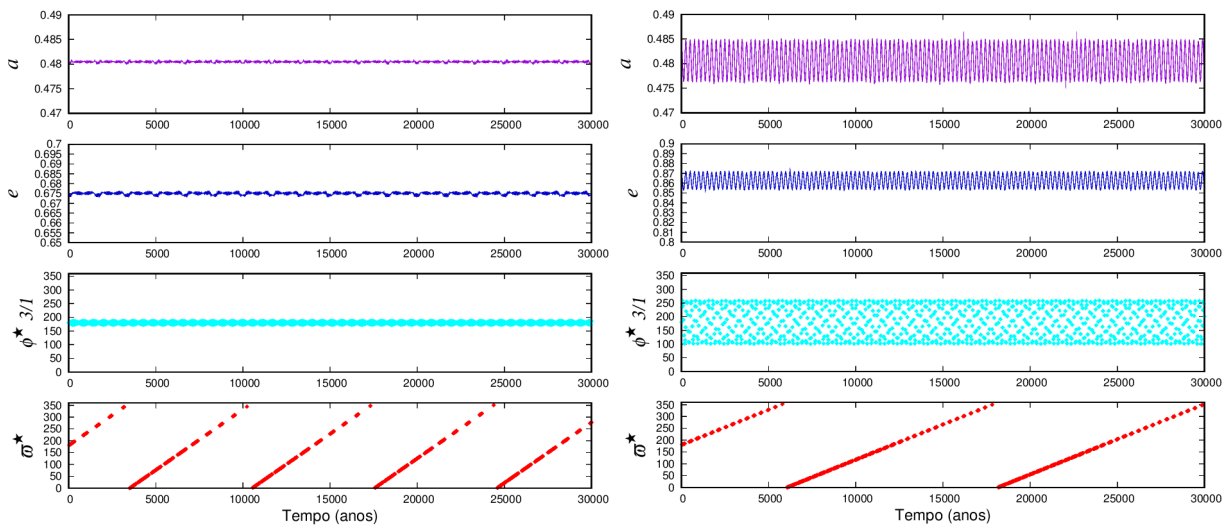


Figura 7.4: Evolução dos elementos orbitais para duas condições iniciais do mapa de estabilidade retrógrado. Sendo, respectivamente, uma pertencente ao centro de ressonância, $\Delta\phi_{31} < 50^\circ$ e a outra correspondente a região que $\Delta\phi_{31} < 300^\circ$.

Capítulo 8

Conclusão

A partir do aprofundamento na parte geométrica da ressonância, determinamos o tempo de conjunção e as órbitas no referencial sinódico para diversas ressonâncias prógradas e retrógradas, mantendo assim durante todo nosso estudo uma correlação entre os dois tipos de ressonância de movimento médio. No capítulo da Função Perturbadora, esta correlação ficou descrita por uma mudança de variáveis, de modo a nos permitir focar apenas na parte retrógrada, já que para o nosso trabalho as diferenças surgem apenas em relação a qual ressonância o modelo será aplicado.

Com o intuito de desenvolver um melhor entendimento sobre o primeiro modelo fundamental, mais conhecido como modelo do pêndulo simples, realizou-se todo o procedimento até ser possível aplicá-lo. Desse modo, através do estudo da expansão literal da função perturbadora até quarta ordem, tanto para a ressonância prógrada quanto retrógrada, pôde-se, por meio das equações planetárias de Lagrange, obter as variações dos elementos orbitais para o caso de uma ressonância no problema circular restrito de três corpos. Portanto, utilizando a segunda derivada da equação do ângulo ressonante o modelo pode ser desenvolvido e assim conseqüentemente com o estudo a respeito da amplitude de libração se torna possível estimarmos analiticamente como certos parâmetros orbitais, como o semieixo maior e a excentricidade, irão variar devido ao efeito ressonante, nos permitindo assim determinar em qual região do espaço a ressonância orbital vai ou não ocorrer.

Aplicando o modelo a duas ressonâncias retrógradas, utilizou-se o *Mathematica* para calcular os valores dos termos diretos da função perturbadora relevantes para cada uma das ressonâncias estudadas, f_{82} e f_{90} , determinando assim a variação do semieixo maior do asteroide em função da excentricidade. Utilizando integradores numéricos, obtivemos mapas de estabilidade e calculamos a libração do ângulo ressonante a cada instante de tempo de modo a nos possibilitar comparar a região que é ressonante nas simulações com a região descrita pela curva teórica de amplitude de libração. Com esta comparação tornou-se claro que o modelo teórico consegue descrever de forma convincente os resultados obtidos numericamente.

Capítulo 9

Referências Bibliográficas

BROUWER, D.; CLEMENCE, G. M. **Methods of celestial mechanics**. New York: Academic Press, 1961.

CHAMBERS, J. E. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 304, n. 4, p. 793-799, 1999.

CINCOTTA, P. M.; SIMÓ, C. Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials–I. **Astronomy and Astrophysics Supplement Series**, v. 147, n. 2, p. 205-228, 2000.

ELLIS, K. M.; MURRAY, C. D. The disturbing function in solar system dynamics. **Icarus**, v. 147, n. 1, p. 129-144, 2000.

KINOSHITA, H.; NAKAI, H.. Note on secular perturbations between a retrograde body and a prograde body. **Celestial mechanics**, v. 42, n. 1, p. 279-292, 1987.

MORAIS, M. H. M.; NAMOUNI, F. Retrograde resonance in the planar three-body problem. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 117, n. 4, p. 405-421, 2013.

MORAIS, M. H. M.; NAMOUNI, F. On retrograde orbits, resonances and stability. **Computational and Applied Mathematics**, v. 35, n. 3, p. 881-891, 2016.

MORAIS, H.; NAMOUNI, F. Reckless orbiting in the solar system. **Nature**, v. 543, n. 7647, p. 635-636, 2017.

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. 1. ed. Cambridge, Cambridge university press, 1999.

- NAMOUNI, F.; MORAIS, M. H. M. Resonance capture at arbitrary inclination. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 446, n. 2, p. 1998-2009, 2015.
- NAMOUNI, F.; MORAIS, H. Coorbital capture at arbitrary inclination. **Computational and Applied Mathematics**, v. 37, n. 1, p. 65-71, 2018.
- NAMOUNI, F.; MORAIS, M. H. M. The disturbing function for asteroids with arbitrary inclinations. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 474, n. 1, p. 157-176, 2018.
- REIN, H.; LIU, S.-F. REBOUND: an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics. **Astronomy and Astrophysics**, v. 537, p. A128, 2012.
- WIEGERT, P.; CONNORS, M.; VEILLET, C. A retrograde co-orbital asteroid of Jupiter. **Nature**, v. 543, n. 7647, p. 687-689, 2017.

Apêndice A

O Pêndulo Simples

A Figura A.1 representa um pêndulo simples localizado no ponto **A** de altura **h**, a massa está pendurada por um fio de comprimento l ligado ao ponto **C**.

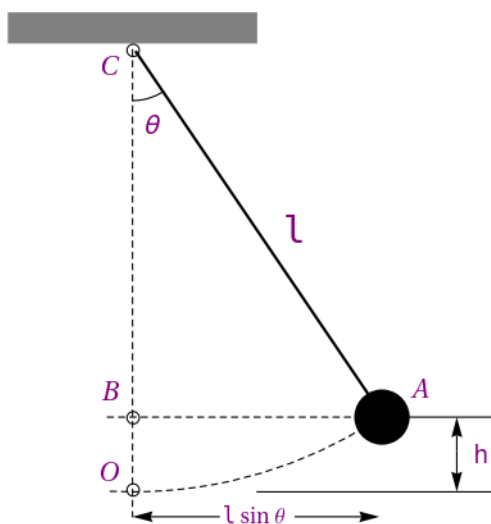


Figura A.1: Representação de um pêndulo simples localizado a uma altura h da posição relacionado ao seu estado estacionário.

Sabemos que o ângulo θ entre a reta OC e l é dado pela divisão entre o arco e o raio (OC), de modo que

$$\theta = \frac{s}{l} \implies s = \theta l. \quad (\text{A.1})$$

Para obter a Lagrangiana do sistema, precisamos conhecer a energia cinética e potencial do problema;

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{s}^2}{2} \implies T = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2}. \quad (\text{A.2})$$

A energia potencial é escrita como $U = mgh$; pela figura temos que

$$h = OB = OC - CB \implies h = l - l \cos \theta, \quad (\text{A.3})$$

desta forma, a energia potencial do problema é dada por

$$U = mgl(1 - \cos \theta). \quad (\text{A.4})$$

Portanto, a lagrangiana do sistema pode ser escrita como

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T - U = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl(1 - \cos \theta). \quad (\text{A.5})$$

Ademais, sabemos que a energia total do sistema é dada pela soma da energia cinética por unidade de massa com a energia potencial por unidade de massa, logo

$$E_{\frac{\perp}{m}} = \frac{l^2\dot{\theta}^2}{2} + gl(1 - \cos \theta). \quad (\text{A.6})$$

Utilizando a equação do momento, temos que

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \implies \dot{\theta} = \frac{p}{ml^2}. \quad (\text{A.7})$$

Desse modo, como o hamiltoniano é dado por $H(\theta, p) = T + U$;

$$H(\theta, p) = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \theta) \quad (\text{A.8})$$

e sabendo que

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \implies \dot{p} = -mgl \sin \theta, \quad (\text{A.9})$$

podemos derivar temporalmente a Eq. (A.7) e utilizar a expressão anterior para finalmente obter a equação de movimento para o pêndulo simples

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{p}}{ml^2} \implies \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \quad (\text{A.10})$$