



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JULIO DE MESQUITA FILHO"  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS



Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

Simetrias e Suas Quebras:  
O Campo de Higgs e o Problema da Constante Cosmológica

Guilherme de Araújo Nogueira

Luiz Antonio Barreiro

Rio Claro (SP)

2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

GUILHERME DE ARAÚJO NOGUEIRA

SIMETRIAS E SUAS QUEBRAS: O CAMPO DE HIGGS E O  
PROBLEMA DA CONSTANTE COSMOLÓGICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas -  
Câmpus de Rio Claro, da Universidade  
Estadual Paulista Júliode Mesquita Filho, para  
obtenção do grau de Bacharel em Física.

Rio Claro - SP

2022

N778s Nogueira, Guilherme de Araújo  
Simetrias e suas quebras : o campo de Higgs e o problema da constante cosmológica / Guilherme de Araújo Nogueira. -- Rio Claro, 2022  
57 p. : il., tabs.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro  
Orientador: Luiz Antonio Barreiro

1. Constante cosmológica. 2. Bóson de Higgs. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

GUILHERME DE ARAÚJO NOGUEIRA

SIMETRIAS E SUAS QUEBRAS: O CAMPO DE HIGGS E O  
PROBLEMA DA CONSTANTE COSMOLÓGICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas -  
Câmpus de Rio Claro, da Universidade  
Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para  
obtenção do grau de Bacharel em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro

Prof. Dr. Edson Leonel Denis

Prof. Vinícius Francisco Wasques

Rio Claro, 10 de fevereiro de 2022.

Assinatura do(a) aluno(a):

*Guilherme Nogueira*

Assinatura do(a) orientador(a):

*Luiz Antonio Barreiro*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar Agradeço ao meu avô, Monoel Lima de Araújo, e a minha avó, Luzia Felix Pereira, pelo enorme papel que desempenharam durante minha criação. Assim como a minha querida irmãzinha (Bia), mãe(Vanderléia), pai(Claudemir) e tia(Andreia). Por acreditar, ou até mesmo por desacreditar de mim em alguns momentos.

Claro, não poderia deixar de agradecer à minha namorada pela motivação e conversas construtivas que realizamos durante esse processo.

Em seguida aos amigos que conheci durante essa etapa, especialmente aos meus grandes amigos e companheiros de estudo durante o período de graduação, Vinicius Alencar de Lima e Isabela Bragança Roque. Por tornar os últimos quatro anos uma jornada compartilhada de momentos inesquecíveis.

Ao meu amigo de infância, Marinelton de Jesus Lima. Por aguentar minhas histórias de quando o universo era do tamanho da ponta de um alfinete.

Agradeço também ao meu orientador, Luiz Antonio Barreiro. Pelos ensinamentos e discussões que foram feitas, sempre paciente, mantendo um clima leve e descontraído durante as reuniões, favorecendo o progresso do trabalho. Também agradeço ao professor Mariano pela contribuição na minha formação, mas especialmente por ter me ajudado quando eu precisei.

Por fim, agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo financiamento, processo n°2021/02805-2.

# Resumo

Nesta monografia foram exploradas as simetrias do modelo padrão e suas quebras espontâneas, especialmente o mecanismo de Higgs para a quebra de simetria de calibre na interação fraca e a geração de massa durante a era eletrofraca da expansão do universo. Considerando a importância do campo de Higgs nesse processo, onde durante a quebra de simetria espontânea o mesmo adquire um valor de vácuo esperado não nulo, o que é uma motivação para se estudar a relação de um campo escalar e a densidade de energia de vácuo. É conhecido o fato que os valores calculados teoricamente empregando teoria quântica de campos apontam um valor discrepante de até 120 ordens de grandeza maior que medidas experimentais, o que é conhecido como Problema da Constante Cosmológica. Na presente monografia também foi realizado uma investigação sobre essa questão. Onde para isso, a princípio, foi necessário um estudo introdutório à teoria de campos.

**Palavras-chave:** constante cosmológica, bóson de Higgs

# Abstract

In this monography, standard model symmetries and their spontaneous breaks were explored, especially the Higgs mechanism for gauge symmetry breaking in weak interaction and mass generation during the electroweak era of universe expansion. Considering the importance of the Higgs field in this process, where during spontaneous symmetry breaking it acquires a expected vacuum value different from zero, which is a motivation to study the relationship of a scalar field and the vacuum energy density. It is well known that values calculated theoretically using quantum field theory point to an outlier of up to 120 orders of magnitude greater than experimental measurements, which is known as the Cosmological Constant Problem. In this monography, an investigation was also carried out on the subject. Where, at first, an introductory study of field theory was needed.

**Keywords:** cosmological constant, Higgs boson





# Lista de Figuras

Figura 2.1 – Visualização do conceito de campo (2) . . . . .	16
Figura 3.1 – Potencial de Higgs com distribuição de cores qualitativas, cujo mínimo escolhido indicado pelo ponto vermelho surge na condição em que $m^2 < 0$ , quebrando espontaneamente a simetria. De modo que a escolha por um calibre unitário permite que seja analisada apenas excitações quantizadas acima do estado de vácuo real apenas na direção radial como mostra as flechas pretas, dado que existem infinitos vácuos degenerados relacionados por simetria de rotação. . . . .	37
Figura 3.2 – Diagramas de Feynman que representa os termos presentes em $\mathcal{L}_{WWV}$ e $\mathcal{L}_{WWVV}$ . De modo que o diagrama mais acima e mais a esquerda mostra como os bósons $W$ interagem com o campo do fóton $A_\mu$ enquanto o vértice de três pontos de gauge mais a esquerda mostra a interação entre os bósons $W$ e $Z$ . As demais representações se tratam de vértices de quatro pontos de gauge. É interessante notar que ao contrário do fóton que não há termos de auto-interação, os bósons $W$ interagem entre si. (9) . . . . .	46



# Sumário

<b>Sumário</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>1 Introdução</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2 Teoria de campos</b> . . . . .	<b>11</b>
2.1 Introdução à Teoria de Grupos . . . . .	11
2.1.1 Grupo de Simetria $SO(N)$ . . . . .	12
2.1.2 Grupo de Simetria $SU(N)$ . . . . .	13
2.2 Introdução à Teoria Clássica de Campos . . . . .	15
2.2.1 Equação de Euler-Lagrange . . . . .	17
2.2.2 Teorema de Noether . . . . .	18
2.3 Introdução ao Campo de Klein-Gordon . . . . .	21
2.4 Quantizando o Campo de Klein-Gordon . . . . .	23
2.5 Energia do Campo Escalar Complexo . . . . .	25
2.6 Introdução ao Campo de Dirac . . . . .	26
2.6.1 lagrangiana de Dirac . . . . .	28
<b>3 Quebra de Simetria Espontânea</b> . . . . .	<b>31</b>
3.1 Introdução às Quebras de Simetrias . . . . .	31
3.2 Quebra Espontânea de Simetria Discreta . . . . .	32
3.3 Quebra de Simetria Global . . . . .	34
3.4 Quebra de Simetria Local . . . . .	35
3.5 Quebra de Simetria no setor $SU(2) \times U(1)_Y$ . . . . .	36
3.6 lagrangiana de calibre . . . . .	39
<b>4 O problema da Constante Cosmológica</b> . . . . .	<b>47</b>
4.1 Equação de Campo de Einstein . . . . .	47
4.2 Constante Cosmológica . . . . .	49
4.3 As 120 ordens de grandeza . . . . .	50
<b>5 Conclusão e Perspectivas</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>Referências</b> . . . . .	<b>57</b>



# 1 Introdução

Esta tese tem como objetivo principal estudar a relação entre o campo de Higgs e a constante cosmológica, que nos apresenta uma frente de encontro entre a cosmologia e a física de partículas e campos. Então faz-se necessário, para uma compreensão mais profunda sobre esse tema, que seja construída uma boa base pautada na Teoria Quântica de Campos, com base nas referências (1, 2, 3, 4, 5, 6) e com ênfase no mecanismo principal que liga essas duas áreas, a quebra espontânea de simetria.

Feitas essas considerações, sabe-se que quando nos deparamos com fenômenos em que a velocidade em questão possui valores relativamente próximos à velocidade da luz, devemos levar em consideração a relatividade especial(ou restrita). Enquanto do ponto de vista do universo quântico, tamanhos na ordem ou menores que a escala atômica, a mecânica quântica é responsável pela descrição dos fenômenos. Tendo isso em mente, a Teoria Quântica de Campos(QFT do inglês) configura-se como uma junção entre os formalismos da Mecânica Quântica e a Relatividade Especial, descrevendo muito bem fenômenos que envolvem partículas com altas energias.

Como motivação de se implementar essa teoria podemos realizar a comparação entre duas partículas: Elétron e fóton. O elétron é um férmion, uma partícula fundamental constituinte da matéria, o fóton é o bóson mediador da interação eletromagnética e que deriva do campo eletromagnético. E por isso, se quisermos descrever essas partículas dentro do mesmo arcabouço devemos considerar outra entidade fundamental, os próprios campos. De modo que cada partícula do modelo padrão possui um campo associado a ela, então temos o campo dos quarks, léptons, bósons vetoriais e por fim o campo de Higgs. Além disso, com a implementação da QFT o fato de um elétron no Brasil ser idêntico a outro elétron, mas na China, tem um grande sentido, pois derivam do mesmo campo. Outra questão é que a QFT nos fornece uma boa explicação para o fato das partículas não serem indestrutíveis - podem ser criadas ou destruídas -, isso porquê ao analisar uma partícula numa caixa quadrada através do princípio de incerteza de Heisenberg, a incerteza na energia fica dada por  $\Delta E \geq \hbar c/L$ , onde  $L$  é o comprimento da caixa. Desse modo, quando a incerteza na energia atingir a faixa de  $\Delta E = 2m_e c^2$ , é possível que surja um par elétron- pósitron do vácuo, se aniquilando e produzindo fótons em torno da partícula original. Assim, as flutuações na energia acabam gerando um escudo de fótons em torno da partícula original. Esse e outros fenômenos compõe a riquíssima Teoria Quântica de Campos aplicado ao modelo padrão.



## 2 Teoria de campos

### 2.1 Introdução à Teoria de Grupos

O objetivo desta seção é explicar em termos gerais por que a existência de simetria leva a uma variedade de simplicidades físicas. De um ponto de vista, podemos considerar a simetria como uma transformação que mantém as equações de movimento invariantes. Mas para compreender esse conceito com mais completude, assim como a sua quebra, uma breve introdução sobre teoria de grupos é necessária (1). Com isso conseguimos inferir informações sobre o tipo de simetria do campo em questão como veremos mais adiante.

**Definição 1.** Um grupo  $G$  é conjunto de elementos  $\{a, b, c, \dots\}$  que contém a operação:

$$\begin{aligned} * : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longrightarrow a * b \end{aligned}$$

logo, se  $a \in G$  e  $b \in G$ , temos que  $a * b \in G$ . Além disso, as seguintes relações devem ser satisfeitas:

- (i)  $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G.$  (associatividade)
- (ii)  $\exists e \in G / a * e = e * a, \forall a \in G.$  (Elemento identidade)
- (iii)  $\forall a \in G \exists b \in G, \text{ com } a \neq e / a * b = e, \text{ então } b = a^{-1}$  (Elemento inverso)

Sabendo a definição de um grupo, considere um elemento  $g \in G$  que seja especificado por um conjunto finito de  $n$  parâmetros  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ . Então o elemento de grupo pode ser escrito como

$$g = G(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), \quad (2.1)$$

e o elemento neutro fica definido da seguinte maneira

$$e = G(0, 0, \dots, 0). \quad (2.2)$$

Ao analisarmos a expressão (2.1), os parâmetros não foram designados pela letra  $\theta$  por coincidência e sim porque representam ângulos delimitados num intervalo de  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Além disso, os mesmos estão relacionados com o grupo de rotação que será discutido logo adiante, considerado de fundamental importância para a física.

**Definição 2.** Se um grupo  $G$  depende de um conjunto finito de parâmetros contínuos  $\theta_i$  e existam as derivadas em relação a cada parâmetro do grupo,  $G$  é chamado de grupo de Lie.

Tendo em vista esses conceitos e sabendo que a rotação não muda o comprimento de um vetor. Uma rotação em  $\theta$  aniquila uma em  $-\theta$ , isso diz que a rotação possui uma representação unitária. Note que no caso em que  $G$  forma um grupo de Lie, ao efetivar uma mudança infinitesimal do parâmetro  $\theta_i$ , pode-se fazer uma expansão tal que  $g = 1 + X_i \delta\theta$ ; onde

$$X_i = -i \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(\theta_i) \Big|_{\theta_i=0}. \quad (2.3)$$

As quantidades  $X_i$  são chamadas de geradores de grupo.

Um ponto importante a se destacar é que os geradores constituem um espaço vetorial. Pois podem ser multiplicados por um escalar e ainda ser os geradores de um grupo. Podemos também somar dois geradores obtendo a formação de um terceiro gerador. Além disso, os geradores de um determinado grupo podem ser usados como base para outros vetores. Tais geradores estão relacionados de acordo com a álgebra de Lie

$$[X_i, X_j] = i f_{ijk} X_k, \quad (2.4)$$

onde  $f_{ijk}$  é chamada de constante de estrutura do grupo. De modo que se os geradores comutam ( $f_{ijk} = 0$ ) então se diz que o grupo é abeliano, caso contrário é não abeliano.

### 2.1.1 Grupo de Simetria SO(N)

Conhecendo as propriedades básicas de um grupo, é possível analisar com mais detalhes o caso das rotações. Para verificar, considere uma rotação em duas dimensões(1, 6) :

$$x' = x \cos\theta + y \sin\theta, \quad (2.5)$$

$$y' = -x \sin\theta + y \cos\theta. \quad (2.6)$$

Definindo  $x_1 = x$  e  $x_2 = y$ , pode-se escrever

$$x'_i = \sum_{j=1}^2 R_{ij} x_j, \quad i = 1, 2 \quad (2.7)$$

onde  $R$  pode ser escrito na forma matricial como

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

De modo que  $R$ , ou  $R(\theta)$ , é chamado de *matriz de rotação*, que demonstra características importantes quando consideramos o produto entre  $R$  e a sua transposta  $R^T$

$$RR^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad (2.9)$$



mostrando que a matriz de rotação em duas dimensões possui *ortogonalidade*. Note também que devido as propriedades de paridade da função seno e cosseno,  $R(-\theta) = R^T$ .

A propriedade de ortogonalidade também pode ser representada em termos indiciais da seguinte maneira:  $\sum_j (R^T)_{ij} R_{jk} = \delta_{ik} = 1_{ij}$ , o que é útil para verificar que a norma de um vetor é invariante sobre rotações, pois

$$\sum_i x'_i x'_i = \sum_{i,e,m} R_{ie} x_e R_{im} x_m = \sum_{i,e,m} x_e \underbrace{R_{ei}^T R_{im}}_{\delta_{em}} x_m = \sum_e x_e x_e \quad (2.10)$$

Assim, verificando que uma rotação mantém invariante a norma do vetor, como mencionado anteriormente. Isso é importante porque possui um análogo com a transformação de Lorentz, pois a mesma mantém a seguinte quantidade invariante:  $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ , chamada de intervalo. Dessa maneira, para um sistema de coordenadas  $S'$  se deslocando com a velocidade constante  $v$  na direção  $x$  de outro referencial  $S$ , temos

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Onde  $\beta = v/c$  e  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ . Então, é possível definir o quadrivetor( $x^\mu$ ) e o tensor métrico ( $g^{\mu\nu}$ ) como

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Com isso, é possível escrever as seguintes relações

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, x, y, z) \quad \text{e} \quad \sum_\mu x^\mu x_\mu = x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu. \quad (2.13)$$

Além disso, devemos notar outro aspecto interessante da matriz de rotação, considerando algumas propriedades trigonométricas básicas vemos que  $\det(R) = 1$ . Portanto, nesse caso temos um tipo de simetria  $SO(2)$ , leia-se *especial ortogonal*  $2 \times 2$ . Em termos gerais, um grupo de simetria especial ortogonal  $N \times N$  é abreviado de  $SO(N)$  e o termo especial refere-se ao determinante das matizes serem 1 enquanto a propriedade de ortogonalidade é o análogo ao que foi verificado na equação (2.9).

### 2.1.2 Grupo de Simetria $SU(N)$

Outro importante grupo para física de partículas é o grupo unitário,  $U(N)$ , cujo o mesmo é constituído de matrizes complexas unitárias  $N \times N$ . Condicionalmente, para que o grupo seja unitário a seguinte relação deve acontecer:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1. \quad (2.14)$$

A partir disso, é possível definir o grupo de simetria especial unitário  $SU(N)$ . Ou seja, um subconjunto do grupo unitário, mas com a condição de que o determinante das matrizes sejam uma unidade. De modo que se estivermos interessados em saber o número  $\xi$  de geradores de um grupo  $SU(N)$ , basta fazer:

$$\xi = N^2 - 1. \quad (2.15)$$

Enquanto o número  $\xi'$  de operadores que podem ser simultaneamente diagonalizados (*rank*):

$$\xi' = N - 1. \quad (2.16)$$

De fato, introduzir esses grupos de simetria é importante, dado que os mesmos estão relacionados com as forças fundamentais conhecidas na natureza atualmente:

**a) Força eletromagnética:** Ocorre através da troca de fótons, geralmente designado por  $\gamma$ , que é a partícula mediadora dessa força. Os fótons não possuem cargas elétricas e tem dois estados de polarização. O grupo de simetria associado a essa força é o grupo unitário  $U(1)$ ;

**b) Força nuclear fraca:** Proposta para explicar o mecanismo do decaimento beta, essa interação é mediada pelos bóson de Gauge, bósons massivos indicados pelas letras  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z$ . Em termos de propriedades, a interação fraca pertence ao grupo de Gauge  $SU(2)$ , onde os três geradores desse grupo combinam-se para formar os bóson dessa interação, cujas características são:

- O bóson  $W^-$  possui carga elétrica -1 e massa de  $80 \text{ GeV}/c^2$ ;
- O bóson  $W^+$  possui carga elétrica +1 e massa de  $80 \text{ GeV}/c^2$ ;
- Enquanto o bóson  $Z$  possui massa de  $91 \text{ GeV}/c^2$  e carga elétrica neutra.

O grupo  $SU(2)$  é um grupo em destaque nesse trabalho pois será importante no estudo das quebras de simetria do setor eletrofraco do modelo padrão  $SU(2) \times U(1)_Y$ , um modelo que unifica a força eletromagnética com a força nuclear fraca. Além disso, sabemos que o grupo de simetria especial unitário  $2 \times 2$  possui 3 geradores bem conhecidos na física de partículas, que são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Tais matrizes obedecem a regra de comutação análogo a equação (2.4), isso significa que

$$\left[ \frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i \varepsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}, \quad (2.18)$$

onde  $\varepsilon_{ijk}$  é o tensor de Levi-Cevita:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = +1 \\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1 \end{cases}$$

Enquanto que para outras combinações o tensor  $\varepsilon_{ijk}$  é nulo.

**c) Força nuclear forte:** É responsável por manter os nucleons (constituintes dos núcleos) unidos através da troca de glúons entre os quarks, superando a repulsão gerada pela interação eletromagnética entre dois prótons. O grupo de Gauge da interação forte é o SU(3), possuindo oito geradores. De modo que a carga dos glúons são chamadas de cores e a teoria de campos que estuda essa interação é denominada cromodinâmica quântica. Os geradores  $\lambda_i$  desse grupo satisfazem a relação de Gell-Mann

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i \sum_{k=1}^8 f_{ijk} \lambda_k, \quad (2.19)$$

onde  $f_{ijk}$  fica especificado por:

$$f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2}, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f_{123} = 1. \quad (2.20)$$

Já as matrizes de Gell- Mann são dadas por:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tais informações podem ser encontradas de maneira mais detalhada no livro (1).

## 2.2 Introdução à Teoria Clássica de Campos

Em contraste com um sistema mecânico, que tem um número finito de graus de liberdade, fisicamente um campo é um sistema dinâmico com um número infinito de graus de liberdade. Matematicamente é possível defini-lo através de uma variedade como  $\mathcal{M}_{1,3}$ :

$$\mathcal{M}_{1,3} = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 \quad \text{com} \quad \varphi : \mathcal{M}_{1,3} \longrightarrow \rho. \quad (2.21)$$

onde  $\rho$  é chamado de espaço alvo e depende na natureza do campo em questão. Se estivermos lidando com campos escalares é usado  $\rho = \mathbb{R}^1$ , enquanto para campos vetoriais  $\rho = \mathbb{R}^n$ . Da mesma forma que na mecânica clássica, será utilizado nessa tese para descrição dos campos a lagrangiana  $(L)$  (1, 2, 4, 5). A representação da lagrangiana passa a ser em termos de uma densidade lagrangiana,  $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ , que depende de campos no espaço-tempo  $\varphi(x, t)$  e sua derivada, como mostra a relação:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi). \quad (2.22)$$

No caso clássico a lagrangiana tem a dependência das coordenadas generalizadas  $(q_i, \dot{q}_i)$ , nesse caso temos a seguinte mudança  $L(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow L(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ . Para visualizar a natureza de um campo clássico, podemos imaginar que o mesmo é análogo a um sistema mecânico estudado em mecânica clássica, mas agora, com contínuos graus de liberdade. Por exemplo, considerando um modelo de uma corda de um violão que se baseia em considerar a corda constituída de  $N$  osciladores acoplados em vibração restritamente na direção perpendicular a corda. A descrição de um campo  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  será satisfeita quando tomarmos um número muito grande de osciladores de modo que tenhamos infinitesimalmente contínuos graus de liberdade. Veja a figura 2.1.

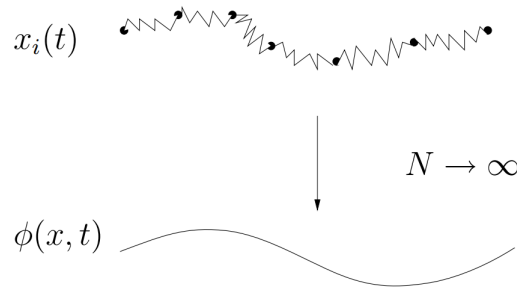


Figura 2.1 – Visualização do conceito de campo (2)

Feita as considerações iniciais sobre a natureza de um campo clássico, podemos analisar como  $\mathcal{L}$  é definida em termos da densidade Hamiltoniana  $\mathcal{H}$ . Essa relação ocorre de acordo com a seguinte transformação de Legendre:

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \pi(\varphi, \dot{\varphi})\dot{\varphi} - \mathcal{H}(\varphi, \pi), \quad (2.23)$$

que por definição nos fornece uma relação para o momento canonicamente conjugado ( $\pi$ ):

$$\pi(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}. \quad (2.24)$$

Ainda, é possível analisar transformada inversa de (2.23), resultando em:

$$\mathcal{H}(\varphi, \pi) = \pi\dot{\varphi}(\varphi, \pi) - \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}), \quad (2.25)$$

De modo que ao considerar uma lagrangiana do tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \mathcal{V}(\varphi), \quad (2.26)$$

com  $\mathcal{V}$  sendo uma densidade potencial, e substituir na equação (2.25), ficamos com

$$\mathcal{H}(\varphi, \pi) = \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \mathcal{V}(\varphi) = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + \mathcal{V}(\varphi), \quad (2.27)$$

lembrando que aqui  $\pi = \dot{\varphi}$ . Assim, fazendo o análogo com a densidade lagrangiana somos levados a concluir que:

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{K} + \mathcal{V}. \quad (2.28)$$

Onde geralmente os termos associados a energia cinética da lagrangiana são bilineares, ou seja, possui dois campos na sua expressão. Enquanto os termos restantes, ao invés de denominarmos como termos associados à energia potencial, chamamos de termos de interação. Com base nessas considerações, podemos listar alguns termos que pertence a parte cinética da lagrangiana em teoria de campos:

Termos Cinéticos	$\frac{1}{2}\varphi\partial_\mu\partial^\mu\varphi, \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi, \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2, \frac{1}{2}m^2\varphi^2, \frac{1}{2}\varphi_1\Box\varphi_2, \varphi_1\partial_\mu A_\mu\dots$
Termos de Interação	$\lambda\varphi^3, g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi, g\partial_\mu\varphi A_\mu\varphi^*, g^2 A_\mu^2 A_\nu^2\dots$

Tabela 2.1 – Tabela de classificação geral dos termos na lagrangiana. Cujo vários desses símbolos serão explorados ao longo da monografia, veja em mais detalha na referência (5)

Onde as letras  $\varphi$  e  $\pi$  são empregadas para representar campos escalares, ou seja, campos que são invariantes a transformação de Lorentz. Enquanto as letras  $\xi, \psi, \chi$  representam campos associados as partículas de spin semi inteiro(Férmions) e as letras  $A_\mu$  e  $J_\mu$  são campos vetoriais. Já as representações como  $T_{\mu\nu}$  indicam que estamos lidando como tensores.

### 2.2.1 Equação de Euler -Lagrange

O estudo dos fenômenos descritos por QFT trás uma abordagem em termos da lagrangiana, preferencialmente. A Hamiltoniana, apesar de descrever uma grandeza que é conservada com o tempo, acaba não sendo muito empregada devido a sua característica de depender do quadri-momento ( $p^\mu$ ) cuja consequência direta é não ser invariante de Lorentz, e por isso não é eficaz para descrever fenômenos relativísticos. Com base nisso, uma ferramenta de grande utilidade para o estudo da teoria quântica de campos é a ação, que é definida como:

$$S = \int dtL = \int d^4x\mathcal{L}. \quad (2.29)$$

Sabendo que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$ , podemos aplicar o princípio da mínima ação, que nos diz que a ação deve ser sempre minimizada,  $\delta S = 0$ , num fenômeno na natureza. Com base nisso, para determinar a equação de Euler-Lagrange para o campo  $\varphi$ , podemos considerar o análogo a uma diferencial,  $\delta\mathcal{L}$ , sendo escrito como:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta(\partial_\mu\varphi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi. \quad (2.30)$$

Então, aplicando a condição  $\delta S = 0$  vem

$$\delta S = \int d^4x\delta\mathcal{L} = \int d^4x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta(\partial_\mu\varphi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi \right] = 0. \quad (2.31)$$

Aqui cabe uma observação, pois se analisarmos com cuidado o termo  $\delta(\partial_\mu\varphi)$ , interpretando-o como uma diferencial, veremos que:

$$\delta(\partial_\mu\varphi) = \delta(\partial_0\varphi, \partial_1\varphi, \partial_2\varphi, \partial_3\varphi) = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial}{\partial(\partial_i\varphi)} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x^0}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^3} \right) \delta(\partial_i\varphi). \quad (2.32)$$

Entretanto, podemos visualizar esse problema de modo a poupar esforços, pois se tomarmos  $\delta\varphi = \varphi' - \varphi$ , aparece de modo natural que

$$\partial_\mu\delta(\varphi) = \partial_\mu\varphi' - \partial_\mu\varphi = \delta(\partial_\mu\varphi). \quad (2.33)$$

De modo que podemos utilizar sem perca alguma a relação:  $\delta(\partial_\mu\varphi) = \partial_\mu(\delta\varphi)$ . Consequentemente a segunda integral pode ser integrada por partes, mas o primeiro termo é nulo, pois os pontos finais são fixos. Dessa forma a primeira integral da equação (2.31) toma a seguinte forma

$$\int d^4x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \partial_\mu(\delta\varphi) \right] = - \int d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right] \delta\varphi + \int d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta\varphi \right], \quad (2.34)$$

onde o último termo pode ser escrito como um termo de superfície a qual  $\delta\varphi = 0$ , portanto esse termo se anula. Substituindo essas informações na equação (2.31) surge que

$$\int d^4x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right) \right] \delta\varphi = 0. \quad (2.35)$$

Como  $\delta\varphi$  é arbitrário chega-se em

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right) = 0, \quad (2.36)$$

que é a equação de Euler-Lagrange para o campo  $\varphi$ .

### 2.2.2 Teorema de Noether

Um conceito fundamental na natureza é o de conservação. Grandezas como energia e momento são grandezas conservadas. Isso nos diz que não é possível criar e nem destruir tais grandezas, mas sim transforma-las. Outra característica que desempenha um papel importante para o entendimento de fenômenos desde a geração de massa das partículas até supercondutividade, é a *simetria* (5). A definição é a seguinte:

**Definição 2.** *Simetria é qualquer mudança de perspectiva que mantém a equação de movimento invariante*

Sendo assim, se uma lagrangiana é invariante sobre uma determinada transformação do tipo  $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$ , dizemos então que essa é a simetria associada a lagrangiana em questão. Para exemplificar essa questão podemos analisar a lagrangiana de um campo escalar complexo,

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu\varphi|^2 - m^2|\varphi|^2 \quad (2.37)$$

sobre a mudança  $\varphi \rightarrow e^{-i\theta}\varphi$ , com  $\theta \in \mathbb{R}$ . Já que  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ , então  $\varphi$  possui dois graus de liberdade que são os próprios  $\varphi$  e seu complexo conjugado  $\varphi^*$ . Então, como a lagrangiana permanece invariante sob essas transformações, dizemos que essa é a sua simetria.

Agora, considerando que a ação  $S$  seja invariante sob mudanças em  $\varphi$  e  $x_\mu$  dadas por

$$\delta x^\mu = X_\nu^\mu \delta\theta^\nu \quad \bar{\delta}\varphi_n = \Phi_\mu^{(n)} \delta\theta^\mu \quad (2.38)$$

onde  $\delta\theta^\mu$  é um parâmetro infinitesimal. Já as variações  $\delta$  e  $\bar{\delta}$  significam que quando aplicadas geram:  $\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu$  e

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\varphi_n &= \varphi'_n(x') - \varphi_n(x) \\ &= \varphi'_n(x') - \varphi_n(x') + \varphi_n(x') - \varphi_n(x) \\ &= \delta\varphi + (\partial_\mu\varphi)\delta x^\mu. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Por exemplo, se tivermos uma simetria por uma translação infinitesimal  $\varepsilon^\mu$  então  $\delta\theta^\nu = \varepsilon^\nu$ ,  $X_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu$  e  $\Phi_\mu^{(n)} = 0$ , de modo que

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu \quad \text{e} \quad \bar{\delta}\varphi_n = 0 \quad (2.40)$$

De uma forma geral, uma variação da ação em uma região  $R$  resulta em

$$\delta S = \int_R \mathfrak{L}' d^4x' - \int_R \mathfrak{L} d^4x, \quad (2.41)$$

onde  $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi, x_\mu)$  e  $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}'(\varphi', \partial_\mu\varphi', x'_\mu)$ . Claramente  $d^4x' = J(x', x)d^4x$ , onde o Jacobiano  $J(x', x)$  é dado por

$$J(x', x) = \det \left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu) + \text{ordens superiores}. \quad (2.42)$$

Mas, em (2.42) foi utilizado o fato que  $\partial x'^\mu / \partial x^\nu = \delta_\nu^\mu + \partial_\nu(\delta x^\mu)$ , e também a propriedade do determinante que diz:  $\det(I + M\delta) = 1 + \delta\text{Tr}[M] + O(\delta^2)$ . Portanto, levando isso em consideração chega-se em

$$\int_R [\delta\mathfrak{L} + \mathfrak{L} \partial_\mu(\delta x^\mu)] d^4x, \quad (2.43)$$

e assim, se tiverem vários campos  $\varphi_n$ , a variação da ação fica

$$\delta S = \int_R \left\{ \sum_n \left[ \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi_n} \delta\varphi_n + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_n)} \delta(\partial_\mu\varphi_n) \right] + \underbrace{(\partial_\mu\mathfrak{L})\delta x^\mu + \mathfrak{L}\partial_\mu(\delta x^\mu)}_{\partial_\mu(\mathfrak{L}\delta x^\mu)} \right\} d^4x. \quad (2.44)$$

Mas como visto em (3.68),  $\partial_\mu(\delta\varphi_n) = \delta(\partial_\mu\varphi_n)$ , então pode-se reescrever  $\delta S$  como

$$\delta S = \int_R \left\{ \sum_n \left[ \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi_n} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_n)} \right) \right] \delta\varphi_n + \partial_\mu \left[ \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_n)} (\delta\varphi_n) + \mathfrak{L}\delta x^\mu \right] \right\} d^4x. \quad (2.45)$$

Entretanto, supondo que o campo satisfaz a equação de Euler-Lagrange ficamos com a primeira parte da equação (2.46) igual à zero, enquanto a segunda representa uma divergência total. Logo, lembrando que  $\delta\varphi_n = \bar{\delta}\varphi_n - (\partial_\mu\varphi_n)\delta x^\mu$ , chaga-se em

$$\delta S = \int_R \sum_n \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_n)} (\bar{\delta}\varphi_n) \right] d^4x + \int_R \partial_\mu \left[ \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_n)} (\partial_\nu\varphi_n) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right] \delta x^\nu d^4x. \quad (2.46)$$

Com base nisso, é possível definir o tensor  $T_\nu^\mu$  como

$$T_\nu^\mu = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_n)} (\partial_\nu\varphi_n) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}, \quad (2.47)$$

e a partir disso, usando as relações (2.38), é possível reescrever

$$\delta S = \int_R \sum_n \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_n)} \Phi_\alpha^{(n)} \right] \delta\theta^\alpha d^4x - \int_R \partial_\mu (T_\nu^\mu) X_\alpha^\nu \delta\theta^\alpha d^4x, \quad (2.48)$$

ou então, usando o teorema do divergente

$$\delta S = \int_{\partial R} \left[ \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_n)} \Phi_\alpha^{(n)} - T_\nu^\mu X_\alpha^\nu \right] \delta\theta^\alpha d\sigma_\mu = 0, \quad (2.49)$$

em que  $d\sigma_\mu$  é o elemento de “superfície” tridimensional ou hipersuperfície e  $\partial R$  representa a fronteira de  $R$ . Assim, como  $\delta\theta^\alpha$  é arbitrário, não depende de  $x_\mu$ , logo

$$\int_{\partial R} J_\alpha^\mu d\sigma_\mu = 0, \quad \text{com} \quad J_\alpha^\mu = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_n)} \Phi_\alpha^{(n)} - T_\nu^\mu X_\alpha^\nu \quad (2.50)$$

representando uma corrente que “flui” através da hipersuperfície  $\partial R$ . Assim, como a integral é nula o teorema da divergência implica na conservação dessa corrente:

$$\partial_\mu J_\alpha^\mu = 0. \quad (2.51)$$

De modo que ao integrar a equação (2.51) sobre uma hipersuperfície constante no tempo ( $d\sigma_\mu \rightarrow d^3x$ ), e portanto resulta em uma integral de volume

$$\int_V \partial_\mu J_\alpha^\mu d^3x = \int_V \partial_0 J_\alpha^0 d^3x - \underbrace{\int_V \nabla \cdot \vec{J}_\alpha d^3x}_0 = 0. \quad (2.52)$$

Finalmente, é possível definir a carga conservada  $Q_\alpha$  como

$$Q_\alpha = \int_V J_\alpha^0 d^3x \Rightarrow \frac{d}{dt} Q_\alpha = 0. \quad (2.53)$$

As considerações feitas nessa secção podem ter enunciadas em forma de um teorema, conhecido como teorema de Noether:

**Teorema 1.** *Se a lagrangiana possui uma simetria contínua e as equações de movimento são satisfeitas existe uma grandeza que é conservada.*



Portanto, para simetrias contínuas ( em que podemos tomar a variação  $\delta\mathcal{L}/\delta\theta$ ) o teorema de Noether pode ser um caminho para estudar o problema em questão. Entretanto, se a simetria envolvida no problema for discreta, como por exemplo  $\varphi \rightarrow -\varphi$ , não podemos aplicar o teorema. Como exemplo, no caso de uma simetria por translação temos como consequência as equações (2.40), de modo que a corrente dada por (2.50) fica

$$J_\alpha^\mu = -T_\nu^\mu \delta_\alpha^\nu = -T_\alpha^\mu. \quad (2.54)$$

Enquanto a carga conservada é

$$Q_\alpha = J_\alpha^0 = -T_\alpha^0 = - \left[ \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_n)} (\partial_\alpha \varphi_n) - \delta_\alpha^0 \mathcal{L} \right]. \quad (2.55)$$

Note que

$$\mathcal{H} = T_0^0 = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\varphi}_n)} \dot{\varphi}_n - \mathcal{L}. \quad (2.56)$$

é a densidade hamiltoniana e que será útil para analisar a energia de vácuo de um campo escalar. Utilizando  $i = \alpha \neq 0$  chega-se em

$$P_i = T_i^0 = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\varphi}_n)} \partial_i \varphi_n \quad (2.57)$$

que é o momentum canônico. Por isso  $T_\nu^\mu$  é denominado tensor de energia-momentum.

## 2.3 Introdução ao Campo de Klein-Gordon

Historicamente, Schrödinger também buscou uma equação que considerava os princípios da relatividade proposto por Einstein. Na sua busca por descrever o comportamento do sistemas quânticos, o mesmo acabou chegando no que conhecemos como equação de *Klein-Gordon*. Porém Schrödinger descartou essa equação, a princípio, e optou por levar a diante sua equação não relativística. Pois a equação de Klein-Gordon gera soluções que apresentam densidade de probabilidade e estados de energia negativos, além de não descrever corretamente o espectro do Hidrogênio (1). Para o estudo em questão, podemos começar obtendo a equação de Klein-Gordon lembrando da relação entre energia, massa e momento proposto por Einstein:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (2.58)$$

De modo que podemos implementar nessa equação os operadores energia e momento:

$$E^2 \longrightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad p^2 \longrightarrow -\hbar^2 \nabla^2. \quad (2.59)$$

Basta substituir (2.59) em (2.58) e notar que com isso, temos um novo operador. Bastando aplicar em uma função que depende do espaço e do tempo  $\varphi(\vec{x}, t)$  e utilizar as unidades naturais  $\hbar = c = 1$ , para obter

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi + m^2 \varphi = 0 \longrightarrow (\square + m^2) \varphi = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi = 0. \quad (2.60)$$

Em que  $\square$  é chamado operador de D’Lambert e pode ser reescrito como  $\partial_\mu \partial^\mu$ , considerando

$$\partial_\mu \partial^\mu = \sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square. \quad (2.61)$$

Um fato importante é que a equação (2.60) é invariante de Lorentz, bem como sua sua lagrangiana. Para verificar, podemos analisar como a lagrangiana e a equação de movimento reagem a transformação  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ , como visto em (2.11).

Em termos matemáticos, a transformação de Lorentz representa um tipo de rotação em relação as coordenadas espaciais e temporais. Então, tomando a lagrangiana associada à equação de Klein Gordon para um campo real

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi)(\partial_\nu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2, \quad (2.62)$$

pode-se analisar como o campo  $\varphi$  muda com uma rotação.

De modo que girar o sistema no sentido anti-horário, equivale a girar o campo no sentido horário e vice-versa. Assim, o campo se modifica como:

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi(\Lambda^{-1}x). \quad (2.63)$$

O que já nos permite concluir que a transformação do termo  $m^2 \varphi^2 / 2$  resulta no mesmo termo, porém com um determinado deslocamento, pois está aplicado no ponto  $(\Lambda^{-1}x)$ . Dando continuidade no processo, para finalizar a investigação de como  $\mathfrak{L}$  comporta-se sobre tal transformação devemos analisar como  $\partial^\mu \partial_\mu \varphi$  transforma-se, bastando lembrar de algumas propriedades importantes que envolvem o tensor métrico de Minkowski na assinatura  $(+ - - -)$ . A primeira delas se refere a mudança (3)

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu \varphi &\rightarrow g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi') (\partial_\nu \varphi') = g^{\mu\nu} [(\Lambda^{-1})^\rho_\mu \partial_\rho \varphi] [(\Lambda^{-1})^\sigma_\nu \partial_\sigma \varphi] (\Lambda^{-1}x) \\ &= g^{\rho\sigma} (\partial_\rho \varphi) (\partial_\sigma \varphi) (\Lambda^{-1}x) \\ &= (\partial_\mu \varphi)^2 (\Lambda^{-1}x). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Esse resultado ocorre porque  $\partial_\mu \varphi \rightarrow \partial_\mu \varphi(\Lambda^{-1}x) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu (\partial_\nu \varphi)(\Lambda^{-1}x)$ . O que pode ser verificado ao considerarmos que

$$\partial_\mu \varphi = \frac{\partial \varphi(\Lambda^{-1}x)}{\partial (\Lambda^{-1}x)} \partial_\mu (\Lambda^{-1}x) \quad \text{com} \quad (\Lambda^{-1})^\nu_\beta x^\beta = \sum_{\beta=0}^3 (\Lambda^{-1})^\nu_\beta x^\beta, \quad (2.65)$$

o que na verdade representa apenas a aplicação de uma regra de cadeia e o uso da convenção da soma de Einstein. Consequentemente, a derivada do campo depois da transformação fica

$$\begin{aligned} \partial_\mu \varphi &= \partial_\mu \xi \partial_\nu \varphi(\Lambda^{-1}x) = (\Lambda^{-1})^\nu_\beta \partial_\mu x^\beta \partial_\nu \varphi \\ &= (\Lambda^{-1})^\nu_\beta \delta_\mu^\beta \partial_\nu \varphi(\Lambda^{-1}x) \\ &= (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu \varphi. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Desse modo a lagrangiana transforma-se como um escalar  $\mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}(\Lambda^{-1}x)$ . De modo análogo podemos verificar como a equação de Klein-Gordon comporta-se sobre a transformação de Lorentz:

$$\begin{aligned} (\square + m^2)\varphi &= g^{\mu\nu}[(\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu \partial_\sigma + m^2]\varphi(\Lambda^{-1}x) \\ &= (g^{\nu\sigma} \partial_\nu \partial_\sigma + m^2)\varphi(\Lambda^{-1}x) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Note que usamos o fato de que o tensor métrico ser um tensor de segunda ordem, portanto ele se transforma com dois *Boost*, entretanto, pelos postulados da Relatividade esse tensor deve ser invariante sobre essa transformação, de modo que

$$g'^{\mu\nu} = (\Lambda)^\mu_\sigma (\Lambda)^\nu_\rho g^{\sigma\rho} = g^{\mu\nu} \rightarrow (\Lambda^{-1})^\rho_\mu (\Lambda^{-1})^\sigma_\nu g^{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}. \quad (2.68)$$

Note que como estamos trabalhando com termos indiciais a ordem que organizamos os termos da transformação de Lorentz  $(\Lambda^{-1})^\sigma_\nu$  e  $(\Lambda^{-1})^\rho_\mu$  não importa, pois são números. Em suma, se um campo não muda sobre a transformação de Lorentz podemos classifica-lo como *Campo escalar*.

## 2.4 Quantizando o Campo de Klein-Gordon

Depois de ter feito as considerações iniciais sobre o campo de Klein-Gordon, é natural que façamos agora a transição da Teoria Clássica de Campos para a Teoria Quântica de Campos, de modo que o caso mais simples é começar trabalhando com um campo escalar real(1, 2, 3, 5). Para isso, o primeiro passo que deve ser tomado é promover as variáveis dinâmicas para operadores que devem satisfazer a relação canônica de comutação. Isso porque sabemos que em um sistema discreto, utilizado na Mecânica Quântica, as relações de comutação são:

$$[q_i, p_i] = i\delta_{ij} \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0. \quad (2.69)$$

Entretanto, para que visualizemos como tais relações se dariam no contexto da Teoria de Campos, começamos analisando a equação (2.60) e tomando a solução  $\varphi \sim e^{-i(Ex^0 - \vec{p}\cdot\vec{x})}$ , chamada solução de campo livre, e tomando o  $E \rightarrow \omega_k$  e  $\vec{p} \rightarrow \vec{k}$ , com isso podemos escrever a solução geral em termos de uma expansão de Fourier:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} \left[ \varphi(\vec{k}) e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \varphi^*(\vec{k}) e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right], \quad (2.70)$$

de modo que para que tenhamos  $\varphi$  como operador,  $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ , devemos fazer a substituição de  $\varphi$  e  $\varphi^*$  pelos seguintes operadores:

$$\varphi \longrightarrow \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left( \hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right), \quad \varphi^* \longrightarrow \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left( \hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right). \quad (2.71)$$

Onde  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  representam os operadores de aniquilação e criação, respectivamente. De modo que esses operadores obedecem uma importante regra de comutação

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (2.72)$$

Por consequência, com as considerações que foram feitas o campo  $\varphi$  agora deve ser interpretado como um operador que pode ser reescrito como

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[ \hat{a}(\vec{k})e^{-ip_\mu x^\mu} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})e^{ip_\mu x^\mu} \right]. \quad (2.73)$$

Portanto, para que tenhamos as relações de quantização satisfeitas, devemos obter o análogo do momento  $p_i$ , que nesse caso configura-se como o momento canonicamente conjugado (2.24), que nesse caso fica

$$\pi(\varphi, \partial_0\varphi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\hat{\varphi})} = \partial_0\hat{\varphi} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[ \hat{a}(\vec{k})\partial_0 e^{-i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\partial_0 e^{i(\omega_k x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right].$$

Dessa forma, quando a derivada é feita ficamos com

$$\hat{\pi}(x) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left[ \hat{a}(\vec{k})e^{-ip_\mu x^\mu} - \hat{a}^\dagger(\vec{k})e^{ip_\mu x^\mu} \right]. \quad (2.74)$$

Agora basta analisar a equação (2.75) que representa um sistema discreto de partículas e transformar em um sistema contínuo, pois estamos lidando com a quantização de um campo. Nessa representação, devemos mudar  $\delta_{ij} \rightarrow \delta(x - x')$  em que  $x$  e  $x'$  são coordenadas as coordenadas do quadri-espaço em dois eventos distintos. Com isso, é possível obter a relação de comutação que esperávamos

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(x')] = i\delta(x - x'), \quad [\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(x')] = [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(x')] = 0, \quad (2.75)$$

em que tal relação é feita considerando que  $x^0 = x'^0$ . A equação (2.75), chamada de *segunda quantização*, que pode facilmente ser verificada, se por exemplo, tomarmos um campo escalar real da forma:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_p}} \left[ \hat{a}(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu} + \hat{a}^\dagger(\vec{p})e^{ip_\mu x^\mu} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_p}} \left[ \hat{a}(-\vec{p}) + \hat{a}^\dagger(\vec{p}) \right] e^{ipx}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Note que uma mudança de variável foi feita em (2.76), substituindo  $p \rightarrow -p$  e para fins de simplificação estamos usando  $p_\mu x^\mu = px$ . Essa mudança de variável foi feita considerando que  $\int_{-\infty}^{\infty} d^3(-p) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3p$ . Feito tais considerações, o momento canonicamente conjugado ( $\partial_0\hat{\varphi}$ ) associado a esse campo fica dado por

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(x) &= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \left[ \hat{a}(\vec{p})e^{-ipx} - \hat{a}^\dagger(\vec{p})e^{ipx} \right] \\ &= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \left[ \hat{a}(-\vec{p}) - \hat{a}^\dagger(\vec{p}) \right] e^{ipx}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Para mostrar que esses operadores obedecem a relação de comutação da segunda quantização, devemos lembrar que  $[\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(x')] = \hat{\varphi}(x)\hat{\pi}(x') - \hat{\pi}(x')\hat{\varphi}(x)$ , onde  $x'$  representa um outro evento no espaço-tempo, e calcular cada parte do comutador:

$$\hat{\varphi}(x)\hat{\pi}(x') = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{d^3p'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\omega_{p'}}{4\omega_p} \right)^{\frac{1}{2}} [\hat{a}(-\vec{p}) + \hat{a}^\dagger(\vec{p})] [\hat{a}(-\vec{p}') - \hat{a}^\dagger(\vec{p}')] e^{i(px+p'x')}.$$

Em que, no lado direito da equação acima uma integral foi suprimida por questão de praticidade, pela mesma razão adotamos  $a \equiv \hat{a}(-\vec{p})$ ,  $\tilde{a} \equiv \hat{a}(-\vec{p}')$ ,  $b \equiv \hat{a}^\dagger(\vec{p})$  e  $\tilde{b} \equiv \hat{a}^\dagger(\vec{p}')$ . Com isso, basta agora determinar a outra parte do comutador que de maneira análoga ao que foi feito para primeira parte do comutador

$$\hat{\pi}(x')\hat{\varphi}(x) = -i \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\omega_{p'}}{4\omega_p} \right)^{\frac{1}{2}} [\hat{a}(-\vec{p}') - \hat{a}^\dagger(\vec{p}')] [\hat{a}(-\vec{p}) + \hat{a}^\dagger(\vec{p})] e^{i(px+p'x')}.$$

Tendo em vista que estamos interessados em calcular o comutador, podemos substituir os resultados obtidos em:

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(x')] = -i \int \frac{d^3p'd^3p}{(2\pi)^3} \left( \frac{\omega_{p'}}{4\omega_p} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{matrix} \cancel{[a, \tilde{a}]}^0 \\ [a, b] + [\tilde{b}, \tilde{a}] + \cancel{[b, \tilde{b}]}^0 \end{matrix} \right\} e^{i(px+p'x')}. \quad (2.78)$$

E nesse ponto devemos usar as relações de comutação que obtemos naturalmente, dos operadores de criação e aniquilação, definidos a partir do hamiltoniano do oscilador harmônico simples.

$$[a, b] = \delta((-p) - p'), \quad [\tilde{b}, \tilde{a}] = -\delta(p - (-p')). \quad (2.79)$$

Dessa maneira, após substituir essas relações no comutador entre o campo e o momento, ficamos com uma nova expressão para a comutação, agora em termos da delta de Dirac:

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(x')] = -i \int \frac{d^3p'd^3p}{(2\pi)^3} \left( \frac{\omega_{p'}}{4\omega_p} \right)^{\frac{1}{2}} [-\delta(-p - p') - \delta(p + p')] e^{i(px+p'x')}. \quad (2.80)$$

Assim, deveremos utilizar algumas das propriedades da “função” delta para prosseguir. Primeiramente, sabemos que para que a equação (2.80) deve ser integrada primeiro em  $d^3p'$ , que fornece

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(x')] = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{ip(x-x')} d^3p = i\delta(x - x'), \quad (2.81)$$

em que foi utilizada a definição integral da delta de Dirac. Utilizando os mesmos truques é possível chegar em  $[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(x')] = [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(x')] = 0$ .

## 2.5 Energia do Campo Escalar Complexo

Para calcular a energia de um campo escalar(complexo), podemos começar tomando o tensor  $T_{\mu\nu}$ , associado à lagrangiana de um campos escalar complexo (2.37),

detalhado em (5).

$$T_{\mu\nu} = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_n)} \partial_\nu \varphi_n - g_{\mu\nu} \mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi + \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi^* - g_{\mu\nu} (|\partial_\mu \varphi|^2 - m^2 |\varphi|^2). \quad (2.82)$$

Com base em (2.82), a densidade de energia  $\mathcal{E}$  pode ser especificada por

$$\mathcal{H} = T_{00} = (\partial_0 \varphi^*)(\partial_0 \varphi) + (\partial_0 \varphi)(\partial_0 \varphi^*) - [(\partial_0 \varphi)(\partial_0 \varphi^*) - (\vec{\nabla} \varphi^*) \cdot (\vec{\nabla} \varphi) + m^2 \varphi^* \varphi] \quad (2.83)$$

e com isso, usando a forma de um campo escalar complexo expandido em série de Fourier e lembrando que  $a_p^\dagger$  cria partículas e  $b_p^\dagger$  cria anti-partículas (ficando subentendido a função dos outros operadores), a energia fica dada por

$$E = \int d^3 \mathcal{H} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_p [a_p^\dagger a_p + b_p^\dagger b_p] + V \mathcal{H}_0 \quad \text{com} \quad \mathcal{H}_0 = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_p. \quad (2.84)$$

Assim, vemos que  $E \rightarrow \infty$  dado que  $\mathcal{E}_0$  é um termo infinito, pois corresponde a soma do estado fundamental de todas as partículas e anti-partículas, cada uma contribuindo com  $\omega_p/2$ . Dessa forma o que deve ser considerado é a diferença de energia  $\Delta E$

$$\Delta E = \int d^3 \mathcal{H} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_p [\Delta \text{Partículas} + \Delta \text{Anti-Partículas.}] \quad (2.85)$$

o que indica que quanto mais partículas e anti-partículas tiver o estado, maior deve ser a energia associado a ele.

## 2.6 Introdução ao Campo de Dirac

Na busca de uma equação que descreva corretamente o comportamento de partículas relativísticas ( $\psi$ ), Dirac também propôs uma forma em que o tempo e as coordenadas espaciais sejam tratadas em pé de igualdade. Entretanto, diferente da equação de Klein-Gordon, ao invés de promover as derivadas temporais para derivadas de segunda ordem, Dirac promoveu as derivadas espaciais para primeira ordem (1, 6) da seguinte forma:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad \text{com} \quad H = \vec{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta m. \quad (2.86)$$

A partir daí basta analisar a aplicação de  $H^2$  em  $\psi$ , pois os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  devem ser determinados através de uma comparação de termos entre

$$\begin{aligned} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= [(\vec{\alpha} \cdot -i \vec{\nabla})^2 + \beta^2 m^2 - m(\vec{\alpha} \beta + \beta \vec{\alpha}) \cdot i \vec{\nabla}] \psi \\ &= \left[ - \left( \sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left( \sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \beta^2 m^2 - m(\vec{\alpha} \beta + \beta \vec{\alpha}) \cdot i \vec{\nabla} \right] \psi \\ &= \left[ - \sum \alpha_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \beta^2 m^2 - m(\vec{\alpha} \beta + \beta \vec{\alpha}) \cdot i \vec{\nabla} \right] \psi, \end{aligned} \quad (2.87)$$

e a equação de Klein-Gordon. Isso, porque além de ser uma equação governante para campos escalares, atua como uma equação de conservação energia-momentum relativístico, então é razoável que seja possível a comparação com

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left( -\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + m^2 \right) \psi. \quad (2.88)$$

Antes de inferir os valores por comparação, é conveniente que seja feita a seguinte mudança

$$\sum \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \longrightarrow \sum \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum \alpha_j \alpha_i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} = \sum (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.89)$$

Isso porque o termo com coordenadas diferentes possuem duas ordens, uma componente  $i \times j$  e outra  $j \times i$ , e na última passagem foi aplicado a condição da diferencial exata.

Sendo assim, agora podemos finalizar a comparação concluindo que

$$\alpha_i^2 = 1, \quad \beta^2 = 1, \quad \alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i, \quad \alpha_i \beta = -\beta \alpha_i. \quad (2.90)$$

No qual o terceiro termo, da esquerda pra direita, é derivado da da equação (2.89). Com essas informações é possível inferir a respeito da natureza dos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ , que na verdade definem matrizes. Feito essas considerações, podemos voltar para suposição de Dirac, multiplicando por  $\beta$  a equação (2.86) e lembrando que  $\beta^2 = 1$ , surge a equação:

$$i \left( \beta \frac{\partial}{\partial t} + \beta \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \psi - m\psi = i(\not{\partial}\psi - m\psi) = 0, \quad (2.91)$$

em que termo  $\gamma_\mu = (\beta, \beta \alpha_i) = (\gamma_0, \gamma_i)$  são as matrizes de Dirac e além disso, para simplificação, foi usado a *slash-notation*:

$$\not{\partial} = \gamma_\mu \partial^\mu = \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu \partial^\mu. \quad (2.92)$$

Com isso, podemos pontuar que a equação (2.91) é conhecida como equação de Dirac e é responsável por descrever as partículas e anti-partículas de spin  $1/2$ . De modo que caso seja desejável descrever um elétron, é preciso interpretá-lo como um *quantum* do campo de Dirac  $\psi$ , que devido a natureza matricial da equação (2.91) - as matrizes de Dirac são matrizes  $4 \times 4$ , implica que o campo  $\psi$  na verdade deve ter uma forma de um vetor no espaço de spin, o qual é denominado de *spinor*.

### 2.6.1 lagrangiana de Dirac

Feito tais considerações, é importante especificar a lagrangiana de Dirac, de modo que ao aplicar na equação de Euler-Lagrange devemos obter como resultado a equação de Dirac. A primeira observação que deve ser feita para realizar tal objetivo é que essa lagrangiana deve ser construída de modo a ser invariante de Lorentz. Começando pela implementação de um auto-adjunto de  $\psi$  que nesse caso não é apenas  $\psi^\dagger$ , e sim  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  porquê se transforma como escalar. De modo que  $\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$  também se transforma como escalar, e como a massa é escalar, ficamos com

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi. \quad (2.93)$$

Tendo em vista a lagrangiana de Dirac, podemos analisar propriedades importantes no contexto da teoria quântica de campo que será aplicada neste projeto e que naturalmente nos faz se deparar com a transformação de calibre (6). Por exemplo, ao tomar a transformação  $\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha} \psi$  vemos que a lagrangiana de Dirac permanece invariante, ou seja,  $\mathcal{L}_{Dirac}(\psi') \rightarrow \mathcal{L}_{Dirac}(\psi)$ , com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Dirac}(\psi') &= \bar{\psi} e^{i\alpha} i \gamma^\mu \partial_\mu e^{-i\alpha} \psi - m \bar{\psi} e^{i\alpha} e^{-i\alpha} \psi \\ &= \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi = \mathcal{L}_{Dirac}(\psi). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Entretanto, isso só é possível porque  $\alpha$  não depende das coordenadas do espaço tempo, chamada *transformação global*, então exponencial não é afetada pela derivada. No caso em que  $\alpha = \alpha(x)$  - muda em cada ponto do espaço tempo-, temos uma *transformação local* e a partir disso temos o surgimento de propriedades importantes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Dirac}(\psi') &= \bar{\psi} e^{i\alpha(x)} i \gamma^\mu \partial_\mu e^{-i\alpha(x)} \psi - m \bar{\psi} \psi \\ &= \underbrace{\bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi}_{\mathcal{L}_{Dirac}(\psi)} + \underbrace{\bar{\psi} \gamma^\mu \psi}_{j^\mu} \partial_\mu \alpha(x). \end{aligned} \quad (2.95)$$

De modo que o segundo termo da equação (2.95) nos diz que essa lagrangiana não é invariante sobre transformação de fase local pelo aparecimento de um termo com acoplamento entre a corrente fermiônica  $j^\mu$  e o termo  $\partial_\mu \alpha(x)$ .

Consequentemente, para que tenhamos uma lagrangiana de Dirac invariante sobre transformação de fase local, devemos realizar um acoplamento de  $j^\mu$  com *potencial de gauge*  $A_\mu$  - de modo que  $\mathcal{L}_{Dirac}$  torna-se uma nova lagrangiana  $\mathcal{L}(\psi, A_\mu)$  -, e depois da transformação de fase em  $\mathcal{L}(\psi, A_\mu)$  é necessário uma transformação específica em  $A_\mu$ . Para verificar, basta ver que sobre a transformação  $\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha(x)} \psi$ :

$$\mathcal{L}(\psi, A_\mu) = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + e j^\mu A_\mu \rightarrow \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + e j^\mu \left( A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \right). \quad (2.96)$$

Então, para deixar (2.96) invariante, devemos fazer a transformação, chama *transformação de gauge*

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x), \quad (2.97)$$



com isso vemos que

$$\mathfrak{L}(\psi, A_\mu) \rightarrow \mathfrak{L}(\psi', A'_\mu) = \mathfrak{L}_{Dirac} + \underbrace{ej^\mu A_\mu}_{\mathfrak{L}_{int}}. \quad (2.98)$$

No qual  $\mathfrak{L}_{int}$  representa o termo de interação da lagrangiana, de acordo com a classificação em (2.1). Entretanto, além do termo de interação,  $A_\mu$  deve contribuir com um termo cinético, pois também deve ter uma lagrangiana própria, que deve contar além do termo de interação, com um termo cinético:

$$\mathfrak{L}_{A_\mu} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \text{com} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.99)$$

onde  $F_{\mu\nu}$  representa o tensor do campo eletromagnético e  $A_\mu$  representa o quadripotencial associado a esse campo(fóton). Com isso, podemos de fato escrever a lagrangiana total

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\psi, A_\mu) &= \mathfrak{L}_{Dirac} + \mathfrak{L}_{A_\mu} + \mathfrak{L}_{int} \\ &= \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Onde, devido a transformação de gauge, surge um deslocamento de  $\partial_\mu$  para uma outra derivada chamada de derivada covariante  $D_\mu$ :

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (2.101)$$

Consequentemente, a lagrangiana resultante mostra como se dá a interação do campo eletromagnético com o campo fermiônico. Resultando como forma final:

$$\mathfrak{L}(\psi, A_\mu) = i\bar{\psi}\not{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.102)$$

concluindo que, como essa lagrangiana é invariante sobre transformação local  $U(1)$  seguido de uma transformação de gauge, essa estrutura é denominada de *estrutura de gauge*  $U(1)$ .



## 3 Quebra de Simetria Espontânea

### 3.1 Introdução às Quebras de Simetrias

O estudo do problema da constante cosmológica exige a compreensão de um dos processos mais importantes da teoria quântica de campos, a quebra espontânea de simetria. Basicamente, a diferença entre quebra espontânea e quebra explícita de simetria é que na quebra espontânea a Lagrangeana se mantém invariante sobre tal transformação de simetria, mas o estado fundamental não (5). Enquanto na quebra de simetria explícita nunca houve uma simetria definida.

Além disso, existe a distinção entre simetrias discretas, como por exemplo a simetria  $Z_2 : \varphi \rightarrow -\varphi$ , e simetrias contínuas como  $\varphi \rightarrow e^{i\alpha}\varphi$ , com  $\alpha \in R$ . No caso das simetrias contínuas, quando a sua quebra acontece, surge correlações de longo alcance associadas a partículas não massivas chamadas de bósons de Goldstone, como veremos detalhadamente adiante. Essa ideia pode se tornar mais nítida ao ser analisado um caso análogo e mais tangível a um primeiro momento que é o caso de um material ferromagneto com momento magnético  $\vec{m}(x)$ , como o ferro por exemplo.

Assim, no regime de altas temperaturas  $\vec{m}(x)$  - que é relacionado com a direção em que os spins atômicos estão apontados-, se encontram localmente distribuídos de modo aleatório em cada ponto  $x$  do material. Entretanto, ao resfriar o material abaixo da temperatura de Curie  $T_c$  os spins atômicos começam a se alinhar, por essa ser a configuração que minimiza a energia livre de Helmholtz  $F = E - TS$  do sistema. Conforme a diminuição da temperatura progride tal regime irá apresentar a formação de domínios, dando origem às interações de longo alcance entre os spins. Tendo isso em mente, uma mudança de  $\vec{m}(x) \rightarrow \vec{\mu} + \vec{\sigma}(x)$  pode ser feita para facilitar a análise desse sistema, onde  $\vec{\mu}$  é o valor esperado de  $\vec{m}(x)$  no vácuo ( $T = 0$ ) e  $\vec{\sigma}(x)$  representam excitações em torno do mínimo. Com base nisso e sabendo que para altas temperaturas o sistema possui uma simetria de rotação, conforme o decréscimo da temperatura a simetria é quebrada espontaneamente devido termo  $\vec{\mu}$  apontar para uma direção específica.

## 3.2 Quebra Espontânea de Simetria Discreta

Para visualizar o fenômeno da quebra de simetria, agora a partir de uma determinada densidade lagrangiana, será tomada o caso mais simples possível e assim ir subindo os degraus de acordo com o método cartesiano. Tomando a lagrangiana de um campo escalar (5):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4, \quad (3.1)$$

é possível resgatar a discussão sobre o caso do ferromagnetismo. Isso porquê essa lagrangiana pode ser usada para descrever sistemas ferromagnéticos próximos à temperatura crítica. Sendo assim, os parâmetros  $\lambda$  e  $m^2$  devem depender da temperatura e ao julgar que essa quebra deva acontecer na temperatura crítica  $T_c$ , o fator  $m^2$  deve ser da forma

$$m^2 = \gamma(T - T_c), \quad (3.2)$$

com  $\gamma$  sendo uma constante. A atribuição de uma forma para  $m^2$  surge a partir de uma necessidade de analisar o comportamento do potencial para diferentes temperaturas. Por exemplo, para  $T < T_c$  o resultado direto é  $m^2 < 0$ , assim, o regime de alinhamento de spin começa a surgir. Note que  $m^2$  é um parâmetro importante para quebra de simetria, pois quando  $m^2 < 0$ , há uma transformação do potencial que havia um mínimo estável em  $\varphi = 0$ , passa a ser um máximo local e ainda surge dois possíveis mínimos.

Feito essas considerações, é de interesse que a lagrangiana (3.1) seja agora analisada do ponto de vista de uma da descrição de um campo quântico e relativístico simples. Sendo assim, é importante obter como o campo se comporta sobre pequenas perturbações em torno do mínimo real, pois, ao realizar a mudança  $m^2 \rightarrow -m^2$ , resulta em

$$V(\varphi) = -\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \quad (3.3)$$

Cujo os mínimos e o máximo locais podem ser encontrados através das seguintes derivadas

$$\frac{dV}{d\varphi} = \frac{\lambda}{3!}\varphi^3 - m^2\varphi = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2V}{d\varphi^2} = \frac{\lambda}{2}\varphi^2 - m^2. \quad (3.4)$$

Assim, enquanto o máximo local é dado por  $\varphi = 0$ , os mínimos podem ser escritos como

$$\langle 0|\varphi|0\rangle = \pm\sqrt{\frac{6}{\lambda}}m = \pm\nu, \quad (3.5)$$

em que  $\langle 0|\varphi|0\rangle$  representa o valor esperado do campo  $\varphi$  no vácuo. Dessa forma, é notável que existem dois mínimos que estão relacionados pela transformação  $\varphi \rightarrow -\varphi$  e também que a lagrangiana (3.1) é invariante sobre a simetria  $Z_2$ , mas o estado fundamental não, então é dito que a simetria foi espontaneamente quebrada. Isso se deve ao fato de que durante a quebra de simetria apenas um dos mínimos equivalentes  $\langle 0_+|\varphi|0_+\rangle = \nu$  ou  $\langle 0_-|\varphi|0_-\rangle = -\nu$  deve ser escolhido.

Outro ponto importante na quebra de simetria é reconhecer qual termo na lagrangiana representa a massa, ou até mesmo se se trata de uma lagrangiana com campos massivos ou não. Para isso, basta analisar se existe um termo do tipo  $\alpha^2\varphi^2$ . Por exemplo,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \ln(1 - \alpha\varphi), \quad (3.6)$$

parece representar um campo não massivo como o do fóton, entretanto, ao expandir a parte de interação da lagrangiana (1) é possível ver que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \alpha\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2\varphi^2 - \frac{1}{3}\alpha^3\varphi^3 - O(\varphi^4). \quad (3.7)$$

Isso surge facilmente a partir da série geométrica ( $|\alpha\varphi| < 1$ )

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha x)^n = \frac{1}{1 - \alpha x} = -\frac{1}{\alpha} \frac{d}{dx} \ln(1 - \alpha x) \rightarrow \ln(1 - \alpha x) = -\alpha \int \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha x)^n dx. \quad (3.8)$$

Desse modo, é possível concluir que a equação (3.7) representa uma lagrangiana massiva de massa  $\alpha = m$ . Então, caso não haja um termo de massa explícito uma expansão é necessária para identificá-lo. Levando isso em consideração, é importante que seja analisado uma pequena variação do campo em torno do mínimo real, descobrindo como a lagrangiana comporta-se sobre tal perturbação, análogo ao que foi mencionado na introdução para a magnetização. Dessa forma, considerando a lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4, \quad (3.9)$$

que comparado à lagrangiana anterior se difere apenas no termo  $4! \rightarrow 4$ . É tomada uma perturbação  $\xi(x)$  em torno, por exemplo, do mínimo  $\langle 0_+|\varphi|0_+ \rangle = \nu$  análogo ao que foi feito para a magnetização

$$\varphi(x) = \nu + \phi(x). \quad (3.10)$$

Então, reescrevendo a lagrangiana da equação em termos do novo campo  $\phi(x)$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2(\nu^2 + 2\nu\phi + \phi^2) - \frac{1}{4}\lambda(\nu^4 + 4\nu^3\phi + 6\nu^2\phi^2 + 4\nu\phi^3 + \phi^4) \quad (3.11)$$

Deve-se lembrar que  $m^2 = -\lambda\nu^2$ . Também é importante frisar que  $\nu$  é apenas uma constante, que nesse contexto pode ser removida da lagrangiana visto que as constantes não alteram a equação de campo do sistema. Com base nessas considerações podemos reescrever  $\mathcal{L}$  como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \lambda\nu^3\phi + \frac{1}{2}\lambda\nu^2\phi^2 - \lambda\nu^3\phi - \frac{3}{2}\lambda\nu^2\phi^2 - \lambda\nu\phi^3 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4. \quad (3.12)$$

Portanto, simplificando os termos chegamos na forma final de  $\mathcal{L}$  para esse caso

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \lambda\nu^2\phi^2 - \lambda\nu\phi^3 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad (3.13)$$

no qual identificamos o primeiro termo como representante da energia cinética, enquanto o segundo termo possui termos quadráticos, então pode ser identificado como sendo o termo de massa, de modo que quando comparado com a lagrangiana de Klein-Gordon vemos que  $m = \sqrt{2\lambda\nu}$ . Enquanto os termos cúbicos e quárticos representam os termos de auto-interação de  $\phi(x)$ .

### 3.3 Quebra de Simetria Global

Dando continuidade nos estudos de quebra de simetria, é muito importante destacar a quebra de simetria de um campo escalar complexo com auto-interação do tipo  $\lambda\varphi^4$  (6), particularmente pela similaridade e introdução que isso permite realizar ao processo de quebra de simetria no setor eletrofraco, conforme veremos mais adiante. Essencialmente a quebra de simetria espontânea, como mencionado, ocorre quando o vácuo real da teoria não compartilha da simetria existente na lagrangiana. Entretanto, como já explorado no caso da lagrangiana de Dirac, para as simetrias globais o fator de deslocamento de fase não depende das coordenadas do espaço tempo enquanto nas locais isso não é verdade. Como exemplo, tome a lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2(\phi^* \phi) - \lambda(\phi^* \phi)^2, \quad (3.14)$$

em que  $\phi$  está representando um campo escalar complexo e  $\phi^*$  seu complexo conjugado. Veja, ao realizar uma transformação do tipo  $\mathcal{L} \rightarrow e^{i\theta} \mathcal{L}$ , no qual  $\theta$  não depende das coordenadas do quadri-espaço, resulta na mesma lagrangiana original, pois as componentes das exponenciais cancelam com o seu complexo conjugado. Por outro lado, se analisarmos os mínimos dessa teoria vamos ver algumas particularidades, para isso basta tomar

$$V = -\mathcal{L}_{int} = m^2(\phi^* \phi) + \lambda(\phi^* \phi)^2 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \phi} = m^2 \phi^* + 2\lambda \phi^* \phi \phi^* = 0. \quad (3.15)$$

Consequentemente, para o caso em que  $\phi = \phi^* \neq 0$  e que o parâmetro de massa  $m^2$  seja negativo

$$m^2 = -2\lambda|\phi|^2 \Rightarrow |\phi| = \sqrt{-\frac{m^2}{2\lambda}} = \nu. \quad (3.16)$$

Então, sabendo que o potencial para essa teoria é do tipo chapéu mexicano, os mínimos serão dados por um círculo de raio  $\nu$ . De modo que como já mencionada, aqui também os campos físicos são excitações quantizadas em torno do valor de vácuo esperado do campo  $\langle 0|\varphi|0\rangle = \nu$  e não do máximo local  $\Phi = 0$ .

Agora, tendo isso em vista, é conveniente que seja feita uma parametrização, dada as condições de simetria da forma

$$\phi = \rho(x)e^{i\xi(x)}, \quad (3.17)$$

que para satisfazer o valor de vácuo esperado deve-se ter as condições  $\langle 0|\rho|0\rangle = \nu$  e  $\langle 0|\xi|0\rangle = 0$ , onde  $\rho$  e  $\xi$  são ambos campos escalares reais. Nesse contexto é interessante notar que é possível realizar translações em  $\rho(x)$  para analisar isso em termos das modificações na lagrangiana. Assim, tome

$$\rho'(x) = \rho(x) + \nu, \quad (3.18)$$

que levando na lagrangiana (3.14), o resultado direto fica

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= \{(\partial^\mu(\rho'(x) + \nu)e^{-i\xi(x)})\}\{(\partial_\mu(\rho'(x) + \nu)e^{i\xi(x)})\} \\
&\quad - m^2(\rho'(x) + \nu)e^{-i\xi(x)}(\rho'(x) + \nu)e^{i\xi(x)} \\
&\quad - \lambda(\rho'(x) + \nu)^2 e^{-2i\xi(x)}(\rho'(x) + \nu)^2 e^{2i\xi(x)} \\
&= \mathfrak{L}_{kin} - m^2(\rho'^2 + 2\nu\rho' + \nu^2) - \lambda(\rho' + \nu)^4,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

onde resultados bem interessantes podem ser extraídos da expansão desse último termo, pois resulta em:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= \{(\partial^\mu(\rho'(x) + \nu)e^{-i\xi(x)})\}\{(\partial_\mu(\rho'(x) + \nu)e^{i\xi(x)})\} - m^2\rho'^2 - m^2\nu^2 \\
&\quad - 2m^2\rho'\nu - \lambda\rho'^4 - 4\lambda\rho'^3\nu - 6\lambda\rho'^2\nu^2 - 4\lambda\rho'\nu^3 - \lambda\nu^4,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

mas como  $m^2 = -2\lambda\nu^2$ , pode-se se reescrever (3.20) como

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= \{(\partial^\mu(\rho'(x) + \nu)e^{-i\xi(x)})\}\{(\partial_\mu(\rho'(x) + \nu)e^{i\xi(x)})\} + 2\lambda\nu^2\rho'^2 \\
&\quad + 2\lambda\nu^4 + 4\lambda\nu^2\rho'\nu - \lambda\rho'^4 - 4\lambda\rho'^3\nu - 6\lambda\rho'^2\nu^2 - 4\lambda\rho'\nu^3 - \lambda\nu^4 \\
&= \{(\partial^\mu(\rho'(x) + \nu)e^{-i\xi(x)})\}\{(\partial_\mu(\rho'(x) + \nu)e^{i\xi(x)})\} \\
&\quad + \lambda\nu^2 - \lambda\rho'^4 - 4\lambda\rho'^3\nu - 4\lambda\rho'^2\nu^2,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

que de acordo com a classificação vista anteriormente não há nenhum termo de massa para o campo  $\xi(x)$ , por outro lado esse deslocamento feito em  $\rho$  dando origem à  $\rho'$  deve um custo energético por se tratar de uma excitação na direção radial do potencial(6).

Perceba que como resultado há um termo de massa  $m_{\rho'}^2 = 4\lambda\nu$ . Mas, ao longo de perturbações em  $\xi(x)$  não há gastos energéticos porque os mínimos estão relacionados por rotação. A quebra de simetria ocorre pela escolha espontânea de um desses mínimos. Porém, note que como não há gasto de energia para perturbações dessa componente  $E \rightarrow 0$  de modo que para comprimentos de onda elevados e lembrando que  $\lambda^{-1} \propto p$ , a massa de repouso dessa partícula de acordo com  $E = \sqrt{m^2 + p^2}$  deve ser nula. Tal partícula é conhecida como bóson de Goldstone.

### 3.4 Quebra de Simetria Local

Esse caso é um caso especial para o trabalho, especialmente devido a quebra de simetria que ocorreu durante a era eletrofraca do modelo padrão cuja lagrangiana é definida essencialmente para que seja invariante sobre transformação de fase local específica, como será vista adiante. Para exemplificar um caso desse tipo, é possível exigir que a lagrangiana de um campo escalar complexo seja invariante sobre transformação do grupo U(1). Isso é um procedimento análogo ao que foi visto para lagrangiana de Dirac, onde surge a interação entre os férmions e o campo eletromagnético justamente exigindo uma invariância por deslocamento de fase local. Da mesma forma que foi feita lá, para

que essa invariância seja possível deve-se considerar a lagrangiana que é invariante por transformação U(1) seguida por uma transformação de gauge(6):

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu + ieA^\mu)^* \phi^* (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.22)$$

que essencialmente, mantém os mesmo termos de interação da questão anterior. Portanto a última análise ainda continua válida, de modo que ainda seria um truque interessante analisar esse campo complexo através da parametrização

$$\phi = H(x) e^{i\xi(x)}. \quad (3.23)$$

A partir disso, a ideia é seguir os passos da secção anterior. Então tomando uma mudança de fase local  $\phi \rightarrow H(x) e^{i(\theta(x)+\xi(x))}$ , cuja diferença do caso anterior é que  $\theta$  depende das coordenadas do espaço-tempo, é visto que para uma escolha estratégica de  $\xi(x) = \theta(x)$  a parte complexa desaparece. Essa escolha só é possível pelo princípio da liberdade de gauge, cuja consequência é  $A^\mu \rightarrow A'^\mu$ . Dessa forma, como já vimos qual é o valor esperado de vácuo desse campo, basta tomar uma perturbação dele em torno do vácuo  $H(x) = h(x) + \nu$ . Com isso a nova lagrangiana fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\partial^\mu + ieA'^\mu)^* (h + \nu) (\partial_\mu + ieA'_\mu) (h + \nu) \\ & - m^2 (h + \nu)^2 - \lambda (h + \nu)^4 - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Bastando expandir os termos quadráticos e quárticos e também lembrar que  $m^2 = -2\lambda\nu^2$  para ver as simplificações destacadas na equação:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial^\mu h \partial_\mu h - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + e^2 \nu^2 A'^\mu A'_\mu - m^2 \nu^2 - \lambda \nu^4 - \overbrace{(2\nu m^2 + 4\lambda\nu^3)}^0 h \\ & - \underbrace{(m^2 + 6\lambda\nu^2)}_{4\lambda\nu^2} h^2 - 4\lambda\nu h^3 - \lambda h^4 + 2e^2 \nu A'^\mu A'_\mu h + e^2 A'^\mu A'_\mu h^2, \end{aligned} \quad (3.25)$$

cuja massa do campo de calibre  $A'_\mu$  e  $m_{A'} = e\nu$  e a massa do campo  $h(x)$  é  $m_h = 2\nu\sqrt{\hbar}$ . Note que inicialmente o campo de  $A'_\mu$  era não massivo. Esse mecanismo de ganho de massa após uma quebra espontânea de simetria é conhecido como *Mecanismo de Higgs* e  $h(x)$  é o *campo de Higgs*, que será melhor explorado na próxima secção.

### 3.5 Quebra de Simetria no setor $SU(2) \times U(1)_Y$

O setor eletrofraco do modelo padrão  $SU(2) \times U(1)_Y$  é o responsável por unificar duas interações fundamentais da natureza, a interação fraca e a eletromagnética (7, 8, 5, 9). Essa unificação acontece acima um limite de energia no universo cujas condições que as permitem levam a acreditar que a dissociação dessas forças por uma quebra espontânea



de simetria ocorreu logo após o big-bang. Para melhor entender como se dá essa relação, é possível analisar a lagrangiana desse setor

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (W_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{4} B_{\mu\nu}^2 + \underbrace{(D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) + m^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2}_{\mathcal{L}_{\text{higgs}}}, \quad (3.26)$$

em que há os termos  $W_\mu^a$  e  $B_\mu$ , com  $a = 1, 2, 3$ , representa respectivamente os bósons de calibre  $SU(2)$  e de Hipercarga, com os campos dados por

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g \varepsilon^{amn} W_\mu^m W_\nu^n, \quad B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (3.27)$$

É importante notar que a segunda parte da equação (3.26), refere-se ao setor de Higgs. Onde a derivada covariante acopla o campo de Higgs com os bósons de calibre. Considerando que  $\sigma^a$  são os geradores da simetria  $SU(2)$  com constante de acoplamento  $g$ , enquanto  $g'$  é a constante da simetria  $U(1)_Y$ .

$$D_\mu \rightarrow \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} g W_\mu^a \sigma^a - \frac{i}{2} g' B_\mu \right) \quad (3.28)$$

O campo de Higgs  $\Phi$  é o responsável por gerar massas aos bósons de calibre dessa interação através de uma quebra espontânea de simetria (ssb) gerando um valor esperado de vácuo diferente não nulo  $v$ . O campo  $\Phi$  é definido em função de outros quatro campos

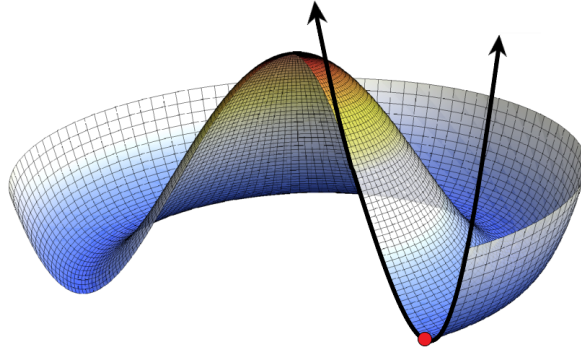


Figura 3.1 – Potencial de Higgs com distribuição de cores qualitativas, cujo mínimo escolhido indicado pelo ponto vermelho surge na condição em que  $m^2 < 0$ , quebrando espontaneamente a simetria. De modo que a escolha por um calibre unitário permite que seja analisada apenas excitações quantizadas acima do estado de vácuo real apenas na direção radial como mostra as flechas pretas, dado que existem infinitos vácuos degenerados relacionados por simetria de rotação.

escalares, dois para parte carregada e dois para parte neutra. De modo que depois da quebra de simetria é possível escolher esse campo como a parte carregada  $\phi^+$  e a nula  $\phi^0$  enquanto a parte neutra representa uma perturbação por um campo real  $h(x)$  em torno do mínimo:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ssb}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Com isso, a parte escalar da lagrangiana pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{higgs} &= (\partial_\mu \Phi - igW_\mu^a \tau^a \Phi - \frac{1}{2}ig' B_\mu \Phi)^\dagger (\partial_\mu \Phi - igW_\mu^a \tau^a \Phi - \frac{1}{2}ig' B_\mu \Phi) + m^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ &= \left| (\partial_\mu - \frac{i}{2}g' B_\mu) - \frac{i}{2}g(W_\mu^1 \sigma^1 + W_\mu^2 \sigma^2 + W_\mu^3 \sigma^3) \Phi \right|^2 + m^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2,\end{aligned}$$

que pode ser reescrito na forma matricial quando substituimos as matrizes de Pauli  $\sigma^a$  como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{higgs} &= \left| \left[ \begin{pmatrix} (\partial_\mu - \frac{i}{2}g' B_\mu) & 0 \\ 0 & (\partial_\mu - \frac{i}{2}g' B_\mu) \end{pmatrix} - \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \right] \Phi \right|^2 - V(\Phi) \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\partial_\mu - \frac{i}{2}g' B_\mu) - \frac{ig}{2}W_\mu^3 & -\frac{ig}{2}(W_\mu^3 - iW_\mu^2) \\ -\frac{ig}{2}(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & (\partial_\mu - \frac{i}{2}g' B_\mu) + \frac{ig}{2}W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + h(x) \end{pmatrix} \right|^2 - V(\Phi).\end{aligned}$$

Então, realizando a multiplicação entre as matrizes e lembrando que  $|D_\mu|^2 = (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)$  chega-se em

$$\mathcal{L}_h = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{g}{8}(W_\mu^1 + iW_\mu^2)(W_\mu^1 - iW_\mu^2)(\phi_0 + h)^2 + \frac{1}{8}(gW_\mu^3 - gB_\mu)^2(\phi_0 + h)^2 - V(\Phi),$$

cujos segundo termo da equação anterior possibilita a definição dos bósons que possuem carga

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2). \quad (3.30)$$

Um fato importante a se considerar nesse ponto do desenvolvimento é que não foi considerado como a interação eletromagnética é unificada com a força fraca. Essa relação se dá através da mistura de Weiberg-Salam:

$$\begin{aligned}A_\mu &= \sin\theta_w W_\mu^3 + \cos\theta_w B_\mu \\ Z_\mu &= \cos\theta_w W_\mu^3 - \sin\theta_w B_\mu\end{aligned} \quad (3.31)$$

que por definição:  $\tan\theta_w = g'/g$ . De maneira a poder reescrever a lagrangiana de Higgs expandindo os termos quadráticos e já considerando as equações (3.30) e (3.31), resultando em

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{higgs} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2 - \lambda v h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 + \frac{1}{4}g^2 v^2 W_\mu^- W^{\mu+} + \frac{1}{2}g^2 v W_\mu^- W^{\mu+} h \\ &\quad + \frac{g^2 v^2}{8\cos^2\theta_w} Z_\mu Z^\mu + \frac{g^2}{4\cos^2\theta_w} Z_\mu Z^\mu v h + \frac{g^2}{8\cos^2\theta_w} Z_\mu Z^\mu h^2 + \frac{1}{4}g^2 W_\mu^- W^{\mu+} h^2.\end{aligned} \quad (3.32)$$

Claramente, a lagrangiana (3.32) fornece a forma como os bósons de calibre interagem com o bóson de Higgs, além dos termos de massa dos bósons de calibre de surge após a quebra espontânea de simetria, chamado de mecanismo de Higgs. Um ponto interessante de se notar nessa lagrangiana é os termos de auto-interação de 3 e 4 pernas que aparecem para o campo de Higgs físico, pois, ao contrario dos fótons que quando se cruzam em dois feixes luminosos não interagem, o campo de Higgs possui essa característica de interagir entre sí.

## 3.6 lagrangiana de calibre

Para obter a lagrangiana de calibre, com base em (7, 8, 5, 9), e principalmente (10), basta expandir os termos de calibre da lagrangiana (3.26) como:

$$\mathfrak{L}_g = -\frac{1}{4} \left[ W_{\mu\nu}^1 W_1^{\mu\nu} + W_{\mu\nu}^2 W_2^{\mu\nu} + W_{\mu\nu}^3 W_3^{\mu\nu} + (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) \right]. \quad (3.33)$$

Assim, basta tomar as componentes individuais de  $W_{\mu\nu}^a$ , dada por

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\varepsilon^{amn} W_\mu^m W_\nu^n,$$

e multiplicá-las por suas respectivas componentes contravariante. Resultando em

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_G = & -\frac{1}{4} \left[ (\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1)(\partial^\mu W_1^\nu - \partial^\nu W_1^\mu) + g(\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1)(W_2^\mu W_3^\nu - W_3^\mu W_2^\nu) \right. \\ & + g(W_\mu^2 W_\nu^3 - W_\mu^3 W_\nu^2)(\partial^\mu W_1^\nu - \partial^\nu W_1^\mu) + g^2(W_\mu^2 W_\nu^3 - W_\mu^3 W_\nu^2)(W_2^\mu W_3^\nu - W_3^\mu W_2^\nu) \\ & + (\partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2)(\partial^\mu W_2^\nu - \partial^\nu W_2^\mu) + g(\partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2)(W_3^\mu W_1^\nu - W_1^\mu W_3^\nu) \\ & + g(W_\mu^3 W_\nu^1 - W_\mu^1 W_\nu^3)(\partial^\mu W_2^\nu - \partial^\nu W_2^\mu) + g^2(W_\mu^3 W_\nu^1 - W_\mu^1 W_\nu^3)(W_3^\mu W_1^\nu - W_1^\mu W_3^\nu) \\ & + (\partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3)(\partial^\mu W_3^\nu - \partial^\nu W_3^\mu) + g(\partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3)(W_1^\mu W_2^\nu - W_2^\mu W_1^\nu) \\ & + g(W_\mu^1 W_\nu^2 - W_\mu^2 W_\nu^1)(\partial^\mu W_3^\nu - \partial^\nu W_3^\mu) + g^2(W_\mu^1 W_\nu^2 - W_\mu^2 W_\nu^1)(W_1^\mu W_2^\nu - W_2^\mu W_1^\nu) \\ & \left. + (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) \right], \end{aligned} \quad (3.34)$$

que pode ser simplificada quando a reescrevemos como:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_G = & -\frac{1}{4} \left[ (\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1)(\partial^\mu W_1^\nu - \partial^\nu W_1^\mu) + 2g(\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1)(W_2^\mu W_3^\nu - W_3^\mu W_2^\nu) \right. \\ & + g^2(W_\mu^2 W_\nu^3 - W_\mu^3 W_\nu^2)(W_2^\mu W_3^\nu - W_3^\mu W_2^\nu) + (\partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2)(\partial^\mu W_2^\nu - \partial^\nu W_2^\mu) \\ & + 2g(\partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2)(W_3^\mu W_1^\nu - W_1^\mu W_3^\nu) + g^2(W_\mu^3 W_\nu^1 - W_\mu^1 W_\nu^3)(W_3^\mu W_1^\nu - W_1^\mu W_3^\nu) \\ & + (\partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3)(\partial^\mu W_3^\nu - \partial^\nu W_3^\mu) + 2g(\partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3)(W_1^\mu W_2^\nu - W_2^\mu W_1^\nu) \\ & \left. + g^2(W_\mu^1 W_\nu^2 - W_\mu^2 W_\nu^1)(W_1^\mu W_2^\nu - W_2^\mu W_1^\nu) + (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) \right]. \\ \Rightarrow \mathfrak{L}_G = & -\frac{1}{4}(A + 2gB + g^2Z), \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde A, B e C foram definidos da seguinte forma

$$A = \underbrace{(\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1)^2}_{A_1} + \underbrace{(\partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2)^2}_{A_2} + \underbrace{(\partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3)^2}_{A_3} + \underbrace{(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2}_{A_4}. \quad (3.36)$$

Portanto, primeiramente podemos calcular cada um desses termos individualmente e depois reagrupar. Começando por

$$\begin{aligned} A_1 = & \partial_\mu W_\nu^1 \partial^\mu W_1^\nu - \partial_\mu W_\nu^1 \partial^\nu W_\mu^1 - \partial^\nu W_\mu^1 \partial^\mu W_1^\nu + \partial_\nu W_\mu^1 \partial^\nu W_1^\mu \\ = & 2(\partial_\mu W_\nu^1 \partial^\mu W_1^\nu - \partial_\mu W_\nu^1 \partial^\nu W_\mu^1), \end{aligned} \quad (3.37)$$

de modo que quando é substituído  $W_\mu^1$  pelos bósons  $W_\mu^+$  e  $W_\mu^-$  que aparece naturalmente da definição (3.30) que

$$W_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ + W_\mu^-), \quad W_\mu^2 = \frac{1}{i\sqrt{2}}(W_\mu^- - W_\mu^+) \quad (3.38)$$

cuja a substituição direta na forma simplificada de (3.37), fornece

$$\begin{aligned} A_1 &= 2 \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu (W_\nu^- + W_\nu^+) \partial^\nu (W^{-\nu} + W^{+\mu}) - \frac{1}{2} \partial_\mu (W_\nu^- + W_\nu^+) \partial^\nu (W^{-\nu} + W^{+\mu}) \right] \\ \Rightarrow A_1 &= \partial_\mu W_\nu^- \partial^\mu W^{-\nu} + \partial_\mu W_\nu^- \partial^\mu W^{+\nu} + \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\mu W^{-\nu} + \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\mu W^{+\nu} - \partial_\mu W_\nu^- \partial^\nu W^{-\mu} \\ &\quad - \partial_\mu W_\nu^- \partial^\nu W^{+\mu} - \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\nu W^{-\mu} - \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\nu W^{+\mu} \\ &= (\partial_\mu W_\nu^- + \partial_\mu W_\nu^+) \left[ \underbrace{(\partial^\mu W^{-\nu} - \partial^\nu W^{-\mu})}_{W^{-\mu\nu}} + \underbrace{(\partial^\mu W^{+\nu} - \partial^\nu W^{+\mu})}_{W^{+\mu\nu}} \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

De maneira análoga, pode-se escrever

$$A_2 = 2(\partial_\mu W_\nu^2 \partial^\mu W_2^\nu - \partial_\mu W_\nu^2 \partial^\nu W_2^\mu), \quad (3.40)$$

que quando considerado a definição (3.38) e substituída em (3.40), chega-se em

$$\begin{aligned} A_2 &= 2 \left[ -\frac{1}{2} \partial_\mu (W_\nu^- - W_\nu^+) \partial^\mu (W^{-\nu} - W^{+\nu}) + \frac{1}{2} \partial_\mu (W_\nu^- - W_\nu^+) \partial^\nu (W^{-\mu} - W^{+\mu}) \right] \\ &= -\partial_\mu W_\nu^- \partial^\mu W^{-\nu} + \partial_\mu W_\nu^- \partial^\mu W^{+\nu} + \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\mu W^{-\nu} - \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\mu W^{+\nu} \\ &\quad + \partial_\mu W_\nu^- \partial^\nu W^{-\mu} - \partial_\mu W_\nu^- \partial^\nu W^{+\mu} - \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\nu W^{-\mu} + \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\nu W^{+\mu}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

bastando agrupar os termos que começam com  $\partial_\mu W_\nu^-$  e  $\partial_\mu W_\nu^+$  e deixá-los em evidência, de modo a resultando em

$$\begin{aligned} A_2 &= \partial_\mu W_\nu^- [(\partial^\mu W^{+\nu} - \partial^{+\nu} W^{+\mu}) - (\partial^\mu W^{-\nu} - \partial^\nu W^{-\mu})] \\ &\quad + \partial_\mu W_\nu^+ [(\partial^\mu W^{-\nu} - \partial^\nu W^{-\mu}) - (\partial^\mu W^{+\nu} - \partial^{+\nu} W^{+\mu})] \\ \Rightarrow A_2 &= \partial_\mu W_\nu^- (W^{+\mu\nu} - W^{-\mu\nu}) + \partial_\mu W_\nu^+ (W^{-\mu\nu} - W^{+\mu\nu}). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Agora partindo para  $A_3$ , tem-se que

$$A_3 = 2(\partial_\mu W_\nu^3 \partial^\mu W_3^\nu - \partial_\mu W_\nu^3 \partial^\nu W_3^\mu), \quad (3.43)$$

e lembrando que devem se ser obedecidas as equações:

$$\boxed{\begin{aligned} W_\mu^3 &= \sin\theta_w A_\mu + \cos\theta_w Z_\mu \\ B_\mu &= \cos\theta_w A_\mu - \sin\theta_w Z_\mu \end{aligned}}$$

chega-se em,

$$\begin{aligned} A_3 &= 2 \left[ (\partial_\mu A_\nu \sin\theta_w + \partial_\mu Z_\nu \cos\theta_w) (\partial^\mu A^\nu \sin\theta_w + \partial^\mu Z^\nu \cos\theta_w) \right. \\ &\quad \left. - (\partial_\mu A_\nu \sin\theta_w + \partial_\mu Z_\nu \cos\theta_w) (\partial^\nu A^\mu \sin\theta_w + \partial^\nu Z^\mu \cos\theta_w) \right], \end{aligned} \quad (3.44)$$

de modo a fazer uma expansão desses termos e reagrupar de acordo com as funções de  $\theta_w$  que os multiplicam:

$$\begin{aligned}
A_3 &= 2 \left[ (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \sin^2 \theta_w + \partial_\mu A_\nu \partial^\mu Z^\nu \sin \theta_w \cos \theta_w + \partial_\mu Z_\nu \partial^\mu A^\nu \cos \theta_w \sin \theta_w \right. \\
&\quad \left. + \partial_\mu Z_\nu \partial^\mu Z^\nu \cos^2 \theta_w) - (\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \sin^2 \theta_w + \partial_\mu A_\nu \partial^\nu Z^\mu \sin \theta_w \cos \theta_w \right. \\
&\quad \left. + \partial_\mu Z_\nu \partial^\nu A^\mu \cos \theta_w \sin \theta_w + \partial_\mu Z_\nu \partial^\nu Z^\mu \cos^2 \theta_w) \right] \\
&= 2(\partial_\nu A_\nu \partial^\mu Z^\mu + \partial_\nu Z_\nu \partial^\mu A^\mu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu Z^\mu - \partial_\mu Z_\nu \partial^\nu A^\mu) \cos \theta_w \sin \theta_w \\
&\quad + 2 \underbrace{(\partial_\nu A_\nu \partial^\mu A^\mu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu)}_{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}} \sin^2 \theta_w + 2 \underbrace{(\partial_\nu Z_\nu \partial^\mu Z^\mu - \partial_\mu Z_\nu \partial^\nu Z^\mu)}_{Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu}} \cos^2 \theta_w.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Note que surge de modo natural os termos cinéticos do campo de  $A_\mu$  e  $Z_\mu$ . De modo que um cálculo análogo deve ser feito para

$$A_4 = 2(\partial_\mu B_\nu \partial^\mu B^\nu - \partial_\mu B_\nu \partial^\nu B^\mu), \tag{3.46}$$

dessa forma, ao lembrar do formato de  $B_\mu$  a ser obedecido, surge

$$\begin{aligned}
A_4 &= 2 \left[ (\partial_\mu A_\nu \cos \theta_w - \partial_\mu Z_\nu \sin \theta_w) (\partial^\mu A^\nu \cos \theta_w - \partial^\mu Z^\nu \sin \theta_w) \right. \\
&\quad \left. - (\partial_\mu A_\nu \cos \theta_w - \partial_\mu Z_\nu \sin \theta_w) (\partial^\nu A^\mu \cos \theta_w - \partial^\nu Z^\mu \sin \theta_w) \right] \\
&= 2 \left[ \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \cos^2 \theta_w - \partial_\mu A_\nu \partial^\mu Z^\nu \sin \theta_w \cos \theta_w - \partial_\mu Z_\nu \partial^\mu A^\nu \cos \theta_w \sin \theta_w \right. \\
&\quad \left. + \partial_\mu Z_\nu \partial^\mu Z^\nu \sin^2 \theta_w - (\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \cos^2 \theta_w - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu Z^\mu \sin \theta_w \cos \theta_w \right. \\
&\quad \left. + \partial_\mu Z_\nu \partial^\nu A^\mu \cos \theta_w \sin \theta_w + \partial_\mu Z_\nu \partial^\nu Z^\mu \sin^2 \theta_w) \right].
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Por fim, o resultado fica dado por

$$\begin{aligned}
A_4 &= 2(-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu Z^\nu - \partial_\mu Z_\nu Z_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu A_\nu \partial^\nu Z^\mu + \partial_\mu Z_\nu \partial^\nu A^\mu) \sin \theta_w \cos \theta_w \\
&\quad + F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \cos^2 \theta_w + Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} \sin^2 \theta_w,
\end{aligned} \tag{3.48}$$

o que conclui o cálculo dos termos quadráticos de  $\mathcal{L}_G$ . O que viabiliza o prosseguimento para os termos  $B = B_1 + B_2 + B_3$ , com

$$B_1 = (\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1)(W_2^\mu W_3^\nu - W_3^\mu W_2^\nu), \tag{3.49}$$

$$B_2 = (\partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2)(W_3^\mu W_1^\nu - W_1^\mu W_3^\nu), \tag{3.50}$$

$$B_3 = (\partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3)(W_1^\mu W_2^\nu - W_2^\mu W_1^\nu). \tag{3.51}$$

Começando por  $B_1$ , é possível expandir os termos  $W_\mu^1$  e  $W_\mu^1$  em termos das definições dadas por(3.38), gerando

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \partial_\mu (W_\mu^- + W_\mu^+) - \partial_\nu (W_\mu^- + W_\mu^+) \right] (W_2^\mu W_3^\nu - W_3^\mu W_2^\nu) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (W_{\mu\nu}^+ + W_{\mu\nu}^-) \underbrace{(W_2^\mu W_3^\nu - W_3^\mu W_2^\nu)}_{B_1'},
\end{aligned} \tag{3.52}$$

onde esse último termo multiplicativo pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
 B_1' &= \frac{-i}{\sqrt{2}} \left[ (W^{-\mu} - W^{+\mu})(\sin\theta_w A^\nu + \cos\theta_w Z^\nu) - (\sin\theta_w A^\mu + \cos\theta_w Z^\mu)(W^{-\nu} - W^{+\nu}) \right] \\
 \Rightarrow B_1 &= -\frac{i}{2} (W_{\mu\nu}^+ + W_{\mu\nu}^-) \left[ (W^{-\mu} - W^{+\mu})(\sin\theta_w A^\nu + \cos\theta_w Z^\nu) \right. \\
 &\quad \left. - (\sin\theta_w A^\mu + \cos\theta_w Z^\mu)(W^{-\nu} - W^{+\nu}) \right], \tag{3.53}
 \end{aligned}$$

seguindo a mesma linha de construção, chega-se em

$$\begin{aligned}
 B_2 &= -\frac{i}{2} (W_{\mu\nu}^+ - W_{\mu\nu}^-) \left[ (\sin\theta_w A^\mu + \cos\theta_w Z^\mu)(W^{-\nu} + W^{+\nu}) \right. \\
 &\quad \left. - (W^{-\mu} + W^{+\mu})(\sin\theta_w A^\nu + \cos\theta_w Z^\nu) \right]. \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

Agora, para finalizar os termos de B, deve-se analisar  $B_3$  como

$$\begin{aligned}
 B_3 &= (\partial_\mu A_\nu \sin\theta_w + \partial_\mu Z_\nu \cos\theta_w - \partial_\nu A_\mu \sin\theta_w - \partial_\nu Z_\mu \cos\theta_w) \\
 &\quad \times \frac{1}{2i} \left[ (W^{-\mu} + W^{+\mu})(W^{-\nu} - W^{+\nu})(W^{-\mu} - W^{+\nu}) \right. \\
 &\quad \left. - (W^{-\mu} - W^{+\mu})(W^{-\nu} + W^{+\nu}) \right], \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

é notável que surge os tensores de campo  $F_{\mu\nu}$  e  $Z_{\mu\nu}$  no primeiro termo em parenteses. Enquanto o termo em colchetes ainda pode ser expandido para fins de simplificação:

$$\begin{aligned}
 B_3 &= -\frac{i}{2} (F_{\mu\nu} \sin\theta_w + Z_{\mu\nu} \cos\theta_w) \left[ \cancel{W^{-\mu} W^{-\nu}} - W^{-\mu} W^{+\nu} + W^{+\mu} W^{-\nu} \right. \\
 &\quad \left. - \cancel{W^{+\mu} W^{+\nu}} - \cancel{W^{-\mu} W^{+\nu}} - W^{-\mu} W^{+\nu} + W^{+\mu} W^{-\nu} + \cancel{W^{+\mu} W^{+\nu}} \right] \\
 &= \frac{i}{2} (F_{\mu\nu} \sin\theta_w + Z_{\mu\nu} \cos\theta_w) (2W^{-\mu} W^{+\nu} - 2W^{+\mu} W^{-\nu}). \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

Mas estes tensores de campo são antisimétricos, ou seja

$$X_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} W^{+\mu} W^{-\nu} = F_{\nu\mu} W^{+\nu} W^{-\mu} = -F_{\mu\nu} W^{-\mu} W^{+\nu} = -X_{\mu\nu}, \tag{3.57}$$

e o mesmo vale para  $Z_{\mu\nu}$ . Como consequência disso surge que

$$B_3 = 2i(W^{-\mu} W^{+\nu})(F_{\mu\nu} \sin\theta_w + Z_{\mu\nu} \cos\theta_w), \tag{3.58}$$

o que finaliza o cálculo dos termos de B. Portanto, podemos somar  $B_1$  e  $B_2$  deixando em evidência os termos acompanhados de  $W_3^\mu$  e  $W_3^\nu$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 B_1 + B_2 &= -\frac{i}{2} (W_{\mu\nu}^+ + W_{\mu\nu}^-) \left[ (W^{-\mu} - W^{+\mu})(\sin\theta_w A^\nu + \cos\theta_w Z^\nu) - (\sin\theta_w A^\mu + \cos\theta_w Z^\mu) \right. \\
 &\quad \left. \times (W^{-\nu} - W^{+\nu}) \right] - \frac{i}{2} (W_{\mu\nu}^+ - W_{\mu\nu}^-) \left[ (\sin\theta_w A^\mu + \cos\theta_w Z^\mu)(W^{-\nu} + W^{+\nu}) \right. \\
 &\quad \left. - (W^{-\mu} + W^{+\mu})(\sin\theta_w A^\nu + \cos\theta_w Z^\nu) \right], \tag{3.59}
 \end{aligned}$$

Consequentemente,  $B_1 + B_2$  torna-se

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{2} \left\{ [(W_{\mu\nu}^+ + W_{\mu\nu}^-)(W^{-\mu} - W^{+\mu}) - (W_{\mu\nu}^+ - W_{\mu\nu}^-)(W^{-\mu} + W^{+\mu})](\sin\theta_w A^\nu + \cos\theta_w Z^\nu) \right. \\ & \quad \left. + [(W_{\mu\nu}^+ + W_{\mu\nu}^-)(W^{-\nu} - W^{+\nu}) - (W_{\mu\nu}^+ - W_{\mu\nu}^-)(W^{-\nu} + W^{+\nu})](\sin\theta_w A^\mu + \cos\theta_w Z^\mu) \right\} \\ & = -i \left\{ \underbrace{[(W_{\mu\nu}^+ + W_{\mu\nu}^-)(W^{-\nu} - W^{+\nu}) - (W_{\mu\nu}^+ - W_{\mu\nu}^-)(W^{-\nu} + W^{+\nu})]}_{\alpha} (\sin\theta_w A^\mu + \cos\theta_w Z^\mu), \right. \end{aligned}$$

onde nessa última passagem foi utilizado o fato de que os tensores de campo dessa equação são anti-simétricos. Para finalizar, basta expandir  $\alpha$  como

$$\begin{aligned} \alpha & = \cancel{W_{\mu\nu}^+ W^{-\nu}} - W_{\mu\nu}^+ W^{+\nu} + W_{\mu\nu}^- W^{-\nu} - \cancel{W_{\mu\nu}^- W^{+\nu}} \\ & \quad - \cancel{W_{\mu\nu}^+ W^{-\nu}} + W_{\mu\nu}^- W^{-\nu} - W_{\mu\nu}^+ W^{+\nu} + \cancel{W_{\mu\nu}^- W^{+\nu}} \\ & = 2W_{\mu\nu}^- W^{-\nu} - 2W_{\mu\nu}^+ W^{+\nu} \\ & \Rightarrow B_1 + B_2 = -2i(W_{\mu\nu}^- W^{-\nu} - W_{\mu\nu}^+ W^{+\nu})(\sin\theta_w A^\mu + \cos\theta_w Z^\mu), \end{aligned} \quad (3.60)$$

Por último temos os termos em  $Z$ , com  $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$ , com

$$Z_1 = (W_\mu^2 W_\nu^3 - W_\nu^3 W_\mu^2)(W_2^\mu W_3^\nu - W_3^\mu W_2^\nu), \quad (3.61)$$

$$Z_2 = (W_\mu^3 W_\nu^1 - W_\nu^1 W_\mu^3)(W_3^\mu W_1^\nu - W_1^\mu W_3^\nu), \quad (3.62)$$

$$Z_3 = (W_\mu^1 W_\nu^2 - W_\nu^2 W_\mu^1)(W_1^\mu W_2^\nu - W_2^\mu W_1^\nu). \quad (3.63)$$

Começando pelo cálculo de  $Z_1$ , que essencialmente é dado por  $(B_1')^2$ , resulta em

$$\begin{aligned} Z_1^1 & = -\frac{1}{2} [(W_\mu^- - W_\mu^+)(\sin\theta^w A_\nu + \cos\theta^w Z_\nu) - (\sin\theta^w A_\mu + \cos\theta^w Z_\mu)(W_\nu^- - W_\nu^+)] \\ & \quad \times [(W^{-\mu} - W^{+\mu})(\sin\theta_w A^\nu + \cos\theta_w Z^\nu) - (\sin\theta_w A^\mu + \cos\theta_w Z^\mu)(W^{-\nu} - W^{+\nu})], \end{aligned} \quad (3.64)$$

que é do tipo

$$\begin{aligned} Z_1' & = -\frac{1}{2} [(\alpha_\mu \beta_\nu - \beta_\mu \alpha_\nu)(\alpha^\mu \beta^\nu - \beta^\mu \alpha^\nu)] \\ & = -\frac{1}{2} (\alpha_\mu \beta_\nu \alpha^\mu \beta^\nu - \alpha_\mu \beta_\nu \beta^\mu \alpha^\nu - \beta_\mu \alpha_\nu \alpha^\mu \beta^\nu + \beta_\mu \alpha_\nu \beta^\mu \alpha^\nu) \\ & = \alpha_\mu \beta_\nu \beta^\mu \alpha^\nu - \alpha_\mu \beta_\nu \alpha^\mu \beta^\nu \\ & = \underbrace{\alpha_\mu \beta_\nu \beta^\mu \alpha^\nu}_{Z_1''} - (\alpha_\mu)^2 (\beta_\nu)^2, \end{aligned} \quad (3.65)$$

No caso em que seja considerado apenas 1+1 dimensões para o problema, note que

$$\begin{aligned} Z_1'' & = \sum_\nu \sum_\mu \alpha_\mu \beta_\nu \beta^\mu \alpha^\nu \\ & = \sum_\nu (\alpha_0 \beta_\nu \beta^0 \alpha^\nu + \alpha_1 \beta_\nu \beta^1 \alpha^\nu) \\ & \Rightarrow Z_1'' = \alpha_0 \beta_0 \beta^0 \alpha^0 + \alpha_0 \beta_1 \beta^0 \alpha^1 + \alpha_1 \beta_0 \beta^1 \alpha^0 + \alpha_1 \beta_1 \beta^1 \alpha^1 \\ & = \alpha_0 \beta^0 \alpha^0 \beta_0 + \alpha_0 \beta^0 \alpha^1 \beta_1 + \alpha_1 \beta^1 \alpha^0 \beta_0 + \alpha_1 \beta^1 \alpha^1 \beta_1 \\ & = (\alpha_0 \beta^0 + \alpha_1 \beta^1)(\alpha^0 \beta_0 + \alpha^1 \beta_1) \\ & = (\alpha_\mu \beta^\mu)^2, \end{aligned} \quad (3.66)$$

Portanto,  $Z'_1$  é do tipo

$$Z'_1 = (\alpha_\mu \beta^\mu)^2 - (\alpha_\mu)^2 (\beta_\nu)^2, \quad (3.67)$$

e por isso podemos escrever

$$\begin{aligned} Z_1 = & \left[ (W_\mu^- - W_\mu^+) (A^\mu \sin\theta_w + Z^\mu \cos\theta_w) \right]^2 \\ & - (W_\mu^- - W_\mu^+)^2 (A_\nu \sin\theta_w + Z_\nu \cos\theta_w)^2, \end{aligned} \quad (3.68)$$

de maneira totalmente análoga, vemos que

$$\begin{aligned} Z_2 = & (W_\mu^- + W_\mu^+)^2 (A_\nu \sin\theta_w + Z_\nu \cos\theta_w)^2 \\ & - \left[ (W^{-\mu} + W_{+\mu}) (A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.69)$$

E por fim, o último termo de  $Z$ , bastando substituir o que já foi calculado:

$$\begin{aligned} Z_3 = & (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+) (W^{-\mu} W^{+\nu} - W^{+\mu} W^{-\nu}) \\ = & W_\mu^+ W_\nu^- W^{-\mu} W^{+\nu} - W_\mu^+ W_\nu^- W^{+\mu} W^{-\nu} \\ & - W_\mu^- W_\nu^+ W^{-\mu} W^{+\nu} + W_\mu^- W_\nu^+ W^{+\mu} W^{-\nu} \\ = & 2(W_\mu^+ W_\nu^- W^{-\mu} W^{+\nu} - W_\mu^- W_\nu^+ W^{-\mu} W^{+\nu}), \end{aligned} \quad (3.70)$$

Agora basta somar alguns termos e realizar simplificações. Por exemplo, a soma de todos os termo em  $Z$ , fica

$$\begin{aligned} Z = & \left[ (W_\mu^- - W_\mu^+) (A^\mu \sin\theta_w + Z^\mu \cos\theta_w) \right]^2 - (W_\mu^- - W_\mu^+)^2 (A_\nu \sin\theta_w + Z_\nu \cos\theta_w)^2 \\ & + (W_\mu^- + W_\mu^+)^2 (A_\nu \sin\theta_w + Z_\nu \cos\theta_w)^2 - \left[ (W^{-\mu} + W_{+\mu}) (A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w) \right]^2 \\ & + 2(W_\mu^+ W_\nu^- W^{-\mu} W^{+\nu} - W_\mu^- W_\nu^+ W^{-\mu} W^{+\nu}) \\ = & \left[ (W_\mu^- - W_\mu^+) (A^\mu \sin\theta_w + Z^\mu \cos\theta_w) \right]^2 - \left[ (W^{-\mu} + W_{+\mu}) (A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w) \right]^2 \\ & + \left[ (W_\mu^- + W_\mu^+)^2 - (W_\mu^- - W_\mu^+)^2 \right] (A_\nu \sin\theta_w + Z_\nu \cos\theta_w)^2 \\ & + 2(W_\mu^+ W_\nu^- W^{-\mu} W^{+\nu} - W_\mu^- W_\nu^+ W^{-\mu} W^{+\nu}). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Basta expandir os termos quadráticos subtraindo dentro dos colchetes para chegar em

$$\begin{aligned} Z = & \left[ (W_\mu^- - W_\mu^+) (A^\mu \sin\theta_w + Z^\mu \cos\theta_w) \right]^2 - \left[ (W^{-\mu} + W^{+\mu}) (A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w) \right]^2 \\ & + 4W_\mu^+ W^{-\mu} (A_\nu \sin\theta_w + Z_\nu \cos\theta_w)^2 + 2(W_\mu^+ W_\nu^- W^{-\mu} W^{+\nu} - W_\mu^- W_\nu^+ W^{-\mu} W^{+\nu}), \end{aligned} \quad (3.72)$$

que pode ainda ser reescrito somando e subtraindo termos com finalidade de completar quadrados para que fique numa forma mais simples, onde seja mais claro a nomeação padrão dada à esse termo. Portanto,

$$\begin{aligned} Z = & \left[ (W_\mu^- - W_\mu^+) (A^\mu \sin\theta_w + Z^\mu \cos\theta_w) \right]^2 - \left[ (W^{-\mu} + W^{+\mu}) (A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w) \right]^2 \\ & + \left[ 2W_\mu^+ W^{-\mu} + (A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w)^2 \right]^2 - (W_\mu^+ W_\nu^- + W_\nu^+ W_\mu^-)^2 \\ & - (A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w)^4, \end{aligned} \quad (3.73)$$



bastando apenas notar que os dois primeiros termos possuem justamente o formato de (3.68). É possível expandi-lo em termos dessa definição de modo que quando ocorre a subtração desses dois primeiros termos, o resultado gera uma equação já possuindo uma forma expandida de um quadrado perfeito

$$\begin{aligned}
Z &= -(W_\mu^+ W_\nu^- + W_\nu^+ W_\mu^-)^2 + \left[ 2W_\mu^+ W^{-\mu} + (A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w)^2 \right]^2 \\
&\quad - 2(W_\mu^+ W_\nu^- + W_\nu^+ W_\mu^-)(A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w)(A_\nu \sin\theta_w + Z_\nu \cos\theta_w) \\
&\quad - (A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w)^4 \\
\Rightarrow Z &= -\left[ W_\mu^+ W_\nu^- + W_\nu^+ W_\mu^- + (A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w)(A_\nu \sin\theta_w + Z_\nu \cos\theta_w) \right]^2 \\
&\quad + \left[ 2W_\mu^+ W^{-\mu} + (A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w)^2 \right]^2.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Antes de apresentar uma forma final, podemos ainda somar os termos  $A' = A_3 + A_4$ , resultando em

$$\begin{aligned}
A' &= 2(\partial_\nu A_\nu \partial^\mu Z^\mu + \partial_\nu Z_\nu \partial^\mu A^\mu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu Z^\mu - \partial_\mu Z_\nu \partial^\nu A^\mu) \cos\theta_w \sin\theta_w \\
&\quad + F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sin^2\theta_w + Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} \cos^2\theta_w \\
&\quad + 2(-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu Z^\nu - \partial_\mu Z_\nu Z_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu A_\nu \partial^\nu Z^\mu + \partial_\mu Z_\nu \partial^\nu A^\mu) \sin\theta_w \cos\theta_w \\
&\quad + F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \cos^2\theta_w + Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} \sin^2\theta_w \\
\Rightarrow A' &= F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{3.75}$$

agora basta apenas o  $A'' = A_1 + A_2$ , que vai ficar como

$$\begin{aligned}
A'' &= \cancel{\partial_\mu W_\nu^- W^{-\mu\nu}} + \partial_\mu W_\nu^+ W^{-\mu\nu} + \partial_\mu W_\nu^- W^{+\mu\nu} + \cancel{\partial_\mu W_\nu^+ W^{+\mu\nu}} \\
&\quad + \partial_\mu W_\nu^- W^{+\mu\nu} - \cancel{\partial_\mu W_\nu^- W^{-\mu\nu}} + \partial_\mu W_\nu^+ W^{-\mu\nu} - \cancel{\partial_\mu W_\nu^+ W^{+\mu\nu}} \\
&= \partial_\mu W_\nu^+ W^{-\mu\nu} + \partial_\mu W_\nu^- W^{+\mu\nu} + \partial_\mu W_\nu^- W^{+\mu\nu} + \partial_\mu W_\nu^+ W^{-\mu\nu} \\
&= (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) W^{-\mu\nu} + (\partial_\nu W_\mu^- - \partial_\nu W_\mu^-) W^{+\mu\nu} \\
&= 2W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Com isso podemos compor a lagrangiana de calibre do setor  $SU(2) \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$  simplesmente agrupando todos os termos já calculados (3.35) na forma

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_G &= -\frac{1}{4} \left\{ F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + 2W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} - i4g \left[ (W_{\mu\nu}^- W^{-\nu} - W_{\mu\nu}^+ W^{+\nu}) \right. \right. \\
&\quad \times (\sin\theta_w A^\mu + \cos\theta_w Z^\mu) - (W^{-\mu} W^{+\nu}) (F_{\mu\nu} \sin\theta_w + Z_{\mu\nu} \cos\theta_w) \left. \right] \\
&\quad - g^2 \left[ W_\mu^+ W_\nu^- + W_\nu^+ W_\mu^- + (A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w)(A_\nu \sin\theta_w + Z_\nu \cos\theta_w) \right]^2 \\
&\quad \left. + g^2 \left[ 2W_\mu^+ W^{-\mu} + (A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w)^2 \right]^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

que padroniza-se por escrever em termos de  $\mathfrak{L}_{WWV}$  e  $\mathfrak{L}_{WVVV}$ , dadas por

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{WWV} &= ig \left[ (W_{\mu\nu}^+ W^{+\nu} - W_{\mu\nu}^- W^{-\nu}) \times (\sin\theta_w A^\mu + \cos\theta_w Z^\mu) \right. \\
&\quad \left. + (W^{-\mu} W^{+\nu}) (F_{\mu\nu} \sin\theta_w + Z_{\mu\nu} \cos\theta_w) \right],
\end{aligned} \tag{3.78}$$

e também,

$$\mathcal{L}_{WWVV} = \frac{g^2}{4} \left\{ \left[ W_\mu^+ W_\nu^- + W_\nu^+ W_\mu^- + (A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w)(A_\nu \sin\theta_w + Z_\nu \cos\theta_w) \right]^2 - \left[ 2W_\mu^+ W^{-\mu} + (A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w)^2 \right]^2 \right\}. \quad (3.79)$$

Então a lagrangiana de calibre do setor eletrofraco pode ser escrito como

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} + \mathcal{L}_{WV} + \mathcal{L}_{WWVV}, \quad (3.80)$$

onde  $\mathcal{L}_{WV}$  e  $\mathcal{L}_{WWVV}$  que representam as auto-interação de 3 e 4 pontos de calibre.

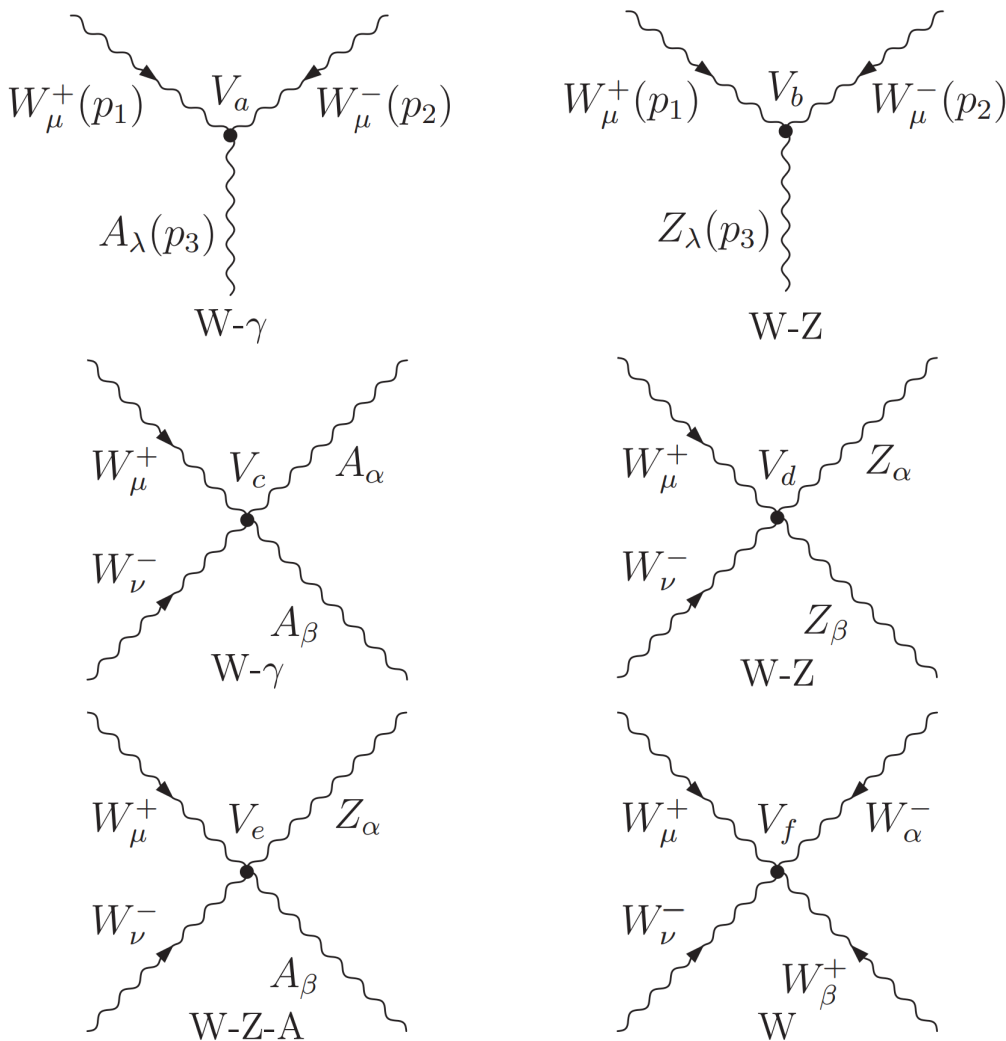


Figura 3.2 – Diagramas de Feynman que representa os termos presentes em  $\mathcal{L}_{WV}$  e  $\mathcal{L}_{WWVV}$ . De modo que o diagrama mais acima e mais a esquerda mostra como os bósons  $W$  interagem com o campo do fóton  $A_\mu$  enquanto o vértice de três pontos de gauge mais a esquerda mostra a interação entre os bósons  $W$  e  $Z$ . As demais representações se tratam de vértices de quatro pontos de gauge. É interessante notar que ao contrário do fóton que não há termos de auto-interação, os bósons  $W$  interagem entre si. (9)

## 4 O problema da Constante Cosmológica

A relação entre o campo de Higgs e a constante cosmológica define uma frente de encontro entre a cosmologia e a física de partículas. O mecanismo principal que liga essas duas frentes está diretamente relacionada com a quebra espontânea de simetria do campo de Higgs. Tal mecanismo é de extrema importância nesse contexto, pois a interação do campo das partículas elementares quando acoplada com o campo de Higgs deveria ter um estado fundamental de energia nula. Porém, uma quebra de simetria espontânea desse campo gera como consequência um estado de energia mínima não nula, o que é responsável por dar massa as partículas elementares.

### 4.1 Equação de Campo de Einstein

O problema da constante cosmológica constitui um dos desafios mais enigmáticos da atualidade da Física. Esse é um problema que tem seu nascimento com a formulação da teoria da relatividade geral de Einstein em torno de 1915 a partir das equações de campo de Einstein, que pode ser obtida através da ação de Einstein-Hilbert, realizando uma conexão entre a mecânica clássica e a relatividade geral através do princípio variacional, pois é possível derivar as equações de campo de Einstein através do princípio da mínima ação, de modo a tomar uma variação em

$$S = \int R\sqrt{-g}d^4x + S_m, \quad (4.1)$$

onde a parte esquerda representa a uma parte escalar da ação, pois  $R$  é o escalar de Ricci, definido como  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ , em função do tensor de Ricci, enquanto  $g$  é o determinante do tensor métrico. Já a parte direita da ação está relacionado com a distribuição de matéria. Dessa forma a perturbação em  $S$  leva a

$$\delta S = \int (\delta R\sqrt{-g} + \delta\sqrt{-g}R)d^4x + \delta S_m. \quad (4.2)$$

Aqui cabe importantes considerações sobre a natureza dessa ação, sendo possível dizer que a variável de maior interesse é a métrica  $g^{\mu\nu}$ , que dita como as distâncias entre dois eventos no espaço-tempo comportam-se. Essa grandeza definiria como é o análogo da distância entre dois pontos no  $R^2$  (intervalo), só que no caso em questão, seria no espaço-tempo. Sabendo disso, e de que as variações

$$\delta R = \delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \delta\sqrt{-g} = \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g}\delta g, \quad (4.3)$$

devem ser expandidas em termo de  $\delta R_{\mu\nu}$  e  $\delta g$ . Assim, é conveniente expandir  $\delta g$  em termo de seus cofatores  $\Theta$ , segundo o teorema de Laplace que diz que

$$g = \det[g_{\mu\nu}] = \sum_{\nu} g_{0\nu} \Theta^{0\nu} \xrightarrow{\text{geral}} g_{(\mu)\nu} \Theta^{(\mu)\nu}. \quad (4.4)$$

E substituí-la na variação em (4.3), resulta em

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \Theta^{(\mu)\nu} \delta g_{(\mu)\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{(\mu)\nu} \delta g_{(\mu)\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.5)$$

Isso devido à relação de ortogonalidade, como detalhado em (11), dos elementos do tensor métrico,  $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_{\rho}^{\mu}$ , cuja variação do lado esquerdo é dado de maneira análoga a uma simples regra do produto, enquanto o lado esquerdo deve ser nulo dado que  $\delta_{\rho}^{\mu}$  é constante em todos os casos possíveis.

$$\delta g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} + g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\rho} = 0 \rightarrow \delta g^{\mu\sigma} = -g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\rho}. \quad (4.6)$$

em que foi utilizado a mesma condição de normalização, bastando multiplicar  $g^{\sigma\nu}$  em ambos os lados. Por outro lado, também há uma variação no tensor de Ricci que é definido em termos dos símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} = \partial_{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}, \quad (4.7)$$

sendo então uma contração do tensor de curvatura de Riemann. Cujas a variação é calculada como

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_{\lambda} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \partial_{\nu} (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) + \delta \Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \delta \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}, \quad (4.8)$$

que entra em função, novamente, de outra variação. Agora em termos da variação dos símbolos de Christoffel. Que é definido através do tensor métrico:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\partial_{\mu} g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}). \quad (4.9)$$

Sabendo disso, pode-se apenas reagrupar  $\delta R_{\mu\nu}$  de modo a ficar em função da derivada covariante

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}, \quad (4.10)$$

que de certo modo tem uma forma similar ao vista em TQC. Mas, aplicando essa definição é tido como resultado

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}). \quad (4.11)$$

De certo modo temos as variações de interesse que estão em (4.3), agora basta substituir essas informações em (4.2), dando origem a

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2\kappa} \int \left[ (\delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} + \left( \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g} \delta g \right) R \right] d^4 x + \int \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} d^4 x. \\ &= \int \left\{ \left[ \nabla_{\lambda} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) \right] g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right\} d^4 x + 2\kappa \delta S_m \\ &= 0. \end{aligned}$$

A partir daqui, é importante notar que de acordo com o teorema da divergência leva o primeiro termo da integral ser nulo, bastando apenas definir

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (4.12)$$

o que é bem conveniente para reescrever  $\delta S$  levando isso em consideração

$$\delta S = \int (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \kappa T_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0, \quad (4.13)$$

o que nos permite concluir que o termo em parenteses em (4.13) deve ser nulo. Levando a escrever a equação de Einstein, em unidades naturais, como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (4.14)$$

Em suma, o lado direito dita como uma distribuição local do fluxo de energia e momento modifica o conteúdo geométrico do espaço-tempo.

## 4.2 Constante Cosmológica

Paralelamente, em grandes escalas podemos considerar que o universo é homogêneo e isotrópico. Essa aproximação nos permite analisar a geometria do universo em termos da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)R_0^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right]. \quad (4.15)$$

Em que  $k$  representa o parâmetro de curvatura e descreve a curvatura do universo. Para  $k = 1$  o universo é curvado positivamente,  $k = 0$  representa o universo plano e  $k = -1$  um universo curvado negativamente. Também é introduzido o fator de escala  $a(t) = R(t)/R_0$  representando a taxa de mudança da escala do universo com relação sua escala atual  $R_0$ . De modo que ao empregar a métrica (FLRW) para resolver as equações de Einstein, chegamos nas chamadas equações de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2 R_0^2}, \quad (4.16)$$

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (4.17)$$

No qual  $\rho$  e  $p$  são os termos provenientes do tensor energia-momentum de um fluido perfeito, representam a densidade de energia e pressão, respectivamente. Quando analisamos essas equações de acordo com os dados cosmológicos da época no qual corroboravam uma visão de um universo estático ( $\dot{a} = 0$ ) com densidade de energia positiva, vemos que esse condição é satisfeita na equação (4.16) quando  $k$  é positivo. Porém, a equação (4.17) mostra que para que o termo  $\ddot{a}$  seja nulo, necessariamente a pressão

precisa ser negativa e isso implicaria em um colapso. Com finalidade de manter a visão da época de um universo imutável e estático, Einstein viu necessidade de acrescentar um termo  $\Lambda$  na equação (4.14), chamada constante cosmológica, transformando-a em

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (4.18)$$

Entretanto, a ideia de um universo estático teve seu fim quando o astrônomo americano Edwin Hubble provou que o universo estaria se expandindo, através de uma análise do deslocamento para a faixa do vermelho (redshift) da luz emitida por galáxias distantes mostrando que galáxias mais afastadas, a uma distância  $r$ , se move com maior velocidade. Mas, mesmo sabendo que o universo não constitui um meio imutável e estático, a constante cosmológica não pode ser descartada facilmente, pois apesar de não ser o valor previsto por Einstein,  $\Lambda$  está intrinsecamente ligado com a densidade de energia do vácuo  $\rho_{vac}$ , cuja hipótese mais apoiada na comunidade aponta que essa grandeza está intimamente relacionado com a energia escura, de modo a gerar uma expansão acelerado do universo, superando o carácter atrativo da força gravitacional.

### 4.3 As 120 ordens de grandeza

Do ponto de vista da cronologia do universo, pode-se estudar várias etapas que decorrem na dissociação da grande unificação dos campos em diferentes vácuos. A princípio a gravidade se dissocia da força eletronuclear e na sequência força forte separou-se da força eletrofraca, e posteriormente a força eletrofraca se divide entre força fraca e eletromagnética devido a quebra espontânea de simetria visto na secção (3.5). Entretanto, uma etapa em específico deve ser abordada nesse ponto, que é quando o universo teria uma temperatura de aproximadamente  $3000K$ , sendo composto por um plasma de fótons, elétrons e partículas formadas de três quarks (bárions). Nessa ponto os fótons estavam interagindo, via efeito Compton, com esse plasma que diminuía a sua energia. Isso porque o universo ainda estava quente e denso ao ponto que os fótons não pudessem se propagar livremente pelo universo. Mas na fase chamada de recombinação o universo já tinha esfriado o suficiente para que isso acontecesse e os elétrons começaram a se ligar aos bárions formando os elementos leves como hidrogênio e hélio. De modo que fótons dessa época ainda podem ser observados na radiação cósmica de fundo. Já que inclusive onde estamos agora também era fonte de emissão de fótons nessa época, entretanto, a radiação que ainda chega até nós é a radiação mais distante no espaço.

Tal radiação acaba fornecendo resultados importantes para mensurar, indiretamente, a energia de vácuo através da medida da constante de Hubble  $H_0$  no modelo  $\Lambda$ CDM que significa  $\Lambda$ - Cold Dark Matter. Isso porque  $\Omega_{\Lambda}^{(0)} = \rho_{\Lambda}^{(0)}/\rho_c^{(0)}$  e  $\rho_c^{(0)} = 3H_0^2 M_{Pl}^2$ , que envolve a constante de Hubble  $H_0$  e escala de energia de Planck  $M_{Pl} \approx 2 \times 10^{27} eV$ . Com

isso e sabendo que  $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0.69$ , que é a parcela correspondente à chama energia escura no nosso universo, é possível obter a densidade de energia de vácuo experimental como

$$\rho_\Lambda^{(0)} = (3H_0^2 M_{Pl}^2) \Omega_\Lambda^{(0)} \approx 10^{-11} eV^4. \quad (4.19)$$

Por outro lado, a natureza dessa energia deve ter sua raiz na TQC. Que analisando do ponto de vista mais simples possível, que seria um caso de universo plano de acordo com a métrica de Minkowski que apenas um campo escalar contribui para a densidade de energia de vácuo - do ponto de vista da cosmologia uma hipótese similar é tomada no modelo da quintessência -, pode-se analisar a sua energia através do seu tensor de energia e momento. Porém, primeiramente é conveniente que seja retomado a expansão de um campo escalar real em seus modos na série de Fourier

$$\phi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} \left[ \hat{a}(\vec{k}) e^{-ip_\mu x^\mu} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{ip_\mu x^\mu} \right] \quad (4.20)$$

$$\dot{\phi} = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left[ \hat{a}(\vec{k}) e^{-ip_\mu x^\mu} - \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{ip_\mu x^\mu} \right], \quad (4.21)$$

que estão em termos dos operadores de criação e aniquilação, como visto anteriormente. Isso porque será necessário para calcular a componente  $\langle 0|T_{00}|0\rangle$  do tensor energia momento que deve mensurar a densidade de energia de vácuo(12, 13, 14) produzida por um campo escalar, que nesse caso não será considerado um campo escalar livre e não interagente, nem com ele mesmo. O tensor referido pode ser encontrado por meio do teorema de Noether ou de maneira equivalente através da relação

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_s)}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g_{\mu\nu}} \mathcal{L}_s + 2 \frac{\delta \mathcal{L}_s}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (4.22)$$

Claro, aqui  $\mathcal{L}_s$  é a lagrangiana de um campo escalar simples sem auto interações, como mencionado.

$$\mathcal{L}_s = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (4.23)$$

Dessa forma, sabendo como é dada a variação  $\delta\sqrt{-g} = 1/2\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$  e que de acordo com (4.23) a variação em relação ao segundo termo é nula e ao primeiro resta apenas as derivadas, temos (14)

$$T_{00} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial_i \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2. \quad (4.24)$$

Isso leva a reescrever essa componente do tensor energia-momento em função das equações expandidas dos campos e suas derivadas:

$$\begin{aligned} T_{00} = & -\frac{1}{2} \int \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}}{2} \left[ \hat{a}(-\vec{p}) - \hat{a}^\dagger(\vec{p}) \right] \left[ \hat{a}(-\vec{p}') - \hat{a}^\dagger(\vec{p}') \right] e^{i(p+p') \cdot x} \\ & + \frac{1}{2} \int \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{-\vec{p} \cdot \vec{p}'}{2\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}} \left[ \hat{a}(-\vec{p}) + \hat{a}^\dagger(\vec{p}) \right] \left[ \hat{a}(-\vec{p}') + \hat{a}^\dagger(\vec{p}') \right] e^{i(p+p') \cdot x} \\ & + \frac{m^2}{2} \int \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}} \left[ \hat{a}(-\vec{p}) + \hat{a}^\dagger(\vec{p}) \right] \left[ \hat{a}(-\vec{p}') + \hat{a}^\dagger(\vec{p}') \right] e^{i(p+p') \cdot x}, \end{aligned}$$

que pode ser bem simplificado ao considerar como o operador de destruição atua no estado de vácuo. Já que o que é importante nesse caso é conhecer  $\langle 0|T_{00}|0\rangle$ . Assim, expandindo o primeiro termo já no valor de vácuo esperado

$$\underbrace{\langle 0|a_{-p}a_{-p'}|0\rangle}_0 + \underbrace{\langle 0|a_p^\dagger a_{p'}^\dagger|0\rangle}_0 - \underbrace{\langle 0|a_p^\dagger a_{-p'}|0\rangle}_0 - \underbrace{\langle 0|a_{-p} a_p^\dagger|0\rangle}_0. \quad (4.25)$$

Enquanto isso, a segunda e a terceira parte da integral possui a mesma distribuição dos operadores de  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ , mas difere levemente do primeiro termo por

$$\underbrace{\langle 0|a_{-p}a_{-p'}|0\rangle}_0 + \underbrace{\langle 0|a_p^\dagger a_{p'}^\dagger|0\rangle}_0 + \underbrace{\langle 0|a_p^\dagger a_{-p'}|0\rangle}_0 + \underbrace{\langle 0|a_{-p} a_p^\dagger|0\rangle}_0 \quad (4.26)$$

o que na realidade pode simplificar muito a situação, pois

$$\langle 0|[a_{-p}a_{p'}^\dagger]|0\rangle = \langle 0|a_{-p}a_{p'}^\dagger|0\rangle - \langle 0|a_{p'}^\dagger a_{-p}|0\rangle = (2\pi)^3 \delta^3(p+p'), \quad (4.27)$$

considerando que  $a_{-p}|0\rangle = 0$  e que  $\langle 0|a_{p'}^\dagger = 0$  também. O que permite reescrever  $T_{00}$ , já simplificando a notação da integral dupla, como

$$\begin{aligned} \rho_{vac} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}}{2} \delta^3(p+p') e^{i(p+p')\cdot x} + \frac{1}{2} \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{-\vec{p} \cdot \vec{p}'}{2\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}} \delta^3(p+p') e^{i(p+p')\cdot x} \\ &+ \frac{m^2}{2} \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}} \delta^3(p+p') e^{i(p+p')\cdot x}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

A partir aqui, basta integrar em todos os termos, primeiramente sobre  $p'$  utilizando a propriedade de filtragem da função delta. Com isso basta agrupar os termos na forma

$$\begin{aligned} \rho_{vac} &= \frac{1}{2} \left[ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_p}{2} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{|p|^2}{2\omega_p} + m^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_p^2 + |p|^2 + m^2}{2\omega_p^2} \\ &\Rightarrow \rho_{vac} = \langle 0|T_{00}|0\rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \sqrt{p^2 + m^2} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.29)$$

o que apresenta um resultado não físico, já que não é possível que exista um vácuo com energia infinita. Isso pede que seja feito algum tipo de modificação na integral para que ela seja regularizada, ou seja, forneça um valor finito. Para isso será tomado um intervalo efetivo em que essa teoria será válida, de modo que haja um corte na integral em relação ao momento destacando tal limite de validade. Geralmente é empregado  $M$  como sendo o ponto em que esse corte é realizado, pois, dessa forma a densidade de energia de vácuo é reescrita seguindo uma integração por partes, como

$$\begin{aligned} \rho_{vac} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^M p^2 \sqrt{m^2 + p^2} dp = \left[ \cancel{p^2} \frac{1}{\cancel{2p}} \frac{(m^2 + p^2)^{3/2}}{3/2} \right] \Big|_0^M - \frac{1}{3} \int_0^M (m^2 + p^2)^{3/2} dp \\ &= \left[ \frac{p}{3} (m^2 + p^2)^{3/2} \right] \Big|_0^M - \frac{1}{3} \left( \int_0^M p^2 \sqrt{m^2 + p^2} dp + m^2 \int_0^M \sqrt{m^2 + p^2} dp \right), \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \frac{4}{3} \int_0^M p^2 \sqrt{m^2 + p^2} dp = \frac{M}{3} (m^2 + M^2)^{3/2} - \frac{1}{3} m^2 \int_0^M \sqrt{m^2 + p^2} dp, \quad (4.30)$$

que fica em função agora de outra integral que novamente será expandida por partes como

$$\begin{aligned} \int_0^M \sqrt{m^2 + p^2} dp &= M\sqrt{M^2 + m^2} - \int_0^M \sqrt{m^2 + p^2} + m^2 \int_0^M \frac{dp}{\sqrt{m^2 + p^2}} \\ &\Rightarrow \int_0^M \sqrt{m^2 + p^2} dp = \frac{1}{2} M\sqrt{M^2 + m^2} + \frac{1}{2} m^2 \int_0^M \frac{dp}{\sqrt{m^2 + p^2}}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Logo, substituindo a equação (4.31) em (4.3):

$$\rho_{vac} = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{M}{4} (m^2 + M^2)^{3/2} - \frac{m^2}{8} \left[ M\sqrt{m^2 + M^2} + m^2 \int_0^M \frac{dp}{\sqrt{m^2 + p^2}} \right] \right\}, \quad (4.32)$$

aqui cabe uma substituição de variáveis para simplificar a integral no último termo. Basta fazer  $u \rightarrow p/m$ , conseqüentemente  $dp = mdu$ . Posteriormente, após algumas simplificações é conveniente tomar to limite em que  $M \gg m$ . Portanto, retomando a equação (4.32):

$$\begin{aligned} \rho_{vac} &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{M}{4} (m^2 + M^2)^{3/2} - \frac{m^2}{8} \left[ M\sqrt{m^2 + M^2} + m^2 \int_0^{M/m} \frac{mdu}{m\sqrt{1+u^2}} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \left[ \frac{M}{4} (m^2 + M^2) - \frac{m^2}{8} M \right] \sqrt{m^2 + M^2} - \frac{m^4}{8} \left[ \int_0^{M/m} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \left[ \frac{M}{4} (m^2 + M^2) - \frac{m^2}{8} M \right] \sqrt{m^2 + M^2} - \frac{m^4}{8} \ln \left| u + \sqrt{u^2 + 1} \right| \Big|_0^{M/m} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{M^4}{4} \left( 1 + \frac{m^2}{2M^2} \right) \left( 1 + \frac{m^2}{M^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{m^4}{8} \ln \left| \frac{M}{m} + \sqrt{\frac{M^2}{m^2} + 1} \right| \right\} \\ &= \frac{M^4}{16\pi^2} \left[ 1 + \mathcal{O} \left( \frac{m^2}{M^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Assim, claramente se for considerado um corte na escala de Planck a densidade de energia de vácuo é da ordem de

$$\rho_{vac} \sim M_{Pl}^4 \approx 10^{109} eV^4 \rightarrow \frac{\rho_{vac}}{\rho_{\Lambda}^{(0)}} \sim 10^{120}.$$

O que leva à conhecida catástrofe do vácuo, que atualmente continua sem uma solução bem aceita pela comunidade científica. De modo que a conexão de  $\rho_{vac}$  com  $\Lambda$ , detalhada em (13), é feita através da expressão:

$$T_{\mu\nu} = -\rho_{vac} g_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \Rightarrow \rho_{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (4.34)$$

Claro, aqui está sendo considerado apenas uma contribuição de um campo escalar devido ao campo de Higgs físico também o sê-lo. Entretanto, um resultado mais realístico deve conter campos com auto-interação, além de somar sobre todos os valores esperados de vácuo do modelo padrão. O que mesmo assim não resolve o problema da constante cosmológica.



## 5 Conclusão e Perspectivas

A partir de um estudo introdutório à teoria quântica de campos foi possível analisar a importância do campo de Higgs no modelo padrão, especificamente no setor eletrofraco, de modo que uma quebra de simetria espontânea de simetria na lagrangiana escalar desse setor tem como consequência uma alteração no dubleto de Higgs tornando-se apenas uma perturbação dada por campo escalar real em torno do mínimo do potencial de Higgs, onde tal perturbação é o bóson de Higgs físico. Dado a existência emergente de um campo escalar com um vev não nulo devido a dissociação da força eletromagnética e fraca, teoriza-se que esse campo contribua para a densidade de energia de vácuo, consequentemente afetando a constante cosmológica.

Portanto, ao analisar o valor esperado de vácuo da componente  $T_{00}$  do tensor de energia-momento de um campo escalar, foi obtido a princípio um resultado de densidade de energia que deveria apresentar um valor infinito. Para resolver esse problema foi necessário um processo de regularização da integral definindo um intervalo efetivo em que a teoria estivesse válida, realizando um corte na integral do momento em um limite  $M_{Pl}$ , chamado de escala de Planck, o que acaba fornecendo que  $\rho_{vac} \sim M_{Pl}^4$  e que quando isso é comparado com o valor obtido experimentalmente por medidas da radiação cósmica de fundo surge a discrepância de 120 ordens de grandeza, conhecida como o problema da constante cosmológica.

Além disso, com base nos conhecimentos adquiridos nesse estudo, além da publicação do trabalho para fins de divulgação científica (15), abriu-se outros caminhos para investigação. Um deles é o estudo da relação entre o oscilador de Duffing e a quebra espontânea de simetria. Nessa frente nós identificamos que o potencial de Duffing possui a mesma forma, do ponto de vista matemático, do que o potencial da teoria  $\lambda\phi^4$  e isso pode ser estendido para uma analogia mais profunda, onde uma equação do tipo-Duffing possa estar presente nos mecanismos de quebra de simetria espontânea do modelo padrão através de uma perspectiva do espaço de fases.



# Referências

- 1 MCMAHON, D. **Quantum field theory demystified**. McGraw Hill Professional, 2008.
- 2 DASGUPTA, M. **An introduction to quantum field theory**. School of Physics and Astronomy, University of Manchester., 2008.
- 3 PESKIN, M. **An introduction to quantum field theory**. CRC press, 2018.
- 4 TONG, D. **Quantum Field Theory: University of Cambridge Part III Mathematical**. 2006. Disponível em: <<https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>>.
- 5 SCHWARTZ, M. D. **Quantum field theory and the standard model**. Cambridge University Press, 2014.
- 6 BARREIRO, L. **Apostila de física nuclear**. 2021. Trabalho em desenvolvimento.
- 7 SALAM, A. **Weak and electromagnetic interactions**. World Scientific, p. 244–254, 1994.
- 8 WEINBERG, S. **A model of leptons**. Physical review letters, v. 19, n. 21, p. 1264, 1967.
- 9 FERREIRA, F. **A extensão  $ub-1(1)$  do modelo padrão**. Universidade Federal da Paraíba, 2013.
- 10 DIETTERICH, S. **Quantum ElectroWeak Theory Spontaneous Symmetry Breaking | Quantum Field Theory**. 2021. Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=A4hRN5Gqjcs&t=1693s&ab\\_channel=DietterichLabs](https://www.youtube.com/watch?v=A4hRN5Gqjcs&t=1693s&ab_channel=DietterichLabs)>.
- 11 VANAZZI, J. V. B. **Teorias alternativas para a gravitação: f (r) e brans-dicke**. 2016.
- 12 WEINBERG, S. **The cosmological constant problem**. Reviews of modern physics, v. 61, n. 1, p. 1, 1989.
- 13 CARROLL, S.; PRESS, W.; TURNER, E. **The cosmological constant**. Annual review of astronomy and astrophysics, 1992.
- 14 SOUSA, G. **Dark energy in string cosmology**. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2021.
- 15 NOGUEIRA, G. de A.; BARREIRO, L. A. **Simetrias e suas quebras: o campo de Higgs e o problema da constante cosmológica**. *Brazilian Journal of Development*, v. 8, n. 2, p. 12406–12420, 2022.