



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Yuri Garcia da Silva Carvalho

Órbita de Shilnikov em Sistemas Dinâmicos de Filippov

São José do Rio Preto
2022

Yuri Garcia da Silva Carvalho

Órbita de Shilnikov em Sistemas Dinâmicos de Filippov

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia

Financiadora: CNPq

São José do Rio Preto
2022

C331o	<p>Carvalho, Yuri Garcia da Silva</p> <p>Órbita de Shilnikov em sistemas dinâmicos de Filippov / Yuri Garcia da Silva Carvalho. -- São José do Rio Preto, 2022</p> <p>58 p. : il.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto</p> <p>Orientador: Márcio Ricardo Alves Gouveia</p> <p>1. Matemática. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. Teoria da bifurcação. 4. Sistemas de Filippov. 5. Órbitas de Shilnikov. I. Título.</p>
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Yuri Garcia da Silva Carvalho

Órbita de Shilnikov em Sistemas Dinâmicos de Filippov

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPq

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia
Orientador

Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Clayton Eduardo Lente da Silva
UFR - Instituto de Ciências Exatas e Naturais

São José do Rio Preto
04 de Fevereiro de 2022

*Às pessoas que
tornaram isso possível:
Mara e Emerson.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Mara e Emerson, que mesmo sabendo a falta que eu faria no dia-a-dia, apoiaram-me a sair de casa e começar a construir minha jornada. Que tanto na graduação, quanto na pós, sempre estiveram do meu lado, seja para ajudar em um problema ou comemorar uma conquista.

Agradeço a minha família, que mesmo eu estando distante, estavam sempre torcendo por mim.

Agradeço aos amigos que conheci no IBILCE, e hoje sei, são muito mais que apenas amigos. Conviveram comigo em momentos bons e ruins, e sempre estiveram lá para dar-me apoio.

Agradeço aos amigos da graduação e pós-graduação em Matemática do IBILCE, pela ajuda nas disciplinas, por compartilhar a ansiedade, antes de um teste, e pelos momentos de descontração.

Agradeço aos professores de graduação e pós-graduação, por todos os ensinamentos passados, dentro e fora da sala de aula, e por todos os conselhos.

Agradeço a todos os funcionários do IBILCE, em especial aos funcionários do RU, que se tornaram verdadeiros amigos.

Ao meu orientador, Márcio, por todo o apoio, pelos conselhos, pelas críticas construtivas, e pela oportunidade desde a Iniciação Científica.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro durante o Mestrado.

*Matemática, de modo algum, são fórmulas,
assim como a música não são notas.*

Y Jurquim

RESUMO

Com este trabalho, nós introduziremos o conceito de órbita Shilnikov de deslize em sistemas de Filippov. Essa órbita é uma curva fechada suave por partes, composta pelas trajetórias de Filippov, que passa pela região de descontinuidade Σ , conectando o pseudo-equilíbrio sela-foco a si mesmo. Uma versão do Teorema de Shilnikov é demonstrada para estes sistemas. Mostramos que, a órbita Shilnikov de deslize ocorre em famílias genéricas de Filippov a um parâmetro, além de garantir a existência de infinitas órbitas periódicas, em uma vizinhança da órbita de Shilnikov. Diferente do Teorema de Shilnikov para campos suaves, nós não precisamos admitir a condição de Shilnikov (S) para garantir os resultados. Por fim, a existência das órbitas de Shilnikov de deslize é garantida por um exemplo linear.

Palavras-chave: Órbita Shilnikov de Deslize, Campos de Filippov, Órbitas Periódicas, Teorema de Shilnikov.

ABSTRACT

In this assignment we have introduced the concept of sliding Shilnikov orbit in Filippov systems. This orbit is a piecewise smooth closed curve, consisting of Filippov trajectories, that passes through the switching surface Σ , connecting the saddle-focus pseudo equilibrium to itself. A Shilnikov's theorem version is demonstrated for these systems. It shows that the sliding Shilnikov orbit occurs in generic one-parameter families of Filippov systems besides guaranteeing the existence of infinite periodic orbits in a Shilnikov orbit neighborhood. Different from the Shilnikov's theorem for smooth systems, we don't need to admit the Shilnikov condition (S) in order to guarantee the results. Finally the existence of the sliding Shilnikov orbit is guaranteed by a linear example.

Keywords: Sliding Shilnikov Orbit, Filippov Systems, Periodic Orbits, Shilnikov's Theorem.

Lista de Figuras

2.1	Retrato de fase de alguns equilíbrios de sistemas 2x2.	24
2.2	Retrato de Fase de alguns equilíbrios de sistemas 3x3.	25
2.3	Exemplo de uma órbita de Shilnikov Γ	27
2.4	A função $\psi_2 : D^+ \rightarrow C$	29
3.1	Retrato de fase das três regiões de Σ	32
3.2	Retrato de fase de um ponto de dobra visível.	32
3.3	Vetor do campo deslizante.	33
3.4	Divisão da região Σ	35
3.5	Representação gráfica do vetor do campo deslizante. Em a) o ponto q está contido na região de deslize. Já em b) o ponto q está no bordo da região de deslize.	36
3.6	A órbita Shilnikov de deslize Γ conectando o ponto q ao ponto p	36
4.1	Representação da Γ_0 e das curvas γ_ϵ e ν_ϵ	40
4.2	Bacia de atração B do equilíbrio p_0	40
4.3	Família a 1-parâmetro Z_μ	41
4.4	Representação dos conjuntos I_i e da saturação de γ_ϵ	43
4.5	Representação de um dos intervalos J_i	44
4.6	Alguns pontos q_i que tem a mesma imagem ξ por π	44
4.7	Representação das órbitas periódicas.	45
5.1	A órbita Γ_0 conectando o pseudo-equilíbrio p_0 ao ponto de dobra q_0	48
5.2	Retrato de fase do campo \bar{Z} em uma vizinhança de \mathcal{R}	50

Sumário

1	Introdução	19
2	Preliminares	21
2.1	Equações Diferenciais Ordinárias	21
2.2	Classificações dos Equilíbrios	23
2.3	Alguns Conceitos e Resultados	25
3	Convenções de Filippov	31
4	Órbitas de Shilnikov em Campos de Filippov	39
4.1	Observações Iniciais	39
4.2	Ocorrência de Órbitas de Shilnikov em Famílias Genéricas	41
4.3	Existência de Infinitas Órbitas Periódicas Próximas à Órbita de Shilnikov .	43
5	Um Exemplo Linear	47
6	Conclusões	53
A	Apêndice A	55
B	Apêndice B	57
	Referências	59

1 Introdução

Embora a teoria de Sistemas Dinâmicos possa ser encontrada em trabalhos antigos, a primeira obra considerada da área é relativamente nova (*Dinamical Systems* de George D. Birkhoff publicado em 1927), o que faz com que este ambiente tenha muito a ser descoberto, e está em constante avanço. Essa parte da matemática, tenta compreender o comportamento de seus modelos com o passar do tempo, e pode ser aplicado em diversas áreas como: Economia, Biologia, Física etc. E quando é questionado se seria possível encontrar resultados semelhantes aos encontrados por Shilnikov, ao trabalhar com órbitas homoclínicas em um outro ambiente, é que surge a motivação deste trabalho.

Nosso intuito é analisar um fenômeno não-linear, que ocorre em sistemas dinâmicos suaves por partes, que é muito semelhante a órbita homoclínica de Shilnikov para campos suaves. A teoria de Shilnikov já foi expandida anteriormente por outros autores, como na referência [10], onde a bifurcação homoclínica de Shilnikov é analisada em um modelo de circuito de Chua, que é um sistema diferencial linear contínuo por partes com três zonas. Nas referências [11, 12] a existência de órbitas homoclínicas de Shilnikov para sistemas diferenciais lineares contínuos por partes com duas zonas são mostrados analiticamente. Os trabalhos citados analisaram sistemas diferenciais suaves por partes que admitiam uma órbita homoclínica de Shilnikov Γ , satisfazendo duas propriedades: Γ é transversal à região de descontinuidade, e o equilíbrio hiperbólico sela-foco não estava contido nessa região, ou seja, o campo de vetores é suave em uma vizinhança do equilíbrio.

No contexto de campos de Filippov, Glendinning [13] estudou o caos surgindo de órbitas homoclínicas deslizantes conectando um equilíbrio hiperbólico a si mesmo. Nós nos preocupamos em estudar uma órbita homoclínica deslizante, que tem uma parte contida na região de descontinuidade Σ , conectando um pseudo-equilíbrio sela-foco a si mesmo. Este equilíbrio está contido em Σ , e chamaremos esta órbita de órbita de Shilnikov deslizante.

Pontuamos novamente que a órbita Shilnikov deslizante, diferencia-se da órbita homoclínica de Shilnikov em dois aspectos. O primeiro é que o equilíbrio está contido em Σ , o que faz com que a teoria não seja toda análoga ao caso suave. O segundo é que, assim como no trabalho de Glendinning, nossa órbita tem um segmento contido na região de descontinuidade, e deixa a região Σ por um ponto de contato quadrático.

Este trabalho tem duas principais metas. A primeira é mostrar uma equivalência do teorema de Shilnikov, garantindo a existência de infinitas soluções periódicas para o campo de Filippov, assumindo que ele admite uma órbita Shilnikov deslizante. A segunda é apresentar um exemplo explícito, para mostrar que a órbita de Shilnikov existe em um sistema suave por partes.

O Capítulo 2 traz uma breve recapitulação da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias (EDO), apresentando o que é uma equação diferencial, alguns resultados

importantes para o desenvolvimento deste trabalho, além de trazer o retrato de fase de alguns equilíbrios de sistemas planares e tridimensionais. Finalizamos esse capítulo apresentando o Teorema de Poincaré-Bendixson, e falando sobre o Teorema de Shilnikov.

Como a teoria deste trabalho se desenvolve em campos de Filippov, não poderíamos deixar de reservar um capítulo para introduzir o leitor a esse ambiente. O Capítulo 3 tem esse papel, e apresenta a teoria de campos de Filippov de uma forma sucinta e objetiva.

O Capítulo 4 está dividido em três seções. A primeira retrata algumas noções comuns que serão necessárias no desenvolvimento da nossa primeira meta, que será apresentada na forma de dois teoremas, enunciados e demonstrados nas duas seções seguintes deste mesmo capítulo.

Por fim, mas não menos importante, o Capítulo 5 contempla a nossa segunda meta trazendo um exemplo linear, onde a teoria desenvolvida no capítulo anterior pode ser aplicada de forma explícita e mais prática.

2 Preliminares

Neste capítulo trataremos, de forma sucinta, uma parte da teoria qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Nosso intuito não é apresentar um resumo da teoria, o que deixaria este texto muito extenso, além de se tratar de conteúdos clássicos, que são ensinados em cursos de graduação. Nós queremos apenas apresentar algumas ferramentas úteis, para o desenvolvimento deste trabalho. Para os leitores, que queiram aprofundar-se no assunto, indicamos as referências [6, 9]. Todos os resultados e demonstrações apresentados a seguir podem ser encontrados nestas referências.

2.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Sejam $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função definida em todo ponto $(t, x) \in U$. Chamamos de **equação diferencial ordinária** definida por f a expressão:

$$x' = f(t, x). \quad (2.1)$$

Classificamos a equação (2.1) como uma equação de **primeira ordem** por envolver apenas a derivada primeira. Caso envolvesse a derivada segunda diríamos que é uma equação diferencial de segunda ordem, e assim por diante.

Uma **solução** dessa equação é um caminho derivável definido por $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de forma que para todo $t \in I$,

$$(t, x(t)) \in U \text{ e } x'(t) = f(t, x(t)).$$

Fixe $(t_0, x_0) \in U$ e seja $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução de $x' = f(t, x)$. Se $t_0 \in I$ e $x(t_0) = x_0$, então dizemos que a solução satisfaz a **condição inicial** $x(t_0) = x_0$, ou o problema de valor inicial:

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Por simplicidade podemos chamar o problema de valor inicial apenas de PVI.

O teorema a seguir garante a existência e unicidade de soluções de um PVI e sua demonstração pode ser encontrada em [9].

Teorema 2.1. *Se f e a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ são aplicações contínuas em (t, x) no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ então, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do problema de valor inicial $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para algum $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.*

Podemos falar também de sistemas de equações diferenciais ordinárias escalares. Tomando uma base de \mathbb{R}^n , escrevemos $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ e

$f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), \dots, f_n(t, x))$ e assim a equação $x' = f(t, x)$ em \mathbb{R}^n pode ser vista como o sistema:

$$\begin{cases} x'_1 &= \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots & & \\ x'_n &= \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.2)$$

De forma semelhante a uma equação diferencial, a solução de um sistema de equações consiste de n funções diferenciáveis x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, definidas em $I \subset \mathbb{R}$, tais que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, a função x_i satisfaz $x'_i(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$, $\forall t \in I$. Assim a n -upla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma solução para a equação $x' = f(t, x)$. Acrescentando ao sistema a condição $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$ temos um problema de valor inicial (PVI) para o sistema de equações diferenciais.

Observe que, do mesmo modo que o Teorema 2.1 garante a existência e unicidade de soluções, para uma equação diferencial, ele também vai garantir para um sistema de equações diferenciais ordinárias.

As equações diferenciais podem ser classificadas em **autônomas** e **não autônomas**, sendo a primeira uma equação que não depende do tempo, enquanto a segunda depende. Mais precisamente, uma equação diferencial $x' = f(t, x)$ é autônoma caso f não dependa da variável tempo t e podemos escrever a equação como $x' = f(x)$ e, neste caso, chamamos a aplicação $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de **campo de vetores** definido no aberto $E \subset \mathbb{R}^n$.

Observação 2.2.

- *Questões sobre a existência e unicidade de soluções de equações autônomas e não autônomas são equivalentes, uma vez que uma equação não autônoma pode ser escrita como uma autônoma, como segue:*

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e tomando $X = (t, x) \in U$ e definindo $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ por $F(X) = F(t, x) = (1, f(t, x))$. Dessa forma a equação $x' = f(t, x)$ em \mathbb{R}^n é equivalente a equação autônoma $X' = F(X)$ em \mathbb{R}^{n+1} .

- *Em sistemas autônomos sempre podemos tomar o t_0 da condição inicial como a origem, pois as soluções de sistemas autônomos são invariantes por translação do tempo.*

Uma solução de um sistemas de equações diferenciais ordinárias autônomas é chamada de **equilíbrio** ou **ponto singular** e essa solução não varia com o tempo. Assim, um sistema de equações diferenciais $x' = f(x)$ tem uma solução de equilíbrio $x(t) = x_c$ se $f(x_c) = 0$, com x_c constante. Dizemos que um equilíbrio é **hiperbólico** se todos os autovalores da matriz Jacobiana,

$$J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

aplicada no equilíbrio possuem parte real não nula.

2.2 Classificações dos Equilíbrios

Como estamos interessados no estudo qualitativo das EDOs, nosso foco não será explicitar as soluções dos seus sistemas, mas compreender como as soluções se comportarão à medida que o tempo passa. Para esta análise começaremos com um sistema em \mathbb{R}^2 e apresentaremos as classificações mais canônicas e daremos procedência para sistemas em \mathbb{R}^3 , mas não avançaremos para análises em dimensões maiores. Enfatizamos que nosso intuito não é apresentar um resumo completo da teoria qualitativa, é apenas lembrar alguns pontos mais necessários, para a continuidade deste trabalho. Sendo assim, ressaltamos que as classificações a seguir não são as únicas existentes, e para aqueles que tenham interesse, a referência [2] apresenta uma análise mais detalhada, para os sistemas de duas e três dimensões.

Considere um sistema diferencial linear em \mathbb{R}^2 dado de forma geral por:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde a , b , c e d são constantes reais. Podemos escrever esse sistema na forma matricial

$$\dot{X} = AX$$

onde

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Observe que a matriz A dada acima é a matriz Jacobiana do sistema (2.3). Agora supondo que A seja diagonalizável, ou seja, existe uma matriz $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = [V \ W]$ tal que $P^{-1}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal, e usando a mudança de variável $Y = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = P^{-1}X$, conseguimos reescrever o sistema (2.3) como:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda_1 \xi_1 \\ \dot{\xi}_2 = \lambda_2 \xi_2, \end{cases} \quad (2.4)$$

ou seja, na forma matricial o sistema (2.4) se escreve como $\dot{Y} = DY$, onde $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, é uma matriz diagonal. Facilmente encontramos a solução desse sistema, como sendo $\xi_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ e $\xi_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$, onde c_1 e c_2 são constantes reais.

De $P^{-1}AP = D$ obtemos a igualdade $AP = PD$, que implica $\begin{bmatrix} AV & AW \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 V & \lambda_2 W \end{bmatrix}$. Daí temos que os valores λ_1 e λ_2 que aparecem na matriz D são os autovalores da matriz A . Assim a solução do sistema (2.3) depende apenas dos autovalores, o que facilita a análise e classificação desses sistemas.

Para sistemas 2x2 a matriz Jacobiana terá dois autovalores, ou um autovalor com multiplicidade dois, e seus equilíbrios são classificados de acordo com a configuração dos autovalores, uma vez que as soluções dependem apenas deles. Esses autovalores podem ser reais ou complexos, com parte imaginária não nula. No caso real podemos ter os autovalores com sinais iguais ou distintos. No caso de sinais iguais, o equilíbrio é chamado de **poço** ou **nó**, atrator se os autovalores forem negativos e repulsor se forem positivos. Caso tenham sinais opostos, o equilíbrio é uma **sela**, e sempre será considerada instável.

No caso de autovalores complexos, com parte real, e imaginária diferente de zero, temos um **foco**, que será atrator caso a parte real seja negativa e repulsor caso contrário.

A Figura 2.1 resume alguns tipos de equilíbrios que um sistema 2×2 pode ter, além de mostrar um simples retrato de fase de cada equilíbrio citado anteriormente. A origem (marcada de vermelho) representa o equilíbrio, e as setas representam o sentido do fluxo. Reforçamos que nem todas as configurações de autovalores foram analisados aqui, por exemplo, o caso de autovalores complexos, onde o retrato de fase pode ser um centro ou um foco.

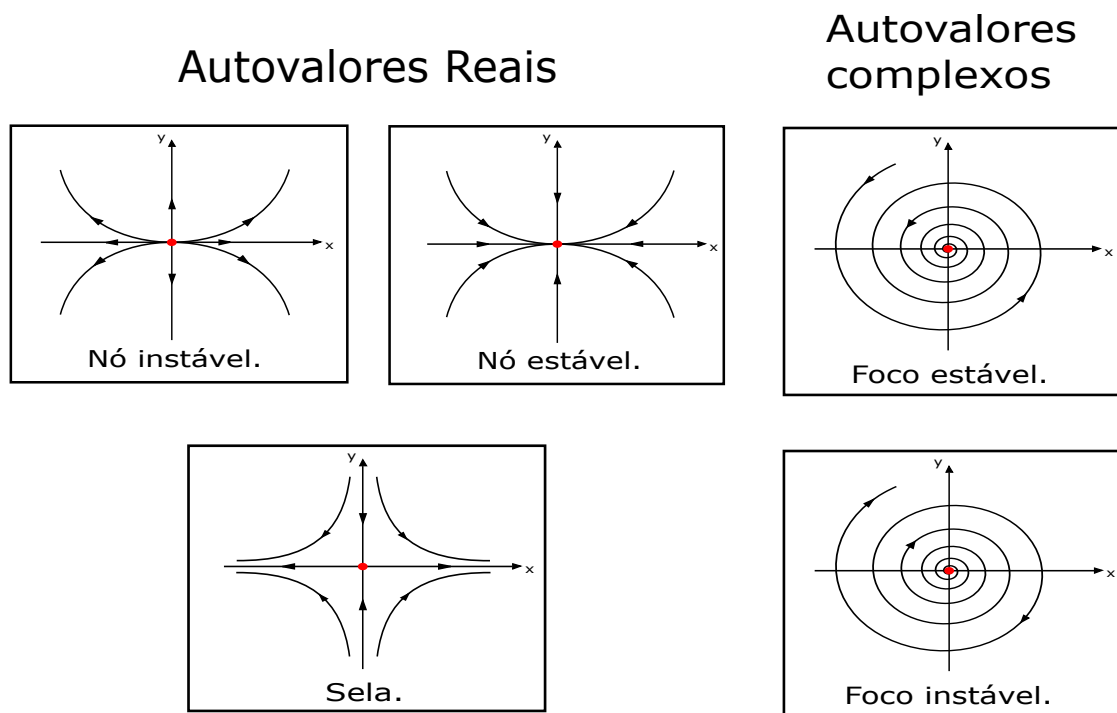


Figura 2.1: Retrato de fase de alguns equilíbrios de sistemas 2×2 .

Para casos de sistemas diferenciais lineares em \mathbb{R}^3 , a análise segue de forma análoga, a diferença agora é que não teremos apenas dois autovalores, mas três, o que aumenta as possibilidades de combinações dos autovalores e, conseqüentemente, aumentam a quantidade de classificações dos pontos de equilíbrio.

Caso os três autovalores sejam reais, e tenham o mesmo sinal continuamos chamando o equilíbrio de **nó**, estável se os autovalores são negativos, e instável se positivo. Caso um deles tenha sinal diferente chamaremos de **sela**. No caso de autovalores complexos, que aparecem aos pares (ele e seu conjugado), sempre teremos um autovalor real e dois complexos. Neste caso a classificação se dá de acordo com o sinal do autovalor real e o sinal da parte real dos autovalores complexos (como são conjugados possuem a mesma parte real). Caso o sinal do autovalor real coincida com o sinal da parte real dos autovalores complexos, classificamos como um **foco-nó**. Se o sinal do autovalor real for diferente do sinal da parte real dos outros dois autovalores complexos, classificamos como um **sela-foco**.

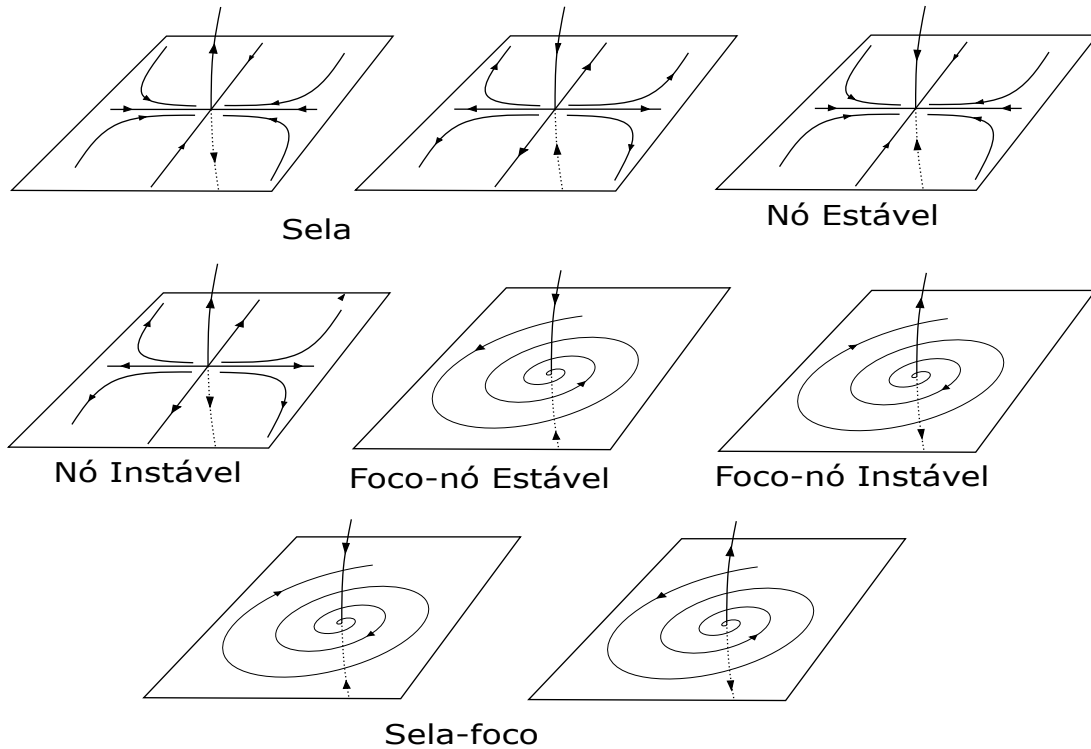


Figura 2.2: Retrato de Fase de alguns equilíbrios de sistemas 3x3.

2.3 Alguns Conceitos e Resultados

Nesta seção enunciaremos o Teorema de Poincaré-Bendixson que nos ajudará a entender a estrutura dos pontos de equilíbrio de um campo de vetores dentro de uma região compacta, além de trazer a definição da aplicação de primeiro retorno, útil no desenvolvimento do Capítulo 5. Por fim, apresentaremos a definição de uma órbita homoclínica de Shilnikov para campos suaves, que é a motivação deste trabalho.

Antes de apresentar o Teorema de Poincaré-Bendixson iremos deixar as definições dos conjuntos α -limite e ω -limite.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$. Ao campo X associamos a equação diferencial

$$x' = X(x).$$

As soluções dessa equação são as aplicações diferenciáveis $\varphi : I \rightarrow U$, com I intervalo real, tais que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(x)$$

para todo $t \in I$, e são chamados de **trajetórias** ou **curvas integrais** de X .

Um ponto $x \in U$ é dito **ponto singular** de X se $X(x) = 0$ e **ponto regular** se $X(x) \neq 0$. Agora, seja $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ o fluxo do campo X que passa pelo ponto p , definido no intervalo máximo¹ $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Se $\omega_+(p) = +\infty$ define-se o seguinte conjunto.

¹Para mais detalhes ver referência [6].

Definição 2.3. Chamamos de ω -**limite** o conjunto $\omega(p) = \{q \in U : \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$.

Analogamente, se $\omega_-(p) = -\infty$, define-se o seguinte conjunto.

Definição 2.4. Chamamos de α -**limite** o conjunto $\alpha(p) = \{q \in U : \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$.

Além disso, sendo $\gamma_p = \{\varphi(t, p), t \in I_p\}$ a órbita de X passando pelo ponto p , definimos o que segue.

Definição 2.5. A **semi-órbita positiva** de p é o conjunto $\gamma^+(p) = \{\varphi(t, p) : t \geq 0\}$.

Definição 2.6. A **semi-órbita negativa** de p é o conjunto $\gamma^-(p) = \{\varphi(t, p) : t \leq 0\}$.

Por simplicidade denotamos as semi-órbitas acima por γ_p^+ e γ_p^- , respectivamente. Por fim, enunciamos o Teorema de Poincaré-Bendixson.

Teorema 2.7. (Poincaré-Bendixson) Seja $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ um fluxo de X , definido para todo $t \geq 0$, tal que a órbita positiva γ_p^+ esteja contida em um conjunto compacto $K \subset U$. Suponha que o campo X tenha um número finito de singularidades em $\omega(p)$. Têm-se as seguintes possibilidades:

- a) Se $\omega(p)$ contém apenas pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.
- b) Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ consiste em um conjunto de órbitas, onde cada uma dessas órbitas tendem a um desses pontos singulares quando $t \rightarrow \infty$.
- c) Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto singular.

A demonstração deste teorema não será feita, por se tratar de um teorema conhecido, mas para os leitores mais interessados, a demonstração pode ser encontrada na referência [6].

Uma definição importante que usaremos adiante é a de ciclo limite e a apresentaremos agora.

Definição 2.8. Sejam U um aberto em \mathbb{R}^2 e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 . Uma órbita periódica γ de X chama-se **ciclo limite** se existir uma vizinhança V de γ tal que γ é a única órbita fechada de X que intersecta V .

Passamos então para a definição da aplicação de primeiro retorno, também conhecido como **aplicação de Poincaré**:

Definição 2.9. Sendo $x' = X(x)$ um sistema autônomo e S uma seção diferenciável transversal às trajetórias locais. Definimos a **aplicação de Poincaré** como a aplicação $\pi : S \rightarrow S$ tal que para todo $x \in S$, a semi-órbita positiva de x intersecta S pela primeira vez no ponto $\pi(x)$.

A aplicação de Poincaré é muito útil na análise dos sistemas dinâmicos, uma vez que os pontos periódicos do sistema podem ser encontrados analisando os pontos fixos da aplicação de Poincaré do sistema em questão. Como a órbita dos pontos fixos são geralmente menos complicadas de ser encontradas que as órbitas de pontos periódicos, a aplicação de Poincaré nos ajuda facilitando essa análise.

Comentaremos agora um pouco sobre a teoria que inspirou esse trabalho, o Teorema de Shilnikov. Primeiramente vamos definir o que seria uma órbita homoclínica de Shilnikov em sistemas suaves.

Definição 2.10. *Sejam X um campo de vetores suave de \mathbb{R}^3 , e $p \in \mathbb{R}^3$ um equilíbrio sela-foco hiperbólico de X . Existem duas regiões invariantes associadas a esse equilíbrio, uma variedade de dimensão 2 associada aos autovalores complexos, que chamaremos de W_2 , e uma curva W_1 associada ao autovalor real.*

*Uma **órbita homoclínica de Shilnikov** Γ é uma trajetória de X que conecta o equilíbrio a si mesmo.*

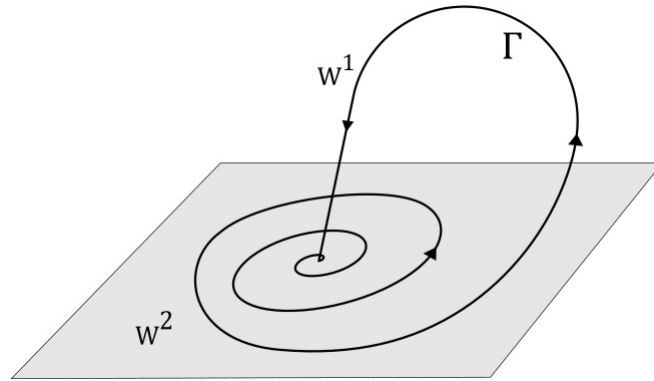


Figura 2.3: Exemplo de uma órbita de Shilnikov Γ .

A Figura 2.3 mostra essas regiões invariantes. Assim, $\Gamma \subset W_1 \cup W_2$.

O Teorema de Shilnikov é válido para sistemas de EDO em \mathbb{R}^3 que possam ser escritos da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x - \omega y + P(x, y, z, \mu) \\ \dot{y} = \omega x + \rho y + Q(x, y, z, \mu) \\ \dot{z} = \lambda z + R(x, y, z, \mu) \end{cases} \quad (2.5)$$

onde:

1. μ é o parâmetro de bifurcação.
2. $\dot{P}(0, 0, 0, \mu) = \dot{Q}(0, 0, 0, \mu) = \dot{R}(0, 0, 0, \mu) = 0$.
3. $\lambda\rho < 0$ e $\omega \neq 0$.
4. $|\rho/\lambda| < 1$.

A condição 2 garante que as funções P, Q e R se anulam no ponto singular $(0,0,0)$. A condição 3 implica no ponto fixo ser um ponto de sela-foco. Já a última condição é conhecida como **condição de Shilnikov** (S), a qual é satisfeita, quando o par de autovalores complexos está mais próximos da reta imaginária do que o autovalor real está, no plano complexo.

Assumindo a condição (S), o **Teorema de Shilnikov** garante a existência de infinitas órbitas periódicas em uma vizinhança de Γ , e caso (S) não seja satisfeita, ele mostrou que Γ é isolada de órbitas periódicas. Para os leitores que queiram se aprofundar nessas descobertas de Shilnikov, a referência [3] reúne alguns dos resultados obtidos por ele, e deixamos aqui a cargo de curiosidade.

A seguir, apresentaremos um exemplo de sistema de equações diferenciais que possuindo uma órbita homoclínica apresentará infinitas órbitas periódicas, em uma vizinhança dessa órbita, como descreve o Teorema de Shilnikov.

Este exemplo pode ser encontrado no Capítulo 16 da referência [17], onde ele é apresentado de forma mais detalhada.

Para nossos propósitos consideremos em \mathbb{R}^3 um sistema de equações diferenciais ordinárias que, em uma vizinhança cilíndrica suficientemente pequena da origem, pode ser escrito na forma (2.6). Assumiremos também que nosso sistema tem uma solução homoclínica, de forma que sua órbita, em algum momento, saia da região delimitada pelo cilindro e em um tempo futuro infinito retorne para o ponto de equilíbrio. Ressaltamos que a hipótese da solução homoclínica é extremamente necessária, uma vez que o Teorema de Shilnikov exige a existência da órbita fechada.

Considere o sistema linear

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X, \quad (2.6)$$

definido no cilindro $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^3$ dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ e $|z| \leq 1$, sendo $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ e $\lambda_0 = 2$ os autovalores associados.

O fluxo φ_t desse sistema pode ser calculado sem dificuldades e é dado por:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t} \cos t + y_0 e^{-t} \sin t \\ y(t) = -x_0 e^{-t} \sin t + y_0 e^{-t} \cos t \\ z(t) = z_0 e^{2t} \end{cases}$$

e usando as coordenadas polares podemos reescrevê-lo como a seguir:

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{-t} \\ \theta(t) = \theta_0 - t \\ z(t) = z_0 e^{2t}. \end{cases}$$

O sistema tem um plano estável W^2 (plano xy) e um par de curvas instáveis ζ^\pm , uma no sentido positivo do eixo z , ζ^+ , e ζ^- no sentido negativo de z . Assumiremos que a órbita da solução homoclínica segue por uma dessas curvas instáveis caracterizando uma órbita como a representada na Figura 2.3.

A escolha dos autovalores, para este exemplo não tem muitas exigências, apenas que eles satisfaçam à condição (S) de Shilnikov, ou seja, sendo $\alpha \pm i\beta$ e λ os autovalores, precisamos que $\alpha < 0$, $\beta \neq 0$, $\lambda > 0$ de maneira que o equilíbrio seja uma sela-foco e $\lambda > -\alpha$, o que garante que a condição (S) seja satisfeita.

Voltando para o nosso exemplo, podemos dividir o bordo de \mathbf{S} em três regiões, os discos superiores e inferiores do cilindro D^\pm , dados por $z = \pm 1$ e $r \leq 1$, e a região cilíndrica C , dada por $r = 1$ e $|z| \leq 1$. O plano estável W^2 intersecta o cilindro no círculo $z = 0$ e divide C em duas partes, C^+ definida para $z > 0$ e C^- para $z < 0$. Parametrizamos D^\pm por r e θ e C por θ e z .

Como as soluções em C^+ saem de \mathbf{S} por D^+ , definimos a função $\psi_1 : C^+ \rightarrow D^+$ como segue. Dado $(\theta_0, z_0) \in C^+$, seja $\tau = \tau(\theta_0, z_0) = -\log(\sqrt{z_0})$ o tempo que a solução leva para chegar em D^+ . Assim temos

$$\psi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{z_0} \\ \theta_0 + \log(\sqrt{z_0}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Agora assumindo que a curva instável ζ^+ saindo da origem por D^+ é uma solução homoclínica, ou seja, a curva ζ^+ volta para o plano estável W^2 , formando uma órbita

como a mostrada na Figura 2.3, Observamos que existe um tempo t_1 tal que $\varphi_{t_1}(0, \theta, 1) = (1, 0, 0)$.

Daí, nós definimos a função ψ_2 que mapeia as soluções próximas de $r = 0$ em D^+ até elas chegarem em C . Assim, nas coordenadas cartesianas, ψ_2 leva $(x, y) \in D^+$ em $(\theta_2, z_2) \in C$ como descrito a seguir,

$$\psi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r \operatorname{sen} \theta}{2} \\ \frac{r \operatorname{cos} \theta}{2} \end{pmatrix}$$

em coordenadas polares.

Agora compondo as duas funções que apresentamos nós temos uma aplicação de Poincaré em C^+ , $\Phi = \psi_1 \circ \psi_2$. Assim, $\Phi : C^+ \rightarrow C^+$ onde

$$\Phi \begin{pmatrix} \theta_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{z_0} \operatorname{sen}(\theta_0 + \log(\sqrt{z_0})) \\ \frac{1}{2}\sqrt{z_0} \operatorname{cos}(\theta_0 + \log(\sqrt{z_0})) \end{pmatrix}.$$

A Figura 2.4 mostra a órbita de ψ_2 .

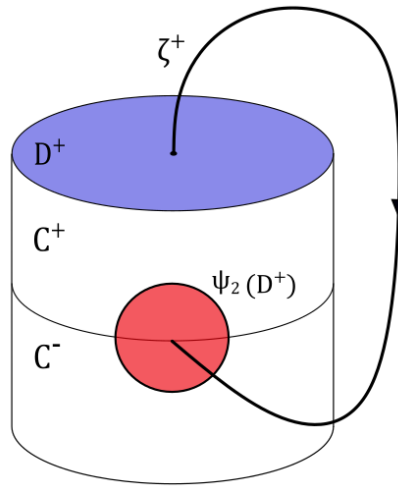


Figura 2.4: A função $\psi_2 : D^+ \rightarrow C$.

Procuremos os pontos fixos da aplicação de Poincaré Φ , para isso precisamos resolver

$$\begin{cases} \theta_0 = \frac{1}{2}\sqrt{z_0} \operatorname{sen}(\theta_0 + \log(\sqrt{z_0})) \\ z_0 = \frac{1}{2}\sqrt{z_0} \operatorname{cos}(\theta_0 + \log(\sqrt{z_0})) \end{cases}.$$

Elevando ao quadrado e somando essas equações chegamos em

$$\theta_0^2 + z_0^2 = \frac{z_0}{4} \Rightarrow \theta_0 = \pm \sqrt{z_0 - 4z_0^2},$$

Onde θ_0 está bem definido para $0 \leq z_0 \leq \frac{1}{4}$, e substituindo em uma das equações anteriores obtemos:

$$\operatorname{cos} \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{z_0 - 4z_0^2} + \log(\sqrt{z_0}) \right) = 2\sqrt{z_0}.$$

Observe que o termo $\sqrt{z_0 - 4z_0^2}$ tende a zero quando z_0 tende a zero, ao passo que $\log(\sqrt{z_0})$ tende a $-\infty$. Assim o gráfico do lado esquerdo da equação oscila infinitamente entre -1 e 1 quando $z_0 \rightarrow 0$. Portanto existem infinitas soluções para essa equação, e consequentemente infinitos pontos fixos de Φ . Cada ponto fixo da aplicação de Poincaré corresponde a uma órbita periódica do sistema que começa em um ponto de C^+ , segue a órbita homoclínica saindo de \mathbf{S} por D^+ e retornando em C^+ .

3 Convenções de Filippov

Nosso ambiente de estudo neste trabalho se trata de campos de vetores suaves por partes, conhecidos também como campos de Filippov. Devido a existência de uma região de descontinuidade que divide o campo de vetores em duas regiões, as propriedades de campos suaves não podem ser aplicadas aqui sem antes serem feitas algumas considerações, que faremos neste capítulo.

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$, e denotamos por $\mathcal{X}^r(K, \mathbb{R}^3)$ o conjunto de todos os campos de vetores $X : K \rightarrow \mathbb{R}^3$, \mathcal{C}^r , onde $K = \bar{U}$. Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{C}^r tal que $(0, 0, 0)$ é valor regular de f , ou seja, $\nabla f(0, 0, 0) \neq 0$. Daí definimos:

Definição 3.1. *Um campo de Filippov é um campo $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que*

$$Z(\xi) = \begin{cases} X(\xi), & \text{se } f(\xi) > 0 \\ Y(\xi), & \text{se } f(\xi) < 0 \end{cases}$$

Onde X e Y são campos vetoriais suaves.

Observe que podemos denotar $Z = (X, Y)$ e $f^{-1}(0) = \Sigma$, assim estamos trabalhando com objetos em $\Omega_f^r = \mathcal{X}^r(K, \mathbb{R}^3) \times \mathcal{X}^r(K, \mathbb{R}^3)$. Quando não houver confusão denotaremos Ω_f^r e $\mathcal{X}^r(K, \mathbb{R}^3)$ apenas por Ω^r e \mathcal{X}^r , respectivamente.

Por causa da existência da região de descontinuidade Σ , os conceitos de trajetórias de campos suaves não podem ser aplicados nessa região, então nosso trabalho agora é construir a teoria que possibilitará o estudo das trajetórias que passam por essa região. Para isso, definiremos alguns conceitos.

Definição 3.2. *A derivada de Lie de uma função f em relação ao campo X é dada pelo produto interno*

$$Xf(\xi) = \langle X(\xi), \nabla f(\xi) \rangle,$$

e as derivadas de ordens superiores são definidas por $X^i f(\xi) = \langle X(\xi), \nabla X^{i-1} f(\xi) \rangle$, para $i \geq 2$.

De modo análogo podemos definir a derivada de Lie em relação ao campo Y , denotada por $Yf(\xi)$.

De acordo com o sinal da derivada de Lie conseguimos dividir a região de descontinuidade em três regiões menores:

- **Região de Costura:** $\Sigma^c = \{\xi \in \Sigma \mid (Xf(\xi))(Yf(\xi)) > 0\}$,
- **Região de Deslize:** $\Sigma^s = \{\xi \in \Sigma \mid (Xf(\xi)) < 0 \text{ e } (Yf(\xi)) > 0\}$,
- **Região de Escape:** $\Sigma^e = \{\xi \in \Sigma \mid (Xf(\xi)) > 0 \text{ e } (Yf(\xi)) < 0\}$.

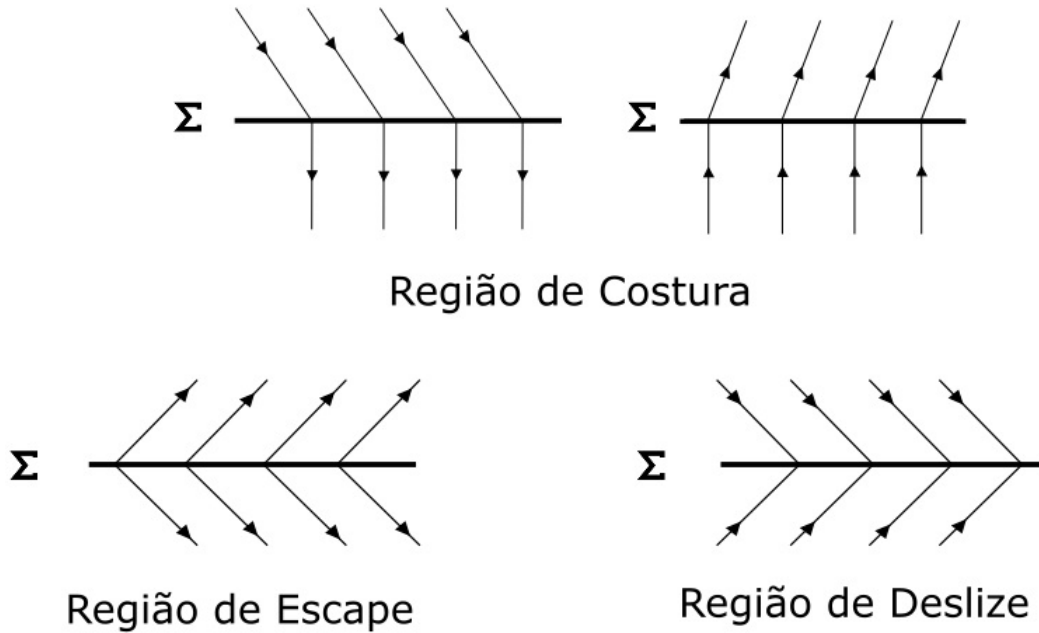


Figura 3.1: Retrato de fase das três regiões de Σ .

Como a derivada de Lie é um produto interno, temos que $Xf(\xi) = \|X(\xi)\| \|\nabla f(\xi)\| \cos(\theta)$, e assim, o sinal da Derivada de Lie depende apenas do ângulo entre o campo X e o gradiente da função f no ponto ξ . De modo análogo, o sinal da derivada de Lie em relação ao campo Y depende apenas do ângulo entre o campo Y , e o gradiente da função f no respectivo ponto.

Observamos também que a derivada de Lie é uma função contínua, assim as três regiões definidas acima são conjuntos abertos.

Note que as três regiões definidas acima não abrangem os pontos onde Xf ou Yf são nulas, esses pontos são chamados de **pontos de tangência**.

Definição 3.3. Um ponto de tangência ξ é dito **dobra visível** de X (respectivamente de Y) se $X^2f(\xi) > 0$ (respectivamente $Y^2f(\xi) < 0$). Caso satisfaça às desigualdades inversas os pontos são chamados de **dobra invisível**. Além disso, um ponto de dobra de X (respectivamente Y) é chamado de **regular** caso $Yf(\xi) > 0$ (respectivamente $Xf(\xi) < 0$).



Figura 3.2: Retrato de fase de um ponto de dobra visível.

Caso ξ seja ponto de tangência de X e Y simultaneamente, dizemos que ξ é um ponto de **tangência singular**.

Pela Figura 3.1 conseguimos ver que a órbita de pontos na região de costura ficam bem definidos apenas pelos campos X e Y , porém quando olhamos para a região de deslize e escape não é tão simples prever o comportamento de seus pontos, para isso precisamos

definir um outro campo vetorial, o campo de deslize ou campo deslizante Z^s que será o campo que atua na região Σ^s .

O campo Z^s é tangente à região Σ^s e no ponto ξ é dado por $Z^s = \hat{\xi} - \xi$, onde ξ é um ponto de Σ^s e $\hat{\xi}$ pertence à reta que passa por $\xi + X(\xi)$ e $\xi + Y(\xi)$, como mostra a Figura 3.3.

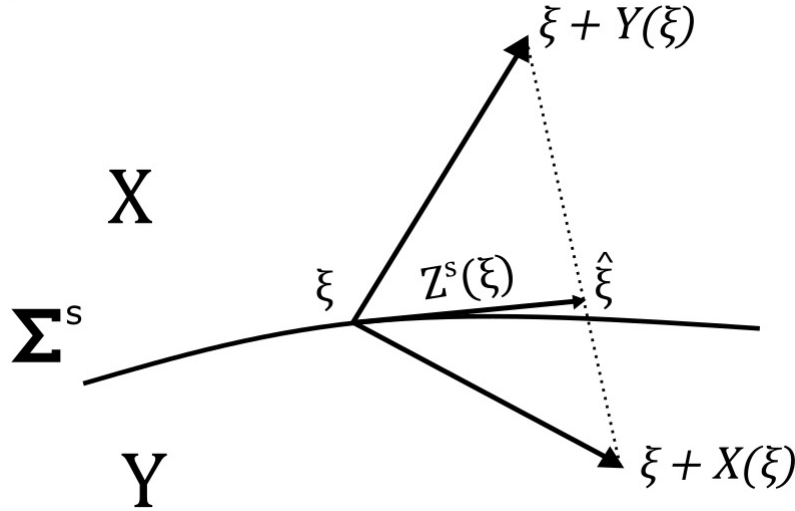


Figura 3.3: Vetor do campo deslizante.

O vetor ∇f é ortogonal à região de descontinuidade $f(x, y, z) = 0$ e o campo Z^s é tangente à região de deslize que está contida na região de descontinuidade. Assim, ∇f é ortogonal ao campo Z^s e portanto $\langle Z^s(\xi), \nabla f(\xi) \rangle = 0$.

Sendo $r(\lambda) = (\xi + X(\xi)) + \lambda(X(\xi) - Y(\xi))$ a equação da reta que passa pelos pontos $\xi + X(\xi)$ e $\xi + Y(\xi)$, temos que $\hat{\xi} \in r$ e $\langle Z^s(\xi), \nabla f(\xi) \rangle = \langle \hat{\xi} - \xi, \nabla f(\xi) \rangle = 0$. Daí,

$$\begin{aligned}
 \langle (\xi + X(\xi)) + \lambda_1(X(\xi) - Y(\xi)) - \xi, \nabla f(\xi) \rangle &= 0 \Rightarrow \\
 \langle X(\xi) + \lambda_1(X(\xi) - Y(\xi)), \nabla f(\xi) \rangle &= 0 \Rightarrow \\
 \langle X(\xi), \nabla f(\xi) \rangle + \lambda_1 \langle X(\xi), \nabla f(\xi) \rangle - \lambda_1 \langle Y(\xi), \nabla f(\xi) \rangle &= 0 \Rightarrow \\
 Xf(\xi) + \lambda_1(Xf(\xi) - Yf(\xi)) &= 0 \Rightarrow \\
 \lambda_1 &= \frac{Xf(\xi)}{Yf(\xi) - Xf(\xi)}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Assim conseguimos a definição a seguir:

Definição 3.4. O campo $Z^s : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dado por

$$Z^s(\xi) = \frac{X(\xi)Yf(\xi) - Y(\xi)Xf(\xi)}{Yf(\xi) - Xf(\xi)},$$

e chamado de **campo deslizante** ou **campo de deslize**.

Para o decorrer deste estudo é importante mencionar um outro campo, o **campo deslizante normalizado** dado por $\hat{Z} = X(\xi)Yf(\xi) - Y(\xi)Xf(\xi)$. Observe que o campo normalizado nada mais é do que o campo deslizante multiplicado pela função $Yf(\xi) - Xf(\xi)$, função essa que é positiva se $\xi \in \Sigma^s$ e negativa se $\xi \in \Sigma^e$.

Uma outra coisa que pontuamos aqui é que através do campo deslizante conseguimos explicitar o campo que atua na região de escape Σ^e . Seja $\xi \in \Sigma^e$, então $\xi \in \Sigma^s$ para

o campo $(-Z)$. Assim, temos que o **campo de escape** $Z^e : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dado por $Z^e(\xi) = -(-Z)^s(\xi)$.

Denotaremos por Z^Σ ambos os campos deslizante e de escape. Observe que para a região de deslize, o campo normalizado terá o mesmo sentido que o campo de deslize, já na região de escape o campo normalizado terá a orientação oposta à do campo de escape, devido ao sinal da função $Yf(\xi) - Xf(\xi)$ em cada região.

Agora apresentaremos uma definição de trajetória de um ponto em um campo vetorial suave e em seguida definiremos como seria a trajetória local dos pontos em cada região do campo de Filippov, dada pelas textbfconvenções de Filippov.

Definição 3.5. *Seja X um campo vetorial suave. A **trajetória** $\varphi_X(t, \xi)$ que passa pelo ponto ξ é tal que:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi_X(t, \xi) &= X(\varphi_X(t, \xi)), \\ \varphi_X(0, \xi) &= \xi. \end{cases}$$

Definição 3.6. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ vizinhança da origem suficientemente pequena, a **trajetória local** $\varphi_Z(t, \xi)$ de um sistema como na Definição 3.1 passando pelo ponto $\xi \in \mathbb{R}^3$ é dada por:*

- $\varphi_Z(t, \xi) = \varphi_X(t, \xi)$ para $t \in I$ e $\xi \in U$ com $f(\xi) > 0$.
- $\varphi_Z(t, \xi) = \varphi_Y(t, \xi)$ para $t \in I$ e $\xi \in U$ com $f(\xi) < 0$.
- Para $\xi \in \Sigma^c$ com $Xf(\xi), Yf(\xi) > 0$, a trajetória local de Z é definida como $\varphi_Z(t, \xi) = \varphi_Y(t, \xi)$ para $t \in I \cap \{t < 0\}$ e $\varphi_Z(t, \xi) = \varphi_X(t, \xi)$ para $t \in I \cap \{t > 0\}$. Caso $Xf(\xi), Yf(\xi) < 0$, a definição é a mesma revertendo o tempo.
- Para $\xi \in \Sigma^s$, a trajetória local de Z é definida como $\varphi_Z(t, \xi) = \varphi_{Z^\Sigma}(t, \xi)$ para $t \in I \cap \{t \geq 0\}$ e $\varphi_Z(t, \xi)$ pode ser igual a $\varphi_X(t, \xi)$, $\varphi_Y(t, \xi)$ ou $\varphi_{Z^\Sigma}(t, \xi)$ para $t \in I \cap \{t \leq 0\}$. Caso $\xi \in \Sigma^e$ a definição é a mesma, porém revertendo o tempo.
- Para $\xi \in \Sigma$ com ξ sendo um ponto de dobra visível, sem perda de generalidade assumimos ser dobra visível de X . A trajetória local de Z é definida como $\varphi_Z(t, \xi) = \varphi_X(t, \xi)$, $\varphi_Y(t, \xi)$ ou $\varphi_{Z^\Sigma}(t, \xi)$ para $t \in I \cap \{t \leq 0\}$ e $\varphi_Z(t, \xi) = \varphi_X(t, \xi)$ para $t \in I \cap \{t \geq 0\}$.

Definição 3.7. *Um equilíbrio $\xi^* \in \Sigma^{s,e}$ do campo de deslize ou campo de escape, ou seja, um ponto tal que $Z^\Sigma(\xi^*) = 0$ é chamado de **pseudo-equilíbrio** de Z .*

Caso ξ^* seja um equilíbrio hiperbólico de Z^Σ dizemos que ξ^* é pseudo-equilíbrio hiperbólico. Se $\xi^* \in \Sigma^s$ é um foco hiperbólico instável, então denotamos de pseudo-equilíbrio sela-foco hiperbólico ou pseudo-foco de sela hiperbólico.

Introduziremos o conceito de equivalência entre campos de Filippov com a próxima definição e em seguida apresentaremos alguns resultados que serão úteis para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

Definição 3.8. *Sejam Z e $\tilde{Z} \in \Omega^r$. Dizemos que Z e \tilde{Z} são Σ – **equivalente** se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow U$ satisfazendo $h(\Sigma) = \Sigma$ e que leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} .*

Observação 3.1. Assumindo que $q \in \partial\Sigma^{s,e}$ seja um ponto de dobra regular visível de Z , então as seguintes propriedades valem:

1. Existe uma vizinhança U de q tal que $l = U \cap \partial\Sigma^{s,e}$ é constituída por pontos de dobra regular visível.
2. O campo vetorial Z^Σ é transversal a l .
3. Existe uma vizinhança V de l tal que $Z|_V$ é estruturalmente estável.

Olhando mais atentamente para a região de descontinuidade Σ conseguimos explicitar melhor a sua configuração. Já sabemos que Σ pode ser dividida em três regiões. Como essas regiões dependem apenas das derivadas de Lie, que são funções contínuas, temos que as fronteiras entre essas regiões são compostas por pontos onde $Xf(\xi)$ ou $Yf(\xi)$ é nulo. Sendo assim, chamaremos de S_x a região onde $Xf = 0$ e S_y onde $Yf = 0$, e usando uma mudança de variáveis, conseguimos dividir a região Σ como na Figura 3.4. Tomando um ponto $q \in \partial\Sigma^s$ como na Observação 3.1¹, e assumindo que $Xf(q) = 0$, $Yf(q) > 0$ e $X^2f(q) > 0$ então $q \in S_x$ e existe uma vizinhança U de q tal que $U \cap S_x$ é constituído de pontos de tangência. Além disso, por X^2f ser uma função contínua conseguimos tomar U de forma que $U \cap S_x$ contenha apenas pontos onde $X^2f(\xi) > 0$, ou seja, $U \cap S_x$ é constituída de pontos de dobra regular visível, assim conseguimos mostrar, que existe um segmento de reta l constituído de pontos de dobra.

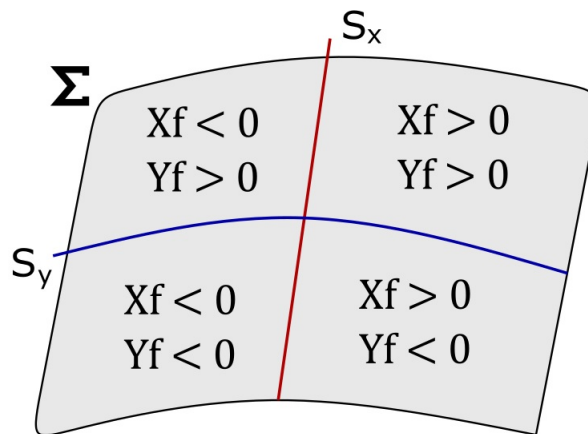


Figura 3.4: Divisão da região Σ .

Para o segundo item da Observação 3.1 sabemos que o campo vetorial deslizante é tangente à região de descontinuidade. Como nossa região de descontinuidade Σ é um plano, temos que o vetor do campo deslizante está contido em Σ . Sabemos também que esse vetor no ponto q , aponta para o segmento que passa por $q + X(q)$ e $q + Y(q)$, semelhante à Figura 3.3. Uma vez que $Xf(q) = 0$, pois q é ponto de dobra, temos que $X(q) = 0$ ou $X(q)$ e ∇f são perpendiculares. Como $X^2f(q) = \langle Xf(q), \nabla Xf(q) \rangle \neq 0$ temos que $X(q)$ e ∇f são perpendiculares, ou seja, $X(q)$ também está contido em Σ .

Pela construção do vetor do campo deslizante, e pelo que foi observado podemos concluir que o vetor do campo deslizante que passa por q , tem o mesmo sentido e direção que o vetor $X(q)$ (ver Figura 3.5). Para concluirmos o segundo item da Observação 3.1 basta mostrar que o vetor $X(q)$ não é paralelo a l no ponto q . Observe que a reta l está contida em $\{Xf = 0\}$, uma vez que a reta l é composta por pontos de tangência. O conjunto $\{Xf = 0\}$ por sua vez é uma curva de nível da função $Xf : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que leva o ponto q em $Xf(q) = \langle X(q), \nabla f(q) \rangle$. Assim, o vetor gradiente ∇Xf é perpendicular

¹Caso $q \in \partial\Sigma^e$ a construção segue de forma semelhante.

a $\{Xf = 0\}$, e conseqüentemente a l . Para que $X(q)$ seja paralelo a l , precisamos que $\langle X(q), \nabla Xf(q) \rangle = 0$, o que não ocorre pois os pontos de l são pontos de dobra visível e $\langle X(q), \nabla Xf(q) \rangle > 0$. Portanto o Vetor Deslizante é transversal à reta l .

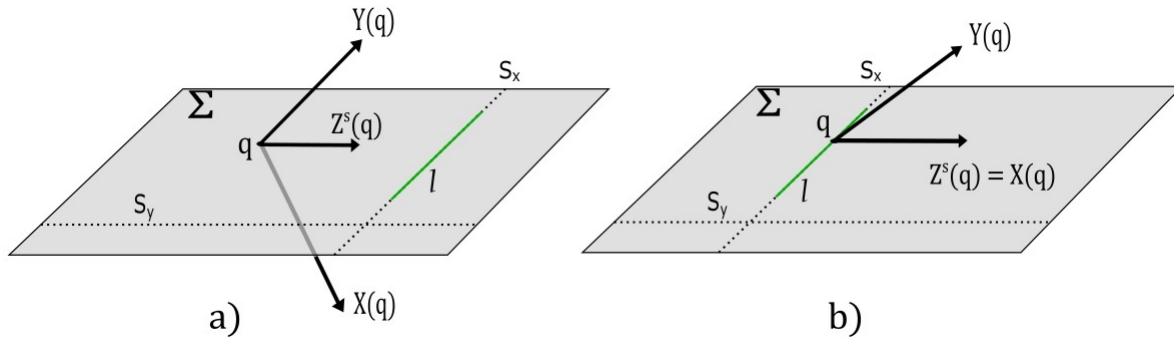


Figura 3.5: Representação gráfica do vetor do campo deslizante. Em **a)** o ponto q está contido na região de deslize. Já em **b)** o ponto q está no bordo da região de deslize.

No terceiro item usaremos o Teorema 1 da referência [5], que diz que um campo Z é estruturalmente estável em $p \in \Sigma$ se, e somente se, p é um ponto regular de Z ou p é um ponto singular de Z do tipo foco que não satisfaça $Xf(p) = 0$, e $Yf(p) = 0$. Como q é um ponto de dobra visível, temos que ele é um ponto singular, $Xf(q) = 0$, mas não satisfaz $Yf(q) = 0$. Como uma vizinhança suficientemente pequena de q é constituída de pontos de dobra visível, e pontos regulares, garantimos que, existe uma vizinhança V de q tal que, $Z|_V$ é estruturalmente estável.

Nesta mesma referência podem ser encontrados os três itens da observação 3.1 mais detalhados para os leitores mais curiosos.

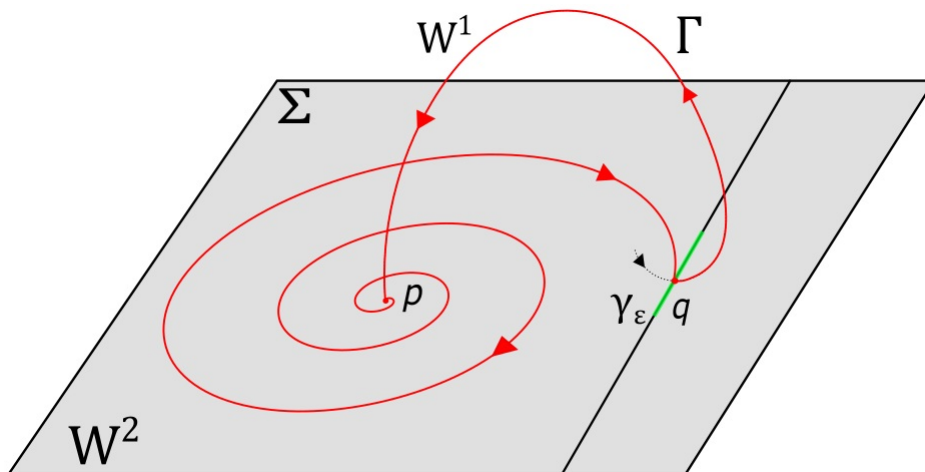


Figura 3.6: A órbita Shilnikov de deslize Γ conectando o ponto q ao ponto p .

Para finalizar este capítulo vamos definir órbita Shilnikov de deslize.

Definição 3.9. *Seja $Z = (X, Y)$ um campo de vetores suave por partes, que tenha um pseudo-foco de sela hiperbólico $p \in \Sigma^s$ (respectivamente Σ^e), e seja $q \in \partial\Sigma^s$ (respectivamente $q \in \partial\Sigma^e$), um ponto de dobra regular visível de Z tal que:*

- A trajetória passada (respectivamente futura) de Z começando em q , segue o vetor do campo deslizante Z^Σ , e converge para p no tempo passado (respectivamente tempo futuro).
- A trajetória futura (respectivamente passada) de Z começando em q , cruza a região de descontinuidade apenas em um ponto, e chega em p em um tempo finito $t_0 > 0$ (respectivamente $t_0 < 0$).

Assim, entre p e q é facilmente caracterizada um loop deslizante Γ . Nós chamamos Γ de "**Órbita Shilnikov de Deslize**" ou "**Órbita de Shilnikov Deslizante**".

A Figura 3.6 ilustra uma Órbita Shilnikov de Deslize.

4 Órbitas de Shilnikov em Campos de Filippov

Neste capítulo estudaremos os principais resultados que motivaram a elaboração deste trabalho, os mesmos podem ser encontrados na referência [1]. O capítulo se organiza em três seções, a primeira trás algumas noções básicas necessárias para demonstração dos resultados, que se apresentam como dois teoremas e são enunciados, e demonstrados nas outras duas seções.

4.1 Observações Iniciais

Primeiramente para simplificar vamos adotar $f(x, y, z) = z$, assim temos que $\Sigma = \{z = 0\}$. Suponha que $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega^r$ admite uma órbita Shilnikov de deslize Γ_0 que conecta o pseudo-foco de sela hiperbólico $p_0 = (0, 0, 0) \in \Sigma^s$ a si mesmo, contendo um ponto de dobra regular q_0 . O caso onde $p \in \Sigma^e$ é resolvido de forma semelhante. Assumimos também, sem perda de generalidade, que q_0 é dobra visível de X_0 e o arco da órbita que conecta q_0 e p_0 , nessa direção, intersecta a superfície de descontinuidade apenas nos pontos p_0 e q_0 (ver Figura 4.1).

Considere $\gamma_\epsilon = \overline{B_\epsilon(q_0)} \cap \partial\Sigma^s$, onde $B_\epsilon(q_0) \subset \Sigma$ é a bola planar centrada em q_0 de raio ϵ . Observe que para ϵ suficientemente pequenos γ_ϵ é uma curva de dobra visível, como mostrado na Observação 3.1. Além disso, temos que Z^s , o vetor do campo deslizante, é transversal a γ_ϵ . Pela Definição 3.7, a trajetória passada de Z^s começando em q_0 converge para p_0 , e a trajetória futura de X_0 começando em q_0 chega na superfície de descontinuidade transversalmente em p_0 . Usando o Teorema da Função Implícita (ver A.3) afirmamos que:

- **Afirmção 1:** Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno a trajetória passada de Z^s começando em qualquer ponto de γ_ϵ converge para p_0 .
- **Afirmção 2:** Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno a trajetória futura de X_0 saindo de um ponto de γ_ϵ chega transversalmente na superfície de descontinuidade em uma curva que chamaremos de ν_ϵ .

Uma vez com as afirmações em mãos, como $q_0 \in \gamma_\epsilon$ e a órbita de q_0 converge para p_0 , temos que $p_0 \in \nu_\epsilon$. A Figura 4.1 ilustra o que foi observado até aqui.

Mostremos agora a afirmação 2. Seja $\xi_0 = (x_0, y_0, 0) \in \gamma_\epsilon$ e tome a função $h(t, (x, y, z)) = f(\varphi_{X_0}(t, (x, y, z)))$. Daí, $h(0, (x_0, y_0, 0)) = f(x_0, y_0, 0) = 0$ uma vez que $\gamma_\epsilon \in \Sigma$. Sabemos também que $\nabla f = (0, 0, 1)$, pois $f(x, y, z) = z$ e $\frac{d}{dt}\varphi_{X_0}(0, (x_0, y_0, 0)) = X_0(\varphi_{X_0}(0, (x_0, y_0, 0))) = X_0(x_0, y_0, 0) \neq 0$, portanto $\det \left[\frac{\partial f}{\partial t}(\varphi_{X_0}(0, (x_0, y_0, 0))) \right] \neq 0$. Concluimos pelo Teorema da

Função Implícita que $h(\phi(\xi_0), \xi_0) = f(\varphi_{X_0}(t_0, \xi_0)) = 0$, ou seja, para um tempo futuro a trajetória de um ponto em γ_ϵ por X_0 está em Σ .

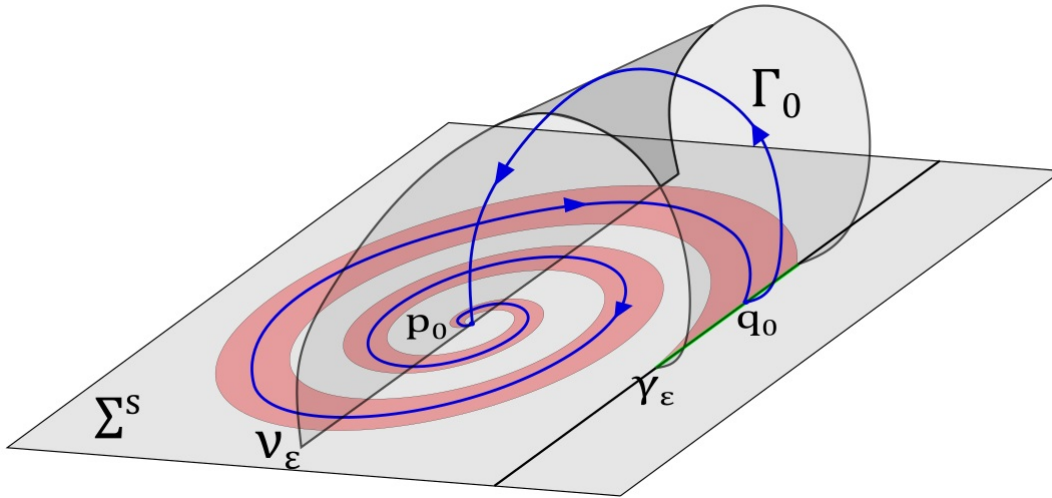


Figura 4.1: Representação da Γ_0 e das curvas γ_ϵ e ν_ϵ .

Para a outra afirmação precisamos definir o que é uma bacia de atração,

Definição 4.1. *Sejam $\xi_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do campo $X \in C^1(U)$ e $\phi : \Omega \rightarrow U$ o fluxo de X . A **bacia de atração** de ξ_0 , $A(\xi_0)$, é o conjunto*

$$A(\xi_0) = \{\xi \in U : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \xi) = \xi_0\}.$$

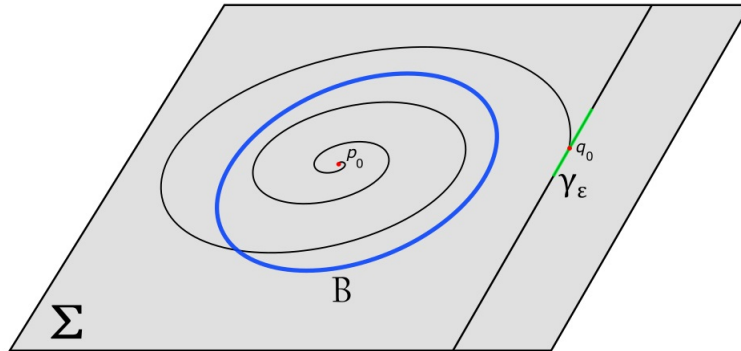


Figura 4.2: Bacia de atração B do equilíbrio p_0 .

Agora, com a definição de bacia de atração demonstramos a afirmação 1. Seja B a bacia de atração de p_0 e tome a função $h(t, \xi) = \varphi_{Z^s}(-t, \xi) - \varphi_{Z^s}(-t_\xi, \xi)$, onde t_ξ é o tempo positivo tal que $\varphi_{Z^s}(-t_\xi, \xi) \in \partial B$. Como sabemos que $\varphi_{Z^s}(-t, q_0) = p_0$ para um t infinito, pois a trajetória de q_0 pelo campo Z^s no tempo passado tende ao ponto p_0 , afirmamos que os pontos de γ_ϵ chegam ao bordo de B através do campo Z^s em algum tempo negativo. Em outras palavras, afirmamos que existe um tempo t_ξ , para cada ponto $\xi \in \gamma_\epsilon$ próximo de q_0 , tal que $\varphi_{Z^s}(-t_\xi, \xi) \in \partial B$. Caso contrário, ou a órbita de ξ é um equilíbrio de Z^s fora de B , e portanto sua trajetória é um ponto fixo, ou ela fica infinitamente contornando ∂B .

O primeiro não ocorre pois p_0 é o único equilíbrio naquela região, e no segundo caso em algum momento a órbita de ξ intersectaria a órbita de q_0 , que tente a p_0 e consequentemente tenderia a p_0 . Portanto, se $\xi \in \gamma_\epsilon$, em algum momento ele chega ao bordo de B . Daí, segue pelo Teorema da Função Implícita (ver Teorema A.3 no Apêndice A) que para algum $t > 0$, $h(\phi(\xi), \xi) = 0$, ou seja, $\varphi_{Z^s}(-\phi(\xi), \xi) = \varphi_{Z^s}(-t\xi, \xi)$. Uma vez que a órbita do ponto ξ chega no bordo de B a bacia de atração faz com que a órbita tenda ao ponto p_0 . A Figura 4.2 ilustra a bacia de atração de p_0 e a órbita levando q_0 em p_0 .

Observamos também que, sendo $W \in \Omega^r$ uma vizinhança de Z_0 suficientemente pequena, pelo item 3 da Observação 3.1, conseguimos usar as propriedades da estabilidade estrutural do ponto de dobra visível, para garantirmos que em cada $Z = (X, Y) \in W$ existam um ponto de dobra visível q_Z contido em uma curva de pontos de dobra visível γ_ϵ^Z , e um pseudo-equilíbrio p_Z , que satisfazem $p_Z \rightarrow p_0$, $q_Z \rightarrow q_0$ e $\gamma_\epsilon^Z \rightarrow \gamma_\epsilon$ quando $Z \rightarrow Z_0$.

Além disso, podemos ver o campo Z como um parâmetro das funções trajetória dos campos X e Z^s , e usando a dependência diferencial¹ dessas funções sob as condições iniciais e seus parâmetros, podemos concluir que a trajetória passada do campo Z^s , começando em um ponto de γ_ϵ^Z converge para p_Z e a trajetória futura pelo campo X de um ponto em γ_ϵ^Z , chega transversalmente em Σ , em uma curva que chamaremos de ν_ϵ^Z , e $\nu_\epsilon^Z \rightarrow \nu_\epsilon$ quando $Z \rightarrow Z_0$. A Figura 4.3 ilustra como seriam esses campos na vizinhança de Z_0 . Note que um campo Z tem uma órbita Shilnikov de deslize, apenas se $p_Z \in \nu_\epsilon^Z$.

Para simplificar a notação usaremos $\gamma_\epsilon^\mu = \gamma_\epsilon^{Z^\mu}$, $\nu_\epsilon^\mu = \nu_\epsilon^{Z^\mu}$ e $p_\mu = p_{Z^\mu}$.

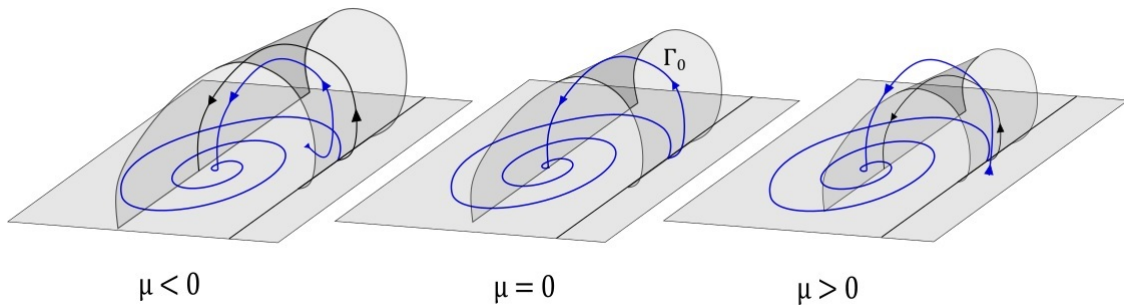


Figura 4.3: Família a 1-parâmetro Z_μ .

4.2 Ocorrência de Órbitas de Shilnikov em Famílias Genéricas

Essa seção foca na apresentação e demonstração do nosso primeiro resultado, que mostra que a Órbita Shilnikov de Deslize ocorre em famílias genéricas a um parâmetro em campos de vetores de Ω^r . Além disso, caso Z_0 admita uma órbita Shilnikov de deslize, então existirá uma vizinhança de Z_0 que contém infinitas classes de equivalência de campos de vetores.

Teorema 4.2. *Assuma que $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega^r$ tenha uma órbita Shilnikov de deslize Γ_0 e seja $W \subset \Omega^r$ uma vizinhança de Z_0 . Então, existe uma função de classe C^1 , $g : W \rightarrow \mathbb{R}$*

¹O capítulo 6 da referência [16] e a Parte A capítulo II de [6] trazem mais detalhes sobre dependência diferencial.

tendo 0 como valor regular tal que $Z \in W$ tem uma órbita Shilnikov de deslize Γ se, e somente se, $g(Z) = 0$. Além disso, qualquer vizinhança $W \in \Omega^r$ de Z_0 contém infinitas classes de Σ – equivalência de campos de vetores de Filippov.

Demonstração: Vamos assumir que em um sistema de coordenadas local suave (x, y) em torno de $p_0 \in \Sigma^s$, ν_ϵ é dada por $y = 0$, ou seja, $\nu_\epsilon = \{(x, 0, 0) : -\epsilon \leq x \leq \epsilon\}$. Daí, para $Z \in W$, a curva ν_ϵ^Z é dada como o gráfico da função $y = k_Z(x) = a_0^Z + a_1^Z x + \mathcal{O}_2(x)$, sendo a_0^Z e a_1^Z parâmetros tais que $a_0^{Z_0} = a_1^{Z_0} = 0$.

Dado $p_Z = (x_Z, y_Z, 0)$ e definindo a função $g : W \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(Z) = k_Z(x_Z) - y_Z$. Da definição de g segue que ela é C^1 e que $g(Z_0) = 0$, uma vez que $p_0 = p_{Z_0} = (0, 0, 0)$. Além disso, caso $g(Z) = 0$ temos que $p_Z \in \nu_\epsilon^Z$, o que caracteriza uma órbita Shilnikov de deslize para o campo Z .

Agora, sejam $Z^* \in W$ satisfazendo $g(Z^*) = 0$ e $V \in \Omega^r$. Mostraremos que a função g tem 0 como valor regular, demonstrando que $g'(g^{-1}(0)) \neq 0$. Para isso tomamos a derivada de g em Z^* na direção de V , ou seja $g'(Z^*) \cdot V$.

Tomando $Z(v) \subset \Omega^r$, uma curva suave tal que $Z(0) = Z^*$ e $Z'(0) = V \in \Omega^r$, e usando a regra da cadeia e a definição de derivada, temos que a derivada direcional $g'(Z^*) \cdot V$ é dada por

$$g'(Z^*) \cdot V = \frac{d}{dv} g(Z(v))|_{v=0} = \lim_{v=0} \frac{g(Z(v)) - g(Z^*)}{v}.$$

Agora, tomando $Z(v)$ de forma que $p_{Z(v)} = (0, 0, 0)$ e $k_{Z(v)}(x_{Z(v)}) = v$, nós temos que $g(Z(v)) = k_{Z(v)} - y_{Z(v)} = v - 0 = v$. Logo

$$g'(Z^*) \cdot V = \lim_{v=0} \frac{v - g(Z^*)}{v} = 1,$$

uma vez que $g(Z^*) = 0$.

Observamos que uma vez que $p_{Z(v)} = (0, 0, 0)$, basta assumir que $a_0^{Z(v)} = v$ e assim temos que $k_{Z(v)}(x_{Z(v)}) = v$ como queríamos.

Como V é um vetor qualquer, provamos dessa forma que 0 é valor regular da função g , e por consequência $g'(Z^*) : \Omega^r \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetora para todo $Z^* \in g^{-1}(0)$. Assim temos que $g^{-1}(0)$ é uma subvariedade de codimensão 1 de W , de modo que para cada $Z^* \in g^{-1}(0)$, existe uma curva $Z_\mu^* \subset W$, com $\mu \in \mathbb{R}$ tomado em uma vizinhança de 0, que intersecta $g^{-1}(0)$ transversalmente em $Z_0^* = Z^*$. Particularmente, para Z_0 , nós dizemos que Z_μ é a curva geradora da órbita Shilnikov de deslize.

Agora seja Z_μ uma curva geradora da órbita Shilnikov de deslize Γ_0 . Como o pseudo-equilíbrio p_{Z_μ} de Z_μ não está em ν_ϵ^μ , para $\mu \neq 0$, a saturação passada (ver Definição A.2) de γ_ϵ^μ pelo campo Z_0^s intersecta a curva ν_ϵ^μ em um número finito $N(\mu)$ de conjuntos disjuntos. Assim conseguimos encontrar trajetórias do campo Z_0^s , começando em γ_ϵ^μ , que intersecta a curva ν_ϵ^μ em $N(\mu)$ pontos, como podemos ver na Figura 4.3.

Agora, caso Z_1 e Z_2 sejam campos topologicamente equivalentes então $\gamma_\epsilon^{Z_1}$ e $\nu_\epsilon^{Z_1}$ são levados para $\gamma_\epsilon^{Z_2}$ e $\nu_\epsilon^{Z_2}$, respectivamente. Portanto $N(Z_1) = N(Z_2)$.

Por fim, caso $N(\mu_1) \neq N(\mu_2)$, temos que Z_{μ_1} e Z_{μ_2} não podem ser Σ – equivalentes. Além disso, $N(\mu) \rightarrow \infty$ quando $\mu \rightarrow 0$, pois quando $\mu = 0$, $p_0 \in \nu_\epsilon$. Concluimos dessa maneira que existem infinitas classes de Σ – equivalência de campos de vetores de Filippov em qualquer vizinhança $W \subset \Omega^r$ de Z_0 . Concluindo assim a demonstração do Teorema 4.2. ■

4.3 Existência de Infinitas Órbitas Periódicas Próximas à Órbita de Shilnikov

Nos concentremos agora no desenvolvimento do nosso segundo resultado, o qual é uma versão do Teorema de Shilnikov, garantindo que para um parâmetro específico a família Z_μ admite infinitas órbitas periódicas em uma vizinhança de Γ_0 .

Teorema 4.3. *Assuma que $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega^r$ tenha uma órbita Shilnikov de deslize Γ_0 e seja $Z_\mu = (X_\mu, Y_\mu) \in \Omega^r$ a curva geradora de Γ_0 . Então os seguintes resultados valem:*

- Para $\mu = 0$, toda vizinhança $G \subset \mathbb{R}^3$ de Γ_0 contém infinitas órbitas periódicas de período 1 de Z_0 .*
- Seja $G \in \mathbb{R}^3$ uma vizinhança suficientemente pequena de Γ_0 . Então, para cada $|\mu| \neq 0$ suficientemente pequeno, G contém pelo menos um número finito $N(\mu) > 0$ de órbitas periódicas de período 1 de Z_μ . Além disso, $N(\mu) \rightarrow \infty$, quando $\mu \rightarrow 0$.*

Demonstração: Seja S_ϵ a saturação passada (ver Definição A.2) de γ_ϵ pelo campo Z^s , ou seja, olhamos para a saturação de γ_ϵ pelo campo Z^s para o tempo negativo. Como p_0 é um foco do campo deslizante, para cada vez que S_ϵ passa por ν_ϵ chamaremos o conjunto interseção de I_i , como mostra a Figura 4.4. Daí nós temos que

$$S_\epsilon \cap \nu_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,$$

onde a sequência de conjuntos compactos $(I_i)_{i=1}^{\infty}$ satisfaz $I_i \cap I_j = \emptyset$ se $i \neq j$, caso contrário existiria interseção das trajetórias dos pontos de γ_ϵ , o que não pode ocorrer pela unicidade de trajetórias.

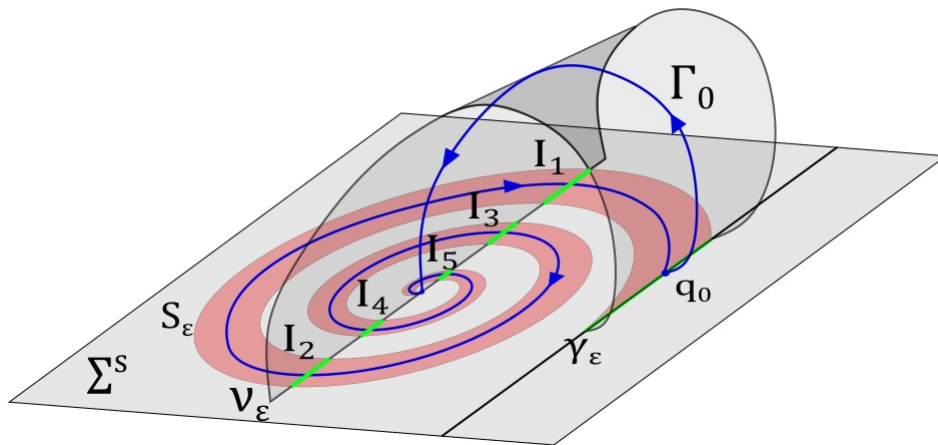


Figura 4.4: Representação dos conjuntos I_i e da saturação de γ_ϵ .

Observe que os intervalos I_i 's se acumulam em p_0 à medida que i tende para o infinito, uma vez que já foi mostrado que as órbitas dos pontos em γ_ϵ tendem a p_0 devido a bacia de atração de p_0 (ver Afirmação 1 da Seção 4.1).

Agora, para cada $i = 1, 2, \dots$, nós definimos os intervalos J_i como a interseção entre a saturação passada de I_i pelo campo X com a curva γ_ϵ (ver Figura 4.5). Novamente, temos que $J_i \cap J_j = \emptyset$ para $i \neq j$, pois caso contrário um ponto de γ_ϵ chegaria em dois

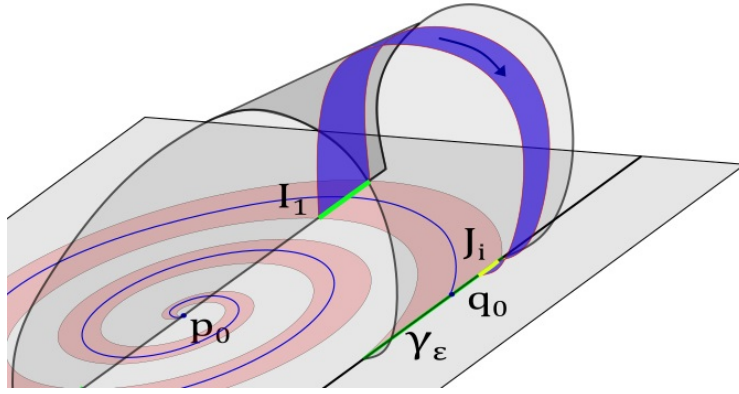


Figura 4.5: Representação de um dos intervalos J_i

pontos diferentes pelo campo X . De modo análogo, temos $J_i \rightarrow q_0$, uma vez que os I_i 's tendem a p_0 e a trajetória de q_0 por X chega em p_0 .

Além disso, uma aplicação de primeiro retorno π (ver Definição 2.9), está bem definida em $\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$, no sentido positivo das trajetórias dos campos X e Z^s . Porém ela não é injetiva, por exemplo, tomando um ponto ξ em $J_1 \subset \gamma_\epsilon$, sua trajetória passada pelo campo Z^s intersecta os intervalos I_i nos respectivos pontos p_i , para cada um desses pontos existe um ponto q_i no respectivo intervalo J_i para o qual a trajetória de q_i pelo campo X chega no ponto p_i de I_i , que por sua vez chega ao ponto ξ pelo campo Z^s . Assim todos os pontos q_i nos intervalos J_i têm o mesmo ponto ξ de J_1 como imagem por π .

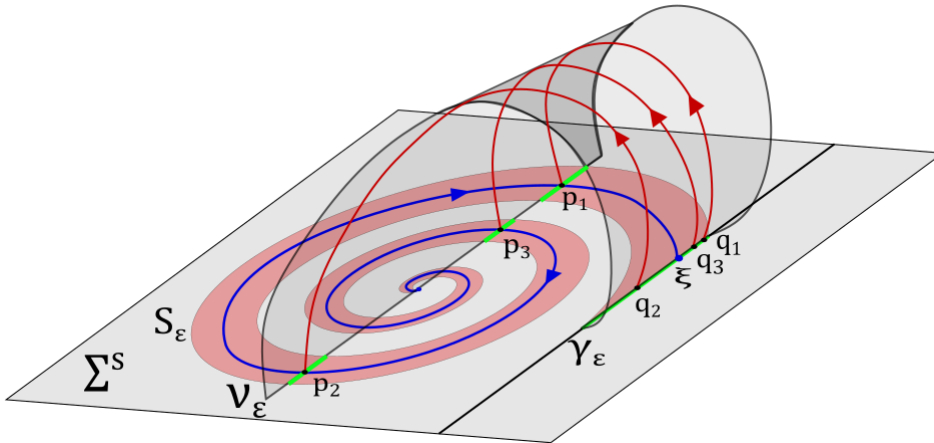


Figura 4.6: Alguns pontos q_i que tem a mesma imagem ξ por π .

Agora vamos construir uma seqüência de aplicações $(\psi_i)_{i=1}^{\infty}$, $\psi_i : J_i \rightarrow J_i$, satisfazendo a seguinte propriedade:

(P) para cada $i \in \mathbb{N}$, se $y \in J_i$ e $x = \psi_i(y)$, então $\pi(x) = y$.

Essa propriedade garante que um ponto fixo de ψ_i é também um ponto fixo para a aplicação π . Agora, para um ponto $\xi \in \Sigma^s$ e um ponto $z \in \mathbb{R}^3$, sejam $\varphi^s(t, \xi)$ e $\varphi^X(t, z)$ os fluxos de Z^s e X , respectivamente. Para $\xi \in J_i$, existem $t_i^s(\xi) < 0$ e $t_i^X(\xi) < 0$ tais que, $\xi_i(\xi) = \varphi^s(t_i^s(\xi), \xi) \in I_i$ e $\varphi^X(t_i^X(\xi), \xi_i(\xi)) \in J_i$. Assim, definindo $\psi_i(\xi) = \varphi^X(t_i^X(\xi), \xi_i(\xi))$, temos que ψ_i é uma função de classe C^1 , pois é composição dos fluxos, e do jeito que foi

construído a propriedade **(P)** é satisfeita, e daí os pontos fixos de ψ correspondem a órbitas deslizantes periódicas do campo Z (veja Figura 4.7).

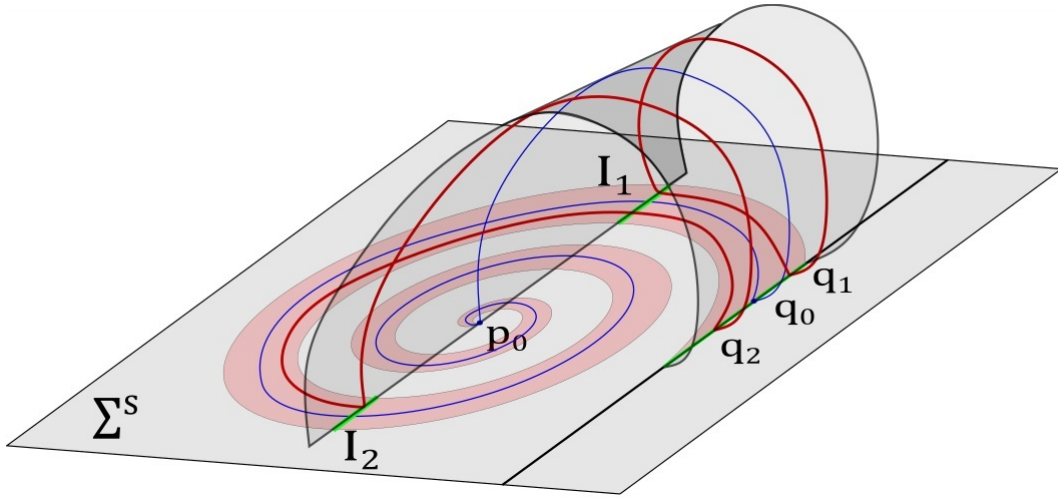


Figura 4.7: Representação das órbitas periódicas.

Agora, para cada $i \in \mathbb{N}$, a função ψ_i é contínua e tem o intervalo compacto J_i como domínio e contradomínio. Logo, aplicando o teorema do ponto fixo, garantimos a existência de uma sequência $(q_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que $q_i \in J_i$ e $\psi_i(q_i) = q_i$. Assim nós garantimos que existe uma sequência infinita de órbitas deslizantes periódicas de Z . Provando o item **a)**.

Para provarmos a afirmação **b)**, basta observar que para $\mu \neq 0$ o pseudo-equilíbrio $p_\mu \notin \gamma_\epsilon^\mu$, e assim a intersecção da saturação passada de γ_ϵ^μ pelo campo Z_μ^s com a curva ν_ϵ^μ em uma vizinhança de G , $S_\epsilon^\mu \cap \nu_\epsilon^\mu \cap G$, tem um número finito, $N(\mu)$, de conjuntos disjuntos I_i .

Fazendo uma análise análoga ao item **a)**, garantimos a existência dos pontos fixos para as funções ψ_i , porém como $N(\mu)$ é finito, esses pontos fixos também são. Além disso, como o número de interseções $N(\mu) \rightarrow \infty$ quando $\mu \rightarrow 0$, concluímos a prova da afirmação **b)** e do Teorema 4.3. ■

5 Um Exemplo Linear

A intensão deste capítulo é mostrar, que os resultados apresentados nesse trabalho, não ficam apenas no campo teórico, mas que podem ser aplicados de forma prática. Nós vamos apresentar uma família a um parâmetro de campos de vetores suaves por partes $Z_\mu \in \Omega^r$, onde Z_0 admite uma órbita Shilnikov de deslize.

Para $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$, considere o seguinte campo de vetores suave por partes:

$$Z_\mu(x, y, z) = \begin{cases} X(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\alpha \\ x - \beta \\ y - \frac{3\beta^2}{8\alpha} \end{pmatrix} & \text{se } z > 0 \\ Y_\mu(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{3\alpha}{\beta}y + \beta \\ \mu + \frac{3\beta^2}{8\alpha} \end{pmatrix} & \text{se } z < 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Observe que nossa função f neste caso é $f(x, y, z) = z$, daí, $\Sigma = \{z = 0\}$ é a superfície de descontinuidade do sistema (5.1). Sabemos que $\nabla f = (0, 0, 1)$ e então conseguimos calcular as derivadas de Lie em relação a X e Y_0 , sendo $Xf(\xi) = y - \frac{3\beta^2}{8\alpha}$ e $Y_0f(\xi) = \frac{3\beta^2}{8\alpha}$. Assim conseguimos explicitar os conjuntos Σ^c , Σ^s e Σ^e , sendo estes:

- $\Sigma^c = \{(x, y, 0) : y > \frac{3\beta^2}{8\alpha}\}$,
- $\Sigma^s = \{(x, y, 0) : y < \frac{3\beta^2}{8\alpha}\}$,
- $\Sigma^e = \emptyset$.

Além disso, uma vez que $X^2f(\xi) = x - \beta$, podemos explicitar as curvas dos pontos de dobra, ou seja, o conjunto $\{(x, \frac{3\beta^2}{8\alpha}, 0) : x > \beta\}$ é a curva dos pontos de dobra visível e o conjunto $\{(x, \frac{3\beta^2}{8\alpha}, 0) : x < \beta\}$ a curva dos pontos de dobra invisível. Como a derivada de Lie no ponto $(\beta, \frac{3\beta^2}{8\alpha}, 0)$ é zero, ele é chamado de cúspide regular.

Veremos que essa família de sistemas de Filippov tem μ como parâmetro de bifurcação, para o qual a órbita Shilnikov de deslize existe para um único parâmetro específico, $\mu = 0$. Os parâmetros α e β não desempenham nenhum papel e estão ali apenas para tornar o exemplo mais geral.

Nosso principal interesse nesse exemplo é demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 5.1. Para cada par de números reais positivo α e β , as seguintes afirmações são verdadeiras:

- Para $\mu = 0$, a origem $p_0 = (0, 0, 0)$ é um pseudo-foco de sela hiperbólico para Z_0 , o qual é um foco hiperbólico instável do campo de deslize Z^s . Além disso, Z_0 admite uma órbita Shilnikov de deslize, conectando p_0 a si mesmo, passando pelo ponto de dobra-regular visível $q_0 = (\frac{3\beta}{2}, \frac{3\beta^2}{8\alpha}, 0)$ (veja a Figura 5.1).
- Para $\mu \neq 0$, Z_μ não admite uma órbita Shilnikov de deslize.

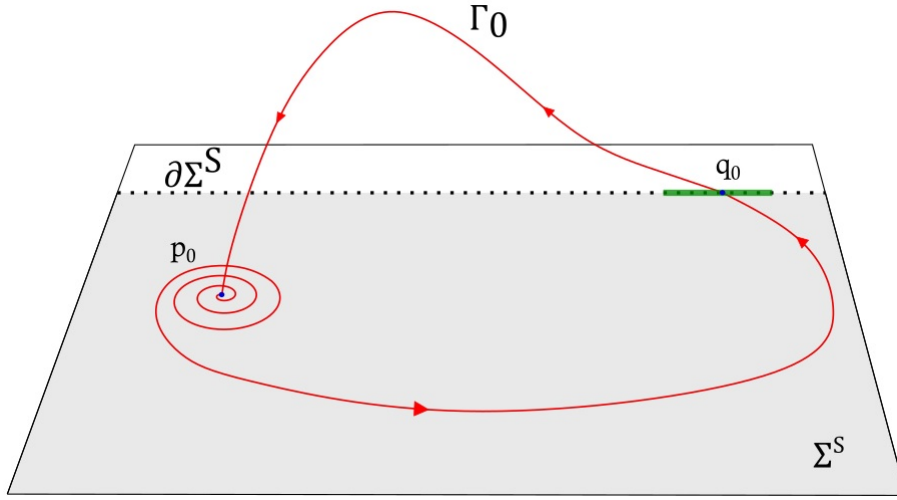


Figura 5.1: A órbita Γ_0 conectando o pseudo-equilíbrio p_0 ao ponto de dobra q_0 .

Demonstração: Primeiramente vamos calcular o campo deslizante Z^s , dado por

$$Z_\mu^s(x, y, 0) = \left(\frac{4\alpha^2(y + \mu)}{4\alpha(y - \mu) - 3\beta^2}, \frac{3\beta^3x + \alpha\beta^2y - 24\alpha^2y^2 + 8\alpha\beta\mu(x - \beta)}{6\beta^3 - 8\alpha\beta(y - \mu)}, 0 \right). \quad (5.2)$$

Como o campo deslizante está definido apenas dentro de Σ , podemos olhar apenas para o campo planar $Z_\mu^s(x, y)$, que é dado por:

$$Z_\mu^s(x, y) = \left(\frac{4\alpha^2(y + \mu)}{4\alpha(y - \mu) - 3\beta^2}, \frac{3\beta^3x + \alpha\beta^2y - 24\alpha^2y^2 + 8\alpha\beta\mu(x - \beta)}{6\beta^3 - 8\alpha\beta(y - \mu)} \right). \quad (5.3)$$

Observe que $p_\mu = (\frac{3\alpha}{\beta}\mu, -\mu)$ é uma singularidade de Z_μ^s para todo $\mu \in \mathbb{R}$.

Agora para $\mu = 0$, podemos calcular o campo vetorial normalizado de (5.3) dado por:

$$\hat{Z}(x, y) = \left(-\alpha y, \frac{3\beta^2}{8\alpha}x + \frac{\beta}{8}y - \frac{3\alpha}{\beta}y^2 \right). \quad (5.4)$$

Calculando os autovalores do campo (5.4), obtemos:

$$\lambda^\pm = \frac{\alpha}{12\beta} \pm i \frac{\sqrt{95}\alpha}{12\beta}.$$

Observe que a origem é um pseudo-equilíbrio de Z_0 , pois é um equilíbrio de \hat{Z}_0 . Além disso, $p_0 = (0, 0, 0)$ é um foco hiperbólico para \hat{Z}_0 , e conseqüentemente um pseudo-foco de sela hiperbólico de Z_0 . Como $Re(\lambda^\pm) > 0$ temos que $(0, 0)$ é um foco instável do campo normalizado. Agora, fazendo uma mudança de variável e um reescalonamento do tempo dados por

$$(x, y) = \left(\frac{3\beta}{2}u, \frac{3\beta^2}{8\alpha}v \right) \text{ e } t = -\frac{4}{\beta}\tau,$$

o campo normalizado (5.4) fica na forma

$$\bar{Z} = \left(v, -6u - \frac{1}{2}v + \frac{9}{2}v^2 \right). \quad (5.5)$$

Observe que, esse reescalonamento do tempo reverte a direção do fluxo de (5.3). A curva dos pontos de tangência agora é dada nas coordenadas (u, v) por $l = \{(u, 1) : u \in \mathbb{R}\}$.

Nós afirmamos que a órbita do ponto $q_0 = (1, 1) \in l$ converge para o foco $(0, 0)$ sem intersectar a linha l , isso significa que o ponto $q_0 = (\frac{3\beta}{2}, \frac{3\beta^2}{8\alpha}, 0) \in \partial\Sigma^s$ é atraído para o foco $(0, 0, 0)$, no tempo passado, sem tocar a curva de pontos de tangência em $\partial\Sigma^s$. Para provar essa afirmação nós vamos construir uma região compacta \mathcal{R} no plano (u, v) , que seja positivamente invariante pelo fluxo do campo de vetores (5.5).

Para isso nós tomamos a função $m(v) = \frac{-13}{108} + \frac{9v^2}{13} + \frac{54v^3}{169}^1$, que é a aproximação de uma curva invariante do campo (5.5). Usando essa função nós criamos a fronteira da região \mathcal{R} como sendo as curvas:

- $\mathcal{C}_1 = \{(u, 1) : m(1) \leq u \leq 1\}$,
- $\mathcal{C}_2 = \{(u, -2u + 3) : 1 \leq u \leq \frac{3}{2}\}$,
- $\mathcal{C}_3 = \{(\frac{3}{2}, v) : \frac{-91}{72} < v < 0\}$,
- $\mathcal{C}_4 = \{(u, \frac{-91}{72}) : m(\frac{-91}{72}) \leq u \leq \frac{3}{2}\}$,
- $\mathcal{C}_5 = \{(m(v), v) : \frac{-91}{72} \leq v \leq 1\}$.

Assim, a região delimitada pelas curvas \mathcal{C}_i 's é uma região compacta. Calculando a derivada direcional de \bar{Z} na direção dos vetores tangentes as curvas \mathcal{C}_i 's obtemos o seguinte para cada curva:

- $\mathcal{C}_1: \langle (1, 0), \bar{Z} \rangle = v = 1$.
- $\mathcal{C}_2: \langle (1, -2), \bar{Z} \rangle = -36u^2 + 62u - 75 \geq 0 \forall u \in \mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}_3: \langle (0, 1), \bar{Z} \rangle = \frac{9}{2}v^2 - \frac{1}{2}v - 9 < 0$ para $\frac{-91}{72} < v < 0$.
- $\mathcal{C}_4: \langle (1, 0), \bar{Z} \rangle = v = -\frac{91}{72}$.
- $\mathcal{C}_5: \langle (\frac{18}{13}v + \frac{162}{169}v^2, 1), \bar{Z} \rangle = \frac{162}{169}v^3 + \frac{81}{13}v^2 - \frac{1}{2}v + \frac{78}{108} > 0$ para $v \leq 1$.

¹De uma forma menos detalhada, sendo $\bar{m}(v) = p_3(v) + \mathcal{O}(v^4)$, uma curva onde $p_3(v)$ é um polinômio de grau 3, e assumindo sua invariância pelo campo (5.5), obtemos que a curva $m(v) = p_3(v)$. Para mais detalhes indicamos a referência [1].

Como a derivada direcional não muda de sinal em cada uma das curvas \mathcal{C}_i 's, isto indica que, para cada uma das curvas as órbitas de \bar{Z} por seus pontos seguem em uma mesma direção, e a origem por ser um foco atrator contido na região \mathcal{R} , garante que \mathcal{R} é invariante positivamente pelo fluxo do campo (5.5) (ver Figura 5.2).

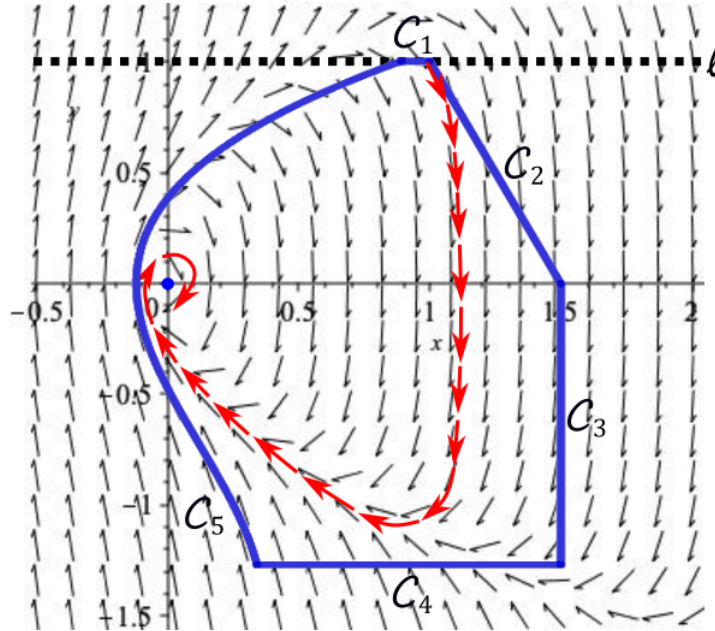


Figura 5.2: Retrato de fase do campo \bar{Z} em uma vizinhança de \mathcal{R} .

Agora, observe que nosso sistema (5.5) é um sistema quadrático, que tem um foco na origem, e pode ser escrito na forma exigida para aplicarmos o Teorema (B.1) (ver Apêndice B), como é mostrado a seguir:

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a matriz que representa a parte linear do campo (5.5) e

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & d \end{pmatrix}$$

a matriz que representa a parte linear de (B.1), queremos encontrar uma matriz M tal que $M^{-1}AM = B$. Definindo

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

e substituindo na igualdade nós chegamos em

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -6 - \frac{1}{2}z & -6 - \frac{1}{2}w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & x + yd \\ -w & z + wd \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema formado pela igualdade das matrizes concluímos que

$$\begin{cases} y = -z \\ x = \frac{1}{5} \left(d + \frac{1}{2} \right) y \\ w = -\frac{5}{d + \frac{1}{2}} \end{cases} .$$

Dessa forma, o campo reescalonado satisfaz a hipótese do Teorema B.4, o que nos garante que, em torno da origem existe no máximo um ciclo limite, que será hiperbólico caso exista.

Agora juntando que a região \mathcal{R} é positivamente invariante, ou seja, uma órbita lá dentro nunca sai dessa região, com a estabilidade da origem, que vai atrair os pontos a sua volta, garantimos que caso esse ciclo limite exista, ele não pode existir dentro da região \mathcal{R} . Portanto não podemos ter órbitas periódicas para o campo (5.5) em uma vizinhança da origem.

Aplicando o Teorema de Poincaré-Bendixson 2.7, nós concluímos que o foco estável atrai todos os pontos da região invariante no tempo futuro, uma vez que o ponto $q_0 = (1, 1) \in \mathcal{R}$ e os vetores do campo (5.5) apontam para dentro da região \mathcal{R} , como mostra a Figura 5.2, nós garantimos que a órbita do ponto q_0 chega na origem sem encostar na curva l .

Mostremos então que a órbita de um ponto $q = (x_0, \frac{3\beta^2}{8\alpha}, 0) \in \partial\Sigma^s$ pelo campo X de (5.1) no tempo futuro também chega em p_0 , e assim garantir a existência da órbita Shilnikov de deslize ligando p_0 a si mesmo. O campo X é linear, e facilmente calculamos a trajetória dele como:

$$\varphi^+(t, \xi) = \left(x - \alpha t, y + (x - \beta)t - \frac{\alpha t^2}{2}, z + \left(y - \frac{3\beta^2}{8\alpha} \right) t + \frac{(x - \beta)}{2} t^2 - \frac{\alpha t^3}{6} \right).$$

Aplicando a trajetória no nosso ponto q , temos:

$$\varphi^+(t, \xi) = \left(x_0 - \alpha t, \frac{3\beta^2}{8\alpha} + (x_0 - \beta)t - \frac{\alpha t^2}{2}, \frac{(x_0 - \beta)}{2} t^2 - \frac{\alpha t^3}{6} \right),$$

tomando $t(q) = \frac{3(x_0 - \beta)}{\alpha} > 0$, para os pontos de dobra visível, temos que $\varphi^+(t(q), q) \in \Sigma^s$, além disso, $\varphi^+(t(q_0), q_0) = p_0$. Com isso nós provamos o primeiro item do Teorema 5.1. Para o segundo item, basta observar que para $\mu \neq 0$, $\varphi^+(t(q), q) = p_\mu$ não tem solução para $\mu \neq 0$. ■

6 Conclusões

O foco deste trabalho foi estudar a órbita deslizando homoclínica de um pseudo-foco de sela em um sistema de Filippov, a qual chamamos de órbita Shilnikov de deslize, e apresentar uma versão equivalente do teorema de Shilnikov para campos de Filippov.

O Teorema 4.2 mostra que, a órbita Shilnikov de deslize ocorre em famílias de campos de vetores a um parâmetro. Ele também nos garante que, caso um campo Z_0 admita uma órbita Shilnikov, então em alguma vizinhança $W \in \Omega$ de Z_0 existirão infinitas classes de equivalência de campos de vetores, onde cada classe de equivalência é determinada pela quantidade de interseções $N(\mu)$, ou seja, dois elementos estarão na mesma classe se possuírem o mesmo número $N(\mu)$ como mostrado no Capítulo 4.

No Teorema 4.3 é garantida a existência de infinitas órbitas periódicas em uma vizinhança da órbita Shilnikov Γ_0 . Vale ressaltar que, no caso de campos de Filippov o Teorema 4.3 exige menos hipóteses do que o seu equivalente em campos suaves, pois ele não necessita exigir a condição de Shilnikov, uma vez que a própria estabilidade do equilíbrio já nos garante condições semelhantes. Por fim, para não ficarmos na dúvida se essa teoria toda poderia existir apenas no campo teórico, sem encontrar exemplos aplicáveis, o Teorema 5.1 trás uma família de campos de vetores de Filippov, que admite uma órbita Shilnikov de deslize.

O estudo de conexões homoclínicas deslizantes em espaços de dimensões maiores, onde existe a possibilidade de mais conexões homoclínicas parece ser uma continuação interessante para este trabalho.

Além disso, já existem estudos que indicam a possível existência de órbitas Shilnikov de deslize em modelos biológicos suaves por partes, modelos presa-predador. Como a existência de uma órbita homoclínica é um caminho para o caos, seria interessante conseguir estudar a teoria em um fenômeno real.

A Apêndice A

Neste apêndice, apresentaremos a definição de saturação de um conjunto pelo fluxo de um campo vetorial. Aproveitamos o espaço para enunciar o Teorema da Função Implícita, apesar de ser um resultado de conhecimento geral, optamos por enunciá-lo aqui pela sua utilização no Capítulo 4.

Em topologia, nós temos a definição de um conjunto saturado por uma função, como descrito abaixo:

Definição A.1. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função e $\mathcal{C} \subset X$ um subconjunto qualquer do domínio. Dizemos que \mathcal{C} é **f -saturado** caso satisfaça uma das seguintes equivalências:*

- $\mathcal{C} = f^{-1}(f(\mathcal{C}))$.
- Se $c \in \mathcal{C}$ e $x \in X$ satisfazem $f(c) = f(x)$ então $x \in \mathcal{C}$.
- Se $y \in Y$ é tal que $f^{-1}(y) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, então $f^{-1}(y) \subseteq \mathcal{C}$.

No caso de campos de vetores, defini-se a **saturação** de um conjunto \mathcal{C} como sendo a reunião de todas as órbitas que intersectam o conjunto \mathcal{C} . Podemos definir **saturação passada** e **saturação futura** de um conjunto como segue:

Definição A.2. *Sejam Z um campo de vetores e ϕ seu fluxo. Se \mathcal{C} é um subconjunto do domínio de Z , então a saturação*

- **futura** do subconjunto \mathcal{C} é o conjunto $\bigcup_{t \geq 0} \{\phi(t, x) : x \in \mathcal{C}\}$.
- **passada** do subconjunto \mathcal{C} é o conjunto $\bigcup_{t \leq 0} \{\phi(t, x) : x \in \mathcal{C}\}$.

Em outras palavras a saturação futura (respec. passada) de um conjunto pelo campo é a reunião das órbitas futuras (respec. passadas) que intersectam esse conjunto.

Enunciamos agora o teorema da Função Implícita.

Teorema A.3. (Teorema da Função Implícita) *Sejam $f : \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1 , $x_0 \in \mathbb{R}^k$ e $y_0 \in \mathbb{R}^m$. Suponha que $f(x_0, y_0) = 0$ e $\det \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \neq 0$. Então existem um aberto $W \in \mathbb{R}^k$ e uma função $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tais que:*

- $x_0 \in W$ e $\phi(x_0) = y_0$,
- $f(x, \phi(x)) = 0$, para todo $x \in W$.

O teorema anterior pode ser encontrado na referência [14].

B Apêndice B

Este apêndice serve para a auto-suficiência deste trabalho, e os resultados apresentados a seguir complementam a demonstração do Teorema 5.1, enunciado no Capítulo 5.

Primeiramente, vamos definir o conceito de polinômio homogêneo, e sistemas quadráticos, seguido do Teorema B.4.

Definição B.1. Um **polinômio homogêneo** é um polinômio onde todos os monômios de coeficientes não nulos têm o mesmo grau.

Exemplo B.2. O polinômio $x^7 + 7x^4y^3 - 2y^7$ é um polinômio homogêneo, já $x^3 - xyz + xy^2 + z^6$ não é homogêneo, pois o último monômio não tem o mesmo grau que os outros monômios.

Definição B.3. Chamamos de **sistema quadrático** um sistema diferencial $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x, y)$ e $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$, tal que P e Q sejam polinômios de grau dois com coeficientes reais.

Sabe-se que todo sistema quadrático que tenha um foco ou um centro na origem pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = y + P_2(x, y) \\ \dot{y} = -x + cy + Q_2(x, y) \end{cases}, \quad (\text{B.1})$$

com $|c| < 2$ e P_2 e Q_2 sendo polinômios homogêneos de grau 2. Para o teorema a seguir considere as funções $F(x, y) = (x - cy)P_2(x, y) + yQ_2(x, y)$ e $g(x, y) = xQ_2(x, y) - yP_2(x, y)$ associadas a um sistema quadrático como o definido anteriormente.

Por fim nós enunciamos o teorema:

Teorema B.4. Se as funções $F(x, y)$ e $g(x, y)$ associadas ao sistema diferencial não mudam de sinal, as seguintes afirmações valem:

- i)* Se $c \neq 0$, o sistema diferencial tem no máximo um ciclo limite em torno da origem e ele é hiperbólico.
- ii)* Se $c = 0$ o sistema não tem ciclo limite em torno da origem.

A demonstração desse teorema, não será feita aqui, mas ela pode ser encontrada na referência [4].

Referências

- [1] NOVAES, D. D.; TEIXEIRA, M. A. Shilnikov problem in Filippov dynamical systems. *Chaos*, v. 29, n. 6, p. 063110, 8, 2019. ISSN 1054-1500. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.5093067>>.
- [2] SHILNIKOV, L. P. et al. *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part I*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998. v. 4. xxiv+392 p. (World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Monographs and Treatises, v. 4). With the collaboration of Sergey Gonchenko (Sections 3.7 and 3.8), Oleg Stenkin (Section 3.9 and Appendix A) and Mikhail Shashkov (Sections 6.1 and 6.2). ISBN 981-02-3382-5. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/9789812798596>>.
- [3] AFRAIMOVICH, V. S. et al. Scientific heritage of L. P. Shilnikov. *Regul. Chaotic Dyn.*, v. 19, n. 4, p. 435–460, 2014. ISSN 1560-3547. Disponível em: <<https://doi.org/10.1134/S1560354714040017>>.
- [4] COLL, B.; GASULL, A.; LLIBRE, J. Some theorems on the existence, uniqueness, and nonexistence of limit cycles for quadratic systems. *J. Differential Equations*, v. 67, n. 3, p. 372–399, 1987. ISSN 0022-0396. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-0396\(87\)90133-1](https://doi.org/10.1016/0022-0396(87)90133-1)>.
- [5] TEIXEIRA, M. A. Stability conditions for discontinuous vector fields. *J. Differential Equations*, v. 88, n. 1, p. 15–29, 1990. ISSN 0022-0396. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-0396\(90\)90106-Y](https://doi.org/10.1016/0022-0396(90)90106-Y)>.
- [6] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979. v. 11. xvi+327 p. (Projeto Euclides [Euclid Project], v. 11). Disponível em: <[scribd.com/document/122881706](https://www.scribd.com/document/122881706)>.
- [7] PEREZ, O. *Bifurcações genéricas e relações de equivalência em campos de vetores suaves por partes*. Dissertação (Mestrado) — UNESP, São José do Rio Preto, 2017. Disponível em <http://hdl.handle.net/11449/148944>.
- [8] FASSONI, A. C. *Dynamical systems: Basins of attraction and applications*. 147 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2012. Disponível em <https://locus.ufv.br/handle/123456789/4917>.
- [9] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, 2016. v. 6. 423 p. (Coleção Matemática Universitária, v. 6). ISBN 9788524404252. Disponível em: <<https://loja.sbm.org.br/equacoes-diferenciais-ordinarias.html>>.

-
- [10] MEDRANO-T., R. O.; BAPTISTA, M. S.; CALDAS, I. L. Shilnikov homoclinic orbit bifurcations in the Chua's circuit. *Chaos*, v. 16, n. 4, p. 043119, 9, 2006. ISSN 1054-1500. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.2401060>>.
- [11] CARMONA, V. et al. Existence of homoclinic connections in continuous piecewise linear systems. *Chaos*, v. 20, n. 1, p. 013124, 8, 2010. ISSN 1054-1500. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.3339819>>.
- [12] LLIBRE, J.; PONCE, E.; TERUEL, A. E. Horseshoes near homoclinic orbits for piecewise linear differential systems in \mathbb{R}^3 . *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, v. 17, n. 4, p. 1171–1184, 2007. ISSN 0218-1274. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0218127407017756>>.
- [13] GLENDINNING, P. A. Shilnikov chaos, Filippov sliding and boundary equilibrium bifurcations. *European J. Appl. Math.*, v. 29, n. 5, p. 757–777, 2018. ISSN 0956-7925. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0956792518000335>>.
- [14] LIMA, E. L. *Curso de análise. Vol. 2*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981. v. 11. ix+547 p. (Projeto Euclides [Euclid Project], v. 11). Disponível em: <<https://loja.sbm.org.br/curso-de-analise-vol-2.html>>.
- [15] MEDRANO-TORRICOS, R. O. *Caos homoclínico no espaço dos parâmetros*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, 2004. Doi:10.11606/T.43.2004.tde-11032014-161800. Acesso em: 2021-10-28.
- [16] LOOMIS, L. H.; STERNBERG, S. *Advanced calculus*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2014. xii+580 p. Paperback edition of the 1990 revised edition [MR1140004] of the 1968 original. ISBN 978-981-4583-93-0. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/9095>>.
- [17] HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Second. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004. v. 60. xiv+417 p. (Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), v. 60). ISBN 0-12-349703-5. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/book/9780123820105>>.