UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

VALDECIR SIQUEIRA RAMOS

Limites e Derivadas no Ensino Médio : possibilidades de ensino

Guaratinguetá
2022

Valdecir Siqueira Ramos

Limites e Derivadas no Ensino Médio : possibilidades de ensino

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Licenciatura em Matemática .

Orientadora: Profª Dra. Silvia Maria Giuliatti Winter

Guaratinguetá
2022

R175l
Ramos, Valdecir Siqueira
Limites e derivadas no ensino médio : possibilidades de ensino / Valdecir Siqueira Ramos. – Guaratinguetá, 2022.
89 f : il.
Bibliografia: f. 65-66

Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática. Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2022.
Orientadora: Profª Dra. Silvia Maria Giuliatti Winter

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Cálculo 3. Ensino médio I. Título.

CDU 51:371.3

Pâmella Benevides Gonçalves
Bibliotecária/CRB-8 9203

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

VALDECIR SIQUEIRA RAMOS

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE **"GRADUANDO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA "**

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Profª Dra. SILVIA MARIA GIULLIATI WINTER
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:

S. Winter

Profª Dra. Silvia Maria Giuliatti Winter
Orientadora/UNESP-FEG

Pavanelo

Profª Dra. Elisangela Pavanelo Rodrigues dos Santos
UNESP-FEG

Vivian Gomes

Profª Dra. Vivian Martins Gomes
Membro Externo

Janeiro , 2022

DADOS CURRICULARES

VALDECIR SIQUEIRA RAMOS

NASCIMENTO	29/12/1999 - Pindamonhangaba / SP
FILIAÇÃO	Fábio Lima Ramos Vanda Maria Siqueira
2014 / 2016	Ensino Médio Escola Estadual Doutor Alfredo Pujol

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a professorea orientadora deste trabalho por se mostrar sempre paciente e prontificada a ajudar em relações às dúvidas que foram surgindo no processo de pesquisa. Quero agradecer também aos meus amigos e familiares, pois umas das coisas que mais sinto orgulho é de ter conhecido e estabelecido amizade com pessoas que me ajudaram e ajudam, o que fatidicamente possibilitou que este trabalho fosse possível.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo indicar possibilidades de se ensinar limites e derivadas no Ensino Médio. Para tanto, a metodologia aplicada é de caráter qualitativo e investigativo, onde as ações realizadas foram norteadas pela Análise de Conteúdo, essa definida como uma ferramenta que viabiliza, através de uma leitura detalhada e minuciosa, encontrar aquilo que se apresenta ausente ou imperceptível à primeira vista. A temática abordada possui expressiva relevância para o ensino da Matemática, pois representa o marco central de mudanças substanciais na sociedade a partir de sua sistematização, que foi iniciada no final do século XVII. Outrossim, a história do cálculo infinitesimal descrita aqui, possui enfoque nos contextos que oportunizaram seu desenvolvimento, além de seus principais precursores, tais como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Além disso, observa-se propostas de aulas sobre limites e derivadas, que consideram o contexto onde estão sendo ministradas, ou seja, os conteúdos estão articulados com foco nos estudantes do Ensino Médio de maneira simples e modesta. Por fim, conclue-se que o ensino de cálculo para estudantes da etapa de ensino em questão pode ser uma possibilidade potencializadora a depender dos recursos, da turma e as formas como esses recursos são utilizados com essa turma.

PALAVRAS-CHAVE: Cálculo. Ensino Médio. Propostas de Aulas.

ABSTRACT

The present work aims to indicate possibilities of teaching limits and derivatives in high school. Therefore, the applied methodology is qualitative and investigative, where the actions taken were guided by Content Analysis, which is defined as a tool that enables, through detailed and thorough reading, to find what is absent or imperceptible at first sight. The theme addressed has expressive relevance for the teaching of Mathematics, as it represents the central landmark of substantial changes in society from its systematization, which began at the end of the 17th century. Furthermore, the history of infinitesimal calculus described here focuses on the contexts that gave rise to its development, in addition to its main precursors, such as Isaac Newton and Gottfried Wilhelm Leibniz. In addition, there are proposals for classes on limits and derivatives, which consider the context in which they are being taught, that is, the contents are articulated with a focus on high school students in a simple and modest way. Finally, it is concluded that the teaching of calculus to students of the teaching stage in question can be a enhancer possibility depending on the resources, the class and the ways in which these resources are used with this class.

KEYWORDS: Calculus. High School. Class Proposals.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AAP	Avaliação de Aprendizagem em Processo
AC	Análise de Conteúdo
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
LDB	Lei de Diretrizes e Base
MEC	Minitério da Educação
PNE	Plano Nacional de Educação
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
SARA	Sistema de Acompanhamento dos Resultados Avaliativos
Saresp	Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
SEB	Secretaria de Educação Básica
SEDUC-SP	Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
SEE	Secretaria de Estado da Educação de São Paulo
SIEEESP	Sindicato dos Estabelecimentos de Ensino do Estado de São Paulo
UNDIME-SP	União dos Dirigentes Municipais da Educação do Estado de São Paulo
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
USP	Universidade de São Paulo

LISTA DE SÍMBOLOS

Δ	Letra grega Delta
$\int$	Símbolo de integral
∞	Símbolo do infinito

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O cálculo infinitesimal é uma temática de expressiva relevância por constituir pontos centrais na Matemática do século XVII e, em decorrência disso, esse conteúdo significa hoje pilares importantes na Matemática moderna. Outrossim, esse objeto de conhecimento possibilita trabalhar inúmeros conceitos de função, além de estar intimamente correlata à Física ensinada no primeiro ano do Ensino Médio, Cinemática. Ainda considerando a relevância da temática, destaca-se que "[...] o conceito de derivada corresponde ao alicerce de toda ciência e tecnologia dos últimos 300 anos."(AVILA, 2010, p. 175).

Diante disso, fica expresso a importância de se ensinar limites e derivadas, foco deste trabalho, na Educação Básica, especificamente no Ensino Médio. Entretanto, a maneira como os conceitos são apresentados aos discentes pode aproximá-los da temática ou afastá-los. A forma como limite e derivadas são usualmente apresentados aos alunos e às alunas que estão cursando o Ensino Superior, de maneira conteudista e com alto rigor em relação à norma, não corresponde ao nível de compreensão desses à modalidade dos anos finais da Educação Básica. Continuamente, ao ensinar derivadas às alunas e aos alunos do Ensino Médio deve-se evitar um aglomerado de definições rigorosas, tendo em vista a adequação ao nível em que será proposto. Portanto, ensinar limites e derivadas deve ser de maneira simples e modesta, e o modo de realizá-la é o foco deste trabalho.

Em adição, como forma de ampliar o entendimento em relação ao cálculo, assim como justificar a importância da temática para a Matemática, neste trabalho está expresso no capítulo 2, intitulado “Breve História do Cálculo”, contribuições de alguns matemáticos responsáveis pela formalização de conceitos do cálculo, assim como a preocupação destes com a validade de suas teorias, com enfoque nos fatores que atravessaram os matemáticos em relação ao tema citado, compreendendo assim em que meio essas idéias surgiram e de que forma esses pensamentos foram recebidos pela comunidade científica da época e do contexto.

Outrossim, em relação ao cenário atual, faz-se necessário entender se a temática em questão se faz presente nas diretrizes que norteiam o trabalho docente, para assim compreender de que forma os conceitos do cálculo podem ser orientados tendo em vista os discentes do nível de ensino almejado neste trabalho, Ensino Médio. Para tanto, no capítulo 3, de título “Análise do Material Didático e o Currículo”, estabelece-se uma análise de documentos de caráter normativo, tanto em âmbito federal, quanto em âmbito estadual, para que assim seja possível observar a comunicação entre as instâncias, sendo perceptível a recepção das orientações da primeira em relação à segunda.

Além desses documentos, considera-se relevante a análise de materiais didáticos, distribuídos no ano de 2021 gratuitamente para os alunos das escola públicas do Brasil através do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), que consiste em um um programa desenvolvido pelo governo federal com o objetivo de disponibilizar livro e material didático de forma gratuita para todo o território brasileiro, sendo este programa gerenciado pelo Ministério da Educação (MEC) e pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). Já para o âmbito estadual, seguindo a mesma lógica presente no parágrafo anterior, serão analisados os materiais didáticos específicos do

Estado escolhido para observação da comunicação entre as instâncias.

Dessa forma, uma ferramenta se faz necessária para análise do acervo indicado nos parágrafos anteriores e para isso a Análise de Conteúdo foi selecionada, sendo essa "[...] um conjunto de técnicas de análise de comunicações" (BARDIN, 1977, p. 31), pois, através dessas técnicas se objetiva chegar a considerações importantes em relação ao foco almejado, ou seja, identificar aquilo que não é perceptível apenas à primeira vista, mas, através de passos específicos, atingir o que se esconde atrás do véu dos significados.

Por fim, no capítulo 4 "Modelo de Aula interdisciplinar: Matemática e Física", observa-se proposta de aulas que articulam conteúdos do cálculo infinitesimal, limites e derivadas, de forma interdisciplinar com a Física, tendo como base ideias do professor Geraldo Ávila para o primeiro ano do Ensino Médio. Além disso, está presente no último capítulo deste trabalho, "Discussões", pontuações de dois professores da Educação Básica, mais especificamente de professores que lecionam para estudantes que compreendem o Ensino Médio, onde indicam considerações acerca do plano de aulas presente no capítulo anterior, 4. Assim como, também é possível observar neste capítulo considerações do autor do trabalho sobre o ensino de limites e derivadas no Ensino Médio.

2 BREVE HISTÓRIA DO CÁLCULO

Antes de adentrarmos propriamente na história correlata à limites e derivadas, considera-se de importantíssima relevância expor para os alunos, assim como para os professores, os processos pelos quais tais conhecimentos que, neste caso, limites e derivadas, foram estruturados, quais eram as características sociais e pessoais dos precursores que desenvolveram essa teoria que hoje nos auxilia a compreender a realidade.

No contexto de sala de aula, comum ouvir questionamentos dos alunos em relação à oriegem de determinados conceitos matemáticos, ou onde esses conceitos poderiam ser utilizados. Não obstante, a forma como a matemática muitas vezes é apresentada para as pessoas, abstrata, mecânica e formal, contribui para um afastamento daqueles que se pretendem atingir.

Portanto, o ato de "explorar" a história de limites e derivadas neste trabalho visa: justificar a importância da temática para a Matemática; levar ao leitor o que se pretendia responder com o desenvolvimento dessa teoria, assim como quais eram as influências e referências dos profissionais responsáveis por essa teorização e como isso foi visto pela comunidade científica da época. Pois, as informações presentes neste capítulo, serão utilizadas para a produção do plano de aulas presente no capítulo 4, em específico, os recursos históricos aqui dispostos servem como forma de contextualizar para os estudantes o conteúdo a ser debatido em sala de aula.

Outrossim, vale ressaltar que as exemplificações declinadas adiante expõem apenas algumas contribuições de algumas personalidades históricas e que, fatidicamente, foram muitas as contribuições de muitas outras personalidades que infelizmente não foram retratadas aqui pois considera-se que, apesar da profundidade do trabalho, não será suficiente para declinar todas as contribuições de todos os envolvidos nesse processo de conhecimento científico.

2.1 SÉCULO XVII: TRANSFORMAÇÕES CIENTÍFICAS

O cálculo infinitesimal esteve presente em diversos momentos na história da humanidade, sendo utilizado como ferramenta essencial para conceber problemas advindos da realidade, presente em diversas culturas ao redor do mundo e em diferentes épocas. A escolha aqui feita, de se iniciar a partir do contexto da Europa do século XVII, advém do fato da nomenclatura e formalização realizadas, o que moldou limites e derivadas como hoje conhecemos no ocidente.

Assim sendo, o século XVII representou um marco de extrema relevância para a Matemática, transformações substanciais, principalmente na forma de conceber a geometria e a álgebra. Dois nomes centrais responsáveis por essas transformações foram René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) respectivamente.

A grande preocupação do século em questão, em consonância à (ROQUE, 2012), era tornar o conhecimento uma ferramenta que de fato transformasse a realidade, ou seja, estava em discussão o conhecimento, que, em voga, era o geométrico, deveria servir a constructos práticos, como a elaboração de mapas e até mesmo produções abstratas, como, por exemplo, na pintura. Ademais, outra perspectiva recorrente do período é a valoração de invenções e da intervenção da natureza, com ações voltadas para fenômenos que pudessem ser quantificados, se opondo, portanto, aos saberes antigos, pois tais saberes tinham como foco as demonstrações estéreis, ou seja, demonstrações que não estavam preocupadas com transformações práticas da realidade.

Mencionado anteriormente, René Descartes (Figura 1), filósofo que estava em consonância com o pensamento corrente do século XVII, foi responsável por questionar e propor maneiras de organizar o conhecimento científico, pois era uma preocupação a sistematização de todo o acervo correlato à Matemática. Diante disso, Descartes desenvolveu em seu livro "Discurso do Método", quatro regras, com objetivo de se alcançar a "verdade".

Ainda também, exemplificando a concepção da época sobre a ciência, Descartes em 1626 se aproximou do círculo de pensadores próximos ao padre Mersenner, em Paris, que, segundo (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 192) "se dedicava, entre outras coisas, a problemas ópticos ligados ao estudo do movimento dos raios luminosos".

Decorrente disso, juntamente com o "Discurso do Método", o filósofo mencionado acima também desenvolveu "A Dióptrica", livro esse onde estabeleceu um diálogo entre objetos geométricos expressos e vistos através de equações algébricas, resultando em uma nova forma de conceber a geometria. Outrossim, Descartes detinha proximidade com artesãos de instrumentos óticos, facilitando seu entendimento e possibilitando viabilizar, de maneira prática, os conhecimentos teóricos desenvolvidos até então.

Essa nova forma de conceber a geometria, ou seja, expressar entes geométricos através de equações algébricas, tendo o foco portanto em igualdades entre quantidades, preocupação corrente à época, possibilitou a resolução de um problema até então sem solução: o problema de Pappus.

Durante o século XVII, as curvas eram entendidas entre três vertentes:"a curva como expressão algébrica, eventualmente infinita; a curva como trajetória de um ponto em movimento; e a curva como polígono com número infinito de lados."(ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 193). Essas concepções exercem papel central nos desenvolvimentos de procedimentos infinitesimais. Ainda também, existia a preocupação de muitos matemáticos em romper com os métodos gregos, métodos esses centralizados na abstração, ao mesmo tempo que muitos matemáticos buscavam a recuperação de trabalhos gregos que foram perdidos. Um exemplo dessa última trama foi Pierre de Fermat (Figura 2), que ficou encantado com as Cônicas de Apolônio.

Os trabalhos acima mencionados impulsionaram o estudo de séries, entretanto, apesar de um grande número de estudiosos saberem resolver problemas infinitesimais, tais como determinação de retas tangentes e áreas sob curvas, ainda não estava estabelecida a generalidade das técnicas que eram empregadas. Dentro deste contexto, os trabalhos produzidos por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, de maneira independente, alcançaram o aspecto de generalidade e unidade para a formalização das técnicas até então empregadas de maneira individualizada.

Figura 1 – René Descartes

Fonte: Eves (2011).

Figura 2 – Pierre de Fermat

fonte: Eves (2011).

2.2 ISAAC NEWTON

Nascido depois da morte do pai, esse agricultor, Isaac Newton (Figura 3), segundo (EVES, 2011), estava planejado para seguir os passos de seu progenitor, entretanto desde de tenra idade já apresentava habilidades com constructos mecânicos, como exemplo disso um moinho de madeira que transformava trigo em farinha e funcionava a partir da força motriz produzida por um rato.

Natural da aldeia de Woolsthore, Inglaterra, nasceu no dia de natal em 1642, isso a partir do calendário juliano, já para o calendário gregoriano, esse utilizado hoje no ocidente, seu nascimento corresponde a 4 de janeiro de 1643. O sustento de sua família era decorrente dos frutos provenientes das terras. Newton era visto como um garoto muito solitário, distante de seus familiares, além disso foi criado pelos avós pois quando tinha três anos de idade sua mãe se casou novamente, sendo deixado assim sob a tutela daqueles. Além disso, não mostrava interesse sobre os assuntos da fazenda e com doze anos de idade ingressou na King's School, onde para continuar estudando teve que alugar um quarto na casa de um farmacêutico, Sr. Clark.

Newton, de acordo com (EVES, 2011), não era um dos melhores da turma, e também se meteu em brigas durante esse período. Quando completou dezoito anos de idade, ingressou na Trinity College, em Cambridge. Apesar de ter uma condição financeira estável, decorrente de sua família, nesta instituição era considerado pobre em comparação com o padrão econômico dos demais estudantes do local e, para se manter, ele trabalhava na organização das acomodações de outros discentes e também servia as refeições. Após alguns anos nessa dinâmica ingressou na renomada Universidade de Cambridge por meio de uma bolsa de estudos e, aos 22 anos, formou-se em humanidades.

Após declinar seus interesses pela Matemática, começou seus estudos por "Elementos" de Euclides, passando por "Lá Géométrie" de René Descartes e chegando a "Arithmetica Infinitorum" de John Wallis. Após profunda fundamentação começou a desenvolver ideias próprias, e uma delas foi o teorema do binômio generalizado, conhecido também como Binômio de Newton. Foi autor de alguns livros, sendo o de maior difusão "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica".

Sua contribuição ao cálculo infinitesimal, foco deste trabalho, possui nomenclatura própria, o que será explicado a seguir. Antes de indicar um exemplo de sua autoria, precisa-se destacar que naquele período o conceito de função, assim como a própria palavra, não possuíam o significado que hoje concebemos. Logo, neste exemplo que será declinado, Newton entendia que "[..] uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto."(EVES, 2011, p. 439).

Assim sendo, um ponto era entendido como ponto gerador, pois era esse ponto responsável pela constituição da curva. A partir dessa perspectiva portanto, o ponto possuía coordenadas variáveis, para essas quantidades que variavam ele dava o nome de "fluentes", pois as coordenadas do ponto gerador "fluem". Já a taxa de variação ele nomeava de fluxões e utilizava $\dot{y}$ para designar a taxa de variação em y, o que hoje entendemos como $\frac{\Delta y}{\Delta t}$. A variação que ocorria com a abscissa do ponto gerador era entendida como fluxo principal, pois os exemplos que Newton considerava eram aqueles em que uma curva é formada pela movimentação de um ponto em relação ao tempo, sendo a variação em x constante por se tratar dessa grandeza. Para fluxões de cunho infinitesimal, ele nomeava de momento e utilizava a nomenclatura $\dot{x}o$. Para encontrar a inclinação da reta tangente, dentro dessa perspectiva, seria necessário encontrar a razão entre fluxões, por exemplo, tendo dois fluentes x e y, logo a reta tangente seria encontrada a partir da razão entre seus momentos, ou seja, $\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o}$.

Após compreender e empregar os métodos de John Wallis para integração, que continha delimitação de intervalo, Newton inventou um método para qualquer intervalo de x, hoje o conhecemos como Binômio de Newton, e ele o utilizava para relações do tipo: $y = x^n$, para n correspondendo a números fracionários.

Assim sendo, tendo como referência os apontamentos de (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012), a explicação explicitada abaixo corresponde com a forma e entendimento de Newton para as relações que foram mencionadas anteriormente, além de podermos observar a nomenclatura sendo desenvolvida em um exercício genérico.

Considere a relação $y = x^n$, sendo que n corresponde a números fracionários. Queremos encontrar a taxa de variação em um determinado instante, palavra essa pensadamente escolhida pois para Newton eram relações contendo o fator tempo.

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n \Rightarrow y + \dot{y}o = x^n + no\dot{x}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2\dot{x}x^{n-2} + ... \tag{1}$$

Tendo em mente, pela relação, que $y - x^n = 0$ e dividindo toda a expressão por o, temos:

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2}o\dot{x}x^{n-2} + ... \tag{2}$$

Aceitando que o é infinitamente pequeno, tão próximo de zero quanto quisermos, iremos desconsiderar os elementos na expressão que o contém. Dessa forma, obtemos: $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x} \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = nx^{n-1}$, sendo essa a fórmula para encontrarmos a derivada em um determinado ponto para as relações $y = x^n$, lenbrando que n corresponde a números fracionários. Esse processo pode ser visto na Figura 4.

Uma contradição que lhe foi apontada, foi o fato de se utilizar o elemento o para dividir e depois o considerar muito próximo de zero, negligenciando esse elemento da expressão. Para contrapor esse infortúnio ele apresentou um método que objetivou resolver essas contradições intitulado primeiras e últimas razões.

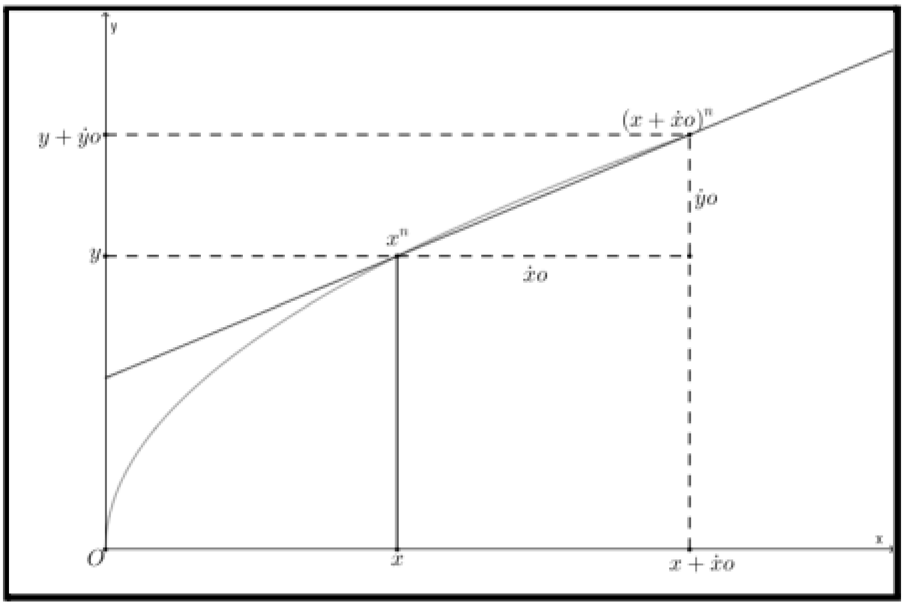
De maneira sucinta, ele explicita que para a razão entre os fluxões $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$:

> "As quantidades e as razões de quantidades que tendem continuamente a se tornar iguais durante um tempo finito e que, antes do fim deste tempo, se aproximam tanto da igualdade que sua diferença pode ser considerada menor que qualquer diferença dada, terminam por ser iguais"(ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 225).

Figura 3 – Isaac Newton

Fonte: Eves (2011).

Figura 4 – Esquema gráfico do cálculo infinitesimal newtoniano



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.3 GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

Nasceu em Leipzig em 1646. Segundo (EVES, 2011) Leibniz desde criança apresentava um desenvolvimento promissor e aos 12 anos começou a aprofundar seus conhecimentos em matemática, filosofia, teologia e leis, publicados pelos textos da época. Após ter o título de doutor em leis negado, por conta da sua pouca idade, pela Universidade de Leipzig, Leibniz (Figura 6), dedicou a sua vida ao trabalho diplomático, aproximando-se assim do círculo político onde se localizava.

Através das relações e oportunidades advindas de seu trabalho, Leibniz encontrou-se em conformidade com grandes períodos de lazer, os quais ele utilizava para dar profundidade em seus trabalhos matemáticos. Além disso, através de um dos alunos de René Descartes, Christian Huygens, seu professor particular que conhecera em um de seus trabalhos diplomáticos, foi apresentado aos trabalhos de Bonaventura Cavalieri, Blaise Pascal, René Descartes, Grégoire de St. Vincent, John Wallis e James Gregory.

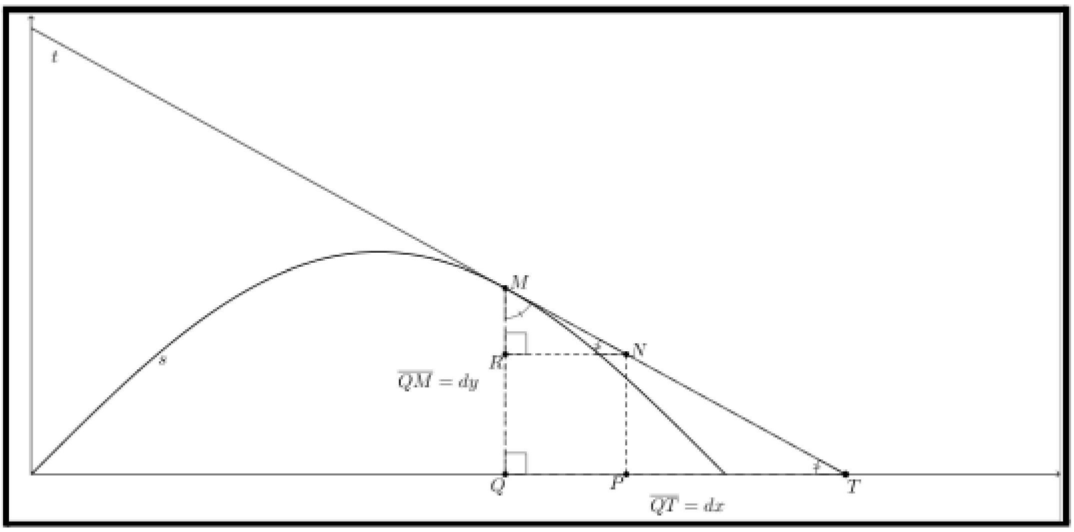
Leibniz, segundo (EVES, 2011), apresenta grande ecleticidade em seus projetos e adquiriu notoriedade por sua erudição em sânscrito e de seus trabalhos em filosofia. Além disso, possuía idealizações como a junção de algumas religiões e a cristianização da China.

Além disso, segundo o mesmo autor, a contribuição do matemático em questão para o cálculo foi de expressiva relevância pois entre 1673 e 1676 foi pela primeira vez que alguém utilizou o S alongado ($\int$), para representar a soma de elementos indivisíveis, além de embarcar a nomenclatura dx e dy para representar o diferencial. Muitos de seus trabalhos foram publicados na revista "Acta eruditorum" onde foi um dos responsáveis pela fundação e se tornou diretor-chefe.

Vejamos abaixo, tendo como referência (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012), uma exemplificação da concepção de processos infinitesimais promovida por Leibniz. Para isso, considere a construção abaixo (Figura 5):

Inicialmente, temos uma curva s, e uma reta t tangente a curva s no ponto M.

Figura 5 – Exemplificação gráfica do cálculo leibniziano



Fonte: Elaborado pelo autor.

Após isso, marque os pontos N e T sobre a reta tangente t, sendo que o ponto T é móvel sobre a reta t.

A partir do ponto N, desenvolva um segmento paralelo ao eixo das coordenadas e a intersecção com o eixo das abscissas originará o ponto P. Realize o mesmo procedimento para o ponto M, originando o ponto Q. Por fim, trace um segmento partindo do ponto N, paralelo ao eixo das abscissas e cuja intersecção com o segmento $\overline{MQ}$ origina o ponto R, formando assim o segmento $\overline{NR}$.

Diante disso, vamos considerar os triângulos NMR e TMQ, para analisarmos a semelhança entre eles:

1 - $N\hat{M}R = T\hat{M}Q$, pois são ângulos comuns;

2 - $M\hat{R}N = M\hat{Q}T = 90°$, por serem segmentos paralelos aos eixo das coordenadas, assim sendo formam um ângulo reto com o eixo das abscissas;

Portanto, como dois pares de ângulos possuem a mesma medida, necessariamente o último par faltante também terá a mesma medida, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. Com a igualdade entre as medidas dos ângulos podemos concluir que os triângulos TMQ e NMR são semelhantes e a relação abaixo é possível:

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{QT}} = \frac{\overline{MR}}{\overline{RN}} \tag{3}$$

Certamente, esta relação irá se manter, independente do tamanho dos segmentos $\overline{MQ}$ e $\overline{QT}$. Como dito no início desta apresentação, o ponto T é móvel sobre a curva t. Ao passo que T se aproxima de M, o triângulo MQT vai diminuindo, logo os segmentos $\overline{MQ}$ e $\overline{QT}$ também diminuem, se tornando infinitesimais. A questão está na relação de semelhança entre os triângulos, pois mesmo se tratando de números muito próximos de zero a relação $\frac{dy}{dx} = \frac{\overline{MR}}{\overline{RN}}$ sempre será garantida pela semelhança entre os triângulos.

Diante disso, podemos observar abaixo uma exemplificação de seus cálculos:

$$d(x^2) = (x + dx)^2 - x^2 \Rightarrow dy = x^2 + 2xdx + (dx)^2 - x^2 \Rightarrow dy = 2xdx + (dx)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \quad (4)$$

O elemento $(dx)^2$ foi suprimido pois comparativamente a ordem de grandeza é muito inferior aos demais elementos.

Muito se discutiu sobre a polêmica envolvendo quem foi o precursor do cálculo, mas hoje os trabalhos são entendidos como produções completamente independentes entres os matemáticos mencionados acima. Vale ressaltar a particularidade nas formas de conceber a matemática. O cálculo newtoniano foi expresso em geometria sintética, com alta preocupação com o rigor, advinda de seus métodos e de métodos antigos. Já para Leibniz o foco estava voltado para métodos analíticos, processos voltados à soma de séries infinitas, por designar a soma de múltiplas pequenas parcelas. Os principais focos dos problemas sobre curvas eram o de encontrar as tangentes, a área sobre as curvas, a velocidade de um ponto em um determinado instante e o comprimento de uma determinada curva; o que de maneira expressiva contribui para a formalização do conceito de função como hoje conhecemos.

Segundo Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira os cálculos leibniziano e newtoniano se diferem no seguinte:

> Ao passo que o cálculo de Newton estava intimamente ligado ao estudo de quantidades variáveis com o tempo, o cálculo de Leibniz considera quantidades que variam em uma sequência de valores infinitamente próximos um do outro, daí a estreita relação de seus procedimentos com o estudo de séries. Assim, ao passo que o conceito fundamental do cálculo newtoniano é o de fluxão, que pode ser traduzido como velocidade ou taxa de variação de uma quantidade em relação ao tempo, o conceito fundamental do cálculo leibniziano é o de diferencial, que é uma diferença infinitamente pequena entre valores sucessivos de uma série (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p.216).

Em decorrência das particularidades dos trabalhos desenvolvidos por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, impactou, evidentemente, a forma como a comunidade científica receberia essas propostas. Fatidicamente, o núcleo científico responsável por debater as teorias desses matemáticos estava localizado no eixo França-Inglaterra. Segundo (ROQUE, 2012), a proposta desenvolvida pelo primeiro, por conta de sua forma de produção e personalidade, só foi postada muito anos depois de sua morte e teve bastante rejeição tanto pelo alto rigor com que fora escrito quanto pelo assunto debatido, pois as noções do cálculo ainda estavam muito frágeis para a academia. Já para o segundo, preocupado em desenvolver seus trabalhos de forma analítica, foi melhor aceito pela praticidade de suas nomenclaturas e métodos, mas mesmo assim recebeu muita resistência.

Tendo como referência a mesma autora citada no parágrafo acima, a publicação de alguns trabalhos de Leibniz na França tiveram bastante sucesso pela circunstância em que se encontravam, pois foram promulgados pelo grupo do Nicolas Malebranche que detinha grande destaque na Academia de

Ciências de Paris. Assim como, que a partir de 1696, pela primeira vez na academia acima mencionada foi formado um grupo de matemáticos remunerados para fazer pesquisas neste campo do conhecimento. Nesse grupo muito foi debatido os métodos dos matemáticos em questão, ocorrendo subdivisões entre os pesquisadores da academia, os quais alguns concordavam com o método de Leibniz e outros com o método de Newton.

Figura 6 – Gottfried Wilhelm Leibniz

Fonte: Eves (2011).

2.4 AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY

A revolução francesa (1789 - 1799) transformou expressivamente o mundo, e, da mesma maneira, o trabalho dos matemáticos presentes, principalmente, na França. Decorrente desse processo, os matemáticos desse contexto passaram de cientista de um determinado grupo, para ministrar suas aulas nas famosas "Écoles", grandes centros de estudos. Exemplos que contemplam esse cenário são Joseph-Louis Lagrange e Pierre-Simon Laplace.

Fatidicamente, conforme (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012), houveram modificações na forma como a Matemática era pensada e ensinada, pois antes desse período a preocupação estava centrada no desenvolvimento científico por questão de prestígio, após esse período, os matemáticos tinham como empenho ensinar aqueles principiantes no assunto, assim como, o foco do ensino que muitas vezes era para formar engenheiros.

Agora preocupados com a difusão do conhecimento, os matemáticos se empenhavamm em encontrar meios para que um número maior de pessoas tivessem a oportunidade de estudar tais assuntos, ou temas.

Dentro desse contexto, nasceu Augustin-Louis Cauchy (Figura 7), em Paris no ano 1798. Em relação à educação que recebera, de acordo com (EVES, 2011), primeiro foi instruído por seu pai, após esse período, foi educado na École Centrale du Pantheón. No ano 1805 ingressou na École Polytechnique, onde conquistou a admiração de Joseph-Louis Lagrange e Pierre-Simon Laplace. Cauchy objetivava ser Engenheiro Civil, mas pelas influências de Lagrange e Laplace, voltou sua dedicação para a Matemática e aceitou ser professor na École Polytechnique em 1816, cuja área era análise.

As diretrizes do curso o orientavam a ensinar essa disciplina com foco na prática profissional de engenheiro, entretanto Cauchy desenvolveu suas aulas de maneira muito mais profunda, que pode ser observada no livro-texto "Cours d'Analyse Algébrique".

Cauchy, segundo (EVES, 2011), é reconhecido por sua extensiva produtividade, pois sua contribuição contibiliza vários livros e 789 artigos alguns dos quais preenchem 34 volumes.

Outrossim, suas pesquisas englobam "[...] convergência e divergência de séries infinitas, teoria das funções reais e complexas, equações diferenciais, determinantes, probabilidade e física-matemática." (EVES, 2011, p. 531). Muitas ferramentas e propriedades receberam seu nome, além de que seus trabalhos apresentam grande rigor matemático, rigor esse expresso nos três seguintes pontos:

> 1. todo conceito teria que ser definido explicitamente em termos de outros conceitos cujas naturezas fossem firmemente conhecidas; 2. os teoremas teriam que ser provados e cada passo deveria ser justificado por outro resultado admitido como válido; 3. as definições escolhidas e os teoremas provados teriam que ser suficientemente amplos para servir de base à estrutura de resultados válidos pertencentes (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 259).

Durante sua vida, Segundo (EVES, 2011), Cauchy sofreu represálias políticas, foi exilado por um período em Turim e Praga, além de ter sido proibido de lecionar e participar de cargos públicos por cerca de 18 anos. Ademais, Cauchy influenciou a abdicação do voto de lealdade, que obrigava os funcionários das instituições públicas a aderirem a mesma vertente ideológica dos governantes. Morreu aos 68 anos, no dia 23 de maio de 1872.

A presença de Cauchy neste trabalho, foi especificamente pela sua contribuição de acordo com a seguinte definição indicadas em (EVES, 2011):

A derivada de $y = f(x)$ em relação a x, corresponde à razão $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, quando Δx tende a zero. Deve-se ressaltar também que o entendimento sobre o conceito de função não corresponde ao atual, porém se aproxima e pode ser observado abaixo:

> Quando quantidades variáveis são ligadas de modo que, quando o valor de uma delas é dado, pode-se inferir os valores das outras, concebemos ordinariamente estas várias quantidades como expressas por meio de uma delas que recebe, portanto, o nome de "variável independente"; e as outras quantidades, expressas por meio da variável independente, são as que chamamos funções desta variável (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 259).

No próximo capítulo, observa-se uma análise da Base Nacional Comum Curricular e do Currículo Paulista, assim como da Matriz de Referência para Avaliação Processual, onde o intuito é compreender se o tema, cálculo infinitesimal, está presente nestes documentos como orientação para ser ministrado na Educação Básica. Outrossim, também está estabelecida a análise de livros didáticos para melhor compreensão de como a temática é abordada nesse material.

Figura 7 – Augustin-Louis Cauchy

Fonte: Eves (2011).

3 ANÁLISE DO MATERIAL DIDÁTICO E CURRÍCULO

A princípio, para ensinar limites e derivadas, considera-se importante identificar em qual contexto esses conteúdos serão desenvolvidos, assim como a maneira que serão trabalhados, com quais objetivos e para quais níveis de ensino no âmbito do Ensino Médio. Assim sendo, busca-se investigar através de documentos oficiais, que norteiam os trabalhos de professores e professoras, tais como a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, Currículo Paulista, livros didáticos e apostilas, para que assim seja possível a compreensão de como esses conceitos são orientados para serem trabalhados, a partir de quais disciplinas e conteúdos são introduzidos ou correlacionados.

Após o processo de entendimento do arcabouço que orienta o ensino de limites e derivadas na Educação Básica, será desenvolvido material destinado aos professores, propostas de aulas, indicando conteúdos, exercícios e formas de ensinar a temática aqui abordada, apontando de maneira simples e modesta, possíveis ações com foco na aprendizagem dos alunos e alunas do Ensino Médio, assim como indicar também as potencialidades decorrentes da possível interdisciplinaridade entre as disciplinas Física e Matemática, no ensino daquilo que se pretende fazer entender.

Adicionalmente, se possível, esse material será apresentado e discutido com professores da Educação Básica.

3.1 METODOLOGIA

O método, conforme destaca René Descartes (DESCARTES, 1971) no seu "Regras para a Direção do Espírito", pode ser entendido como um conjunto de regras certas e fáceis que conduzem ao conhecimento verdadeiro. Essa concepção, por apresentar veemente rigidez, pouco considera que o conhecimento se constitui através das multifaces das interações humanas, ou seja, o que concebe Descartes traz uma forma de perceber a realidade como uma estrutura que se apresenta pronta. Essa percepção desconsidera as transformações provenientes da ação dos seres humanos no mundo, uma vez que elas apresentam fluidez e multiplicidade.

Contrariamente a isso, o método, na pesquisa qualitativa, integra concepções que compreendem o homem em seu contexto, considerando a variedade e complexidade das experiências humanas. Mais do que considerar um método que leve ao conhecimento verdadeiro, opta-se por destacar aspectos que a pesquisa deve se atentar. É importante que, ao realizar uma pesquisa qualitativa, procure-se ser explícito, tornando os dados públicos, compreensíveis, indissociáveis da prática e, além disso, é imprescindível que a comunidade em sinergia, decida quais conjuntos de especificações reguladoras definem o rigor a ser garantido.

Entende-se, com isso, que para pesquisar qualitativamente não existem regulamentos, que são entendidos como determinações pré-formuladas, aceitas visando uma imposição de um modo correto de pesquisar; existem sim, regulações, discutidas em conjunto com a comunidade, para definir critérios para o seu desenvolvimento visando organizar o percebido. Além disso, com o objetivo de esclarecer uma possibilidade de se pesquisar qualitativamente, as autoras Lucke e André (1986) explicitam que a pesquisa qualitativa deve:

> (i) ter o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento; (ii) coletar dados predominante descritivos; (iii) ter maior atenção ao processo que com o produto; (iv) o processo de análise tende a ser indutivo, sendo que os pesquisadores não se preocupam em buscar evidências que comprovem as hipótese definidas antes do início dos estudos. As abstrações formam-se ou se consolidam, basicamente, a partir da inspeção dos dados num processo de baixo para cima (LÜDKE; ANDRÉ, 1986 apud GARNICA, 2001, p. 39).
> [1]

Outro ponto de destaque em qualquer pesquisa, em específico a pesquisa qualitativa, é a interrogação. Ela é diferente de uma pergunta que indaga, pois se constitui como uma "bússola" que indica as direções para as múltiplas bifurcações que surgem no caminhar investigativo que visa tornar nítido o objeto pesquisado. A partir do momento em que uma interrogação é constituída, é possível fazer indagações em relação aos procedimentos que serão considerados, uma vez que as interrogações que apresentam diferentes articuladores, por exemplo "como", "por que" e "o que", exigem procedimentos característicos.

Dentro dessa vertente de pesquisa, o pesquisador deve ser ousado, considerando o tempo para a maturação da ideia pesquisada. Tal maturidade, de acordo com Antonio Vicente Marafioti Garnica, pode ser proveniente das seguintes ações:

> [...] contato com os pares, o conhecimento das articulações e instituições, o tráfego pelo mundo acadêmico em suas múltiplas perspectivas, as concepções que se formam com a compreensão de textos, contextos e teorias, o experienciar de perspectivas que não são, em princípio, "nossas", mas que a nós se oferecem como símbolos ávidos por serem interpretados (GARNICA, 2001, p. 42).

O percebido, na pesquisa qualitativa, é algo relevante e compreendido, segundo Merleau-Ponty (MERLEAU-PONTY, 1990 apud BICUDO, 2012)[2], como o que dá ao pesquisador 'verdades' como presença. Ou seja, não se trata de uma verdade a priori como desejava o método cartesiano, mas de uma verdade que se estabelece na clareza do percebido. O objeto é percebido pelo pesquisador e é organizado e expresso através da linguagem que pode ser falada, escrita, artística, mítica, etc. Nesse aspecto, a descrição é fundamental, pois procura expressar o mais fielmente possível o percebido. Além disso, conforme aponta Bicudo (BICUDO, 2012), na pesquisa qualitativa o fenômeno investigado é sempre situado/contextualizado e nela não se objetiva direcionar resultados de maneira universal, mas antes há a intenção de que o expresso permita expor características do fenômeno investigado, podendo direcionar reflexões aos mais diversos contextos.

A pesquisa em Educação Matemática mostra-se, na historicidade dessa área de inquérito, como efetuada, na grande maioria das vezes, de modo qualitativo. Conforme descrito, é compreensível

---

[1] LÜDKE, M.; André, M. E. D. A. **Pesquisas em educação: abordagens qualitativas**. EPU. São Paulo:1986

[2] MERLEAU-PONTY, Maurice. **O primado da percepção e suas conseqüências filosóficas**. Campinas: Papirus, 1990.

relativizar a pesquisa qualitativa quando se trata dessa perspectiva, pois, diante do exposto, vê-se que o método qualitativo viabiliza compreender o investigado em relação aos contextos e as interações possíveis na região da Educação Matemática, área composta por duas vertentes bem definidas, mas que se caracteriza como um ramo específico que se difere tanto da Educação quanto da Matemática em termos de constituição dos objetos que investiga.

Por se tratar de aspectos plurais e não possuir paradigmas fechados, a ação de se pesquisar qualitativamente é satisfatória à área, pois diferentes realidades e concepções que permeiam a Educação Matemática podem ser consideradas sob o olhar qualitativo. Outro ponto que possui relevância é o fato de que a pesquisa qualitativa não busca universalizar as informações obtidas, são concepções que possibilitam refletir e compreender características do fenômeno investigado e que podem fornecer possibilidades de entendimento disso que se mostra em outros contextos. Além disso, sustentam raciocínios articuladores importantes para a tomada de decisão política, educacional e, aos poucos, semeiam regiões de inquérito com análises e interpretações rigorosas.

Para contemplar o objetivo desta pesquisa, será necessário lidar com comunicações que se pretende compreender seus significados para além daqueles imediatos, parecendo ser útil a Análise de Conteúdo. De acordo com Laurence Bardin, a (AC) consiste em:

> [...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitem a inferência de produção/percepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 1977, p. 42).

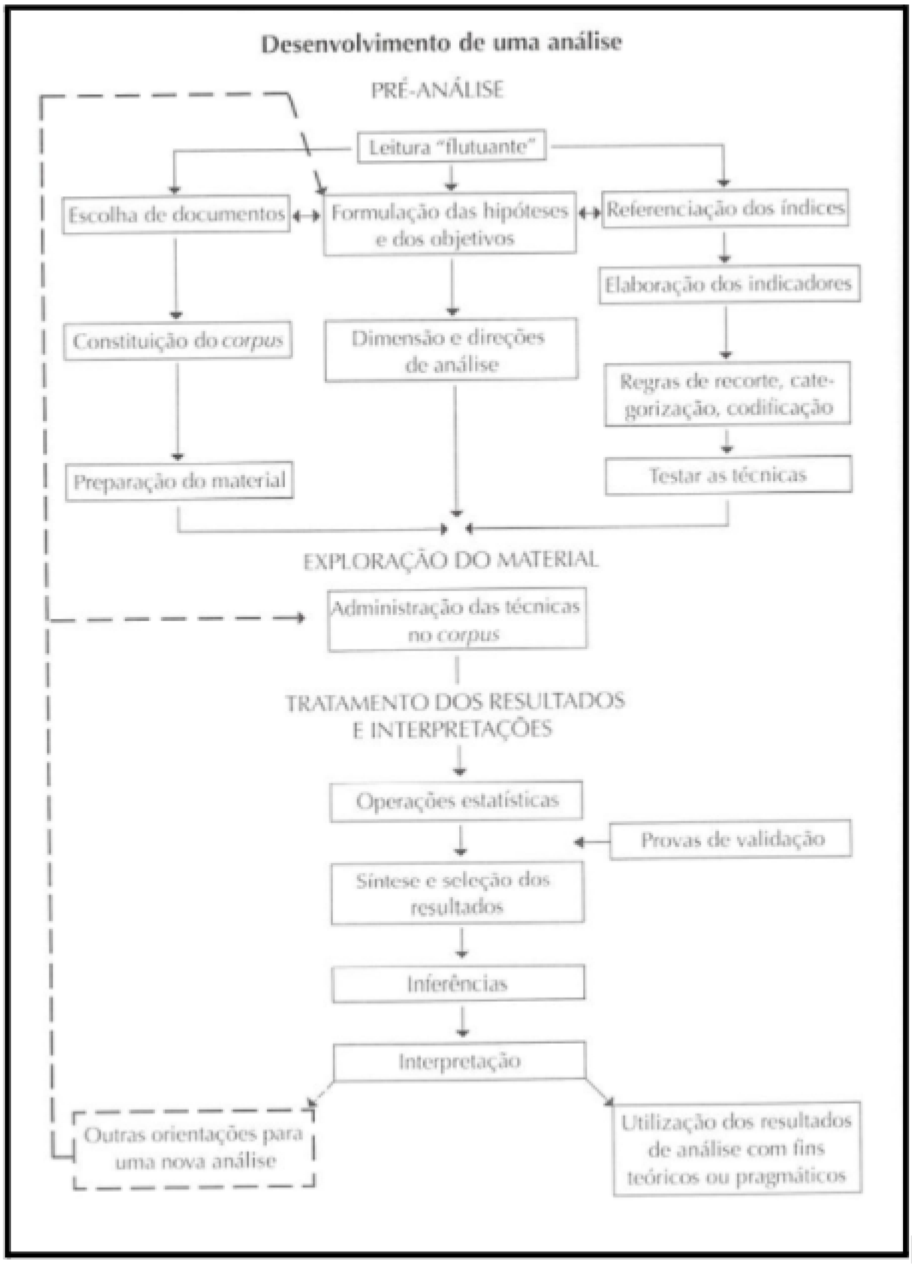
Dentre os objetivos dessa abordagem metodológica, se encontra o enriquecimento através da leitura, que pode ser entendida como uma articulação integrada a partir de uma leitura detalhada e repetitiva, voltada para a compreensão e entendimento do que está exposto, considerando como os significados são representados de acordo com o contexto, com as entonações e os detalhes na forma de se comunicar. Para Bardin:

> [...] poderá uma leitura mais atenta, aumentar a produtividade e a pertinência? Pela descoberta de conteúdos e de estruturas que confirmam (ou infirmam) o que se procura demonstrar a propósito das mensagens, ou pelo esclarecimento de elementos de significações susceptíveis de conduzir a uma descrição de mecanismos de que a priori não detínhamos a compreensão (BARDIN, 1977, p. 29).

Como forma de facilitar o entendimento acerca da abordagem anteriormente exposta, (BARDIN, 1977) indica uma sequência de "passos" que estão presentes na Figura 8.

Na próxima seção está descrita a forma como foi desenvolvida a análise, seguindo as indicações dispostas pela metodologia apresentada e considerando as especificidades decorrentes do objeto da análise.

Figura 8 – Desenvolvimento de uma Análise de Conteúdo



Fonte: Bardin (1977).

3.2 CURRÍCULOS: DESCRIÇÃO E ANÁLISE

O objeto de análise, Base Nacional Comum Curricular - BNCC, foi escolhido por sua generalidade e amplitude de comunicação. Além disso, o Currículo Paulista e a Matriz de Referência para a Avaliação Processual, foram selecionados para observação de como é orientado preceitos do nível federal em um dos estados da federação, São Paulo. A análise aqui apresentada possui cunho qualitativo, mais especificamente, se configura como uma análise temática, sendo que essa "consiste em descobrir os «núcleos de sentido» que compõem a comunicação e cuja presença, ou frequência de aparição podem significar alguma coisa para o objetivo analítico escolhido." (BARDIN, 1977, p. 105). Vale ressaltar que a análise temática é apenas uma das formas de vislumbrar os dados propostos pela AC.

As unidades de registro, segundo Laurence Bardin (BARDIN, 1977), são os segmentos de conteúdos a serem considerados como unidade de base, visando a categorização e a contagem frequencial, podendo ser em nível semântico, temático, linguístico: frase ou palavra, que aqui foram selecionadas como correspondentes a essas unidades às habilidades que cada material orienta. Já os núcleos de contexto, segundo a mesma autora, configuram-se como organização mais abrangente dos núcleos de sentido, que neste trabalho são os campos de estudos da Matemática orientados pela BNCC para a Educação Básica no âmbito do Ensino Médio, ou seja Número e Álgebra, Geometria e Medidas, Probabilidade e Estatística.

As análises dos materiais foram norteadas por perguntas que buscavam verificar se conceitos do cálculo estão presentes nos documentos acima indicados; se a verificação for positiva, ou seja, se tais conceitos são de fato discutidos no âmbito do Ensino Médio, então busca-se entender de que forma isso ocorre.

Além disso, algumas perguntas foram pré-determinadas para que os documentos já citados fossem entendidos de forma ampla, ou seja, para cada documento que fora analisado, o foco foi responder às seguintes perguntas: O que é? Por que existe? Quem foram os responsáveis pela produção do documento? Por que foi desenvolvida? Quando foi formalizada? Qual o público alvo?

3.2.1 Base Nacional Comum Curricular - BNCC

Antes de mais nada, as informações presentes nesta subseção têm como referência a Base nacional comum curricular (BRASIL, 2018a).

A Base Nacional Comum Curricular, formalizada pela primeira vez em 16 de setembro de 2015, contabilizando ao todo 3 versões, sendo que a última foi homologada em 14 de dezembro de 2018 pelo então Ministro da Educação Rossieli Soares, sendo particularmente essa homologação a contemplação do Ensino Médio pelo documento, possui caráter normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais para todas as etapas e modalidades que compreendem a Educação Básica, como forma de garantir os direitos de desenvolvimento dos estudantes brasileiros, estando em consonância com o Plano Nacional de Educação (PNE). Além disso, o processo de elaboração contou com especialistas de todas as áreas do conhecimento, assim como passou por debates com a sociedade, principalmente com educadores de todo o Brasil.

Continuamente, os preceitos deste documento normativo são voltados à educação escolar, essa de acordo com sua definição legal: 1º§ do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional (BRASIL, 1996). Além disso, segue os princípios éticos, políticos e estéticos, visando a formação humana integral e a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN).

Além de sustentar, integrar e alinhar todas as bases dos currículos em todas as instituições educacionais que compreendem a Educação Básica no Brasil, também exerce as mesmas influências sobre a formação continuada dos professores, a avaliação, a elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação.

Dessa forma, o documento em questão dispõe, de maneira estruturada, valores, conhecimentos, formas de agir, ser e pensar que condizem com o que, hoje, considera-se essencial para o pleno desenvolvimento dos cidadãos que estão inseridos em um contexto e são responsáveis pelas transformações que ocorrem nesse meio.

Ademais, para toda a modalidade de ensino que compreende a Educação Básica, são destinadas 10 competências gerais, competência entendida como a "mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho" (BRASIL, 2018a, p. 8), tendo em vista que no inciso IV da LDB, Artigo 9º, afirma que cabe à União "estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum" (BRASIL, 1996, art. 9).

Dando continuidade, aqui estão listadas as principais características, indicadas na BNCC, a serem desenvolvidas pelos estudantes por meio das competências determinadas: reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo, responsável, saber lidar com a informação cada vez mais disponíveis, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos culturais digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades.

Dessa forma, espera-se um desenvolvimento integral dos estudantes, sendo que o sentido de integral presente no texto condiz com uma educação que compreende o discente em toda a sua complexidade, ou seja, entende que para seu pleno desenvolvimento se faz necessário não apenas a dimensão intelectual, mas física, afetiva, social, ética, moral simbólica, cultural, histórica e política. Reiterando, a BNCC não se configura como currículo, mas como regente de determinações de cunho pedagógico, avaliativo, na produção de material didático e critério de infraestrutura que perpassam todas as instituições educacionais do país, sejam elas públicas ou privadas, municipais ou estaduais, que compreendem a Educação Básica. Para que assim as desigualdades educacionais sejam reduzidas.

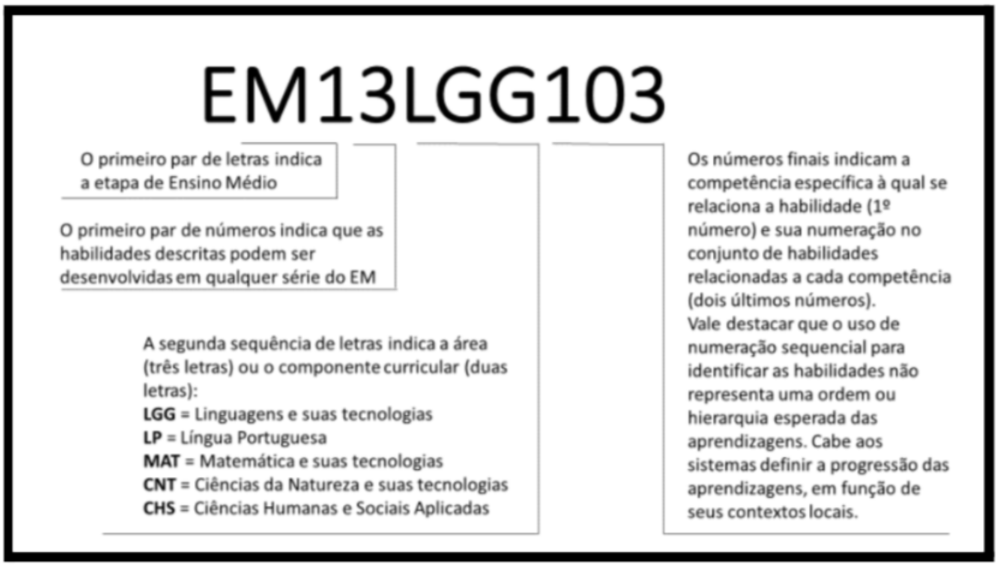
A BNCC está estruturada de acordo com as etapas da Educação Básica, ou seja, Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, sendo correlacionada a essas etapas de ensino competências gerais, que perpassam todas as modalidades, e competências específicas a depender do nível de ensino. O Ensino Médio, foco deste trabalho, está estruturado a partir de Áreas de Conhecimento, sendo destinada competências específicas para essas áreas, assim como as respectivas habilidades. A organização das habilidades está estabelecida por código alfanumérico que pode ser observada na Figura 9.

Assim, o código alfanumérico EM13MAT104 corresponde à quarta habilidade do conjunto de habilidades relacionadas à competência específica 1, destinada ao Ensino Médio, podendo ser desenvolvida em qualquer série dessa etapa de ensino no que tange à área da Matemática e suas Tecnologias. Também podem haver segmentações de habilidades, como por exemplo: EM13MAT104A e EM13MAT104B, sendo que essas habilidades possuem a mesma caracterização explanada anteriormente, com a diferença que a habilidade foi segmentada entre a categoria "A" e "B".

O Ensino Médio se configura como a etapa final da Educação Básica, direito de todo cidadão brasileiro. Os jovens desta etapa de ensino, pela perspectiva da BNCC, são vistos em suas pluralidades, capacidades e especificidades, compromissada com a educação integral mencionada anteriormente, considerando os fatores que impactam esses sujeitos, principalmente as constantes transformações tecnológicas. Segue abaixo as finalidades decorrentes do Ensino Médio, como etapa de ensino:

- Garantir a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, de forma a sintonizar com as necessidades, possibilidades e interesse dos jovens, bem como com os desafios da sociedade contemporânea;
- Preparar, de maneira básica, os estudantes para o mundo do trabalho e para a cidadania, ou seja, favorecer o desenvolvimento da criticidade, criatividade, responsabilidade e autonomia para com a complexibilidade e instabilidade com as quais a sociedade se apresenta;
- Aprimorar o educando como pessoa humana, com foco na formação ética e no desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
- Garantir a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, estabelecendo relação entre teoria e prática.

Figura 9 – Organização alfanumérica das habilidades



Fonte: Base Nacional Comum Curricular (2018).

A estrutura do Ensino Médio está definida em áreas do conhecimento, sendo essas: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, assim como os itinerários formativos, como possibilidade de aprofundamento acadêmico ou formação técnica e profissional. Essa estrutura vem como possibilidade de oferecer aos jovens mais flexibilidade, comunicação entre as disciplinas e autonomia em seu processo educacional. Para cada área de conhecimento há competências específicas articuladas e para cada competência há habilidades articuladas, além de habilidades específicas de Língua Portuguesa e Matemática.

Os itinerários formativos, segundo (BRASIL, 2018a), constituem uma proposta que visa desenvolver nos jovens procedimentos cognitivos específicos e o protagonismo da parte daqueles que são o foco da ação: os estudantes. Além disso, vale ressaltar que esses itinerários devem considerar as condições em que os estudantes estão inseridos, levando em conta os anseios da comunidade escolar, os recursos físicos, materiais e humanos das redes e instituições. Tais itinerários devem seguir as seguintes resoluções:

> I – linguagens e suas tecnologias: aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes linguagens em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em línguas vernáculas, estrangeiras, clássicas e indígenas, Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS), das artes, design, linguagens digitais, corporeidade, artes cênicas, roteiros, produções literárias, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino; II – matemática e suas tecnologias: aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino; III – ciências da natureza e suas tecnologias: aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos em contextos sociais e de trabalho, organizando arranjos curriculares que permitam estudos em astronomia, metrologia, física geral, clássica, molecular, quântica e mecânica, instrumentação, ótica, acústica, química dos produtos naturais, análise de fenômenos físicos e químicos, meteorologia e climatologia, microbiologia, imunologia e parasitologia, ecologia, nutrição, zoologia, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino; IV – ciências humanas e sociais aplicadas: aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em relações sociais, modelos econômicos, processos políticos, pluralidade cultural, historicidade do universo, do homem e natureza, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino; V - formação técnica e profissional: desenvolvimento de programas educacionais inovadores e atualizados que promovem efetivamente a qualificação profissional dos estudantes para o mundo do trabalho, objetivando sua habilitação profissional tanto para o desenvolvimento de vida e carreira quanto para adaptar-se às novas condições ocupacionais e às exigências do mundo do trabalho contemporâneo e suas contínuas transformações, em condições de competitividade, produtividade e inovação, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino (BRASIL, 2018b, art. 12).

Além dos itinerários formativos, o ensino médio também é caracterizado pelo projeto de vida, esse entendido como um trabalho de autoria dos estudantes, no qual os jovens almejam, projetam, e redefinem aquilo que lhes competem o desenvolvimento, as identidades, contextos e culturas. O projeto visa desenvolver a autonomia e o protagonismo dos alunos.

A área da Matemática e suas Tecnologias para a etapa do EM, diferente da organização disposta no EF, onde a estrutura e organização se dá segundo unidades de conhecimento da própria área (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística), setorizadas por séries, a estrutura no EM se dá por meio da relação entre competências específicas e as respectivas habilidades, sendo que essas habilidades são destinadas de maneira geral para as três séries que compõem essa etapa de ensino, ou seja, não está presente o que deve ser dado especificamente para uma determinada série no Ensino Médio, essa decisão foi tomada visando a flexibilização da definição anual dos currículos e propostas pedagógicas de cada escola.

Por fim, vale ressaltar as diferenças entre as etapas de ensino expostas no parágrafo anterior, especificamente em relação à área da Matemática, as quais podem ser observadas abaixo:

> A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exigem maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (BRASIL, 2018a, p. 491).

3.2.2 Currículo Paulista

Todas as informações contidas nesta seção foram referenciadas do Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2020).

Com a homologação da terceira versão da BNCC em 14 de dezembro de 2018, com determinações específicas para o Ensino Médio, as unidades federativas se prontificaram em fazer as adaptações de acordo com as diretrizes, parâmetros e critérios para a sua implementação nos estados e municípios. Nesta seção iremos ver como o Estado de São Paulo realizou essa implementação através do Currículo Paulista.

O Estado de São Paulo consiste em 645 municípios, ocupando, aproximadamente, cerca de apenas 2,9% da superfície terrestre brasileira, mas com um contingente populacional de 45 milhões de habitantes, o que corresponde a 22% do total de habitantes do Brasil. Como forma de atender a essa demanda, o Currículo Paulista foi formalizado, sendo seu início em 2018 com o envolvimento de profissionais da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEDUC-SP), da União dos Dirigentes Municipais de Educação do Estado de São Paulo (UNDIME-SP), do Sindicato dos Estabelecimentos de Ensino do Estado de São Paulo (SIEEESP), da Secretaria de Desenvolvimento Econômico, do

Centro Paula Souza, das universidades estaduais (USP, UNESP e UNICAMP) e de entidades não governamentais, comprometidas com a melhora na qualidade da educação ofertada no estado.

A produção desse currículo, ao explicitar todas as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver, objetiva a redução de desigualdades educacionais. A sociedade civil, segundo (SÃO PAULO, 2020), também contribui na elaboração desse currículo, onde 142.076 estudantes e 18.739 profissionais da educação integraram insumos para a formalização do material em questão. Outrossim, foi estabelecido um questionário com 165.252 estudantes da rede estadual para melhor entender quais são os anseios dos futuros cidadãos.

Em fevereiro de 2020 foi entregue uma versão preliminar para consulta pública, onde modificações e implementações advindas da sociedade civil foram implementadas no período entre 19 de março e 8 de maio deste mesmo ano. Sendo que sua aprovação final ocorrera em 29 de julho de 2020, incorporando as considerações pertinentes que foram indicadas e que estivessem alinhadas com a BNCC.

Diante disto, as propostas pedagógicas podem encontrar formas mais consistente de sanar as necessidades dos estudantes sob a luz do Currículo Paulista, objetivando, assim, reduzir as defasagens e desigualdades em relação às aprendizagens, num contexto permeado por múltiplas formas de ser e estar no mundo e em sociedade, o que compreende as juventudes.

A educação integral aqui descrita está correlacionada aos campos que compreendem a composição humana, ou seja, as dimensões intelectual, física, social emocional e cultural, elencando as competências e as habilidades essenciais para a sua atuação na sociedade contemporânea e seus cenários complexos, multifacetados e incertos. Essa mesma perspectiva está descrita na BNCC.

O Currículo Paulista, como determinado, está em consonância com a BNCC ao apontar as dez competências gerais básicas para desenvolvimento pleno dos futuros cidadãos, competências essas que devem ser desenvolvidas ao longo de toda a Educação Básica, e que contemplam integralmente conceitos, procedimentos, atitudes e valores. Para que o desenvolvimento do grupo das competências gerais seja efetivamente garantido, faz-se necessário entender que todos são capazes de aprender, que todos tem a flexibilidade necessária para lidar com as adversidades cotidianas, além de:

> Especificamente, sobre a educação para o mundo do trabalho, faz-se necessário combinar as demandas dos setores produtivos, os interesses dos indivíduos e os interessem coletivos, preparando, assim, o cidadão para o desempenho de "profissões", cada vez mais fluidas, intangíveis e mutantes. O trabalhador deve estar habituado e preparado para a adaptação contínua das relações profissionais, dos objetivos da produção de gestão, e das tecnologias, inovações e dos atores sociais, incluindo concepções e visões de mundo, comportamento, condutas e valores (SÃO PAULO, 2020, p. 28).

Objetivando diluir a suposta fragmentação destinada às áreas do saber, os temas transversais se configuram como práticas educativas que consideram o contexto em que os alunos estão inseridos, e, por se tratar de questões pautadas na realidade, via de regra, faz-se necessário a articulação de diferentes saberes.

Ademais, os principais valores cobiçados pelo currículo são: justiça, democracia e solidariedade; com ênfase no protagonismo juvenil e na criticidade nas decisões e ações, criatividade, responsabilidade e autonomia.

As transformações sociais e tecnológicas estão exigindo um novo perfil de estudante que a escola busca se adaptar. A proposta do Currículo visa superar a segmentação presente no conhecimento, compreendendo que o saber, contextualizado no cotidiano, não possui essa característica setorizada. Além disso, pela perspectiva do Currículo Paulista, a escola é pensada como suporte para os jovens em suas múltiplas especificidades e singularidades, a planejarem, organizarem e definirem seus objetivos para além da Educação Básica. Portanto, os vieses de desenvolvimento, dentro desse cenário, perpassam três eixos formativos como foco do Ensino Médio em específico: formação para a vida, excelência acadêmica e desenvolvimento de competências socioemocionais.

A compreensão acerca dos jovens que frequentam o EM se orienta pela amplitude, complexidade e pluralidade de formas de existir, assim como as múltiplas culturas juvenis que configuram o cenário das escolas do estado. Vale ressaltar também, a necessidade de a escola reconhecer os jovens em sua multiplicidade, acolhê-los e prepará-los para os desafios que a sociedade atual impõe.

Ao destacar a importância da escola em entender as turbulências emocionais decorrentes de um uso equivocado das tecnologias, estabelece-se um compromisso com uma escola acolhedora, isso significa, uma escola que se interessa pelos estudantes, os percebem em suas inteirezas, aceita-os em suas diversidades, e os fazem se sentir queridos e amparados.

Em termos legais está assegurada a oferta de educação de qualidade para todos indivíduos da nação, dessa forma, fatidicamente, o Currículo Paulista em consonância com a legislação, visa, de maneira ampla, a inclusão educacional de pessoas em situações de vulnerabilidade para efetivar o direito dos cidadãos à educação.

O período que compreende a transição do EF para o EM é acompanhado de muitas outras transformação, tais como: biológicas, psicológicas, sociais e emocionais, além das promovidas pela escola, ou seja, em relação à autonomia, à possibilidade de sua opção pelos itinerários formativos, às responsabilidades e às escolhas para a vida. Em adição, existem as competências específicas para essa etapa de ensino, EM, assim como para cada área de conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Como visto na BNCC, a transição, em específico para a área de Matemática e suas Tecnologias, seguem os mesmo princípios:

> A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na aplicação prática do conhecimento matemático, na investigação e nas especulações teóricas que integram o universo de objetos específicos da Matemática, que também podem contribuir para a compreensão das relações cotidianas, e na resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, o estudante deve consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exigem maior reflexão e abstração. Também deve construir uma visão mais integrada da Matemática, com outras á-

reas do conhecimento e da sua aplicação à realidade (BRASIL, 2018a, p. 491).

A partir da efetivação da Lei Federal nº 13.415/2017, que substitui o modelo único de currículo para etapa do Ensino Médio por um modelo diversificado e flexível, a etapa em questão passa a ser composta pela "formação geral básica (comum a todo os estudantes), com carga horária máxima de 1.800 horas, e por itinerários formativos (parte diversificada e flexível), com carga mínima de 1.200 horas" (SÃO PAULO, 2020, p. 46). Dessa forma, a formação geral básica:

> [...] deverá garantir a todos os estudantes desta etapa de escolarização as aprendizagens essenciais definidas pela BNCC, organizadas por áreas do conhecimento, conforme estabelecido no artigo 35-A da LDB. Para cada área são definidas competências específicas, articuladas às competências das áreas da etapa do Ensino Fundamental com adequações às especificidades do Ensino Médio (SÃO PAULO, 2020, p. 46).

A estrutura organizacional do Currículo Paulista (Figura 10), segue as normas ditadas pela BNCC, ou seja, está setorizado por áreas de conhecimento, sendo que para cada área de conhecimento estão vinculadas competências específicas e para cada competência específica estão correlacionadas habilidades. Essas habilidades são codificadas pelo mesmo sistema presente na BNCC, ou seja, pelo sistema alfanumérico. A diferenciação em termos de estrutura é que no Currículo Paulista, além das competências e habilidades, estão vinculados os objetos de conhecimento correspondentes a esses atributos.

Figura 10 – Organizador curricular da área de Matemática e suas Tecnologias

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES	UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	**(EM13MAT101)** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	**NÚMEROS E ÁLGEBRA**	Funções: interpretação de gráficos e de expressões algébricas. Sistemas e unidades de medida: leitura e conversão de unidades de grandezas diversas. Variação de grandezas, como velocidade, concentração, taxas de crescimento ou decrescimento de populações, índices econômicos etc. Estatística: gráficos (e infográficos), medidas de tendência central e de dispersão.
	(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.	**PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA**	Conceitos estatísticos: população e amostragem. Gráficos utilizados pela estatística: elementos de um gráfico. Confiabilidade de fontes de dados. Correção no traçado de gráficos estatísticos. Medidas de tendência central e de dispersão.

Fonte: São Paulo (2020).

Em síntese, na imagem acima é possível observar como está organizada as competências, habilidades, unidades temáticas, que consistem nos campos de estudo da própria matemática, ou seja, Número e Álgebra; Geometria e Medidas; Probabilidade e Estatística, essas unidades temáticas são orientadas pela própria BNCC, e objetos de conhecimento. Esse molde se aplica em todas as áreas de conhecimento.

Em relação à área de Matemática e suas Tecnologias, o Currículo Paulista não prevê apenas aos jovens a compreensão e o domínio destes sobre o conhecimento matemático, mas também associação, justificativa, expressão e raciocínio baseado nos conhecimentos adquiridos contextualizados à realidade. Ressaltando, dessa forma, a conexão com outras áreas do conhecimento. Portanto, "espera-se da área de Matemática e suas Tecnologias o desenvolvimento de pessoas capazes de conjecturar raciocínios lógico-matemáticos, por meio da compreensão de questões problematizadoras e de situações da sociedade em que estão inseridos."(SÃO PAULO, 2020, p. 113).

Os itinerários formativos no documento em questão foram aprofundados e organizados de acordo com alfanuméricos específicos para essa modalidade. Em decorrência disso, está sendo posto em prática o "novo Ensino Médio", que segundo (EDUCACAO, 2021), constitui todas as normatizações indicadas pela BNCC, e consequentemente pelo Currículo Paulista. Adicionalmente, essa etapa de ensino passará de 2.400 horas para 3.000 horas, sendo que 1.800 horas será destinada para a educação geral e 1.200 horas para os itinerários formativos ou ensino técnico e profissional. Essas 3.000 horas estão igualmente distribuídas pelas três séries que compreendem o EM.

3.2.3 Matriz de Referência para a Avaliação Processual

Inicialmente, vale ressaltar que todas as informações nesta subseção contidas possuem como referência a Matriz de Referência para Avaliação Processual (SÃO PAULO, 2016).

Por meio da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE), o Currículo Oficial do Estado de São Paulo, anterior ao Currículo Paulista, foi elaborado, sendo oficializado a partir de 2008. No documento estão presentes as concepções de ensino nas diferentes áreas de conhecimento, conteúdos e habilidades organizadas por bimestre, ano e série.

Essa medida foi realizada para proporcionar aos professores e gestores uma base comum de conhecimentos. Além disso, a SEE é responsável pela produção dos Cadernos do Professor e do Aluno, que articula as habilidades e conteúdos explicitados no currículo por meio de Situações de Aprendizagem e Sequências Didáticas, específicos para cada componente curricular. Ainda tendo o Currículo Oficial do Estado de São Paulo em pauta, foram definidas as diretrizes de referência para o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp).

Na Matriz de Avaliação Processual estão definidas as matrizes de referência para as avaliações processuais de todos os componentes da Educação Básica, ou seja, as habilidades, competências e conteúdos presentes neste documento, estruturados por série, bimestre e área de conhecimento, visa oferecer subsídios para manter os professores sintonizados com a elaboração da Avaliação de Aprendizagem em Processo (AAP), essa avaliação, atestada mensalmente para as disciplina de Língua Portuguesa e Matemática, possibilita mapear, por meio de relatórios disponíveis no Sistema de Acompanhamento dos Resultados Avaliativos (SARA), o desempenho e desenvolvimento dos estudantes em relação aos objetivos propostos pelo currículo.

O processo de conhecimento, disposto no documento em questão, pode ser entendido como um caminho de construção e reconstrução dos significados que os estudantes têm ao interagir no mundo e com o mundo, estabelecendo assim significados a partir de objetos, pessoas, fatos e fenômenos. Assim sendo, para compreender os discentes em sua totalidade, faz-se necessário compreender que apenas a dimensão cognitiva não engloba as necessidades fundamentais de um cidadão, sendo responsabilidade da escola promover o desenvolvimento socioemocional por meio das diretrizes escolares. Em específico, são diversos os aspectos cognitivos no processo educacional, a maioria explicitados na Matriz de Referência, por vezes apresentados como:

> [...] saber inferir, atribuir sentido, articular partes e todo, excluir, comparar, observar, identificar, tomar decisões, reconhecer, fazer correspondências. Do ponto de vista do desenvolvimento afetivo ocorre o mesmo: saber prestar atenção, sustentar um foco, ter calma, não ser impulsivo, ser determinado, confiante, otimizar recursos internos. Sob a ótica das relações sociais, é necessário verificar se o aluno é capaz de interagir: seguir regras, agir em uma situação coletiva que envolva cooperação e competição; respeitar o outro, saber argumentar, saber ouvir, valorizar a opinião do outro, valorizar a conduta colaborativa do outro (SÃO PAULO, 2016, p. 10) .

Apesar dessas considerações em relação ao âmbito socioemocional dos estudantes, na Matriz de Referência para a Avaliação Processual está indicado que não há uma Matriz de Avaliação das habilidades socioemocionais. Ainda também, dentro do contexto cotidiano da sala de aula, os professores devem promover o resgate de valores e atitudes que visam o protagonismo sadio e construtivo, controle das emoções, empatia com o grupo, aumento da qualidade nas relações sociais e em grupo.

O propósito desta matriz é explicitar os conteúdos, as competências e as habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo do percurso escolar. Ademais, na Figura 11 podemos observar como as habilidades, conteúdos e competências estão organizadas.

Figura 11 – Estruturação da Matriz de Referência para a Avaliação Processual

1ª série – 1º bimestre		
Conteúdos	Situações de Aprendizagem Competência/habilidade	Avaliação Processual/Habilidades
Números e Sequências • Conjuntos numéricos • Regularidades • Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas	**Situação de Aprendizagem 1: Conjuntos numéricos: regularidades numéricas e geométricas** Habilidades 1. Obter sequências numéricas a partir do conhecimento de seu termo geral. 2. Obter o termo geral de uma sequência numérica a partir da identificação da regularidade existente. 3. Reconhecer a existência ou não de padrões de regularidades em sequências numéricas ou geométricas. 4. Utilizar a linguagem matemática para expressar a regularidade dos padrões de sequências numéricas ou geométricas. **Situação de Aprendizagem 2: Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas** Habilidades 1. Reconhecer o padrão de regularidade de uma sequência aritmética ou de uma sequência geométrica. 2. Utilizar a linguagem matemática para expressar a regularidade dos padrões de sequências numéricas. **Situação de Aprendizagem 3: Soma dos termos de uma PA ou de uma PG finitas e aplicações à Matemática Financeira** Habilidades 1. Utilizar a linguagem matemática para expressar a regularidade dos padrões de sequências numéricas ou geométricas. 2. Aplicar conhecimentos matemáticos em situações do cotidiano financeiro. 3. Generalizar procedimentos de cálculo com base em expressões matemáticas associadas ao estudo das progressões numéricas. **Situação de Aprendizagem 4: Limite da soma dos infinitos termos de uma PG infinita** Habilidades 1. Utilizar a linguagem matemática para expressar a regularidade dos padrões de sequências numéricas ou geométricas. 2. Compreender a noção intuitiva de limite de uma função. 3. Considerar a pertinência da noção de infinito no cálculo de quantidades determinadas.	**SA1** • Identificar determinado termo em sequências numéricas ou geométricas. • Expressar algebricamente padrões de sequências numéricas ou geométricas. **SA2** • Identificar se uma determinada sequência é Progressão Aritmética. • Identificar se uma determinada sequência é Progressão Geométrica. **SA3** • Resolver problemas envolvendo PA ou PG, em diferentes contextos. **SA4** • Calcular a soma dos n primeiros termos de uma PA ou PG.

Fonte: São Paulo (2016).

3.2.4 Análise: currículos

Em continuidade, foram analisadas as 43 habilidades da BNCC, indicadas para área de Matemática e suas Tecnologias voltadas para o EM, sendo que nesta análise as habilidades foram consideradas unidades de registro, ou seja, sequência de conteúdo, frase ou palavra, considerada como unidade básica; 43 habilidades presentes no Currículo Paulista, da mesma área explicitada anteriormente, e os respectivos objetos de conhecimento; e as 114 habilidades, voltadas para à Matemática do EM, presentes na Matriz de Referência para a Avaliação Processual, contabilizando um total de 200, considerando que apesar do fato de as habilidades contidas na BNCC serem as mesmas contidas no Currículo Paulista, foram contabilizados os objetos de conhecimento respectivo a cada habilidade, o que difere este documento daquele em termos estruturais. Ademais, essas habilidades foram agrupadas de acordo com os campos de estudo da Matemática, sendo esses aqui classificados como unidades de contexto, ou seja, um agrupamento mais abrangente das unidades básicas.

O foco da análise das habilidades foi encontrar conteúdos que estabelecem relação direta com o cálculo infinitesimal, ou seja, a procura de palavras que expressam explicitamente a temática cálculo. Logo abaixo é possível observar o Quadro 1 onde está descrita a organização aqui apresentada, assim como a consequência da análise.

Quadro 1 – Organização: unidades de registro x unidades de contexto - currículos

Unidades de contexto: campos de estudo da Matemática orientados pela BNCC para o Ensino Médio	Unidades de registro: 43 habilidades presentes na BNCC; 43 habilidades e seus respectivos objetos de conhecimento presentes no Currículo Paulista; e as 114 habilidades presentes na Matriz de Referência para Avaliação Processual.		
	Base Nacional Comum Curricular - 43 habilidades.	Currículo Paulista - 43 habilidades e os respectivos objetos de conhecimentos.	Matriz de Referência para a Avaliação Processual - 114 habilidades.
Álgebra e Números	—	—	1. Compreender a noção intuitiva de limite de uma função. 2. Considerar a pertinência da noção de infinito no cálculo de quantidades determinadas.
Geometria e Medidas	—	—	—
Probabilidade e Estatística	—	—	—

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se que em 200 habilidades e objetos de conhecimento, apenas duas habilidades expressam explicitamente o cálculo infinitesimal, ou seja, em termos percentuais temos que apenas 2% das unidades de registro aqui consideradas compreendem o cálculo infinitesimal de maneira explícita.

Diante disso, podemos inferir que a presença dessa temática, de maneira inequívoca, é pouco frequente quando comparamos com a quantidade total de habilidades presentes. Podemos inferir também que esse fato pode ser decorrente da BNCC e o Currículo Paulista, alinhados com perspectivas mais recentes da educação, promoverem um conhecimento matemático mais abrangente e não tão específico quanto o cálculo infinitesimal. Fatidicamente, existe a presença de conteúdos do cálculo infinitesimal a serem trabalhados na etapa do Ensino Médio, logo a verificação se mostra positiva quanto à presença do cálculo orientado para ser trabalhado na etapa de ensino em questão.

Na seção a seguir iremos ver como é indicado o trabalho docente em materiais didáticos, em relação ao que está orientado na Matriz de Referência para a Avaliação Processual sobre o cálculo infinitesimal.

3.3 MATERIAL DIDÁTICO: DESCRIÇÃO E ANÁLISE

O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), organizado por meio do governo federal, visa avaliar e disponibilizar materiais didáticos, pedagógicas e/ou literárias, como apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, a todas as escolas públicas, da educação básica das redes federais, estaduais, municipais e distritais, assim como para instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos convencionadas ao Poder Público.

Outrossim, a execução do PNLD ocorre por meio de ciclos, ou seja, as escolas renovam as obras didáticas, mais especificamente, os livros didáticos a cada ano por etapa de ensino, ou seja, Educação Infantil, Ensino Fundamental - Ciclo I, Ensino Fundamental - Ciclo II e Ensino Médio. Como exemplo disso, as coleções que aqui foram analisadas correspondem à atualização dos livros que ocorreu no ano de 2021, onde as instituições de ensino, que contemplam o EM e que se inscreveram no PNLD, receberam novas obras, enquanto os materiais das demais etapas foram repostos, tendo em vista novas matrículas ou perda de material. Vale ressaltar também que as obras analisadas neste trabalho são apenas duas coleções do total de coleções que foram selecionadas.

A seleção dos materiais fica a cargo do Ministério da Educação, no âmbito da Secretaria de Educação Básica (SEB), e a compra e distribuição cabe ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), esse responsável pela logística do provimento e do remanejamento dos materiais didáticos para todas as instituições, mencionadas no primeiro parágrafo deste capítulo, do país cadastradas no censo escolar. Essa distribuição ocorre por meio de contrato entre o FNDE e a Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos, que movimenta os livros das editoras diretamente para as escolas. Os livros são entregues entre outubro do ano anterior ao atendimento e o início do ano letivo.

Continuamente, os livros que são entregues possuem um período de três anos para serem renovados, ou seja, uma determinada coleção ao ser adquirida por uma escola, será utilizada por três anos consecutivos, para assim serem atualizados por uma nova coleção, entretanto, os livros de alfabetização matemática e de alfabetização linguística (1º e 2º anos) e os de língua estrangeira, assim como os livros de sociologia, filosofia se configuram como livros consumíveis, o que significa que os estudantes não precisam devolver à escola.

Além disso, o São Paulo Faz Escola é o programa responsável pela unificação do currículo por meio de documentos que constituem orientações que visam a base comum de aprendizagens, sendo suporte para alunos e professores. Ademais, com o São Paulo Faz Escola são destinados materiais, cadernos do Professor e do Aluno, organizados por disciplinas, ano e bimestre. O material é disponibilizado nas disciplinas de Língua Portuguesa, Matemática, História, Filosofia, Química, Física, Biologia, Inglês, Geografia, Sociologia, Arte e Educação Física.

Portanto, os materiais analisados correspondem a duas coleções destinadas ao PNLD, onde foram vistos os sumários com foco em qualquer unidade de registro, que neste caso, frases que configuram tópicos nos sumários, que remetem diretamente ao cálculo infinitesimal, da mesma forma foram analisadas as apostilas Caderno do Professor, destinadas como auxiliadoras da prática docente, para as escolas públicas do Estado de São Paulo, seguindo a mesma lógica de análise dos materiais anteriormente apresentados. As duas coleções de livros didáticos foram encontradas no portal e-docente, que consiste em conteúdos sobre educação voltados para professores, mantido pelas editoras Ática, Scipione, Saraiva e Atual. Já as apostilas foram retiradas do site “spfazescola.org”. No Quadro 2 podemos observar os materiais que foram analisados, tendo como foco a presença do cálculo infinitesimal na constituição desses documentos.

Quadro 2 – Materiais analisados

Coleções - livros didáticos	SP faz escola - apostilas
Matemática em Contexto - Editora Ática, composta por 6 volumes voltados para a Matemática específica para o EM, manual do professor.	Caderno do Professor, considerando todas as séries e bimestres que compõe o EM.
Matemática Interligada - Editora Scipione, composta por 6 volumes voltados para a Matemática específica para o EM, manual do professor.	—

Fonte: Elaborado pelo autor.

Reiterando, as unidades de registro estabelecidas nesta análise foram os tópicos presentes nos sumários dos materiais, ou seja, os títulos dos capítulos, seções e subseções dos livros didáticos que compõem as coleções previamente apresentadas, assim como os títulos das situações de aprendizagens presentes no Caderno do Professor. Ao todo foram analisadas 1025 unidades de registros, sendo que a unidade de contexto seguiu o mesmo padrão da organização da subseção anterior, ou seja, setorizado por campos de estudo da Matemática. No Quadro 3 é possível observar de que modo a organização foi estabelecida.

Observa-se que em todos os materiais analisados, a presença de orientações para se trabalhar com conteúdos do cálculo infinitesimal segue a indicação presente na Matriz de Referência para a Avaliação Processual. Ademais, em 1025 tópicos analisados, apenas 4 seguem o critério estabelecido, que em termos percentuais representa, aproximadamente, 0,4%, não seguindo a mesma proporção apresentada nas determinações dos documentos norteadores.

Quadro 3 – Organização: unidades de registro x unidades de contexto - material didático

Unidades de contexto: campos de estudo da Matemática orientados pela BNCC para o Ensino Médio	Unidades de registro: tópicos presentes nos sumários dos materiais, ou seja, títulos dos capítulos, seções, subseções e situações de aprendizagens.		
	Coleção Matemática em Contexto - 293 tópicos.	Coleção Matemática Interligada - 684 tópicos.	Caderno do Professor, São Paulo faz escola - 48 situações de aprendizagem.
Álgebra e Números	1. Explorando a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita; 2. Formalizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.	3. Limite da soma dos termos de uma PG infinita.	4. Limite da soma dos infinitos termos de uma PG infinita.
Geometria e Medidas	—	—	—
Probabilidade e Estatística	—	—	—

Fonte: Elaborado pelo autor.

Continuamente, observa-se que tanto nas coleções e Caderno do Professor, quanto na Matriz de Referência para a Avaliação Processual a proposta de se trabalhar conteúdos do cálculo infinitesimal está relacionada ao tema progressão geométrica (pg), mais especificamente sobre a soma de infinitos termos de um pg, o que se enquadra em Números e Álgebra. Ao adentrarmos mais profundamente nos materiais analisados nesta seção, podemos observar que a forma de apresentar o limite da soma de infinitos termo de uma pg é muito semelhante entre os materiais e será explicitada a seguir:

Inicialmente, o conteúdo é apresentado em continuidade a soma de finitos termos de uma pg, e para dar contexto a explicação da soma de infinitos termos de uma progressão geométrica, é orientado aos leitores, que neste caso são os estudantes, a somarem os primeiro seis termos da pg $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}, \ldots)$, cuja razão é $\frac{1}{4}$. Depois desse processo, faz-se referência aos capítulos anteriores, mais especificamente, à função exponencial, sendo exemplificado um caso onde a base é $\frac{1}{4}$, ou seja, $f(x) = (\frac{1}{4})^x$. Ao fazer referência ao gráfico, os discentes são convidados a observar que quando o valor de x se torna muito grande, o quão grande quanto quisermos, a função tende a zero, ou seja, $\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{4})^x = 0$.

Em seguida a isso, estabelece-se uma formalização, que consiste em uma análise da fórmula $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, quando n tende ao infinito, sendo que $0 < |q| < 1$. Logo:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{q-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-0)}{q-1} = \frac{a_1}{q-1} \tag{1}$$

Portanto o $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a1}{q-1}$, isso quando $0 < |q| < 1$. Além disso, está indicado que essa soma é intitulada série geométrica convergente, assim como que para valores de $q \leq -1$ ou $q \geq 1$, o limite não existe e a soma é chamada de série geométrica divergente. Com isso, portanto, observamos a forma como ocorre o desenvolvimento de conteúdos relacionados ao cálculo infinitesimal na etapa de ensino: EM.

No capítulo seguinte é possível observar, além de recomendações de possíveis formas de ensinar cálculo infinitesimal de maneira interdisciplinar com a Física ensinada no primeiro ano do Ensino Médio, Cinemática, plano de aulas onde busca-se adequar a temática ao cotidianos de professores que lecionam para essa etapa de ensino.

4 MODELO DE AULA INTERDISCIPLINAR: MATEMÁTICA E FÍSICA

Antes de adentrarmos mais profundamente no plano de ensino, é necessário entender qual o significado de interdisciplinaridade aqui trabalhado. O autor Marcel Boisot, em seu trabalho intitulado "Discipline et interdisciplinarité", apresenta 3 formas de conceber a interdisciplinaridade, em específico a interdisciplinaridade linear, que melhor corresponde com a proposta aqui apresentada, desta forma a interdisciplinaridade linear:

> É uma modalidade de intercâmbio interdisciplinar na qual uma ou mais leis tomadas de uma disciplina são utilizadas para explicar fenômenos de outra; mediante alguma redefinição das variáveis e parâmetros, ela seria ajustada ao novo contexto disciplinar. A história da ciência constata numerosos exemplos de leis originárias de uma disciplina concreta que foram transferidas e aplicadas com êxito a outra (BOISOT, 1972 apud CARLOS, 2007, p. 46). [1]

Logo, a interdisciplinaridade aqui exposta promove um intercâmbio entre as disciplinas Física e Matemática, onde a segunda oferta teorias e metodologias para explicar fatores da primeira, ou seja, através de limites e derivadas, conceitos matemáticos, explicar alguns aspectos correlatos à Cinemática, como velocidade instantânea, por exemplo, componente específico da disciplina Física.

Ademais, para se ensinar limites e derivadas, precisa-se conhecer quais conteúdos estão correlatos para que assim a introdução seja formalizada. Considera-se, neste trabalho, que funções seja o melhor tema como link para a introdução. Dessa forma, deve-se entender como as funções são trabalhadas no Ensino Médio. Assim sendo, segundo Geraldo Ávila: "As funções costumam ser apresentadas em um bloco único, logo na primeira série do ensino médio, de maneira desvinculada de geometria analítica, limite e derivadas, que aparecem nos livros da terceira série" (AVILA, 2010, p. 167). Como vimos no capítulo anterior, os conteúdos correlatos a limites e derivadas aparecem apenas vinculados ao campo de conhecimento "Álgebra e Números", mais especificamente, vincula-se ao conceito de soma de infinitos termos de uma progressão geométrica.

A explicação exposta neste trabalho corresponde ao nível de ensino de professores de licenciatura e se faz necessário, como forma de articular as orientações aqui dispostas , que os estudantes da Educação Básica estejam cientes do significado de função, principalmente em relação à interdependência, valores correspondentes de x ou de y na função, assim como a inclinação de uma reta secante, por exemplo. De acordo com o professor Geraldo Ávila (AVILA, 2010), em seus anos de experiência em sala de aula, reforça que as explicações expositivas devem durar entre 15 a 30 minutos, seguidos por resolução de exercícios pelos alunos.

Como orientação, ao introduzir funções, mais interessante que indicar um exacerbado número de terminologias como bijetora, sobrejetora, injetora, contradomínio, entre outros; é voltar as atenções

[1] BOISOT, M; Discipline et interdisciplinarité. **In Ceri (eds.), L'interdisciplinarité. Problèmes d'enseignement et de recherche dans les Universités** p. 90-97. Paris: UNESCO/OCDEI, 1972.

para proporcionalidade e regra de três, mostrando a relação de dependência entre uma grandeza e outra. Além disso, enfatizar o acréscimo e decréscimo de variáveis, ou seja, o Δ, como notação padrão.

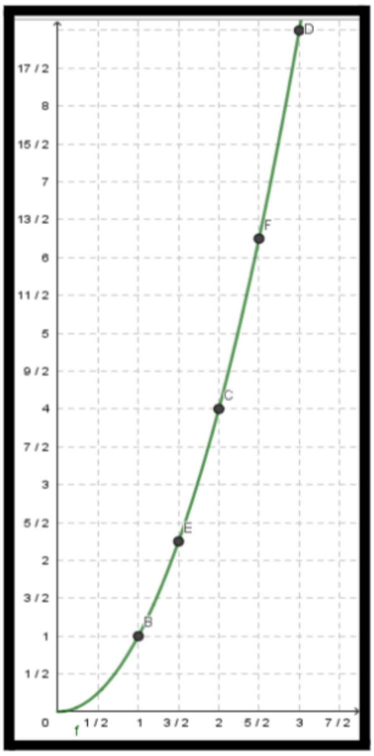
Uma possibilidade de começar os trabalhos é exemplificar funções através de gráficos simples e suas formas de representação. Neste texto destacamos a forma gráfica e tabular. Para tanto, tome a função $y = f(x) = x^2$. A partir disso construa uma tabela contendo valores arbitrários para x, como por exemplo: $0; 1; 3/2; 2; 5/2$ e 3; que, ao ser aplicado na função, ou seja, quando na função mencionada acima x for um dos valores da sequência dada, terá um correspondente direto em y, que são respectivamente: $0; 1; 9/4; 4; 25/4$ e 9. Os estudantes podem perceber que para valores altos de x, a construção do gráfico se torna impraticável. A exemplificação pode ser observada no Quadro 4 e na Figura 12:

Quadro 4 – Representação em quadro

x	$f(x) = x^2$
0	0
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4
$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$
3	9

fonte: Própio autor

Figura 12 – Representação Gráfica



fonte: Próprio autor.

A partir deste ponto, é possível a introdução de limites e derivadas de maneira simples e modesta, com o intuito de incentivar a curiosidade e possibilitar que mais discentes entendam o que está sendo explicado. Pois bem, como gancho para a temática que será apresentada, considerando o exemplo anterior, realizar o seguinte questionamento: Em algum momento a concavidade da parábola se modifica? Se sim, como descobrir? Nesta etapa estudantes e docentes precisam enfrentar esse problema juntos.

Como resposta, busca-se que os alunos e alunas indiquem uma correlação com a inclinação da reta, mais especificamente, a reta tangente como resposta, pois o "[...] declive da reta tangente cresce à medida que crescem os valores atribuídos a x [...]" (AVILA, 2010, p. 169).

Até o momento os estudantes apenas conhecem reta tangente a uma circunferência, que consiste em uma reta que possui um único ponto em comum com a circunferência e é perpendicular ao raio que também passa por esse ponto.

Para explicar o que é uma reta tangente a uma curva, considera-se a função mencionada anteriormente, $y = f(x) = x^2$. Em seguida, tomamos o ponto $P(x, f(x))$. Agora adicionamos a esse x um incremento: $\Delta x = h$. Diante disso, obtemos um novo ponto, tal qual: $Q(x + h, f(x + h))$. Ao aplicarmos o termo independente do ponto Q na função $y = f(x) = x^2$ obtemos: $f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$.

Estabelecendo a variação em y e estabelecendo a inclinação da reta, temos:

$$\Delta y = f(x + h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2 = h(2x + h) \tag{1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + h \tag{2}$$

A partir desse estágio iremos considerar o ponto P fixo e imaginar h tão pequeno quanto quisermos, porém maior e diferente de 0, pois se fosse igual a 0, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ não seria possível. A medida que h diminui, o ponto Q se aproxima do ponto P, de tal forma que as retas secantes à curva, considerando h muito próximo de 0, o quanto quisermos, dá lugar à reta tangente. Diante disso, "esse limite é o que se chama de derivada da função no valor x da variável independente." (AVILA, 2010, p. 172).

Pois bem, o conceito de derivada possibilita muitas explicações no âmbito das funções. Retomando a pergunta que foi feita anteriormente: A concavidade da função $y = f(x) = x^2$ se modifica a depender do valor de x? Como vimos, a derivada de $f(x) = x^2$, quando h se aproxima de 0, é $f'(x) = 2x$, ou seja:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x \tag{3}$$

Dessa forma, a derivada de uma função em um dado ponto pode ser entendida como a inclinação da reta tangente nesse determinado ponto, logo, podemos perceber que a tangente à função $f(x) = x^2$ é crescente e não modifica o atributo de inclinação, portanto a parábola possui sempre concavidade voltada para a direção positiva do eixo y.

Para dar continuidade a proposta de desenvolver a interdisciplinaridade entre Matemática e Física, concomitantes à derivada, faz-se necessário dar profundidade a um detalhe importante: função cuja derivada é igual a 0.

Sendo assim, uma função cuja variação no y, Δy, é igual a 0 e a variação em x, Δx, é diferente de 0, corresponde a uma função constante e tendo em vista o exposto acima, a inclinação da função mencionada pode ser observada a seguir: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$; Como a inclinação da função é 0, a derivada da função, $f'(x)$ também é 0 para qualquer que seja o x tomado.

Continuamente, para estabelecermos a interdisciplinaridade linear, mencionada no início deste capítulo, com a Física, necessitamos escolher o conteúdo que melhor se estabelece essa dinâmica. Para tanto, o conteúdo que melhor se conecta entre as duas disciplinas é a Cinemática, ensinada no primeiro ano do Ensino Médio, concomitante ao ensino de funções em Matemática. Podemos começar por estudar o movimento uniforme, que consiste em um movimento cuja velocidade média é constante em todo percurso, o qual pode ser observado na explicação a seguir:

Em primeiro lugar precisamos considerar um ponto material numa trajetória qualquer, que segundo Geraldo Ávila: "é um ponto geométrico ao qual se associa um número positivo, que é sua massa. A massa não nos preocupa, enquanto não tivermos de lidar com a dinâmica do movimento, quando intervêm os conceitos de massa, força e energia." (AVILA, 2010, p. 175).

Tomemos $y = s(t)$, uma função que correlaciona a posição e o tempo, sendo s o espaço percorrido e t o tempo necessário para a realização do movimento. Consideremos um ponto material que parte da origem e percorre um espaço em um intervalo de tempo t, essa primeira posição iremos nomear de s_0 e, em seguida, se desloca de s_0 para a posição s_1 em $t + \Delta t$ unidades de tempo. A variação do espaço percorrido pode ser entendida da seguinte forma:

$$\Delta s = s_1 - s_0 = s(t + \Delta t) - s(t) \tag{4}$$

Para movimentos onde a velocidade se mantém uniforme, ou seja, a velocidade se mantém constante no decorrer do percurso o que implica em uma aceleração nula, pode-se estabelecer a velocidade média da seguinte forma :

$$v_{media} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t + \Delta t - t} = \frac{s_1 - s_0}{\Delta t} \tag{5}$$

Agora considerando um movimento cujo s_0 representa a posição quando o tempo começa a ser medido e s_1 a posição após t unidades de tempo, assim como uma velocidade constante em todo o percurso. Dessa forma, reogarnizando, temos:

$v = \frac{s_1 - s_0}{t} \Rightarrow s_1 = s_0 + vt$; essa equação é conhecida como equação horária do movimento uniforme, cujo gráfico é uma reta.

Outrossim, a concepção de velocidade instantânea é popularmente conhecida por fazer parte do cotidiano das pessoas, seja através da fala como por exemplo: aquele carro estava à 60km por hora quando passou a lombada ou, por exemplo, através dos marcadores de velocidade nos veículos ou até mesmo através dos radares eletrônicos dispostos em pontos estratégicos das estradas e rodovias. Entretanto, como expressar a teoria por trás desses medidores de velocidade instantânea?

Certamente, podemos utilizar limites e derivadas como ferramenta para tal entendimento. Pois bem, para movimentos cuja a velocidade varia ao longo do percurso, a equação visada acima não se aplica, logo se pode imaginar, dentro da perspectiva do movimento de uma partícula em um percurso, a variação de tempo se aproximando de 0, o tanto quanto pudermos imaginar, configurando apenas um instante, que aqui chamamos de instantâneo, observe abaixo:

Como estamos derivando em relação ao tempo, pois é esse fator que consideramos próximo de 0 o quanto desejarmos, logo, deve-se considerar a velocidade em função do tempo, $v = v(t)$. Dessa forma, temos:

- posição inicial: $s_i = s(t)$, no tempo t;
- posição final: $s_f = s(t + \Delta t)$, no tempo $t + \Delta t$.

Portanto:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{t + \Delta t - t} \Rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \Rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (6)$$

Dessa forma, pode-se observar que a velocidade instantânea é a derivada do espaço em relação ao tempo, esse cujo limite tende a 0.

Já em relação à aceleração, vamos considerar inicialmente um movimento cujo a aceleração seja constante e diferente de zero, um exemplo disso é o movimento de queda livre, quando o atrito com o ar é desprezado. Para cada segundo que se passa, a velocidade no exemplo em questão, considerando um objeto qualquer, é acrescida de 10m/s a cada segundo aproximadamente. Portanto podemos teorizar da seguinte forma, considerando um movimento cuja aceleração é constante e diferente de 0:

$a = \frac{v - v_0}{t - 0} \Rightarrow v = v_0 + at$; essa corresponde à equação da velocidade, onde $v_0 = v(0)$ e $v = v(t)$.

Para situações onde a aceleração varia iremos considerar da mesma forma que fizemos para o exemplo anterior, ou seja, considera-se o intervalo de tempo tão pequeno quanto quisermos, para assim obtermos o valor desta aceleração no exato instante estimado, observe:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{t + \Delta t - t} \Rightarrow a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \Rightarrow a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (7)$$

Podemos observar que a aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo. Agora, atentemos para a equação horário do movimento, para isso vamos utilizar uma propriedade de derivada, a qual possibilita a seguinte relação: "se duas funções $f(t)$ e $g(t)$ têm a mesma derivada, a diferença h(t) = f(t) - g(t) tem derivada 0, significando que o gráfico de h(t) tem tangente horizontal em todos os pontos, sendo, pois, uma função constante em t, vale dizer, f e g diferem por uma constante."(AVILA, 2010, p. 182). Observe as escolhas abaixo:

Primeiro selecionamos uma função $g(t)$ para derivarmos, de tal forma que $g'(t) = v(t) = v_0 + at$, temos:

$(v_0 t + \frac{at^2}{2})' = v_0 + at$, pois a derivada de $v_0 t$ em relação em relação a t é v_0, e, da mesma forma, a derivada de $\frac{at^2}{2}$ é igual a at. Outrossim, sabe-se, através de explicações descritas anteriormente neste texto, que a derivada do espaço em relação ao tempo é a velocidade, ou seja:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{t + \Delta t - t} \Rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \Rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (8)$$

Diante disso, temos:

$s(t) - (v_0 t + \frac{at^2}{2})$; possui derivada zero, pois tanto a derivada de $s(t)$, quanto a derivada de $v_0 t + \frac{at^2}{2}$ correspondem à velocidade, logo:

$$s(t) - (v_0 t + \frac{at^2}{2}) = C \Rightarrow s(t) = C + v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{9}$$

O significado de C pode ser facilmente obtido quando fazemos $t = 0$:

$$s(0) = C \Rightarrow s_0 = C \tag{10}$$

Substituindo, temos: $s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$; o que corresponde à equação horária do movimento uniformemente variado, perfazendo assim uma parábola.

Em continuidade, pode-se observar um plano de aulas, onde essas ideias foram articuladas com mais profundidade e adaptadas para as exigências estabelecidas pelo documento normatizador Base Nacional Comum Curricular. O plano em questão foi pensado para auxiliar professores que se veem interessados em desenvolver a temática cálculo em sala de aula, logo as aulas foram pensadas o mais próximo possível dentro das possibilidades que norteiam o cotidiano escolar.

Reiterando, o plano de aulas exposto a seguir contém as ideias presentes neste capítulo, as quais foram baseadas no professor Geráldo Ávila, em seu livro "Várias Faces da Matemática: tópicos para licenciatura e leitura geral", em específico a forma como a derivada é explicada, considerando o nível de ensino almejado. Já em relação à estrutura, os exemplos, contextualização histórica e listas de exercícios foram pensados e planejados pelo autor deste trabalho.

Por fim, as informações contidas na Tabela 1, de início na página 49 e fim na página 59, podem ser observadas no Apêndice A. Ademais, o principal objetivo com a apresentação das propostas de aulas presentes neste capítulo é instigar os professores de Matemática a observarem que através do cálculo é possível desenvolver muitos outros assuntos correlacionados de maneira aprofundada, de modo que os conteúdos se articulem, exigindo dos estudante formas de pensar que dinamizam os temas estudados.

No próximo e último capítulo, pode-se observar considerações acerca das potencialidade de se articular o ensino do cálculo com seu processo histórico. Em adição, faz-se presente também pontuações de dois professores que ministram aulas para discentes do EM, acerca do plano de aulas presente neste capítulo.

Tabela 1 – Plano de aulas

Nível de Ensino	1º ano do Ensino Médio
Tema da Aula	Funções: limites e derivadas
Objetivos	
Geral	Competências Gerais da Educação Básica que serão trabalhadas nas aulas: • Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses,

	para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas; • Utilizar diferentes linguagens — verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo; • Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.
Específicos	Competências específicas para a Área de Matemática e suas Tecnologias a serem desenvolvidas neste conjuto de aulas: • Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente; • Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
Conteúdos	
Conceituais	Os conteúdos que serão debatidos nas aulas podem ser enquadrados em “Álgebra e Números” e “Grandezas e Medidas”: • (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais; sendo, em específico, os objetos de conhecimento correlacionados: Função polinomial do 1° grau. Função polinomial do 2° grau. Variação entre grandezas (proporcionalidade e não proporcionalidade); • (EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc). Os objetos de conhecimeno

	Os objetos de conhecimento correlacionados são: grandezas determinadas pela razão ou produto de outras (velocidade, densidade de um corpo, densidade demográfica, potência elétrica, bytes por segundo etc.); • (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. Os Objetos de conhecimentos correlacionados são: funções afins, lineares, constantes. Gráficos de funções a partir de transformações no plano. Proporcionalidade: estudo do crescimento e variação de funções. Estudo da variação de funções polinomiais de 1º grau: crescimento, decrescimento, taxa de variação da função; • (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. Os objetos de conhecimento são: funções polinomiais de 2º grau. Gráficos de funções a partir de transformações no plano. Estudo do comportamento da função quadrática (intervalos de crescimento/decrescimento, ponto de máximo/mínimo e variação da função).
Procedimentais	No escopo das aulas, serão desenvolvidos os seguintes conteúdos procedimentais: • Construir e dispor números em tabelas; • Construir planos cartesianos, assim como localizar e assinalar pontos, retas e curvas no plano; • Utilizar a régua para a construção de gráficos e tabelas; • Organizar números e símbolos correspondentes de espressões algébricas variadas.
Atitudinais	Os conceitos atitudinais serão orientados pelas seguintes pontos: • Limpeza e organização do ambiente escolar; • Promover a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação;

	• Agir com responsabilidade e respeito ao próximo.

Desenvolvimento

As aulas aqui descritas foram pensadas para serem desenvolvidas com discentes do primeiro ano do Ensino Médio, mais especificamente como forma de introduzir funções, de maneira articulada ao ensino do cálculo infinitesimal como uma ferramenta potencializadora para trabalhar a temática.

Tendo em vista que, muito provavelmente, as aulas aqui propostas, seguindo a programação regular dos materiais destinados aos estudantes do Ensino Médio, o ensino de função, inicialmente, se dá por meio da Teoria de Conjuntos. Dessa forma, o trabalho aqui proposto pode ser melhor aproveitado entre a transição de funções representadas por diagrama de Venn e outras formas de representação como tabelas e/ou gráficos.

Pois bem, as descrições das aulas podem ser observadas abaixo:

Aulas 1 e 2: As primeiras aulas desta proposta serão com enfoque em expor para os estudantes a correlação específica de dependência que define uma função, assim como a proporção entre os elementos de uma função e a variação de uma função.

Para isso, o primeiro exemplo para que os estudantes possam perceber essa relação de interdependência é: propor um quadrado de lados x, e a partir daí determinar valores para x, como por exemplo $x = 1$, implica em um perímetro igual a 4 e área igual a 1, para $x = 2$, implica em perímetro igual a 8 e área igual a 4. Pedir para os estudantes realizarem esse processo até x igual a 5. Depois da representação tabular, apresentar aos estudantes a representação gráfica das informações contidas na tabela. As exemplificações podem ser observadas na Figura 13; na Tabela 2 e na Figura 14. Depois dessas apresentações, o professor deve instigar os discentes a perceberem a relação entre x e seus correspondentes, ou seja, para o perímetro uma possível generalização é: $y = 4x$; assim como que para a área é: $y = x^2$.

Após essas apresentações, apresentar a definição de função para os estudantes:

Dados os conjuntos A e B não vazios, dizemos que f é uma função de A em B (ou que y é uma função de x) se, e somente se, para cada elemento x do conjunto A existe em correspondência um único elemento y do conjunto B. Representamos assim:

$$f : A \to B \qquad A \xrightarrow{f} B \tag{11}$$

(lê-se: função f de A em B)

Os estudantes deverão realizar as representações tanto tabelar quanto gráfica.

Após esse processo, o professor ficará responsável por discutir a forma algébrica de representação, aqui é interessante destacar a possibilidade de abranger o exemplo anterior, sendo os valores de x correspondentes ao conjunto dos reais. Com isso, será possível realizar as funções descritas

anteriormente, sendo necessário apenas que os estudantes terminem de produzir a construção das curvas, ou seja, realizar a representação das funções: $y = 4x$ e $y = x^2$, o que pode ser observado na Figura 15.
Em adição, é interessante que o docente especifique o que é a variação usando a notação Δ para isso, tendo foco em mostrar o triângulo retângulo que resulta quando realizamos a inclinação de uma reta por exemplo.
A avaliação para esse conjunto de aulas será pautada nos exercícios que estão destacados no Anexo B e a produção realizada pelos estudantes em seus respectivos cadernos do aluno como forma de acompanhamento do entendimento dos discentes em relação à realização do trabalho. Para finalizar este par de aulas, indagar os alunos em relação à concavidade da curva correspondente à $f(x) = x^2$, ou seja $f(x) = x^2$ possui convidado sempre virada para cima, como verificar?

Aulas 3 e 4: Retomar o que foi visto na aula anterior de maneira geral e voltar a pergunta: como é possível verificar se a concavidade da curva $y = x^2$ é sempre para cima?
Com as possíveis respostas dos alunos, verificar se algum deles responde por processo de inclinação de uma reta, secante ou talvez tangente a curva mencionada. Muito provavelmente, os discentes indicarão a verificação de valores muito grandes de x que denotam valores muito altos de y, configurando uma regularidade. Como forma de atender a essa dúvida, explicar a noção do cálculo de maneira direta. Ficar atento à participação dos discentes neste momento.
Como forma de dar continuidade às ideias de valores muito "grandes" para x, vamos iniciar a explicação a partir da reta tangente a uma curva, para isso:
Considera-se a função mencionada anteriormente, $y = f(x) = x^2$. Em seguida, tomamos o ponto $P(x, f(x))$.
Agora, adicionamos a esse x um incremento: $\Delta x = h$. Diante disso, obtemos um novo ponto, tal qual: $Q(x + h, f(x + h))$. Ao aplicarmos o termo independente do ponto Q na função $y = f(x) = x^2$, obtemos: $f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$.
Estabelecendo a variação em y e estabelecendo a inclinação da reta, temos:

$$\Delta y = f(x + h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2 = h(2x + h) \tag{12}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + h \tag{13}$$

Agora iremos considerar o ponto P fixo e imaginar h tão pequeno quanto quisermos, porém maior e diferente de 0, pois se fosse igual a 0, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ não seria possível. A medida que h diminui, o ponto Q se aproxima do ponto P, de tal forma que as retas secantes à curva, considerando h muito próximo de 0, dá lugar à reta tangente. Portanto, "esse limite é o que se chama de derivada da função no valor x da variável independente."(AVILA, 2010, p. 172).
Em seguida, adicionamos a esse x um incremento: $\Delta x = h$. Diante disso, obtemos um novo ponto, tal qual: $Q(x + h, f(x + h))$. Ao aplicarmos o termo independente do ponto Q na função

$y = f(x) = x^2$, obtemos: $f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$.
Estabelecendo a variação em y e estabelecendo a inclinação da reta, temos:

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2 = h(2x+h) \tag{14}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h \tag{15}$$

A partir desse estágio iremos considerar o ponto P fixo e imaginar h tão pequeno quanto quisermos, porém maior e diferente de 0, pois se fosse igual a 0, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ não seria possível. A medida que h diminui, o ponto Q se aproxima do ponto P, de tal forma que as retas secantes à curva, considerando h muito próximo de 0, o quanto quisermos, dá lugar à reta tangente. Diante disso, "esse limite é o que se chama de derivada da função no valor x da variável independente."(AVILA, 2010, p. 172).
Pois bem, o conceito de derivada possibilita muitas explicações no âmbito das funções. Retomando a pergunta que foi feita anteriormente: A concavidade da função $y = f(x) = x^2$ se modifica a depender do valor de x? Como vimos, a derivada de $f(x) = x^2$, quando h se aproxima de 0, é $f'(x) = 2x$, ou seja:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2x+h) = 2x \tag{16}$$

Dessa forma, a derivada de uma função em um dado ponto pode significar a inclinação da reta tangente nesse ponto, logo podemos perceber que a tangente à função $f(x) = x^2$ é crescente e não modifica o atributo de inclinação, portanto a parábola possui sempre concavidade voltada para a direção positiva do eixo y.
Além disso, o professor irá apresentar aos estudantes uma projeção para exemplificar com uma proposta disponível no geogebra (https://www.geogebra.org/m/pkmgsyhc), onde os discentes poderão visualizar esse processo de aproximação.
Por conseguinte, finalizar a aula com exercícios sobre função com a mesma lógica dos passados nesta aula (Apêndice C). Além disso, indicar para os alunos pensarem e/ou pesquisarem, para a próxima aula, possíveis campos de atuação do cálculo infinitesimal.

Aulas 5 e 6: O início deste par de aulas será com foco em explicar quais eram as perguntas que os profissionais que teorizaram o cálculo tentavam responder, como por exemplo a velocidade de um determinado ponto em uma dada posição, assim como utilizar o capítulo 3, intitulado "Breve história do Cálculo", para contextualizar aos discentes o trabalho de alguns cientistas que desenvolveram aspectos da teorização que está sendo apresentada, assim como as influências que receberam e como a teoria foi vista pela comunidade científica, como uma forma de aproximar essas personalidades dos discentes.
Em seguida, com as ideias trazidas pelos alunos, referente a indicação de pesquisa requisitadas

nas aulas anteriores, possivelmente alguém irá indicar um conceito muito recorrente que é a questão da velocidade instantânea, muitas vezes expressas, por exemplo, na frase: aquele carro estava a $60km/h$ quando passou aquela lombada. Além disso, os alunos nesta etapa estão aprendendo, em Cinemática, esses conceitos, logo nestas aulas eles irão perceber o "surgimento" das fórmulas dispostas nas aulas de Física.

Para dar continuidade a proposta de desenvolver a interdisciplinaridade entre Matemática e Física, concomitantes à derivada, faz-se necessário dar profundidade a um detalhe importante: função cuja derivada é igual a 0.

Sendo assim, uma função cuja variação no y, Δy, é igual a 0 e a variação em x, Δx, é diferente de 0, corresponde a uma função constante e tendo em vista o exposto acima, a taxa de variação da função mencionada pode ser observada a seguir: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$; Como a inclinação da reta que compreende a função é 0, a derivada da função, $f'(x)$ também é 0 para qualquer que seja o x tomado.

Continuamente, para estabelecermos a interdisciplinaridade linear, mencionada no início do capítulo 3, com a Física, necessitamos escolher o conteúdo que melhor se estabelece essa dinâmica. Para tanto, o conteúdo que melhor se conecta entre as duas disciplinas é a Cinemática, ensinada no primeiro ano do Ensino Médio, concomitante ao ensino de funções em Matemática.

Podemos começar por estudar o movimento uniforme, que consiste em um movimento cuja velocidade média é constante em todo percurso, o qual pode ser observado na explicação a seguir:

Em primeiro lugar precisamos considerar um ponto material numa trajetória qualquer, que segundo Geraldo Ávila: "é um ponto geométrico ao qual se associa um número positivo, que é sua massa. A massa não nos preocupa, enquanto não tivermos de lidar com a dinâmica do movimento, quando intervêm os conceitos de massa, força e energia."(AVILA, 2010, p. 175).

Tomemos $y = s(t)$, uma função que correlaciona a posição e o tempo, sendo s o espaço percorrido e t o tempo necessário para a realização do movimento. Consideremos um ponto material que parte da origem e percorre um espaço em um intervalo de tempo t, essa primeira posição iremos nomear de s_0 e, em seguida, se desloca de s_0 para a posição s_1 em $t + \Delta t$ unidades de tempo. A variação do espaço percorrido pode ser entendida da seguinte forma:

$$\Delta s = s_1 - s_0 = s(t + \Delta t) - s(t) \tag{17}$$

Para movimentos onde a velocidade se mantém uniforme, ou seja, a velocidade se mantém constante no decorrer do percurso o que implica em uma aceleração nula, pode-se estabelecer a velocidade média da seguinte forma :

$$v_{media} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t + \Delta t - t} = \frac{s_1 - s_0}{\Delta t} \tag{18}$$

Agora considerando um movimento cujo s_0 representa a posição quando o tempo começa a ser medido e s_1 a posição após t unidades de tempo, assim como uma velocidade constante em todo o percurso. Dessa forma, reorgarnizando, temos:

$v = \frac{s_1 - s_0}{t} \Rightarrow s_1 = s_0 + vt$; essa equação é conhecida como equação horária do movimento uniforme, cujo gráfico é uma reta.
Outrossim, a concepção de velocidade instantânea é popularmente conhecida por fazer parte do cotidiano das pessoas, seja através da fala como por exemplo: aquele carro estava à 60km por hora quando passou a lombada ou, por exemplo, através dos marcadores de velocidade nos veículos ou até mesmo através dos radares eletrônicos dispostos em pontos estratégicos das estradas e rodovias.
Entretanto, como expressar a teoria por trás desses medidores de velocidade instantânea?
Certamente, podemos utilizar limites e derivadas como ferramenta para tal entendimento. Pois bem, para movimentos cuja a velocidade varia ao longo do percurso, a equação visada acima não se aplica, logo se pode imaginar, dentro da perspectiva do movimento de uma partícula em um percurso, a variação de tempo se aproximando de 0, o tanto quanto pudermos imaginar, configurando apenas um instante, que aqui chamamos de instantâneo, observe abaixo:
Como estamos derivando em relação ao tempo, pois é esse fator que consideramos próximo de 0 o quanto desejarmos, logo, deve-se considerar a velocidade em função do tempo, $v = v(t)$.
Dessa forma, temos:

- posição inicial: $s_i = s(t)$, no tempo t;
- posição final: $s_f = s(t + \Delta t)$, no tempo $t + \Delta t$.

Portanto:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{t + \Delta t - t} \Rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \Rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{19}$$

Dessa forma, pode-se observar que a velocidade instantânea é a derivada do espaço em relação ao tempo, esse cujo limite tende a 0.
Já em relação à aceleração, vamos considerar inicialmente um movimento cujo a aceleração seja constante e diferente de zero, um exemplo disso é o movimento de queda liver, quando o atrito com o ar é desprezado. Para cada segundo que se passa, a velocidade no exemplo em questão, considerando um objeto qualquer, é acrescida de 10m/s a cada segundo aproximadamente.
Portanto podemos teorizar da seguinte forma, considerando um movimento cuja aceleração é constante e diferente de 0:
$a = \frac{v - v_0}{t - 0} \Rightarrow v = v_0 + at$; essa corresponde à equação da velocidade, onde $v_0 = v(t)$ e $v = v(t + \Delta t)$.
Para situações onde a aceleração varia iremos considerar da mesma forma que fizemos para o exemplo anterior, ou seja, considera-se o intervalo de tempo tão pequeno quanto quisermos, para assim obtermos o valor desta aceleração no exato instante estimado, observe:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{t + \Delta t - t} \Rightarrow a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \Rightarrow a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (20)$$

Podemos observar que a aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo. Agora, atentemos para a equação horário do movimento, para isso vamos utilizar uma propriedade de derivada, a qual possibilita a seguinte relação: "se duas funções $f(t)$ e $g(t)$ têm a mesma derivada, a diferença h(t) = f(t) - g(t) tem derivada 0, significando que o gráfico de h(t) tem tangente horizontal em todos os pontos, sendo, pois, uma função constante em t, vale dizer, f e g diferem por uma constante."(AVILA, 2010, p. 182). Observe as escolhas abaixo:
Primeiro selecionamos uma função $g(t)$ para derivarmos, de tal forma que $g'(t) = v(t) = v_0 + at$, temos:
$(v_0 t + \frac{at^2}{2})' = v_0 + at$, pois a derivada de $v_0 t$ em relação em relação a t é v_0, e, da mesma forma, a derivada de $\frac{at^2}{2}$ é igual a at.
Outrossim, sabe-se, através de explicações descritas anteriormente neste texto, que a derivada do espaço em relação ao tempo é a velocidade, ou seja:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{t + \Delta t - t} \Rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \Rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (21)$$

Diante disso, temos:
$s(t) - (v_0 t + \frac{at^2}{2})$; possui derivada zero, pois tanto a derivada de $s(t)$, quanto a derivada de $v_0 t + \frac{at^2}{2}$ correspondem à velocidade, logo:

$$s(t) - (v_0 t + \frac{at^2}{2}) = C \Rightarrow s(t) = C + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (22)$$

O significado de C pode ser facilmente obtido quando fazemos $t = 0$:

$$s(0) = C \Rightarrow s_0 = C \quad (23)$$

Substituindo, temos: $s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$; o que corresponde à equação horária do movimento uniformemente variado, perfazendo assim uma parábola.
Após toda essa explicação, indicar um questionário aos alunos em relação aos conceitos correlatos às funções que foram trabalhos na aulas descritas (Apêndice C). Após esse estágio, o docente responsável pela turma pode ou não dar continuidade ao ensino de funções concomitantes ao ensino do cálculo.

Recursos

Os recursos necessários para os docentes ao realizarem as ações descritas nas aulas:

- Folhas de exercícios que serão entregues aos alunos;

<table>
<tr><td colspan="2">

- Giz ou caneta;
- Apagador;
- Notebook;
- Projetor
- Portifólio de anotações.

Recursos necessários para os estudantes ao realizarem as ações descritas nas aulas:

- Caderno;
- Lápis, caneta e borracha;
- Régua.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Avaliação</td></tr>
<tr><td>Intrumentos</td><td>Os instrumentos de avaliação são:
• Lista de exercícios;
• Portfólio de anotações;
• Cadernos dos alunos.</td></tr>
<tr><td>Critérios</td><td>Os critérios seguem os seguintes nortes:
• A assiduidade em relação às aulas, ou seja, se realizou todas as propostas destinadas às aulas através dos conteúdos presentes no caderno;
• O comportamento em sala de aula, ou seja, em relação ao contexto, o estudante respeitou os colegas e o ambiente em que está, manteve o ambiente limpo, fez silêncio nos momento em que essa ação era necessária para o entendimento do assunto e estabeleceu um convívio com os colegas de maneira saudável;
• Se as respostas dispostas nas listas de exercícios estão de acordo com a explicações que foram dadas em sala de aula.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Bibliografia utilizada para a confecção do plano de aulas</td></tr>
<tr><td colspan="2">ÁVILA, G. S. S. Várias faces da Matemática: tópicos para licenciatura em leitura geral. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.</td></tr>
</table>

ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática Interligada: funções afim, quadrática, exponencial e logarítma/ obra coletiva**. 1º ed. São Paulo: Scipione, 2020.

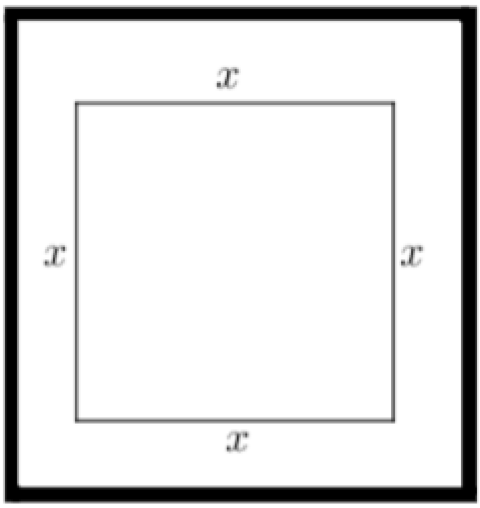
BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Conselho Nacional de Secretários de Educação (CONSED). União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (UNDIME). **Base Nacional Comum Curricular (BNCC): educação é a base.** Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 de novembro de 2021.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista - etapa Ensino Médio**. São Paulo: 2020. SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Currículo Paulista - etapa Ensino Médio. São Paulo: 2020. Disponível em: https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2020/08/CURR%C3%8DCULO%20PAULISTA%20etapa%20Ensino%20M%C3%A9dio.pdf Acesso em: 20 de novembro 2021.

SILVA. D. C. M. da. **Massa Relativista**. Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/massa-relativistica.htm. Acesso em: 21 de janeiro de 2022.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 13 – Quadrado de lado x



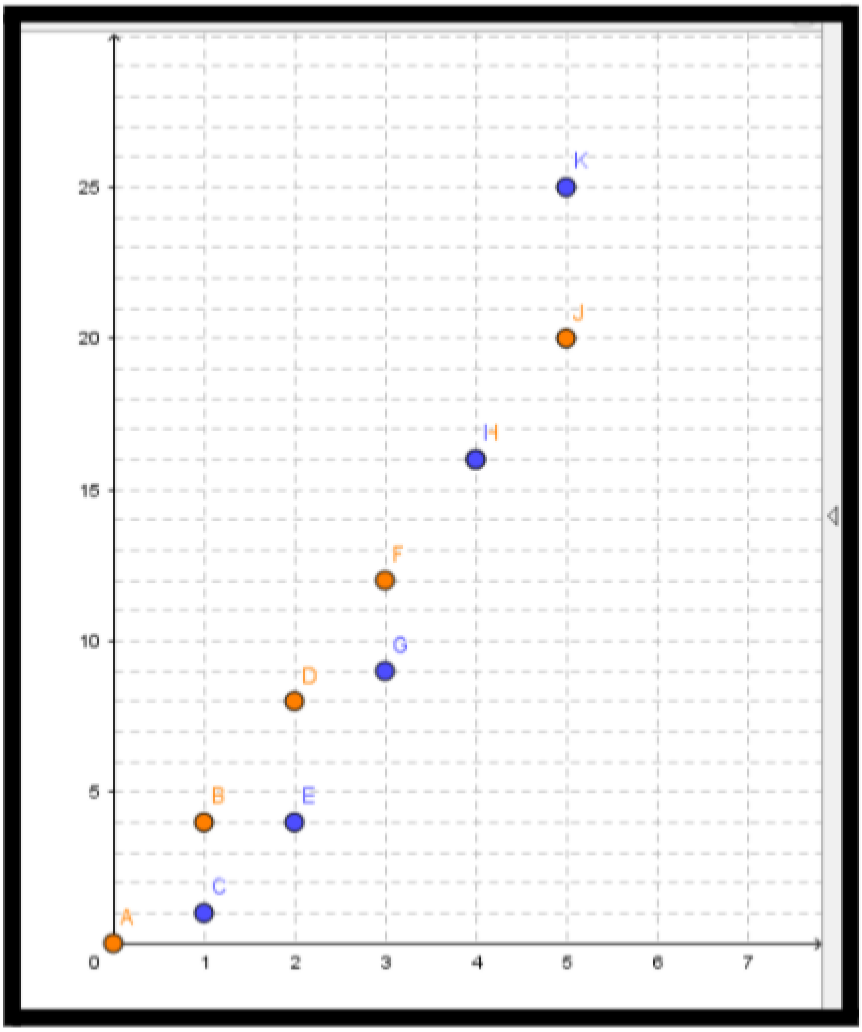
Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 2 – Relação lado, perímetro e área do quadrado

x	Perímetro	Área
0	0	0
1	4	1
2	8	4
3	12	9
4	16	16
5	20	25

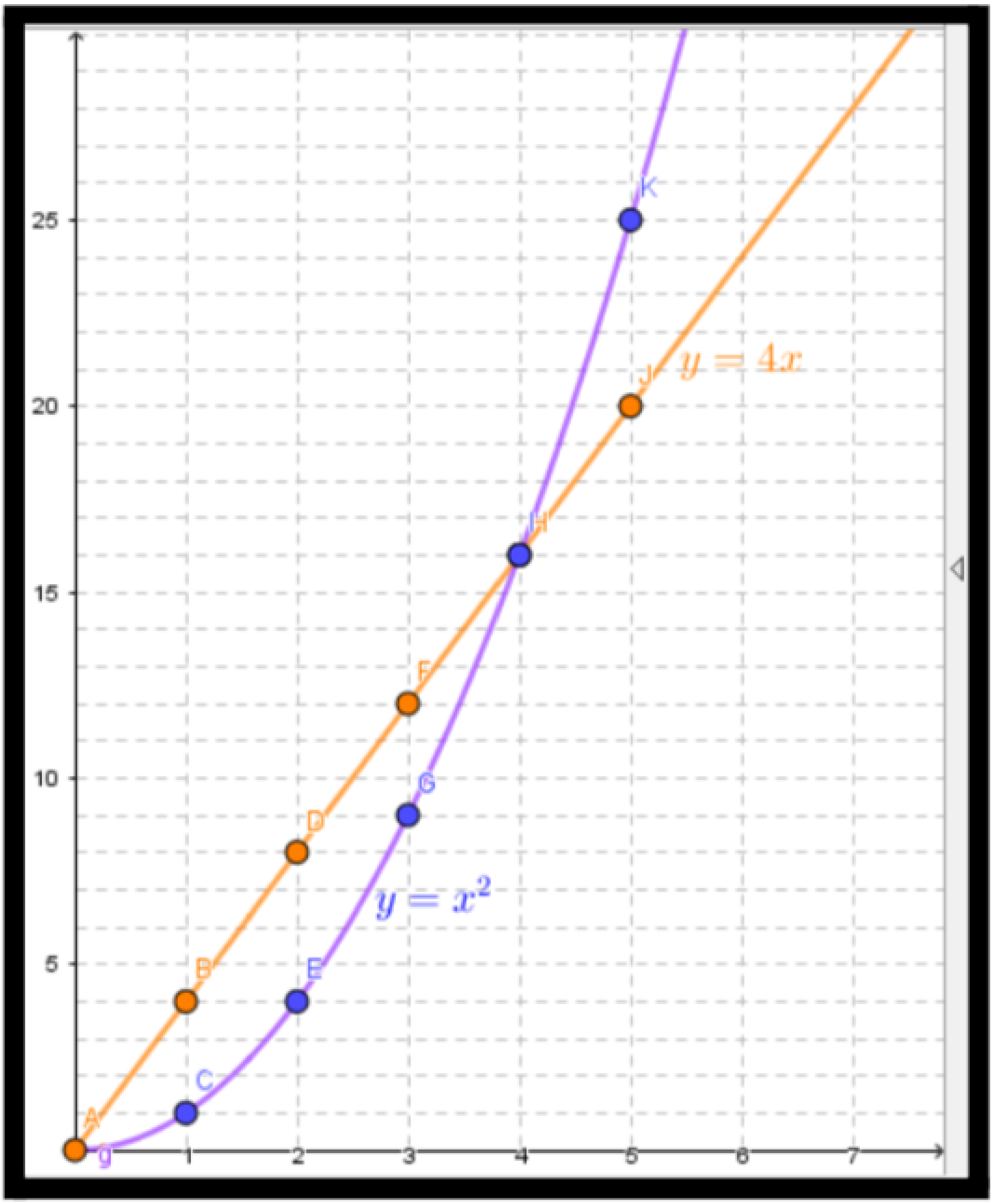
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 14 – Pontos no plano cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 15 – Funções no plano cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor.

5 DISCUSSÃO

Antes de mais nada, o fato de estar presente acontecimentos históricos em relação à temática central deste trabalho, ou seja, o cálculo, pode ser considerado uma ferramenta potencializadora para o desenvolvimento de aulas com esses recursos em sua formalização. Reiterando, a presença de apenas alguns matemáticos neste trabalho foi com intuito de aproximar docentes e discentes de assuntos mais convencionais à academia, pois, ao entrarem em contato com a complexidade e vivacidade do conhecimento, assim como a humanização dos cientistas renomados aqui descritos, pode ser uma forma de incentivo para a formação de novos cientistas renomados.

Ainda considerando aspectos históricos do cálculo, tanto a escolha dos conteúdos apresentados, quanto os nomes escolhidos foram selecionados por conta da relevância que esses tiveram em relação à teoria apresentada, sendo essa com enfoque nas justificativas e na simplificação de operações que já eram conhecidas pela comunidade científica. Outro ponto de importante relevância a ser destacado é que através de recursos históricos é possível observar quão dinâmico o conhecimento se apresenta, ou seja, o fato da definição de função ser estabelecida um tempo depois da própria utilização do cálculo, sendo que o conceito de função hoje representa o ponto central na formulação da temática primordial deste trabalho.

Dando continuidade, observa-se que o material que dispõe as normas e diretrizes educacionais, como, por exemplo, a Base Nacional Comum Curricular, visa abranger a pluralidade e complexidade das pessoas e dos saberes que compõem a Educação Básica brasileira. Como o enfoque aqui proposto foi buscar a presença do cálculo nos materiais estudados e verificar de que forma isso ocorre, pode-se considerar que por mais que o acervo de conteúdos a serem trabalhados no Ensino Médio seja extenso, a presença do cálculo é um fato, tanto em documentos que regularizam quanto em materiais didáticos.

A partir dos critérios estabelecidos, ou seja, tendo a busca se baseado em unidades de registros que indicavam diretamente o conteúdo cálculo, no material analisado, foi possível observar que o conceito é apenas mencionado diretamente quando articulado à soma de infinitos termos de uma progressão geométrica, onde pode-se observar até o uso da nomenclatura, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{q-1}$, assim como a exemplificação do que ocorre com a curva de uma função exponencial, de base cujo o módulo está entre menos um e um, quando o valor de x tende ao infinito.

Ademais, como dito na introdução, o objetivo deste trabalho é indicar plano de aulas, cujo cálculo é o conteúdo almejado a ser ensinado. A proposta aqui descrita, além de circunstanciar a forma como as aulas serão ministradas, também serve de apoio para possíveis próximas aulas com a temática abordada, pois, tendo em vista as exemplificações, observa-se o quão potencializador é trabalhar o cálculo nas aulas de Matemática, em específico quando se trata de funções.

Em adição, dois professores de Matemática, "A" e "B", que ministram aulas para alunos do primeiro ano do Ensino Médio analisaram o plano de aulas presente no capítulo anterior, Tabela 1, e responderam um questionário que foi enviado para eles por e-mail (Apêndice E). Essa medida foi tomada tendo em vista que no ano de 2021 a humanidade estava passando pela pandemia da covid-19, logo as propostas de aulas que aqui forma descritas, como medida de segurança mais eficiente, não foram postas em prática e passaram apenas pela análise teórica dos professoras mencionados, considerando o questionário anteriormente apresentado.

Dessa forma, a professora "A", que ministra aulas de Matemática e Física, com mais de 30 anos de experiência em sala de aula, pontuou que o plano pecisa ser mais objetivo, sucinto e dar mais atenção às revisões, pois a depender da turma esse enfoque se faz necessário. Já em relação à interdisciplinaridade, a docente indicou que é válida e que em um todo essa proposta é praticável no decorrer do ano.

Por fim, já o professor "B", que ministra aulas de Física para alunos do Ensino Médio, com cerca de 19 anos de experência em sala de aula, pontuou, em linha gerais, uma diferença significativa entre as escolas públicas e privadas quando se trata da Física. Em relação as instituições públicas, a preocupação maior ao ensinar Cinemática no primeiro ano está voltada para os diversos tipos de movimentos, suas causas e uma análise superficial de equilíbrio, sendo a discussão mais impactante a velocidade média, pois, no primeiro bimestre, já é visto também, logo após os diversos tipos de movimentos, as leis de Newton. Sendo que no segundo bimestre se inicia o estudo de trabalho e energia.

Em contrapartida, a partir das observações do professor "B" em algumas instituições de ensino privadas, o ensino de Física, mais especificamente o estudo de movimentos (MRU, MRUV, Queda Livre, lançamentos), ocorre de forma a dar enfoque no aspecto conceitual, o que é revisto no terceiro ano de maneira aprofundada com conceitos mais amplos de Matemática. De acordo com as pontuações do professor "B", o plano de aulas presente neste trabalho (Tabela 1), é melhor aplicável no terceiro ano de uma escola privada, pricipalmente para os estudantes que escolherem pela área de exatas.

Como recomedação, o prefessor em questão indicou, assim como a professora "A", um foco na linguagem matemática, principalmente em termos de revisão. Além disso, o professor "B" pontuou que a proposta é válida e relevante, desde que, ao ser posta em prática, ocorra de maneira concomitante entre as duas disciplinas e respeitando as determinações do currículo.

Ademais, estão declinadas abaixo, minhas considerações tanto como recém formado no Ensino Médio, quanto como professor, considerando todas as insituições de ensino que já tive contato.

Para as instituições que já frequentei como estudante, em específico a escola que me formei e realizei todo o Ensino Médio, escola pública, possuía um nível que considero correspondente às aulas aqui expostas, pois considerando colegas de classe desse período, pessoas que também tiveram contato com a temática cálculo, me infomaram que foi mais simples do que eles esperavam, algo que concordo. Como estudante, considero ser possível o desenvolvimento dessa temática a depender do recebimento dos discentes em relação a esses conteúdos, pois consigo identificar turmas de uma mesma instituição que muito provavelmente ao entrar em contato com limites e derivadas, poderiam indicar muita resistência.

Já a partir do olhar de professor, considerando minhas experiências em projeto de iniciação à docência e estágios, considero ser possível o trabalho de conteúdos do cálculo articulados à funções. Essa fato não corresponde a todas as turmas de todas as instituições educacionais do pais, mas tendo em vista as possíveis potencialidades, a testagem é válida e se ocorrer de não corresponder a capacidade dos estudantes naquele momento, a proposta pode ser interrompida. Ademais, como observamos que fatidicamente existem conteúdos correlatos ao cálculo presentes nos materiais didáticos aqui analisados, materiais esses que foram desenvolvidos para se adequarem ao PNLD, ou seja, foram pensados para serem entregues para quaisquer instituições educacionais do país que estejam inscritas no PNLD. Com isso, a partir da perspectiva dos profissionais que produziram esses materiais, os estudantes estão aptos a aprenderem esses conceitos nessa etapa de ensino. A forma como é apresentada, como foi mencionada neste capítulo mesmo, de maneira direta, corresponde com o plano de aulas que fora desenvolvido neste trabalho, em sintonia, portanto, com os materiais que foram analisados.

Diante disso, portanto, pode-se observar o quanto o conhecimento é dinâmico, sendo essencial, a partir das perspectivas dos professores mencionados, algumas adaptações da passagem da teoria para a prática. Além disso, considerando a mesma característica do conhecimento, entende-se como relevante compreender os processos históricos que constituem conhecimentos que hoje nos ajudam a compreender a realidade.

REFERÊNCIAS

AVILA, G. S. S. **Várias faces da matemática**: tópicos para licenciatura e leitura geral. 2º. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 5, n. 2, p. 15 – 26, 2012. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1185>. Acesso em: 16 de fev. de 2022.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. 1996. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, 23 de dezembro de 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 16 de fev. de 2022.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**: educação é a base. Brasília: Ministério da Educação. Conselho Nacional de Secretários de Educação. União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 16 de fev. de 2022.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais**. 2018. Conselho Nacional de Educação; Câmara de Educação Básica. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Diário Oficial da União, Brasília, 22 de novembro de 2018, Seção 1, p. 21. Disponível em: <https://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/51281622>. Acesso em: 16 de fev. de 2022.

CARLOS, J. G. **Interdisciplinaridade no ensino médio**: desafios e potencialidades. Brasília: [s.n.], 2007. Orientador: Erika Zimmermann. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências). Disponível em: <https://repositorio.unb.br/handle/10482/2961>. Acesso em: 16 de fev. de 2022.

DESCARTES, R. **Regras para a direcção do espírito**. Lisboa: Editorial Estampa, 1971.

EDUCACAO, M. da. **Novo Ensino Médio**. 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/novo-ensino-medio>.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

GARNICA, A. V. M. Pesquisa qualitativa e educação (matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. **Mimesis**, v. 22, n. 1, p. 35 – 48, 2001. Disponível em: <https://secure.unisagrado.edu.br/static/biblioteca/mimesis/mimesis_v22_n1_2001_art_02.pdf>. Acesso em: 16 de fev. de 2022.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

ROQUE, T. M.; PITOMBEIRA, J. B. C. **Tópicos de história da matemática**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SÃO PAULO. **Matriz de Referência para Avaliação Processual**. São Paulo: Secretaria da Educação, 2016. Disponível em: <https://mega.nz/folder/g1glQQ7L#Kdv2uyP19isfcn0muwTFsA/file/NsYECTST>. Acesso em: 16 de fev. de 2022.

SÃO PAULO. **Currículo Paulista**: etapa ensino médio. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2020. Disponível em: <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2020/08/CURR%C3%8DCULO%20PAULISTA%20etapa%20Ensino%20M%C3%A9dio.pdf>. Acesso em: 16 de fev. de 2022.

APÊNDICE A – PLANO DE AULAS

Tabela 3 – Plano de aulas

Nível de Ensino	1º ano do Ensino Médio
Tema da Aula	Funções: limites de derivadas
Objetivos	
Geral	Competências Gerais da Educação Básica que serão trabalhadas nas aulas: • Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas; • Utilizar diferentes linguagens — verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo; • Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.
Específicos	Competências específicas para a Área de Matemática e suas Tecnologias a serem desenvolvidas neste conjuto de aulas: • Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente; • Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
Conteúdos	
Conceituais	Os conteúdos que serão debatidos nas aulas podem ser enquadrados em “Álgebra e Números” e “Grandezas e Medidas”:

	• (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais; sendo, em específico, os objetos de conhecimento correlacionados: Função polinomial do 1° grau. Função polinomial do 2° grau. Variação entre grandezas (proporcionalidade e não proporcionalidade); • (EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.). Os objetos de conhecimento correlacionados são: grandezas determinadas pela razão ou produto de outras (velocidade, densidade de um corpo, densidade demográfica, potência elétrica, bytes por segundo etc.); • (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. Os Objetos de conhecimentos correlacionados são: funções afins, lineares, constantes. Gráficos de funções a partir de transformações no plano. Proporcionalidade: estudo do crescimento e variação de funções. Estudo da variação de funções polinomiais de 1º grau: crescimento, decrescimento, taxa de variação da função; • (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. Os objetos de conhecimento são: funções polinomiais de 2º grau. Gráficos de funções a partir de transformações no plano. Estudo do comportamento da função quadrática (intervalos de crescimento/decrescimento, ponto de máximo/mínimo e variação da função).
Procedimentais	No escopo das aulas, serão desenvolvidos os seguintes conteúdos procedimentais: • Construir e dispor números em tabelas;

<table>
<tr><td></td><td>

- Construir e dispor números em tabelas;
- Construir planos cartesiano, assim como localizar e assinalar pontos, retas e curvas no plano;
- Utilizar a régua para a construção de gráficos e tabelas;
- Organizar números e símbolos correspondentes de expressões algébricas variadas.

</td></tr>
<tr><td>Atitudinais</td><td>Os conceitos atitudinais serão orientados pelas seguintes pontos:

- Limpeza e organização do ambiente escolar;
- Promover a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação;
- Agir com responsabilidade e respeito ao próximo.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desenvolvimento</td></tr>
<tr><td colspan="2">

As aulas aqui descritas foram pensadas para serem desenvolvidas com discentes do primeiro ano do Ensino Médio, mais especificamente como forma de introduzir funções, de maneira articulada ao ensino do cálculo infinitesimal como uma ferramenta potencializadora para trabalhar a temática.
Tendo em vista que, muito provavelmente, as aulas aqui propostas, seguindo a programação regular dos materiais destinados aos estudantes do Ensino Médio, o ensino de função, inicialmente, se dá por meio da Teoria de Conjuntos. Dessa forma, o trabalho aqui proposto pode ser melhor aproveitado entre a transição de funções representadas por diagrama de Venn e outras formas de representação como tabelas e/ou gráficos.
Pois bem, as descrições das aulas podem ser observadas abaixo:

Aula 1 e 2: As primeiras aulas desta proposta serão com enfoque em expor para os estudantes a correlação específica de dependência que define uma função, assim como a proporção entre os elementos de uma função e a variação de uma função.
Para isso, o primeiro exemplo para que os estudantes possam perceber essa relação de interdependência é: propor um quadrado de lados x, e a partir daí determinar valores para x, como por exemplo $x = 1$, implica em um perímetro igual a 4 e área igual a 1, para $x = 2$, implica em perímetro igual a 8 e área igual a 4. Pedir para os estudantes realizarem esse processo até x igual a 5. Depois da representação tabular, apresentar aos estudantes a representação gráfica das informações contidas na tabela. As exemplificações podem ser observadas na Figura 16; na Tabela 4 e na Figura 17.
Depois dessas apresentações, o professor deve instigar os discentes a perceberem a relação entre

</td></tr>
</table>

x e seus correspondentes, ou seja, para o perímetro uma possível generalização é: $y = 4x$; assim como que para a área é: $y = x^2$.
Após essas apresentações, apresentar a definição de função para os estudantes
Dados os conjuntos A e B não vazios, dizemos que f é uma função de A em B (ou que y é uma função de x) se, e somente se, para cada elemento x do conjunto A existe em correspondência um único elemento y do conjunto B. Representamos assim:

$$f : A \to B \quad ou \quad A \xrightarrow{f} B \tag{1}$$

(lê-se: função f de A em B)

Os estudantes deverão realizar as representações tanto tabelar quanto gráfica.
Após esse processo, o professor ficará responsável por discutir a forma algébrica de representação, aqui é interessante destacar a possibilidade de abranger o exemplo anterior, sendo os valores de x correspondendo ao conjunto dos reais. Com isso será possível realizar as funções descritas anteriormente (Figura 18), sendo necessário apenas que os estudantes terminem de produzir a construção das curvas, ou seja, realizar a representação das funções: $y = 4x$ e $y = x^2$.
Além disso, especificar o que é a variação usando a notação Δ para isso, tendo foco em mostrar o triângulo retângulo que resulta quando realizamos a inclinação de uma reta por exemplo.
A avaliação para esse conjunto de aulas será pautada nos exercícios que estão destacados no Apêndice B e a produção realizada pelos estudantes em seus respectivos cadernos do aluno como forma de acompanhamento do entendimento dos discentes em relação à realização do trabalho. Para finalizar este par de aulas, indagar os alunos em relação à concavidade da curva correspondente à $f(x) = x^2$, ou seja, essa função possui concavidade sempre para cima?

Aula 3 e 4: Retomar o que fora visto na aula anterior de maneira geral e voltar à pergunta: como é possível verificar se a concavidade da curva $y = x^2$ é sempre para cima?
Com as possíveis respostas dos alunos, verificar se algum deles responde por processo de inclinação de uma reta secante, ou, talvez, uma reta tangente à curva mencionada. Muito provavelmente, os discentes indicarão a verificação de valores muito grandes de x que denotam valores muito altos de y, configurando uma regularidade. Como forma de atender a essa dúvida, explicar a noção do cálculo de maneira direta. Ficar atento à participação dos discentes neste momento.
Como forma de dar continuidade às ideias de valores muito “grandes” para x, vamos iniciar a explicação a partir da reta tangente a uma curva, para isso:
Considera-se a função mencionada anteriormente, $y = f(x) = x^2$. Em seguida, tomamos o ponto $P(x, f(x))$.
Agora adicionamos a esse x um incremento: $\Delta x = h$. Diante disso, obtemos um novo ponto, tal qual: $Q(x + h, f(x + h))$. Ao aplicarmos o termo independente do ponto Q na função $y = f(x) = x^2$ obtemos: $f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$.
Estabelecendo a variação em y e estabelecendo a inclinação da reta, temos:

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2 = h(2x+h) \quad (2)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h \quad (3)$$

A partir desse estágio iremos considerar o ponto P fixo e imaginar h tão pequeno quanto quisermos, porém maior e diferente de 0, pois se fosse igual a 0, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ não seria possível. A medida que h diminui, o ponto Q se aproxima do ponto P, de tal forma que as retas secantes à curva, considerando h muito próximo de 0, o quanto quisermos, dá lugar à reta tangente. Diante disso, "esse limite é o que se chama de derivada da função no valor x da variável independente."(AVILA, 2010, p. 172).

Pois bem, o conceito de derivada possibilita muitas explicações no âmbito das funções. Retomando a pergunta que foi feita anteriormente: A concavidade da função $y = f(x) = x^2$ se modifica a depender do valor de x? Como vimos, a derivada de $f(x) = x^2$, quando h se aproxima de 0, é $f'(x) = 2x$, ou seja:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x \quad (4)$$

Dessa forma, a derivada de uma função em um dado ponto significa a inclinação da reta tangente nesse determinado ponto, logo, podemos perceber que a tangente à função $f(x) = x^2$ é crescente e não modifica o atributo de inclinação, portanto a parábola possui sempre concavidade voltada para a direção positiva do eixo y.

Além disso, o professor irá apresentar aos estudantes uma projeção para exemplificar com uma proposta disponível no geogebra (https://www.geogebra.org/m/pkmgsyhc), onde os discentes poderão visualizar esse processo de aproximação do ponto Q ao ponto P, assim como o que acontece com as retas secantes quando esse movimento acontece.

Por fim, finalizar a aula com exercícios sobre função com a mesma lógica dos passados nesta aula (Apêndice C). Além disso, indicar para os alunos pensarem e/ou pesquisarem, para a próxima aula, possíveis campos de atuação do cálculo infinitesimal.

Aula 5 e 6: O início deste par de aulas será com foco em explicar quais eram as perguntas que os profissionais que teorizaram o cálculo tentavam responder, como por exemplo a velocidade de um determinado ponto em uma dada posição, assim como utilizar o capítulo 3, intitulado "Breve história do Cálculo", para contextualizar aos discentes o trabalho de alguns cientistas que desenvolveram aspectos da teorização que está sendo apresentada, assim como as influências que receberam e como a teoria foi vista pela comunidade científica, como uma forma de aproximar essas personalidades dos discentes.

Em seguida, com as ideias trazidas pelos alunos referente à pesquisa proposta nas aulas anteriores, possivelmente alguém irá indicar um conceito muito recorrente que é a questão da velocidade instantânea, muitas vezes expressas, por exemplo, na frase: aquele carro estava a $60km/h$ quando passou aquela lombada. Além disso, os alunos nesta etapa estão aprendendo, em Cinemática, esses conceitos, logo nesta aula eles irão perceber o "surgimento" das fórmulas dispostas nas aulas de Física.

Para dar continuidade a proposta de desenvolver a interdisciplinaridade entre Matemática e Física, concomitantes à derivada, faz-se necessário dar profundidade a um detalhe importante: função cuja derivada é igual a 0.

Sendo assim, uma função cuja variação no y, Δy, é igual a 0 e a variação em x, Δx, é diferente de 0, corresponde a uma função constante e tendo em vista o exposto acima, a inclinação da função mencionada pode ser observada a seguir: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$; Como a inclinação da função é 0, a derivada da função, $f'(x)$ também é 0 para qualquer que seja o x tomado.

Continuamente, para estabelecermos a interdisciplinaridade linear, mencionada no início do capítulo 3 deste trabalho, com a Física, necessitamos escolher o conteúdo que melhor se estabelece essa dinâmica. Para tanto, o conteúdo que melhor se conecta entre as duas disciplinas é a Cinemática, ensinada no primeiro ano do Ensino Médio, concomitante ao ensino de funções em Matemática. Podemos começar por estudar o movimento uniforme, que consiste em um movimento cuja velocidade média é constante em todo percurso, o qual pode ser observado na explicação a seguir:

Em primeiro lugar precisamos considerar um ponto material numa trajetória qualquer, que segundo Geraldo Ávila: "é um ponto geométrico ao qual se associa um número positivo, que é sua massa. A massa não nos preocupa, enquanto não tivermos de lidar com a dinâmica do movimento, quando intervêm os conceitos de massa, força e energia."(AVILA, 2010, p. 175).

Tomemos $y = s(t)$, uma função que correlaciona a posição e o tempo, sendo s o espaço percorrido e t o tempo necessário para a realização do movimento. Consideremos um ponto material que parte da origem e percorre um espaço em um intervalo de tempo t, essa primeira posição iremos nomear de s_0 e, em seguida, se desloca de s_0 para a posição s_1 em $t + \Delta t$ unidades de tempo. A variação do espaço percorrido pode ser entendida da seguinte forma:

$$\Delta s = s_1 - s_0 = s(t + \Delta t) - s(t) \tag{5}$$

Para movimentos onde a velocidade se mantém uniforme, ou seja, a velocidade se mantém constante no decorrer do percurso o que implica em uma aceleração nula, pode-se estabelecer a velocidade média da seguinte forma :

$$v_{media} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t + \Delta t - t} = \frac{s_1 - s_0}{\Delta t} \tag{6}$$

Agora considerando um movimento cujo s_0 representa a posição quando o tempo começa a ser medido e s_1 a posição após t unidades de tempo, assim como uma velocidade constante em todo o percurso. Dessa forma, reogarnizando, temos:

$v = \frac{s_1 - s_0}{t} \Rightarrow s_1 = s_0 + vt$; essa equação é conhecida como equação horária do movimento uni-

forme, cujo gráfico é uma reta.
Outrossim, a concepção de velocidade instantânea é popularmente conhecida por fazer parte do cotidiano das pessoas, seja através da fala como por exemplo: aquele carro estava à 60km por hora quando passou a lombada ou, por exemplo, através dos marcadores de velocidade nos veículos ou até mesmo através dos radares eletrônicos dispostos em pontos estratégicos das estradas e rodovias.
Entretanto, como expressar a teoria por trás desses medidores de velocidade instantânea?
Certamente, podemos utilizar limites e derivadas como ferramenta para tal entendimento. Pois bem, para movimentos cuja a velocidade varia ao longo do percurso, a equação visada acima não se aplica, logo se pode imaginar, dentro da perctiva do movimento de uma particula em um percurso, a variação de tempo se aproximando de 0, o tanto quanto pudermos imaginar, configurando apenas um instante, que aqui chamamos de instantâneo, observe abaixo:
Como estamos derivando em relação ao tempo, pois é esse fator que consideramos próximo de 0 o quanto desejarmos, logo, deve-se considerar a velocidade em função do tempo, $v = v(t)$.
Dessa forma, temos:

- posição inicial: $s_i = s(t)$, no tempo t;
- posição final: $s_f = s(t + \Delta t)$, no tempo $t + \Delta t$.

Portanto:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{t + \Delta t - t} \Rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \Rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (7)$$

Dessa forma, pode-se observar que a velocidade instantânea é a derivada do espaço em relação ao tempo, esse cujo limite tende a 0.
Já em relação à aceleração, vamos considerar inicialmente um movimento cujo a aceleração seja constante e diferente de zero, um exemplo disso é o movimento de queda liver, quando o atrito com o ar é desprezado. Para cada segundo que se passa, a velocidade no exemplo em questão, considerando um objeto qualquer, é acrescida de 10m/s a cada segundo aproximadamente. Portanto podemos teorizar da seguinte forma, considerando um movimento cuja aceleração é constante e diferente de 0:
$a = \frac{v - v_0}{t - 0} \Rightarrow v = v_0 + at$; essa corresponde à equação da velocidade, onde $v_0 = v(t)$ e $v = v(t + \Delta t)$.
Para situações onde a aceleração varia iremos considerar da mesma forma que fizemos para o exemplo anterior, ou seja, considera-se o intervalo de tempo tão pequeno quanto quisermos, para assim obtermos o valor desta aceleração no exato instante estimado, observe:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{t + \Delta t - t} \Rightarrow a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \Rightarrow a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (8)$$

Podemos observar que a aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo.
Agora, atentemos para a equação horário do movimento, para isso vamos utilizar uma propriedade de derivada, a qual possibilita a seguinte relação: "se duas funções $f(t)$ e $g(t)$ têm a mesma derivada, a diferença h(t) = f(t) - g(t) tem derivada 0, significando que o gráfico de h(t) tem tangente horizontal em todos os pontos, sendo, pois, uma função constante em t, vale dizer, f e g diferem por uma constante."(AVILA, 2010, p. 182). Observe as escolhas abaixo:
Primeiro selecionamos uma função $g(t)$ para derivarmos, de tal forma que $g'(t) = v(t) = v_0 + at$, temos:
$(v_0 t + \frac{at^2}{2})' = v_0 + at$, pois a derivada de $v_0 t$ em relação em relação a t é v_0, e, da mesma forma, a derivada de $\frac{at^2}{2}$ é igual a at. Outrossim, sabe-se, através de explicações descritas anteriormente neste texto, que a derivada do espaço em relação ao tempo é a velocidade, ou seja:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{t + \Delta t - t} \Rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \Rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (9)$$

Diante disso, temos:
$s(t) - (v_0 t + \frac{at^2}{2})$; possui derivada zero, pois tanto a derivada de $s(t)$, quanto a derivada de $v_0 t + \frac{at^2}{2}$ correspondem à velocidade, logo:

$$s(t) - (v_0 t + \frac{at^2}{2}) = C \Rightarrow s(t) = C + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (10)$$

O significado de C pode ser facilmente obtido quando fazemos $t = 0$:

$$s(0) = C \Rightarrow s_0 = C \quad (11)$$

Substituindo, temos: $s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$; o que corresponde à equação horária do movimento uniformemente variado, perfazendo assim uma parábola.
Após toda essa explicação, indicar um questionário aos alunos em relação aos conceitos correlatos às funções que foram trabalhos na aulas descritas (Apêndice D). Após esse estágio, o docente responsável pela turma pode ou não dar continuidade ao ensino de funções concomitantes ao ensino do cálculo.

Recursos

Os recursos necessários para os docentes ao realizarem as ações descritas nas aulas:

- Folhas de exercícios que serão entregue aos alunos;
- Giz ou caneta;

<table>
<tr><td colspan="2">

Apagador;
Notebook;
Projetor;
Portifólio de anotações.

Recursos necessários para os estudantes ao realizarem as ações descritas nas aulas:

Caderno;
Lápis, caneta e borracha;;
Régua.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Avaliação</td></tr>
<tr><td>Intrumentos</td><td>Os instrumentos de avaliação são:

Lista de exercícios;
Portfólio de anotações;
Cadernos dos alunos.

</td></tr>
<tr><td>Critérios</td><td>Os critérios seguem os seguintes nortes:

A assiduidade em relação às aulas, ou seja, se realizou todas as propostas destinadas às aulas através dos conteúdos presentes no caderno;
O comportamento em sala de aula, ou seja, em relação ao contexto, o estudante respeitou os colegas e o ambiente em que está, manteve o ambiente limpo, fez silêncio nos momento em que essa ação era necessária para o entendimento do assunto e estabeleceu um convívio com os colegas de maneira saudável;
Se as respostas dispostas nas listas de exercícios estão de acordo com a explicações que foram dadas em sala de aula.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Bibliografia utilizada para a realização do plano de aulas</td></tr>
<tr><td colspan="2">ÁVILA, G. S. S. Várias faces da Matemática: tópicos para licenciatura em leitura geral. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

ANDRADE, Thais Marcelle de. Matemática Interligada: funções afim, quadrática, expo-</td></tr>
</table>

nencial e logarítma/ obra coletiva. 1º ed. São Paulo: Scipione, 2020.

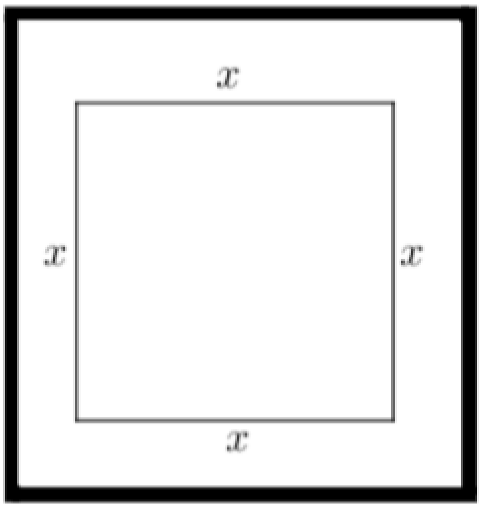
BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Conselho Nacional de Secretários de Educação (CONSED). União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (UNDIME). **Base Nacional Comum Curricular (BNCC): educação é a base.** Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 de novembro de 2021.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista - etapa Ensino Médio**. São Paulo: 2020. SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Currículo Paulista - etapa Ensino Médio. São Paulo: 2020. Disponível em: https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2020/08/CURR%C3%8DCULO%20PAULISTA%20etapa%20Ensino%20M%C3%A9dio.pdf Acesso: 20 de novembro 2021.

SILVA. D. C. M. da. **Massa Relativista**. Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/massa-relativistica.htm. Acesso em: 21 de janeiro de 2022.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 16 – Quadrado de lado x



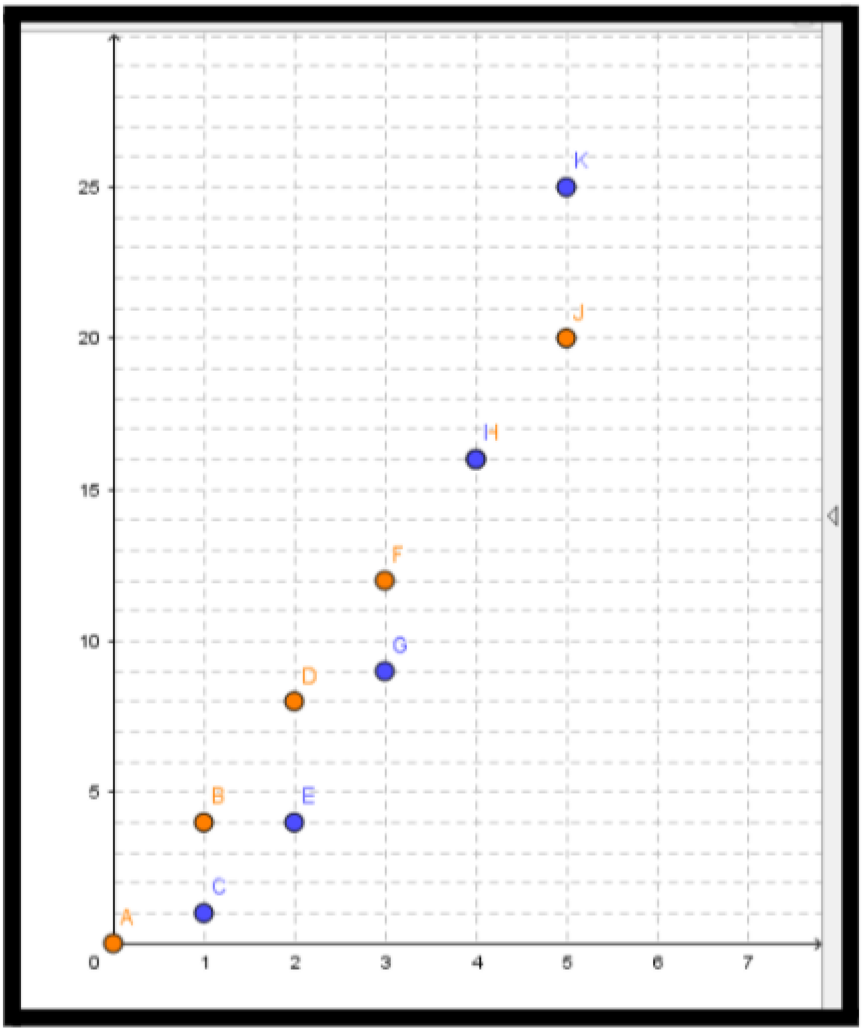
Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4 – Relação lado, perímetro e área do quadrado

x	Perímetro	Área
0	0	0
1	4	1
2	8	4
3	12	9
4	16	16
5	20	25

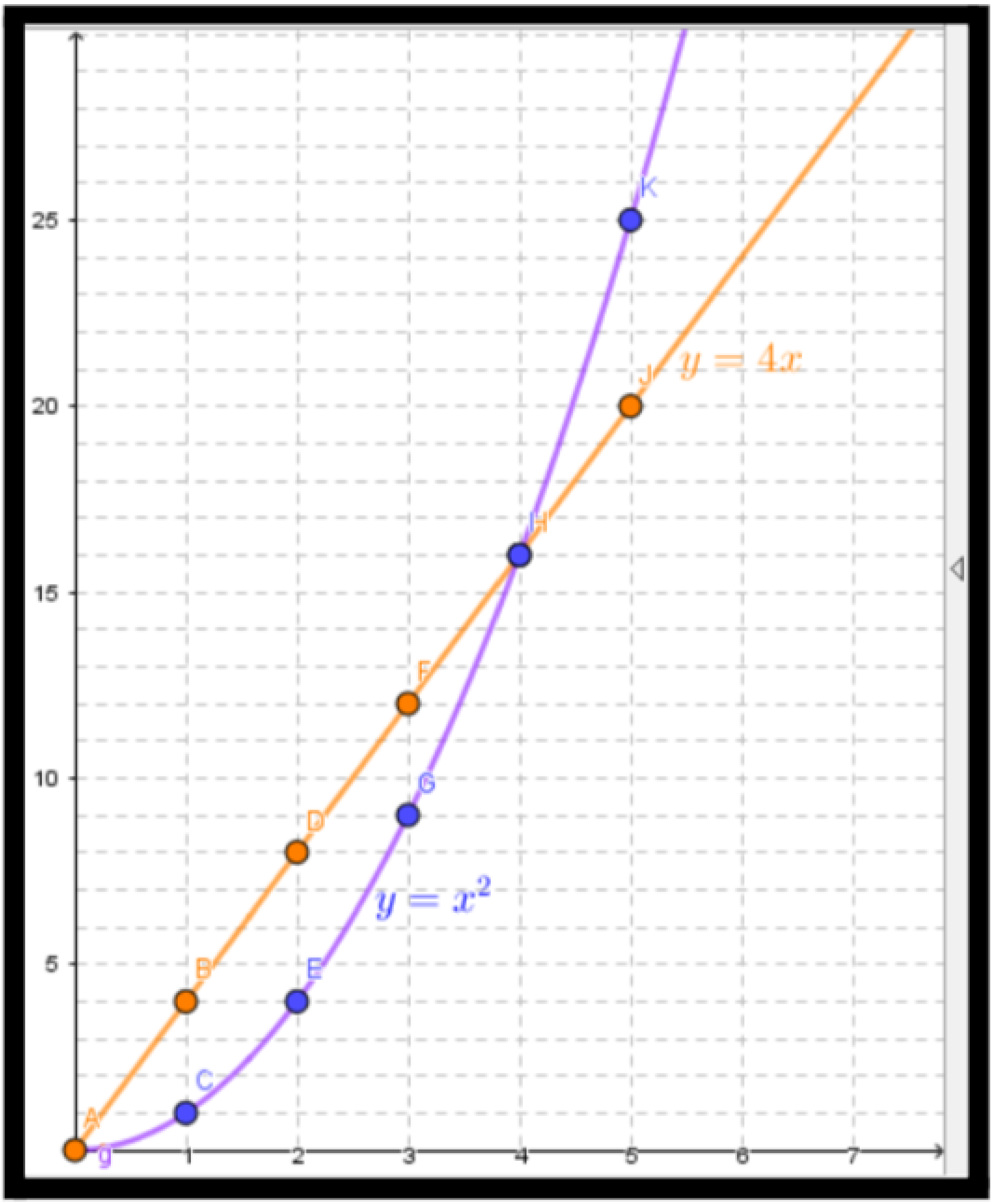
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 17 – Pontos no plano cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 18 – Funções no plano cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE B – LISTA DE EXERCÍCIOS AULAS 1 E 2

Nome: ____

Número: __________ Data: _______________

Lista de exercícios

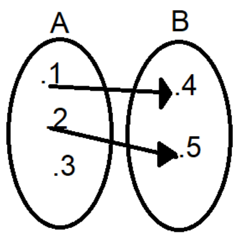
1) Considere a seguinte definição:

Dados os conjuntos A e B não vazios, dizemos que f é uma função de A em B (ou que y é uma função de x) se, e somente se, para cada elemento x do conjunto A existe em correspondência um único elemento y do conjunto B. Representamos assim:

$$f : A \to B \qquad A \xrightarrow{f} B$$

(lê-se: função f de A em B)

A represenção abaixo corresponde a uma função? Justifique sua resposta.



2) Sara foi ao cinema para assistir um filme, onde ela acabou percebendo que o número de ingressos comprados segue uma regularidade que pode ser generalizada. Como processo dessa descoberta, Sara confeccionou a tabela abaixo:

quantidade de ingressos	**total a pagar em reais ($)**
0	0
1	25
2	50
3	75
4	100
5	125

Qual o valor em reais que Sara irá gastar para alugar a sala de cinema? Sendo que esse processo corrresponde ao ato de comprar 60 ingressos. Qual foi a possível generalização que Sara chegou? Realize a representação gráfica dos dados presentes na tabela.

3) (FGV) Um terreno vale hoje R$ 40 000,00 e estima-se que daqui a 4 anos seu valor seja R$ 42 000,00. Admitindo que o valor do imóvel seja função do 1º grau do tempo (medido em anos e com valor inicial na data de hoje), seu valor daqui a 6 anos e 4 meses será, em reais, aproximadamente

A) 43 066,00.

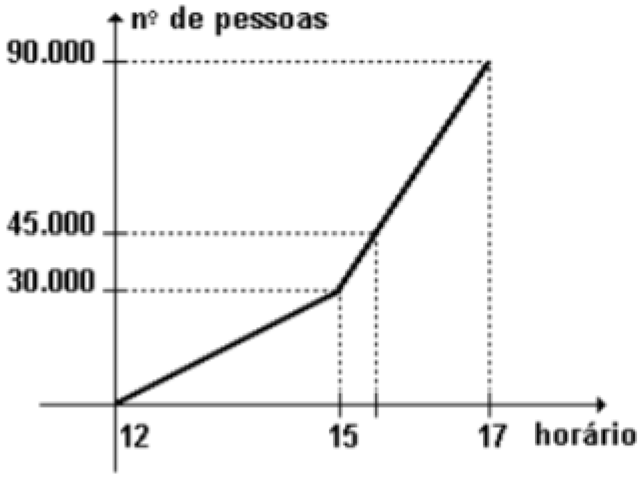
B) 43 166,00.

C) 43 266,00.

D) 43 366,00.

E) 43 466,00.

4) (Uerj) Em uma partida, Vasco e Flamengo levaram ao Maracanã 90.000 torcedores. Três portões foram abertos às 12 horas e até as 15 horas entrou um número constante de pessoas por minuto. A partir desse horário, abriram-se mais 3 portões e o fluxo constante de pessoas aumentou. Os pontos que definem o número de pessoas dentro do estádio em função do horário de entrada estão contidos no gráfico a seguir:



Quando o número de torcedores atingiu 45.000, o relógio estava marcando 15 horas e:

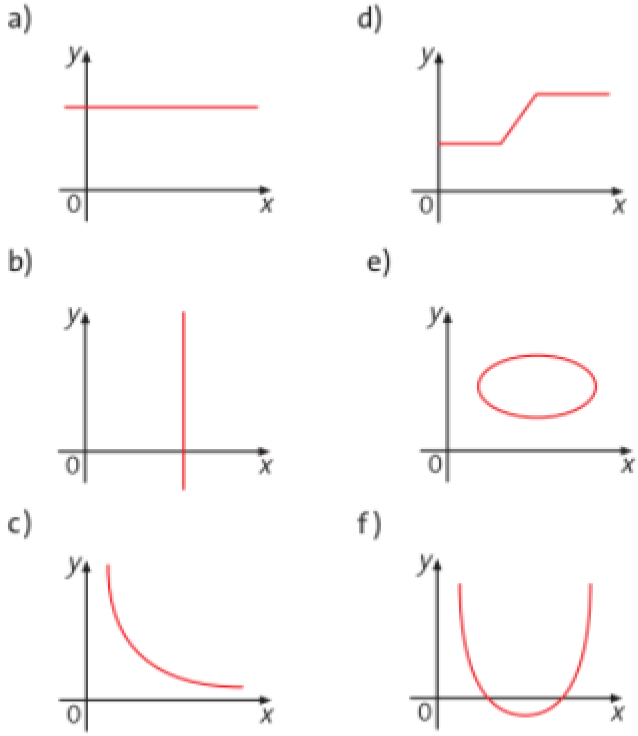
a) 20 min

b) 30 min

c) 40 min

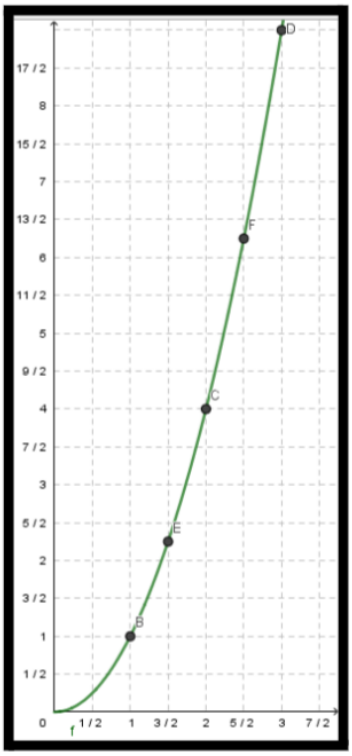
d) 50 min

5) Das representações abaixo quais podem ser consideradas funções e quais não podem ser consideradas funções? Justifique sua resposta.



Fonte: ANDRADE (2020).

6) A concavidade da parábola que corresponde à $f(x) = x^2$, figura abaixo, é sempre para cima? Como Descobrir?



7) Exemplifique uma situção do seu cotidiano que se encaixa na definição de função. Represente essa situação na forma tabular, gráfica e algébrica.

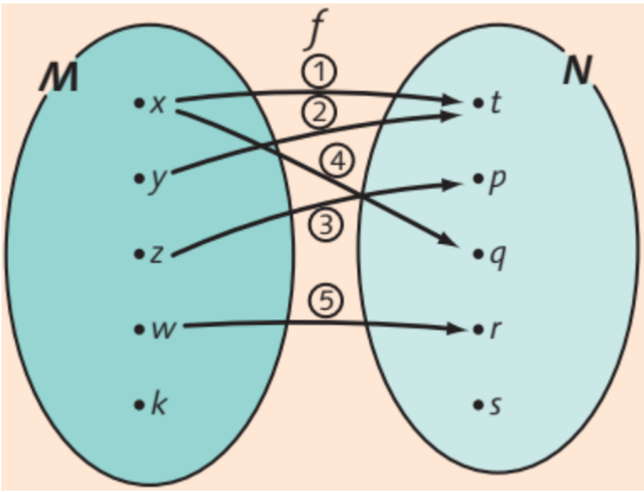
APÊNDICE C – LISTA DE EXERCÍCIOS AULAS 3 E 4

Nome: ____

Número: __________ Data: _______________

Lista de exercícios

1) (UFF-RJ) Considerem a relação f de M em N, representada no diagrama abaixo.



Para que f seja uma função de M em N , basta:

a) apagar a seta 1 e retirar o elemento s

b) apagar as setas 1 e 4 e retirar o elemento k

c) retirar os elementos k e s

d) apagar a seta 4 e retirar o elemento k

e) apagar a seta 2 e retirar o elemento k

2) (UFPA) Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$. Qual das afirmativas abaixo é verdadeira?

a) $f : x \to 2x$ é uma função de A em B

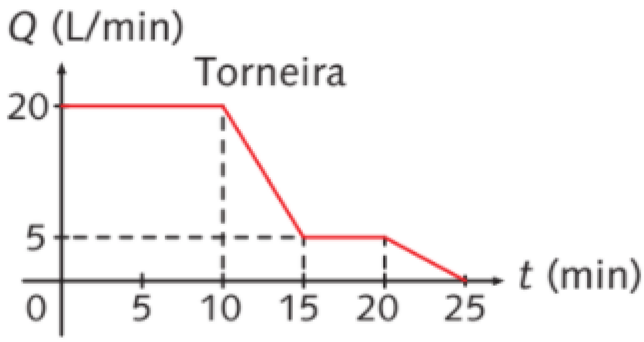
b) $f : x \to x + 1$ é uma função de A em B

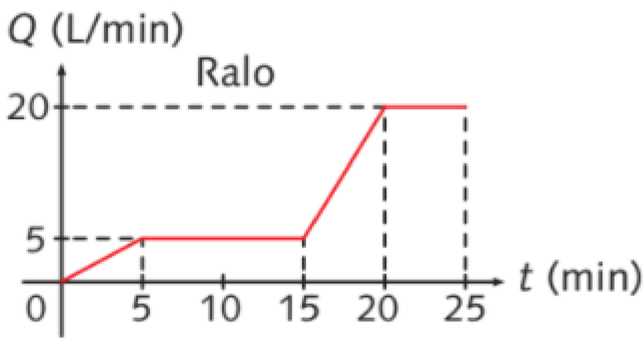
c) $f : x \to x^2 - 3x + 2$ é uma função de A em B

d) $f : x \to x^2 - x$ é uma função de B em A

e) $f : x \to x - 1$ é uma função de B em A

3) (ENEM) Um reservatório é abastecido com água por uma torneira e um ralo faz a drenagem de água desse reservatório. Os gráficos representam as vazões Q, em litros por minuto, do volume de água em que o tanque entra no reservatório pela torneira e do volume que sai pelo ralo, em função do tempo t, em minuto. Em qual intervalo de tempo, em minuto, o reservatório tem uma vazão constante de enchimento?

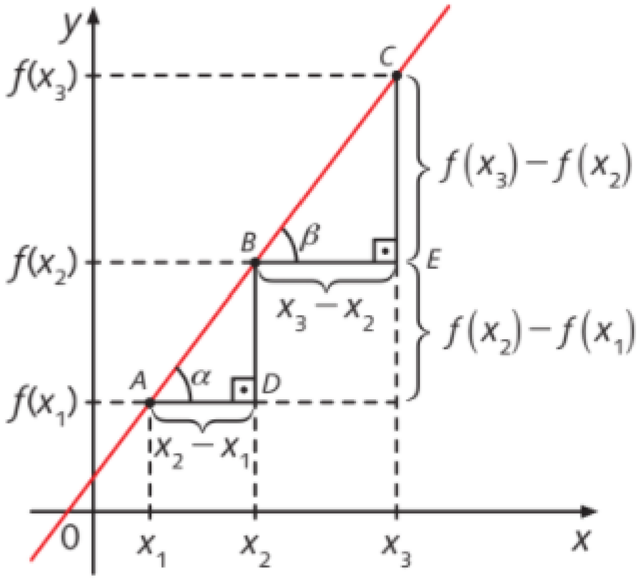




a) De 0 a 10.
b) De 5 a 10.
c) De 5 a 15.
d) De 15 a 25.
e) De 0 a 25.

4) Como saber se os pontos de uma função linear corresponde a uma reta no plano cartesiano? Observe a demonstração abaixo, que também pode ser encontrada em (ANDRADE, 2020, p. 61):

Inicialmente, consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e três pontos distintos de seu gráfico: $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ e $C(x_3, f(x_3))$, com $x_1 < x_2 < x_3$, conforme o gráfico a seguir.



Fonte: ANDRADE (2020).

Vamos mostrar que estes pontos são colineares, ou seja, que pertencem a uma mesma reta, e concluiremos que o gráfico da função afim é uma reta. Note que os triângulos ADB e BEC são retângulos. Vamos verificar se os lados correspondentes possuem medidas proporcionais, ou seja, se $\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}}$.

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} \leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_3)-f(x_3)}{x_3-x_2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{(ax_2+b)-(ax_1+b)}{x_2-x_1} = \frac{(ax_3+b)-(ax_2+b)}{x_3-x_2} \leftrightarrow \frac{ax_2+b-ax_1-b}{x_2-x_1} = \frac{ax_3+b-ax_2-b}{x_3-x_2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{ax_2-ax_1}{x_2-x_1} = \frac{ax_3-ax_2}{x_3-x_2} \leftrightarrow \frac{a(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = \frac{a(x_3-x_2)}{x_3-x_2} \leftrightarrow a = a$$

Assim, os triângulos ADB e BEC são semelhantes pelo caso LAL (Lado Ângulo Lado). Logo, seus ângulos internos correspondentes são congruentes, isto é, os ângulos α e β possuem medidas iguais. Portanto, os pontos A, B e C pertencentes ao gráfico da função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com a $\neq 0$, são colineares. Mostramos assim que o gráfico de uma função afim é uma reta. De maneira recíproca, podemos demonstrar que toda reta não vertical é o gráfico de uma função afim real. Diante disso, construa um plano cartesiano no caderno, localize e marque os seguintes pontos nessa construção:

$$A(7,3) \text{ e } B(4,2);$$
$$C(9,2) \text{ e } D(\tfrac{1}{2},6);$$
$$E(0,0) \text{ e } F(\tfrac{2}{5},\tfrac{7}{2}).$$

Após esse processo calcule a taxa de variação e construa as retas a partir de cada par de pontos.

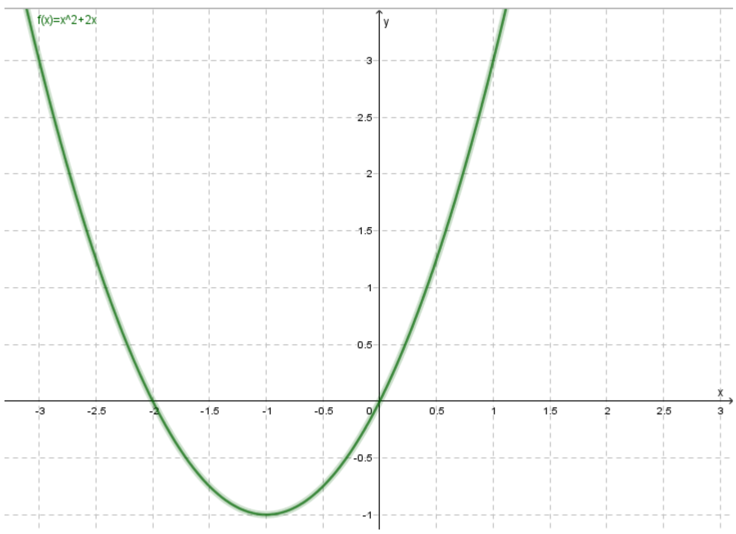
5) Considere as seguintes definições:

Crescente	**Decrescente**
Uma função f é **crescente** em um intervalo contido no domínio de f se, e somente se, para todos x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, obtivermos $f(x_1) < f(x_2)$.	Uma função f é **decrescente** em um intervalo contido no domínio de f se, e so mente se, para todos x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, obtivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

a) Explique com suas palavras as definições apresentadas acima.

b) Defina duas funções, de tal modo que uma seja crescente e outra seja decrescente.

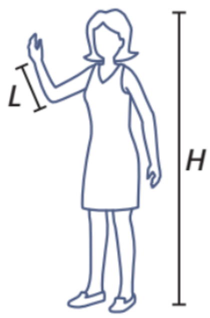
C) No gráfico abaixo, considerando o intervalo $-3 \leq x \geq 3$, onde a função $f(x) = x^2 + 3x$ é crescente? E onde é decrescente?



6) (UMC-SP) A altura H de uma mulher está relacionada com a medida do comprimento L de seu rádio (o osso que, junto com o cúbito, constitui o esqueleto do antebraço). Admitindo que a relação entre H e L é uma relação linear (existem constantes a e b, de modo que $H = aL + b$) e considerando os valores constantes no quadro abaixo, a medida da altura de uma mulher, em centímetros, cujo comprimento do rádio é de 28 centímetros, é igual a:

H	167	174
L	24	26

(medidas em centímetros)



a) 180; b) 181; c) 177; d) 178; e) 179.

7) A Mãe de Natália, pesquisadora, estava analisando o movimento que os pingos da chuva realizam quando caem do céu. Em seu computador ela possui uma ferramenta gráfica que localiza e aproxima o movimento realizado por um determinado pingo de chuva em uma determinada função. Natália, ao observar o trabalho da mãe, percebeu que na tela do computador registrava a seguinte função: $s(t) = -2t^2 + 3t/7 + 9$, que correlaciona o espaço s, em metros, em relação ao tempo t, em segundos. Natália, curiosa, decidiu saber em que velociadade estava o pingo representado pela função acima no instante em que marcou 1 segundo de movimento. Diante disso, com qual valor Natália se deparou? Realize a representação do gráfico de $s(t)$ e a reta tangente a essa curva quando x for igual a 1.

APÊNDICE D – LISTA DE EXERCÍCIOS AULAS 5 E 6

Nome: ____

Número: __________ Data: ______________

Lista de exercícios

1) Dada a seguinte relação $f : A \to B$, temos:

Domínio - $D(f)$	**Contradomínio -** $CD(f)$	**Imagem -** $Im(f)$
O conjunto A é o domínio $D(f)$	o conjunto B é o contradomínio $CD(f)$ da função f.	Quando $y \varepsilon B$ é tal que $f(x) = y$ para algum $x \varepsilon A$, dizemos que y é a imagem de x pela função f. O conjunto de todas as imagens é um subconjunto de B, chamado conjunto imagem $Im(f)$ da função f.

a) Descreva com suas palavras o que você entendeu sobre Domínio, Contradomínio e Conjunto Imagem de uma função.

b) De um exemplo em que apareça os três componetes discutidos nesta questão (D, CD e Im).

2) Luis gosta de jogar basquete. Um certo dia ele jogou a bola para cima e gostaria de saber a altura máxima atingida pela bola. Com essa dúvida foi questionar seu professor de Física, que o observou nos arremessos e o apresentou a função $g(x) = -6x^2 + 2x - 7$, que corresponde à aproximação dos pontos que correspondem ao movimento da bola no ar, quando planificados. Para descobir quão alto ele consegue arremessar, Luis lembrou da sua aula de Matemática e utilizou conceitos de derivada para encontrar o ponto máximo que a bola atingiu. Qual foi o valor encontrado por Luis?

3) Calcule a inclinação da reta tangente à curva $v(x) = x^2 + 3$, para $x = 9$.

4) (Unirio) A função linear $f(x) = ax + b$ é representada por uma reta que contém o ponto $(2, -1)$ e que passa pelo vértice da parábola $y = 4x - 2x^2$. A função é:

a) $f(x) = -3x + 5$

$b) f(x) = 3x - 7$

$c) f(x) = 2x - 5$

$d) f(x) = x - 3$

$e) f(x) = x/3 - 7/3$

5) Segundo o que consta no site Mundo Educação, viajar pelo espaço sideral implica algumas condições, uma dessas condições corresponde às grandes distâncias entre os planetas, por exemplo. A partir de observações, hoje temos que a velocidade da luz é a mais rápida que conhecemos atingindo $299.792.458 m/s$. Segundo a Teoria da Relatividade de Einstein, poderíamos dizer que a massa de um corpo nada mais é do que a inércia desse corpo. Dessa forma, m_0 corresponde à massa de um determinado corpo em repouso em relação a um sistema de referencia inercial e m é sua massa quando dotado de velocidade v, sendo c a velocidade da luz. As massas m e m_0 relacionam-se de acordo com a equação abaixo:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Nessa fórmula, m_0 é chamada de massa de repouso e m, de massa relativística. Faça uma análise da relação e diga o motivo, dentro desse aspecto da Teoria da Relatividade, de viajar na velocidade da luz não ser possível.

APÊNDICE E – QUESTIONÁRIO DESTINADO AOS PROFESSORES

QUESTIONÁRIO: PLANO DE AULAS

Através deste documento venho questionar pontuações acerca do plano de aulas anexado, componente central do trabalho de conclusão de curso de título: "Limites e Derivadas no Ensino Médio: possibilidades de ensino". Dessa forma, neste questionário estão presentes algumas perguntas acerca desse plano em relação a sua experiência como professor(a) da Educação Básica, em específico, Ensino Médio.

Nome:

Leciona como professor(a) de qual(is) disciplina(s):

Leciona para qual(is) níveis de ensino atualmente (Ensino Fundamental ciclo II; Ensino Médio):

Quantos anos de experiência você tem como professor(a) do Ensino Médio:

1) De acordo com as suas experiências em sala de aula, o quanto você considera que esse plano seja praticável, tanto em termos de recursos necessários, de tempo e de capacidade dos estudantes da modalidade indicada, ou seja, primeiro ano do Ensino Médio?

2) Quais pontos você considera que podem ser aprimorados para melhor se encaixar na realidade dos alunos que você conhece?

3) Você considera que a interdisciplinaridade entre as disciplinas Física e Matemática presente nas aulas dispostas no plano são relevantes para as duas disciplinas em questão?

4) Você consideraria desenvolver essa proposta com seus alunos do Ensino Médio?