UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

RALPH ALTINO FETRIM

OTIMIZAÇÃO DO RETORNO DO INVESTIMENTO DE CAPITAL UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO

PRESIDENTE PRUDENTE

2021/2022

RALPH ALTINO FETRIM

OTIMIZAÇÃO DO RETORNO DO INVESTIMENTO DE CAPITAL UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO

Relatório Final para Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Estatística da FCT/Unesp para aproveitamento na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso.
Orientadora: Profª. Dra. Silvely Nogueira de Almeida Salomão Néia

PRESIDENTE PRUDENTE

2022

F327o

Feltrim, Ralph Altino

Otimização do retorno do investimento de capital utilizando programação / Ralph Altino Feltrim. -- Presidente Prudente, 2022

49 p.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Estatística) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente

Orientadora: Silvely Nogueira de Almeida Salomão Néia

1. Investimento Financeiro. 2. Teoria de Markowitz. 3. Algoritmo Genético. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade deCiências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Ralph Altino Feltrim

OTIMIZAÇÃO DO RETORNO DO INVESTIMENTO DE CAPITAL UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO

Relatório de Final de Trabalho de Conclusão de Curso aprovado como requisito para obtenção de créditos na disciplina Trabalho de Conclusão do curso de graduação em Estatística da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Unesp, pela seguinte banca examinadora:

Profª. Dra. Silvely Nogueira de Almeida Salomão Néia. (orientadora)

Departamento de Estatística

Prof. Dr. Ediison Ferreira Flores

Departamento de Estatística

Profª. Dra. Cristiane Nespoli de Oliveira

Departamento de Matemática e Computação

Presidente Prudente, 7 de março de 2022.

Resumo

Mediante a busca pela garantia de uma aposentadoria estável, esse trabalho tem por objetivo explorar formas alternativas de investimento financeiro buscando encontrar uma fonte de renda que complemente a renda fornecida pela previdência social.

Um estudo da Teoria Moderna do Portfólio, conhecida também por Teoria de Markowitz, foi realizado pois, seus conceitos exibem um grande potencial, ao serem aplicados, na geração de uma renda complementar. A técnica de Algoritmo Genético (AG) foi explorada com o intuito de utiliza-la para otimizar a Teoria de Markowitz.

A aplicação foi feita em um conjunto de dados relacionados a ativos financeiros de empresas que compõe o mercado Brasileiro. Assim, aplicou-se nesses dados a Teoria de Markowitz e sucessivamente, aplicou-se nesses mesmos dados a Teoria de Markowitz implementando o Algoritmo Genético (AG). Por fim, os resultados foram comparados buscando verificar qual método traz melhores resultados.

Tanto a coleta dos dados quanto as análises feitas foram realizadas com auxilio de Software R.

Palavras-chave: Investimento Financeiro; Teoria de Markowitz; Algoritmo Genético (AG).

Abstract

By seeking to guarantee a stable retirement, this work aims to explore alternative forms of financial investment seeking to find a source of income that complements the income provided by social security.

A study of the Modern Portfolio Theory, also known as the Markowitz Theory, was carried out because its concepts show great potential, when applied, in the generation of a complementary income. The Genetic Algorithm (GA) technique was explored in order to use it to optimize the Markowitz Theory.

The application was made on a set of data related to financial assets of companies that make up the Brazilian market. Thus, the Markowitz Theory was applied to these data and successively, the Markowitz Theory was applied to these same data, implementing the Genetic Algorithm (GA). Finally, the results were compared in order to verify which method brings better results.

Both data collection and analysis were performed with the help of R Software.
Keywords: Financial Investment; Markowitz Theory; Genetic Algorithm (GA).

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A reforma da previdência social ocorrida em 12 de novembro 2019 permitiu que métodos poucos explorados de investimento financeiro fossem cada vez mais requisitados por parte da população. Dentre esses investimentos, podem-se citar: a previdência social privada, o mercado de bolsa de valores, o mercado de criptomoedas, mercado de grão (soja, trigo), mercado de minérios (ouro, ferro), dentre outros.

Defini-se previdência social como a parcela acumulada de uma determinada porcentagem do ganho obtido ao exercer uma ou varias profissões, ao longo da carreira do prestador, que possa ser resgatada após um determinado tempo de prestação de serviços, ou seja, o trabalhador paga um taxa, ou mesmo, essa taxa é abatida diretamente de seu salário mensal para alguma instituição, e quando esse trabalhador não for capaz de continuar exercendo suas funções trabalhistas, ele terá direito de receber esse valor como forma de assegurá-lo a continuar tendo condições de sustentar a si próprio (INSS, 2019).

Em síntese, o verdadeiro objetivo da previdência social é garantir uma certa independência econômica ao alcançar a terceira idade, mais especificamente na fase que começa após os 60 anos de idade, na maioria dos países. No entanto, existem outras formas de buscar essa estabilidade e uma delas pode ser por meio de investimentos próprios como os portfólios de investimento.

Um portfólio de investimento é um conjunto de ativos financeiros de posse de um investidor. O termo ativo financeiro está relacionado ao valor de um bem ou um direito de posses de um investidor físico ou uma empresa, possibilitando ao usuário a geração de rendimento ou despesa. Consideram-se ativos financeiros, o dinheiro, ações, propriedades imobiliárias, títulos de investimento, dentre outros bens de posse de um usuário. A classificação de um ativo financeiro é feita quanto a sua remuneração e pode apresentar dois seguimentos: os ativos de renda fixa e os ativos de renda variável. Os ativos de renda fixos baseiam-se na aplicação em um investimento com taxas fixas no tempo. Dessa forma, o retorno é previsível. Os ativos de renda fixos mais conhecidos são as poupanças, tesouro nacional e moeda de cambio. Os ativos de renda variável baseiam-se na aplicação em um investimento com taxas que sofrem variações no tempo. Isso implica que o retorno nesses métodos de aplicação não será previsível e esse retorno pode ser positivo ou negativo. Os ativos de renda variável mais conhecidos são as ações e criptomoedas. (Nubank, 2020; Dicionário Financeiro, 2020).

O atrativo em investimento em ativos financeiros é a liquidez com qual eles se comportam, a escolha do tempo de investimento e o risco de investimento. Um ativo financeiro apresenta uma alta liquidez quando esse pode ser convertido em dinheiro com maior facilidade. O tempo de investimento é classificado como curto, médio e longo prazo. O risco de investimento é justamente a probabilidade de tal investimento obter o fracasso. Cada ativo financeiro apresenta as suas características individuais, ou seja, um ativo pode apresentar um risco alto, mas, sua liquidez ser alta, ou um risco baixo, mas, sua liquidez ser baixa. (Dicionário Financeiro, 2020).

Em meio à gama de possibilidades de investimentos que o mercado disponibiliza, construir portfólios de investimento (portfólio) pode ser uma alternativa bem rentável para um investidor. Esse método, introduzido por Harry Markowitz em 1952, fornece uma orientação para selecionar a melhor forma de aplicação de um capital em um conjunto de ativos com o intuito de reduzir os riscos de investimento e aumentar os lucros. A proposta modelada matematicamente por Markowitz sugere que, quão mais diversificada for a natureza dos ativos que compõem a portfólio de investimentos, menor será o risco, dado um retorno fixo e maior será o retorno de investimento, dado uma variabilidade fixa. Isso salienta que a correlação entre os ativos é um fator crucial a ser verificado para a construção de um portfólio de investimento.

"A teoria proposta por Markowitz para a escolha de portfólios de investimento eficientes é um método baseado em média-variância. Assim a abordagem de Markowitz é baseada no retorno-risco de um portfólio, onde a variabilidade da taxa global do retorno é tomada como uma medida do risco e o valor esperado as medidas de rentabilidade (...)" (MARTINS. P.R; VASCONCELLOS. C.A; DA SILVA. P.N, 2014, p. 17, grafos do autor).

Um portfólio de investimentos, como dito, é um conjunto de ativos financeiros. O modelo de portfólios de Markowitz sugere que os ativos que compõem um portfólio de investimentos sejam os mais diversificados possíveis. Contudo, é necessário aplicar uma quantia monetária nos ativos desse portfólio de investimentos. O problema está em como essa quantia monetária vai ser distribuída entre os ativos do portfólio, ou seja, quais são as porções dessa quantia monetária que cada ativo do portfólio deve receber, de tal modo que, o retorno de investimento seja máximo e o risco de investimento seja o mínimo ou vice-versa.

Para esse problema, uma das possíveis soluções é encontrada nas chamadas leis de adaptação do indivíduo ao meio em que vive. A lei do mais forte rege quais indivíduos são mais aptos a sobreviver às mudanças que ocorrem na natureza. Indivíduos que apresentam qualidades de adequação mais aprimoradas irão manter-se vivos, enquanto aqueles que apresentam adequações menos aprimoradas estão fadados ao fracasso, mediante as mudanças que acontecem no ambiente, aos quais, esses indivíduos estão submetidos. No entanto, a capacidade de adaptação ao meio ambiente é um processo evolutivo que passa de geração em geração em uma população. Essa característica natural faz com que as novas espécies geradas, com base nos seus ancestrais, sejam capazes de sobreviver a essas mudanças, sendo essa, a base do processo evolutivo. O conceito desse processo foi proposto por Charles Darwin no ano de 1859.

Os algoritmos genéticos (AG) constituem uma família de algoritmos computacionais de caráter estocásticos que têm como fundamento a teoria evolutiva de Darwin. Apesar de haver trabalhos que utilizam esses algoritmos, John Holland, em 1975, aprimorou a técnica, e tornou-se referência em algoritmos genéticos. A partir de então, essa técnica vem sendo utilizada em inúmeros problemas de aprendizado de máquinas e otimização de problemas.

Nesse contexto, o objetivo à priori de trabalho é aplicar o a programação quadrática e o algoritmo genético para resolução de problemas de atribuição em um portfólio de investimento de interesse e verificar se os resultados obtidos podem ser uma forma melhor de complemento na previdência social.

2. OBJETIVO GERAL

Esse trabalho, os objetivos são compreender os mecanismos que regem os portfólios de investimentos, tal como, a teoria proposta por Markowitz, estudar o algoritmo genético e aplicar a alguns conjuntos de dados referentes a ativos financeiros reais e comparar os resultados com os métodos de resolução de portfólios de investimento tradicional, ao qual, é feito por meio de programação quadrática.

2.1 Objetivos Específicos

Os objetivos para realização do projeto são:

1. Compreender os mecanismos que regem os portfólios de investimento (Modelos de Markowitz);
2. Compreender o algoritmo genético;
3. Implementar o algoritmo genético para solução de portfólios de investimento;
4. Aplicação das técnicas.

3. JUSTIFICATIVA

O trabalho se justifica devido à necessidade que o brasileiro tem de encontrar formas eficazes de aplicação de recursos, a fim de, obter melhores rendimentos diante da vasta quantidade de opções fornecidas pelo mercado financeiro, sendo essa, uma forma de complementar a sua renda.

Existe uma *"[...] aplicabilidade da Teoria Moderna de Portfólio de Harry M. Markowitz, aliada a Pesquisa Operacional, na diversificação de ações em um portfólio de investimento, minimizando risco total do portfólio com um dado retorno esperado."* (SIERVO. J. S. 2017, p. resumo, grafos do autor).

Nesse contexto, torna-se pertinente encontrar alguns conjuntos de dados referentes a ativos financeiros reais que irão compor a portfólio e aplicar a técnica de geração de colunas usando o algoritmo genético, com intuito de encontrar a solução que minimiza o risco de investimento nesses ativos. Quanto à natureza desses dados referentes a ativos financeiros que irão compor a portfólio foram escolhidas cinco empresas que fazem parte do mercado brasileiro.

4. CONCEITOS TEORICOS

4.1. Modelo de Markowitz e fronteira eficiente.

Em termos matemáticos, defini-se retorno aritmético de um ativo entre o lapso de tempo $(t-1)$ até t por meio da expressão:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \tag{1}$$

onde P_t é o valor monetário do ativo no tempo atual e P_{t-1} é o valor monetário do ativo no tempo anterior a um passo (ROUDIER. F, 2007).

Mediante ao fato de que esses ativos sofrem oscilações conforme o caminhar do tempo, considera-se nesse contexto, um conjunto composto por n ativos. Os retornos esperados $r_1, \ldots, r_n$, para qualquer $t = 1, \ldots, T, r_t$ são consideradas variáveis aleatórias.

Dessa forma, calcula-se o retorno de um ativo n no tempo T através da média aritmética desses ativos no tempo, ou seja:

$$E[r_{i,t}] = \sum_{t=1}^{T} \frac{r_{i,t}}{T}. \tag{2}$$

Para fins de simplificação: $E[r_{i,t}] = \mu_i$.

A medida de risco é a variância do retorno do ativo, e pode ser obtido da forma:

$$\sigma^2{}_i = \sum_{t=1}^{T} \frac{(r_{i,t} - \mu_i)^2}{T}. \tag{3}$$

Por sua vez, o desvio padrão do risco é dado por:

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{t=1}^{T} \frac{(r_{i,t} - \mu_i)^2}{T}} \tag{4}$$

O ponto crucial na construção de portfólios é a correlação entre os ativos que compõem a portfólio. Dessa forma, para dois ativos quaisquer, a variância entre os retornos por ser expressa por:

$$\sigma_{i,j} = \sum_{t=1}^{T} \frac{(r_{i,t}-\mu_i)(r_{j,t}-\mu_j)}{T}. \tag{5}$$

A correlação entre os ativos i e j é definido por:

$$\rho_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_{i,}\sigma_{j}} \tag{6}$$

Com base nesses conceitos, supondo uma quantia X, uma parte α_1 será aplicada no retorno esperado do ativo r_1, outra parte α_2 da quantia X, será aplicada no retorno esperado do ativo r_2 e sucessivamente, até preencher a portfólio. Então, os retornos de n ativos em um intervalo de tempo $1\,, \dots, T$

$$\begin{aligned} R_1 &= \alpha_1 r_{1,1} + \alpha_2 r_{2,1} + \cdots + \alpha_n r_{n,1} \\ R_2 &= \alpha_1 r_{1,2} + \alpha_2 r_{2,2} + \cdots + \alpha_n r_{n,2} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ R_P &= \alpha_1 r_{1,T} + \alpha_2 r_{2,T+} \dots + \alpha_n r_{n,T}, \end{aligned} \tag{7}$$

onde α_i é a proporção de investimento no ativo i. Assim, o total esperado do retorno de um portfólio P pode ser escrito como:

$$\mu_P = E[R_P] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E[R_P] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{t=1}^{T} \frac{r_{i,T}}{T} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i, \tag{8}$$

onde $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Esse resultado é obtido devido ao fato das proporções não sofrerem alterações em todos os períodos. (DIAS. C. H, 2008).

Conforme (DIAS. C. H, 2008), a variância para um portfólio P pode ser escrita da forma:

$$\sigma_P{}^2 = \sum_{t=1}^{T} \frac{(R_p - \mu_P)^2}{T} = \sum_{t=1}^{T} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_{i,t} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i\right)^2}{T} = \tag{9}$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (r_{i,t} - \mu_i)\right)^2}{T} =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_{i,t} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j r_{j,t} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_j \mu_j\right)}{T} =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\alpha_i \alpha_j (r_{i,t} - \mu_i)(r_{j,t} - \mu_j)}{T} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \sum_{t=1}^{T} \frac{(r_{i,t} - \mu_i)(r_{j,t} - \mu_j)}{T} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \sigma_{i,j}.$$

Para fins de simplificação e melhor compreensão do modelo, a notação matricial é mais plausível a ser usada. Dessa forma, considerando as mesmas condições anteriores pode-se reescrever o valor esperado e a variância do retorno.

Sejam $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ a matriz coluna com os valores dos pesos e $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, então:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{1} = 1. \tag{10}$$

Sendo, $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$, então:

$$E[R_P] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{E}, \tag{11}$$

sendo essa, a notação matricial para o valor esperado do retorno. (SIERVO. J. S. 2017).

Por sua vez, $\boldsymbol{Q}$ é a matriz de covariância entre os retornos para dada ativos, ou seja, $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} {\sigma_1}^2 & \dots & \sigma_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \dots & {\sigma_n}^2 \end{bmatrix}$.

Assim:

$$Var[R_P] = Var\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i R_P\right) = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{\alpha}. \tag{12}$$

O modelo de Markowitz pode ser traduzido como um problema de otimização quadrática, uma vez que, a matriz $\boldsymbol{Q}$ é positiva semidefinida.

Uma matriz $\boldsymbol{M}$ é não negativa quando, $\boldsymbol{Y^t Q\, Y} \geq 0$, para todo $\boldsymbol{Y^t} = [\boldsymbol{y_1}, \dots, \boldsymbol{y_k}]$. Por sua vez $\boldsymbol{M}$ é denominada positiva quando $\boldsymbol{Y^t M\, Y} > 0$, para qualquer valor de $\boldsymbol{Y} \neq 0$.

Considere o caso onde o investidor almeja maximizar o retorno o modelo matemático pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} max&: \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{E} \\ sujeito\ a\ restrição&: \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{Q\alpha} \leq \sigma \\ &\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \\ &\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{13}$$

A primeira restrição tem por função, estabelecer a aceitação do risco de retorno a um nível máximo de interesse. Já a segunda restrição implica em afirmar que o recurso total disponível será utilizado para compor a portfólio, sem que haja resto. Por fim, a terceira restrição resalva que não será realizado vendas a descoberta, eliminado totalmente a hipótese de resto.

Por outro lado, considerando o caso em que o objetivo do investidor é minimizar o risco, a configuração matemática do modelo pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} min&: \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{Q\alpha} \\ sujeito\ a\ restrição&: \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{E} \geq \phi \\ &\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \\ &\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{14}$$

A primeira restrição tem por função estabelecer um nível mínimo de retorno de interesse aceitável. Já a segunda restrição implica em afirmar que o recurso total disponível será utilizado para compor a portfólio, sem que haja resto. Por fim, a terceira restrição resalva que não são permitidas vendas a descoberto, eliminando totalmente a hipótese de resto.

As condições de interesse são maximizar $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{E}$ sujeito a restrição $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha} \leq \sigma$, ou seja, alcançar o maior retorno possível para um risco igual ou inferior a nível pré-estipulado ou, minimizar $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha}$ sujeito a restrição $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{E} \geq \phi$, ou seja, alcançar o menor risco possível para um retorno igual ou superior a nível pré-estipulado. Dessa forma, há uma equivalência entre a função de interesse e a restrição imposta para esses dois modelos, pois, para maximizar o retorno o risco deve ser o menor possível e para minimizar o risco, o retorno deve ser o maior possível, dentro do nível pré-estipulado. Assim, não seria necessário encontrar valores para $\boldsymbol{\alpha}$ que satisfazem cada condição individualmente. Basta escolher o modelo para retorno máximo ou o modelo para o risco mínimo para obter os valores de $\boldsymbol{\alpha}$.

A condição de interesse discutida no parágrafo anterior enquadra-se no Teorema da Dualidade da programação linear. Nesse contexto, aprofundar as discussões sobre o teorema citado foge dos objetivos primários desse trabalho, mas, tais conceitos podem ser encontrados em (SIERVO. J. S. 2017).

O problema está em como se deve particionar essa quantia X, de tal forma que, o retorno total do portfólio seja máximo ou próximo ao máximo e o risco do investimento seja o mínimo ou próximo ao mínimo, ou seja, encontrar as proporções $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ que compõem a portfólio para que tal fenômeno ocorra. Usualmente, o método utilizado para encontrar as proporções é o método dos multiplicadores de Lagrange, mas, nesse contexto, será utilizada a técnica computacional do AG.

O conceito de portfólio de Markowitz, como dito, é construído com base no método de média-variância. Dessa forma, uma gama de possibilidades de combinar as médias e variâncias em função dos pesos é possível de ocorrer. A busca é encontrar quais os respectivos valores de cada peso para que se obtenha o valor esperado do retorno máximo dado uma variância do retorno fixa ou uma variância do valor do retorno mínimo dado um valor esperado do retorno fixo.

Considerando um portfólio de investimentos com um número pequeno de ativos, a relação entre a média e a variância pode ser visualizada por um gráfico denominando Fronteira Eficiente. Assim, considera-se um exemplo utilizando dois ativos. O par ordenado (μ_P, σ_P), onde o valor esperado é o retorno de investimento e o desvio padrão é o risco de investimento. Suponha que uma quantidade X de recursos foi aplicada entre dois ativos, 1 e 2, com os seguintes pesos para cada ativo: α_1 e α_2 onde, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Os valores esperados de retorno e suas respectivas variâncias são: μ_1 e σ_1 para o investimento 1 e μ_2 e σ_2 para o investimento 2. Fazem-se as seguintes considerações: $\mu_1 < \mu_2$, $\sigma_1 < \sigma_2$, ${\sigma_{1,2}}^2 = 0$, $\sigma_{1,2} = 0$. Assim as combinações possíveis podem ser descritas através de o gráfico a seguir:

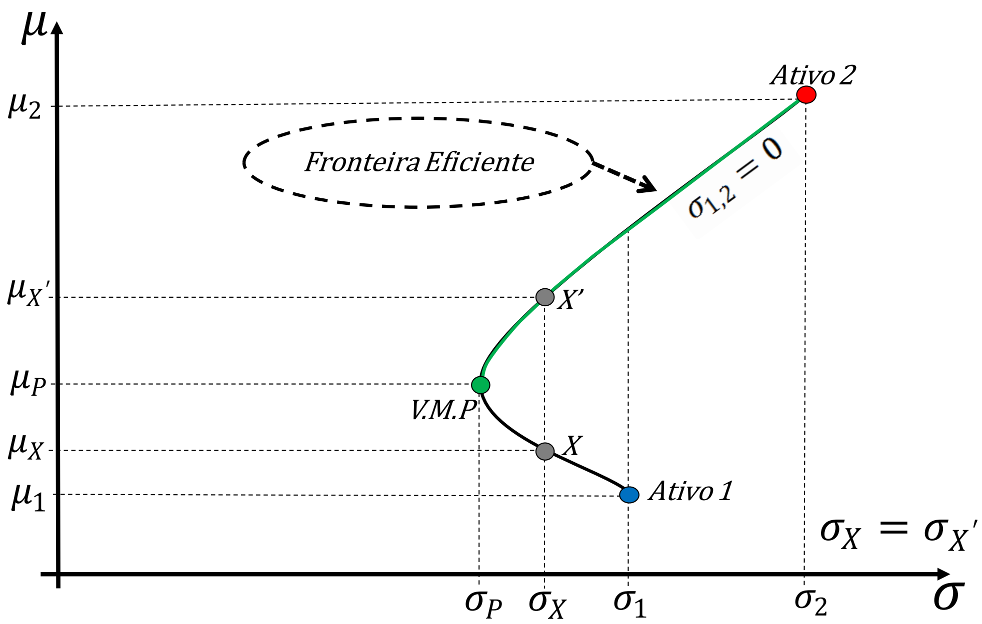


Figura 1: Possíveis combinações dos ativos 1 e 2, que constituem as diferentes portfólios de investimento, e a fronteira eficiente para este portfólio (curva verde).

O gráfico mostra a geometria das possíveis combinações entre os ativos e seu respectivo ponto de variância mínima do portfólio (VMP). Observa-se que a curva entre o ponto que representa o par ordenado risco-retorno para o ativo 1 e o ponto denominado, variância mínima do portfólio (VMP), geram portfólios, as quais, os investimentos aplicados a partir dessa configuração, não apresentam resultados satisfatórios. Esse fenômeno se deve ao fato do ativo 1 apresentar o mesmo risco de investimento para retornos esperados distintos, dentro dessa região. Considerando os pontos X' e X, tem-se que $\mu_{X'} > \mu_X$ para $\sigma_{X'} = \sigma_X$. (SIERVO. J. S. 2017).

Por sua vez, o entorno entre o ponto de variância mínima do portfólio (VMP) e o ponto que representa o par ordenado risco-retorno para o ativo 2, cada risco de investimento é correspondido pelo maior retorno de investimento. Ou seja, as configurações geradas que apresentam essa característica trazem resultados satisfatórios. Assim, definiram-se como portfólio eficiente todas as combinações as quais, a discrepância observada entre o ponto do ativo 1 e variância mínima do portfólio (VMP) não ocorre e ao plotar o conjunto de todas as configurações de combinações possíveis livre de tal discrepância, o gráfico da fronteira eficiente é gerado. "*Um portfólio é dito eficiente quando nenhum outro portfólio oferece maior retorno esperado para o mesmo (ou menor) risco. Da mesma forma, um portfólio é eficiente quando nenhum outro portfólio oferece o menor risco com o mesmo (ou maior) retorno esperado"* (SIERVO. J. S, 2017, pag.83).

Como dito anteriormente, a correlação entre os ativos é um fator crucial na construção de um portfólio de investimentos. O efeito de diversificação está fortemente associado com a correlação entre os ativos. Correlações entre ativos, com valor diferente de um, sofrem desse efeito. Um aspecto importante se dá ao fato de que, o valor do retorno esperado não sofre qualquer influência da correlação entre os ativos, mas, sim, o risco do portfólio. Quão menor for a correlação entre os ativos, maior será a variabilidade do portfólio, tal que, a correlação é uma medida contida dentro do intervalo $[-1,1]$. (SIERVO. J. S. 2017).

Considere o exemplo onde, uma quantidade X de recursos foi aplicada entre dois ativos 1 e 2, e os pesos para cada ativo são iguais, variando assim apenas a correlação entre os ativos. Há cinco situações que podem ocorrer. Se a correlação entre os ativos 1 e 2 for completa, ou seja, $\rho_{1,2} = 1$, a fronteira eficiente é representada através de uma reta, pois não existe para o mesmo retorno esperado um risco inferior em outro portfólio. Assim a variância do portfólio é escrita como uma combinação linear entre a variância de cada ativo. Se a correlação entre os ativos 1 e 2 forem nulas, ou seja, $\rho_{1,2} = 0$, essa curva será a representação da fronteira eficiente de referência, uma vez que, os ativos podem ser considerados independentes entre si. Se a correlação entre os ativos 1 e 2 for inversamente completa, ou seja, $\rho_{1,2} = -1$, o gráfico da fronteira eficiente entre eles são duas retas, com intersecção no eixo do μ_P e com isso, o risco é nulo, ou seja, $\sigma_P = 0$. Com base na curva que representa a fronteira eficiente de referência, se a correlação entre os ativos 1 e 2 estiver contida no intervalo $-1 < \rho_{1,2} < 0$, a fronteira nesse caso posiciona-se a esquerda da fronteira eficiente de referencia. Caso a correlação entre os ativos 1 e 2 estiver contida no intervalo $0 < \rho_{1,2} < 1$, a fronteira nesse caso posiciona-se a direita da fronteira eficiente de referencia. O gráfico a seguir, expressa o comportamento das curvas em relação às correlações entre os ativos. (SIERVO. J. S. 2017).

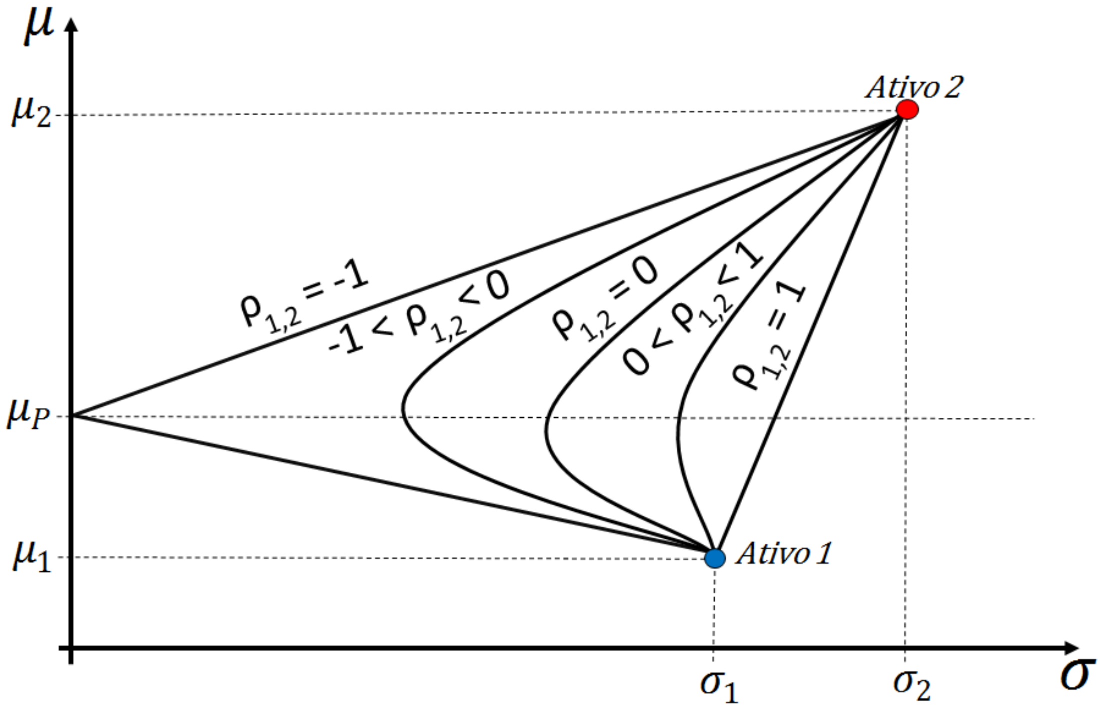


Figura 2: Influencia da correlação entre os ativos A e B no efeito de diversificação no portfólio e na fronteira eficiente.

Os investimentos podem apresentar risco que surgem por meio de fatores internos e fatores externos. Os riscos de investimento causados por fatores internos são fenômenos que ocorrem dentro do fornecedor desses ativos, de modo que, os valores desses ativos podem sofrer oscilações, gerando incertezas na estabilidade desses valores. Quando esse fenômeno ocorre, denomina-se, risco não sistemático ou risco específico. Quando os riscos de investimento ocorrem devido a algum fator global, esses são ditos risco sistemático. (SIERVO. J. S. 2017).

Em um portfólio, quanto maior o número de ativos que o compõem, o risco específico tende a diminuir, uma vez que, os ganhos gerados por um ativo e a perdas geradas por outros ativos, se complementam, devido ao efeito da diversificação. No entanto, o risco sistemático não é afetado pelo efeito da diversificação, pois, como ele ocorre em escala global, todos os ativos acabam sendo afetados. O gráfico a seguir descreve o comportamento entre o risco de investimento e o número de ativos que compõem a portfólio e indica as regiões do risco específico e o risco sistemático. (SIERVO. J. S. 2017).

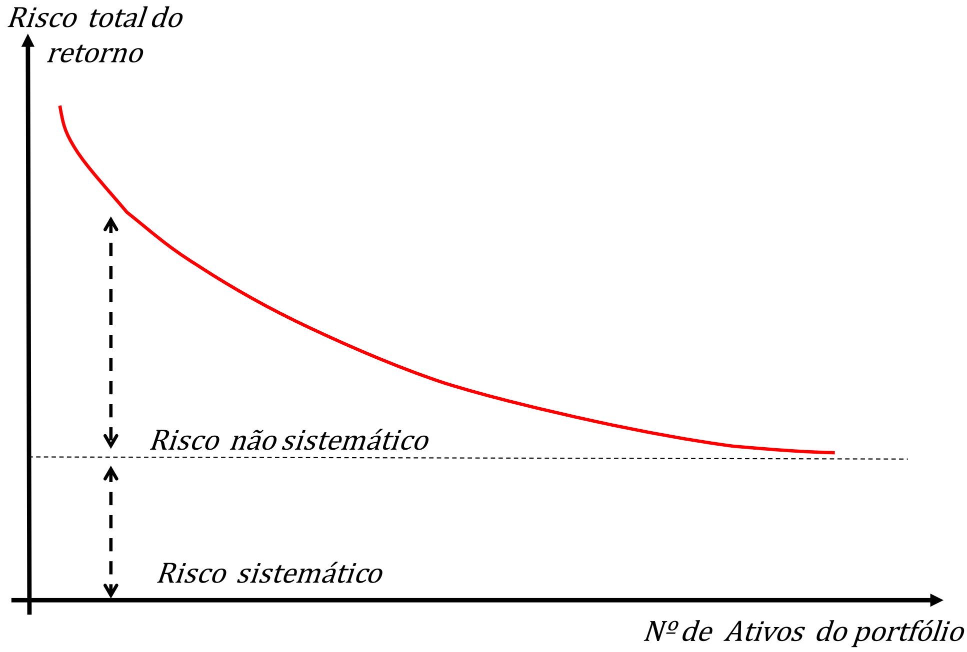


Figura 3: Risco de investimento versus número de ativos e indica as regiões do risco específico e o risco sistemático.

Ao investir em ativos que apresenta $\sigma_{1,2} = -1$ e por consequência, $\sigma_P = 0$, esses investimentos são denominados, portfólio livre de risco (PLR). Graficamente, o comportamento dos portfólios livre de risco é uma reta crescente com o ponto de partida em alguma posição no eixo correspondente ao seu valor esperado, e essa reta é denominada, linha de mercado. Assim, um bom rendimento pode ser obtido ao incorporar um portfólio livre de risco dentro do portfólio de investimentos, fazendo-se assim, uma combinação entre eles. Quanto maior a inclinação da linha de mercado de capitais, melhor são as combinações entre o risco e o retorno esperado para este portfólio de investimentos. (SIERVO. J. S. 2017).

A fronteira eficiente é composta por um conjunto de portfólios eficientes. Assim, ao incorporar o portfólio livre de riscos no portfólio de investimento, o ponto que tangencia a fronteira eficiente e a linha de mercado é a definição de portfólio tangente ou portfólio eficiente, pois, esse ponto fornece a combinação entre o portfólio livre de riscos e a portfólio de investimento. O gráfico a seguir, ilustra esse fenômeno.

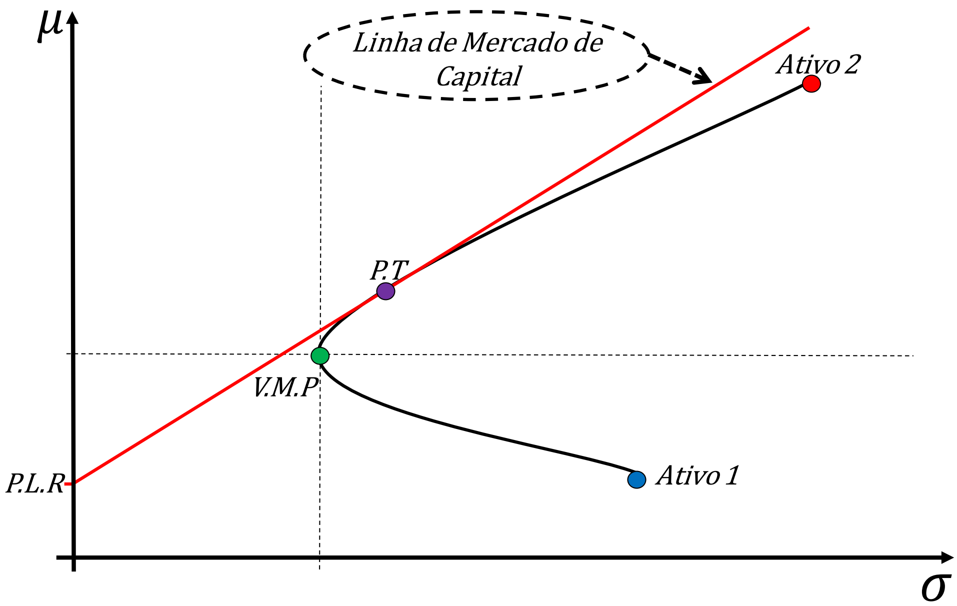


Figura 4: Linha de mercado de capitais e portfólio de mercado.

O efeito da diversificação faz com que do risco específico seja o menor dado à quantidade de ativos que compõem a portfólio de investimentos. No entanto, uma forma encontrada para reduzir o risco sistemático é, juntamente, incorporar à portfólio um portfólio livre de risco, pois, o fato desse tipo de portfólio não sofrer influências externas em sua variabilidade, a portfólio de investimento mostra-se mais estável. (SIERVO. J. S. 2017).

4.2. Algoritmo Genético.

Segundo Dias, *"Em termos de otimização, cada indivíduo da população é uma solução codificada, composta por um conjunto de genes, a que chamamos de cromossomo. Assim, cada cromossomo representa uma possível solução para um dado problema"* (DIAS. C. H. 2008, pag. 22). Os cromossomos são usualmente codificados em termos binários, ao qual, zero representa à ausência da característica de interesse e um a presença de tal característica. A função de avaliação é a chave para verificar se um indivíduo está apto a ser selecionado para a reprodução (na literatura emprega-se o termo *crossover* ou cruzamento). Dessa forma, seleciona-se dois cromossomos (denominados pais) e combina seus genes, gerando um filho. Uma proporção do cromossomo de cada indivíduo selecionado está presente nos novos seres formados. O cromossomo também pode apresentar alterações por meio do fator mutação. A mutação ocorre quando os genes (*bits*) de um cromossomo do indivíduo são modificados aleatoriamente. Tanto a recombinação quanto a mutação são denominados operadores genéticos.

Ao combinar os pais e aplicar os operadores genéticos, uma nova população é obtida e os ancestrais utilizados para criar essa nova população são descartados. Assim, se a nova população satisfizer os critérios de interesse, o processo é encerrado. Se tal população não satisfizer tais critérios, o processo é retomado selecionando dois novos pais e a metodologia é repetida.

O processo básico para construir um algoritmo genético é expresso pelo esquema a seguir, conforme (FERREIRA. A. O, 2012, pag. 42):

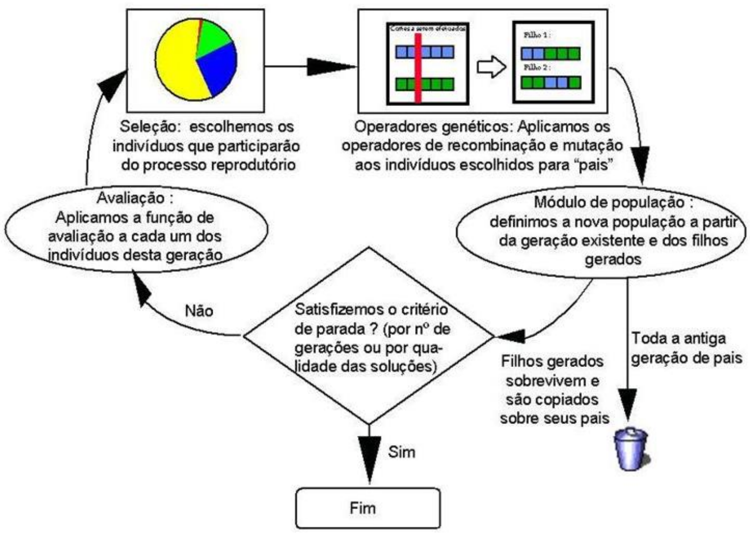


Figura 5: Esquema de construção do Algoritmo Genético (Autor: Ferreira, grifos do autor)

A seleção dos indivíduos de uma população para cumprir o papel de pai leva em consideração a aptidão os quais, todos os indivíduos que compõem a população apresentam. Alguns métodos que podem ser aplicados para a seleção dos indivíduos da população.

1) O método de Seleção por Torneio consiste em selecionar aleatoriamente uma amostra de tamanho maior ou igual a dois dessa população de indivíduos. Aqueles indivíduos que apresentam melhor aptidão são escolhidos enquanto, os menos aptos são descartados. O processo é concluído quando a quantidade de torneio realizado for igual ao tamanho da população (NEÍA. S. S; ARTERO. O. A; CANTÃO. L. A. P; CUNHA. A. B, 2013).

2) Baseando-se em um valor de L contido entre o intervalo [0,1], a seleção é feita entre os L melhores indivíduos dando a eles a mesma probabilidade de serem escolhidos. Por exemplo, se L= 0.3, então a seleção é feita entre os 30 % melhores indivíduos e os outros 70 % são descartados. (NEÍA. S. S; ARTERO. O. A; CANTÃO. L. A. P; CUNHA. A. B, 2013).

3) O método de Seleção por Roleta é feito em três passos. O primeiro passo consiste em calcular os possíveis valores que representam a aptidão de todos os indivíduos que compõem a população de interesse. O segundo passo é dividir os valores calculados da aptidão de cada individuo em suas devidas proporções. Os mais aptos terão as maiores proporções. O terceiro passo é relacionar cada valor proporcional da aptidão dos indivíduos com a sua respectiva área em roleta. Os indivíduos mais aptos apresentarão uma área na roleta maior, ao qual, essa área indica o tamanho proporcional da aptidão do individuo. Ao girar a roleta a área equivalente ao individuo com o maior valor da proporção de sua aptidão terá mais chances de ser selecionado. A Figura a seguir ilustra o processamento.

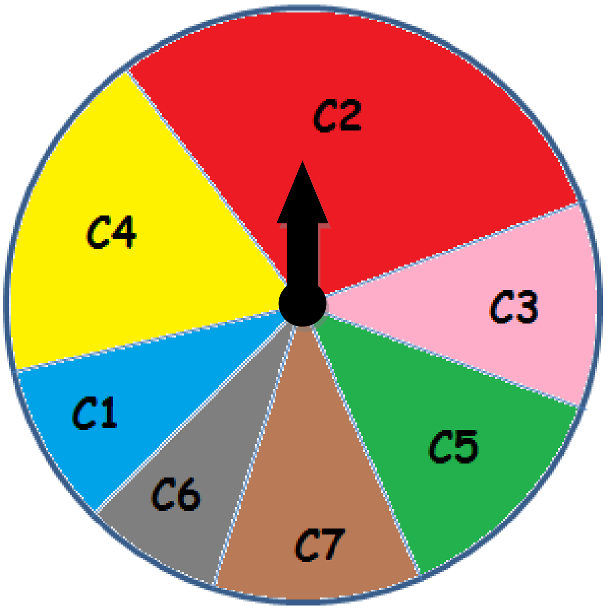


Figura 6: Seleção por roleta.

Observa-se que o cromossomo C2 apresenta a maior faixa, seguido dos cromossomos C4 e C5, ou seja, a chance deles serem selecionados é maior que os demais. Isso não implica que outros cromossomos que compõem a população, não possam ser selecionados (NEÍA. S. S; ARTERO. O. A; CANTÃO. L. A. P; CUNHA. A. B, 2013).

4) O método de seleção por *ranking* linear consiste em ordenar todos os candidatos, após calcular suas aptidões. Ordena-se do candidato que apresenta a menor aptidão $rank_N = 1$ até o candidato com a melhor aptidão $rank_1 = N$, onde a quantidade de candidatos é de $1, \dots, N$. O quociente entre a posição do candidato no ranking e a soma de todas as posições determina a probabilidade do candidato ser selecionado. Dessa forma, o candidato que tem a melhor aptidão, a probabilidade de ele ser selecionado é $\frac{N}{\sum_{i=1}^{N} rank_i}$, enquanto o candidato com a pior aptidão a sua probabilidade de ser selecionado é $\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} rank_i}$. Para os demais candidatos, a probabilidade de eles serem selecionados é $\frac{rank_i}{\sum_{i=1}^{N} rank_i}$ (NEÍA. S. S; ARTERO. O. A; CANTÃO. L. A. P; CUNHA. A. B, 2013).

5) O método de Seleção por Amostragem Universal Estocástica é semelhante ao método de seleção por roleta. Esse método consiste em uma população com N indivíduos cada um com sua respectiva probabilidade de ser selecionado, dados os cálculos proporcionais de suas respectivas aptidões. Um número igualmente de setas N, espaçadas igualmente, é acoplada sobre a roleta. Ao girar uma única vez a roleta, as setas indicaram os indivíduos a serem selecionados. A Figura a seguir ilustra o processamento.

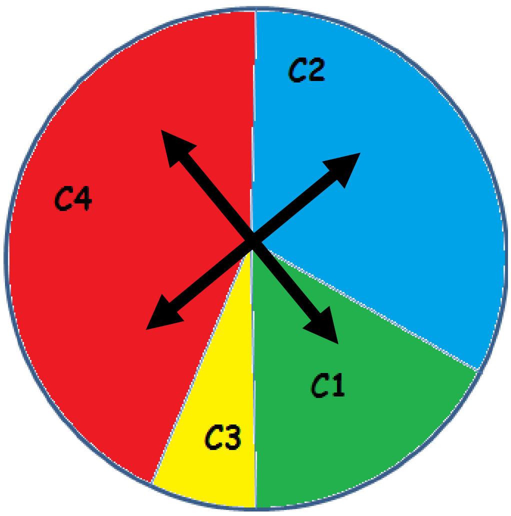


Figura 7: Amostragem universal estocástica.

Observa-se que ao girar a roleta, os cromossomos C1, C2 e C4 foram selecionados (NEÍA. S. S; ARTERO. O. A; CANTÃO. L. A. P; CUNHA. A. B, 2013).

Após a seleção dos indivíduos mais aptos o seguinte passo é criar um novo conjunto de indivíduos. Existem dois métodos que são aplicados na geração de novos indivíduos: o cruzamento (crossing-over) e a mutação.

O cruzamento (crossing-over) é o processo da geração de filhos, a partir de dois pais ao quais as partes dos genes que irão compor os filhos gerados são escolhidas partindo de um ponto de corte gerado aleatoriamente. Supondo que o ponto de corte foi sorteado aleatoriamente entre a quarta e a quinta posição. A Figura a seguir exprime como é aplicada a técnica.

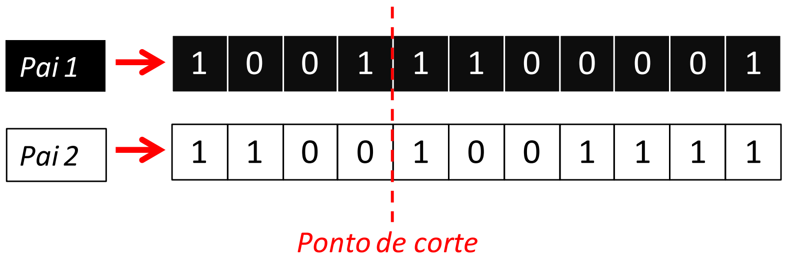


Figura 8: Cruzamento em um único ponto selecionado aleatoriamente.

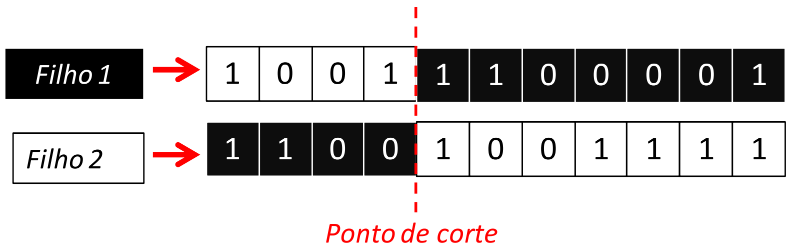


Figura 9: Resultado do cruzamento.

Há casos que seleciona-se aleatoriamente dois pontos de corte e o cruzamento é feito. No entanto, um método de cruzamento muito empregado é o cruzamento uniforme. *"Nesse tipo de crossover, para cada gene no cromossomo do filho é decidido (segundo uma probabilidade p) qual pai vai contribuir com seu respectivo gene para aquela posição."* (FILHO. F. O. M. M, 2005, pag. 12). A Figura a seguir exprime como é aplicada a técnica, considerando uma chance de contribuição ser obtida tanto do primeiro pai quanto do segundo pai a 50%, ou seja, $probabilidade\ de\ seleção = 0{,}5$.

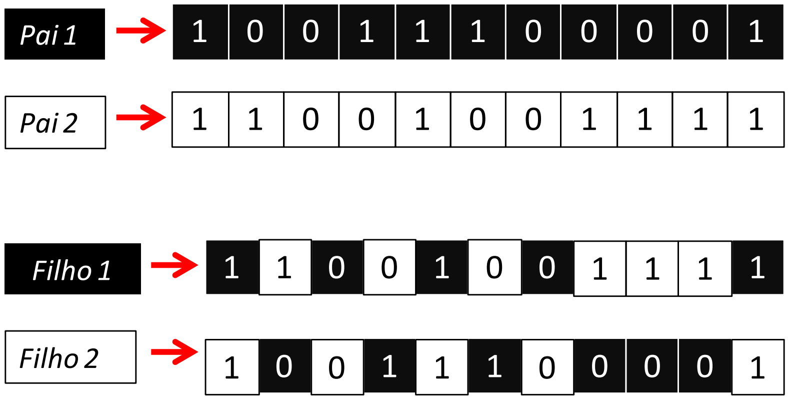


Figura 10: Cruzamento uniforme com $p = 0{,}5$.

A vantagem dessa forma de cruzamento em relação à técnica anterior é o fato dos genes mudarem de posição e não o bloco que os contêm. A combinação independe da posição relativa nos cromossomos dos pais, aos quais, os genes permaneciam alocados anteriormente. Como a ordem dos genes nos cromossomos nesse método é irrelevante, já que, o método opera em cada gene individualmente, a exploração do espaço de busca é aprimorada. *"Porém, não podemos generalizar essa afirmação. Não há nenhum operador de crossover que apresente um desempenho superior aos demais para todos os problemas. Uma abordagem sistemática para definição prévia do melhor operador de crossover para cada caso ainda representa um desafio para os pesquisadores que atuam em computação evolutiva."* (FILHO. F. O. M. M, 2005, pag. 12).

Outro método é o cruzamento aritmético. Dados dois pais selecionados para efetuar o cruzamento, representados por, Pai_1 e Pai_2. Os filhos serão gerados com base na combinação linear dos genes dos pais pela seguinte relação:

$$\begin{aligned} Filhos_1 &= \rho.Pai_1 + (1-\rho).Pai_2 \\ Filhos_2 &= \rho.Pai_2 + (1-\rho).Pai_1, \end{aligned} \qquad (15)$$

onde, ρ é um valor aleatório com $0 \leq \rho \leq 1$.

A mutação é um operador que altera um ou mais genes aleatoriamente. Suponha que um gene dentre os demais que compõem um cromossomo é escolhido ao acaso. Se esse gene apresenta valor igual a um, esse valor é substituído por um valor igual a zero e vice versa. Tecnicamente, esse operador cria uma leve perturbação na população, gerando um aumento extra sua variabilidade.

A mutação Gaussiana é um operador de mutação mais popular. Supondo um cromossomo descrito da seguinte forma: $Cromossomo = \{Gene_1, Gene_2, \ldots, Gene_k\}$. Então, o operador gaussiano altera os genes que compõem cromossomo por meio da expressão:

$$Gene'_N = Gene_N + N(0, \sigma), \tag{16}$$

com $1 \leq N \leq k$,onde $N(0, \sigma)$ é a distribuição normal com média igual a zero e desvio padrão constante.

A mutação Uniforme também é um operador bastante popular. Supondo um $Cromossomo = \{Gene_1, Gene_2, \ldots, Gene_k, \ldots, Gene_N\}$. Então, sorteia-se uma posição aleatória $1 \leq N \leq k$ e sucessivamente altera-se o valor desse gene na posição sorteada. O novo cromossomo apresentara a seguinte configuração: $Cromossomo' = \{Gene_1, Gene_2, \ldots, Gene'_N, \ldots, Gene_k\}$, onde o $Gene'_N$ terá um valor aleatório com distribuição de probabilidade uniforme, no intervalo $[minGene_N, maxGene_N]$ onde $minGene_N$ e $maxGene_N$ são, respectivamente, os limites inferior e superior do gene na posição k. Quando se há problemas de otimização, um operador de mutação muito eficiente é o operador não-uniforme. *"A mutação não-uniforme é um operador dinâmico, destinado a melhorar a sintonia fina ao longo do processo evolutivo".* (FILHO. F. O. M. M, 2005, pag. 13). Supondo um $Comossomo = \{Gene_1, Gene_2, \ldots, Gene_k, \ldots, Gene_N\}$ na geração t.

O novo cromossomo apresentara a seguinte configuração: $Cromossomo' = \{Gene_1, Gene_2, \ldots, Gene'_k, \ldots, Gene_N\}$, onde:

$$Gene'_k = \begin{cases} Gene_k + \Delta(t, maxGene_k - Gene_k) \\ Gene_k - \Delta(t, Gene_k - minGene_k) \end{cases} \begin{matrix} com\ 0{,}5\ de\ probabilidade \\ com\ 0{,}5\ de\ probabilidade \end{matrix} \tag{17}$$

O valor que a função $\Delta(t, y)$ retorna está contido no intervalo $[0, y]$. Conforme t cresce, a probabilidade de $\Delta(t, y)$ tende a zero. Ou seja, o espaço de busca nas gerações iniciais é mais amplamente explorado quanto t é pequeno e o espaço de busca nas gerações iniciais é mais localmente explorado quanto t é grande.

Para um valor aleatório tal que, $0 \leq r \leq 1$, a função $\Delta(t, y)$ é proposta por meio da expressão:

$$\Delta(t,y) = y.(1 - r^{(1-\frac{t}{T})^b}), \tag{18}$$

onde b é o grau de não uniformidade, T é o número total de gerações e t é o numero da geração corrente.

Segundo Pacheco, "*a avaliação é o elo entre o GA e o mundo externo. A avaliação é feita através de uma função que melhor representa o problema e tem por objetivo fornecer uma medida de aptidão de cada indivíduo na população corrente, que irá dirigir o processo de busca. A função de avaliação é para um GA o que o meio ambiente é para seres humanos. Funções de avaliação são específicas de cada problema*" (PACHECO. M .A.C, 1999, pag 3).

A seleção dos novos indivíduos após aplicar os operadores de cruzamento e mutação é feita com auxilio de uma função de avaliação. Aqueles que apresentam um valor significante obtido por meio da função de avaliação são selecionados. Já os indivíduos que apresentam um valor irrelevante através da aplicação da função de avaliação são descartados.

Assim, se o objetivo para a aplicação do algoritmo for atingido, o processo é encerrado. Caso ao contrario, repete-se o procedimento utilizando os novos indivíduos obtidos no procedimento anterior.

O passo a passo para construir um algoritmo genético padrão é expresso a seguir:

Algoritmo 1 (Algoritmo Genético padrão).

1. Gerar uma população inicial.

2. Calcular a aptidão dos indivíduos da população inicial.

3. Repetir:

3.1. Selecionar pais da população para Crossover.

3.2. Realizar o Crossover.

3.3. Realizar Mutação na população.

3.4. Calcular a aptidão dos filhos e dos indivíduos que passaram pela mutação.

3.5. Selecionar os membros da população que formarão a próxima geração.

4. até atingir o número máximo de iterações.

4.3. Modelo de Índice de Sharpe

Proposto por Willian F Sharpe em 1964, essa medida é definida pela razão entre o retono do portfólio pelo risco do portfólio. Em termos matemáticos, a definição do renomeado Índice Sharpe é dada por:

$$Sharpe = \frac{\mu_P - \mu_f}{\sigma_P}, \tag{18}$$

onde, μ_P é o retorno do portfólio, σ_P é o risco do portfólio e μ_f é retorno do portfólio livre de risco.

Se o Índice Sharpe apresentar valores altos, implica que um bom rendimento foi alcançado com pequenos riscos. Caso o Índice Sharpe apresentar valores baixos, implica que um bom rendimento foi alcançado com grandes riscos.

Outro fator importante que o Índice Sharpe mede é a quantidade de retorno adicional para um portfólio dado cada risco adicional, comparado com portfólio livre de risco, uma vez que, a risco desse tipo de portfólio é nulo, ou seja, $\sigma_f = 0$ (FAHRIA. I; KUSTIAWAN, E; 2021; (SILVA. B. A. O, NOGUEIRA. S. G, RIBEIRO.K. C. S;2015).

Usualmente, quando se trata de investimentos no mercado brasileiro, o portfólio livre de risco é a taxa Selic ou taxa de uma poupança.

O modelo do Índice Sharpe é uma simplificação do modelo média-variância de Markowitz. O procedimento para a construção do algoritmo usando o Índice Sharpe é a mesmo utilizado para o modelo padrão. No entanto, o critério que mede a aptidão do individuo é medido por meio da expressão:

$$\begin{aligned} Aptidão &= (-1)Sharpe + \\ &+100\left[\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)^2 + \sum_{i=1}^{n}(max(0,\alpha_i - 1))^2 + \sum_{i=1}^{n}(max(0,-\alpha_i))^2\right], \end{aligned} \tag{19}$$

onde, $100[\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)^2 + \sum_{i=1}^{n}(max(0,\alpha_i - 1))^2 + \sum_{i=1}^{n}(max(0,-\alpha_i))^2]$ é a dita, função de Penalidade.

A função de Penalidade tem por objetivo, garantir que a restrição em que o peso dos ativos deve ser vendas positivas e a descoberto não são permitidas. Como resultado, um portfólio com uma variância mínima global será obtido, ou seja, o portfólio com o menor risco. Quanto maior o valor da função de penalidade, maior o mínimo global do portfólio de variância. Para atingir o nível de variância mínima global, a função de penalidade é multiplicada por cem para aumentar o processo de otimização. Já que o objetivo da otimização é maximizar o valor do índice Sharpe, mas a função de penalidade funciona apenas para minimizar funções, o índice de Sharpe é multiplicado por menos um (FAHRIA. I; KUSTIAWAN, E; 2021).

5. METODOLOGIA

Os conjuntos de ativos financeiros escolhidos foram: ABEV3 (ação referente a Ambev cervejas), PETR4 (ação referente Petrobrás), BAAS3 (ação referente ao Banco do Brasil), VALE3 (ação referente a Vale do Rio Doce) e WEGE3 (ação referente ao WEG). Foram coletados os valores referentes ao preço ajustado diário de cada um desses ativos no período de Janeiro de 2015 até Dezembro de 2020.

O cálculo do retorno e de investimento foi efetuado para cada ativo escolhido, pois, o portfólio de investimento parte dessa definição. Uma análise exploratória foi realizada, com o intuído de verificar o comportamento desses retornos. Tendo feito isso, a portfólio foi construído e com base no conceito de média-variância de portfólios.

O método de programação quadrática (PQ) e algoritmo genético (AG) foi implementado ao modelo com o intuito de encontrar qual é a melhor proporção de uma quantia monetária que o investidor que possa distribuir entre cada ativo que compõe seu portfólio, de modo que, o menor risco de investimento ou o maior retorno de investimento seja atingido.

Para comprar o desempenho do método de programação quadrática com o algoritmo genético será feita de duas formas. A primeira forma é através do Índice Sharpe de cada portfólio. A segunda forma, uma nova coleta de valores referentes ao preço ajustado diário de cada um desses ativos durante o período do 1 de Janeiro de 2021 até 31 de Janeiro de 2021 será realizada e o erro quadrado médio (EQM) será calculado para os valores estimados de cada portfólio.

Todo o processo, desde a obtenção dos dados, análise descritiva, até aplicação do AG, nos dados de interesse será realizada com auxílio do software RStudio.

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

6.1 Programação Quadrática

Os resultados aqui apresentados considera o caso de um investidor que deseja investir em um portfólio. Supondo que ele escolha investir nas empresas citadas sem qualquer conhecimento de mercado, isso é, pelo fato dele conhecer tais empresas pela fama que possuem. Os dados aqui analisados são valores de mercado reais que ocorreram no período de 2015 a 2020 coletados diariamente. E um fator importante é que tal investidor decidiu construir seu portfólio em Janeiro ano 2021 e não está sendo considerada venda a descoberto.

Em um primeiro momento, a média, variância e desvio padrão dos retornos para os ativos que irão compor o portfólio foram calculados. Essas medidas são habitualmente expressas em porcentagem para fins de simplificação.

	AMBEV	PETRA	BAAS	VALE	WEG
μ_i	0,014%	0,079%	0,058%	0,109%	0,132%
${\sigma^2}_i$	0,031%	0,116%	0,089%	0,100%	0,049%
σ_i	1,750%	3,403%	2,989%	3,156%	2,210%

Tabela 1: Percentual dos valores das médias, variâncias e desvio padrão dos retornos dos ativos no período de 2015-2020.

Observa-se que o ativo referente a WEG, dentre os ativos que irão compor o portfólio, apresentou um retorno médio durante esse período de 0,132% a um risco de 2,210%, sendo esse, o maior retorno dentre eles. O ativo referente a AmBev apresentou um retorno médio 0,014%, sendo esse o retorno mais baixo dentre os ativos em questão. No entanto, a AmBev ofereceu o menor risco de investimento, sendo ele, 1,750%. O interessante é que o ativo referente à Petrobrás apresentou um retorno médio de 0,079%, o segundo menor dentre os ativos (perdendo apenas para o Banco do Brasil) e um risco de 3,403%, ou seja, um investimento com retorno baixo e um risco alto.

Sucessivamente, a matriz de covariância dos retornos para os ativos que irão compor o portfólio foram calculados e o correlograma construído, conforme a tabela e a Figura a seguir.

	AMBEV	PETRA	BAAS	VALE	WEG
AMBEV	0,031%	0,023%	0,022%	0,015%	0,016%
PETRA		0,116%	0,067%	0,053%	0,028%
BAAS			0,089%	0,036%	0,024%
VALE				0,100%	0,017%
WEG					0,049%

Tabela 2: Percentual dos valores covariância dos retornos dos ativos no período de 2015-2020.

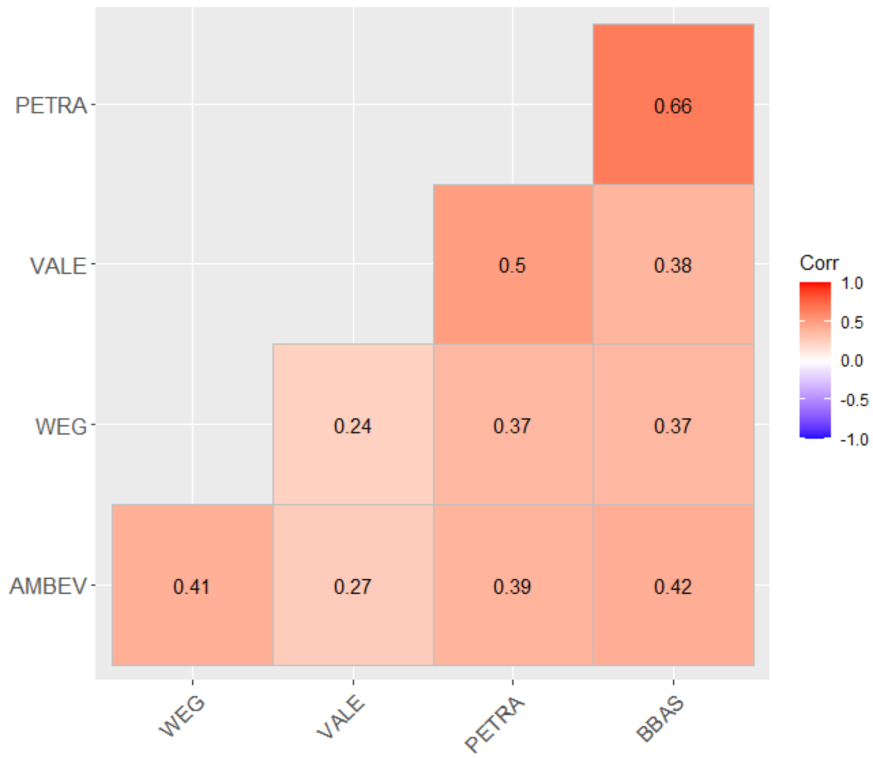


Figura 11: Correlograma dos retornos dos ativos no período de 2015-2020.

Observa-se que a maior correlação é entre a empresa Petrobrás e o Banco do Brasil, com um valor de 0,66. Isso pode se relacionar ao fato de que tanto esse banco quanto essa empresa é de cunho governamental. No entanto, a menor correlação é entre a empresa WEG e a empresa Vale do Rio Doce com um valor de 0,24. Isso pode ser suposto pelo fato de uma empresa ser voltada para o mercado de tecnologia e a outra empresa ser voltada para o mercado de mineração.

A relação retorno-risco entre os ativos que irão compor portfólio pode ser obsevada através da Figura abaixo.

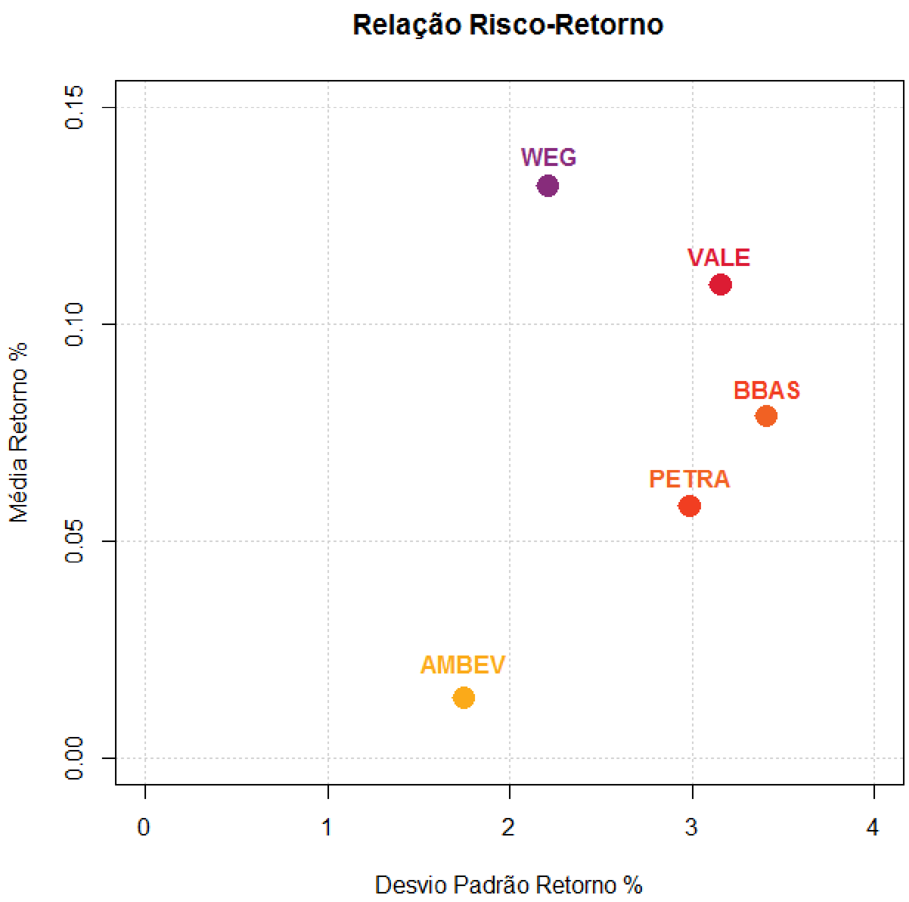


Figura 12: Relação Risco - Retorno para os ativos.

Considerando um ativo livre de risco, tal que, $\mu_f = 2\%$ (o valor da taxa Selic em 2020) ao ano, isso implica que, como o total de dias úteis desse ano foi de 251 dias, então o valor do ativo livre de risco é $\mu_f = \frac{2}{251} = 0{,}00797\%$ por dia. Assim, a tabela a seguir exprime os valores do Índice Sharpe (SR) de cada ativo que irá pertencer ao portfólio.

	AmBev	PETRA	BAAS	VALE	WEG
SR_i	0,00345	0,02087	0,01674	0,03201	0,05612

Tabela 3: Índice Sharpe dos ativos do portfólio.

O Índice Sharpe do ativo pertencente a empresa WEG é o maior dentre os ativos com 5,60 e logo em seguida, o ativo pertencente a empresa Vale do Rio do Doce com 3,20. Isso indica que a WEG é a empresa que traz melhores retornos de investimento em relação ao seu risco. A empresa AmBev apresentou um Índice Sharpe com 0,35, o menor Índice Sharpe do portfólio, o seja, a retorno em relação ao risco não é tão satisfatório.

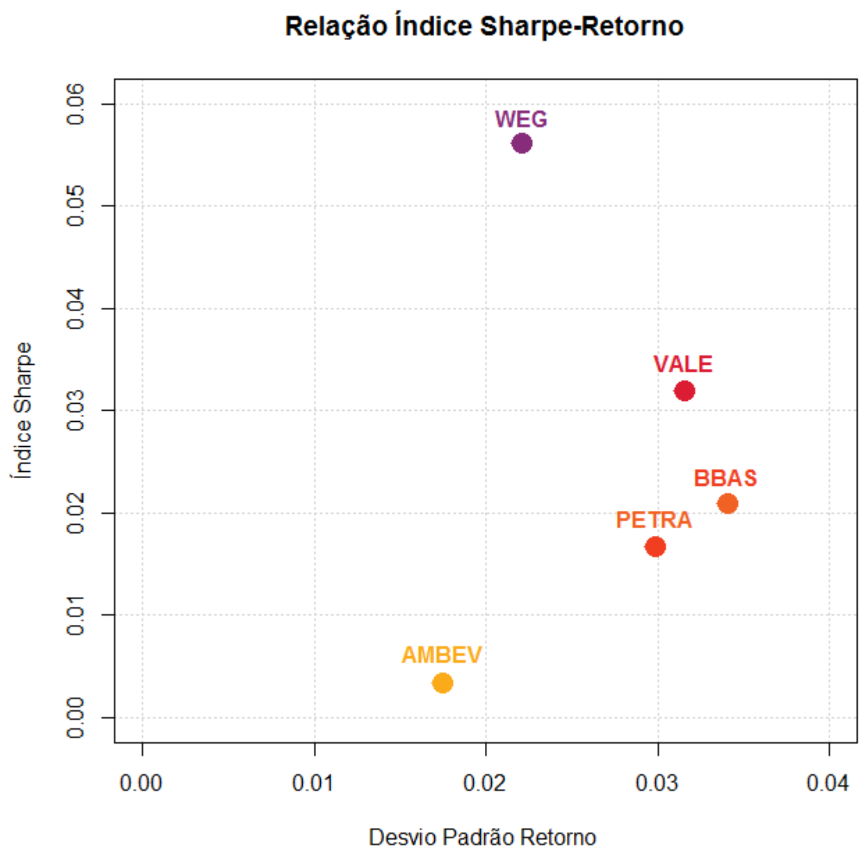


Figura 13: Relação Índice Sharpe - Retorno para os ativos.

Após a realização da análise descritiva dos retornos dos ativos que compõe o portfólio, o próximo passo foi encontrar as devidas proporções a serem investidas nos ativos que compõe o portfólio utilizando programação quadrática.

Com base na programação quadrática a fronteira eficiente foi construída conforme a Figura a seguir.

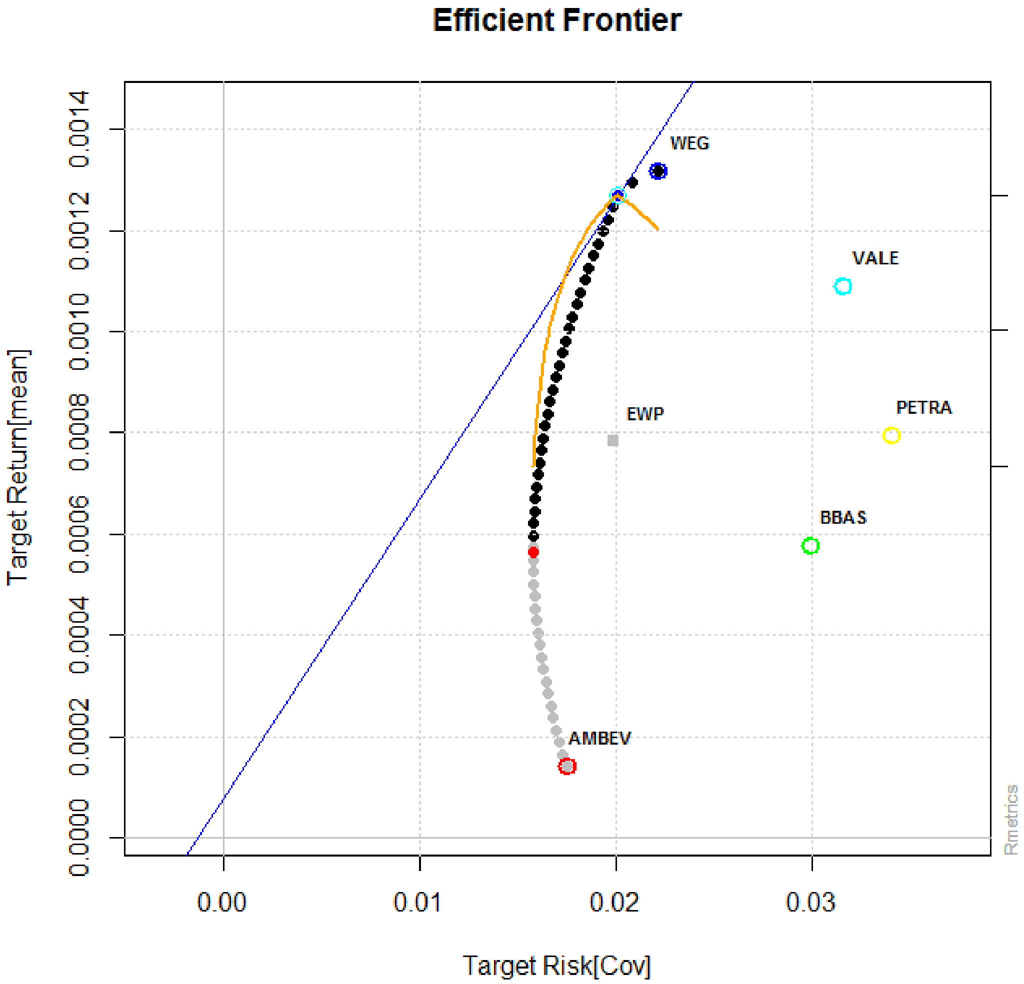


Figura 14: Fronteira Eficiente para os ativos do portfólio.

O ponto completamente preenchido em vermelho representa a VMP gerado pela combinação dos ativos que irão compor o portfólio. A linha dourada é a representação do Índice Sharpe e a linha em azul é o PLR. O ponto onde a Fronteira Eficiente, o Índice Sharpe e o PLR se cruzam é o PT.

Suponha que o investidor deseja construir um portfólio, ao qual, a sua configuração traz o menor risco de investimento, então, o investimento entre os ativos deve ser dividido em proporções, a fim de obter VMP.

Para esse conjunto de ativos, a proporção de investimento para a VMP foi calculada conforme a tabela abaixo.

	AmBev	PETRA	BAAS	VALE	WEG	Total
α_i	0,6106	0,0000	0,0132	0,1101	0,2661	1

Tabela 3: Proporção do valor investido nos ativos do portfólio para risco mínimo via programação quadrática.

A tabela mostra que a proporção de investimento ideal para construir um portfólio com o menor risco seria investir 61,06% em ativos da empresa AmBev, 0,00% em ativos da empresa Petrobrás, 1,32% em ativos do Banco do Brasil, 11,01% em ativos da empresa Vale do Rio Doce e 26,61% em ativos da WEG. Com auxilio de um gráfico de barra é possível visualizar a proporção do investimento entre os ativos que formarão o portfólio.

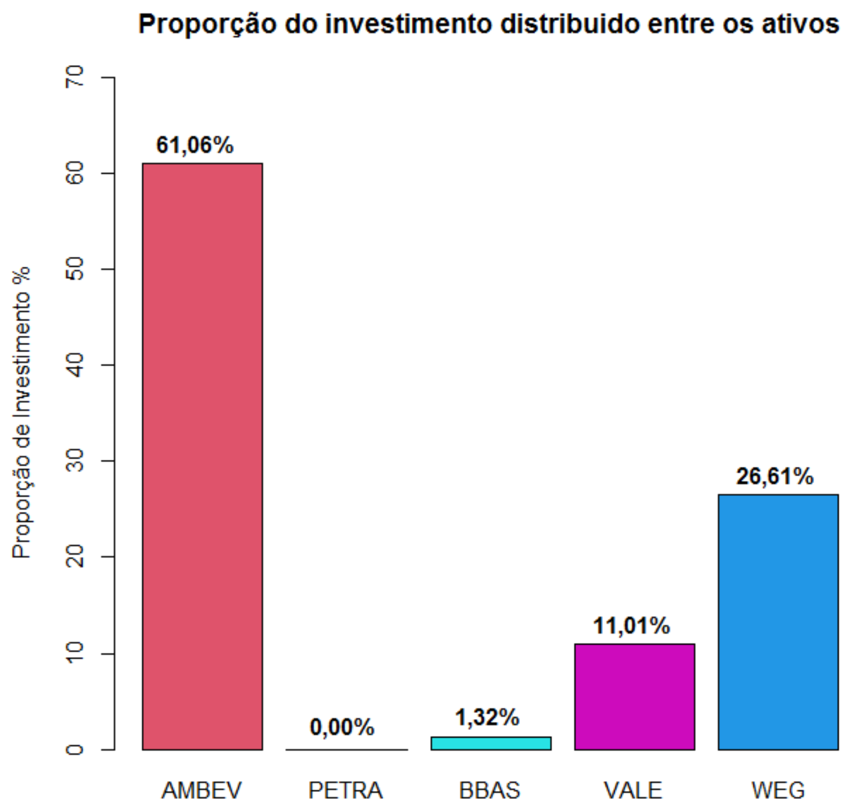


Figura 15: Proporção do investimento distribuído entre os ativos do MVP via programação quadrática.

.

Nota-se que a soma de todas as proporções é um, o que elimina venda a descoberto e garante que o valor de investimento foi utilizado por completo. Ainda, o VMP com essa configuração, fornece um retorno médio estimado de $\mu_P = 0{,}056\%$, um risco de investimento de $\sigma_P = 2{,}314\%$ e um Índice Sharpe do portfólio de $SR_P = 0{,}021$.

A relação retorno-risco entre os ativos mais o VMP pode ser obsevada através da Figura a seguir.

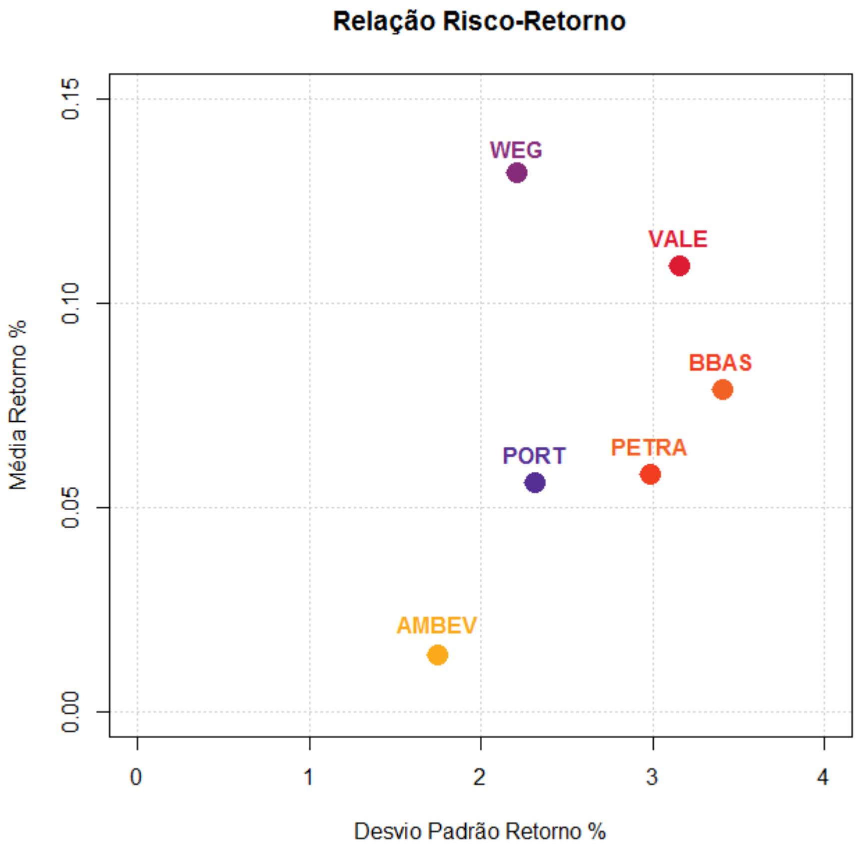


Figura 16: Relação Risco - Retorno dos ativos e do portfólio para o VMP via programação quadrática.

Ao comparar a relação risco-retorno do portfólio com os ativos individuais, percebe-se que o portfólio apresenta um risco não muito elevado, porém, um retorno razoável. De fato, se o investidor aplicasse todos seus fundos na empresa VALE, o retorno seria maior, mas o risco também aumentaria. Se o investidor aplicasse todos seus fundos na empresa AMBEV, seu retorno seria mínimo, mas, seu risco também diminuiria. O portfólio de certa forma equilibra essa relação risco-retorno entre os ativos, levando em consideração obter uma variabilidade mínima.

Agora, supondo que o investidor deseja construir um portfólio, ao qual, a sua configuração traz maior retorno de investimento, então, o investimento entre os ativos deve ser dividido em proporções, a fim de obter PT.

Para esse conjunto de ativos, a proporção de investimento para a PT foi calculada conforme a tabela abaixo.

	AmBev	PETRA	BAAS	VALE	WEG	Total
α_i	0,0000	0,0000	0,0000	0,2127	0,7873	1

Tabela 4: Proporção do valor investido nos ativos do portfólio para retorno máximo via programação quadrática.

A tabela mostra que a proporção de investimento ideal para construir um portfólio com maior retorno seria investir apenas 21,27% em ativos da empresa Vale do Rio Doce e 78,73% em ativos da WEG. Com auxilio de um gráfico de barra é possível visualizar a proporção do investimento entre os ativos que formarão o portfólio.

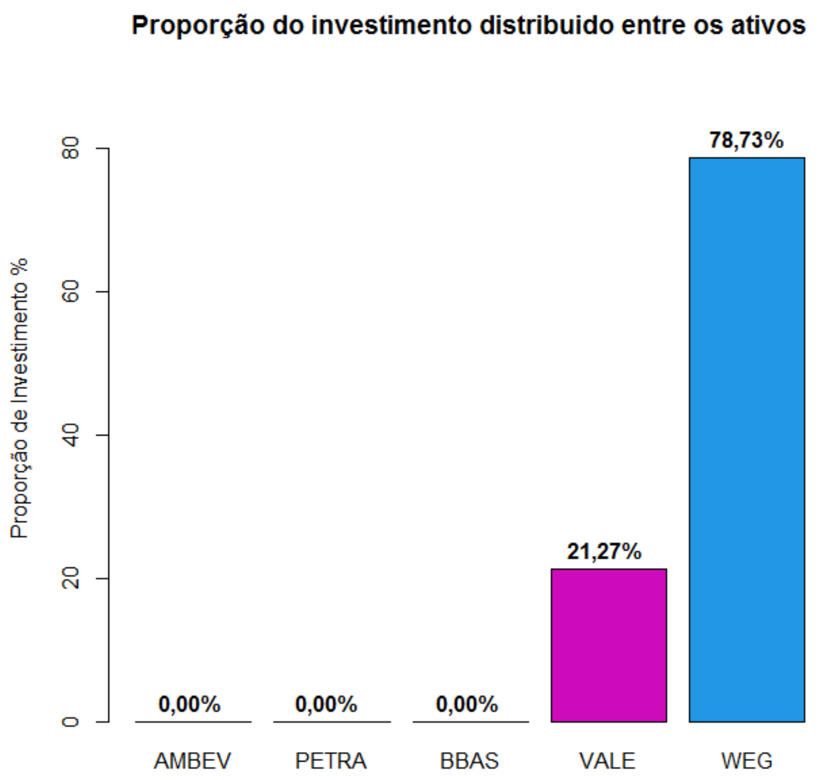


Figura 17: Proporção do investimento distribuído entre os ativos do portfólio de retorno máximo via programação quadrática.

Nota-se que a soma de todas as proporções é um, o que elimina venda a descoberto e garante que o valor de investimento foi utilizado por completo. Ainda, o

PT com essa configuração, fornece um retorno médio estimado de $\mu_P = 0{,}127\%$, um risco de investimento de $\sigma_P = 2{,}865\%$ e um Índice Sharpe do portfólio de $SR_P = 0{,}042$.

A relação retorno-risco entre os ativos mais o VMP pode ser obsevada através da Figura a seguir.

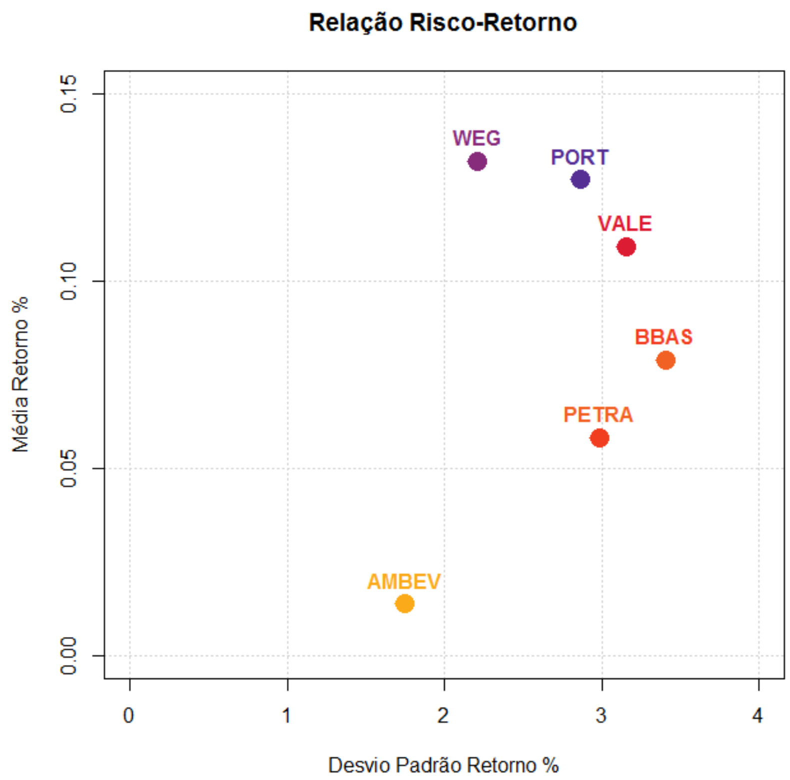


Figura 18: Relação Risco - Retorno dos ativos e do portfólio para o PT via programação quadrática.

Ao comparar a relação risco-retorno do portfólio com os ativos individuais, percebe-se que o portfólio apresenta um retorno elevado, porém, o risco também aumenta. O portfólio de certa forma equilibra essa relação risco-retorno entre os ativos, levando em consideração obter um retorno máximo.

6.2 Algoritmo Genético (AG)

As proporções a serem investidas nos ativos que compõe o portfólio foram obtidas utilizando AG. Suponha que o investidor deseja construir um portfólio, ao qual, a sua configuração traz o menor risco de investimento, então, o investimento entre os ativos deve ser dividido em proporções, a fim de obter VMP.

O AG necessita que o usuário especifique a função de aptidão para que o algoritmo possa efetuar os cálculos. Para isso, utilizou-se a função de aptidão da covariância e sucessivamente, aplicou-se a técnica de AG, para em fim, obter as proporções para o VMP.

Como o processo é de iteração, a seleção é feita do seguinte modo: Se o valor da função aptidão for negativo, o processo recebe um indicador igual à zero. Caso contrário, o indicador recebe um valor igual a um. Os candidatos que receberam o valor igual a um são selecionados para a próxima etapa e os demais são descartados.

Sendo assim, a construção do VMP para os ativos selecionados para esse portfólio foram utilizadas 50,000 gerações de indivíduos. O número de passo foi de 200, ou seja, se a cada 200 passo o valor da função aptidão se mantivesse o mesmo valor, o processo era encerrado. A Figura a seguir mostra as iterações que o AG efetuou.

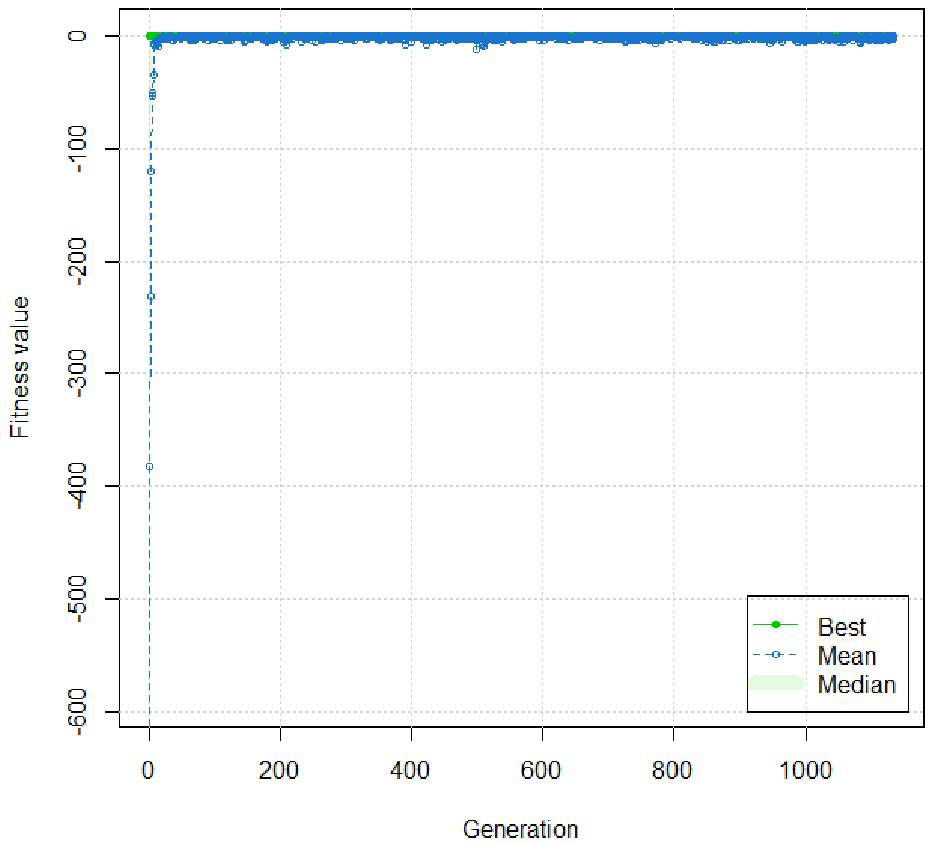


Figura 19: Número de iterações para o VMP via AG.

O número de iteração para obter o valor da função de aptidão foi de 963 e o valor da função de aptidão para essa foi de -0,000251. A probabilidade de mutação foi de 0,1 e a probabilidade de cruzamento foi de 0,8.

Para esse conjunto de ativos, a proporção de investimento para a VMP foi calculada conforme a tabela abaixo.

	AmBev	PETRA	BAAS	VALE	WEG	Total
α_i	0,5216	0,0082	0,0477	0,1252	0,2971	1

Tabela 5: Proporção do valor investido nos ativos VMP via AG.

A tabela mostra que a proporção de investimento ideal para construir um portfólio com o menor risco seria investir 52,16% em ativos da empresa AmBev, 0,82% em ativos da empresa Petrobrás, 4,77% em ativos do Banco do Brasil, 12,52% em ativos da empresa Vale do Rio Doce e 29,71% em ativos da WEG. Com auxilio de um gráfico de barra é possível visualizar a proporção do investimento entre os ativos que formarão o VMP.

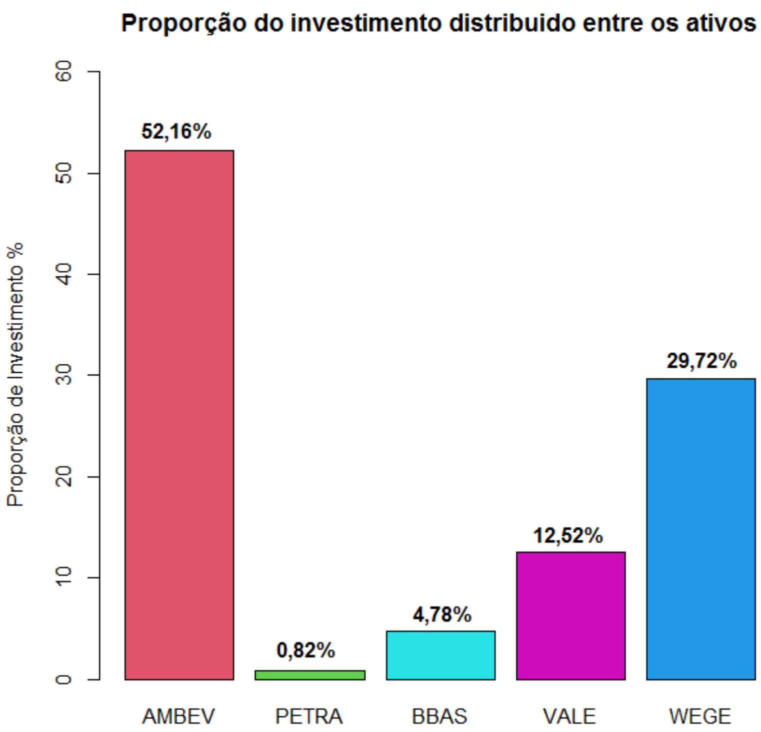


Figura 20: Relação Risco - Retorno dos ativos e do VMP via AG

Nota-se que a soma de todas as proporções é um, o que elimina venda a descoberto e garante que o valor de investimento foi utilizado por completo. Ainda, o VMP com essa configuração, fornece um retorno médio estimado de $\mu_P = 0{,}064\%$, um risco de investimento de $\sigma_P = 1{,}59\%$ e um Índice Sharpe do portfólio de $SR_P = 0{,}040$.

A relação retorno-risco entre os ativos mais o VMP pode ser obsevada através da Figura a seguir.

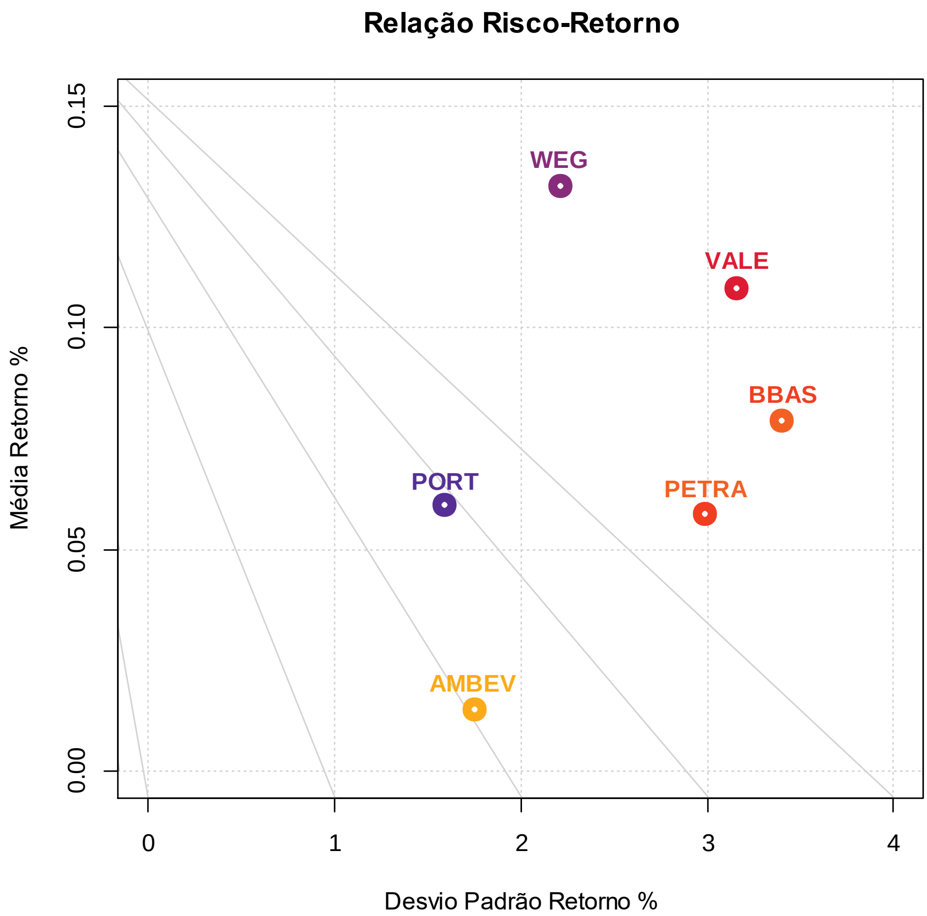
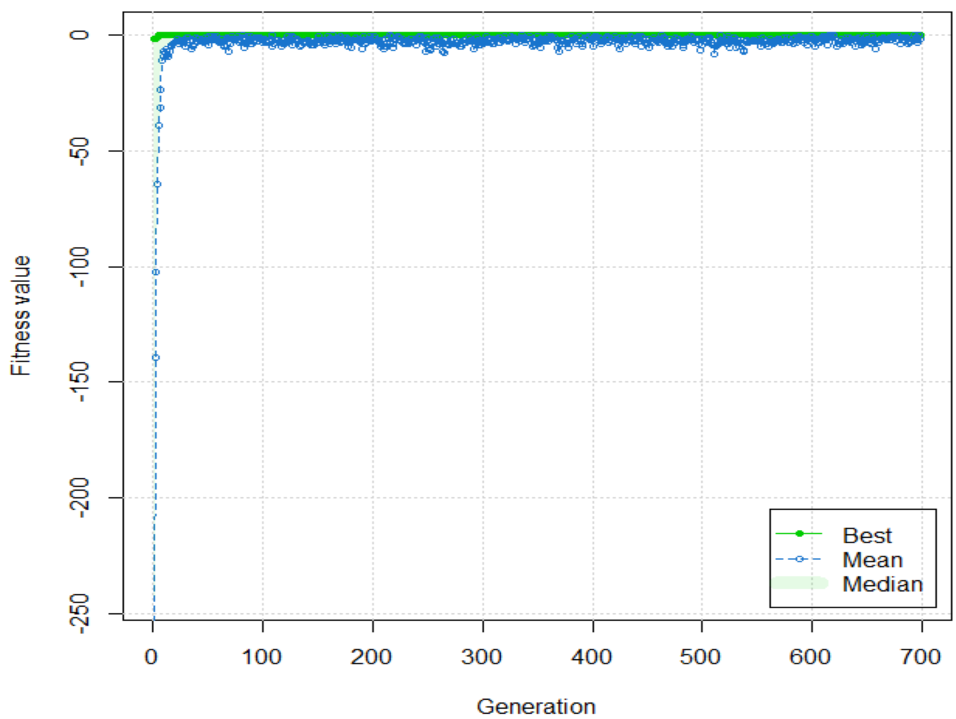


Figura 21: Relação Risco - Retorno dos ativos e do VMP via AG.

Ao comparar a relação risco-retorno do portfólio com os ativos individuais, percebe-se que o portfólio apresenta um risco não muito elevado, porém, um retorno razoável. De fato, se o investidor aplicasse todos seus fundos na empresa VALE, o retorno seria maior, mas o risco também aumentaria. Se o investidor aplicasse todos seus fundos na empresa AMBEV, seu retorno seria mínimo, mas seu risco também diminuiria. O portfólio de certa forma equilibra essa relação risco-retorno entre os ativos, levando em consideração obter uma variabilidade mínima.

Para o caso em que o investidor deseja construir um portfólio, ao qual, a sua configuração traz o maior retorno de investimento, então, o investimento entre os ativos deve ser dividido em proporções, a fim de obter PT. Análogo ao procedimento anterior, a função de aptidão para que o algoritmo possa efetuar os cálculos foi a função do Índice Sharpe e assim, obter as proporções para o PT. A construção do PT para os ativos selecionados para esse portfólio foram utilizadas 50,000 gerações de indivíduos. O número de passo foi de 200, ou seja, se a cada 200 passo o valor da função aptidão se mantivesse o mesmo valor, o processo era encerrado. A Figura a seguir mostra as iterações que o AG realizou.



,

Figura 22: Número de iterações para o VMP via AG.

O número de iteração para obter o valor da função de aptidão foi de 699 e o valor da função de aptidão para essa foi de 0,05123829. A probabilidade de mutação foi de 0,1 e a probabilidade de cruzamento foi de 0,8.

Para esse conjunto de ativos, a proporção de investimento para a VMP foi calculada conforme a tabela abaixo.

	AmBev	PETRA	BAAS	VALE	WEG	Total
α_i	0,1216	0,1714	0,1665	0,1113	0,4292	1

Tabela 6: Proporção do valor investido nos ativos do portfólio para retorno máximo via AG.

A tabela mostra que a proporção de investimento ideal para construir um portfólio com o menor risco seria investir 12,16% em ativos da empresa AmBev, 17,14% em ativos da empresa Petrobrás, 16,65% em ativos do Banco do Brasil, 11,13% em ativos da empresa Vale do Rio Doce e 42,92% em ativos da WEG. Com auxilio de um gráfico de barra é possível visualizar a proporção do investimento entre os ativos que formarão o PT.

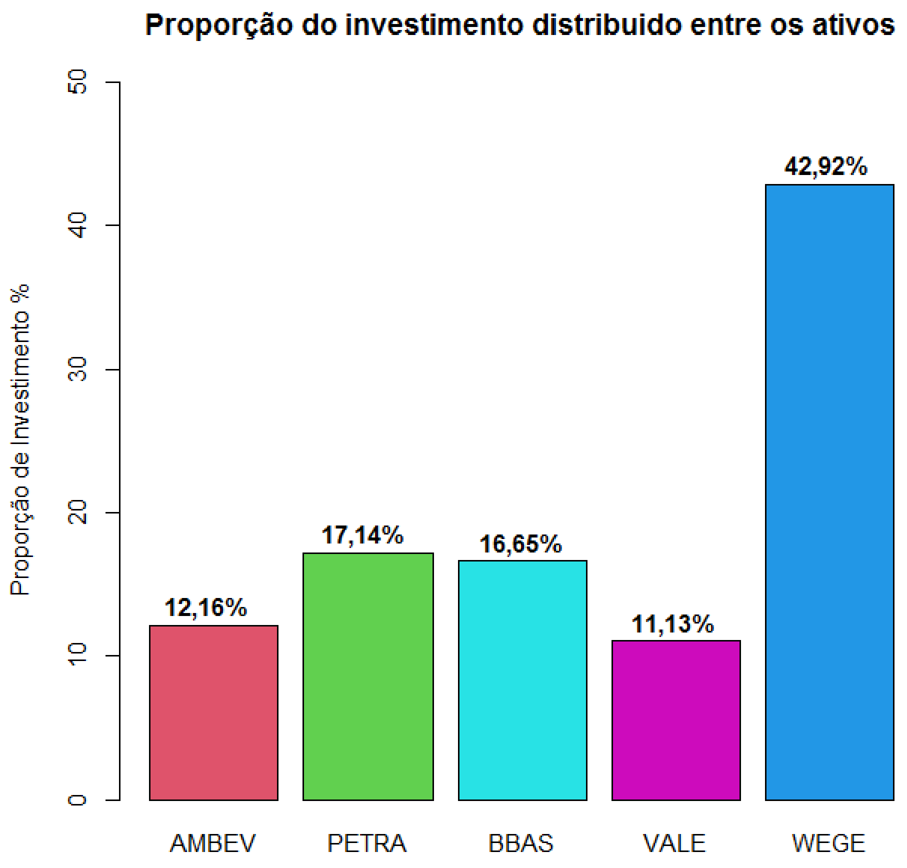


Figura 23: Relação Risco - Retorno dos ativos e do PT via AG

Nota-se que a soma de todas as proporções é um, o que elimina venda a descoberto e garante que o valor de investimento foi utilizado por completo. Ainda, o VMP com essa configuração, fornece um retorno médio estimado de $\mu_P = 0{,}094\%$, um risco de investimento de $\sigma_P = 1{,}919\%$ e um Índice Sharpe do portfólio de $SR_P = 0{,}0490$.

A relação retorno-risco entre os ativos mais o VMP pode ser obsevada através da Figura a seguir.

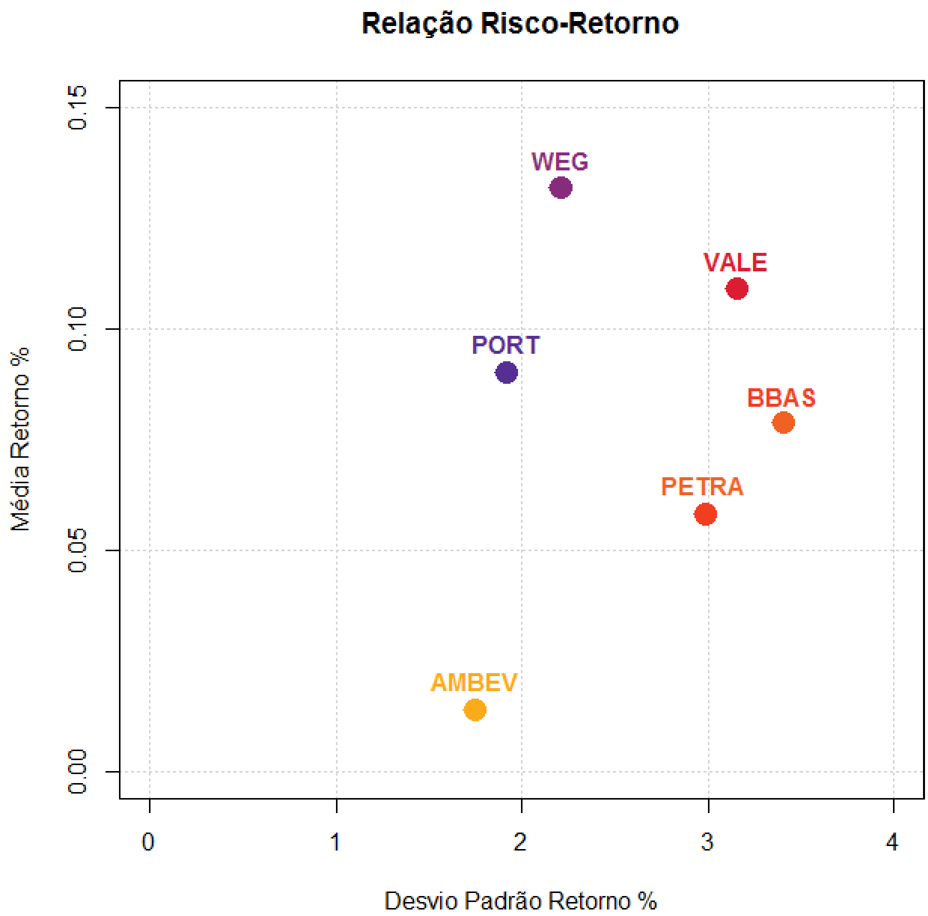


Figura 24: Relação Risco - Retorno dos ativos e do PT via AG.

Ao comparar a relação risco-retorno do portfólio com os ativos individuais, percebe-se que o portfólio apresenta um retorno elevado, porém, o risco para esse caso foi o menor. O portfólio de certa forma equilibra essa relação risco-retorno entre os ativos, levando em consideração obter um retorno máximo.

6.3 Comparações entre o método de Programação Quadrática (PQ) e o Algoritmo Genético (AG).

Nesse contexto, os VMP e os PT foram calculados utilizando as técnicas de PQ e AG. A comparação foi feita entre o VMP que foi obtido por meio do PQ com o VMP que foi obtido por meio do AG e entre os PT que foi obtido por meio do PQ com o PT que foi obtido por meio do AG.

O Índice Sharpe para VMP obtido através do PQ foi de $SR_{PQ}^{VMP} = 0{,}021$ enquanto o Índice Sharpe para o VMP obtido através do AG foi de $SR_{AG}^{VMP} = 0{,}040$. O fato do Índice Sharpe para o VMP obtido através do AG apresenta um valor maior em relação ao Índice Sharpe para VMP obtido através do PQ há indícios de que o AG aparenta melhor desempenho que o PQ.

O EQM para VMP obtido através do PQ foi de $EQM_{PQ}^{VMP} = 0{,}036\%$ enquanto o EQM para o VMP obtido através do AG foi de $EQM_{AG}^{VMP} = 0{,}029\%$, ou seja, o EQM para o VMP obtido através do AG apresenta menor erro em relação ao EQM para VMP obtido através do PQ.

O Índice Sharpe para PT obtido através do PQ foi de $SR_{PQ}^{PT} = 0{,}042$ enquanto o Índice Sharpe para o PT obtido através do AG foi de $SR_{AG}^{PT} = 0{,}049$. O fato do Índice Sharpe para o PT obtido através do AG apresenta um valor maior em relação ao Índice Sharpe para PT obtido através do PQ há indícios de que o AG aparenta melhor desempenho que o PQ.

O EQM para PT obtido através do PQ foi de $EQM_{PQ}^{VMP} = 0{,}043\%$ enquanto o EQM para o PT obtido através do AG foi de $EQM_{AG}^{VMP} = 0{,}019\%$, ou seja, o EQM para o PT obtido através do AG apresenta menor erro em relação ao EQM para PT obtido através do PQ.

Uma plausível explicação para o AG apresentar melhores resultados que o PQ pode ser pelo fato de que o AG seleciona as combinações entre ativos financeiros e proporções a serem investida nesses ativos que compõem o portfólio por meio das funções de aptidão, enquanto o PQ não considera a aptidão dessas combinações.

7. CONCLUSÃO

Os portfólios de investimento podem ser uma boa forma de rentabilidade financeira em longo prazo. Nesse contexto, um estudo foi realizado com objetivo de entender os mecanismos que operam sobre esse método de investimento além de aplicar técnicas mais recentes para otimizar os resultados. A construção de um portfólio de investimentos fica muita a mercê da natureza e objetivo do investidor. Se o investidor apresenta um perfil agressivo, ele construíra um portfólio que lhe trará maiores retornos sem se importar com o risco envolvido. Se o investidor apresenta um perfil moderado, ele construíra um portfólio que lhe trará o menor risco sem se importar com o retorno. Se o investidor apresenta perfil conservador, ele irá investir em renda fixa. O charme dos portfólios de investimento é justamente essa mobilidade, pois, com um único grupo de ativos, é possível combiná-los de varias formas possíveis aos quais essas combinações atinjam o objetivo do investidor, sendo esses objetivos, maximar o retorno ou minimizar o risco. Aqui, foram construídos portfólios que almejam risco mínimo de investimento (VMP) e portfólios que almejam grandes retornos (PT).

A construção dos portfólios de investimento foi realizada utilizando técnicas de pesquisa operacional, a saber, Programação Quadrática e o Algoritmo Genético. A Programação Quadrática mostrou-se mais rentável quando aplicada nos ativos pertencente ao portfólio, gerando grandes retornos, em comparação ao Algoritmo Genético. No entanto, os portfólios gerados por essa técnica apresentaram maiores riscos de investimento. O Algoritmo Genético mostrou-se menos rentável quando aplicado nos ativos pertencente ao portfólio, no entanto, o risco de investimento apresentado pelos portfólios gerado pelo Algoritmo foi muito menor. Ao comparar as duas técnicas, pode-se dizer que a Programação Quadrática apresentou-se mais "agressiva" enquanto o Algoritmo Genético apresentou-se mais "moderado".

O Algoritmo Genético apresentou ser uma técnica mais eficaz comparada a Programação Quadrática, pois, o Índice Sharpe do portfólio obtido utilizando o Algoritmo Genético, tanto para o VMP quanto para o PT, foi maior que o Índice Sharpe do portfólio obtido utilizando Programação Quadrática e o Erro Quadrado Médio do portfólio obtido utilizando o Algoritmo Genético, tanto para o VMP quanto para o PT, foi menor que o Erro Quadrado Médio do portfólio obtido utilizando Programação

Quadrática. No entanto, tanto a diferença entre o Índice Sharpe quanto a diferença entre Erro Quadrado Médio, de ambas as técnicas, não são muito discrepantes, ou seja, construir um portfólio usando Programação Quadrática não é uma forma completamente descartável.

8. BIBLIOGRAFIA

BAZARAA. M. S., JARVIS. J. J, SHERALI. H.D, *Linear Programming and Network Flows*, John Wiley & Sons, New York, 1990.

CHANG. T. J, MEADE. N, BEASLEY, J. E, SHARAIHA, Y. M, *Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization. Computer and Operations Research*, 27, p. 1271–1302, Londres, 2000.

Dicionário Financeiro, *Ativos financeiros: o que são e como são classificados?* Disponível em: https://www.dicionariofinanceiro.com/ativos-financeiros/, acesso: 06/05/2021, hora: 05h36min.

DIAS. C. H, *Um novo algoritmo genético para a otimização de portfólios de investimento com restrições de cardinalidade*, Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática Aplicada - UNICAMP, Campinas, 2008.

FAHRIA. I; KUSTIAWAN, E, *Genetic Algorithm Approach in Forming the Optimal Portfolio of Issuer Companies with Dividend Distribution Criteria*, Proceedings of the 1st International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMMED 2020), pag 475-479, 2021, DOI: https://doi.org/10.2991/assehr.k.210508.107.

FERREIRA. A. O, 2012, *Redução de ordem de modelos matemáticos lineares usando algoritmo genético*, Tese de mestrado em engenharia elétrica – UFPA, Belém, 2013.

FILHO. F. O. M. M, *Aplicação de Modelos de Estimação de Fitness em Algoritmos Genéticos*, Tese de mestrado em engenharia elétrica e computacional- UNICAMP, Campinas, 2005.

HOLLAND, J. H, *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan, Michigan, 1975.

Instituto Nacional do Seguro Social - INSS, Disponível em: https://www.gov.br/inss/pt-br/acesso-a-informacao/perguntas-frequentes/ acesso: 06/05/2021, hora: 03h26min.

J. E. BEASLEY OR - Library, *Distributing Test Problems by Electronic Mail*, Journal of the Operational Research Society, Vol.41 Ed.11, pag. 1069-1072, DOI: 10.1057/jors.1990.166, 1990

LINDEN. R, *Algoritmo genético: Uma importante ferramenta da inteligência computacional*, Brasport, Ed.2, Rio de Janeiro, 2008.

MARKOWITZ. H, *Portfolio Selection. The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91, 1952.

MARTINS. P. A, VASCONCELLOS. C. F, SILVA. P. N, *Análise de Modelos de Seleção de Portfólios de Investimento*, Cadernos do IME - Série Matemática, Vol. 8, Rio de Janeiro, 2014.

MICHALEWICZ. Z, *Genetic Algorithms+Data structures=Evolution Programs*,

NEÍA. S. S; ARTERO. O. A; CANTÃO. L. A. P; CUNHA. A. B, *Roteamento de veículos utilizando otimização por colônias de formiga e algoritmo genético*, Meta-Heurística em pesquisa operacional, Curitiba, 2013.

NuBank, *O que é uma portfólio de investimentos?*, Disponível em: https://blog.nubank.com.br/portfólio-de-investimentos/ acesso: 06/05/2021, hora: 05h48min.

OLIVEIRA. F. A. S, *Desempenho da otimização robusta de portfólios no mercado acionário brasileiro*, Pós-Graduação e Pesquisa em Administração da Faculdade de Ciências Econômicas - UFMG, Belo Horizonte, 2013.

PACHECO. M. A. C, *Algoritmos genéticos: princípios e aplicações*, Laboratório de Inteligência Computacional Aplicada – PUC, Rio de janeiro, 1999.

Previdência Complementar para Todos: Guia para a população brasileira se preparar melhor para a aposentadoria, Secretaria de Previdência - SP e Subsecretaria do Regime de Previdência Complementar - SRPC, Disponível em: https://www.gov.br/economia/pt-br/assuntos/noticias/2020/previdencia/novembro/guia_prev_compl_p_todos_v_final.pdf, 2020, acesso: 06/05/2021, hora: 05h54min.

ROUDIER. F, *Portfolio Optimization and Genetic Algorithms*, Master's Thesis - Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, 2007.

SIERVO. J. S, *Aplicação de Programação Linear na Seleção de Portfólios de Investimento*, Tese de mestrado profissional em matemática em rede nacional – PROFMAT, Universidade Federal de São Carlos, 2017.

SILVA. B. A. O, NOGUEIRA. S. G, RIBEIRO. K. C. S, *Aplicação prática do Índice de Sharpe na determinação de um portfólio ótimo de ativos*, Revista Eletrônica de Administração (Online) ISSN: 1679-9127, v. 14, n.1, ed. 26, 2015

SCRUCCA. L, *On Some Extensions to GA Package: Hybrid Optimisation, Parallelisation and Islands Evolution*, The R Journal, Vol. 9, 2017