

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

ANDRÉ FELIPE MORAES LUIZ LUCCHINI

Ondas Gravitacionais em regime pós Newtoniano

Guaratinguetá

2022

André Felipe Moraes Luiz Lucchini

Ondas Gravitacionais em regime pós Newtoniano

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Bacharelado em Física .

Orientador: Profº Dr. Rogério Teixeira Cavalcanti
Coorientador:

Guaratinguetá
2022

L934o Lucchini, André Felipe Moraes Luiz
Ondas gravitacionais em regime pós Newtoniano / André Felipe Moraes Luiz
Lucchini – Guaratinguetá, 2022.
65 f : il.
Bibliografia: f. 57-58

Trabalho de Graduação em Física (Bacharelado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2022.
Orientador: Prof. Dr. Rogério Teixeira Cavalcanti

1. Relatividade geral (Física). 2. Ondas gravitacionais. 3. Gravidade (Física). I. Título.

CDU 530.12

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

ANDRÉ FELIPE MORAES LUIZ LUCCHINI

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "BACHAREL EM FÍSICA"

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

Profº Dr. Júlio Marny Hoff da Silva
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



Profº Dr. Rogério Teixeira Cavalcanti
Orientador/UNESP-FEG



Profº Dr. Saulo Henrique Pereira
UNESP-FEG



Profº Dr. Márcio Eduardo da Silva Alves
UNESP - ICT

DADOS CURRICULARES

ANDRÉ FELIPE MORAES LUIZ LUCCHINI

NASCIMENTO 07/02/1999 - São Paulo / SP

FILIAÇÃO Carlos Turolla Lucchini
Andréa Luiz

2014 / 2016 Formação acadêmica (Ensino Médio)
Colégio Técnico Opção

2014 / 2016 Formação Complementar (Técnico em
Mecatrônica)
Colégio Técnico Opção

O presente trabalho, bem como todas as minhas conquistas passadas e futuras, é dedicado à minha avó, Nancy. Sem a qual nada disso seria possível e/ou imaginável.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente, a minha família. Pois sempre estiveram ao meu lado em todos os momentos, sempre me guiando para o caminho certo e me incentivando a seguir meus sonhos.

Aos meus amigos de curso e de biblioteca, Kelvin e Hamilton, por sempre estarem presentes nos melhores e piores momentos da graduação. Sou imensamente grato a vocês dois por tudo, espero que nossas parcerias estejam apenas começando.

Aos meus amigos da República Babilônia, por me mostrarem que é possível ter uma família e se sentir acolhido longe de casa.

Ao Prof^o Dr. Valerio Carruba, por me iniciar no meio científico e me mostrar o quanto gratificante a pesquisa pode ser.

Em especial, ao meu orientador Prof^o Dr. Rogério Teixeira Cavalcanti, por me mostrar os caminhos da física teórica e o quanto realizadora ela é. Por toda a sua paciência e dedicação ao me ensinar e me apoiar durante a graduação, bem como no mestrado que agora se inicia. Espero que nossas parcerias sejam duradouras.

Este trabalho contou com o apoio da seguinte entidade:

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - código: 57642 (ICSB)

“O homem é a mais insana das espécies. Adora um Deus invisível e mata uma natureza visível...sem perceber que a natureza que ele mata é esse Deus invisível que ele adora.”
(Hubert Reeves)

RESUMO

As ondas gravitacionais são um dos resultados mais importantes previstos pela Relatividade Geral. Como o próprio nome sugere, elas são ondulações - ou perturbações - na geometria do espaço-tempo. Contudo, essas perturbações são pequenas, sendo intensas apenas em regiões com grande densidade de matéria e energia, como regiões próximas de buracos negros, por exemplo. Essas ondas ficaram por um longo período nas discussões teóricas no processo de maturação da teoria. A partir da década de 70, com uma teoria sólida para as ondas gravitacionais e após a detecção indireta da binária de Hulse-Taylor, começou-se a investir na construção de um experimento para a detecção dessas pequenas oscilações. Até que em 2016, foi anunciada a descoberta feita pelos detectores LIGO, que não só confirmou a existência das ondas gravitacionais como também apresentou a primeira medição direta da existência de buracos negros. Nesse trabalho, serão abordadas as ondas gravitacionais no limite pós newtoniano da Relatividade Geral. A teoria pós newtoniana lida com a expansão das equações de movimento da Relatividade Geral usando a velocidade como parâmetro de expansão, e introduz correções relativísticas aos resultados newtonianos. Além do formalismo pós Newtoniano, será estudada a construção das equações de movimento partindo da Equação de campo de Einstein e, por fim, serão construídas as formas de onda para binárias compactas a partir de seus tensores de polarização.

PALAVRAS-CHAVE: Relatividade geral. Teoria linearizada. Ondas gravitacionais. Regime pós newtoniano.

ABSTRACT

Gravitational waves are one of the most important results predicted by General Relativity. As their name suggests, they are ripples - or perturbations - in the geometry of spacetime. However, these disturbances are small, being intense only in regions with high density of matter and energy, such as regions close to black holes, for example. These waves stayed for a long time in theoretical discussions in the process of theory maturation. From the 1970s onwards, with a solid theory for gravitational waves and after the indirect detection of the Hulse-Taylor binary, investment began to be made in building an experiment to detect these small oscillations. Until in 2016, the discovery made by LIGO detectors was announced, which not only confirmed the existence of gravitational waves but also presented the first direct measurement of the existence of black holes. In this work, gravitational waves in the post-Newtonian limit of General Relativity will be addressed. Post Newtonian theory deals with the expansion of General Relativity's equations of motion using velocity as the expansion parameter, and introduces relativistic corrections to Newtonian results. In addition to the post-Newtonian formalism, will be studied the construction of the equations of motion starting from the Einstein field equation and, finally, the waveforms for compact binaries will be built from their polarization tensors.

KEYWORDS: General relativity. Linearized theory. Gravitational waves. Post-newtonian regime.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Dois corpos de massas m_1 e m_2 efetuando órbitas circulares em torno de um centro de massa em comum.	24
Figura 2	Diagrama de linhas de força para uma onda gravitacional polarizada	27
Figura 3	Distorção de um aro de partículas sobre o plano transversal da passagem de uma onda gravitacional. Em (a) está representada o efeito de uma onda polarizada puramente “plus”, em (b) uma onda polarizada puramente “cross”.	28
Figura 4	Expansão pós Newtoniana dos componentes da métrica. O limite sem gravidade, espaço-tempo de Minkowski, está indicado pelos termos nas marcações cinzas. Os termos adicionados pela linearização da gravidade estão representados pelas caixas. E o termo de correção a ser calculado pelo limite pós Newtoniano está representado por um “?”.	30
Figura 5	Expansão pós Newtoniana para as componentes do tensor energia-momento. Os termos incluídos pela teoria linearizada estão representados com uma caixa. . .	31
Figura 6	Amplitude h_+ para a binária PSR 1913, feita no software <i>SageMath</i> , durante a fase <i>Inspiral</i> , com o método Taylor T3 em 1PN. O tempo de coalescência - t_c - está em 0,492Gyr.	51
Figura 7	Amplitude h_\times para a binária PSR 1913, feita no software <i>SageMath</i> , durante a fase <i>Inspiral</i> , com o método Taylor T3 em 1PN. O tempo de coalescência - t_c - está em 0,492Gyr.	51
Figura 8	Amplitude h_+ para a binária GW170817, feita no software <i>SageMath</i> , durante a fase <i>Inspiral</i> , com o método Taylor T3 em 1PN. O tempo de coalescência - t_c - está em 0,492Gyr.	52
Figura 9	Amplitude h_\times para a binária GW170817, feita no software <i>SageMath</i> , durante a fase <i>Inspiral</i> , com o método Taylor T3 em 1PN. O tempo de coalescência - t_c - está em 0,492Gyr.	53
Figura 10	Amplitude h_+ para a binária GW190426, feita no software <i>SageMath</i> , durante a fase <i>Inspiral</i> , com o método Taylor T3 em 1PN. O tempo de coalescência - t_c - está em 0,492Gyr.	53
Figura 11	Amplitude h_\times para a binária GW190426, feita no software <i>SageMath</i> , durante a fase <i>Inspiral</i> , com o método Taylor T3 em 1PN. O tempo de coalescência - t_c - está em 0,492Gyr.	54

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Relatividade Geral de Einstein	13
1.2	Teoria de Einstein para as ondas gravitacionais	13
1.2.1	Teoria perturbativa	15
2	EQUAÇÃO DE EINSTEIN NO REGIME LINEAR	16
2.1	A invariância de gauge	16
2.2	Descrição da Radiação gravitacional	17
2.2.1	Irradiação de Ondas Gravitacionais	17
2.2.2	Componentes da perturbação	18
2.2.3	O Quadrupolo da Radiação Gravitacional	21
2.3	Propriedades físicas das ondas gravitacionais	24
2.3.1	Ondas Gravitacionais emitidas por um sistema binário	24
2.3.2	Efeitos das Ondas Gravitacionais	26
3	REGIME PÓS NEWTONIANO	29
3.1	Sistema de partículas pontuais	35
3.1.1	Métrica pós Newtoniana	36
3.1.2	Equação de movimento com a métrica pós Newtoniana	37
3.1.3	Radiação Gravitacional	38
3.2	Movimento pós Newtoniano de dois corpos	40
3.2.1	Modelos de Aproximação pós Newtoniana	42
3.2.1.1	Taylor T1	44
3.2.1.2	Taylor T2	44
3.2.1.3	Taylor T3	45
3.2.1.4	Taylor T4	46
3.2.1.5	Taylor Et	47
3.2.2	Forma de uma onda gravitacional	48
4	PERSPECTIVAS FUTURAS	55
5	CONCLUSÃO	56
	REFERÊNCIAS	57
	APÊNDICE A – IDENTIDADE DE BIANCHI	59

APÊNDICE B – COMPONENTES DO TENSOR DE EINSTEIN PERTUR-	
BADAS	60
APÊNDICE C – EQUAÇÃO DE CAMPO E A FUNÇÃO DE GREEN	63

1 INTRODUÇÃO

1.1 RELATIVIDADE GERAL DE EINSTEIN

A Relatividade Geral, também conhecida como Teoria da Gravidade de Einstein, foi publicada por Albert Einstein em 1915. Essa teoria generaliza a relatividade especial proposta por ele anteriormente e adiciona correções a Lei da Gravitação Universal de Newton, fornecendo uma descrição unificada da gravidade como uma propriedade geométrica do espaço-tempo quadridimensional. Ou seja, a curvatura do espaço-tempo está diretamente relacionada à energia e ao momento de qualquer matéria e radiação presente no espaço-tempo (SCHUTZ, 2009). Essa relação entre matéria e curvatura é especificada pelas equações de campo de Einstein, um sistema de 10 equações diferenciais parciais de segunda ordem, que será apresentada no tópico seguinte.

A relatividade geral é uma teoria métrica da gravitação. Nela, as equações de Einstein descrevem a relação entre a geometria de uma variedade pseudo-Riemanniana de quatro dimensões, que representa o espaço-tempo, e a energia e momento contidos nele. Fenômenos que na mecânica clássica são atribuídos à ação da força da gravidade correspondem ao movimento inercial dentro de uma geometria curva do espaço-tempo na relatividade geral, ou seja, não há força gravitacional que deflete os objetos de suas trajetórias naturais e retas. Em vez disso, a gravidade corresponde a mudanças nas propriedades do espaço e do tempo, que por sua vez altera os caminhos que os objetos seguirão naturalmente. A curvatura é, por sua vez, causada pela presença de energia e pelo momento da matéria. O espaço-tempo diz à matéria como se mover, e a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar (WHEELER, 1990).

Uma vez que a Relatividade Geral é construída usando tensores, ela exibe uma covariância geral, ou seja, suas leis assumem a mesma forma em todos os referenciais. Além disso, a teoria não contém nenhuma estrutura de fundo geométrica invariável. Dessa forma, ela satisfaz um princípio geral mais rigoroso da relatividade, que as leis da física são as mesmas para todos os observadores. Localmente, conforme expresso no *princípio da equivalência*¹, o espaço-tempo é Minkowskiano e as leis da física exibem invariância local de Lorentz.

1.2 TEORIA DE EINSTEIN PARA AS ONDAS GRAVITACIONAIS

Antes de entender a física das ondas gravitacionais e os passos seguidos por Einstein, é preciso entender o que de fato são essas ondas. As ondas gravitacionais são ondulações - ou perturbações - na geometria do próprio espaço-tempo geradas por qualquer tipo de matéria acelerada, e elas se propagam pelo universo à velocidade da luz (RAMOS M. P.; MALUF, 2018). Uma ótima analogia para entender as ondas gravitacionais é comparando-as com as ondas eletromagnéticas; um amontoado de cargas elétricas aceleradas geram ondas eletromagnéticas e essas, por sua vez, se propagam ao longo do espaço. No caso de um amontoado de massa acelerado, o mesmo vai gerar ondas gravitacionais e essas não se propagam pelo espaço-tempo, mas o próprio tecido do espaço-tempo que oscila decorrente

¹ O Princípio da Equivalência de Einstein afirma que a aceleração de um dado referencial mimetiza-se neste referencial como a ação de um campo gravitacional uniforme de igual valor e sentido contrário (ou vice-versa) (RINDLER, 2006)

dessa interação. Na teoria geral da Relatividade, publicada em 1916 por Albert Einstein, a noção newtoniana de espaço como um ente absoluto e imutável é deixada de lado. Einstein propôs um espaço que passa de um imenso vazio que não interage com a matéria, para uma “malha espaço-tempo” que envolve a matéria e norteia seu curso. Dessa forma, a própria ideia de forças gravitacionais, nada mais é do que uma manifestação do espaço-tempo ser curvo.

De acordo com a Relatividade Geral, as ondas gravitacionais são relacionadas com os sistemas físicos por meio de uma métrica - ou tensor métrico - que é obtida através de um conjunto de dez equação diferenciais parciais. Esse conjunto de equação é chamado de *Equação de Einstein*

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.2.1)$$

onde $G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ representa a constante gravitacional, $c = 2,997 \times 10^8 \text{ m/s}$ é a velocidade da luz no vácuo e $T_{\mu\nu}$ é o *tensor energia-momento*, responsável por levar consigo as informações de energia, momento e massa do sistema físico. Já $G_{\mu\nu}$ é o *Tensor de Einstein*, representado na forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.2.2)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o supracitado tensor métrico, $R_{\mu\nu}$ é o *Tensor de Ricci*

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\rho_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu}, \quad (1.2.3)$$

R é o *escalar de curvatura*

$$R \equiv R^\mu_{\mu} = g^{\mu\nu} (\partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu}). \quad (1.2.4)$$

E, por fim, o objeto que define ambas as expressões anteriores é chamado de *Símbolos de Christoffel* - ou conexões afim - representados na forma

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda} (\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (1.2.5)$$

No presente texto não será discutida a inclusão da *Constante cosmológica* Λ , mas vale a pena a consulta em (WEINBERG, 1972). Como supracitado, a equação de Einstein compreende um conjunto de dez equações diferenciais parciais não lineares em $g_{\mu\nu}$, o que torna esse conjunto um tanto quanto complexo para se resolver. Uma possibilidade de contornar essa situação, é por meio da utilização de uma transformação apropriada de coordenadas, um *calibre*. É importante ressaltar que o fato de se trabalhar em um espaço-tempo quadridimensional aliado com os tensores $G_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ serem simétricos, implica que os mesmos possuem um conjunto de dez componentes independentes. Dessa forma, as equações que constituem a equação de Einstein são, na verdade, algebricamente independentes.

1.2.1 Teoria perturbativa

Para obter uma solução geral para a equação de Einstein, é necessário determinar a métrica $g_{\mu\nu}$ de maneira unívoca. Há algumas maneiras de começar a resolver a equação de Einstein, uma delas seria supor que a equação acrescida das condições de contorno, seria suficiente para determinar a métrica univocamente, mas infelizmente isso não ocorre. A *identidade de Bianchi*

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0, \quad (1.2.6)$$

forma um conjunto de quatro identidades diferenciais relacionadas às dez componentes do tensor de Einstein, ver Apêndice A, e essas não podem ser negligenciadas. Levando a identidade acima em consideração, as dez equações de Einstein são simplificadas para apenas seis que, de fato, são independentes. Apesar dessa simplificação parecer um problema, já que perdemos quatro graus de liberdade, é possível fazer uma transformação de coordenada - ($x \rightarrow x'$) por exemplo - de forma a obtermos uma nova métrica $g'_{\mu\nu}$, de maneira que se $g_{\mu\nu}$ é solução da Equação de Einstein (1.2.1), $g'_{\mu\nu}$ também o será. Para essa transformação de coordenadas, $g_{\mu\nu}$ possui quatro graus de liberdade extras que dependerão exclusivamente do x' adotado que, somados com as seis equações diferenciais já enunciadas, tem-se o necessário para a determinação unívoca da métrica. É importante ressaltar que, como os quatro graus de liberdade vem da escolha de x' , eles não representam graus verdadeiramente físicos do sistema.

2 EQUAÇÃO DE EINSTEIN NO REGIME LINEAR

Na Relatividade Geral, a teoria linearizada de gravitação se baseia no pressuposto de que, em uma região distante de qualquer fonte gravitacional, o espaço-tempo pode ser adotado como um espaço-tempo “quase” plano, ou seja, a métrica pode ser expressa como a métrica de Minkowski adicionada uma pequena perturbação, uma vez que o campo nessas regiões é fraco. Tal região, adotada frequentemente para o estudo de soluções ondulatórias para equação de campo, é chamado de *zona de campo distante*.

No presente trabalho, será adotada a perturbação linear de primeira ordem na métrica de Minkowski, o que permitira manipular os índices da métrica livremente. A perturbação supracitada será descrita da forma que se segue

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.0.1)$$

onde $h_{\mu\nu}$ é a perturbação da métrica ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$), com sua inversa na forma

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (2.0.2)$$

É importante ressaltar que a linearização da Equação de Einstein pode ser interpretada como uma descrição da propagação de uma perturbação gravitacional, ao longo do espaço-tempo de Minkowski. Para a métrica perturbada, as seguintes componentes podem ser expressas da forma (ver Apêndice B)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial_{\nu}h_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}h_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu}), \quad (2.0.3)$$

$$R_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu}_{\sigma} + \partial_{\mu}\partial_{\sigma}h^{\mu}_{\nu} - \partial_{\sigma}\partial_{\nu}h - \partial_{\mu}\partial^{\mu}h_{\nu\sigma}), \quad (2.0.4)$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu} - \square h, \quad (2.0.5)$$

onde $h = h^{\mu}_{\mu}$ representa o traço da perturbação. Dessa forma, a equação de Einstein no regime linear será expressa por

$$\partial_{\sigma}\partial_{\nu}h^{\sigma}_{\mu} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h^{\sigma}_{\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \partial_{\sigma}\partial^{\sigma}h_{\nu\mu} - \eta_{\mu\nu}\partial_{\rho}\partial_{\lambda}h^{\rho\lambda} - \eta_{\mu\nu}\square h = 16\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.0.6)$$

Onde \square é o operador D'Alembertiano para o espaço plano, representado por $\nabla^2 - c^{-2}\partial_t^2$; e $T^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento do sistema. É válido pontuar que, por consistência ao se considerar a zona de campo distante, a quantidade de energia e momento são pequenas e, portanto, a *lei de conservação ordinária* $\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ deve ser satisfeita.

2.1 A INVARIÂNCIA DE GAUGE

Como já mencionado na Subseção 1.2.1, a tentativa de se encontrar uma métrica unívoca $g_{\mu\nu}$, por meio do método perturbativo, não será suficiente para especificar completamente o sistema de coordenadas do espaço-tempo. Uma vez que para qualquer novo sistema de coordenadas adotado, será

possível expressar a nova métrica como a métrica de Minkowski somada a uma outra perturbação qualquer. Dessa forma, qualquer solução que for obtida por meio dessa nova equação será capaz de gerar outras, por meio de transformações de coordenadas.

Para contornar o problema da invariância de gauge é preciso especificar de maneira unívoca a perturbação $h_{\mu\nu}$ da métrica, de forma que ela se torne invariante perante tais transformações. Segundo a literatura, no limite de campo fraco, a transformação de coordenadas mais global é dada por

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad (2.1.1)$$

onde $\partial\xi^\mu/\partial x^\nu$ deve ser da ordem de grandeza de $h_{\mu\nu}$, no máximo. Para a nova transformação de coordenadas, a perturbação da métrica pode ser expressa por

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu, \quad \xi_\mu = \eta_{\mu\nu} \xi^\nu, \quad (2.1.2)$$

segundo a lei de transformação tensorial dada por

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma}. \quad (2.1.3)$$

A equação (2.1.2) é chamada de *transformação de gauge para a teoria linearizada*, e a invariância das equações de movimento perante transformações de coordenadas é chamada de *invariância de gauge*. Essa expressão para a perturbação $h_{\mu\nu}$, uma vez invariante, faz com que o tensor de curvatura também o seja e, conseqüentemente, a equação de campo (2.0.6) também será invariante perante a mesma transformação. Ademais, fixando as quatro funções representadas por ξ^μ , ter-se-á especificado univocamente a perturbação.

2.2 DESCRIÇÃO DA RADIAÇÃO GRAVITACIONAL

2.2.1 Irradiação de Ondas Gravitacionais

Apesar de encontrada a forma da Equação de Einstein que seja uma invariante de gauge, Equação (2.0.6), ainda há certa dificuldade em resolvê-la, ou seja, ainda há graus de liberdade não físicos. Entretanto, a liberdade de gauge permite simplificá-la ainda mais. Isso será possível utilizando o sistema de coordenadas harmônico, ou comumente conhecido como *gauge de Lorentz*, definido por

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0, \quad (2.2.1)$$

e em sua forma linearizada

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu h. \quad (2.2.2)$$

A utilização desse gauge sempre é possível pois, mesmo com diferentes formas da perturbação $h_{\mu\nu}$, apenas é necessário definir uma nova transformação de coordenadas - Equação (2.1.2) - que satisfaça a

condição de gauge. Assim, só é necessário utilizar a transformação que seja solução da expressão

$$\square \xi_\nu = \partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu h. \quad (2.2.3)$$

Dessa forma, pelo gauge harmônico, a equação de Einstein pode ser escrita na forma

$$\square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.2.4)$$

Uma última simplificação ainda pode ser feita para tornar o resultado mais reduzido, por meio da *perturbação do traço reverso*, representada por

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (2.2.5)$$

onde $\bar{h} = -h$ e, para essa transformação no gauge, sua condição de gauge se modifica em $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$. Portanto, a equação de Einstein pode ser expressa na forma

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.2.6)$$

Com o resultado acima é possível perceber que, de fato, a equação de Einstein obedece uma equação de onda para cada uma de suas componentes da perturbação.

2.2.2 Componentes da perturbação

A Equação (2.2.6) mostra que a equação de movimento para perturbações lineares no espaço-tempo plano, no gauge harmônico escolhido, é uma equação de onda, com o tensor energia-momento atuando como um termo de fonte. No vácuo, as soluções da métrica perturbada serão ondas e, onde houver matéria presente, poderá gerar as ondas gravitacionais.

No vácuo, a equação de Einstein linearizada - no gauge de Lorentz - é expresso por

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.2.7)$$

com a condição de gauge dada por

$$\frac{\partial \bar{h}_{\mu\alpha}}{\partial x_\mu} = 0. \quad (2.2.8)$$

Uma solução importante para estudar as perturbações da métrica é a solução de onda-plana (direção $z = x^3$). A Equação (2.2.7) implica que as componentes da perturbação deverão ser todas funções do tempo retardado, ou seja

$$t_r = t - \frac{z}{c}, \quad (2.2.9)$$

aqui, a constante da velocidade da luz c será retomada para salientar a dinâmica não trivial da gravitação

einsteiniana. A condição do gauge de Lorentz exige algumas condições

$$\partial_0 \bar{h}_{0\alpha} = 0, \quad \partial_3 \bar{h}_{3\alpha} = 0. \quad (2.2.10)$$

Por serem constantes, as componentes $\bar{h}_{0\alpha}$ e $\bar{h}_{3\alpha}$ podem ser fixadas como zero. Já as componentes não nulas da perturbação de traço reverso serão

$$\bar{h}_{11} = \bar{h}_{11}(t_r), \quad (2.2.11)$$

$$\bar{h}_{22} = \bar{h}_{22}(t_r), \quad (2.2.12)$$

$$\bar{h}_{12} = \bar{h}_{21} = \bar{h}_{12}(t_r), \quad (2.2.13)$$

lembrando que

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h,$$

em termos da perturbação da métrica de fato, as componentes não nulas serão

$$h_{00} = -c^2 h_{33} = \frac{1}{2} c^2 (\bar{h}_{11} + \bar{h}_{22}), \quad (2.2.14)$$

$$h_{11} = -h_{22} = \frac{1}{2} (\bar{h}_{11} - \bar{h}_{22}), \quad (2.2.15)$$

$$h_{12} = h_{21} = \bar{h}_{12}. \quad (2.2.16)$$

As relações acima mostram que a perturbação se propaga ao longo do eixo z , linearmente, na velocidade da luz. E essa solução é chamada de *Onda Gravitacional*.

As três relações acima, entre as componentes da perturbação, guardam um certo problema. As componentes acima podem ou não representar graus físicos de liberdade, caso não, representarão apenas artifícios do gauge escolhido, nesse caso, o gauge de Lorentz. Para encontrar quais são de fato graus físicos, é necessário recorrer ao tensor de Riemann, uma vez que ele é um invariante de gauge de ordem linear, ou seja, não varia com diferentes escolhas de gauge. Não poderíamos usar o tensor de Ricci, por exemplo, pois o mesmo não é um invariante perante transformações de calibre. Assim, as componentes independentes que restarem no tensor de Riemann devem representar os verdadeiros graus de liberdade da solução da onda gravitacional. Ou seja, é nessas componentes que estará a física dessas ondas (como será visto mais a frente) e, adicionalmente, pode-se calcular os componentes do tensor de Riemann linearizado em qualquer gauge escolhido. O tensor de Riemann, linearizado, é expresso na forma

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 h_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 h_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} \right), \quad (2.2.17)$$

com seus termos em ordem linear da perturbação.

Desde que a perturbação da onda plana é função apenas de t e z , as derivadas $\partial/\partial t$ e $\partial/\partial z$ somas elas serão não-nulas e, como as componentes da perturbação são funções de $t - z/c$, tem-se a relação

$\partial/\partial z = -c^{-1}\partial/\partial t$. Dessa forma, a única derivada que precisa ser calculada será $\partial/\partial t$. Como existem duas derivadas da métrica, então pelo menos dois índices do tensor de Riemann serão 0, pelas anti-simetrias do tensor de Riemann, juntamente com as Equações (2.2.14, 2.2.15 e 2.2.16) relacionando as componentes não-nulas da métrica no gauge de Lorentz, verifica-se que os outros dois componentes devem ser 1 ou 2 (já que valores de índice 3 são intercambiáveis com 0). Essa relação pode ser entendida substituindo os valores $\alpha = 0, \beta = 3, \gamma = 0$ e $\sigma = 3$ na Equação (2.2.17), de forma que

$$R_{0303} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 h_{33}}{\partial x^0 \partial x^0} + \frac{\partial^2 h_{30}}{\partial x^0 \partial x^3} + \frac{\partial^2 h_{03}}{\partial x^3 \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^3 \partial x^3} \right), \quad (2.2.18)$$

uma vez que as únicas componentes não-nulas da perturbação da métrica estão expressas nas Equações (2.2.14, 2.2.15 e 2.2.16), a expressão acima se simplifica para

$$R_{0303} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{33}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial z^2} \right), \quad (2.2.19)$$

utilizando a intercambialidade entre as componentes t e z no segundo termo, representada pela Equação (2.2.14), e em seguida a relação entre as suas derivadas, dada por $\partial/\partial z = -c^{-1}\partial/\partial t$, tem-se

$$\begin{aligned} R_{0303} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{33}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (-h_{33}c^2) \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{33}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h_{33}}{\partial z^2} c^2 \right), \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{33}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h_{33}}{\partial t^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Sendo assim, apenas os termos $h_{11} = -h_{22}$ e h_{12} aparecerão no tensor de Riemann, ao colocar os índices do tensor como R_{0101} , R_{0202} ou R_{0102} , respectivamente. Dessa forma, sem perder generalidade, as únicas duas componentes independentes do tensor de Riemann serão

$$R_{0101} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{11} = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{h}_{11} - \bar{h}_{22}), \quad (2.2.21)$$

$$R_{0202} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{12} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{h}_{22}. \quad (2.2.22)$$

Lembrando que, pela simetria, $R_{0202} = -R_{0101}$ e $R_{0201} = R_{0102}$. Desde que alguma componente do tensor seja não-nula, a onda gravitacional em questão deve ser física, e não apenas um artefato do gauge escolhido. O tensor de Riemann contém duas funções independentes de $t - z/c$, que serão chamadas de graus - físicos - de liberdade independentes ($h_+ = h_{11} = -h_{22}$ e $h_\times = h_{12} = h_{21}$), de forma que podem ser expressos por

$$R_{0101} = -R_{0202} = -\frac{1}{2} \ddot{h}_+, \quad (2.2.23)$$

$$R_{0102} = R_{0201} = -\frac{1}{2} \ddot{h}_\times. \quad (2.2.24)$$

Os componentes do tensor de Riemann dependem apenas das duas funções independentes de $t - z/c$, $h_+ = (\bar{h}_{11} - \bar{h}_{22})/2$ e $h_\times = (\bar{h}_{12} - \bar{h}_{21})/2$, em vez das três que eram sugeridas pelas equações de campo, nas quais aparentava que \bar{h}_{11} , \bar{h}_{22} e \bar{h}_{12} - ou h_{00} , h_{11} e h_{12} - seriam todas funções

independentes.

2.2.3 O Quadrupolo da Radiação Gravitacional

Para estudar a natureza e as propriedades das ondas gravitacionais, primeiro é preciso resolver a equação de campo de Einstein, Equação (2.2.6). Tal solução é obtida a partir do *método da função de Green*, cuja solução é expressa por

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4G \int \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} T_{\mu\nu}(t - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|, \mathbf{x}') d^3x', \quad (2.2.25)$$

onde a quantidade $t_r \equiv t - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ é chamado de *tempo retardado* e implica que a perturbação gravitacional se propaga no espaço com uma velocidade unitária, ou seja, a velocidade da luz no vácuo. Para o cálculo explícito da obtenção da solução acima e os passos seguintes, ver Apêndice C.

É importante ressaltar a maneira de se interpretar a solução expressa na Equação (2.2.25). A solução mostra que a perturbação gravitacional em (t, \mathbf{x}) será a soma das ações da energia e momento da fonte gravitacional, no ponto $(t, \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ no cone de luz passado. Esse ponto ressalta a diferença entre a gravitação einsteiniana e a gravitação newtoniana, uma vez que na primeira a perturbação gravitacional gerada pela fonte levará um certo tempo para cruzar de um ponto ao outro do espaço. Já a segunda possui uma dinâmica trivial, ou seja, o tempo é absoluto. Para extrair o máximo de informações possíveis sobre a radiação gravitacional emitida por uma fonte com componentes do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, será conveniente fazer uma pequena transformação e eliminar sua dependência temporal, com o auxílio da *transformada de Fourier*. Para isso, serão representadas como $\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}')$ e $\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x})$, respectivamente, as transformadas de $T_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}')$ e $\bar{h}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x})$. Assim, a definição da transformada de Fourier no tempo para a perturbação será

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}), \quad (2.2.26)$$

onde ω é a frequência angular da onda. Substituindo a expressão da Equação (2.2.25) no integrando e implementando a mudança de variáveis para o tempo retardado, tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) &= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}(t - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|, \mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}, \\ &= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt_r e^{i\omega t_r} \int d^3x' \frac{e^{i\omega\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

E, assim como para $\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x})$, a transformada de $\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}')$ pode ser expressa por

$$\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} T_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}'), \quad (2.2.28)$$

tem-se para a perturbação $\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x})$ a expressão

$$\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = 4G \int d^3x' \frac{e^{i\omega\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|} \tilde{\tilde{T}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}'). \quad (2.2.29)$$

No presente t3pico ser3 abordado o caso de uma fonte isolada, distante do ponto de observa33o e apenas composta por mat3ria n3o relativ3stica, ou seja, composta por mat3ria com velocidade muito menor que a velocidade da luz. Tal abordagem 3 v3lida para o estudo de radia33o gravitacional emitida por sistemas bin3rios, por exemplo.

Em tal situa33o, 3 cab3vel fazer algumas simplifica33es na express3o da perturba33o $\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x})$. A primeira pode ser feita movendo a origem do sistema de coordenadas para bem perto da fonte, o que permite aproximar a grandeza $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|$ para $r = \|\mathbf{x}\|$, na Equa33o (2.2.29). Como tal sistema est3 sob a suposi33o de apenas conter mat3ria com velocidades n3o relativ3sticas, 3 poss3vel adotar a grandeza r como constante, uma vez que demorar3 um grande per3odo de tempo at3 que a dist3ncia entre o ponto de observa33o e a fonte se torne significativa. Assim, a perturba33o no espa3o de Fourier pode ser expressa por

$$\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = 4G \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3x' \tilde{\tilde{T}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}'). \quad (2.2.30)$$

Apesar da express3o acima ainda guardar uma certa dificuldade quanto a sua resolu33o em termos do tensor energia-momento, de fato 3 necess3rio apenas calcular as componentes espaciais da perturba33o, devido 3 dois motivos, um de car3ter f3sico e outro matem3tico (RAMOS M. P.; MALUF, 2018). O motivo de car3ter f3sico mora no fato de que, dada a lei de conserva33o $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, as integrais sobre $T^{0\nu}$ ser3o conservadas e interdependentes da vari3vel temporal, ou seja

$$\frac{d}{dt} \int dx^3 T^{0\nu} = \int dx^3 \partial_0 T^{0\nu} = - \int dx^3 \partial_i T^{i\nu} = - \oint ds_i T^{i\nu} = 0.$$

Isso significa que a transformada de Fourier $T^{0\nu}$ em rela33o 3 vari3vel temporal apenas conter3 termos de $\omega = 0$, evidenciando que a parte temporal da m3trica, respons3vel por caracterizar a radia33o gravitacional, estar3 contida nas componentes espaciais da perturba33o (PADMANABHAN, 2010). J3 a raz3o matem3tica reside no fato de que o gauge harm3nico adotado, $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$, estabelecendo uma rela33o entre as componentes da perturba33o gravitacional no espa3o de Fourier, como se segue

$$\partial_j \tilde{\tilde{h}}^{j\nu}(\omega, \mathbf{x}) = i\omega \tilde{\tilde{h}}^{0\nu}(\omega, \mathbf{x}), \quad (2.2.31)$$

ou seja, a componente $\tilde{\tilde{h}}^{0j}$ pode ser determinada pela componente $\tilde{\tilde{h}}^{ij}$, assim como 3 poss3vel determinar $\tilde{\tilde{h}}^{00}$ a partir da rela33o acima. De fato, apenas as componentes espaciais da perturba33o precisam ser calculadas, uma vez que o resto 3 obtido pelas rela33es supracitadas. Desse modo, para o c3lculo da perturba33o, primeiro ser3 feita a integra33o por partes das componentes espaciais do tensor energia-

momento

$$\int d^3x' \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{x}) = \int d^3x' \partial_k (x^i \tilde{T}^{kj}) - \int d^3x' x^i (\partial_k \tilde{T}^{kj}), \quad (2.2.32)$$

como a fonte gravitacional se encontra isolada, o primeiro termo da integração desaparecerá. Já em relação ao segundo termo, pode ser feita uma conexão com o termo \tilde{T}^{0j} na forma

$$\partial_k \tilde{T}^{k\mu} = i\omega \tilde{T}^{0\mu}, \quad (2.2.33)$$

imposta pela lei de conservação $\partial_\mu T^{\mu\nu}$, quando representada no espaço de Fourier. Desse modo

$$\int d^3x' \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{x}) = -i\omega \int d^3x' x^i \tilde{T}^{0j}, \quad (2.2.34)$$

levando em conta a simetria nos índices do tensor energia-momento, é possível abrir a expressão acima em

$$\int d^3x' \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{i\omega}{2} \int d^3x' (x^i \tilde{T}^{0j} + x^j \tilde{T}^{0i}).$$

Por fim, aplicando novamente a integração por partes e ressaltando a relação expressa pela Equação (2.2.33), obtém-se

$$\int d^3x' \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{\omega^2}{2} \int d^3x' x^i x^j \tilde{T}^{00}. \quad (2.2.35)$$

O termo expresso pela integral acima não deve ser estranho para aqueles que possuem uma certa familiaridade com o tema, na literatura ele é chamado de *tensor momento do quadrupolo* da distribuição de matéria, a forma

$$I^{ij}(t) = \int d^3x' x^i x^j T^{00}(t, \mathbf{x}'). \quad (2.2.36)$$

Sua fórmula descreve a taxa com a qual as ondas gravitacionais são emitidas de um sistema massivo com base na mudança de seu momento do quadrupolo, que por sua vez expressa como a emissão da onda gravitacional do sistema faz com que a órbita dele mude ao passar do tempo. Por fim, retornando a dependência temporal à perturbação e adicionando o tensor momento do quadrupolo, a perturbação gravitacional será expressa por

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{r} \frac{d^2}{dt^2} I_{ij}(t_r); \quad t_r = t - r, \quad (2.2.37)$$

chamada de *fórmula de quadrupolo*. Essa expressão revela um resultado interessante, a radiação gravitacional não pode ser gerada por um momento de dipolo. Para campos gravitacionais, diferentemente da expansão multipolar do eletromagnetismo, apenas o quadrupolo e os momentos superiores podem irradiar gravitacionalmente. O monopolo de massa representa a massa-energia total em um sistema, que é conservada - portanto, não emite radiação. Da mesma forma, o dipolo de massa corresponde

ao centro de massa de um sistema e sua primeira derivada representa o momento, que também é uma quantidade conservada, de modo que o dipolo de massa também não emite radiação. O quadrupolo de massa, entretanto, pode mudar com o tempo e é a contribuição de ordem mais baixa para a radiação gravitacional.

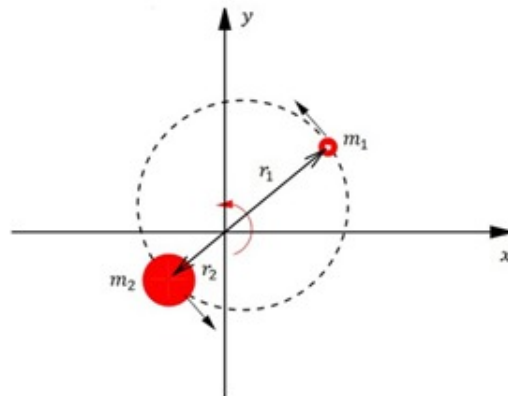
Dessa forma, na decomposição multipolar, o termo de menor ordem é o momento do quadrupolo, para a radiação gravitacional (CARROLL, 2004; PADMANABHAN, 2010).

2.3 PROPRIEDADES FÍSICAS DAS ONDAS GRAVITACIONAIS

2.3.1 Ondas Gravitacionais emitidas por um sistema binário

Após a obtenção do tensor momento do quadrupolo e, mais importante, a fórmula do quadrupolo da perturbação gravitacional, é útil utilizá-los para estudar um sistema simples, mas de grande proveito. Nesse tópico será calculada a energia irradiada, via ondas gravitacionais, por um sistema binário em órbita circular. O sistema está explicitado na Figura 1, onde m_1 e m_2 orbitam um centro de massa em comum. Nessa situação, assim como no tópico anterior, será considerado um sistema em baixas ordens,

Figura 1 – Dois corpos de massas m_1 e m_2 efetuando órbitas circulares em torno de um centro de massa em comum.



Fonte: (RAMOS M. P.; MALUF, 2018)

onde a mecânica newtoniana ainda seja válida. O sistema de coordenadas foi adotado de modo que coincida com o centro de massa e, nessa configuração, as distâncias das massas m_1 e m_2 em relação ao centro de massa, respectivamente, são

$$r_1 = \frac{m_2 l_0}{M}, \quad (2.3.1)$$

$$r_2 = \frac{m_1 l_0}{M}, \quad (2.3.2)$$

onde $l_0 = r_1 + r_2$ é a separação orbital, $\mu = m_1 m_2 / M$ é a massa reduzida e $M = m_1 + m_2$ é a massa total do sistema. Ao se igualar a força gravitacional newtoniana com a resultante centrípeta, para

ambas as massas, é possível encontrar a expressão para a frequência orbital Ω , como se segue

$$G \frac{m_1 m_2}{l_0^2} = m_1 \Omega^2 \frac{m_2 l_0}{M}, \quad (2.3.3)$$

$$G \frac{m_1 m_2}{l_0^2} = m_2 \Omega^2 \frac{m_1 l_0}{M}, \quad (2.3.4)$$

levando, para ambas as massas

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{l_0^3}}. \quad (2.3.5)$$

De modo que as equações de movimento serão expressas por

$$x_1 = \frac{m_2 l_0}{M} \cos(\Omega t), \quad y_1 = \frac{m_2 l_0}{M} \sin(\Omega t), \quad (2.3.6)$$

$$x_2 = -\frac{m_1 l_0}{M} \cos(\Omega t), \quad y_2 = -\frac{m_1 l_0}{M} \sin(\Omega t). \quad (2.3.7)$$

Com ela, será possível calcular o tensor momento do quadrupolo, dado pela Equação (2.2.36). E, para isso, tem-se a expressão

$$T^{00} = \sum_{n=1}^2 m_n \delta(x - x_n) \delta(y - y_n) \delta(z), \quad (2.3.8)$$

expressão que resultará em

$$\begin{aligned} I_{xx} &= m_1 \int x^2 \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) \delta(z) dx dy dz \\ &+ m_2 \int x^2 \delta(x - x_2) \delta(y - y_2) \delta(z) dx dy dz, \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

$$\begin{aligned} &= m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2, \\ &= \mu l_0^2 \cos^2(\Omega t), \\ &= \frac{\mu}{2} l_0^2 \cos(2\Omega t) + \frac{\mu}{2} l_0^2. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Aplicando a mesma rotina para as componentes y e z , tem-se

$$I_{yy} = -\frac{\mu}{2} l_0^2 \cos(2\Omega t) - \frac{\mu}{2} l_0^2, \quad (2.3.11)$$

$$I_{xy} = \frac{\mu}{2} l_0^2 \sin(2\Omega t), \quad (2.3.12)$$

as demais componentes são nulas. Como no tópico anterior, será necessário apenas o cálculo da componente temporal, de modo que

$$I_{xx} = -I_{yy} = \frac{\mu}{2} l_0^2 \cos(2\Omega t), \quad (2.3.13)$$

$$I_{xy} = \frac{\mu}{2} l_0^2 \sin(2\Omega t), \quad (2.3.14)$$

Há duas maneiras práticas de representar o tensor momento do quadrupolo acima, a forma matricial

$$I_{ij} = \frac{\mu}{2} l_0^2 \begin{pmatrix} \cos(2\Omega t) & \sin(2\Omega t) & 0 \\ \sin(2\Omega t) & -\cos(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou a forma reduzida

$$I_{ij} = \frac{\mu}{2} l_0^2 A_{ij}, \quad (2.3.15)$$

onde A_{ij} representa os elementos da matriz acima. Adicionando esse resultado à expressão para a energia irradiada por uma onda gravitacional encontra-se a magnitude da radiação gravitacional emitida por um sistema binário (CARROLL, 2004)

$$L_{GW} = -\frac{dE_{GW}}{dt} = \frac{G}{5} \left\langle \frac{d^3 I_{ij}^{TT}}{dt^3} \frac{d^3 I_{TT}^{ij}}{dt^3} \right\rangle, \quad (2.3.16)$$

$$= \frac{32 G^4 \mu^2 M^3}{5 c^5 l_0^5}, \quad (2.3.17)$$

onde L_{GW} é a radiação luminosa emitida, dE é a quantidade de energia de radiação gravitacional em torno da fonte de onda gravitacional em um tempo dt . O termo dado por $\langle \rangle$ representam uma média temporal da taxa de energia que é trocada durante a emissão das ondas e, uma vez que fontes irradiantes estão perdendo energia, há um sinal negativo à esquerda da igualdade. Já I_{ij}^{TT} é a versão transversal e de traço nulo do tensor momento do quadrupolo calculado no tempo retardado. Transversal pois as ondas gravitacionais produzem apenas forças perpendiculares à sua direção de propagação, e de traço nulo pois representam forças de “cisalhamento”, que não causam nenhuma expansão ou contração global. Por fim, é possível também encontrar a ordem de magnitude da amplitude dessas ondas, ao substituir a expressão reduzida do tensor quadrupolo na fórmula do quadrupolo, dada por Equação (2.2.37), levando à

$$h_0 = \frac{4\mu M G^4}{r l_0 c^4}. \quad (2.3.18)$$

2.3.2 Efeitos das Ondas Gravitacionais

Foi mostrado na Seção (2.2.2) que as ondas gravitacionais podem ser descritas por ondas que apresentam dois estados de polarização - h_+ e h_\times - e viajam a velocidade da luz. Outro ponto importantíssimo de se estudar é o efeito que essas ondas, estados de polarização, tem sobre um observador.

Para tal estudo, considere uma onda gravitacional plana genérica viajando na direção- x^3 (ou e_3), será usado o desvio da equação geodésica para examinar os efeitos dessa onda no movimento relativo entre duas partículas próximas, em queda livre. Primeiro, considere duas partículas, separadas por um vetor espacial $\xi = \xi(\sin\theta \cos\phi e_1 + \sin\theta \sin\phi e_2 + \cos\theta e_3)$, onde ξ é o módulo do vetor separação, e e_1 , e_2 e e_3 são os versores do espaço que contém as partículas. A aceleração relativa entre essas duas

partículas pode ser representado por $a_\nu = -R_{0\nu 0\mu}\xi^\mu$ (Ver Cap. 25, Tópico 25.5.1, em (BLANDFORD R. D.; THORNE, 2012)), dessa forma

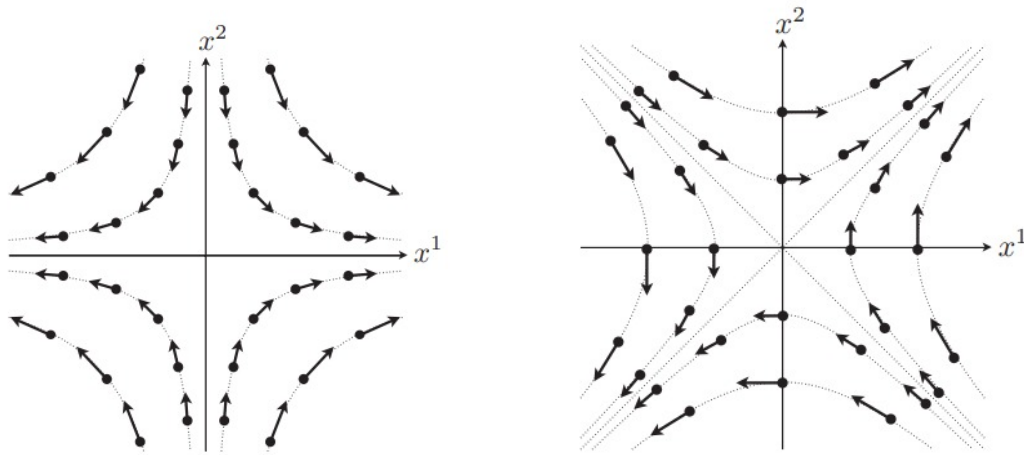
$$a_1 = -R_{0101}\xi^1 - R_{0102}\xi^2 = \frac{1}{2}\ddot{h}_+\xi \sin\theta \cos\phi + \frac{1}{2}\ddot{h}_\times\xi \sin\theta \sin\phi, \quad (2.3.19)$$

$$a_2 = -R_{0202}\xi^2 - R_{0201}\xi^1 = -\frac{1}{2}\ddot{h}_+\xi \sin\theta \sin\phi + \frac{1}{2}\ddot{h}_\times\xi \sin\theta \cos\phi, \quad (2.3.20)$$

$$a_3 = 0, \quad (2.3.21)$$

o termo a_3 é nulo pois a aceleração é transversa à direção de propagação da onda. É possível representar a aceleração acima como uma função da posição das partículas com um diagrama de linhas de força, considerando o caso dessas duas partículas estarem separadas por um plano transversal, $\theta = \pi/2$. Para uma polarização puramente “plus” - $\ddot{h}_+ > 0$ e $\ddot{h}_\times = 0$ - tem-se que $a_1 \propto x^1$ e $a_2 \propto -x^2$, onde $(x^1, x^2) = (\xi \cos\phi, \xi \sin\phi)$ são as coordenadas no plano transversal da segunda partícula relativa a primeira. Para uma polarização puramente “cross” - $\ddot{h}_\times > 0$ e $\ddot{h}_+ = 0$ - tem-se que $a_1 \propto x^2$ e $a_2 \propto x^1$. Para ambas as polarizações, os diagramas de linhas de força podem ser representados, respectivamente, pela Figura 2. A partir das expressões para as componentes da aceleração, é possível deduzir como

Figura 2 – Diagrama de linhas de força para uma onda gravitacional polarizada



(a) Polarização puramente “plus”.

(b) Polarização puramente “cross”.

Fonte: (CREIGHTON J. D. E.; ANDERSON, 2011)

o vetor separação das partículas evolui no tempo, considerando a magnitude do vetor separação. O vetor unitário ao longo do vetor separação é expresso por $e_\xi = \xi/\xi$ e as componentes da aceleração do desvio geodésico nessa direção é

$$\begin{aligned} a_\xi &= e_\xi \cdot \mathbf{a} = -\frac{1}{\xi} R_{0i0j} \xi^i \xi^j, \\ &= a_1 \sin\theta \cos\phi + a_2 \sin\theta \sin\phi, \\ &= \xi \left(\frac{1}{2} \ddot{h}_+ \sin^2\theta \cos 2\phi + \frac{1}{2} \ddot{h}_\times \sin^2\theta \sin 2\phi \right). \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Integrando a aceleração duas vezes no tempo, considerando que as partículas estão inicialmente em

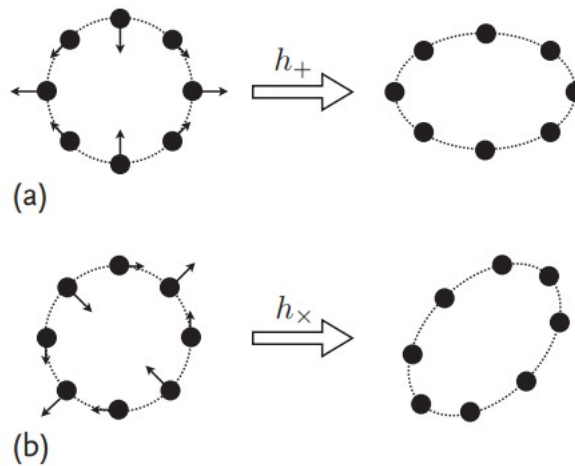
repouso uma em relação a outra, tem-se

$$\xi(t) = \xi(0) \left(1 + \frac{1}{2}h_+ \sin^2 \theta \cos 2\phi + \frac{1}{2}h_\times \sin^2 \theta \sin 2\phi \right). \quad (2.3.23)$$

Quando $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, o vetor separação não se alterará no tempo, pelo fato da onda gravitacional ser transversal e não afetará a distância entre partículas em queda livre inicialmente separadas ao longo da direção de propagação. Em contraponto, a maior alteração do vetor separação se dará quando $\theta = \pi/2$, ou seja, quando o vetor separação estiver sobre o plano transversal.

A rotação entre as polarização h_+ e h_\times dependerá do dobro do ângulo azimutal - 2ϕ - então correspondem a campos quadrupolares. Essa relação pode ser vista ao analisar os efeitos de cada polarização em um aro de partículas. Conforme a onda gravitacional passa por ele, o aro é distorcido em uma elipse, a orientação da distorção dependerá do estado de polarização da onda. Essas distorções estão representadas na Figura 3.

Figura 3 – Distorção de um aro de partículas sobre o plano transversal da passagem de uma onda gravitacional. Em (a) está representada o efeito de uma onda polarizada puramente “plus”, em (b) uma onda polarizada puramente “cross”.



Fonte: (CREIGHTON J. D. E.; ANDERSON, 2011)

3 REGIME PÓS NEWTONIANO

No capítulo anterior, foi visto apenas o limite Newtoniano da Relatividade Geral ao analisar o movimento de corpos em um sistema que emite ondas gravitacionais, e apenas termos de primeira ordem da perturbação gravitacional. Porém, quando o foco de estudo são sistemas altamente relativísticos ou altamente gravitantes, a dinâmica Newtoniana deixa de ser capaz de descrever a dinâmica desses sistemas, então ela precisa de correções. A teoria pós newtoniana lida com a expansão das equações de movimento da Relatividade Geral usando a velocidade como parâmetro de expansão, e introduz correções relativísticas aos resultados newtonianos.

No limite pós Newtoniano, o movimento interno do sistema é tomado como pequeno e, com um sistema governado por auto gravitação, o *teorema do virial* sugere que $GM/c^2 R \sim v^2/c^2$, então as expansões serão feitas em ordens de $1/c^2$. Aqui, será introduzido o parâmetro de ordem pós Newtoniano ϵ^2 , para essas expansões. No presente trabalho, será apenas considerada a primeira ordem da expansão pós Newtoniana (MAGGIORE, 2007).

O primeiro passo a ser tomado no estudo do regime pós Newtoniano, é expandindo o elemento de linha da métrica em termos do parâmetro ϵ e calculando os termos de correção para a mesma. Assim, tem-se o elemento de linha

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2\epsilon g_{0i}dtdx^i + \epsilon^2 .g_{ij}dx^i dx^j \quad (3.0.1)$$

Os termos ϵ e ϵ^2 , respectivamente, em g_{0i} e g_{ij} foram colocados para manter a ordem relativa dos mesmos em relação ao termo g_{00} . No limite Newtoniano da Relatividade Geral, tem-se que $g_{00} = -c^2 - 2\Phi$, $g_{0i} = 0$ e $g_{ij} = \delta_{ij}$, onde Φ representa o potencial gravitacional Newtoniano, com $\Phi \sim O(\epsilon^2)$. Já na teoria linearizada, são obtidas correções aos termos g_{0i} , deixando-o $g_{0i} = A_i$, e ao g_{ij} , deixando-o $g_{ij} = -(2\Phi/c^2)\delta_{ij}$. Esses termos são, respectivamente, os termos formais de linha de ordem $O(\epsilon^3)$ e $O(\epsilon^4)$, mas a métrica pós Newtoniana ainda requer uma correção de ordem $O(\epsilon^4)$ para o termo g_{00} . As relações acima estão representadas na Figura 4. Para encontrar o termo de correção para a métrica, deve-se começar supondo um termo de matéria que, por definição, será um fluido perfeito da forma

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p/c^2)u^\alpha u^\beta + pg^{\alpha\beta}, \quad (3.0.2)$$

onde \mathbf{u} representa a quadrivelocidade do fluido, na forma $\mathbf{u} = u^0[1, \mathbf{v}]$, que deve satisfazer a normalização

$$-c^2 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = (u^0)^2\{[-c^2 - 2\Phi + O(\epsilon^4)] + v^2 + O(\epsilon^4)\}. \quad (3.0.3)$$

Assim para encontrar a componente u^0 , tem-se a representação aberta da quadrivelocidade

$$\mathbf{u} = u_0 \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon u_0 v_1 \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon u_0 v_2 \frac{\partial}{\partial y} + \epsilon u_0 v_3 \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.0.4)$$

Figura 4 – Expansão pós Newtoniana dos componentes da métrica. O limite sem gravidade, espaço-tempo de Minkowski, está indicado pelos termos nas marcações cinzas. Os termos adicionados pela linearização da gravidade estão representados pelas caixas. E o termo de correção a ser calculado pelo limite pós Newtoniano está representado por um “?”.

Order	Newtonian			Post-Newtonian		Post-post-Newtonian	
	ϵ^0	ϵ^1	ϵ^2	ϵ^3	ϵ^4	ϵ^5	ϵ^6
$g_{00}/c^2 =$	-1		$-2\Phi/c^2$?		$+O(\epsilon^6)$
$g_{0i}/c =$				A_i/c		$+O(\epsilon^5)$	
$g_{ij} =$		δ_{ij}			$-(2\Phi/c^2)\delta_{ij}$		$+O(\epsilon^6)$

Fonte: (CREIGHTON J. D. E.; ANDERSON, 2011)

onde ϵ representa a ordem da expansão, e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. A normalização da quadrivelocidade pode ser expressa da forma, levando em consideração as componentes da Figura 4

$$-c^2 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2 u_0^2 + (u_0^2 v_1^2 + u_0^2 v_2^2 + u_0^2 v_3^2 - 2 u_0^2 \Phi(t, x, y, z))\epsilon^2, \quad (3.0.5)$$

isolando-se a componente u^0 na expressão de cima e, respectivamente, expandindo a expressão até a segunda ordem em ϵ , tem-se

$$\begin{aligned} u^0 &= c \sqrt{-\frac{1}{\epsilon^2 v_1^2 + \epsilon^2 v_2^2 + \epsilon^2 v_3^2 - 2 \epsilon^2 \Phi(t, x, y, z) - c^2}}, \\ &= 1 + \frac{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2 \Phi(t, x, y, z))\epsilon^2}{2 c^2}. \end{aligned} \quad (3.0.6)$$

Assim, unindo as componentes da velocidade \mathbf{v} e omitindo as dependências do potencial Φ , obtém-se

$$u^0 = 1 - \frac{\Phi}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2} + O(\epsilon^2). \quad (3.0.7)$$

A densidade ρ não contém apenas a densidade de massa bariônica de repouso do fluido - ρ_0 - mas também contém a energia interna específica $\rho_0 \Pi$, que inclui a energia de compressão, energia térmica, por unidade de massa de repouso; isto é $\rho c^2 := \rho_0(c^2 + \Pi)$. Por definição, ρ_0 é da ordem $O(\epsilon^2)$, uma vez que $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_0$, para o limite Newtoniano, e $\Phi \sim O(\epsilon^2)$. Para a expansão pós Newtoniana do tensor energia-momento, tem-se para a primeira componente (EPSTEIN R.; WAGONER, 1975)

$$T^{00} = \rho (u^0)^2, \quad (3.0.8)$$

onde

$$(u^0)^2 = \epsilon^2 \left(\frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{v_3^2}{c^2} - \frac{2\Phi}{c^2} \right) + 1, \quad (3.0.9)$$

realizado a multiplicação $\rho(u^0)^2$ e truncando a expressão resultante até a quarta ordem em ϵ , obtém-se

$$T^{00} = \frac{v_1^2 \rho_0(t)}{c^2} + \frac{v_2^2 \rho_0(t)}{c^2} + \frac{v_3^2 \rho_0(t)}{c^2} - \frac{2\Phi(t, x, y, z) \rho_0(t)}{c^2} + \frac{\Pi(t) \rho_0(t)}{c^2} + \rho_0(t), \quad (3.0.10)$$

assim, arrumando o resultado, tem-se para T^{00}

$$T^{00} = \rho_0 \left[1 + \left(\frac{\Pi}{c^2} - \frac{2\Phi}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \right) + O(\epsilon^6) \right]. \quad (3.0.11)$$

Já para as demais componentes T^{0i} e T^{ij} , o resultado é um pouco mais direto, onde

$$T^{0i} = \rho c (u^0)^2 (v^i/c) [1 + p/(\rho c^2)], \quad (3.0.12)$$

$$T^{ij} = \rho c (u^0)^2 (v^i v^j / c^2) [1 + p/(\rho c^2)] + p g^{ij}, \quad (3.0.13)$$

realizando uma substituição direta das grandezas dentro de cada um das componentes e truncando a expressão até a quarta ordem em ϵ , obtém-se as expressões

$$T^{0i} = \rho_0 c \left[\frac{v^i}{c} + O(\epsilon^5) \right], \quad (3.0.14)$$

$$T^{ij} = \rho_0 c^2 \left[\left(\frac{v^i v^j}{c^2} + \frac{p}{\rho_0 c^2} \delta^{ij} \right) + O(\epsilon^6) \right]. \quad (3.0.15)$$

Assim como para a métrica, as componentes da expansão para o tensor energia-momento, bem como suas ordens em relação ao parâmetro ϵ , $1/c$, estão expressos na Figura 5.

Figura 5 – Expansão pós Newtoniana para as componentes do tensor energia-momento. Os termos incluídos pela teoria linearizada estão representados com uma caixa.

Order	Newtonian	Post-Newtonian		Post-post-Newtonian	
	ϵ^2	ϵ^3	ϵ^4	ϵ^5	ϵ^6
$T^{00} =$	$\boxed{\rho_0}$		$+\rho_0(\Pi + v^2 - 2\Phi)/c^2$		$+O(\epsilon^6)$
$T^{0i} =$		$\boxed{\rho_0 v^i}$		$+O(\epsilon^5)$	
$T_{ij} =$			$\boxed{\rho_0 v^i v^j + p \delta^{ij}}$		$+O(\epsilon^6)$

Fonte: (CREIGHTON J. D. E.; ANDERSON, 2011)

Com as componentes da perturbação, é possível construir a equação de campo exata para uma métrica perturbada em coordenadas harmônicas. Tal equação de campo serve de ponto de partida para dois cálculos importantes, o cálculo da equação de movimento pós Newtoniano, que será responsável por descrever a dinâmica de um sistema que erradia ondas gravitacionais; e calcular a radiação gravitacional em uma zona de onda. A equação de campo exata pode ser expressa por

$$\square \bar{h}^{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} \tau^{\alpha\beta}, \quad (3.0.16)$$

onde \square é o operador d'Alembertiano do espaço plano, $\tau^{\alpha\beta}$ representa o tensor energia-momento efetivo, que inclui o tensor energia momento $T^{\alpha\beta}$ mais a correção de segunda ordem na perturbação - $O(h^2)$ - que se refere ao termo de auto-gravitação da onda emitida, o $t^{\alpha\beta}$. De forma que $\tau^{\alpha\beta} := T^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta}$, por essa razão a equação de campo 3.0.16 recebe a denominação de *exata*. A solução na zona de onda próxima na teoria linearizada, sem o termo de auto-gravitação, pode ser representado por

$$\bar{h}_{00}/c^2 = -\frac{4\Phi}{c^2} + O(\epsilon^4), \quad (3.0.17)$$

$$\bar{h}_{0i}/c = \frac{A_i}{c^2} + O(\epsilon^5), \quad (3.0.18)$$

$$\bar{h}_{ij} = O(\epsilon^5), \quad (3.0.19)$$

uma vez que é necessário encontrar a correção de ordem $O(\epsilon^4)$ para a métrica g_{00} , a premissa também é verdadeira para a componente h_{00} da perturbação, necessária para calcular a equação de movimento. Desse modo, para obter tal componente da perturbação, é necessário resolver a expressão

$$\begin{aligned} \square h^{00} &= \square \left(\bar{h}^{00} - \frac{1}{2} \eta^{00} \bar{h} \right) = \frac{1}{2} \square \bar{h}^{00} + \frac{1}{2c^2} \delta_{ij} \square \bar{h}^{ij}, \\ &= -\frac{8\pi G}{c^4} (\tau^{00} + c^{-2} \delta_{ij} \tau^{ij}). \end{aligned} \quad (3.0.20)$$

As componentes necessárias do tensor energia-momento, T^{00} e T^{ij} , já são conhecidas na primeira ordem pós Newtoniana, assim é necessário calcular a contribuição de auto-gravitação para o tensor energia-momento efetivo. Isto é

$$16\pi G t_{\alpha\beta} = -4 \frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\beta} - 8\Phi \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \eta_{\alpha\beta} [8\Phi \nabla^2\Phi + 6(\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Phi)], \quad (3.0.21)$$

que resultará na componente τ^{00} na forma

$$\tau^{00} = \rho_0 \left(1 + \frac{\Pi}{c^2} - \frac{4\Phi}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{3}{8\pi G c^2} (\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Phi), \quad (3.0.22)$$

da mesma maneira para a componente τ^{ij}

$$\begin{aligned} \tau^{ij} &= \rho_0 v^i v^j + p \delta^{ij} - \frac{1}{4\pi G} \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \frac{\partial\Phi}{\partial x^j} - \frac{1}{2\pi G} \Phi \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^i \partial x^j}, \\ &+ \frac{1}{8\pi G} \delta^{ij} [4\Phi \nabla^2\Phi + 3(\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Phi)]. \end{aligned} \quad (3.0.23)$$

Retornando ambos os resultados para a Equação (3.0.20), tem-se a expressão

$$\square h^{00} = -\frac{8\pi G}{c^4} \rho_0 \left(1 + \frac{\Pi}{c^2} - \frac{4\Phi}{c^2} + 2\frac{v^2}{c^2} + 3\frac{p}{\rho_0 c^2} \right) - \frac{1}{c^6} [8\Phi \nabla^2\Phi + 4(\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Phi)]. \quad (3.0.24)$$

Uma vez que o potencial Newtoniano satisfaz a equação $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_0$

$$\begin{aligned}\square h^{00} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h^{00}}{\partial t^2} + \nabla^2 h^{00}, \\ &= -\frac{8\pi G}{c^4} \rho_0 \left(1 + \frac{\Pi}{c^2} + 2\frac{v^2}{c^2} + 3\frac{p}{\rho_0 c^2} \right) - \frac{4}{c^6} [(\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Phi)].\end{aligned}\quad (3.0.25)$$

A expressão acima pode ser expressa em termos de três potenciais, o já conhecido potencial Newtoniano Φ , o potencial pós Newtoniano Ψ , e o super potencial χ . Com eles, a expressão para a componente h^{00} da perturbação se reduz para a forma

$$h^{00} = \frac{1}{c^2} \left\{ -\frac{2\Phi}{c^2} - 2 \left(\frac{\Phi}{c^2} \right)^2 + \frac{4\Psi}{c^2} - \frac{1}{c^4} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right\}, \quad (3.0.26)$$

onde, cada um dos potenciais devem satisfazer, respectivamente

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_0, \quad (3.0.27)$$

$$\nabla^2\Psi = 4\pi G\rho_0 \left(\frac{1}{2} \frac{\Pi}{c^2} - \frac{\Phi}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{p}{\rho_0 c^2} \right), \quad (3.0.28)$$

$$\nabla^2\chi = 2\Phi, \quad (3.0.29)$$

os quais tem suas soluções, respectivamente, na forma

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -G \int \frac{\rho_0(\mathbf{x}', t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3\mathbf{x}', \quad (3.0.30)$$

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = +G \int \frac{\rho_0(\mathbf{x}', t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \left(\frac{1}{2} \frac{\Pi(\mathbf{x}', t)}{c^2} - \frac{\Phi(\mathbf{x}', t)}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{p(\mathbf{x}', t)}{\rho_0(\mathbf{x}', t)c^2} \right) d^3\mathbf{x}', \quad (3.0.31)$$

$$\chi(\mathbf{x}, t) = -G \int \rho_0(\mathbf{x}', t) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| d^3\mathbf{x}'. \quad (3.0.32)$$

Nesse ponto, a métrica $g^{\alpha\beta}$ na zona de onda próxima pode ser encontrada e, conseqüentemente, a equação de movimento $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ também pode ser. Para o caso da zona de onda distante, ou simplesmente *zona de onda*, para a métrica perturbada nesse caso, tem-se a expressão

$$\bar{h}^{\alpha\beta}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{\tau^{\alpha\beta}(t - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|/c, \mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3\mathbf{x}, \quad (3.0.33)$$

onde $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^{-1} \approx r^{-1}$, mas agora será considerado o efeito de retardo dentro da integração. No gauge transverso e de traço nulo - TT-gauge - a integral a ser calculada é

$$h_{TT}^{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4 r} \int \tau_{TT}^{ij}(t - r/c + \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}', \mathbf{x}') d^3\mathbf{x}, \quad (3.0.34)$$

expressão que, ao se expandir em multipolos, torna-se

$$h_{TT}^{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4 r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \int \tau_{TT}^{ij}(t - r/c, \mathbf{x}') (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}'/c)^m d^3\mathbf{x}, \quad (3.0.35)$$

onde $\hat{n} = \mathbf{x}/r$, é interessante notar que cada momento múltiplo superior introduzirá um fator adicional de $1/c$. Os momentos do quadrupolo e do octupolo podem ser simplificados usando as identidades abaixo (EPSTEIN R.; WAGONER, 1975)

$$\tau^{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (x^i x^j \tau^{00}) + \frac{\partial}{\partial x^k} (x^i \tau^{jk} + x^j \tau^{ki}) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} (x^i x^j \tau^{kl}), \quad (3.0.36)$$

$$\tau^{ij} x^k = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\tau^{0i} x^j x^k + \tau^{0j} x^i x^k - \tau^{0k} x^i x^j) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^l} (\tau^{li} x^j x^k + \tau^{lj} x^i x^k - \tau^{lk} x^i x^j), \quad (3.0.37)$$

ambos, saem da conservação do tensor energia-momento efetivo, $\partial \tau^{\mu\alpha} / \partial x^\mu = 0$. De modo que se obtêm a solução para a perturbação na forma

$$h_{TT}^{ij} = \frac{2G}{c^4 r} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{n}_{k_1} \hat{n}_{k_2} \cdots \hat{n}_{k_m} I^{ij k_1 k_2 \cdots k_m} (t - r/c) \right]_{TT}, \quad (3.0.38)$$

assim, tem-se

$$I^{ij}(t) := \tau^{00}(t, \mathbf{x}) x^i x^j d^3 \mathbf{x}, \quad (3.0.39)$$

$$I^{ijk}(t) := \int [\tau^{0i}(t, \mathbf{x}) x^j x^k + \tau^{0j}(t, \mathbf{x}) x^i x^k - \tau^{0k}(t, \mathbf{x}) x^i x^j] d^3 \mathbf{x}, \quad (3.0.40)$$

$$I^{ij k_1 k_2 \cdots k_m}(t) := \frac{2}{m!} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int \tau^{ij}(t, \mathbf{x}) x^{k_1} x^{k_2} \cdots x^{k_m} d^3 \mathbf{x} \quad (m \geq 2). \quad (3.0.41)$$

É importante ressaltar que os termos de superfície nas integrais foram ignorados nos cálculos pois, na zona de onda, não há fonte de matéria e o campo gravitacional é considerado fraco. A equação (3.0.38) expressa a perturbação da métrica na zona de onda.

Além da perturbação, outras grandezas podem ser encontradas, uma vez conhecido as expressões para os multipolos. Como por exemplo, a energia perdida devido à emissão de radiação gravitacional por uma fonte, a partir da expressão

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dt d\Omega} &= \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \left\langle \dot{h}_{TT}^{ij} \dot{h}_{ij}^{TT} \right\rangle = \frac{G}{8\pi c^5} \left\langle \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \hat{n}_{k_1} \cdots \hat{n}_{k_p} \hat{n}^{l_1} \cdots \hat{n}^{l_p} \right. \\ &\quad \times \left(\ddot{\mathcal{F}}^{ij k_1 \cdots k_p} \ddot{\mathcal{F}}_{ij l_1 \cdots l_p} - 2\hat{n}_i \hat{n}^j \ddot{\mathcal{F}}^{im k_1 \cdots k_p} \ddot{\mathcal{F}}_{j m l_1} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \hat{n}_i \hat{n}_j \hat{n}^m \ddot{\mathcal{F}}_{ij l_1 \cdots l_p} - 2\hat{n}_i \hat{n}^j \ddot{\mathcal{F}}^{im k_1 \cdots k_p} \ddot{\mathcal{F}}_{j m l_1} \right) \right\rangle, \quad (3.0.42) \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{F}^{ij k_1 \cdots k_p} := I^{ij k_1 \cdots k_p} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \delta_{mn} I^{mn k_1 \cdots k_p}. \quad (3.0.43)$$

E, ao realizar a integral abaixo em torno de um ângulo sólido usando a identidade

$$\frac{1}{4\pi} \int n_{k_1} \cdots n_{k_m} d\Omega = \begin{cases} \frac{(\delta_{k_1 k_2} \cdots \delta_{k_{m-1} k_m} + \text{perturbações})}{(m+1)!!}, & \text{m iguais} \\ 0, & \text{m diferentes} \end{cases}, \quad (3.0.44)$$

resultando na luminosidade da onda gravitacional, ou a potência irradiada pela mesma, na forma

$$L_{GW} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{\ddot{\mathbf{F}}}^{ij} \ddot{\ddot{\mathbf{F}}}_{ij} \rangle + \frac{1}{105} \frac{G}{c^5} \langle 11 \ddot{\ddot{\mathbf{F}}}^{ijk} \ddot{\ddot{\mathbf{F}}}_{ijk} - 6 \delta_{ij} \delta^{lm} \ddot{\ddot{\mathbf{F}}}^{ijk} \ddot{\ddot{\mathbf{F}}}_{ilm} - 6 \ddot{\ddot{\mathbf{F}}}^{ijk} \ddot{\ddot{\mathbf{F}}}_{ijk} \\ + 22 \delta^{kl} \ddot{\ddot{\mathbf{F}}}^{ij} \ddot{\ddot{\mathbf{F}}}_{ijkl} - 24 \delta^{kl} \ddot{\ddot{\mathbf{F}}}^{ij} \ddot{\ddot{\mathbf{F}}}_{iklj} \rangle + \text{termos de ordem superior.} \quad (3.0.45)$$

3.1 SISTEMA DE PARTÍCULAS PONTUAIS

Uma ótima aplicação do formalismo pós Newtoniano é a construção de um sistema gravitante de N partículas, por exemplo os planetas no Sistema solar, ou dois corpos orbitantes. Para um sistema de partículas pontuais, as componentes do tensor energia-momento podem ser expressas por

$$T^{00} = \sum_A m_A \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{c^2} - \sum_{B \neq A} \frac{G m_B}{c^2 r_{AB}} \right\} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A(t)), \quad (3.1.1)$$

$$T^{0j} = \sum_A m_A v_A^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A(t)), \quad (3.1.2)$$

$$T^{ij} = \sum_A m_A v_A^i v_A^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A(t)), \quad (3.1.3)$$

onde m_A é a massa da partícula A , \mathbf{x}_A é a posição dessa partícula, \mathbf{v}_A sua velocidade, e $r_{AB} := \|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B\|$ representa a distância entre as partículas A e B . Já o tensor energia-momento pode ser expresso, em termos de suas componentes, por

$$\tau^{00} = \sum_A m_A \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{c^2} - \sum_{B \neq A} \frac{G m_B}{c^2 r_{AB}} \right\} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A(t)) \\ - \frac{1}{8\pi G c^2} [4\Phi \nabla^2 \Phi + 3(\nabla \Phi) \cdot (\nabla \Phi)], \quad (3.1.4)$$

$$\tau^{0j} = \sum_A m_A v_A^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A(t)), \quad (3.1.5)$$

$$\tau^{ij} = \sum_A m_A v_A^i v_A^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A(t)) + \frac{1}{8\pi G} \left\{ -2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} - 4\Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} \right. \\ \left. + \delta^{ij} [4\Phi \nabla^2 \Phi + 3(\nabla \Phi) \cdot (\nabla \Phi)] \right\}, \quad (3.1.6)$$

onde

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = - \sum_B \frac{G m_B}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_B(t)\|}. \quad (3.1.7)$$

3.1.1 Métrica pós Newtoniana

Para que seja possível calcular a equação de movimento pós Newtoniana para um sistema de partículas pontuais, é necessário primeiro calcular todos os potenciais adicionais envolvidos. Para o potencial pós Newtoniano Ψ , tem-se

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4} \sum_A \frac{G m_A}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_A(t)\|} \left(3 \frac{v_A^2}{c^2} - 2 \sum_{B \neq A} \frac{G m_B}{c^2 r_{AB}} \right). \quad (3.1.8)$$

Já para o super potencial χ , tem-se

$$\chi(\mathbf{x}, t) = -G \sum_A m_A \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_A\|. \quad (3.1.9)$$

Desse modo, as componentes da métrica $g_{\mu\nu}$ poderão ser expressas da forma como se segue

$$\begin{aligned} g_{00} &= -c^2 + h_{00} = -c^2 - 2\Phi - 2 \frac{\Phi^2}{c^2} + \frac{4\Psi}{c^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + O(\epsilon^6), \\ &= -c^2 + 2 \sum_A \frac{G m_A}{r_A} - 2 \frac{1}{c^2} \left(\sum_A \frac{G m_A}{r_A} \right)^2 + 3 \sum_A \frac{G m_A}{r_A} \frac{v_A^2}{c^2} \\ &\quad - \sum_A \sum_{B \neq A} \frac{G m_A}{r_A} \frac{G m_B}{c^2 r_{AB}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + O(\epsilon^6), \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

$$g_{0i} = -4 \sum_A \frac{G m_A}{c^2 r_A} (v_A)_i + O(\epsilon^5), \quad (3.1.11)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + 2 \sum_A \frac{G m_A}{c^2 r_A} \right) + O(\epsilon^6), \quad (3.1.12)$$

onde $\mathbf{r}_A := \mathbf{x} - \mathbf{x}_A$. É importante ressaltar que o super potencial descreve o centro de massa do sistema de partículas pontuais, já sua segunda derivada descreve a aceleração do sistema de coordenadas com respeito ao centro de massa do sistema.

É possível realizar uma transformação de coordenadas no gauge padrão pós Newtoniano afim de eliminar o super potencial da componente g_{00} da métrica. Ao fazer um transformação infinitesimal de coordenadas da forma $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}$, que induzirá uma mudança na métrica da forma

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta}, \quad (3.1.13)$$

como a mudança procurada será apenas em g_{00} , uma escolha razoável para a transformação infinitesimal é

$$\xi_0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \xi_i = 0, \quad (3.1.14)$$

transformação que levará para a métrica

$$g_{00} \rightarrow g'_{00} = g_{00} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}, \quad (3.1.15)$$

$$g_{0i} \rightarrow g'_{0i} = g_{0i} + \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (3.1.16)$$

$$g_{ij} \rightarrow g'_{ij} = g_{ij}. \quad (3.1.17)$$

E, desde que, a derivada do super potencial pode ser expressa por

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \chi}{\partial t} = \sum_A \frac{G m_A}{r_A} \left\{ \mathbf{v}_A - \frac{(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}_A)}{r_A^2} \mathbf{r}_A \right\}, \quad (3.1.18)$$

as componentes da métrica pós Newtoniana de primeira ordem, no gauge padrão, serão expressas por

$$g_{00} = -c^2 + 2 \sum_A \frac{G m_A}{r_A} - 2 \frac{1}{c^2} \left(\sum_A \frac{G m_A}{r_A} \right)^2 + 3 \sum_A \frac{G m_A}{r_A} \frac{v_A^2}{c^2} - 2 \sum_A \sum_{B \neq A} \frac{G m_A G m_B}{r_A c^2 r_{AB}} + O(\epsilon^6), \quad (3.1.19)$$

$$g_{0i} = -\frac{7}{2} \sum_A \frac{G m_A}{c^2 r_A} (v_A)_i - \frac{1}{2} \sum_A \frac{G m_A (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}_A)}{c^2 r_A^3} (r_A)_i + O(\epsilon^5), \quad (3.1.20)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + 2 \sum_A \frac{G m_A}{c^2 r_A} \right) + O(\epsilon^6). \quad (3.1.21)$$

3.1.2 Equação de movimento com a métrica pós Newtoniana

Dada a métrica pós Newtoniana, é fato que a equação de movimento para todos os corpos de um sistema pode ser encontrada a partir da *equação da geodésica*, mas uma maneira fácil e eficiente de obter o mesmo resultado é calculando a *equação de Euler-Lagrange* e, além disso, é possível encontrar a energia do sistema a partir da Hamiltoniana. Essa Lagrangiana pode ser expressa da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &:= - \sum_A m_A c^2 \frac{d\tau}{dt} = - \sum_A m_A c \sqrt{-g_{00} - 2g_{0i} v_A^i - g_{ij} v_A^i v_A^j}, \\ &= - \sum_A m_A \left(c^2 - \frac{1}{2} v_A^2 - \frac{1}{8} \frac{v_A^4}{c^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_A \sum_{B \neq A} \frac{G m_A m_B}{r_{AB}} \left[1 + 3 \frac{v_A^2}{c^2} - \sum_{C \neq A} \frac{G m_C}{c^2 r_{AC}} - \frac{7 \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B}{2 c^2} \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}_{AB})(\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{r}_{AB})}{c^2 r_{AB}^2} \right], \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

a equação de Euler-Lagrange é representada por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_A^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A^i}, \quad (3.1.23)$$

onde

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_A^j \frac{\partial}{\partial x_A^j},$$

e, então, a equação de movimento será

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = & - \sum_{B \neq A} \frac{G m_B \mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}^3} \left[1 - 4 \sum_{C \neq A} \frac{G m_C}{c^2 r_{AC}} + \sum_{C \neq A, B} \left(\frac{G m_C}{c^2 r_{BC}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{G m_C (\mathbf{r}_{AB} \cdot \mathbf{r}_{BC})}{c^2 r_{BC}^3} \right) - 5 \frac{G m_A}{c^2 r_{AB}} + \frac{v_A^2}{c^2} - 4 \frac{\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B}{c^2} \right. \\ & \left. + 2 \frac{v_B^2}{c^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{r}_{AB}}{c r_{AB}} \right)^2 \right] - \frac{7}{2} \sum_{B \neq A} \frac{G m_B}{r_{AB}} \sum_{C \neq A, B} \frac{G m_C \mathbf{r}_{BC}}{c^2 r_{BC}^3} \\ & + \sum_{B \neq A} \frac{G m_B \mathbf{r}_{AB} \cdot (4\mathbf{v}_A - 3\mathbf{v}_B)}{r_{AB}^3 c^2} (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B), \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

a expressão acima é mais conhecida como *equação de Einstein-Infeld-Hoffman*. E a energia total do sistema pode ser encontrada ao se calcular a Hamiltoniana, na forma

$$\mathcal{H} := \sum_A \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{v}_A - \mathcal{L}, \quad (3.1.25)$$

onde

$$(p_A)_j := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_A^j}.$$

3.1.3 Radiação Gravitacional

A perturbação da métrica, expressa no gauge-TT, na zona de onda pode ser expressa - de acordo com a Equação (3.0.38) - da forma

$$h_{\text{TT}}^{ij} = \frac{2G}{c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[I^{ij}(t - r/c) + \hat{n}_k I^{ijk}(t - r/c) + \hat{n}_k \hat{n}_l I^{ijkl}(t - r/c) \right]_{\text{TT}}. \quad (3.1.26)$$

Para obter essa métrica perturbada em sua primeira ordem, é necessário calcular as projeção transversas e de traço nulo dos multipolos I^{ij} , I^{ijk} , e I^{ijkl} . Primeiro, para I^{ij} expresso na Equação (3.0.39), tem-se

$$\begin{aligned} I^{ij} & := \int \tau^{00} x^i x^j d^3 \mathbf{x}, \\ & = \sum_A m_A x_A^i x_A^j \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{c^2} - \frac{1}{2} \sum_{B \neq A} \frac{G m_B}{c^2 r_{AB}} \right) \\ & \quad + \text{termos que desaparecem sob a projeção TT}, \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

o resultado acima é obtido a partir de múltiplas integrações por parte e, uma vez que há fontes

localizadas, os termos de superfície são descartados. Para a componente I^{ijk} da perturbação, de acordo com a Equação (3.0.40), ficará

$$\begin{aligned} I^{ijk} &:= \int (\tau^{0i} x^j x^k + \tau^{0j} x^i x^k - \tau^{0k} x^i x^j) d^3 \mathbf{x}, \\ &= \sum_A m_A (v_A^i x_A^j x_A^k + v_A^j x_A^i x_A^k - v_A^k x_A^i x_A^j), \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

os mesmo procedimentos de integração do termo anterior devem ser aplicados. Para o último termo I^{ijkl} , expresso na Equação (3.0.41) com $m = 2$, tem-se

$$\begin{aligned} I^{ijkl} &:= \int \tau^{ij} x^k x^l d^3 \mathbf{x}, \\ &= \sum_A m_A v_A^i v_A^j x_A^k x_A^l - \frac{1}{4\pi G} \int \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} x^k x^l d^3 \mathbf{x} \\ &\quad + \text{termos que desaparecem sob a projeção TT}, \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

aplicando novamente a integração por partes e descartando termos de superfície, realizando a integral do ultimo termo sabendo que Φ é expresso por Equação (3.1.7), o termo I^{ijkl} resulta em

$$\begin{aligned} I^{ijkl} &:= \int \tau^{ij} x^k x^l d^3 \mathbf{x} - \frac{1}{12} \sum_A \sum_{B \neq A} \frac{G m_A m_B r_{AB}^i r_{AB}^j}{r_{AB}} \\ &\quad \times \left[\delta^{kl} \frac{1}{r_{AB}^2} (2r_{AB}^k r_{AB}^l - 3r_{AB}^k x_A^l - 3r_{AB}^l x_A^k + 6x_A^k x_A^l) \right] \\ &\quad + \text{termos que desaparecem sob a projeção TT}. \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

Assim, em fim, a expressão para a perturbação da métrica no gauge-TT será (CREIGHTON J. D. E.; ANDERSON, 2011)

$$\begin{aligned} h_{\text{TT}}^{ij} &= \frac{2G}{c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_A m_A \left\{ \left(1 - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_A}{c} + \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{c^2} \right) x_A^i x_A^j \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{B \neq A} \frac{G m_B}{c^2 r_{AB}^2} x_A^i x_A^j + \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}_A \frac{(v_A^i x_A^j + v_A^j x_A^i)}{c} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x})^2 \frac{v_A^i v_A^j}{c} \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} \sum_A \sum_{B \neq A} \frac{G m_A m_B r_{AB}^i r_{AB}^j}{r_{AB}} \left[1 - \left(\frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}} \right)^2 + 6 \left(\frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}_A}{r_{AB}} \right)^2 \right] \right\}_{\text{TT}}. \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

Além da perturbação, a luminosidade dessa onda gravitacional pode ser encontrada a partir da expressão abaixo

$$L_{\text{GW}} = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \int \left\langle \left(\frac{\partial h_{ij}^{\text{TT}}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial h_{\text{TT}}^{ij}}{\partial t} \right) \right\rangle d\Omega. \quad (3.1.32)$$

3.2 MOVIMENTO PÓS NEWTONIANO DE DOIS CORPOS

Um exemplo muito importante de sistemas que irradiam ondas gravitacionais são os sistemas binários, como por exemplo um sistema de duas estrelas de nêutrons ou dois buracos negros. Para o caso de dois corpos, a Lagrangiana expressa na Equação (3.1.22) será reduzida para

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -(m_1 + m_2)c^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{8}m_1\frac{v_1^4}{c^2} + \frac{1}{8}m_2\frac{v_2^4}{c^2} \\ & + \frac{Gm_1m_2}{r_{12}} \left[1 + \frac{3v_1^2 + v_2^2}{2c^2} - \frac{1}{2} \frac{G(m_1 + m_2)}{c^2 r_{12}} - \frac{7\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{2c^2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})}{c^2 r_{12}^2} \right], \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

já a Hamiltoniana, dada pela Equação (3.1.25), será

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & (m_1 + m_2)c^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{3}{8}m_1\frac{v_1^4}{c^2} + \frac{3}{8}m_2\frac{v_2^4}{c^2} \\ & - \frac{Gm_1m_2}{r_{12}} \left[1 - \frac{3v_1^2 + v_2^2}{2c^2} - \frac{1}{2} \frac{G(m_1 + m_2)}{c^2 r_{12}} + \frac{7\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{2c^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})}{c^2 r_{12}^2} \right], \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

onde

$$\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{c^2}m_1\mathbf{v}_1 + \frac{Gm_1m_2}{c^2 r_{12}} \left[3\mathbf{v}_1 - \frac{7}{2}\mathbf{v}_2 - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12} \right], \quad (3.2.3)$$

expressão análoga para \mathbf{p}^2 . Para expressar as grandezas acima nas coordenadas do centro de massa, tem-se as igualdades

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{M}\mathbf{a}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{M}\mathbf{a}, \quad \mathbf{v}_1 = -\frac{m_2}{M}\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{m_1}{M}\mathbf{v}, \quad (3.2.4)$$

com $M := m_1 + m_2$ e $\mathbf{a} := \mathbf{r}_{12}$. A Hamiltoniana do sistema, nas coordenadas do centro de massa, ficará expressa por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} := E = & M c^2 + \mu \left\{ \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{a} + \frac{3}{8}(1 - 3\eta)\frac{v^4}{c^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{GM}{c^2 a} \left(\frac{GM}{a} + (3 + \eta)v^2 + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2}{a^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

onde $\mu := m_1m_2/M$ é a massa reduzida do sistema, e $\eta := \mu/M$ é a razão simétrica de massa. A equação de movimento, nas coordenadas do centro de massa, será dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = & -\frac{GM}{a^3}\mathbf{a} \left[1 + (4 + 2\eta)\frac{GM}{c^2 a} + (1 + 3\eta)\frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{2}\eta\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2}{c^2 a^2} \right] \\ & + (4 - 2\eta)\frac{GM}{c^2 a^3}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Se, por suposição, os dois corpos estão em uma orbita circular então $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$ e a equação de movimento será reduzida à

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM}{a^3} \mathbf{a} \left[1 + (4 + 2\eta) \frac{GM}{c^2 a} + (1 + 3\eta) \frac{v^2}{c^2} \right]. \quad (3.2.7)$$

E, desde que $\dot{\mathbf{v}} = -\omega^2 \mathbf{a}$, a *lei de Kepler* se modifica na primeira ordem pós-Newtoniana para a forma

$$\omega^2 = \frac{GM}{a^3} \left[1 + \frac{GM}{c^2 a} (\eta - 3) \right]. \quad (3.2.8)$$

E, desde que $v = \omega a$, tem-se

$$v = \frac{GM}{a} \left[1 - (3 - \eta) \frac{GM}{c^2 a} \right]. \quad (3.2.9)$$

Além disso, as expressões para a energia e para a luminosidade da onda irradiada podem ser calculadas, como se segue, respectivamente

$$E = M c^2 - \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{1}{8} \mu \frac{v^4}{c^2} (5 - 3\eta), \quad (3.2.10)$$

e

$$L_{GW} = \frac{32c^5}{5G} \eta^2 \left(\frac{GM}{c^2 a} \right)^2 \left[1 - \frac{GM}{c^2 a} \left(\frac{2927}{336} + \frac{5}{4} \eta \right) \right]. \quad (3.2.11)$$

Com as expressões acima, é possível usar o equilíbrio de energia para calcular a evolução orbital até a primeira ordem pós-Newtoniana, e para isso será definida uma nova varável: o parâmetro pós Newtoniano expresso por

$$x := \left(\frac{GM\omega}{c^3} \right)^{2/3}. \quad (3.2.12)$$

De modo que

$$x = \frac{v^2}{c^2} \left[1 + \frac{2}{3} (3 - \eta) \frac{v^2}{c^2} \right]. \quad (3.2.13)$$

Com a definição do parâmetro pós Newtoniano, é possível encontrar a expressão para a função Energia - $\mathcal{E} := E - M c^2$ - e para a função Fluxo - $\mathcal{F} := G L_{GW}/c^5$ - de modo que

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{2} \eta x \left[1 - \frac{1}{12} (9 + \eta) x \right], \quad (3.2.14)$$

e

$$\mathcal{F}(x) = -\frac{32}{5} \eta^2 x^2 \left[1 - \left(\frac{1247}{336} + \frac{35}{12} \eta \right) x \right]. \quad (3.2.15)$$

3.2.1 Modelos de Aproximação pós Newtoniana

A dinâmica de dois corpos na relatividade geral pode ser resolvida perturbativamente usando a aproximação pós Newtoniana. A evolução da fase orbital e a radiação gravitacional emitida são agora conhecidas em uma ordem bastante alta até $O(v^8)$, sendo v a velocidade característica de um sistema binário. A evolução orbital, no entanto, não pode ser especificada de forma única devido à liberdade inerente na escolha do parâmetro usado na expansão pós Newtoniana, bem como o método seguido na resolução das equações diferenciais relevantes para o problema.

O problema do uso dessas aproximações é complicado, pois a aproximação pós Newtoniana não leva a um modelo único de evolução de fase. Além disso, embora os resultados pós Newtoniana sejam bons até velocidades moderadamente relativísticas, os modelos das aproximações pós Newtonianas padrão tornam-se cada vez menos precisos no regime fortemente relativístico à medida que se aproxima da última órbita estável (LSO). Entretanto, para o enfoque do presente trabalho, que foca apenas na fase *Inspiral* de um sistema binário, as aproximações pós Newtonianas são eficientes o bastante (BUONANNO et al., 2009).

As aproximações pós Newtonianas são responsáveis por calcular a evolução da fase orbital $\phi(t)$ de um sistema binário compacto como uma expansão perturbativa em um pequeno parâmetro, normalmente tomado como o parâmetro pós newtoniano x , dado pela Equação (3.2.13). Em uma aproximação adiabática, ou seja, quando não há perdas ou mudanças significativas de energia ou dos parâmetros orbitais do sistema durante o tempo em que o mesmo está sendo analisado; e para a forma de onda restrita, caso em que a fase da onda gravitacional é o dobro da fase orbital, a teoria permite que a evolução da fase orbital seja especificada por um par de equações diferenciais na forma $\dot{\phi}(t) = v^3/M$, $\dot{v} = -\mathcal{F}/E'(v)$; onde - como supracitado - M é a massa total do sistema, \mathcal{F} é a luminosidade da onda gravitacional e $E'(v)$ é a derivada da energia de ligação em relação a v . Uma vez que a razão $\mathcal{F}/E'(v)$ pode ser tratada de maneiras diferentes mantendo a mesma ordem, surgirão métodos diferentes de aproximação pós Newtoniana, e tais representações que serão mostradas mais a frente são possível pois estarão lidando com séries perturbativas.

No presente trabalho, serão considerados apenas os sistemas que estão em uma órbita quase circular durante a fase *Inspiral*, também serão desprezados os respectivos spins, o que significa que a preocupação será focada apenas nas massas dos corpos que compõe uma binária. Para a construção das aproximações, as grandezas fundamentais para tal finalidade serão a Energia conservada de ordem 3PN (ordem 3 pós Newtoniana) $\mathcal{E}_3(x)$, e o fluxo de energia de ordem 3.5PN $\mathcal{F}_{3.5}(x)$. Respectivamente expressos por

$$\mathcal{E}_3(x) = -\frac{1}{2}\eta x \left\{ 1 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{12}\eta \right) x - \left(\frac{27}{8} - \frac{19}{8}\eta + \frac{1}{24}\eta^2 \right) x^2 - \left[+ \frac{675}{64} - \left(\frac{34445}{576} - \frac{205}{96}\pi^2 \right) \eta + \frac{155}{96}\eta^2 + \frac{35}{5184}\eta^3 \right] x^3 \right\}, \quad (3.2.16)$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(x) = & \frac{32}{5}\eta^2 x^5 \left\{ 1 + \left(\frac{1247}{336} + \frac{35}{12}\eta \right) x + 4\pi x^{3/2} - \left(\frac{44711}{9072} - \frac{9271}{504}\eta - \frac{65}{18}\eta^2 \right) x^2 \right. \\
& - \left(\frac{8191}{672} + \frac{583}{24}\eta \right) \pi x^{5/2} + \left[\frac{6643739519}{69854400} + \frac{16}{3}\pi^2 - \frac{1712}{105}\gamma_E \right. \\
& - \frac{94403}{105} \ln(16x) + \left(\frac{41}{48}\pi^2 - \frac{134543}{7776} \right) \eta - \frac{94403}{3024}\eta^2 - \frac{775}{324}\eta^3 \left. \right] x^3 \\
& \left. - \left(\frac{16285}{504} - \frac{214745}{1728}\eta - \frac{193385}{3024}\eta^2 \right) \pi x^{7/2} \right\}, \tag{3.2.17}
\end{aligned}$$

onde $\gamma = 0.577216 \dots$ representa a constante de Euler. As ordens das expansões PN podem ficar mais evidente a partir das expressões que estão representadas a seguir, uma vez que para ambas as expressões a ordem das expansões se dará pelo maior expoente de x , que multiplica respectivamente, \mathcal{E}_N e \mathcal{F}_N . Por exemplo, na Equação 3.2.16, o termo de maior ordem que multiplica \mathcal{E}_N é x^3 , então a ordem pós Newtoniana é 3PN. Já para a equação 3.2.17, o termo de maior ordem que multiplica \mathcal{F}_N é $x^{7/2}$, então a ordem pós Newtoniana é 3.5PN. As expressões são

$$\mathcal{E}_{T_n}(x) \equiv \mathcal{E}_N \sum_{k=0}^n \hat{\mathcal{E}}_k(\eta) x^k, \tag{3.2.18}$$

$$\mathcal{F}_{T_n}(x) \equiv \mathcal{F}_N \left[\sum_{k=0}^n \hat{\mathcal{F}}_k(\eta) x^{k/2} + \sum_{k=6}^n \mathcal{F}_k(\eta) \log(x/x_0) x^{k/2} \right], \tag{3.2.19}$$

onde

$$\mathcal{E}_N = -\frac{1}{2}\eta x, \quad \mathcal{F}_N = \frac{32}{5}\eta^2 x^5.$$

Na aproximação adiabática, é possível escrever uma equação para a evolução de qualquer parâmetro da binária, por exemplo, a evolução da separação orbital $r(t)$ pode ser escrita como

$$\dot{r}(t) = \frac{\dot{\mathcal{E}}}{(\mathcal{E}/dr)} = -\frac{\mathcal{F}}{(\mathcal{E}/dr)}, \tag{3.2.20}$$

que, juntamente com a Lei de Kepler, a equação do balanço de energia pode ser usada para construir a expressão para a evolução da fase orbital do sistema

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{c^3}{GM} \frac{\mathcal{F}}{d\mathcal{E}/dx}, \tag{3.2.21}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c^3}{GM} x^{3/2}, \tag{3.2.22}$$

ou, equivalentemente

$$t(x) = t_c + \frac{GM}{c^3} \int_x^{x_c} \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{d\mathcal{E}}{dx} dx, \quad (3.2.23)$$

$$\varphi(x) = \varphi_c + \int_x^{x_c} x^{3/2} \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{d\mathcal{E}}{dx} dx, \quad (3.2.24)$$

onde x_c é definido pela frequência terminal (a frequência de "coalescência"), t_c e φ_c são, respectivamente, o tempo e a fase dessa frequência.

3.2.1.1 Taylor T1

A aproximação *Taylor T1* refere-se à escolha correspondente em deixar as expansões PN da luminosidade $\mathcal{F}(x)$ e da derivada da energia $\mathcal{E}'(x)$ conforme nas Equações (3.2.16, 3.2.17). Então, é apenas necessário resolver as equações diferenciais numericamente (BUONANNO et al., 2009)

$$\frac{dx^{(T1)}}{dt} = -\frac{c^3}{GM} \frac{\mathcal{F}}{d\mathcal{E}/dx}, \quad (3.2.25)$$

$$\frac{d\varphi^{(T1)}}{dt} = \frac{c^3}{GM} x^{3/2}. \quad (3.2.26)$$

Um passo para a resolução dessas EDOs é definir a frequência inicial da onda gravitacional como f_0 , ou, equivalentemente, definindo o parâmetro inicial

$$x_0 = \left(\frac{\pi GM f_0}{c^3} \right)^{2/3}. \quad (3.2.27)$$

3.2.1.2 Taylor T2

O método TaylorT2 é baseado na segunda forma das relações de fase expressas nas Equações (3.2.23, 3.2.24). Ao expandir a proporção dos polinômios $\mathcal{F}(x)/\mathcal{E}'(x)$ nestas equações, para ordem PN consistente, ou seja, para a proporção $\mathcal{F}[\mathcal{E}]$ temos as ordens 2[2], 3[3] e 3.5[3], que gerarão as respectivas ordens 2, 3 e 3.5PN; então, ao integrar essas quantidades, obtém-se um par de equações paramétricas para $\varphi(x)$ e $t(x)$. Esse par encontrado pode ser expresso da forma:

$$\varphi_{n/2}^{(T2)}(x) = \varphi_c^{(T2)} + \varphi_N^x(x) \sum_{k=0}^n \hat{\varphi}_k^x x^{k/2}, \quad (3.2.28)$$

$$t_{n/2}^{(T2)}(x) = t_c^{(T2)} + t_N^x(x) \sum_{k=0}^n \hat{t}_k^x x^{k/2}. \quad (3.2.29)$$

Uma ressalva importante referente a todos os modelos apresentados no presente trabalho, o TaylorT2 é computacionalmente o mais caro. Isso ocorre porque a evolução de fase envolve a resolução de um par de equações transcendentais que consome muito tempo e memória. Ainda sim, o resultado

desse par de equações pode ser expresso, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \varphi_{3.5}^{(T2)}(x) = & \varphi_c - \frac{1}{32\eta} x^{-5/2} \left\{ 1 + \left(\frac{3715}{1008} + \frac{55}{12}\eta \right) x - 10\pi x^{3/2} + \left(\frac{15293365}{1016064} + \frac{27145}{1008}\eta + \frac{3085}{144}\eta^2 \right) x^2 \right. \\ & + \left(\frac{38645}{1344} - \frac{65}{16}\eta \right) \ln \left(\frac{x}{x_0} \right) \pi x^{5/2} + \left[\frac{12348611926451}{18776862720} - \frac{160}{3}\pi^2 - \frac{1712}{21}\gamma_E \right. \\ & - \frac{856}{21} \ln(16x) + \left(-\frac{15737765635}{12192768} + \frac{2255}{48}\pi^2 \right) \eta + \frac{76055}{6912}\eta^2 - \frac{127825}{5184}\eta^3 \left. \right] x^3 \\ & \left. + \left(\frac{77096675}{2032128} + \frac{378515}{12096}\eta - \frac{74045}{6048}\eta^2 \right) \pi x^{7/2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

e

$$\begin{aligned} t_{3.5}^{(T2)}(x) = & t_c - \frac{5}{256\eta} \frac{GM}{c^3} x^{-4} \left\{ 1 + \left(\frac{743}{252} + \frac{11}{3}\eta \right) x - \frac{32}{5}\pi x^{3/2} + \left(\frac{305873}{508032} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{5429}{504}\eta + \frac{617}{72}\eta^2 \right) x^2 - \left(\frac{7729}{252} - \frac{13}{3}\eta \right) \pi x^{5/2} + \left[-\frac{10052469856691}{23471078400} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{128}{3}\pi^2 + \frac{6848}{105}\gamma_E + \frac{3424}{105} \ln(16x) + \left(\frac{3147553127}{3048192} - \frac{451}{12}\pi^2 \right) \eta \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{15211}{1728}\eta^2 + \frac{25565}{1296}\eta^3 \right] x^3 + \left(-\frac{15419335}{127008} - \frac{75703}{756}\eta + \frac{14809}{378}\eta^2 \right) \pi x^{7/2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

Nesse caso, t_c deve ser escolhido de forma que o tempo t seja 0 quando $f = f_0$ ou $x = x_0$. Isso pode ser alcançado encontrando o valor de t_c , usando a expressão de $t_{3.5}^{(T2)}(x)$, substituindo $x = x_0$ no lado direito e colocando o lado esquerdo igual à zero.

3.2.1.3 Taylor T3

O modelo Taylor T3 vai um passo além do modelo Taylor T2, pois depois de calcular - como antes - uma representação paramétrica para a fase orbital $\varphi(x)$ e para $t(x)$, inverte-se explicitamente a expressão de $t(x)$ para obter uma expressão $x(t)$. E então usa-las para produzir uma representação explícita de $\varphi(t) \equiv \varphi(x(t))$. Esse modelo pode ser expresso por

$$\varphi_{n/2}^{(T3)}(t) = \varphi_c^{(T3)} + \varphi_N^t(t) \sum_{k=0}^n \hat{\varphi}_k^t \Theta^{k/2}, \quad (3.2.32)$$

$$x_{n/2}^{(T3)}(t) = x_N^t(t) \sum_{k=0}^n \hat{x}_k^t \Theta^{k/2}, \quad (3.2.33)$$

onde

$$\Theta := \frac{\eta}{5} \frac{c^3 (t_c - t)}{GM},$$

é a variável de tempo substituta. Assim, tem-se para o Taylor T3, o par de soluções

$$\begin{aligned} \varphi_{3.5}^{(T3)}(t) = \varphi_c - \frac{1}{\eta} \Theta^{5/4} \left\{ 1 + \left(\frac{3715}{8064} + \frac{55}{96} \eta \right) \Theta^{-1/4} - \frac{3}{4} \pi \Theta^{-3/8} + \left(\frac{9275495}{14450688} + \frac{284875}{258048} \eta \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1855}{2048} \eta^2 \right) \Theta^{-1/2} + \left(-\frac{38645}{172032} + \frac{65}{2048} \eta \right) \ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right) \pi \Theta^{-5/8} + \left[-\frac{831032450749357}{57682522275840} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{53}{40} \pi^2 - \frac{107}{56} \gamma_E + \frac{107}{448} \ln \left(\frac{\Theta}{256} \right) + \left(-\frac{126510089885}{4161798144} + \frac{2255}{2048} \pi^2 \right) \eta + \frac{154565}{1835088} \eta^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1179625}{1769472} \eta^3 \right] \Theta^{-3/4} + \left(-\frac{188516689}{173408256} + \frac{488825}{516096} \eta - \frac{141769}{516096} \eta^2 \right) \pi \Theta^{-7/8} \right\}, \quad (3.2.34) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x_{3.5}^{(T3)}(t) = \frac{1}{4} \Theta^{-1/4} \left\{ 1 + \left(\frac{743}{4032} + \frac{11}{48} \eta \right) \Theta^{-1/4} - \frac{1}{5} \pi \Theta^{-3/8} + \left(\frac{19583}{254016} + \frac{24401}{193536} \eta + \frac{31}{288} \eta^2 \right) \Theta^{-1/2} \right. \\ \left. + \left(-\frac{11891}{53760} + \frac{109}{1920} \eta \right) \pi \Theta^{-5/8} + \left[-\frac{10052469856691}{6008596070400} - \frac{1}{6} \pi^2 + \frac{107}{420} \gamma_E - \frac{107}{3360} \ln \left(\frac{\Theta}{256} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{3147553127}{780337155} - \frac{451}{3072} \pi^2 \right) \eta - \frac{15211}{442368} \eta^2 + \frac{25565}{331776} \eta^3 \right] \Theta^{-3/4} \right. \\ \left. + \left(-\frac{113868647}{433520640} - \frac{31821}{143360} \eta + \frac{294941}{3870720} \eta^2 \right) \pi \Theta^{-7/8} \right\}. \quad (3.2.35) \end{aligned}$$

As condições iniciais neste caso são ligeiramente mais complicadas do que nos casos anteriores. Dada uma frequência inicial f_0 , deve-se resolver numericamente a expressão de $x_{3.5}^{(T3)}(t)$ para encontrar o valor de t_c em que $f = f_0$ e $t = 0$, lembrando que Θ envolve o t_c . É importante ressaltar que quando $t \rightarrow t_c$, formalmente $f \rightarrow \text{diverge}$.

3.2.1.4 Taylor T4

O modelo Taylor T4 foi, com exceção do Taylor Et, o modelo mais recentemente proposto. No entanto, é uma extensão direta de TaylorT1 e a ordem de $3.5PN$ por coincidência é a que está em melhor acordo com simulações numéricas da fase *Inspiral* de uma binária compacta.

O modelo é obtido pela expansão da razão dos polinômios $\mathcal{F}(x)/\mathcal{E}'(x)$ para a ordem PN consistente, como supracitado nos modelos anteriores. A equação para $x^{(T4)}(t) \equiv x(t)$ na ordem de $3.5PN$ pode ser expressa da forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{64}{5} \eta \frac{c^3}{GM} x^5 \left\{ 1 + \left(\frac{743}{252} + \frac{11}{3} \eta \right) x + 4\pi x^{3/2} + \left(\frac{34103}{18144} + \frac{13661}{2016} \eta + \frac{59}{18} \eta^2 \right) x^2 \right. \\ \left. - \left(\frac{4159}{672} + \frac{189}{8} \eta \right) \pi x^{5/2} + \left[\frac{16447322263}{139708800} + \frac{16}{3} \pi^2 - \frac{1712}{105} \gamma_E - \frac{856}{105} \ln(16x) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(-\frac{56198689}{217728} + \frac{451}{48} \pi^2 \right) \eta + \frac{541}{896} \eta^2 - \frac{5605}{2592} \eta^3 \right] x^3 \right. \\ \left. - \left(\frac{4415}{4032} - \frac{358675}{6048} \eta - \frac{91495}{1512} \eta^2 \right) \pi x^{7/2} \right\}, \quad (3.2.36) \end{aligned}$$

e, também,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c^3}{GM} x^{3/2}, \quad (3.2.37)$$

essas equações são desenvolvidas por integração.

Observe que embora TaylorT1 e TaylorT4 sejam perturbativamente equivalentes, a evolução da fase pode ser bastante diferente nessas duas aproximações. A estrutura assintótica dos modelos também é bastante diferente: enquanto \dot{x} pode ter um polo (embora não necessariamente na região de interesse) ao usar a expressão do Taylor T1, isso não ocorre para o Taylor T4. Diferenças desse tipo podem, em princípio, significar que as várias famílias PN fornecem diferentes fases orbitais. A esperança é que quando a ordem PN até a qual a aproximação PN é conhecida for grande, a diferença entre as várias famílias PN torna-se insignificante.

3.2.1.5 Taylor Et

O modelo Taylor Et - assim como o Taylor T3 - introduz um novo parâmetro, o $\zeta = -2E/\eta$. Essa aproximação é obtida por meio da expressão de $E(x)$, ou $\zeta(x)$, e a invertendo para obter uma expressão da forma $x(\zeta)$, como se segue

$$x = \zeta \left[1 + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{12}\eta \right) \zeta + \left(\frac{9}{2} - \frac{17}{8}\eta + \frac{1}{18}\eta^2 \right) \zeta^2 + \left(\frac{405}{16} + \left(\frac{205}{96}\pi^2 - \frac{4795}{72} \right) + \frac{55}{64}\eta^2 + \frac{35}{1296}\eta^3 \right) \zeta^3 \right]. \quad (3.2.38)$$

Com essa escolha de variáveis, a equação que determina a evolução de x , dada por

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{c^3}{GM} \frac{\mathcal{F}}{d\mathcal{E}/dx}, \quad (3.2.39)$$

transforma-se na equação de equilíbrio para E reescrito em termos da variável ζ

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{c^3}{GM} \frac{2\mathcal{F}(x(\zeta))}{\zeta}. \quad (3.2.40)$$

Não há diferença entre as aproximações T1 e T4 na parametrização Et, e a equação de fase da onda gravitacional em termos de ζ pode ser expressa na forma

$$\frac{d\varphi^{(Et)}(t)}{dt} = \frac{\zeta^{3/2} c^3}{M G} \left[1 + \left(\frac{9}{8} + \frac{1}{8}\eta \right) \zeta + \left(\frac{891}{128} - \frac{201}{64}\eta + \frac{11}{128}\eta^2 \right) \zeta^2 + \left\{ \frac{41445}{1024} - \left(\frac{309715}{3072} - \frac{205}{64}\pi^2 \right) \eta + \frac{1215}{1024}\eta^2 + \frac{45}{1024}\eta^3 \right\} \zeta^3 \right], \quad (3.2.41)$$

já a equação paramétrica pra derivada temporal do parâmetro ζ fica expresso por

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} = & \frac{64\eta\zeta^5}{5M} \frac{c^3}{G} \left\{ 1 + \left(\frac{13}{336} - \frac{5}{2}\eta \right) \zeta + 4\pi\zeta^{3/2} + \left(\frac{117857}{18144} + \frac{12017}{2016}\eta + \frac{5}{2}\eta^2 \right) \zeta^2 \right. \\ & + \left(\frac{4159}{672} - \frac{177}{8}\eta \right) \pi\zeta^{5/2} + \left[\frac{37999588601}{279417600} + \frac{16}{3}\pi^2 - \frac{1712}{105}\gamma_E \right. \\ & + \left. \left(\frac{369}{32}\pi^2 - \frac{24861497}{72576} \right) \eta + \frac{488849}{16128}\eta^2 - \frac{85}{64}\eta^3 - \frac{856}{105} \ln(16\zeta) \right] \zeta^3 \\ & \left. + \left(\frac{129817}{2304} - \frac{3207739}{48384}\eta + \frac{613373}{12096}\eta^2 \right) \pi\zeta^{7/2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

Para definir as condições iniciais do conjunto de equações paramétrica, é preciso observar que $2\pi f = 2d\varphi/dt$. Assim, dada uma frequência inicial f_0 , é possível encontrar o valor inicial ζ_0 de ζ resolvendo numericamente a equação para o $\dot{\varphi}^{(Et)}$, definindo o lado esquerdo da expressão como πf_0 .

Para leitores mais interessados em aplicações e no panorama atual da expansão pós Newtoniana, vale a pena ver os artigos (BUONANNO et al., 2009) e (MARTÍNEZ, 2022).

3.2.2 Forma de uma onda gravitacional

Retomando a progressão anterior ao Tópico de Aproximações pós Newtonianas, a partir das expressões para as funções de Energia \mathcal{E} e Fluxo \mathcal{F} , dadas respectivamente pelas Equações (3.2.14, 3.2.15), é possível construir a expressão para a forma da onda gravitacional com o auxílio de um dos métodos de aproximação pós Newtoniana supracitados.

Todos os métodos de aproximação pós Newtoniana com domínio tipo tempo, *TaylorT1-T4*, darão as evoluções de fase que são formalmente válidas para a primeira ordem pós-newtoniana. De modo que as diferenças entre as evoluções resultarão em termos de ordem superior que serão descartados pelos vários esquemas de truncamento, assim não é possível (sem fazer um cálculo pós-newtoniano de ordem superior) determinar qual esquema é mais adequado para a aplicação proposta aqui.

Para o presente objetivo, será utilizado o método de aproximação pós Newtoniano *Taylor T3*, com a aproximação pós Newtoniana na ordem 0.5PN para ambas as expressões paramétricas de $\varphi(t)$ e $x(t)$, respectivamente expressas pelas Equações (3.2.34, 3.2.35). De modo que as expressões ficam na forma

$$\varphi(t) = \varphi_c - \frac{1}{\eta} \Theta^{5/4} \left[1 + \left(\frac{3715}{8064} + \frac{55}{96}\eta \right) \Theta^{-1/4} + O(\epsilon^3) \right], \quad (3.2.43)$$

e

$$x(t) = \frac{1}{4} \Theta^{-1/4} \left[1 + \left(\frac{743}{4032} + \frac{11}{48}\eta \right) \Theta^{-1/4} + O(\epsilon^3) \right], \quad (3.2.44)$$

fazendo $x_c \rightarrow \infty$ e, como já explicitado anteriormente,

$$\Theta := \frac{\eta c^3 (t_c - t)}{5 GM}.$$

Supondo uma forma de onda gravitacional h_{ij}^{TT} para um observador localizado na posição (r, ι, ϕ)

em coordenadas polares escrita em termos dos dois tensores de polarização h_+ e h_\times . É conveniente escrever esses tensores em uma expansão em termos dos *harmônicos esféricos spin-2-weighted*, ou seja

$$h_+ - ih_\times = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l {}_{-2}Y_{lm}(\iota, \phi) h_{lm}, \quad (3.2.45)$$

e seu modo complexo é dado por

$$h_{lm} := \int {}_{-2}Y_{lm}^*(\iota, \phi) (h_+ - ih_\times) d\Omega, \quad (3.2.46)$$

que deve satisfazer a igualdade

$$h_{l,m} = (-1)^l h_{l,-m}^*.$$

O harmônico esférico para o spin 2 é utilizado por se tratar de ondas gravitacionais, é uma suposição importante uma vez que trata a radiação gravitacional como a radiação emitida por gravitons. Os *harmônicos esféricos spin-weighted* do *spin-weight* s pode ser expressos formalmente por

$$\begin{aligned} {}_{-s}Y_{\theta,\phi} &:= (-1)^s \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+s)!(l-s)!}} e^{im\phi} \cos^{2l} \frac{\theta}{2} \\ &\times \sum_{k=\max(0,m-s)}^{\min(l+m,l-s)} (1)^k \binom{l-s}{k} \binom{l+s}{k+s-m} \tan^{2k+s-m} \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

e devem satisfazer as propriedades

$$\begin{aligned} {}_sY_{l,m} &= (-1)^{s+m} {}_{-s}Y_{l,-m}^*(\theta, \phi), \\ {}_sY_{lm} &= (-1)^l {}_{-s}Y_{l,m}(\pi - \theta, \phi + \pi). \end{aligned}$$

De forma que os modos complexos mais relevantes, até a primeira ordem pós Newtoniana são

$$h_{22} = -8\sqrt{\frac{\pi G\mu}{5 c^2 r}} e^{-2i\varphi} x \left[1 - \left(\frac{107}{42} - \frac{55}{42}\eta \right) x \right] + O(\epsilon^5), \quad (3.2.48)$$

$$h_{21} = -i\frac{8}{3}\sqrt{\frac{\pi G\mu}{5 c^2 r}} \frac{\delta m}{M} e^{-i\varphi} x^{3/2} + O(\epsilon^5), \quad (3.2.49)$$

$$h_{33} = 3i\sqrt{\frac{6\pi G\mu}{7 c^2 r}} \frac{\delta m}{M} e^{-3i\varphi} x^{3/2} + O(\epsilon^5), \quad (3.2.50)$$

$$h_{32} = -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{\pi G\mu}{7 c^2 r}} e^{-2i\varphi} (1 - 3\eta)x^2 + O(\epsilon^6), \quad (3.2.51)$$

$$h_{31} = -\frac{i}{3}\sqrt{\frac{2\pi G\mu}{35 c^2 r}} \frac{\delta m}{M} e^{-i\varphi} x^{3/2} + O(\epsilon^5), \quad (3.2.52)$$

$$h_{44} = \frac{64}{9}\sqrt{\frac{\pi G\mu}{7 c^2 r}} e^{-4i\varphi} (1 - 3\eta)x^2 + O(\epsilon^6), \quad (3.2.53)$$

$$h_{42} = -\frac{8}{63}\sqrt{\frac{\pi G\mu}{c^2 r}} e^{-2i\varphi} (1 - 3\eta)x^2 + O(\epsilon^6), \quad (3.2.54)$$

onde $\delta m := m_1 - m_2$. A forma de onda pode ser expressa na forma

$$h_{+, \times} = \frac{2G\mu}{c^2 r} x \left\{ H_{+, \times}^{(0)} + x^{1/2} H_{+, \times}^{(1/2)} + x H_{+, \times}^{(1)} + O(\epsilon^3) \right\}, \quad (3.2.55)$$

onde os coeficientes pós Newtonianos são

$$H_+^{(0)} := -(1 + \cos^2 \iota) \cos 2\varphi, \quad (3.2.56)$$

$$H_\times^{(0)} := -2 \cos \iota \sin 2\varphi, \quad (3.2.57)$$

$$H_+^{(1/2)} := -\frac{1}{8} \frac{\delta m}{M} \sin \iota \left[(5 + \cos^2 \iota) \cos \varphi - 9(1 + \cos^2 \iota) \cos 3\varphi \right], \quad (3.2.58)$$

$$H_\times^{(1/2)} := -\frac{3}{4} \frac{\delta m}{M} \sin \iota \cos \iota \left[\sin \varphi - 3 \sin 3\varphi \right], \quad (3.2.59)$$

$$H_+^{(1)} := \frac{1}{6} \left[(19 + 9 \cos^2 \iota - 2 \cos^4 \iota) - \eta(19 - 11 \cos^2 \iota - 6 \cos^4 \iota) \right] \cos 2\varphi \\ - \frac{4}{3} \sin^2 \iota (1 + \cos^2 \iota) (1 - 3\eta) \cos 4\varphi, \quad (3.2.60)$$

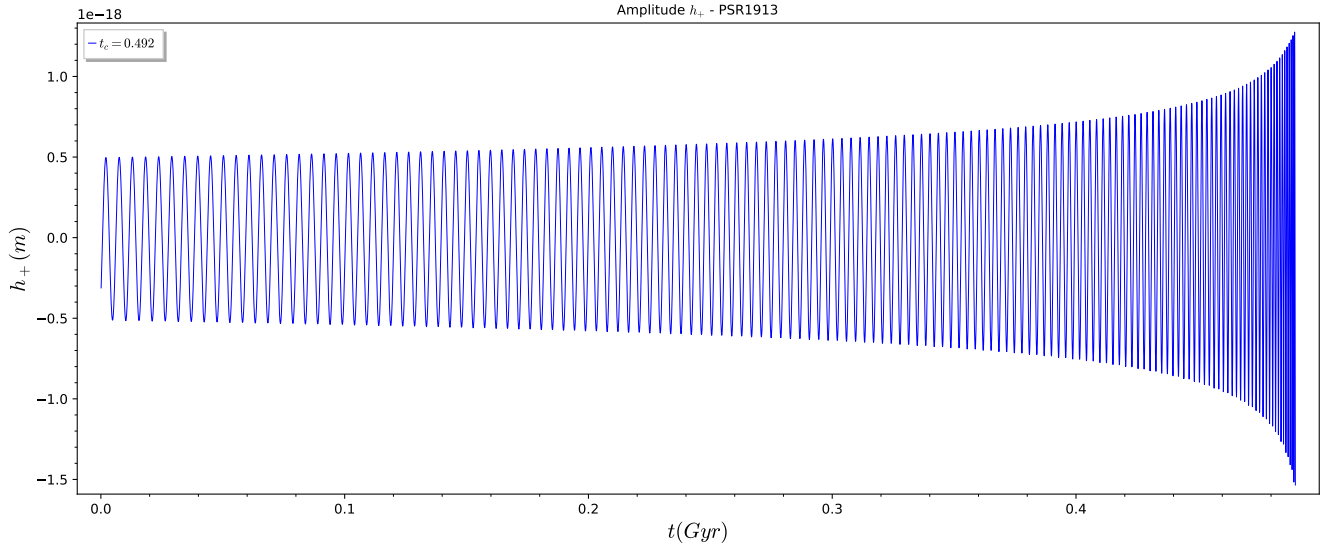
$$H_\times^{(1)} := \frac{1}{3} \cos \iota \left[(17 - 4 \cos \iota) - \eta(13 - 12 \cos^2 \iota) \right] \sin 2\varphi \\ - \frac{8}{3} \cos \iota \sin^2 \iota (1 - 3\eta) \sin 4\varphi, \quad (3.2.61)$$

para a construção dos coeficientes acima, foi assumido que o observador se encontra ao longo do plano $x - z$ do sistema ($\phi = 0$), que efetivamente absorve ϕ na definição da constante φ_c .

Por último, é possível construir graficamente as representações das perturbações gravitacionais dadas pela Equação (3.2.55) para a fase Inspiral, com o auxílio do software matemático de código aberto, o *SageMath*. Os dados referente à binária utilizados para a construção dos gráficos para as amplitudes h_+ e h_\times foram os dados da *Binária de Hulse-Taylor* (PSR 1913), como consta em (WEISBERG J. M.; TAYLOR, 2005). Portanto, utilizando os respectivos coeficientes pós Newtonianos

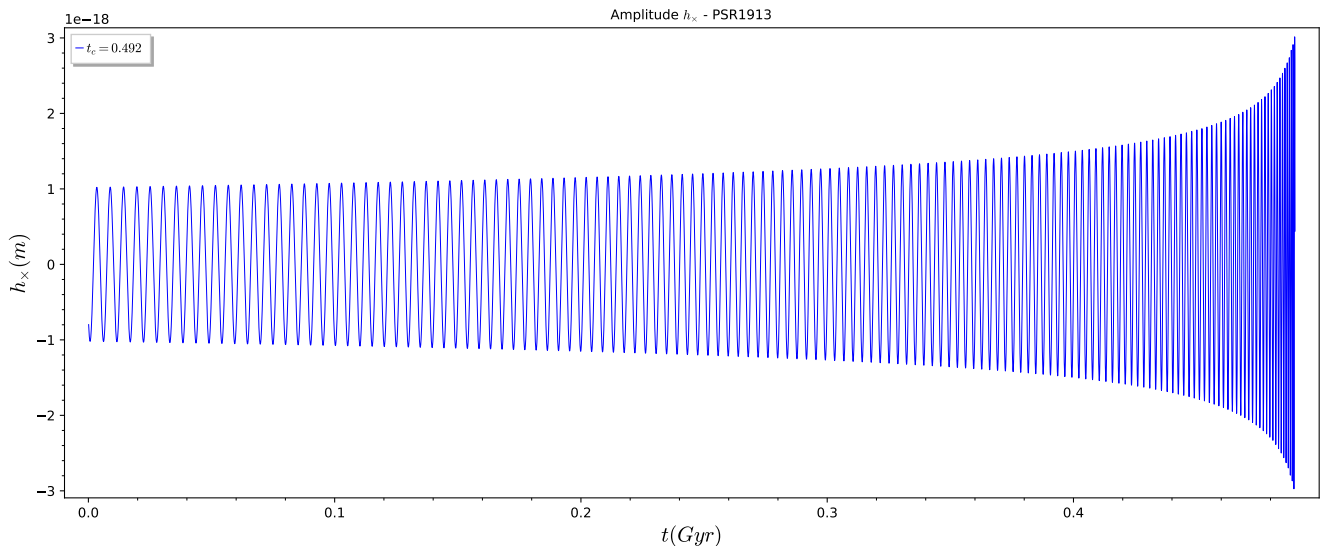
para a construção de cada uma das duas amplitudes para a binária compacta de Hulse-Taylor, tem-se as representações gráficas, respectivamente representados pelas Figura 6 e Figura 7.

Figura 6 – Amplitude h_+ para a binária PSR 1913, feita no software *SageMath*, durante a fase *Inspiral*, com o método Taylor T3 em 1PN. O tempo de coalescência - t_c - está em 0,492Gyr.



Fonte: Autor

Figura 7 – Amplitude h_\times para a binária PSR 1913, feita no software *SageMath*, durante a fase *Inspiral*, com o método Taylor T3 em 1PN. O tempo de coalescência - t_c - está em 0,492Gyr.



Fonte: Autor

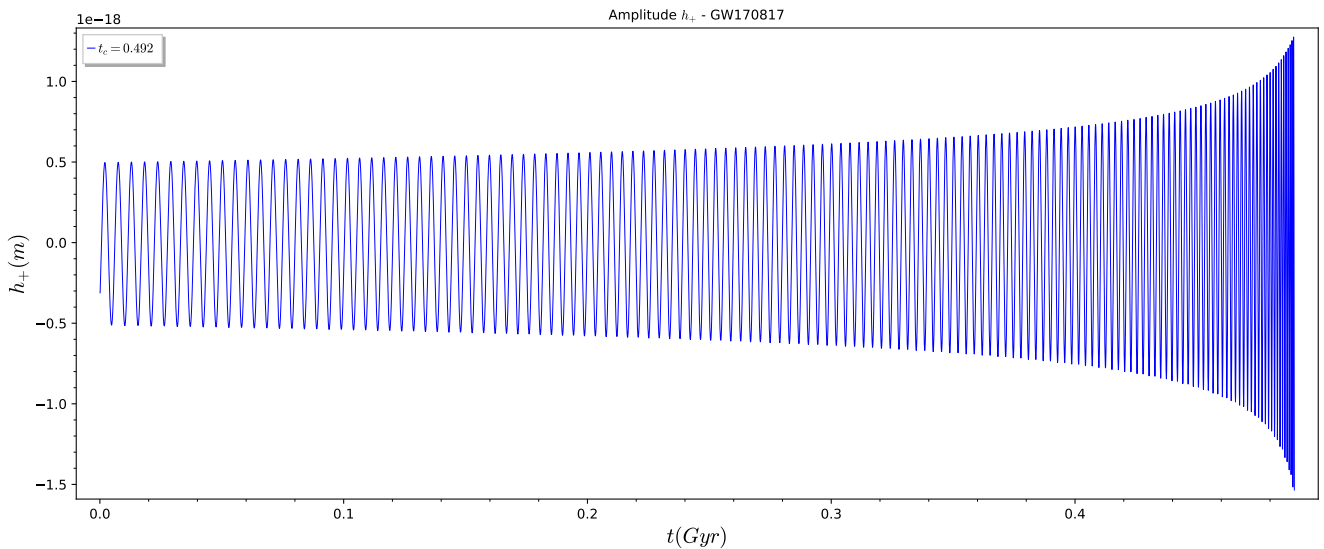
ambos os códigos para a construção das duas amplitudes, bem como os gráficos para as amplitudes nas expansões em ordem 2PN e 3PN, estão disponíveis no GitHub¹. Um último ponto interessante sobre os gráficos acima reside no tempo de coalescência, como pode se ver na escala do gráfico, a amplitude não chega até o t_c definido. Isso se deve ao fato de que o método de aproximação PN Taylor T3 já não dá uma representação confiável e precisa do que acontece quando $t = t_c$, para a

¹ <https://github.com/andrelucchini/gw_article>

construção de gráficos mais precisos - a partir da fase Marger - é necessário uma abordagem mais robusta das aproximações pós Newtonianas, mais especificamente, o método do *Effective one-body*, ou uma modelagem com relatividade numérica, ambas as abordagens não estão no objetivo do presente trabalho. Para os leitores mais curiosos sobre as fases além da fase Inspiral e as aproximações PN utilizáveis, ficam as referências (BUONANNO; DAMOUR, 1999; BUONANNO; DAMOUR, 2000; DAMOUR; JARANOWSKI; SCHÄFER, 2000).

Outras binárias importantes, para a literatura, que podem ser construídas pelo método Taylor T3 aqui apresentado são: GW170817, que foi a primeira binária detectada de maneira direta; e a GW190426, que se trata de um sistema binário de uma estrela de nêutrons com um buraco negro. Os gráficos das amplitudes - h_+ e h_\times - para a primeira binária são, respectivamente, representados pelas Figura 8 e Figura 9.

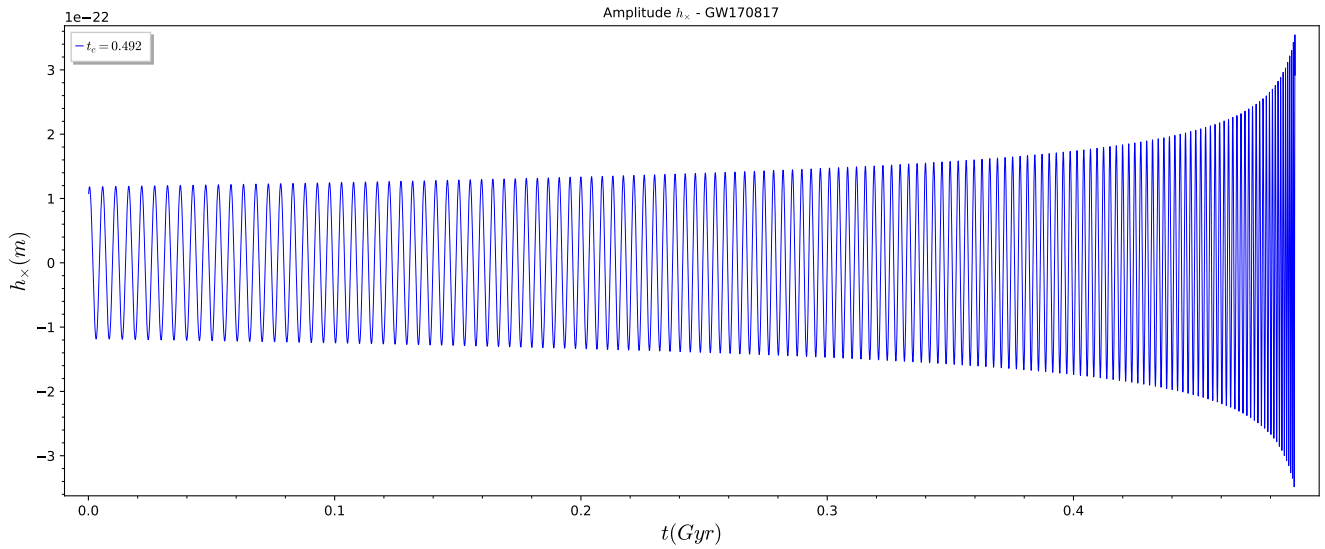
Figura 8 – Amplitude h_+ para a binária GW170817, feita no software *SageMath*, durante a fase *Inspiral*, com o método Taylor T3 em 1PN. O tempo de coalescência - t_c - está em 0,492Gyr.



Fonte: Autor

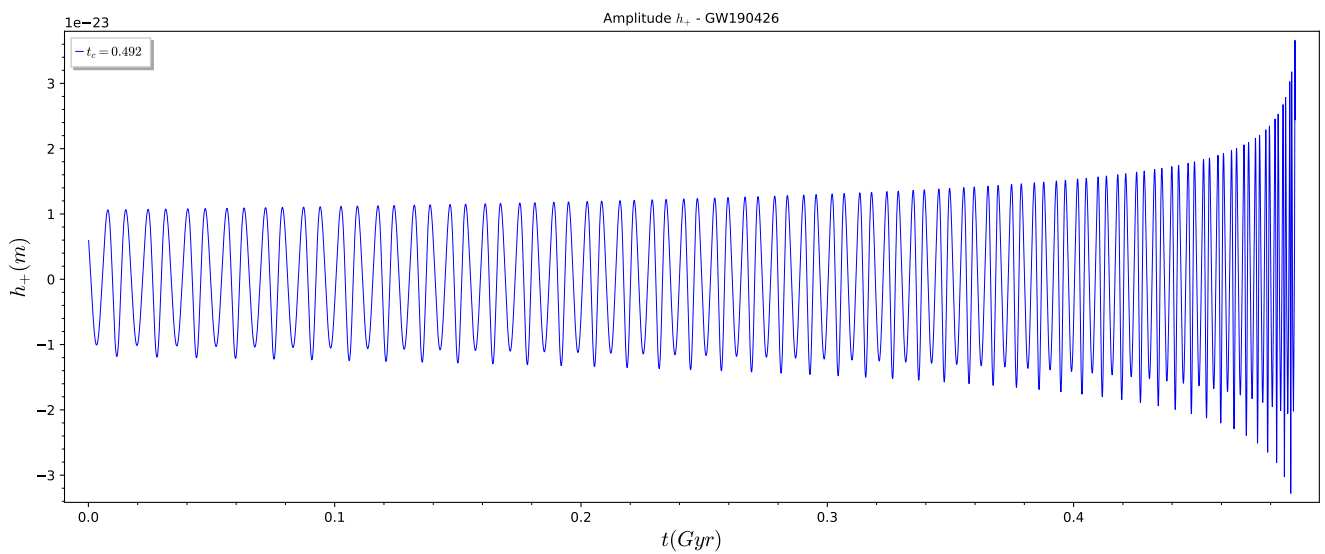
Igualmente, os gráficos das amplitudes - h_+ e h_\times - para a binária GW190426, estão representados nas Figura 10 e Figura 11. É interessante ver a diferença do comportamento da amplitude h_+ da binária GW190426, como mostra a Figura 10, em relação as demais. Esse comportamento irregular se deve ao fato da razão das massas da binária, no caso da binária GW190426 a razão de massa se aproxima à 4 vezes. Isso reflete um comportamento errático na amplitude da onda durante a convolução do sistema. Para um melhor detalhamento será necessário recorrer a métodos mais robustos, outros exemplos de falha na representação de binárias pelo método Taylor T3 estão presentes no GitHub supracitado.

Figura 9 – Amplitude h_{\times} para a binária GW170817, feita no software *SageMath*, durante a fase *Inspiral*, com o método Taylor T3 em 1PN. O tempo de coalescência - t_c - está em 0,492Gyr.



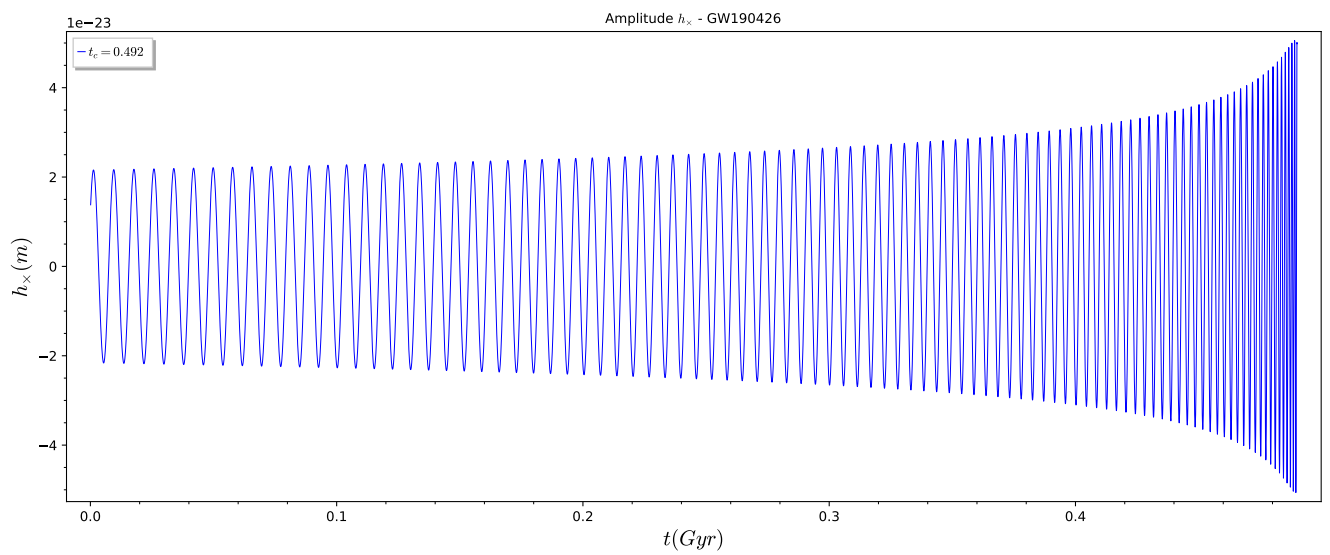
Fonte: Autor

Figura 10 – Amplitude h_{+} para a binária GW190426, feita no software *SageMath*, durante a fase *Inspiral*, com o método Taylor T3 em 1PN. O tempo de coalescência - t_c - está em 0,492Gyr.



Fonte: Autor

Figura 11 – Amplitude h_{\times} para a binária GW190426, feita no software *SageMath*, durante a fase *Inspiral*, com o método Taylor T3 em 1PN. O tempo de coalescência - t_c - está em 0,492Gyr.



Fonte: Autor

4 PERSPECTIVAS FUTURAS

Após a conclusão do presente trabalho, os passos seguintes se destinarão ao estudo das ondas gravitacionais em espaço-tempo curvo, tais como aquelas emitidas por Buracos Negros. A primeira parte da nova etapa se dará com o estudo das perturbações gravitacionais em tal cenário, bem como o estudo dos modos quasi-normais de um Buraco Negro(MAGGIORE, 2018). (CABRITA, 2018). Os modos quasi-normais caracterizam a resposta de um buraco negro a pequenas perturbações e são responsáveis pela emissão de radiação gravitacional por um buraco negro perturbado. Essas oscilações, que não têm matéria para sustentá-las, são na verdade oscilações do próprio espaço-tempo; mais precisamente, do espaço-tempo fora do horizonte. Eles também são cruciais para obter alguma compreensão analítica da forma de onda produzida na fase de *Inspiral e Marger* da coalescência de um sistema BH-BH e na fase sucessiva de *Ringdown*. Uma vez que uma detecção tenha sido feita, previsões precisas para a forma de onda são cruciais para extrair informações físicas do evento observado, em particular para reconstruir os parâmetros da fonte. Eles também fornecem uma possível ponte para a gravidade quântica e até desempenham um papel importante na correspondência AdS/CFT (NUNEZ A.; STARINETS, 2003).

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como principal objetivo o estudo das ondas gravitacionais no regime pós Newtoniano, desde a sua irradiação por um sistema binário - como a binária de Hulse-Taylor - até seus efeitos ao passar por um objeto em sua linha de propagação. Tal formalismo pós Newtoniano foi alcançado expandindo-se a métrica $g_{\mu\nu}$, e adicionando correções a ela a partir das expansões pós Newtonianas. O mesmo procedimento foi feito para o tensor energia-momento, afim de encontrar a perturbação da métrica $h_{\mu\nu}$ que representa a amplitude de uma onda gravitacional.

A partir dessa nova métrica perturbada, foi possível - com o auxílio dos métodos de aproximação pós Newtonianas - construir a expressão para a forma de onda de uma onda gravitacional emitida por uma binária compacta, mais especificamente o método Taylor T3. Para a representação das amplitudes gravitacionais foram levados em consideração os tensores de polarização h_+ e h_\times de cada binária apresentada. É de grande valia ressaltar a importância dos gráficos construídos para as amplitudes gravitacionais. Eles não só tem um papel fundamental na interpretação de como cada onda e sua polarização interferem no espaço a sua volta, mas também são ferramentas importantes aliadas as detecções feitas por observatórios como o LIGO, uma vez que descrevem o comportamento das binárias antes mesmo de suas ondas chegarem ao detectores, que detectam as amplitudes apenas a partir da fase *Merger*.

Em suma, o estudo das ondas gravitacionais no regime pós Newtoniano ainda deixam uma grande perspectiva para os próximos tópicos a serem abordados, como supracitado no Capítulo 4. As ondas gravitacionais são grandes aliadas no estudo do Universo, não só de seu início, mas também de seu futuro. Uma vez que seu estudo permite ampliar os conhecimentos sobre estrelas, galáxias e buracos negros distantes, com base nas ondas por eles produzidas.

REFERÊNCIAS

- ACERNESE, F. et al. Status of virgo. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 22, n. 18, p. S869–S880, 2005.
- BLANDFORD R. D.; THORNE, K. S. **Applications of Classical Physics**. [s.n.], 2012. Disponível em: <<http://www.pmaweb.caltech.edu/Courses/ph136/yr2012/>>.
- BUONANNO; DAMOUR. Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics. **Phys.Rev. D59**, 1999.
- BUONANNO; DAMOUR. Transition from inspiral to plunge in binary black hole coalescences. **Phys.Rev. D62**, 2000.
- BUONANNO, A. et al. Comparison of post-newtonian templates for compact binary inspiral signals in gravitational-wave detectors. **Phys.Rev. D80**, 2009.
- CABRITA, G. C. **Gravitational waves and massive gravitons**. Roma - Itália: [s.n.], 2018.
- CARROLL, S. M. **Spacetime and geometry: An introduction to general relativity**. Hoboken, New Jersey - USA: Addison-Wesley Professional, 2004.
- CASALS, M. et al. Regularized calculation of the retarded green function in a schwarzschild spacetime. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 100, n. 10, 2019.
- CREIGHTON J. D. E.; ANDERSON, W. G. **Gravitational-Wave Physics and Astronomy**. Weinheim, Baden-Württemberg - Germany: Wiley-VCH, 2011.
- DAMOUR; JARANOWSKI; SCHÄFER. On the determination of the last stable orbit for circular general relativistic binaries at the third post-newtonian approximation. **Phys.Rev. D62**, 2000.
- EPSTEIN R.; WAGONER, R. Post-newtonian generation of gravitational waves. **The Astrophysical Journal**, v. 197, p. 717–723, 1975.
- MAGGIORE, M. **Gravitational Waves, Volume 1: Theory and experiments**. Oxford, Oxfordshire - England: Oxford University Press, 2007.
- MAGGIORE, M. **Gravitational Waves, Volume 2: Astrophysics and cosmology**. Oxford, Oxfordshire - England: Oxford University Press, 2018.
- MARTÍNEZ, I. The post-newtonian expansion in the effective theory of compact objects. 2022.
- NUNEZ A.; STARINETS, A. O. Ads/cft correspondence, quasinormal modes, and thermal correlators in n=4 sym. **Phys.Rev.D67**, 2003.
- PADMANABHAN, T. **Gravitation: Foundations and frontiers**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- RAMOS M. P.; MALUF, R. V. Sobre a teoria de einstein para ondas gravitacionais e sua aplicação no estudo da radiação emitida por um pulsar binário. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, n. 2, 2018.
- RINDLER, W. **Relativity. Special, General, and Cosmological**. [S.l.]: Oxford University Press, 2006.

SCHUTZ, B. F. **A First Course in General Relativity**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.

WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**. New York, New York - USA: John Wiley and Sons, 1972.

WEISBERG J. M.; TAYLOR, J. H. The relativistic binary pulsar b1913+16: Thirty years of observations and analysis. **ASP Conference Series**, v. 328, 2005.

WHEELER, J. A. **A Journey Into Gravity And Spacetime**. [S.l.]: Scientific American Library, 1990.

APÊNDICE A – IDENTIDADE DE BIANCHI

A identidade de Bianchi, uma importante propriedade, mostra que

$$\nabla_{\alpha} R_{\beta\gamma\kappa}{}^{\alpha} + \nabla_{\beta} R_{\gamma\alpha\kappa}{}^{\alpha} + \nabla_{\gamma} R_{\alpha\beta\kappa}{}^{\alpha} = 0, \quad (\text{A.0.1})$$

e sabendo-se que o *tensor de Ricci*, o *escalar de Ricci* e o *tensor de Einstein* são construídos a partir do *tensor de curvatura de Riemann* ao contrair seus índices na forma

$$R_{\alpha\beta} := R_{\alpha\mu\beta}{}^{\mu} \quad R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.0.2})$$

Uma vez que o *tensor de Ricci* é simétrico com respeito aos seus índices, pode-se manipular a identidade de Bianchi como se segue

$$\nabla_{\alpha} R_{\beta\gamma\kappa}{}^{\alpha} + \nabla_{\beta} R_{\gamma\alpha\kappa}{}^{\alpha} + \nabla_{\gamma} R_{\alpha\beta\kappa}{}^{\alpha} = -\nabla^{\alpha} R_{\beta\gamma\alpha\kappa} + \nabla_{\beta} R_{\gamma\kappa} - \nabla_{\gamma} R_{\beta\kappa} = 0. \quad (\text{A.0.3})$$

Ao contrair essas quantidades com o tensor métrico $g^{\gamma\kappa}$, é possível obter:

$$-\nabla^{\alpha} R_{\beta\alpha} + \nabla_{\beta} R - \nabla^{\kappa} R_{\beta\kappa} = -2\nabla^{\alpha} \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) = 0. \quad (\text{A.0.4})$$

A expressão dentro do parentese não tem divergência, e é o conhecido *tensor de Einstein*:

$$G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R. \quad (\text{A.0.5})$$

Portanto

$$\nabla^{\alpha} G_{\alpha\beta} = 0. \quad (\text{A.0.6})$$

APÊNDICE B – COMPONENTES DO TENSOR DE EINSTEIN PERTURBADAS

Para encontrar as formas perturbadas das componentes da Equação de Einstein, é preciso aplicar a métrica perturbada, expressa na equação (2.0.1), no lugar de $g_{\mu\nu}$, nas equações (1.2.5), (1.2.3) e (1.2.4). Começando pelo *símbolo de Christoffel*, tem-se

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda} (\partial_{\nu}g_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}g_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}), \quad (\text{B.0.1})$$

adicionando a métrica perturbada

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}(\eta^{\rho\lambda} - h^{\rho\lambda}) [\partial_{\nu}(\eta_{\mu\lambda} + h_{\mu\lambda}) + \partial_{\mu}(\eta_{\nu\lambda} + h_{\nu\lambda}) - \partial_{\lambda}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})], \quad (\text{B.0.2})$$

$$= \frac{1}{2}(\eta^{\rho\lambda} - h^{\rho\lambda}) [\partial_{\nu}\eta_{\mu\lambda} + \partial_{\nu}h_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}\eta_{\nu\lambda} + \partial_{\mu}h_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}\eta_{\mu\nu} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu}]. \quad (\text{B.0.3})$$

Uma vez que a métrica de Minkowski é dada por $\eta = (-1, 1, 1, 1)$, é fato inferir que qualquer derivada aplicada sobre ela será nula. Ademais, como $\|h_{\mu\nu}\| \ll 1$ pode-se aproximar a expressão entre parênteses acima na forma $\eta^{\rho\lambda} - h^{\rho\lambda} \approx \eta^{\rho\lambda}$. Dessa forma, o símbolo de Christoffel com a métrica perturbada terá a forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial_{\nu}h_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}h_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu}). \quad (\text{B.0.4})$$

Para o tensor de Ricci, tem-se

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\rho\mu}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\rho\mu}^{\lambda}, \quad (\text{B.0.5})$$

substituindo-se a expressão encontrada anteriormente para o símbolo de Christoffel na expressão acima

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_{\rho} [\eta^{\rho\lambda} (\partial_{\nu}h_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}h_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu})] - \frac{1}{2}\partial_{\nu} [\eta^{\rho\lambda} (\partial_{\mu}h_{\rho\lambda} + \partial_{\rho}h_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}h_{\rho\mu})] \quad (\text{B.0.6})$$

$$+ \frac{1}{4}\eta^{\rho\alpha} (\partial_{\lambda}h_{\rho\alpha} + \partial_{\rho}h_{\lambda\alpha} - \partial_{\alpha}h_{\rho\lambda}) \eta^{\lambda\beta} (\partial_{\mu}h_{\nu\beta} + \partial_{\nu}h_{\mu\beta} - \partial_{\beta}h_{\nu\mu}) \quad (\text{B.0.7})$$

$$- \frac{1}{4}\eta^{\rho\alpha} (\partial_{\lambda}h_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}h_{\lambda\alpha} - \partial_{\alpha}h_{\nu\lambda}) \eta^{\lambda\beta} (\partial_{\mu}h_{\rho\beta} + \partial_{\rho}h_{\mu\beta} - \partial_{\beta}h_{\rho\mu}). \quad (\text{B.0.8})$$

Ao aplicar a distributiva nas derivas, assim como a regra do produto e, levando em consideração a primeira ordem na perturbação $h_{\mu\nu}$ tem-se

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_{\mu}\partial_{\nu}h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_{\mu}\partial_{\alpha}h_{\nu\beta} + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_{\nu}\partial_{\alpha}h_{\mu\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}h_{\mu\nu}. \quad (\text{B.0.9})$$

Por fim, pode-se contrair os índices das derivadas com a métrica de Minkowski e então tem-se o tensor de Ricci para a métrica perturbada

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial_{\mu}\partial_{\nu}h + \frac{1}{2}\partial_{\nu}\partial^{\alpha}h_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\partial^{\alpha}h_{\nu\alpha}. \quad (\text{B.0.10})$$

Por último, para o escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}, \quad (\text{B.0.11})$$

$$= g^{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{2} \partial_{\alpha} [g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\beta\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\beta} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu})] - \frac{1}{2} \partial_{\nu} [g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\beta\alpha} + \partial_{\alpha} g_{\mu\beta} - \partial_{\beta} g_{\mu\alpha})] \right\}. \quad (\text{B.0.12})$$

Substituindo a métrica perturbada, assim como nas expressões anteriores, tem-se

$$R = (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) \left\{ \frac{1}{2} \partial_{\alpha} [(\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}) (\partial_{\mu} (\eta_{\beta\nu} + h_{\beta\nu}) + \partial_{\nu} (\eta_{\mu\beta} + h_{\mu\beta}) - \partial_{\beta} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}))] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \partial_{\nu} [(\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}) (\partial_{\mu} (\eta_{\beta\alpha} + h_{\beta\alpha}) + \partial_{\alpha} (\eta_{\mu\beta} + h_{\mu\beta}) - \partial_{\beta} (\eta_{\mu\alpha} + h_{\mu\alpha}))] \right\}. \quad (\text{B.0.13})$$

Aplicando a mesma rotina de simplificação com a perturbação e a métrica de Minkowski, a expressão se reduz para a forma

$$R = -\eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} h_{\mu\nu} + \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} h_{\beta\nu}. \quad (\text{B.0.14})$$

Obtém-se então

$$R = \partial^{\mu} \partial^{\nu} h_{\mu\nu} - \square h. \quad (\text{B.0.15})$$

Assim, ao substituir as grandezas obtidas acima com a perturbação, tem-se a forma para tensor de Einstein perturbado

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) R, \\ = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_{\mu} \partial_{\nu} h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_{\mu} \partial_{\alpha} h_{\nu\beta} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\mu\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} h_{\mu\nu} \\ - \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}) (-\eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} h_{\mu\nu} + \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} h_{\beta\nu}). \quad (\text{B.0.16})$$

Aplicando-se a distributiva na expressão acima, tem-se

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_{\nu\alpha} h_{\mu\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} h_{\mu\nu} \\ + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_{\mu\alpha} h_{\nu\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\rho\sigma} \partial_{\alpha\rho} h_{\beta\sigma} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\rho\sigma} \partial_{\alpha\beta} h_{\rho\sigma}. \quad (\text{B.0.17})$$

Como mais um passo de simplificação, é conveniente aplicar a *perturbação do traço reverso* a expressão anterior

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h.$$

Fazendo com que o tensor de Einstein fique na forma, após a realização da distributiva

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}\partial_{\mu\nu}\bar{h} + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_{\nu\alpha}\bar{h}_{\mu\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\mu}\partial_{\beta\nu}\bar{h} \\
& - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}\partial_{\alpha\beta}\bar{h} + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_{\mu\alpha}\bar{h}_{\nu\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\nu}\partial_{\beta\mu}\bar{h} \\
& - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma}\partial_{\alpha\rho}\bar{h}_{\beta\sigma} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma}\eta_{\beta\rho}\partial_{\alpha\sigma}\bar{h} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma}\partial_{\alpha\beta}\bar{h}_{\rho\sigma} \\
& - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma}\eta_{\rho\sigma}\partial_{\alpha\beta}\bar{h}.
\end{aligned} \tag{B.0.18}$$

Uma vez que a condição do gauge harmônico implica que $\eta^{\alpha\beta}\partial_{\mu\alpha}\bar{h}_{\nu\beta} \rightarrow 0$, a expressão para o tensor de Einstein se reduz para

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}\partial_{\mu\nu}\bar{h} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\mu}\partial_{\beta\nu}\bar{h} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu} \\
& + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}\partial_{\alpha\beta}\bar{h} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\nu}\partial_{\beta\mu}\bar{h} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma}\eta_{\beta\rho}\partial_{\alpha\sigma}\bar{h} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma}\partial_{\alpha\beta}\bar{h}_{\rho\sigma} \\
& - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma}\eta_{\rho\sigma}\partial_{\alpha\beta}\bar{h}.
\end{aligned} \tag{B.0.19}$$

Realizando a simplificação dos índices da expressão acima a partir da métrica, obtém-se

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}\partial_{\mu\nu}\bar{h} + \frac{1}{2}\partial_{\mu\nu}\bar{h} - \frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\square\bar{h}\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\square\bar{h}\eta_{\mu\nu}, \\
= & -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{B.0.20}$$

Uma vez que $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$, encontra-se, portanto

$$\square\bar{h} = -16\pi GT_{\mu\nu}. \tag{B.0.21}$$

APÊNDICE C – EQUAÇÃO DE CAMPO E A FUNÇÃO DE GREEN

A função de Green é, por definição, a solução para as equações de campo oriundas de uma distribuição de matéria representada por uma função delta. Ao tentar resolver as equações de Einstein além da ordem linear com a fonte desse tipo, as expressões resultantes conterão produtos mal definidos ou distribuições com funções singulares. Consequentemente, não se pode usar um formalismo de função de Green em segunda ordem (CASALS et al., 2019). As ondas gravitacionais são geradas pelo termo de fonte de matéria no lado direito da equação de Einstein linearizada

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}.$$

A equação de Einstein linearizada pode ser resolvida usando o formalismo da função de Green. No presente desenvolvimento, o movimento interno do sistema será considerado lento, comparado com a velocidade da luz. Aqui, será calculada a solução para a perturbação gravitacional bem como a fórmula para o tensor momento do quadrupolo para radiação gravitacional. A equação de onda com um termo genérico de fonte pode ser expresso por

$$\square f(t, \mathbf{x}) = s(t, \mathbf{x}),$$

onde $f(t, \mathbf{x})$ é um campo dinâmico, e $s(t, \mathbf{x})$ é um campo que representa a fonte. A função de Green $G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}')$ é a função que surge como resposta a uma fonte descrita por uma função delta, isso representa quanto campo é gerado pelo ponto (t, \mathbf{x}) por unidade de fonte, no ponto (t', \mathbf{x}') . Isto é

$$\square G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = \delta(t - t')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

O campo originado a partir da fonte real é dado pela integração da função de Green com a função $s(t, \mathbf{x})$

$$f(t, \mathbf{x}) = \int dt' d^3x' G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}')s(t', \mathbf{x}').$$

Para o operador de onda \square , a função de Green toma a forma (ACERNESE et al., 2005)

$$G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = -\frac{\delta(t' - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|/c)}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|},$$

onde $(t' - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|/c)$ é o tempo retardado, ele contabiliza o atraso associado com a propagação da onda gravitacional do ponto \mathbf{x} para o ponto \mathbf{x}' (a constante da velocidade da luz foi explicitada apenas para enfatizar a natureza causal da função de Green). Aplicando o resultado acima na expressão da perturbação $\bar{h}_{\mu\nu}$, tem-se

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4 \int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}(t - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|, \mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}.$$

Como já citado no Capítulo 2, os graus de liberdade radiativos estão contidos inteiramente nas componentes espaciais da perturbação, assim, considere a parte espacial da métrica

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = 4 \int d^3x' \frac{T^{ij}(t - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|, \mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}.$$

Os índices do tensor energia-momento foram levantados usando a regra de que a posição dos índices espaciais na teoria linearizada é irrelevante.

Considere uma evolução da quantidade acima para grandes distâncias da fonte, essa suposição permite que o fator $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ seja tratado como $r = \|\mathbf{x}\|$ (o erro de escala para tal aproximação é de L/r , onde L é a dimensão da fonte, e pode ser negligenciado). A mesma aproximação pode ser feita com as componentes do tensor energia-momento

$$T_{ij}(t - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|, \mathbf{x}') \approx T_{ij}(t - r, \mathbf{x}'),$$

onde $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = r - n^i x'^i + \mathcal{O}(1/r)$, com $n^i = x^i/r$, é a escala de erro gerada pela aproximação feita acima da ordem de L/τ , onde τ é a escala de tempo em que o sistema está mudando. Esta quantidade representa a velocidade interna da fonte, velocidade muito menor que a velocidade da luz. Dessa forma, as substituições acima resultam em

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{4}{r} \int d^3x' T^{ij}(t - r, \mathbf{x}'),$$

que é o primeiro termo de uma expansão multipolar do campo de radiação. O tensor energia-momento deve ser conservado, ou seja $\partial_\mu T^{\mu\nu}$, na teoria linearizada. Separando essa expressão nas componentes temporal e espaciais, tem-se

$$\begin{aligned} \partial_t T^{tt} + \partial_i T^{ti} &= 0, \\ \partial_t T^{ti} + \partial_j T^{tj} &= 0, \end{aligned}$$

ou, simplesmente

$$\partial_t^2 T^{tt} = \partial_k \partial_l T^{kl}.$$

Ao multiplicar os dois lados da expressão acima por $x^i x^j$, tem-se para o lado esquerdo e para o lado direito, respectivamente

$$\begin{aligned} \partial_t^2 T^{tt} x^i x^j &= \partial_t^2 (T^{tt} x^i x^j), \\ \partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j &= \partial_k \partial_l (T^{kl} x^i x^j) - 2\partial_k (T^{ik} x^j + T^{kj} x^i) + 2T^{ij}. \end{aligned}$$

A partir da identidade $\partial_i x^j = \delta_i^j$, é fácil provar a relação entre as duas expressões acima, na forma

$$\partial_t^2 (T^{tt} x^i x^j) = \partial_k \partial_l (T^{kl} x^i x^j) - 2\partial_k (T^{ik} x^j + T^{kj} x^i) + 2T^{ij}.$$

Isso leva à

$$\begin{aligned}
\frac{4}{r} \int d^3 x' T_{ij} &= \frac{4}{r} \int d^3 x' \left[\frac{1}{2} \partial_t^2 (T^{tt} x^i x^j) + \partial_k (T^{ik} x'^j + T^{kj} x'^i) - \frac{1}{2} \partial_k \partial_l (T^{kl} x^i x^j) \right], \\
&= \frac{2}{r} \int d^3 x' \partial_t^2 (T^{tt} x^i x^j), \\
&= \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3 x' T^{tt} x^i x^j, \\
&= \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3 x' \rho x^i x^j.
\end{aligned}$$

Ao passar da primeira linha para a segunda, foi usado o fato de que o segundo e o terceiro termos sob a integral são divergências. Usando o teorema de Gauss, eles podem ser reformulados como integrais de superfície; tomando a superfície fora da fonte, sua contribuição é zero. Ao passar da segunda linha para a terceira, foi usado o fato de que o domínio de integração não é dependente do tempo, então é possível tirar as derivadas da integral. Finalmente, usando o fato de que T^{tt} é a densidade de massa ρ e, definindo o segundo momento da distribuição de massa \tilde{I}_{ij} via

$$\tilde{I}_{ij}(t) = \int d^3 x' \rho(t, \mathbf{x}') x'^i x'^j.$$

Ao combinar a expressão da perturbação \bar{h}_{ij} , do tensor energia-momento com a expressão anterior, tem-se

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{r} \frac{d^2 \tilde{I}_{ij}(t-r)}{dt^2}.$$

Quando subtraído o traço de \tilde{I}_{ij} , obtém-se assim o *tensor momento do quadrupolo*

$$I_{ij} = \tilde{I}_{ij} - \frac{1}{3} \partial_{ij} \tilde{I}, \quad \tilde{I} = \tilde{I}_{ii}.$$