UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA

MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS: UM OLHAR PARA AS EXPRESSÕES DO PROFESSOR

Vanessa de Oliveira

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2022

VANESSA DE OLIVEIRA

PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS: UM OLHAR PARA AS EXPRESSÕES DO PROFESSOR

Tese apresentada à banca examinadora do exame geral de qualificação. Tese desenvolvida junto ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", campus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Rosa Monteiro Paulo

Rio Claro

2022

O48p

Oliveira, Vanessa de
Pensamento algébrico nos anos iniciais : um olhar para a expressão do professor / Vanessa de Oliveira. -- Rio Claro, 2022
210 f. : il., tabs., fotos

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Rosa Monteiro Paulo

1. Educação Matemática. 2. Álgebra. 3. Pensamento Algébrico. 4. Fenomenologia. 5. Formação de Professores. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

VANESSA DE OLIVEIRA

PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAS: UM OLHAR PARA AS EXPRESSÕES DO PROFESSOR

Tese desenvolvida junto ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", campus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Rosa Monteiro Paulo

Comissão Examinadora Prof.ª

Dr.ª Rosa Monteiro Paulo

UNESP/Guaratinguetá (SP)

Prof.ª Dr.ª Fabiane Mondini

UNESP/Sorocaba (SP)

Prof.ª Dr.ª Carmem Lúcia Brancaglion Passos

UFSCar/São Carlos (SP)

Prof.ª Dr.ª Maria do Carmo de Sousa

UFSCar/São Carlos (SP)

Prof. Dr. Cristiano Natal Tonéis

FIAP (SP)

Resultado: Aprovada

Rio Claro, SP

12 de abril de 2022

Resumo

Neste texto apresenta-se a pesquisa desenvolvida com professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental da rede municipal de Guaratinguetá/ SP, envolvidos em tarefas relacionadas aos conteúdos matemáticos tratados nos anos iniciais considerando-os em contextos algébricos. O objetivo, na pesquisa, é compreender os aspectos do fazer matemática do professor que revelam características do pensamento algébrico, entendido como um processo que expressa o pensado quando o professor está com os objetos matemáticos do contexto algébrico voltando-se para eles, resgatando seus elementos característicos produzidos na temporalidade. Para conhecer a região de inquérito da pesquisa, fomos aos autores da Educação Matemática que discutem a formação de professores, analisamos o modo pelo qual as orientações pedagógicas tratam o ensino de álgebra nos anos iniciais e, com o que se mostrou, elaboramos tarefas que pudessem favorecer a discussão sobre esse tema com os professores. Estabelecendo uma parceria entre a Universidade Estadual Paulista (Unesp), Câmpus de Guaratinguetá, e a Secretaria Municipal de Educação, propusemos e oferecemos um curso de extensão para os professores dos anos inicias do Ensino Fundamental interessados em discutir conteúdos de matemática trabalhados em sala de aula. As ações no curso foram filmadas e o vídeo transcrito, dando origem à produção de dados da pesquisa. Na análise dos dados, seguindo o rigor da pesquisa qualitativa de abordagem fenomenológica, voltamos nossa atenção para o fazer matemática do professor, considerando seus modos de expressão. O movimento interpretativo permitiu compreender que nos *modos de expressar o feito matematicamente* e nos *modos de explorar os conteúdos matemáticos*, os professores revelam características do pensamento algébrico. Essas características são discutidas nessas duas categorias de análise que se evidenciam no movimento interpretativo e, à luz da interrogação da pesquisa, nos permitem expor o modo como compreendemos o investigado.

PALAVRAS-CHAVE: Fenomenologia. Formação de Professores. Educação Matemática. Pensamento algébrico.

ABSTRACT

This text presents the research developed with teachers who teach mathematics in the early years of Elementary School in the municipal network of Guaratinguetá/SP, involved in tasks related to the mathematical contents treated in the early years, considering them in algebraic contexts. The objective, in the research, is to understand the aspects of the teacher's doing mathematics that reveal characteristics of algebraic thinking, understood as a process that expresses what is thought when the teacher is with the mathematical objects of the algebraic context, turning to them, rescuing their elements. characteristics produced in temporality. In order to know the region of investigation of the research, we went to the authors of Mathematics Education who discuss teacher training, we analyzed the way in which the pedagogical guidelines treat the teaching of algebra in the early years and, with what was shown, we developed tasks that could to encourage discussion on this topic with teachers. Establishing a partnership between the Universidade Estadual Paulista (Unesp), Campus de Guaratinguetá, and the Municipal Department of Education, we proposed and offered an extension course for teachers in the early years of Elementary School interested in discussing mathematics content taught in the classroom. The actions in the course were filmed and the video transcribed, giving rise to the production of research data. In the analysis of the data, following the rigor of qualitative research with a phenomenological approach, we turned our attention to the teacher's doing mathematics, considering their modes of expression. The interpretive movement allowed us to understand that in the ways of expressing the deed mathematically and in the ways of exploring mathematical contents, teachers reveal characteristics of algebraic thinking. These characteristics are discussed in these two categories of analysis that are evident in the interpretive movement and, in the light of the research question, allow us to expose the way we understand the investigated.

KEY WORDS: Phenomenology. Teacher training. Mathematical Education. Algebraic Thinking

AGRADECIMENTOS

Na vida não fazemos nada sozinhos. Essa é uma frase que me acompanha há muito tempo desde quando eu descobri o real significado dela. É difícil, em algumas linhas, reviver o caminhar da pesquisa e me dispor a escrever sobre àqueles se dispuseram a caminhar comigo. Este trabalho carrega muitas experiências, inquietações, afetos e desejos. Ao longo do caminho muitos deles foram acalmados, outros surgiram e alguns já não fazem mais parte da caminhada, mas com certeza, transformaram esta pesquisa num encontro intenso entre mim e àqueles que me cercam.

Esses encontros se deram de diversos modos e com muitos, e, mesmo reconhecendo minha pequenez diante de tantos, ouso redigir algumas palavras que podem (de forma muito pequena perto da imensidão que é), expressar toda a potência desses encontros e afetos.

Agradeço primeiramente à Deus, cuja graça me honra em partilhar a vida com tantos e de forma tão saudável e respeitosa.

Aos meus pais, Meire e Reginaldo, que com imenso amor e carinho me permitem viver meus sonhos e realizações. Agradeço por me ensinarem sobre fé e coragem. Esse caminhar foi possível graças a presença de vocês. Essa conquista é nossa.

À minha irmã Viviane, cuja lealdade e companheirismo me torna uma pessoa mais forte todos os dias. Agradeço por seu amor e fé em mim. Essa caminhada não seria possível sem você.

À minha avó Maria, que com seu amor e carinho cuidou e cuida de mim, permitindo que meus caminhos fossem sempre iluminados por Deus e à minha tia Fátima pela atenção de sempre.

À Rosa Monteiro Paulo, professora e orientadora deste trabalho. Agradeço pela oportunidade desta orientação, pela dedicação, tempo e cuidado às dúvidas e inquietações durante essa caminhada. Sua sabedoria é fonte de inspiração, obrigada por compartilhá-la e sempre cuidadosa com cada leitura, palavra e gesto. Minha admiração pela professora e ser humano que é.

À Ingrid, pela amizade. Você é e foi essencial nessa caminhada. Agradeço por me ensinar, todos os dias, sobre altruísmo, respeito, força e dedicação ao ser humano, à Educação. Esse trabalho representa o final de um ciclo cujo início só foi possível por sua generosidade.

À Raissa, pela amizade. Obrigada por me mostrar que qualquer distância é pequena quando se ama. Essa caminhada começou com você em 2015 e se encerra com a gente olhando para o mundo que nos espera. Obrigada por me ensinar a respeitar meus limites, encarar as dificuldades, aventurar-se pelo desconhecido. Espero que nossas teses marquem a nossa história, que já é cheia de momentos felizes.

À Lais, pela amizade. Agradeço pela generosidade em tantos momentos. Essa caminhada me permitiu te encontrar e me mostrou belezas em cantos nunca pensados. Obrigada por cada partilha e por estar comigo nessa caminhada cheia de desafios e descobertas.

À Juliana pela amizade. Agradeço por ter confiado em mim nos momentos mais difíceis dessa caminhada e ter sido apoio em tantos outros. Obrigada por escolher fazer parte da minha vida e me ensinar tanto. Esse trabalho marca o início de uma jornada para mim que você tanto acredita e apoia.

Aos colegas do Colégio Tableau. Agradeço o apoio e incentivo em tantos momentos.

Aos professores que participaram da minha formação até aqui, minha admiração pela competência e profissionalismo e acima de tudo pela dedicação dada à formação humana de cada aluno. Vocês são inspirações para mim.

Aos “colegas de van”, que mesmo após a graduação acompanharam um pouco a rotina do doutorado em 2019, tornando algumas distâncias mais divertidas e engraçadas.

À Secretaria Municipal de Educação de Guaratinguetá e aos participantes da pesquisa, professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, meu muito obrigada por compartilharem histórias e experiências de vida e profissionais que mudaram meus olhares para à matemática, à Educação, ao professor, ao ser humano.

Às professoras Carmem Passos, Fabiane Mondini, Maria do Carmo Sousa, Ana Paula Baumann e Cristiano Tonéis pela atenção e cuidado nas leituras e contribuições neste trabalho. Minha gratidão e admiração pelas profissionais e pessoas que são.

Aos colegas e professores das disciplinas cursadas no doutorado.

Aos funcionários da Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, campus Rio Claro.

“Ninguém ignora tudo.
Ninguém sabe tudo.
Todos nós sabemos alguma coisa.
Todos nós ignoramos alguma coisa.
Por isso aprendemos sempre”

Paulo Freire

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O início da minha[1] caminhada na pesquisa acontece nas primeiras vivências ainda quando estudante do primeiro ano da graduação em Licenciatura em Matemática, na Universidade Estadual Paulista (Unesp), no Câmpus de Guaratinguetá, em 2012.

Dentre algumas razões, o estágio[2] naquele ano – 2012 - era importante para mim, pois oportunizava vivenciar o ambiente escolar considerando, naquele momento, a perspectiva docente. Ingressei como estagiária numa escola do interior paulista nesse ano, atuando na Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental e lá permaneci durante dois anos. Vivenciei diferentes práticas docentes, diversas situações com alunos, pais e professores, conheci modos distintos de aprender e ensinar, sempre com minha atenção voltada para as práticas direcionadas à aprendizagem matemática.

Estar com os alunos, professores e coordenadores desse nível de escolaridade me abriu horizontes, despertando interesse por conhecer outros caminhos, em especial, aqueles que são possíveis para o ensino de matemática dos anos iniciais. Por isso, em 2015, olhando para minhas experiências com a intenção de compreendê-las, para o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), destacou-se o trabalho com os alunos dos anos iniciais. Logo, me dispus a desenvolver um trabalho com crianças do 5º ano do Ensino Fundamental explorando situações de Cálculo Mental.

Essa vivência com os alunos dos anos iniciais deu abertura a novas inquietações e abriu novas possibilidades. O modo como os alunos lidaram com as tarefas[3] propostas me motivou a querer conhecer o professor desse nível de escolaridade, em especial suas compreensões sobre o Cálculo Mental. Portanto, em 2016, ao ingressar no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP), em Rio Claro, optei por desenvolver a pesquisa de mestrado ainda com foco nos anos iniciais. A pesquisa intitulada "Contar de cabeça ou com a cabeça? Compreensões do professor dos anos iniciais acerca do Cálculo Mental" possibilitou investigar as compreensões desses professores sobre o Cálculo Mental. Por meio de um curso de extensão no qual foram desenvolvidas tarefas de Cálculo Mental, discutimos possibilidades para tratar o tema nos primeiros anos do Ensino

[1] Nesta introdução, ao me referir às ações que dizem de minha trajetória com a pesquisa e de opções que fiz, opto pelo uso da primeira pessoa do singular.
[2] Não me refiro ao estágio obrigatório do curso de Licenciatura em Matemática, componente curricular que, na FEG, inicia-se a partir do 5º semestre do curso.
[3] Usaremos o termo *tarefa* para designar a proposta construída pela pesquisadora para o trabalho no curso, como sugere Ponte (2014), diferenciando-a de atividade, entendida como "aquilo que o aluno faz num dado contexto". (PONTE, 2014, p. 16).

Fundamental. A transcrição da vivência com os professores no curso se constituiu nos dados de análise da pesquisa de mestrado.

Sendo graduada em Licenciatura em Matemática, não tive em minha formação inicial discussões ou contato com o ensino de matemática nos primeiros anos da escolaridade. No entanto, meu interesse me levou a considerar documentos curriculares e buscar autores que discutiam o ensino de matemática nos anos iniciais. Para a elaboração das tarefas do curso "Contar de cabeça ou com a cabeça? Cálculo Mental nos anos iniciais do Ensino Fundamental"[4], tivemos o cuidado de focar a exploração dos participantes e entender como eles compreendiam o Cálculo Mental.

Entretanto, durante os encontros, chamou-me a atenção o modo pelo qual esses professores tratavam alguns conteúdos matemáticos. Notei que eles não se sentiam à vontade, por exemplo, resolvendo tarefas que envolviam incógnitas ou termos desconhecidos. Embora nenhuma tarefa exigisse explicitamente o uso de equações, por exemplo, a atitude dos professores me fez analisar o proposto de outra perspectiva. Havia abertura para focar aspectos da álgebra identificados pelos próprios professores.

Na graduação minha experiência com a álgebra foi relativa aos procedimentos para efetuar cálculos e conhecer técnicas de resolução de equações e funções. Logo, pensar a álgebra nos anos iniciais me causava certo estranhamento.

> Compreendemos o estranhamento como algo característico de uma atitude filosófica, assim como a indagação, a argumentação e a reflexão. O estranhamento acontece quando uma pessoa vivencia uma circunstância diferente da que costuma experimentar cotidianamente ou, quando no viver com o familiar, algo lhe salta aos olhos, provocando estranheza. Perplexos, ficamos em estado de alerta, atentos às coisas de modo a observarmos algo que antes não víamos ou que não nos causava incômodo. No estranhar-se com e nas coisas, questionamos o visto, que sempre é observado por alguém, de onde se entende o estranhamento como algo genuíno, dada a singularidade de cada um (MOCROSKY et al.. 2019, p. 1453).

Esse estranhamento que foi despertado na vivência com os professores, me levou a querer conhecer os modos deles compreenderem o pensamento algébrico no seu fazer matemático.

No entanto, compreender o pensamento algébrico estava atrelado a entender aspectos históricos da álgebra, a conhecer as características desse pensar que é denominado algébrico e as possibilidades de tratá-lo na sala de aula dos anos iniciais.

Isso me leva à pesquisa de doutorado. Mais uma vez faço a opção por estar

[4] Título do curso de extensão oferecido à professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental da rede municipal de Ensino de Guaratinguetá em 2016. Os encontros do curso constituíram os dados de análise da investigação que originou a dissertação de mestrado em Educação Matemática mencionada anteriormente.

junto com esses professores, em um curso de extensão elaborado e ministrado por mim, buscando conhecer aspectos do seu fazer matemático. Tais aspectos se dão a conhecer pelos atos expressivos entendidos como a fala, a escrita, a pintura, a música, gestos corpóreos, etc. A expressão, entendida em uma perspectiva fenomenológica como destaca Merleau-Ponty (1994), é uma atitude do corpo que expõe o percebido tornando-o passível de ser compreendido e interpretado. O corpo é, para o autor, potência motora, afetiva e expressiva. A expressão abre à compreensão o percebido permitindo que ele não se perca. Nossa opção pelo curso deu-se para que fosse possível constituir de um ambiente formativo no qual o professor realizasse tarefas matemáticas em contextos algébricos e pudesse dialogar com seus pares, expondo o percebido.

Considerando nossas inquietações e entendendo a importância da expressão para compreender o seu fazer matemática, a intenção da pesquisa evidenciar esse fazer o que explicitamos pela pergunta orientadora da pesquisa: *"Quais aspectos do fazer do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental revelam características do pensamento algébrico?"*.

Para trilhar o caminho da pesquisa optamos pela metodologia qualitativa na abordagem fenomenológica. A pesquisa qualitativa, conforme Bicudo (2012), conduz o trabalho colocando os sujeitos em destaque, contextualizando-os e considerando os aspectos pertencentes àquela perspectiva do que se quer investigar. A abordagem fenomenológica permite, ao pesquisador, assumir certa postura na condução da pesquisa, evidenciando o fenômeno interrogado, ou seja, o que se mostra como relevante ao que se deseja compreender. Desse modo, o pesquisador se volta atentamente para compreender o que, na caminhada investigativa, se revela. O olhar atento para o fenômeno – o fazer matemática do professor que ensina matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental num contexto algébrico – permite interpretar o que é interrogado e explicitar o compreendido.

Tendo clara a questão de pesquisa e os modos pelos quais vamos proceder para compreendê-la, construímos a proposta do curso de extensão *"*O X da questão – Pensamento Algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental I*"*, oferecido para professores dos anos iniciais. O curso, com carga horária de 20 horas, contou com a participação de 18 professores da rede municipal de ensino de Guaratinguetá. Os encontros foram semanais e, durante 8 semanas, os professores se dispuseram a pensar sobre as tarefas que lhes propúnhamos. Incentivamos os professores a buscarem diferentes estratégias para tratar uma situação problema, expondo seu modo de pensar, abrindo-se ao debate, explorando as possibilidades e o que delas se mostrava relevante para compreender as situações propostas.

Neste texto apresentamos o que, para nós, fez sentido sobre o interrogado. Sabe-se que o caminho da pesquisa não é linear, pois comporta idas e vindas, mas para expor o realizado organiza-se o texto em seções, conforme se descreve a seguir.

Na seção 1, intitulada **“A Álgebra e Pensamento Algébrico: expondo compreensões”**, traçamos um retrato histórico do desenvolvimento da álgebra ao longo do tempo considerando aspectos históricos, e assim, um modo de compreendê-la. Mesmo sem haver um consenso sobre a definição do pensamento algébrico, apresentamos os autores lidos que o discutem, também, no âmbito dos anos inicias e, na sequência, explicitamos um modo de compreender esse pensar considerando alguns autores da Filosofia da Matemática e da Educação Matemática.

Na seção 2 – **O professor que ensina matemática nos anos iniciais -** explicitamos o compreendido acerca da formação do professor que ensina matemática nos anos iniciais. Expomos nossa compreensão sobre a formação docente, na perspectiva fenomenológica. Analisamos o modo pelo qual a matemática aparece nos espaços destinados à formação desses profissionais, em especial nos cursos de Licenciatura em Pedagogia, que atualmente são responsáveis por formar esses professores e discutimos como, segundo os autores lidos, a matemática é tratada nesses cursos, expondo também nossa compreensão acerca da formação continuada de professores, considerando, também, pesquisas sobre o tema.

Na seção 3 – **Possibilidades para o ensino de álgebra nos anos iniciais: dialogando com as pesquisas** – focamos a temática do ensino de álgebra nos anos iniciais como discutida em pesquisas da Educação Matemática que dialogassem com o proposto na Base Nacional Comum Curricular, uma vez que se trata de um documento que subsidia as práticas docentes brasileiras atuais. As leituras nos indicaram a importância de tratar a álgebra desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, valorizando práticas que possibilitem aos alunos o desenvolvimento do pensamento algébrico. Para isso, as pesquisas expõem práticas com alunos envolvendo tarefas de sentido numérico, propriedades numéricas, sequências, padrões, entre outras. Nesta seção evidenciamos as possibilidades de trabalhos com a álgebra nos anos iniciais, apontando caminhos e diálogos possíveis, considerando pesquisas no âmbito da sala de aula e na formação continuada de professores dos anos iniciais.

Metodologia de Pesquisa é a nossa quarta seção. Nela apresentamos o caminho da pesquisa, procurando esclarecer o sentido de *pesquisar* e as *qualidades* sobre as quais a pesquisa qualitativa se volta. O sentido que a fenomenologia tem para nós, também é destacado, bem como os motivos que nos levaram a optar por essa abordagem. Apresentamos, ainda nesta seção, como as leituras e a experiência com os professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental se relacionam e como procedemos diante do que, para nós, se revelou ao trilhar o caminho que a fenomenologia nos permitiu.

Na quinta seção - **Conhecendo a pesquisa: dos participantes às tarefas propostas -** apresentamos os professores participantes da pesquisa e os objetivos do curso. Construímos nomes fictícios para preservar a identidade dos participantes e indicamos em qual turma dos anos iniciais os professores lecionaram no ano do desenvolvimento do curso. Apresentamos as tarefas do curso “O X da questão – Pensamento Algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental I”, exemplificando o que foi feito e explicitando possibilidades, quando necessário.

Na seção 6, intitulada **“Discussão dos dados”**, iniciamos a exposição do que na pesquisa vai se revelando como significativo à compreensão do interrogado. A transcrição dos encontros transforma em texto a expressão dos professores e, ao interpretá-la, destacam-se compreensões do pesquisador que lhe permitem dizer “quais aspectos do fazer do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental revelam características do pensamento algébrico”. Nesta seção, expõe-se o início da análise dos dados, as categorias abertas entendidas como regiões de generalidades que, ao serem discutidas, possibilitaram trazer o que se mostrou significativo ao interrogado.

1 A ÁLGEBRA E O PENSAMENTO ALGÉBRICO: expondo compreensões

Modos de aprender e ensinar matemática vem, há muito tempo, permeando debates no cenário educacional nacional e internacional embora com enfoques distintos: o interesse ora está no contexto da formação do professor, ora nos conteúdos matemáticos, ora nas possibilidades de avaliação, ora no desenvolvimento de habilidades, dentre outros. Nosso interesse volta-se para um contexto específico da matemática escolar: o ensinar e aprender álgebra, mais especificamente às ações que visam o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Destacamos que a álgebra, por muito tempo, foi vista como uma área da matemática destinada a estudar as operações entre os números e a resolução de equações (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; MILIES, 2013), associada exclusivamente à manipulação de regras e articulações de uma determinada linguagem. Esse modo de ver a álgebra fez com que, em sala de aula, ela fosse tratada a partir de conteúdos específicos e do desenvolvimento de determinadas habilidades e, em decorrência de um currículo hierarquizado, a possibilidade de seu trabalho nos anos iniciais foi afastada (PRESTES et al., 2014; SANTOS; MOREIRA, 2016, FERREIRA; RIBEIRO; RIBEIRO, 2017).

Na busca pela compreensão da interrogação que norteia a pesquisa, expomos nesta seção um modo de compreender a álgebra, destacando aspectos históricos, considerando autores como Boyer (1974), Eves (1995), Kluth (2003, 2004) e Bicudo (2016), e o pensamento algébrico, considerando as perspectivas sobre esse pensar no contexto escolar dos autores James Kaput, João Pedro da Ponte e Luis Radford na intenção de uma abertura ao diálogo.

1.1 Aspectos históricos da álgebra

Ao perguntarmos a estudantes dos anos finais da Educação Básica ou do Ensino Superior o que é a álgebra, provavelmente as respostas serão do ponto de vista dos conteúdos. Mas, será que a álgebra pode ser resumida as equações, funções e regras?

Para se compreender a álgebra para além dos conteúdos escolares, é preciso, como o faz Kluth (2004), considerar perspectivas de outras áreas do conhecimento. Isso nos leva a autores como Caraça (1958), Boyer (1974), Eves (1995), Kluth (2003, 2004) e Bicudo (2016), cujos solos são o da História da Matemática ou da Filosofia da Educação Matemática, para abrir possibilidades de compreender o tema.

Caraça (1958), ao discutir a forma de se olhar para a Ciência, destaca que há dois modos distintos.

> Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições (CARAÇA, 1958, p. xiii).

Assumindo a segunda atitude, Caraça (1958) expõe que a Matemática normalmente é vista como uma ciência à parte, desligada da realidade, isolada. O autor não descarta a possibilidade de a Matemática possuir problemas próprios, que não tenham ligação imediata com problemas da vida social, entretanto discute que "os seus fundamentos mergulham tanto como os de outro qualquer rumo da Ciência, na vida real; uns e outros entroncam na mesma madre" (CARAÇA, 1958, p. xiv). Entendemos que, para ele, o conhecimento científico, inclusive o matemático, revela-se como organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas.

A perspectiva histórica assumida nesta pesquisa está sustentada na Filosofia da Matemática e da Educação Matemática e, antes que traçar um encadeamento de fatos, busca-se compreender as origens do conhecimento matemático que, "pela linguagem e pela tradição, vai se mantendo presente ao mundo histórico-cultural" (BICUDO, 2016, p. 32). A história é, portanto, um "movimento vivo da comunidade e da co-inclusão da formação e da sedimentação originárias de sentido" (HUSSERL, Anexo III ao § 9ª, 2008, p. 388).

> As tradicionais realizações humanas começam de materiais disponíveis à mão com naturalidade superficial. Do superficial se é conduzido ao profundo, pois a tradição deixa-se interrogar. São as interrogações que nos orientam para determinadas respostas e é pela forma universal da tradição que ela permite a aplicação para cada indivíduo e para determinado caso isolado (KLUTH, 2003, p. 4).

Ao nos voltarmos para aspectos históricos da álgebra, vê-se que "há um emaranhado de ideias que se enrolam em sentidos e significados, de modo que se torna impossível separá-las, a não ser por uma questão de exposição" (BICUDO, 2016, p. 37). O que, neste texto se traz, é um modo de olhar para a álgebra que revela, em seus aspectos históricos, traços de um passado cultural (signos, palavras, vozes, visões de mundo, de sujeitos de uma comunidade que se mantém e renova em sua historicidade) cuja compreensão abre perspectivas para o futuro (BICUDO, 2016).

Kluth (2004), assume a perspectiva histórica em seu trabalho e afirma que a matemática "surge de uma primeira atividade criadora" (p. 4).

> O movimento da Matemática entendido como realização humana da síntese contínua

> ao longo da História faz dela uma tradição, por que a síntese expressa as realizações humanas no tempo e no espaço como construção de objetos culturais sujeitos às interrogações formuladas pelas pessoas que produzem a Matemática e que escrevem a sua historicidade (KLUTH, 2004, p.5).

Cabe a matemática, neste modo de ser um objeto cultural, ser atual, pois é produzida por componentes que dependem das realizações humanas que a produzem e a escrevem.

Segundo Kluth (2004), as características algébricas não são explícitas por uma cultura determinada, mas constituídas em um movimento contínuo de construção humana o qual teve seu desenvolvimento voltado aos modos de abordar e lidar com os objetos matemáticos que, ao serem articulados, relacionados e estudados sob outras perspectivas, permitem novas maneiras de compreender problemas e propor-lhes soluções.

A matemática constitui-se ao longo da história de diversas civilizações e, no decorrer do tempo, teve seu conhecimento organizado e dividido em áreas. Dentre elas estão a Álgebra, Geometria e Análise, como se vê em Boyer (1974).

> Cada uma dessas áreas estabeleceu para si um campo de investigação e desenvolveu-se, construindo novos conhecimentos e novas áreas. Ao mesmo tempo em que a Geometria, a Análise e a Álgebra constituíam seus domínios, seus ramos de abrangência se entrelaçaram em muitos momentos diferentes. Cada uma interroga aspectos distintos do mundo, incluindo o mundo matemático. Utilizam uma linguagem que as caracterizam e elegem para si domínios próprios para investigar. Porém, não há clareza quanto aos limites que caracterizam cada ramo específico (MONDINI, 2009. p. 20).

Ao interrogarmos a álgebra nos voltamos para sua constituição, para os elementos que caracterizam seu modo de ser, para o que, por meio dela, pode-se compreender do mundo, como destaca Kluth (2004). Buscamos as características intrínsecas à álgebra e não um caminho linear de descobertas e aquisições, desejamos a síntese contínua de tais aquisições e descobertas.

Historicamente, G. H. F. Nesselmann, em 1842 caracterizou três períodos distintos do desenvolvimento da álgebra: a álgebra retórica em que há a descrição verbal de procedimentos, a álgebra sincopada em que há abreviações para algumas operações e a álgebra simbólica em que as resoluções já utilizavam símbolos para representar e estudar as estruturas matemáticas, conforme Eves (1995). O autor destaca que as diferentes fases da álgebra não se desenvolveram de maneira homogênea nas civilizações e, somente a partir do século XVII, a álgebra simbólica viria a se impor, com os estudos e as sistematizações de François Viète.

Um importante nome desse desenvolvimento inicial da álgebra é Diofanto de Alexandria (250 d.C) que ficou conhecido pela publicação de inúmeros trabalhos, dentre eles o *Arimética*, no qual compila os estudos analíticos que deu aos números.

> Diofanto se libertou das referências geométricas, o que faz seu método diferir substancialmente dos usados na álgebra geométrica grega tradicional [...] Os artifícios de cálculo por ele empregados indicavam um profundo conhecimento das propriedades dos números [...] Este abandonou o estágio puramente retórico e incorporou símbolos, notações e abreviações. No entanto, estes elementos não eram ainda objeto de manipulação algébrica. A notação de Diofanto foi um primeiro passo na direção da álgebra simbólica (MOL, 2013, p. 58).

O conceito de variável mostrou-se, como aponta Caraça (1958), relevante para o desenvolvimento da álgebra. Sobre esse conceito, o autor destaca:

> Consiste na correspondência de dois conjuntos de números; a primeira coisa a fazer, para o tornar facilmente manejável, é arranjar uma representação simbólica para os conjuntos; de contrário, teríamos sempre que estar pegados a tabelas de resultados particulares e não obteríamos a generalidade conveniente /.../ A variável é, portanto, uma entidade que, dizendo respeito a um nível de isolado – o conjunto – superior ao do número, é ela própria, de uma natureza superior [...]; no entanto, o caráter contraditório do conceito – a variável é e não é cada um dos elementos do conjunto – deu origem a que a sua introdução na Ciência seja relativamente recente. Pelo seu caráter essencial – síntese do ser e não ser –, ela sai daquele quadro de ideias que quer ver na realidade uma permanência e irrompe ligada à corrente do pensamento que, expressa ou tacitamente, vê na fluência, a primeira das suas características. (CARAÇA, 1998, p. 127-128).

Assim compreendido o conceito de variável e procurando conhecer o desenvolvimento da álgebra voltamo-nos para François Viète (1540-1603), cujos estudos também foram fundamentais para essa área da matemática no século XVI. Em sua obra *In Artem Analyticam Isagoge* (Introdução à Arte Analítica), de 1591, Viète retomou os problemas de Diofanto com o objetivo de mostrar que a sua arte analítica permitia a resolução de problemas antigos ou de quaisquer problemas matemáticos.

> Viète conhecia, sem dúvida, o método de análise e síntese utilizado pelos antigos e sabia que quantidades desconhecidas podiam ser utilizadas na resolução de problemas, como Diofanto já tinha feito na Aritmética. Ele sabia também que a álgebra era uma ferramenta poderosa, pois os tratados árabes eram bastante conhecidos e utilizados, ainda que de modo fragmentado, por seus contemporâneos. Para propor uma unificação destes saberes e fundar um novo padrão para a resolução de problemas matemáticos, Viète apresentou um método sistemático que permitiria resolver qualquer tipo de problema. No final da Isagoge lemos que a arte analítica toma para si o maior de todos os problemas, em letras maiúsculas: NULLUM NOM PROBLEMA SOLVERE (“nenhum problema sem resolver”) (CORRÊA, 2008, p. 55).

Em seus trabalhos, Viète passa a utilizar letras para representar dados conhecidos e desconhecidos, além de parâmetros arbitrários dos problemas, o que nos permite, por exemplo, escrever o método geral de resolução por meio de uma fórmula.

> Viète passou a designar por letras não somente as variáveis e as potências das

> variáveis, o que já era feito em sua época, mas também os coeficientes das variáveis. Com essas letras ele formou expressões algébricas, com as quais podia operar de acordo com as regras já conhecidas na álgebra do seu tempo. Viète empregou vogais A,E,I,O,U para as variáveis desconhecidas e consoantes B,C,D,... para as variáveis conhecidas, ou seja para os coeficientes da equação. Para o quadrado da variável A, empregava a notação *A quadratus*, enquanto o cubo da mesma variável era denotado por *A cu-bus*. A multiplicação era indicada pela palavra *in* e a igualdade por uma abreviatura de *aequalis.* Viète realizou importantes progressos no cálculo algébrico e em suas aplicações (MOL, 2013, p. 93).

Mol (2013) destaca que a mais significativa contribuição de Viète foi abrir a possibilidade de trabalhar com expressões gerais, "com isso, seu trabalho simplificou a manipulação de expressões e criou condições para uma maior atenção à estrutura de cada problema" (MOL, 2013, p. 94).

Os estudos e avanços de Viète, no que diz respeito à álgebra simbólica, nos fazem refletir sobre a linguagem algébrica. Entende-se, assim como Sousa (2004, p. 84), que a linguagem algébrica não pode ser vista de modo isolado, mas considerada como "totalidade de uma álgebra indefinível, na qual o significado básico de cada termo é que ele significa um 'movimento total' da álgebra".

Entende-se, desse modo, que as realizações humanas expressam ou caracterizam períodos em que os esforços estavam voltados para determinados tipos de interrogação, para determinadas questões e aquisições matemáticas cujos resultados originaram novos questionamentos, impulsionaram a busca e apontaram a direção de outros níveis de aquisições. Esse movimento caracteriza o próprio fazer matemática em que se procura "repensar integralmente seus próprios conteúdos e nisso reside, inclusive, uma condição essencial para seu progresso" (LICHNEROWICZ apud MILLIES, 2004, p. 4-5).

Esse movimento gera transformações que são emergentes da produção da matemática, entendida como atemporal e acessível, que permitem aos indivíduos olharem para o presente considerando as realizações, interrogando-as e ampliando os modos de interpretá-las.

Nesse modo de a produção matemática ir sendo compreendida ao longo do tempo, especialmente a partir do século XIX com o avanço das técnicas e uso dos conteúdos matemáticos em diferentes áreas, há mudanças de concepções sobre o significado do conhecimento matemático (BOYER, 1974; MILLIES, 2004; MOL, 2013). A matemática, até então, produzida sobre a Geometria de Euclides e a Aritmética, viu a Geometria não-euclidiana emergir através dos estudos de Nicolai Ivanovich Lobatchevski (1792-1856) e a Álgebra sendo construída independentemente da Aritmética.

> Quando a Álgebra passa a ser construída independentemente da Aritmética, as incógnitas não representavam mais apenas números naturais, relacionados com

> objetos e situações passíveis de serem experienciadas. Elas começaram a se referir também a números negativos e, mais tarde, a números complexos ou imaginários. Tais números, diferentemente dos naturais, não podem ser relacionados com objetos do mundo, dado em sua fisicalidade empírica. Como seu próprio nome diz, só existiam na imaginação de quem trabalhava com eles. Apesar disso, eles são objetos de estudo e possibilitam a expansão de conceitos matemáticos já existentes e a construção de novos, carregando uma sequência cada vez mais abrangente de processos de abstrações na Matemática (MONDINI, 2013, p. 15).

O avanço nos modos como os objetos matemáticos eram tratados pelos estudiosos permitiu que novos olhares lhes fossem lançados, produzindo outros significados.

No século XIX os argumentos e fundamentos da lógica formal são estruturados de uma nova forma e dão origem a Álgebra Booleana, resultado dos estudos de George Boole (1815 - 1864). Para o matemático "o caráter essencial da matemática reside em sua forma e não em seu conteúdo" (EVES, 1995, p. 558). Por volta de 1870, Georg Cantor (1845 - 1918), desenvolve a Teoria dos Conjuntos a partir de seus questionamentos sobre a natureza do infinito e do estudo das funções reais por meio de séries trigonométricas, "as noções de espaço e geometria de um espaço, por exemplo, passaram por uma revolução completa com a teoria dos conjuntos" (EVES, 1995, p. 659).

Até o século XIX era inconcebível uma álgebra que se distanciasse da álgebra comum da aritmética,

> Tentar, por exemplo, a construção de uma álgebra consistente na qual não se verificasse a lei comutativa da multiplicação não só provavelmente não ocorria a ninguém na época, como também, se ocorresse, certamente seria descartada por parecer uma ideia ridícula; afinal de contas, como seria possível uma álgebra lógica na qual a *x* b fosse diferente de b *x* a? Era essa a impressão sobre a álgebra quando, em 1843, William Rowan Hamilton foi forçado, por considerações físicas, a inventar uma álgebra em que a lei comutativa da multiplicação não valia. O passo decisivo, por parte de Hamilton, de abandonar a lei comutativa não foi fácil de dar; só foi dado depois de vários anos de cogitações em torno de um mesmo problema particular (EVES, 1995, p. 548).

Os estudos do matemático Wiliam Rowan Hamilton (1805 - 1865) sobre os números complexos permitiram avanços em diferentes áreas. Para o irlandês, a álgebra devia ser mais que uma linguagem, pelo fato "de ser uma ciência significava, para ele, seus teoremas devem ser verdadeiros e não apenas demonstráveis a partir de certas premissas; isto é, na sua visão, eles devem ter uma conexão com a realidade" (MILLIES, 2004, p. 31).

O século XX ficou marcado pelo desenvolvimento e aprimoramento dos fundamentos e estruturas da lógica matemática e muitos conceitos básicos da matemática passaram por generalizações notáveis, permitindo que áreas como a teoria dos conjuntos, a álgebra abstrata e a topologia se desenvolvessem de forma significativa, como destaca Eves (1995).

Outra característica desse período é a ênfase na abstração e a preocupação com a análise das estruturas, dos elementos característicos dos objetos matemáticos, despertando o desejo de considerar tais aspectos no ensino, culminando com o movimento denominado *Matemática Moderna*. A intenção era dar mais atenção às leis básicas da álgebra (comutativa, distributiva, associativa, entre outras), uma vez que são elas que constituem diversas estruturas algébricas, segundo Eves (1995). Revela-se nesse modo de compreender a álgebra uma intensa preocupação com o rigor matemático e as demonstrações.

Os trabalhos de Nicolas Bourbaki[5], a partir de 1939, contribuíram para a disseminação e organização da álgebra abstrata. O objetivo de um grupo liderado por Bourbaki era produzir e divulgar textos didáticos que evidenciassem as características da *Matemática Moderna*. Dentre as obras mais conhecidas, podemos citar *Éléments de Mathématique*[6].

> Bourbaki defendia que o matemático não deve se ocupar dos objetos, mas das relações estabelecidas entre eles. Mais ainda, que as relações podem ser as mesmas para objetos que pareçam muito diferentes, e que elas poderiam ser descritas de uma maneira geral, surgindo assim a necessidade de introduzir novos objetos abstratos (ESQUINCALHA, 2012, p. 32).

Fica evidente nas obras do autor o tratamento axiomático, abstrato e geral que é dado aos conteúdos. Após séculos de estudos sobre a generalização e a abstração, a matemática vai sendo reorganizada e se aproxima da estrutura com que a conhecemos hoje. De acordo com Mondini (2013), é comum associar-se a Álgebra Moderna com o conhecimento construído até o século XIX, porém é no século XX que os estudos sobre álgebra ampliam seu grau de abstração.

É durante esse período – século XX - que a "nova estruturação algébrica se alastrou para outros campos da Matemática" (MONDINI, 2013, p. 16). Após a metade do século, conforme destaca Boyer (1974), houve uma "revolução" nos métodos algébricos. Dentre os estudos da época podemos citar os trabalhos de Henri Carten (1904 - 2008) e Samuel Eilenberg (1913-1998) que resultaram na álgebra homológica, "um desenvolvimento da álgebra abstrata que

---

[5] Nicolas Bourbaki é, na verdade, um pseudônimo usado por um grupo de matemáticos. Embora os membros dessa organização não tenham de fazer nenhum juramento de segredo, a maioria se compraz com uma certa aura de mistério que paira sobre eles. Não obstante, a maioria dos matemáticos acaba por saber quem são eles (pelo menos em parte), embora não oficialmente. Acredita-se que entre os membros originais figuravam C. Chevalley, J. Delsarte, J. Dieudonné e A. Weil. (EVES, 1995, p. 691).

[6] Todo o conteúdo dos Éléments de Mathématique foi rigorosamente selecionado com o objetivo de que as teorias ali apresentadas fossem efetivamente úteis ao maior número de pessoas possível, e que os casos apresentados fossem os mais gerais possíveis. Éléments de Mathématique acabou se tornando uma coleção de dez livros publicados em vários volumes, entre 1939 e 1998, alcançando o total de 7000 páginas que versam sobre Teoria dos Conjuntos, Álgebra, Topologia Geral, Funções de Uma Variável Real, Espaços Vetoriais Topológicos, Integração, Álgebra Comutativa, Variedades Diferenciáveis e Analíticas, Grupos e Álgebra de Lie, e, Teorias Espectrais (ESQUINCALHA, 2012).

trata de resultados válidos para muitas espécies diferentes de espaços – uma invasão do domínio da álgebra pura pela topologia algébrica" (BOYER, 1974, p. 457).

Ao nos voltarmos para esses aspectos do desenvolvimento histórico da álgebra, percebemos que ela se consolidou como área de conhecimento, como fruto de um desenvolvimento histórico que, conforme salienta Bicudo (2016, p. 44), pode ser interpretado como "uma continuidade de passados que se implicam mutuamente [compreendendo-o] como uma unidade da transmissão, que se constitui como um tradicionalizar". Há uma construção de "conceitos algébricos [que] considerou os elementos históricos desenvolvidos pelo pensamento humano desde as mais remotas civilizações. Nunca esteve dissociado da cultura e do trabalho humano" (SOUSA, 2004, p. 87).

Com essas características vão se delineando uma concepção de matemática em transformação, que agrega novas possibilidades e revela modos de lidar com os elementos característicos dos objetos matemáticos. Tais objetos, ao serem articulados, relacionados e estudados, permitem compreender problemas antigos de uma nova forma e propor soluções diferenciadas das existentes. Abre-se um cenário do fazer matemática em que,

> as características algébricas não falam de uma cultura determinada, elas são invariantes, componentes da síntese contínua que revela o movimento da construção humana do conhecimento algébrico numa perspectiva atemporal que contempla passado, presente e futuro, ainda que como possibilidade, das realizações humanas. Desta maneira pode-se compreender o que é álgebra em seus aspectos estruturais em termos dos invariantes (KLUTH, 2003, p.5).

A álgebra, enquanto área da matemática, no seu movimento de produção pode ser compreendida pelo estudo dos elementos característicos dos objetos matemáticos e das possibilidades de relações entre eles (MONDINI, 2013). Isso indica que, com a Álgebra, abrem-se

> Formas de explicitar o modo com que abordamos e lidamos com os objetos matemáticos, porém mais do que isto, ao explicitar ela recupera e estende conceitos subjacentes dos objetos matemáticos constituídos ou em construção. A forma de explicitar o modo compõe o fio que alinhava e incorpora os processos sintéticos e analíticos inerentes ao movimento da construção dos objetos matemáticos (KLUTH, 2003, p. 463).

Esse modo de compreendê-la nos faz refletir sobre os objetos matemáticos. Para Husserl, o conhecimento matemático, mesmo que objetivo e duradouro está enraizado no mundo-vida[7] (BICUDO; GARNICA, 2011). Husserl concebe os objetos matemáticos como "idealidades". Entretanto, elas são distintas daquelas entendidas na filosofia platônica, como existente de modo perfeito e no mundo das ideias. Na concepção husserliana as idealidades

> são constituídas historicamente, têm origem no ato da evidência original e subjetiva, pois esse é um ato que ocorre na esfera psicológica do sujeito, ao visualizar a reunião de aspectos individuais de certo tipo de experiência da realidade (BICUDO; GARNICA, 2011, p. 46-47).

Podemos entender que os objetos matemáticos são constituídos "na intencionalidade da subjetividade, e o solo que os sustenta é o mundo da experiência, o mundo vivido" (FERREIRA, 2019, p. 54). Para Husserl, a constituição de um objeto matemático se dá na subjetividade do sujeito, entendido como ser no mundo, portanto sempre com o outro o que carrega a intersubjetividade, pois há abertura ao diálogo, a expressão.

A idealidade, como concebida no âmbito da fenomenologia, é constituída na subjetividade transcendental, cujo solo é o *Lebenswelt* (mundo da vida), entendido como o onde as experiências ocorrem e fazem sentido para o sujeito e para os cossujeitos[8], com quem se está no mundo, dialogando e compartilhando o compreendido. A subjetividade transcendental, segundo Bicudo (2013)

> transcende as próprias experiências perceptivas desdobradas nos atos da consciência quando o sujeito se dá conta do que está processando e pelo movimento de reflexão e de atos de abstração, reúne de forma articulada compreensões e interpretações já efetuadas sobre o objeto focado, dando origem a outros objetos. Estes, ao serem expressos e comunicados a cossujeitos, ganham vida na dimensão histórico-cultural, porém com características agora diversas, daquelas concernentes às vivências individuais (BICUDO, 2013, p. 9).

Compreendemos que os objetos matemáticos são constituídos na experiência vivida, "na dimensão dos atos reflexivos, uma vez que ao perceber o sujeito se volta para ... e desdobra o percebido em atos de reflexão, dando-se conta do que está fazendo" (FERREIRA, 2019, p. 56).

A álgebra traz uma abordagem diferenciada para os objetos matemáticos, abrindo um campo novo do pensar, uma vez que amplia possibilidades de estratégias e generalização das

---

[7] Traduzido da palavra alemã *Lebenswelt*. Mundo da vida "entendido como a espacialidade (modo de sermos no espaço) e temporalidade (modos de sermos no tempo) em que vivemos com os outros seres humanos e os demais seres vivos e natureza, bem como com todas as explicações científicas, religiosas, e de outras áreas de atividades e de conhecimento humano. Mundo não é um recipiente, uma coisa, mas um espaço que se estende à medida que as ações são efetuadas e cujo horizonte de compreensão se expande à medida que o sentido vai se fazendo para cada um de nós e para a comunidade em que estamos inseridos" (BICUDO, 2011, p. 30).

[8] O termo cossujeito é usado por (BARBARIZ, 2017) para se referir as pessoas que estão junto à pesquisadora na temporalidade da pesquisa. Neste texto empregamos esse termo para falar do outro com o qual sempre somos no mundo.

relações. É importante salientar que não ignoramos o caráter simbólico e a linguagem formal da álgebra, porém é relevante explorar suas características que levam a nos aventurarmos no estudo do pensamento algébrico.

1.2 Pensamento Algébrico: caminhos e compreensões

Ao compreendermos a álgebra como possibilidade para tratar os objetos matemáticos, nos voltamos para o pensamento algébrico visando entendê-lo. As leituras realizadas indicam correntes históricas e filosóficas que trazem perspectivas distintas sobre o pensamento algébrico. Neste texto optamos por expor as compreensões oriundas de autores que consideram o fazer algébrico no contexto escolar e que destacam, também, os anos iniciais, como James Kaput, João Pedro da Ponte e Luis Radford.

James Kaput volta-se para as interações humanas com o conhecimento que, segundo explicita, se dão em decorrência das próprias estruturas inerentes ao conhecimento ou pela habilidade de o sujeito explorar meios físicos (no caso da experiência matemática através dos sistemas de notação). Sendo assim, é importante a discussão das relações entre pensamento e linguagem.

Para Kaput (1999) o ensino de álgebra tem se reduzido a um conjunto de procedimentos desconectados de outros conhecimentos matemáticos e do mundo real dos alunos, uma vez que "as 'aplicações' usadas são notoriamente artificiais [...] e os alunos não tem a oportunidade de refletir sobre suas experiências e articular seus conhecimentos" (p. 2). Para o autor é importante que os alunos atribuam significado aos procedimentos realizados, fazendo generalizações, a partir da exploração de resultados e relações matemáticas, que são expressas por meio de uma linguagem cada vez mais formal.

Considerando a generalização e as formas de expressão características essenciais ao fazer algébrico, Blanton e Kaput (2005) caracterizam o pensamento algébrico como

> um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto de instâncias particulares, estabelecem essas generalizações através do discurso da argumentação, e as expressam de maneira cada vez mais formais e apropriadas à idade (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413, tradução nossa)[9].

Essas características relacionadas ao pensamento algébrico levam Blanton e Kaput

---

[9] We take algebraic reasoning to be a process in which students generalize math-ematical ideas from a set of particular instances, establish those generalizations through the discourse of argumentation, and express them in increasingly formaland age-appropriate ways (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413).

(2005) a destacarem formas de o apresentar que são denominadas: *aritmética generalizada, pensamento funcional* e *modelação.*

A *aritmética generalizada* envolve generalizações que são produzidas ao se analisar as operações aritméticas, suas propriedades e as relações entre os números. Conforme Canavarro (2007), esse modo de apresentar o pensamento algébrico implica em "analisar as expressões aritméticas não em termos do valor numérico obtido através do cálculo, mas em termos da sua forma (por exemplo, concluir que 33 + 8 = 8 + 33 não porque ambos representam 41, mas porque na adição a ordem das parcelas é indiferente)" (CANAVARRO, 2007, p. 89).

Essas ações no campo da aritmética possibilitam compreender esse modo de fazer algébrico que se denomina *aritmética generalizada* como, por exemplo, através da *exploração das propriedades, operações e relações entre números inteiros* (generalizar sobre adição e multiplicação de números pares e ímpares; decompor números inteiros em possíveis adições e examinar a estrutura dessas adições, relações entre operações, como a comutatividade da adição ou da multiplicação) *investigação dos significados do sinal de igualdade* (usar a ideia de equivalência) e *resolução de expressões numéricas envolvendo termos desconhecidos* (BLANTON; KAPUT, 2005).

O *pensamento funcional* envolve a descrição e identificação de relações funcionais nas quais se exploram as regularidades numéricas ou geométricas, a variação de quantidades e a determinação de valores particulares de uma função. Kaput (1999) destaca que "a ideia de função incorpora várias instâncias, todas coletadas dentro de uma única entidade (por exemplo, uma lista, tabela, gráfico), um processo que também envolve a generalização" (KAPUT, 1999, p. 21).

Ainda, segundo destacam Blanton e Kaput (2005), o *pensamento funcional* pode ser compreendido em outras ações, como as de *simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas* (usar símbolos para modelar problemas, operar com expressões), *representar dados graficamente* (fazer um gráfico de pares ordenados para identificar, expressar e analisar uma relação funcional), *identificar relações funcionais* (explorar correspondência entre quantidades e identificar relações), *prever resultados desconhecidos considerando relações conhecidas* (formular conjecturas tomando como ponto de partida relações já estabelecidas anteriormente), *identificar e descrever padrões numéricos e geométricos.*

Já a *modelação* envolve uma *forma de expressar* as generalizações de situações matemáticas construídas. Porém, conforme salientam Almeida e Santos (2017, p. 34),

> modelar uma situação, ou problema de estrutura algébrica, não significa, necessariamente, utilizar a linguagem simbólica da álgebra. É possível utilizar, por

> exemplo, a linguagem gestual, pictórica, natural, numérica ou simbólica algébrica para representar um problema algébrico.

Podemos considerar a *modelação* entrelaçada às outras formas de o pensamento algébrico se apresentar, uma vez que ela é utilizada para representar, em várias situações, as ações realizadas na *aritmética generalizada* e no *pensamento funcional.* Segundo destacam Blanton e Kaput (2005), a *modelação* pode ser compreendida em outras ações como as de *justificar, provar, testar conjecturas e generalizar processos matemáticos* (explicitar o raciocínio, descrevendo processos e discutindo possibilidades).

Desse modo, compreendemos, que para Blanton e Kaput (2005), o pensamento algébrico se apresenta como aritmética generalizada, exploração de padrões e modelagem, podendo ser desenvolvido desde os anos iniciais da Educação Básica, por meio de tarefas que visem à generalização, através de situações voltadas ao sentido numérico e a busca de regularidade.

Para compreender, no contexto da sala de aula, as possibilidades de se fazer exploração, buscar regularidades e expor o compreendido, nos voltamos para os trabalhos de João Pedro da Ponte. Salientamos que nosso interesse por esse autor, embora não seja alguém que discuta especificamente a álgebra, se dá em virtude do modo pelo qual, ao defender a postura da Investigação Matemática, ele valoriza as ações de procurar, questionar, querer saber, etc., que consideramos importante para o desenvolvimento do pensar.

Relativamente ao fazer algébrico, Ponte (2006) alerta que se considerarmos a formalização e sistematização de técnicas de resolução de problemas ou o estudo de equações, desvalorizam-se outras características igualmente significativas, uma vez que:

> no centro da Álgebra estão relações matemáticas abstratas, que tanto podem ser expressas por equações, inequações ou funções como podem ser representadas por outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos. No entanto, a visão da Álgebra como consistindo no trabalho com expressões continua a persistir. A perspectiva prevalecente dos que estudaram este tema é que se trata de um conjunto de regras de transformação de expressões (monômios, polinômios, frações algébricas, expressões com radicais…) e processos de resolução de equações do 1.º e 2.º grau e de sistemas de equações (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p.7-8).

Ainda, de acordo com esses autores, discussões sobre o que se ensina como álgebra na Educação Básica vem ganhando destaque, tornando possível entender que o fazer algébrico vai além da manipulação de regras e símbolos, exigindo-se um trabalho que favoreça o desenvolvimento do *pensamento algébrico.*

Ponte (2006) caracteriza esse modo de pensar como aquele que:

> inclui a capacidade de lidar com o cálculo algébrico e as funções. No entanto, inclui igualmente a capacidade de lidar com muitas outras estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios (PONTE, 2006, p. 7).

Como os autores anteriormente citados, Ponte, Branco e Matos (2009) também salientam a relevância da generalização[10] uma vez que por meio dela "dá-se atenção não só aos objetos, mas principalmente às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstracto" (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 11). O "aprender álgebra" requer a capacidade de, em diferentes situações, pensar algebricamente, estabelecendo relações, modelando e resolvendo problemas.

Essas ações estão relacionadas ao *pensamento algébrico* que, conforme Ponte, Branco e Matos (2009), envolvem três tipos de atividades: representar, raciocinar e resolver problemas.

Quadro 1 - Atividades inerentes ao pensamento algébrico

Representar	• Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; • Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; • Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	• Relacionar (em particular, analisar propriedades); • Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; • Deduzir
Resolver problemas e modelar situações	• Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Fonte: Ponte, Branco e Matos (2009)

Desse modo, para Ponte, Branco e Matos (2009), o pensamento algébrico pode ser compreendido em outras ações como as de representar (usar diferentes sistemas de representação), raciocinar (relacionar, deduzir, generalizar) e resolver problemas (usar

[10] Para esses autores a generalização caracteriza-se por dois tipos de atividades: identificar pontos comuns em casos diferentes e estender uma afirmação além do domínio em que foi originada (BRUNHEIRA; PONTE, 2019).

representações diversas para interpretar e resolver problemas).

Outro autor com o qual procuramos dialogar é Luis Radford, cujos trabalhos dão origem a Teoria da Objetivação (TO), inspirada nas escolas antropológicas e histórico-culturais. Ela se ampara em uma epistemologia e ontologia não racionalistas, considerando o ensino e a aprendizagem como um processo essencialmente dialético, de natureza social, histórica e cultural. Para a TO a compreensão da natureza é também a compreensão do homem (e vice-versa), já que é na relação homem-natureza, através da atividade humana, que o homem transforma a natureza e se transforma.

Para o autor, o pensamento algébrico é “uma forma particular de refletir matematicamente” (RADFORD, 2006, p. 2). Essa forma particular trata de, conforme Radford (2010), objetos de natureza indeterminada, como variáveis e parâmetros e é uma área do conhecimento matemático que trata com a *indeterminação, representação simbólica* e *manipulação analítica.*

De acordo com o autor, a *indeterminação* é característica de problemas algébricos que envolvem incógnitas, variáveis, parâmetros e números generalizados. A *representação simbólica* diz respeito aos modos como os dados de problemas são nomeados ou simbolizados. E a *manipulação analítica* envolve a manipulação de quantidades não conhecidas (indeterminadas) num modo de fazer que se baseia na forma como lidamos com quantidades conhecidas, identificando-as e operando com elas.

Radford (2009) considerando essas características relacionadas ao pensamento algébrico: indeterminação, representação simbólica e manipulação analítica, destaca formas do pensamento algébrico se apresentar que são denominadas: *factual, contextual e padrão.*

Segundo destaca Radford (2009), o *pensamento algébrico factual* pode ser compreendido em outras ações como as de *identificar regularidades,* entretanto não há a generalização da relação observada, esta é tratada com casos particulares, números específicos, sendo expressas através de gestos e palavras. Isto é, o aluno é capaz de identificar a regularidade, porém tal ação não é suficiente para o mesmo generalizá-la.

Ainda segundo o autor, o *pensamento algébrico contextual* envolve ações de *descrever* as regularidades identificadas em determinada situação, expressando, através de palavras, a generalização da relação identificada. Há, de acordo com Radford (2009), uma mudança, tanto em termos de como a generalização é tratada como os meios pelos quais os alunos expressam o pensamento.

Já o *pensamento algébrico padrão* envolve as ações de *expressar* as relações identificadas e estabelecidas em diferentes situações por meio de uma simbologia algébrica, por meio de fórmulas alfanuméricas[11]. Há, nesse modo de pensar algébrico, de acordo com Radford (2009), uma significativa mudança na linguagem utilizada pelo sujeito.

Radford (2010, 2012, 2014, 2018) considera que o desenvolvimento do pensamento algébrico envolve modos de expressar o pensar. Trata-se de um processo onde inicialmente gestos, falas e ritmos são utilizados e posteriormente são substituídos por símbolos alfanuméricos. O autor destaca que, assim como o domínio da linguagem algébrica é importante, deve-se valorizar o percurso do aluno ao atribuir significados aos objetos matemáticos e a própria linguagem utilizada para expressá-los.

Buscamos, ao longo desta subseção, explicitar as características do fazer algébrico, em especial no contexto da sala de aula. Esse fazer, que se volta para a álgebra como área do conhecimento matemático que envolve modos de tratar e compreender os elementos característicos dos objetos matemáticos. Esses modos podem ser compreendidos nas ações de explorar, identificar, relacionar, generalizar e expressar relações entre esses objetos.

Essas ações possibilitam que outros olhares sejam lançados aos objetos matemáticos. Esse fazer impulsiona o sujeito à busca por novas maneiras de compreender a matemática, e principalmente, por novos modos de expressar o seu pensar. Entendemos ser essa busca a disposição para trabalhar com os objetos matemáticos, relacionando-os de modo que seja possível, ao sujeito, organizar o pensamento, ampliar o repertório de estratégias e generalizar relações.

Modos especificados por esse fazer algébrico, como a exploração das características dos objetos matemáticos, suas relações e formas de expressão mostram-se possíveis no contexto da sala aula, nos conduzindo ao pensamento algébrico e oportunizando-nos a pensar, no contexto escolar, modos de favorecer o seu desenvolvimento. Como exposto ao longo dessa subseção, o pensamento algébrico apresenta perspectivas distintas e por isso consideramos importante explicitar o modo como o compreendemos nesta pesquisa.

Entretanto, antes de fazê-lo, consideramos importante nos determos no *pensar*. Essa importância advém da interpretação dos autores lidos. Neles vê-se uma explicitação das características do pensamento algébrico no contexto da sala de aula e uma discussão dos modos de tratar os objetos matemáticos mediante ações de explorar, identificar, relacionar, generalizar e expressar relações entre esses objetos, no entanto, não se vê uma discussão acerca do pensar.

---

[11] O simbolismo alfanumérico consiste de um sistema de numeração que se associam letras e números. "O simbolismo alfanumérico constituiu um poderoso sistema semiótico. Com uma sintaxe muito precisa e um sistema extremamente condensado de significados, oferece uma variedade de possibilidades de realizar cálculos de maneira eficiente" (RADFORD, 2018, p. 8, tradução nossa).

Ou seja, se falamos de pensamento algébrico envolve-se certo modo de pensar. Mas o que significa pensar? Que pensar é esse que pode ser caracterizado como algébrico?

Heidegger foi o autor que elegemos para, em uma perspectiva fenomenológica, entendermos o pensar. Ao lê-lo, vê-se que a pergunta que fazemos é bastante complexa, uma vez que responder o que é pensar é como explicar o que é nadar; "jamais aprendemos, por exemplo, o que é nadar através de um manual sobre natação. O que é nadar é dito saltando na correnteza. Somente assim conhecemos o elemento em que o nadar precisa se mover" (HEIDEGGER, 2012, p. 121). Segundo o autor o mesmo vale para o pensar: aprendemos o que é pensar, saltando na própria correnteza do pensar.

Heidegger (2012, p. 111) destaca que o "homem pode pensar à medida que tem a possibilidade para tal", entretanto mesmo essa possibilidade não garante o pensar. Para pensar o homem precisa de abertura, o que se dá pela disposição.

Para Heidegger (1996) "*dis-posé* [*dis-posição*] significa aqui literalmente: ex-posto, iluminado e com isto entregue ao serviço daquilo que é" (p. 219). Entendemos que o pensar requer que o sujeito esteja disposto a entregar-se a ele, lançando-se as suas possibilidades. Ao dispor-se, o sujeito se abre ao mundo e aos outros, compreendendo-o.

Mas, como isso é possível?

> Para ele [Heidegger], chegar à região do pensamento só é possível através de um salto, um salto em direção ao abismo que, desconcertantemente, eleva e desnorteia o homem em direção à terra da liberdade de juízos, do aberto, para além das cercanias da opinião comum (KAMPFF, 2017, p. 79).

Esse salto é originado na abertura e ela é possibilitada pela disposição. Dispondo-se o sujeito se abre aos outros, a si próprio e ao mundo, deixa-se estar posto dentro, jogado na possibilidade de se ocupar com o mundo. Ao se dedicar ao pensar, o homem se dispõe para as possibilidades que podem vir a se apresentar. Esse é o salto, direcionado para o que não é familiar, o que causa estranheza, onde o homem "torna-se então um 'estrangeiro' em sua própria terra de modo que tenha que abandonar o feito para sempre re-começar toda e qualquer relação" (SANTOS; RIBEIRO, 2007, p. 6).

Dizer que o pensar requer disposição, significa deixar-se estar junto a, ater-se ao que se mostra no que é aberto pelas possibilidades, pois

> verdadeiramente só gostamos do que, previamente e a partir de si mesmo, dá gosto. E nos dá gosto em nosso próprio ser à medida que tende para isso [...] O que nos atém ao modo próprio de ser aí nos atém somente à medida que nós, a partir de nós mesmos, guardamos isso que nos atém (HEIDEGGER, 2012, p. 111).

O pensar requer que queiramos ficar com o que se mostra, de modo que isso que se mostra permaneça em nós, não de maneira estática, pois o pensar é movimento que está em constante processo de transformação, que envolve idas e vindas, fazer e refazer, uma marcha que interroga o próprio proceder, aberto a outras interpretações, olhares e modos de compreender.

Conforme Merleau-Ponty, o pensar,

> é com efeito uma experiência, no sentido em que nós nos damos nosso pensamento pela fala interior ou exterior. Ele progride no instante e como que por fulgurações, mas em seguida é preciso que nos apropriemos dele, e é pela expressão que ele se torna nosso (MERLEAU-PONTY, 1994, p. 241-242).

Merleau-Ponty traz o pensar como uma experiência e, em Heidegger, entende-se que o pensar é uma atitude do sujeito que se lança, pela disposição, nas possibilidades do desconhecido. Embora não pareça, ambos assumem o pensar de um mesmo modo, pois a experiência é entendida como "uma característica constitutiva do ser humano enquanto *ex-istente*, ou seja, enquanto ser-no-mundo, em interação constante com o outro. Por isso, implica necessariamente uma atitude de abertura e disponibilidade" (CARDOSO, 2007, p. 48).

Aqui podemos questionar: se o pensar pode ser entendido como uma ação do sujeito que, pela disposição, se lança às possibilidades que lhes são abertas para compreender o que se mostra, o que significa *pensamento algébrico*? O pensamento seria o produto do ato de pensar? Mesmo assim, ele pode ser adjetivado como algébrico?

Nem com Heidegger e nem com Merleau-Ponty somos capazes de responder a essas questões. Eles se voltam para o pensar enquanto atividade da consciência e para o seu conteúdo de sentido: o pensado.

Compreendida na perspectiva fenomenológica,

> A consciência funda sentido como compreensão de algo que é (sentido do ser), através da intencionalidade, ou seja, através de sua orientação intencional para encher o vazio. O conceito de intencionalidade da consciência, por isso, é fundamental e constitutivo na fenomenologia de Husserl. Nela constituem-se os *cogitata* do *cogito*, os "objetos" da consciência. A intencionalidade constitui síntese ou unidade, uma constituição ativa e passiva. Esse conceito de síntese distingue-se do tradicional, pois não se limita à síntese no juízo (ZILLES, 2007, p. 217).

A síntese é um ato unificador no qual o sentido se faz para o sujeito. É importante destacar que a fenomenologia não concebe os objetos independentes de um observador, aliás, nem concebe um observador; os objetos são objetos para o sujeito que a ele se volta de modo atento, procurando compreendê-los. Logo, são objetos para a consciência. Segundo Zilles

(2007), a consciência fenomenológica é a condição de possibilidade do conhecimento, uma vez que conhecer é constituir significados, o que acontece no movimento noeses-noema.

> a noeses são os atos pelos quais a consciência visa um certo objeto de uma certa maneira, e o conteúdo ou significado desses objetos visados é o noema. No nível transcendental, as noeses são os atos do sujeito constituintes que criam os noemas enquanto puras idealidades ou significações. As noeses empíricas são passivas, porque visam uma significação preexistente; a noese transcendental é ativa, porque constitui as próprias significações (ZILLES, 2007, p. 217).

Em nossa pesquisa estamos considerando que, ao buscar modos de pensar com a álgebra na sala de aula, devemos nos voltar para o ato de pensar a partir de seu conteúdo de sentido (o pensado) que é expresso. Pela expressão, de acordo com Merleau-Ponty (1994), o pensamento se torna nosso, ou seja, ele permanece e não se deixa perder.

Ainda, para esse autor, o pensamento e a linguagem se constituem simultaneamente o que indica que o pensamento não é "anterior" ou "anunciado" pela linguagem, mas nela se consuma. Não há, para Merleau-Ponty (1994) um pensamento que não seja acompanhado da linguagem. "O pensamento 'puro' reduz-se a um certo vazio da consciência [...]. A nova intenção significativa só se conhece a si mesma recobrindo-se de significações já disponíveis, resultado de atos de expressão anteriores" (MERLEAU-PONTY, 1994, p. 249). A linguagem, assim compreendida, não traduz o pensamento, mas o torna presente ao mundo.

Linguagem e pensamento, conforme Merleau-Ponty (1994), estão envolvidos um no outro de tal modo que a linguagem é um modo que o corpo tem de presentificar – por meio da expressão - o sentido do pensamento. A linguagem não é, pois, apenas tradução ou reprodução do pensamento; antes ela é sua fonte originária de sentido.

Conforme se pode interpretar, não há um pensamento isolado, uma vez que ele se constitui no mundo da vida, na linguagem e, por isso, a palavra tem sentido sem, no entanto, contê-lo. O "sentido irrompe através da palavra, projetando no silêncio articulador da linguagem o que este queria e sozinho não obtinha, mas sem obturá-lo" (FURLAN; BOCCHCI, 2003, p. 450). Esse sentido destacado pelos autores não é dado, mas compreendido pelo outro.

Vamos acompanhar um exemplo dado por Merleau-Ponty (1994, p. 244) para podermos entender que "toda linguagem se ensina por si mesma e introduz seu sentido no espírito do ouvinte".

> Uma música ou uma pintura que primeiramente não é compreendida, se verdadeiramente *diz* algo, termina por criar por si mesma seu público, quer dizer, por secretar ela mesma sua significação. No caso da prosa ou da poesia, a potência da fala é menos visível, porque temos a ilusão de já possuirmos em nós, com o sentido comum das palavras, o que é preciso para compreender qualquer texto, quando, evidentemente, as cores da paleta ou os sons brutos dos instrumentos, tais como a

> percepção natural os oferece a nós, não bastam para formar o sentido musical de uma música, o sentido pictórico de uma pintura. Mas, na verdade, o sentido de uma obra literária é menos feito pelo sentido comum das palavras do que contribui para modifica-lo. Há, portanto, tanto naquele que escuta ou lê como naquele que fala e escreve, um *pensamento na fala* (MERLEAU-PONTY, 1994, p. 244, grifos do autor).

Com isso o que se destaca é o processo de significação[12] que,

> expresso na conduta do outro, vem encontrar em mim a legitimação de seu sentido, e vice-versa: vejo no outro um reflexo de minhas próprias possibilidades, intenções que podem fazer parte de minha própria conduta. [...] O corpo [...] enquanto fenômeno [...] é portador de uma capacidade singular de apreender o sentido de outra conduta, seja o sentido do gesto ou da fala do outro; e a palavra também é um gesto e uma forma de conduta (FURLAN; BOCCHI, 2003, p. 448-449).

Entendemos que o sentido do pensamento expresso produz significado à medida que meu corpo, enquanto potência de intencionalidade, ao estar *com o outro* abre-se à possibilidade de compreender. Pela expressão revela-se um modo de compreender o pensamento que, embora não o esgote, uma vez que "seu movimento consiste sempre em nos atirar além, nas fronteiras entre o visível e o invisível, sondando as relações entre um mundo e outro" (FURLAN; BOCCHI, 2003, p. 450), torna-o presente.

Se considerarmos a álgebra como uma expressão linguística, ou seja, que comunica o pensado e, ao mesmo tempo, dá abertura ao pensar, e o pensamento algébrico como significação, como um processo de expressar o pensado quando se está com a álgebra, podemos explorar as possibilidades compreensivas dos objetos matemáticos. Mas, como se efetiva uma possibilidade de trabalhar esse processo de significação, o pensamento algébrico, na sala de aula dos anos iniciais?

Para nós, considerar essa possibilidade é um modo de tratar, da perspectiva da Filosofia da Educação Matemática, o pensamento algébrico, especificamente no contexto da sala de aula dos anos iniciais, nosso foco de interesse na pesquisa. Assumimos o pensamento algébrico como uma atitude do sujeito, um modo de ele compreender, relacionar e expressar elementos característicos de certa região da matemática chamada álgebra. Esse modo de compreender é

[12] No §124 de seu *Ideias*, Husserl (2006) fala em significar e significação. Diz que há ambiguidades quando se fala em significação e expressão. Embora a princípio tais palavras se referissem apenas à esfera linguística da expressão, o autor considera importante ampliar o que essas palavras dizem, de modo que significação possa ser aplicada a toda a esfera noemática, abrangendo todos os atos, entrelaçados ou não com os expressivos. A verbalização é a expressão porque a significação a ela correspondente exprime, diz, comunica. Expressão é a "forma" que pode se ajustar a todo e qualquer sentido, ou seja, ao núcleo noemático, e alçá-lo ao reino do logos, do conceitual, do geral (BICUDO, 2010, p. 28).
Para que isso possa ser compreendido é preciso que se entenda o par *noesis – noema*, mencionado por Husserl. *Noesis* se refere ao ato intencional; noema, ao que é enlaçado por esse ato. Por exemplo, tem-se uma árvore. Ver a árvore é um ato da consciência, portanto intencional. Trata-se do *noesis*. O visto, a árvore, é o *noema* (BICUDO, 2010, p 30).

expresso nas ações de explorar, identificar, relacionar e generalizar. Lançado nas possibilidades que lhe são abertas, no desconhecido, o aluno busca o sentido original desses objetos que foram produzidos na temporalidade e que nos chegam pela tradição.

Procurando conhecer as possibilidades do trabalho com a álgebra nos anos iniciais, buscamos pesquisas que propõem e discutem tarefas no âmbito da álgebra de modo a construir uma forma de nos aproximarmos dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais e, dialogando com eles, conhecer o modo pelo qual eles desenvolvem o trabalho com a álgebra em seu cotidiano. Na próxima seção deste texto apresentamos um modo de compreender a formação docente, assumindo-a, na investigação, numa perspectiva fenomenológica.

2 O PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS

Há muitas inquietações que motivam a escrita deste trabalho. Entender o desenvolvimento da álgebra ao longo do tempo, conhecer as diferentes perspectivas de se considerar o pensamento algébrico e suas possibilidades de trabalho nas aulas de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, entre outras tantas que permeiam nossas reflexões. Entretanto, nosso olhar busca enlaça-las e compreendê-las considerando o professor que ensina matemática nos anos iniciais.

Mas quem é esse professor? Entendemos que essa questão não apresenta uma única resposta, em virtude dos diferentes aspectos que envolvem a constituição desse profissional. No entanto, alguns caminhos se abrem, tornando possível expor compreensões. Nesta seção da tese apresentamos o modo pelo qual compreendemos a formação do professor em uma perspectiva fenomenológica. Para tanto, destacaremos aspectos da historicidade da profissão e modos de a matemática se fazer presente no movimento de sua formação.

2.1 Um olhar fenomenológico para o professor e sua formação

Dentre os diversos desafios enfrentados pelos professores podemos destacar a busca por modos de promover a aprendizagem de seu aluno, sem deixar de citar as questões relativas às políticas públicas e sociais que, diretamente, impactam a sua ação. O dia a dia do professor, muitas vezes, não lhe dá condições de considerar criticamente as transformações sociais, políticas e econômicas que permeiam o cotidiano escolar e influenciam suas ações.

A escola é, por excelência, o espaço no qual formas e modos de vida são discutidos e constituídos, onde relações são estabelecidas. Mas, qual o sentido que a escola tem para as pessoas que nela (*com*)vivem? Na perspectiva fenomenológica, corrente filosófica que inspira a escrita deste trabalho, a realidade escolar, que abarca escola, alunos, professores e objetos culturais (objetos de arte, produtos da ciência, da tecnologia, valores, formas de organização, etc) faz sentido para esses sujeitos no próprio cotidiano, na experiência vivida. Bicudo (2003) destaca que o sentido se dá na vivência das tarefas escolares realizadas em que trabalha-se, ensina-se, instrui-se, comunicam-se e produzem-se conhecimentos, aprende-se, avalia-se, deseja-se, repudia-se.

Considerando esse contexto, nos voltamos para a formação docente, não nos referindo ao professor como um ser incompleto ou inacabado que precisa de uma fôrma ideal a qual deva se adequar, mas como um profissional que busca sempre novos modos de compreender-se e de ensinar e aprender. Nisso o significado de formação deve ser explicitado. Para que isso seja possível, vamos começar por destacar o lugar do professor na sociedade.

As diferentes transformações ocorridas na sociedade ao longo do tempo sempre colocaram a escola e o professor como devendo atender às demandas oriundas dessas mudanças (NACARATO, 2013). Com isso, o foco de sua formação estava na necessidade de atender essas demandas, por exemplo, ensinar o aluno para atuar no mercado de trabalho, o que submete, muitas vezes, a escola e o professor às exigências de um espaço marcado pela produção.

Diante disso, uma imagem de professor vai se formando tanto para o aluno quanto para a sociedade. No senso comum o professor é aquele que transmite determinados conhecimentos para um grupo de pessoas. Entende-se o professor pela tarefa que desempenha: transmissor de conhecimento. Mas, o professor é aquela pessoa que está presente em grande parte da vida de outras pessoas, é quem compartilha anseios, discute possibilidades, se abre ao diálogo, ouve, fala e, também, transmite informações. Então, o professor é aquele que transmite conhecimento? O que significa "transmitir" e o que significa "conhecimento"?

Longe de queremos dar uma definição, nosso desejo é provocar o diálogo, o pensar acerca do que se entende pela profissão de professor e sua formação. Nosso desejo é despertar para os modos de ser do ser humano, professor, entendido como alguém inseparável da sociedade, conforme destaca Bicudo (2003),

> o professor tem uma presença socialmente importante no percurso da vida das pessoas, na medida que seu modo de ser, sua compreensão do mundo, do humano, da vida, se fazem presentes nas relações de ensino que estabelece no contexto da sua atividade profissional. Ele participa diretamente do *cultivo* das possibilidades que se anunciam na vida de cada um e que podem ou não virem a ser. Isso significa que as possibilidades podem ser silenciadas, ao negar-se ou ao faltar-se com o cuidado devido para que sejam ou para que se realizem (BICUDO, 2003, p. 11).

A atuação do professor tem, portanto, uma dimensão social que extrapola o "fazer" e "saber fazer" que, embora sejam aspectos importantes do ensinar e aprender, exige que nos mantenhamos atentos aos significados desses atos e, em uma postura fenomenológica, indica que se deve permanecer no cuidado para com o vir-a-ser do outro (BICUDO, 2010b).

As ações pedagógicas, entendidas em uma postura fenomenológica, manifestam-se no respeito e na atenção ao outro, deixando prevalencer o diálogo entre os sujeitos e a prática de ouvir de maneira atenta o que o outro diz (BICUDO, 2010a). Essas ações revelam uma compreensão do outro como pessoa para quem me volto intencionalmente, percebendo-a como igual a mim, como ser humano que sente, percebe, compreende, interpreta e se expressa.

Assumir a postura fenomenológica ao olhar para a formação do professor é buscar no trabalho docente o espaço no qual o professor se dá conta de si e de sua atuação *sendo* consigo mesmo, *com* os alunos, *com* o tema estudado, *com* a comunidade, *com* o mundo-vida. O *com* que destacamos nesse modo de o professor ser sendo, revela uma totalidade da qual ele não pode se separar; indica a intencionalidade da consciência que sempre está voltada para algo, ciente do que está sendo vivido no decurso das tarefas diárias de o professor ensinar, produzir significados para o seu modo de ser professor, compreender os conteúdos com os quais trabalha, as atitudes dos alunos, seus modos particulares de entender o que está sendo discutido. Nesse sentido,

> o trabalho pedagógico solicita uma dialética de ir e vir, buscando sentidos e significados, de tal modo que os processos de significação possam ser efetuados. É preciso permanecer atentos ao percebido e manifesto pelos alunos e pelo professor, à compreensão do sentido do que é expresso pelos alunos de maneira individual e em diálogo com o outro, na esfera da intersubjetividade, buscando sempre o sentido que faz para todos aquilo que está sendo trabalhado (BICUDO, 2010b, p. 45).

Mostra-se, assim, a importância de o professor manter-se atento à sala de aula na qual suas ações são efetivadas com os alunos e aos significados produzidos junto aos conteúdos e à escola. Compreendendo as possibilidades do professor no mundo-vida, em uma postura fenomenológica, nos voltamos para a formação docente interrogando-a.

Compreende-se, com Gadamer (1997), que o conceito de formação é genuinamente histórico e vem sofrendo alterações ao longo do tempo, apesar de ainda carregar o sentido da *forma ideal.*

> O autor explica que isso não é por acaso, pois formação (Bildung) encontra-se na palavra Bild (imagem), abrangendo 'cópia' (Nachbild) e 'modelo' (vorbild), correspondendo "a uma frequente transferência do devir para o ser". Com este filósofo, entendemos que o solo cultural que tem possibilitado compreender a formação tem lançado luz ao produzido, pela possibilidade de exposição de um modelo ideal, e que o produzir uma forma já aponta para o resultado. O foco incide mais sobre o produto vislumbrado. Há a necessidade cultural de se ter um modelo a ser copiado e este se estabelece como a expressão maior da formação (MOCROSKY; ORLOVSKI; LIDIO, 2019, p. 225).

Para Gadamer (1997), tal compreensão sobre a formação precisa ser superada, uma vez que "o resultado da formação não se produz na forma de uma finalidade técnica, mas nasce do processo interno de constituição e deformação e, por isso, permanece em constante evolução e aperfeiçoamento" (GADAMER, 1997, p. 50). Logo, a formação não pode ser compreendida como um resultado a ser alcançado, "pois se assim o fosse, a ação que permite moldar formas seria compreendida como um meio para um fim, distante da contínua constituição de modos de ser do ser humano” (MOCROSKY; ORLOVSKI; LIDIO, 2019, p. 225).

Bicudo (2003) também se volta ao estudo hermenêutico[13] que Gadamer (1997) faz do termo e explicita que, a palavra *formação,* derivada da palavra *forma,* vem se desvinculando do significado técnico, carregando sentidos mais complexos, como por exemplo, interpretações que expressam o *devir,* o tornar-se.

> *Formação* designa o processo do devir, em que o contorno da imagem, que persegue o modelo, se realiza. Mas é mais que isso. Esse processo, porém, não se efetua de modo a atender a uma finalidade técnica a ele externa, mas brota do processo interno de constituição e de formação, permanecendo em constante evolução e aperfeiçoamentos (BICUDO, 2003, p. 28).

Entendemos que o conceito de formação está relacionado à busca da forma ideal, construída a partir dos ideais e valores de uma sociedade, mas nunca assumindo-a como uma forma perfeita que submeta, desse modo, a formação à um modelo rígido, mas como um ideal que impulsiona o movimento, de maneira que as ações gerem novas formas (BICUDO, 2003).

A formação é, conforme Bicudo (2003), a dialética entre *forma* e *ação*, sendo a *forma* o formato que algo assume por meio de uma *ação*. Assim, neste trabalho, tal qual a autora, assumimos o termo “forma/ação” ao falarmos da formação docente para indicar que nos referimos à forma/ação docente como um movimento no qual o diálogo entre *forma* e *ação* vai se constituindo, vai ganhando forma à medida que as ações são desenvolvidas, analisadas, retomadas, rejeitadas, modificadas, vividas.

A dialética entre *forma* e *ação* que Bicudo (2003) apresenta é o que nos possibilita compreender o processo de forma/ação docente como um movimento constituído de ações que, ao atuarem, ganham formas, de modo que as formas provocam novas ações que delimitam novas formas e assim por diante, possibilitando o *vir a ser* do ser *no* mundo, ser *com* o mundo, conforme esclarece Mocrosky (2010) ao interpretar o dito por Bicudo (2003). Essa é a concepção fenomenológica de formação do professor, na qual,

> o foco passa a ser o movimento constante de pensar e repensar a ação, em um movimento de ação-reflexão-ação-reflexão do professor, por entendermos que o profissional nunca está formado, mas sempre em processo de forma/ação (MIARKA; BICUDO, 2010, p. 99).

[13] A teorização da hermenêutica enquanto método é definido como um modo de interpretar todos os textos, pautado em regras para legitimar a interpretação e a compreensão de modo explícito e nítido. Ao construir etapas de análise hermenêutica cria-se um método e, assim, limita-se às possibilidades de abertura de horizonte do leitor frente ao texto. Para a compreensão de um texto é necessário uma organização dialética e dialógica, que possibilite o encontro de horizontes entre o texto e o autor e produza uma compreensão, subjetivamente percebida e compreendida enquanto prévia e historicamente constituída (MONDINI; MOCROSKY; BICUDO, 2016).

A forma/ação docente é, portanto, um processo no qual o âmbito individual e coletivo se enlaçam, uma vez que o professor tem sua trajetória repleta de experiências, afetos e inquietações vividas *no* e *com* o mundo. Suas ações são desenvolvidas junto aos seus alunos, na sala de aula, em uma escola que pertence a uma determinada comunidade. Com isso entende-se a importância de considerar no contexto da formação docente, sua "trajetória, processos e percursos, ou seja, pensar a formação docente do sujeito-professor é pensar a produção de si mesmo" (MOCROSKY; ORLOVSKI; LIDIO, 2019, p. 225).

No movimento de forma/ação as relações humanas são fundamentais, pois dão sentido à produção de conhecimento originada desse processo. Essas relações ocorrem no mundo que é "prático, dinâmico, histórico, espaço-temporal [...] nutrido pelas explicitações das percepções[14], que são concretizadas pela linguagem inter e intra-sujeitos" (BICUDO, 2003, p. 36). O mundo é, portanto, uma realidade constituída pela pertença do sujeito e seus cossujeitos em espaços cujas ações de forma/ação são contínuas. Ainda, no movimento de produção de conhecimento há a constituição da realidade, pois

> o movimento *construção da realidade e do conhecimento* é efetuado por uma trajetória que vai da percepção à intuição essencial; da percepção de si à percepção do outro, o que ocorre na dialética eu-outro; da experiência vivida à reflexão dessa mesma experiência (BICUDO, 2003, p. 37).

Revela-se, desse modo, a importância das interações *no* e *com* o mundo para o processo de forma/ação docente. Assim como Bicudo (2003), entende-se que o movimento de forma/ação se dá pelo fazer e saber como fazer, num ir e vir contínuo. Trata-se de um movimento no qual os sujeitos são levados a se olharem, se perceberem, refletir, analisar, pensar, compreender e expressar. A forma/ação se dá no movimento de o sujeito se perceber fazendo, refletindo, buscando. Ou seja, é no "dar-se conta" que as ações vão ganhando forma.

Portanto, pensar em forma/ação é pensar, também, num processo de autoconhecimento em que não se busca "dar forma", mas abrir a possibilidade de o sujeito entrar no movimento de *formar-se,* de lançar-se no mundo, abrindo-se à compreensão.

Essa abertura envolve a si e o outro – aluno, professores, escola, gestão escolar, comunidade, conteúdo -, ou seja, pensar a forma/ação do professor é preocupar-se

> com o modo de ser e de conhecer do aluno como para com o do ser e de conhecer do corpo de conhecimentos humano, objeto do seu ensino. É preciso, assim, que o

[14] A percepção é o ato pelo qual, no movimento de a consciência expandir-se e voltar-se para ... o focado se dá como presença, mostra-se no seu modo de aparecer. Para a fenomenologia a percepção não é um ato subjetivo e solipsista, mas é encarnada na corporeidade do corpo-próprio, dá-se no encontro ver-visto, lembrando-se que o visto é sempre fruto de uma aparência que se dá em perspectivas (BICUDO, 2003, p. 39).

> professor tenha claro para si o que essa área diz do mundo, o que revela sobre ele, como explicita o que revela, como são gerados os seus conhecimentos, como os mesmos são perpetuados na tradição cultural da humanidade e são transmitidos em uma cadeia sem fim de contatos humanos na qual sempre existem centelhas de pensamento criativo e de abertura para o original (BICUDO, 1987, p. 52).

Assim, pensar a forma/ação é também voltar-se para os conteúdos que envolvem a área de atuação do professor, uma vez que os modos de ser professor envolvem o entendimento dos modos de ser do humano e o da própria Matemática, entendida como uma área de conhecimentos organizada segundo uma lógica específica, com uma linguagem peculiar de expressão, reveladora de certos aspectos do mundo (BICUDO, 1987). Esses aspectos que, pela Matemática, se revelam,

> Não são isolados de outros desvendados por outras áreas do conhecimento. E nem são apresentados num bloco uno, pois, embora a Matemática seja uma ciência possuidora de uma unidade conferida, por aquilo que revela sobre o mundo, apresenta, dentro de si, áreas que se dedicam, cada qual, a aspectos mais particulares daquilo que estuda. Assim, apresenta diferentes modos de trabalhar e de expressar o conhecido, os quais devem ser entendidos à luz da sua unidade em relação às outras áreas do conhecimento humano (BICUDO, 1987, p. 53).

Esse modo de entender a Matemática dá possibilidade de o professor compreender “que a importância de seu ensino surge no contexto do conhecimento humano do mundo e no da importância que esse conhecimento possui na sociedade na qual vive e trabalha” (BICUDO, 1987, p. 56). Assim, ao olharmos para a formação docente do professor é fundamental, também, pensar nos modos pelos quais os conteúdos vão se fazendo presente nesse movimento.

2.2 Um olhar para a formação matemática

Atualmente, os professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental têm sua formação inicial nos cursos superiores de Licenciatura em Pedagogia. Dessa forma, é essencial se voltar para a matemática, também, nesses espaços de formação.

A matemática entendida como uma ciência dinâmica e em movimento, ainda é muito questionada nos cursos de Pedagogia e os olhares voltados para ela carregam muitos receios. Aprender matemática tornou-se culturalmente difícil. Ou se tem facilidade ou não; ou se acerta ou se erra, sem que haja possibilidade de “meio termo”. Uma dicotomia instaurada há muito tempo, e que, aliada a outros fatores (por exemplo, formação de professores e práticas pedagógicas em sala de aula), tem afastado a possibilidade de compreensão da matemática como ciência dinâmica e produzida na temporalidade (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2009; ORTEGA; SANTOS, 2012; COELHO FILHO; GHEDIN, 2018).

Lidamos com noções matemáticas antes mesmo de entrarmos na escola. Contamos os andares do prédio, montamos o time de futebol, escolhemos o tamanho da roupa. Quando começamos os estudos na escola, deveríamos ser convidados a olhar para essas questões e problematizá-las, a fim de estabelecer relações para serem utilizadas em diferentes situações.

Entendemos que tais ações são possíveis quando o professor conhece e compreende os conteúdos matemáticos e é capaz de estabelecer relações entre eles, ou seja, quando entende os caminhos pelos quais a matemática vai sendo produzida. Esse conhecer amplia as possibilidades de ensinar matemática e a de seus alunos a compreenderem, levando-os a investigar procedimentos e construírem modos de lidar com situações matemáticas.

Por essa e outras razões é que se torna fundamental pensar uma formação do professor, também nos espaços institucionalizados, que contemple diferentes aspectos da matemática (conceitos, abordagens didáticas, organização curricular, etc), proporcionando espaço de reflexão e investigação sobre essa ciência.

Os estudos de Curi (2005) sobre as grades curriculares e os temas desenvolvidos nas disciplinas que envolvem os conteúdos de matemática que fazem parte do ofício do professor nos cursos de Pedagogia, revelam que tais disciplinas são ofertadas em número menor, relativamente às outras disciplinas do curso, e com carga horária reduzida.

Cunha (2010) investigou os componentes curriculares de 45 cursos superiores em Pedagogia brasileiros evidenciando que cerca de 20% das disciplinas ofertadas são específicas, ou seja, voltadas para o estudo de Língua Portuguesa, Matemática, História, Geografia e Ciências. As relacionadas à matemática representam aproximadamente 4% da carga horária total do curso. Embora essas informações não sejam suficientes para construir um retrato da formação matemática dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, são estudos que nos dão indicativos do modo pelo qual a matemática é tratada nesses cursos. Além disso, para a ação docente é importante considerar que,

> Aprender matemática não é particularidade de uma formação no ensino superior. Todo futuro professor, quando inicia a graduação, já conta com experiências escolares, pois vem estudando matemática desde que entrou na escola, sempre sob a orientação docente. Essa escolarização prévia, bem como as marcas de seu contato inicial com a matemática, o seu ensino e as práticas sob as quais vem sendo formado, muitas vezes são assumidas pelo licenciado na Educação Básica, de modo a balizar sua ação profissional (MOCROSKY et al., 2016, p. 1041).

Os autores discutem que os futuros professores dos anos iniciais, ao ingressarem nos cursos superiores, já possuem vivências com os conteúdos matemáticos e que se não forem discutidas no espaço formativo podem vir a ser a única referência para a constituição de uma prática de ensino.

Curi (2005) e Cunha (2010) também destacam o enfoque das disciplinas relacionadas à matemática nos cursos de Pedagogia enfatizando que, em sua maioria, elas tratam dos aspectos metodológicos do ensino, parecendo "haver uma concepção dominante de que o professor polivalente não precisa 'saber matemática' e que basta saber como ensiná-la" (CURI, 2005, p. 70).

Em suas investigações com alunos do curso de Pedagogia, Julio e Silva (2018), destacam que, em sua maioria, os conteúdos das disciplinas específicas de matemática "não são objetos dos cursos de formação inicial de pedagogos. Mesmo quando os conteúdos específicos são associados às metodologias de ensino, ainda assim eles são trabalhados de forma panorâmica e pouco aprofundada" (JULIO; SILVA, 2018, p. 1017).

Entendemos, considerando os autores lidos como Mocrosky, Orlovski e Lidio (2019), que a abordagem ao ensino de matemática nos cursos de Pedagogia

> se mostrou preferencialmente pelo viés metodológico, limitando os egressos de conhecerem outras perspectivas do próprio modo de ser do conhecimento matemático, tanto no que se refere à epistemologia e historicidade, quanto ao seu modo de se constituir como disciplina escolar em termos de conteúdo (MOCROSKY; ORLOVSKI; LIDIO, 2019, p. 232).

O foco em questões metodológicas pode negligenciar as possibilidades de reflexões sobre os conceitos, procedimentos e linguagem matemática estudados nos anos iniciais e que são, muitas vezes, considerados aprendidos pelos futuros professores. Essa carência de discussões pode gerar ações pedagógicas alicerçadas apenas nas experiências que esses alunos tiveram na Educação Básica.

> Trabalhá-la [a matemática] nos anos iniciais configura-se como desafio na medida em que o professor que ensina nesta etapa é um profissional polivalente não só por ensinar diversas disciplinas, mas por enfrentar problemas inerentes ao próprio processo de ensinar e aprender, principalmente questões relacionadas à Didática e à Epistemologia, pois muitas vezes a maneira que este profissional ensina Matemática, bem como as outras disciplinas se pauta num tradicionalismo e linearidade que pode não permitir aprendizagens satisfatórias e eficazes por parte dos educandos, não obstante os conhecimentos que tem, de certo modo, se apresentam carente de um aprofundamento epistemológico para sustentar não só o seu o que fazer, mas também seu como fazer pedagógico (COELHO FILHO; GHEDIN, 2018, p. 5).

Destacamos que as experiências dos futuros professores nos cursos de Pedagogia, de modo geral, têm direta influência na constituição da profissão de professor, pois "possuem componentes sociais e afetivos tão fortes, que fazem com que os sujeitos desenvolvam concepções, visões, que a formação inicial não consegue abalar significativamente na maioria dos casos” (ORTEGA; SANTOS, 2012, p. 35).

Por esse e outros motivos que consideramos fundamental que esses acontecimentos façam parte do movimento de formação, originando discussões, projetando práticas e ampliando os modos de se compreender a matemática. Ainda que exista uma carga horária reduzida para as disciplinas relacionadas a esta ciência, os conteúdos matemáticos e suas metodologias poderiam ser “abordados de forma que os futuros pedagogos produzam significados para eles com o objetivo de ampliação do repertório matemático, maior confiança na prática docente e aprimoramento de leituras dos alunos e do que acontece em salas de aula” (JULIO; SILVA, 2018, p. 1027).

Promover discussões a respeito dos conteúdos matemáticos nos cursos de Pedagogia se torna fundamental quando nos voltamos para a sala de aula dos anos iniciais. Apesar das orientações curriculares (BRASIL, 1997; BRASIL 2014) indicarem caminhos para o ensino de matemática que vise desenvolver a habilidade de “ler o mundo matematicamente”, ou seja, possibilitar que o sujeito compreenda a matemática utilizando criticamente as habilidades da área, ainda há professores que “partem do automatismo para a compreensão, colocando os alunos diante de regras e fórmulas sem significados [...] atingindo somente a parte superficial do aprendizado, e como resultado temos um aprendizado imediatista, com pouca compreensão” (COELHO FILHO; GHEDIN, 2018, p. 8).

É importante que os futuros professores sejam capazes de problematizar os significados produzidos pelos alunos sobre esses conceitos, ou seja, há “a necessidade de um aprofundamento suficiente para que os professores proponham desafios capazes de favorecer o estabelecimento de relações entre os saberes escolares e a experiência cotidiana dos discentes” (JULIO; SILVA, 2018, p. 1018).

Entendemos, desse modo, que o professor que ensina matemática nos anos iniciais precisa compreender-se ensinando e aprendendo matemática em seus múltiplos aspectos. Para isso é preciso pensar numa formação cujo papel

> transcende o ensino que pretende uma mera atualização científica, pedagógica e didática e se transforma na possibilidade de criar espaços de participação, reflexão e formação para que as pessoas aprendam e se adaptem para poder conviver com a mudança e a incerteza (COELHO FILHO; GHEDIN, 2018, p. 6).

Tais características implicam em conceber uma formação que ultrapasse um amontoado de conhecimentos teóricos sem sentido prático, convidando o graduando a questionar suas próprias compreensões sobre a matemática, de modo que ela se faça presente nos espaços formativos, como produção humana, sem prescindir de seus aspectos teóricos e técnicos, desenvolvendo nos licenciandos "modos de compreender e tomar para si aspectos do conhecimento matemático técnico-científico numa perspectiva articuladora de compreensões, formativa" (MOCROSKY; ORLOVSKI; LIDIO, 2019, p. 233).

Esse modo de pensar leva a uma análise da álgebra e seu ensino e, orientados pelos estudos que ressaltam a importância do trabalho com a álgebra desde os anos iniciais e pelo sentido da forma/ação docente, organizamos um curso de extensão para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental do município de Guaratinguetá/SP. O curso foi oferecido aos professores da rede e foram abertas inscrições por um período de 30 dias. Os professores participantes que aceitaram o convite foram, portanto, voluntários. Ou seja, participaram do curso pelo desejo de compreender e discutir aspectos da matemática, mais especificamente da álgebra na sala de aula, sem que estivesse considerado em sua jornada de trabalho. Esses professores, participantes do curso, constituíram-se em nossos sujeitos da pesquisa. Por meio da expressão desses, nos voltamos para nossa questão orientadora da pesquisa: "*Quais aspectos do fazer do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental revelam características do pensamento algébrico?*".

2.3 Um olhar para a formação continuada de professores na perspectiva fenomenológica

Pensar sobre a formação continuada do professor, é antes, pensar em seus modos de ser professor, que, em uma abordagem fenomenológica, enfatiza aspectos da experiência vivida, pois o modo de ser professor vai se constituindo no movimento de ser professor. Este é, então, o solo no qual nos situamos para trazer, nesta pesquisa, o sentido da formação continuada de professores dos anos iniciais

De acordo com Alvarado-Prada, Freitas e Freitas (2010, p. 369), a formação continuada envolve um formar-se que é um processo de toda a vida: "enquanto seres humanos, temos a possibilidade de aprender e, portanto, nos humanizamos permanentemente, mediante as relações e interações que acontecem nos diversos ambientes culturais nos quais temos". Assim, a formação continuada envolve as interações entre sujeitos, a análise e reflexão do vivido, o diálogo, a articulação do dito e o ouvir, isto é, o estar com o outro em uma posição de abertura.

Trata-se de um processo de busca que expressa o desejo de formar-se, no caso, o professor. Essa busca se dá, dentre outros fatores, pela insatisfação com a formação inicial que não permite que o sujeito lide, a contento, com a realidade na qual atua como professor: o dia a dia da sala de aula. Conforme Paulo (2009), a pretensa falta de relação entre teoria e prática é motivo para o professor se envolver em ações de formação continuada: "não raras vezes, [...] os docentes lamentam que o acervo de conhecimentos práticos e teóricos a que tiveram acesso em sua preparação profissional não dá conta de responder aos desafios impostos pelo fazer cotidiano" (PAULO, 2009, p. 11).

Destacamos, entretanto, que se a busca pela formação continuada for subsidiada exclusivamente nessa necessidade – repertório de métodos e protocolos - ela se direciona para uma formação cuja prática está relacionada a modelos rígidos a serem seguidos ou reproduzidos, conduzindo o professor a acreditar que suas necessidades profissionais serão supridas – por exemplo – por cursos. Esse modo de ver e buscar a formação continuada não permite, ao professor, uma ação reflexiva de suas práticas docentes, pois não há questionamento. Assim, a finalidade é o imediato, e a formação continuada não é encarada como um processo, um movimento, mas como um fazer definido. E nesse fazer imediato, não se tem por objetivo as mudanças e nem a compreensão do sentido de ser professor.

Retomando a concepção fenomenológica exposta na subseção anterior, que compreende a forma/ação como um "processo interno de constituição e de formação, permanecendo em constante evolução e aperfeiçoamentos" (BICUDO, 2003, p. 28), assumimos que, nos cursos de formação continuada, não se visa "preencher lacunas" da formação inicial do professor, mas abrir um espaço de reflexão para o próprio sentido de forma/ação ou da ação que vai dando forma ao modo de ser professor.

Entretanto, uma postura reflexiva voltada para compreender as ações de ser professor, não é uma atitude simples, pois exige que o professor se volte para a sua prática e entenda o sentido de sua atuação. Esse entendimento é o que poderá propiciar novos caminhos e dar, ao espaço formativo, condições de discutir atitude, "criando, contribuindo, cuidando para que, em suas ações de sala de aula, haja o desenvolvimento de condutas que estão impregnadas de valores culturais, morais e éticos" (PAULO, 2009, p. 51).

É um movimento de voltar-se para sua prática docente considerando os conteúdos matemáticos na intenção de compreendê-los. Também exige uma atenção para o aluno que carece de cuidado para se desenvolver.

O cuidado, em uma perspectiva fenomenológica, pode ser entendido como,

> Uma estrutura originária em que o modo de ser professor se abre deixando transparecer a percepção de si. Um modo de ser que vai se constituindo na cotidianidade, na experiência vivida da sala de aula, no querer ensinar para que alguém aprenda (BATISTA; PAULO, 2018, p. 110).

Assim entendido, o cuidado "não indica, portanto, primordial ou exclusivamente, uma atitude isolada do eu consigo mesmo” (HEIDEGGER, 1995, p. 257), mas envolve dedicação e compreensão para com o ser do outro, um modo de *ser-em* e um *ser-junto-a*, que é entendido como possibilidade, como abertura a um fazer para além do que é imediato. Para Heidegger, o cuidado não é sinônimo de bondade, nem de compaixão, é um modo autêntico e importante de estar com o outro permitindo que ele se desenvolva.

Tendo, na formação continuada, possibilidade de voltar-se para a sua prática e discutir ou revisitar os conteúdos matemáticos, há condições de o professor lançar-se nesse movimento de forma/ação, questionando o que lhe causa estranheza e considerando as possibilidades que tem em seu dia a dia sendo professor.

Em seu cotidiano esse estranhamento pode estar presente em diversos momentos, sendo acompanhado de questões que emergem do ensinar ou do refletir sobre o que é isto que ensino e como foi ensinado, ou seja, os conteúdos matemáticos podem ser assumidos como algo comum e familiar, mas, no demorar-se pensando sobre o trabalho realizado e seus possíveis significados, a estranheza dá abertura à reflexão do fazer.

Esse movimento de estranhar é o que lança o professor na forma/ação, buscando compreender isso que lhe causa incômodo. Entretanto, nesse movimento de conhecer o estranho, incertezas e angústias vão se expondo. Mas é este o traço da formação de professor: o dar-se conta de sermos professores, estranhando, angustiando-se e buscando modos de ser, sendo.

Para nós, vai fazendo sentido esse processo de formação do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental que, antes de ser uma maneira de adquirir novas técnicas ou conhecer estratégias de ensino, é uma abertura ao pensar, “que abre novas possibilidades /.../. No dar-se conta de ser-com e ser-em a formação do professor reorienta seu modo de pensar, sentir e conceber o mundo, dada a incerteza de aprender a cada dia a ser professor” (MOCROSKY et al., 2019, p. 1461).

Logo, no curso de formação continuada de professores dos anos iniciais, lócus desta pesquisa, a proposta de tarefas envolvendo os conteúdos matemáticos tem a intenção de oportunizar uma abertura ao pensar, sobre si mesmo, sobre suas ações de ensino, sobre a aprendizagem de seus alunos, sobre a compreensão que têm de conteúdos potencialmente algébricos. O curso é, então, um espaço reflexivo e de forma/ação, em que a compreensão da experiência vivida e dos conteúdos matemáticos possam ser explicitadas.

2.4 Um olhar para a formação continuada de professores dos anos iniciais na perspectiva fenomenológica: o que dizem as pesquisas?

Nesta subseção nos dedicamos à análise de trabalhos que se dedicam a formação continuada de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, assumindo uma perspectiva fenomenológica.

O texto de Mocrosky et al. (2019) expõe uma pesquisa em que se discute com os professores o conteúdo matemático fração e toma como centro do debate o estranhamento docente, entendido em uma atitude filosófica, desencadeador do movimento formativo.

As autoras da investigação participaram de momentos da formação continuada com os professores dos anos inicias da rede estadual e municipal de ensino de Curitiba e Araucária, no estado do Paraná. Segundo expõem, o trabalho com frações nos anos iniciais está proposto para o 4º e 5º ano (BRASIL, 2017) e a ênfase está na comparação, ordenação e localização de frações na reta numérica, bem como sua escrita na forma decimal. No início dos encontros foi lançado o seguinte questionamento aos professores: “O que é fração?”. O objetivo era provocar discussões entre os participantes para que fosse possível ver “o que lhes era familiar, seus modos de compreensão e provocar estranheza e inquietação sobre os próprios sentidos que se fizeram acerca do diálogo com seus pares” (MOCROSKY et al., 2019, p. 1454).

> Por exemplo, quando os professores pensam-na [a fração] como as partes de um todo, como algo que está posto ao uso e o uso como se mostrou, associado a um meio para se conseguir um resultado, seria um fazer técnico. O que seria então este objeto? A fração? Se o pensarmos como algo fora, se nos colocarmos na frente dele e o olharmos como algo que já existe e permanece em sua concretude, nossa primeira reação é a de pensá-lo como algo absurdo, pois ao olhá-lo unicamente da perspectiva do objeto dado não conseguimos pensar nos sentidos ou significados de sua existência. Por isso, perguntamos aos professores: “o que é fração?”, com o intuito de provocá-los ao absurdo de se pensar um objeto matemático, em si mesmo, fora de nós e desprendido de um fundo. Nossa intenção voltou-se a colocar o outro (professor em formação) na condição de estranhar-se e, com isso, colocar-se em movimento de pensar sobre um ponto de vista diferente do que ele estava familiarizado (MOCROSKY et al., 2019, p. 1459).

Segunda as autoras, a fração não tem uma definição a priori, “mas sua determinação está relacionada ao horizonte de conformidade em que está imersa. Portanto, necessita de que alguém a faça, precisa-se de um ente que, ao ocupar-se dela, coloque-a no movimento da conformidade” (MOCROSKY et al. 2019, p. 1460).

O exposto pelas autoras leva a compreender que o movimento de formação se dá com as falas e inquietações dos professores participantes que reconhecem as diferentes possibilidades das frações, que se preocupam e se ocupam com elas em diversos contextos, sempre atentos aos significados atribuídos, de modo que o conhecimento vai se constituindo à medida que o sentido vai se fazendo.

Santos (2016a), em sua investigação de mestrado, busca conhecer as compreensões que professores dos anos iniciais que atuam no ciclo de alfabetização (1º ao 3º ano), têm de número. Para isso, conversou com esses professores solicitando-lhes que falassem sobre suas vivências com o ensino de matemática. Em suas falas, os professores trazem o modo pelo qual ensinam números, indicando que “ensinar está indissoluvelmente ligado a conhecer, pois ensinar implica um certo modo de comportar-se frente ao aluno visando o seu conhecimento do corpo de conhecimento que está sendo ensinado” (BICUDO, 2005, p. 50).

Conforme interpreta,

> o professor ensina aquilo que conhece. Assim, podemos dizer que ao falarem do ensino de números, o que fazem, como fazem, ao falarem de sua percepção acerca do conhecimento e das atitudes de seus alunos nessas situações de ensino, entre outros aspectos, os professores revelam algumas compreensões acerca da ideia de número (SANTOS, 2016a, p. 118).

A análise dos dados da pesquisa leva o autor a considerar que as falas dos professores revelam que os números ora são visto como símbolos que indicam quantidades, que emergem da contagem mecânica e da quantificação – sendo o uso de materiais manipulativos relevantes para essa compreensão -, ora são códigos, aparecendo em diversas situações do cotidiano, neste último caso, interpreta-se que “os sujeitos consideram a experiência vivida como modos de atribuição de significados ao ensino da matemática escolar. Experiência esta que não se inicia e tampouco se restringe ao espaço escolar” (SANTOS, 2016a, p. 118).

Percebe-se, na discussão do autor, que os docentes do ciclo de alfabetização preocupam-se com as vivências dos alunos com a matemática, tanto dentro quanto fora do espaço escolar, de modo a se incomodarem com situações-problemas propostas em livros didáticos cujo contexto, muitas vezes, afasta-se dos alunos, ao invés de aproximá-los da experiência matemática.

Ambas compreensões sobre os números – quantidade e código – evidenciam preocupações com os modos de expressão dos alunos, ou seja, mostra-se que os professores consideram importante o registro em linguagem matemática e, segundo Santos (2016a), a compreensão do número como quantidade pode revelar, no que se refere aos símbolos numéricos,

> a superação do significante pelo significado. Isto é, para “ver” números nos símbolos numéricos possivelmente há uma compreensão de que é possível intencioná-los em ausência, ou seja, em atos “vazios” nos quais o objeto não é dado intuitivamente, mas é significado em uma de suas diferentes formas (SANTOS, 2016a, p. 113).

A investigação de Mancini (2019) teve por objetivo compreender modos de as leituras-de-práticas-de-alfabetização-matemática movimentarem a forma/ação de professores alfabetizadores. Entendemos ser importante esclarecer o termo leituras-de-práticas exposto pela autora:

> A leitura-de-prática, dispositivo formativo defendido na dissertação, centra-se na professoralidade docente (como modos de ser professor, sendo), com repercussão direta no ensino e na aprendizagem do professor e dos estudantes e tem como movimento analítico-reflexivo o retorno ao experienciado, tendo como elementos de análise os fenômenos que se mostraram no encontro do planejado com o vivido, a documentação pedagógica (planos de aula, atividades dos estudantes, áudios, vídeos e fotos) constituída no cotidiano escolar, materiais de pesquisa (livros científicos, didáticos e paradidáticos entre outros) e os documentos norteadores (currículo, BNCC e outros) (MANCINI, 2019, p. 68).

A autora destaca que o estudo das leituras-de-práticas-do-professor-alfabetizador-de-matemática se apresenta como um potente fenômeno formativo para o permanecer em forma/ação, sendo que tal movimento se dá num espaço de colaboração, como o proposto na investigação, uma vez que o professor

> não tem um desenvolvimento profissional expressivo numa cultura escolar individualista. Este entendimento ancora-se na defesa de que o campo fenomenal escolar é o elemento central ao se pensar em forma-ação do professor e a colaboração é uma prática que deve ser fomentada neste espaço. (MANCINI, 2019, p. 77).

Os encontros com os professores participantes se deu de maneira virtual, ou seja, toda a comunicação e interação entre participantes e pesquisadora se deram via plataforma Moodle, onde discutiam os relatos colocados nas salas. A autora entende que as leituras que os participantes fizeram de suas próprias práticas demostraram que eles estavam atentos à sala de aula, possibilitando que intervenções e (re)planejamentos pudessem ser feitos.

O cuidado também foi um aspecto destaco por Mancini (2019, p. 161) para indicar que o cuidado com a Alfabetização Matemática indica, portanto, um modo de ser do professor "ocupado e pre-ocupado. Ocupado com o ensino, seus conteúdos e procedimentos e pre-ocupado com os desdobramentos deste". Ao fazerem as leituras-de-práticas-de-alfabetização-matemática, as professoras se lançaram no movimento de analisar se o instrumento escolhido por eles e/ou pelos alunos estava coerente ou não com o que havia sido planejado e desencadeavam ações significativas a quem as desenvolvidas. O cuidado, portanto, direciona as ações pedagógicas, indicando posturas, atitudes e procedimentos do professor para conduzir seu processo de ensino com vistas à aprendizagem.

Considerando os aspectos da álgebra e seu ensino, trazemos, a seguir, as pesquisas que focam o ensino de álgebra e aquelas que se voltam à formação de professoras. Na próxima seção deste trabalho apresentamos algumas das pesquisas que nos inspiraram na elaboração das tarefas do curso de extensão oferecido aos professores, denominado “O X da questão – Pensamento Algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental I”.

3 POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS: dialogando com as pesquisas

Discussões sobre o ensino e aprendizagem da matemática estão cada vez mais presentes nas pesquisas em Educação Matemática. Professores, gestores e pesquisadores se voltam para identificar possibilidades de ensino que não se reduzam a exposição de conteúdos e repetição de exercícios com foco na memorização de fórmulas e repetição de regras.

Várias são as dificuldades apresentadas pelos alunos no processo da aprendizagem matemática. Dentre as diferentes áreas dessa disciplina, a álgebra destaca-se, tanto por seu caráter abstrato quanto pela forma como é trabalhada (LINS; GIMENEZ, 1997; CANAVARRO, 2007; FERREIRA; RIBEIRO; RIBEIRO, 2017; COELHO; AGUIAR, 2018).

Na busca por possibilidades de tratar a álgebra na escola, pesquisas passam a indicar a relevância deste trabalho desde os anos iniciais do Ensino Fundamental (CANAVARRO, 2007; MESTRE; OLIVEIRA, 2011; CAVALCANTE; FREITAS; RODRIGUES, 2014, SANTOS; LUVISON; MOREIRA, 2018; BASTOS; MERLINI, 2020). As pesquisas se justificam pelo fato de que a álgebra:

> Não deve constituir um tema adicional do currículo. Ao invés, deve ser entendido como uma forma de pensamento que aporta significado, profundidade e coerência à aprendizagem de outros temas (MESTRE; OLIVEIRA, 2011, p. 1).

Discutir o ensino de álgebra nos anos iniciais causa certo estranhamento. Entende-se que, nessa fase da escolarização, os alunos devem conhecer os números, o Sistema de Numeração Decimal e explorar relações. Considerar letras, variáveis e símbolos, parece “apressar a ordem natural” do ensinar e aprender matemática.

Entretanto, ao considerarmos a álgebra como campo da matemática que não se reduz à manipulação de fórmulas e regras, mas que permite aos alunos identificar e relacionar os elementos característicos dos objetos matemáticos, vê-se a possibilidade para um trabalho em sala de aula que favoreça a exploração de relações e generalizações. Dessa maneira, a álgebra pode ser trabalhada em diferentes níveis de ensino, inclusive nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Para conhecer as aberturas, isto é, o que se pode no contexto de ensino de matemática nos anos iniciais e que aproximam de um pensar algébrico nos voltamos para os documentos curriculares. O primeiro que consideramos são os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) que, durante décadas, orientaram discussões, planejamentos e reflexões acerca das práticas educativas nas diferentes disciplinas no contexto da educação brasileira. Sua proposta era promover uma educação voltada para a formação do cidadão autônomo, reflexivo e consciente de seus direitos e deveres.

No que diz respeito à Matemática, o documento divide os conteúdos em quatro blocos: Números e operações; Espaço e forma; Grandezas e medidas e Tratamento da informação, sendo destacada a importância do trabalho com o ensino de álgebra desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Para isso, o documento sugere o desenvolvimento de uma “pré-álgebra”, embora não discuta ou problematize o termo.

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação (BRASIL 1997, p. 39).

A leitura e interpretação do documento nos permite destacar algumas sugestões de trabalho nos anos iniciais que podem contribuir para o ensino de álgebra. Para o primeiro ciclo[15], o documento dá destaque ao desenvolvimento do cálculo e da escrita numérica.

> Interpretar e produzir escritas numéricas, levantando hipóteses sobre elas, com base na observação de regularidades, utilizando-se da linguagem oral, de registros informais e da linguagem matemática. Desenvolver procedimentos de cálculo —mental, escrito, exato, aproximado — pela observação de regularidades e de propriedades das operações e pela antecipaçãoe verificação de resultados (BRASIL, 1997, p.47).

Nota-se a recomendação do trabalho com registros através da observação de regularidades e das propriedades das operações aritméticas e das relações entre elas, já para o primeiro ciclo do ensino fundamental. Para o segundo ciclo[16] é salientada a importancia da compreensão de número natural , considerando o Sistema de Numeração Decimal:

> Ampliar o significado do número natural pelo seu uso em situações-problema e pelo reconhecimento de relações e regularidades. Interpretar e produzir escritas numéricas, considerando as regras do sistema de numeração decimal e estendendo-as para a representação dos números racionais na forma decimal (BRASIL, 1997, p.55).

[15] De acordo com o PCN, o primeiro ciclo corresponde, atualmente ao 2º e 3º ano do Ensino Fundamental
[16] De acordo com o PCN, o primeiro ciclo corresponde, atualmente ao 4º e 5º ano do Ensino Fundamental

As propostas de trabalho relacionadas às habilidades de cálculo também apresentam potenciais quanto ao desenvolvimento do pensamento algébrico:

> Ao construírem e organizarem um repertório básico os alunos começam a perceber, intuitivamente, algumas propriedades das operações, tais como a associatividade e a comutatividade, na adição e multiplicação. A comutatividade na adição é geralmente identificada antes de qualquer apresentação pelo professor. Isso pode ser notado em situações em que, ao adicionarem 4 + 7, invertem os termos para começar a contagem pelo maior número. Também algumas regularidades, presentes nas operações, começam a ser percebidas, tais como: observar que, nas multiplicações por 2, todos os resultados são pares; que, na tabuada do cinco, os resultados terminam em zero ou em cinco, etc (BRASIL, 1997, p.74).

Entendemos que esta proposta de trabalho com as operações para além do cálculo ou enfatizando as relações (propriedades) que podem ser estabelecidas, pode contribuir para discussões que fomentem o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que dá possibilidade de o aluno lançar-se na investigação das relações, expressando modos de as compreender.

Esse contexto no qual se considera a álgebra nos primeiros anos da escolarização pode ser observado, mais explicitamente, no documento atual que orienta as práticas pedagógicas brasileiras, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A BNCC foi elaborada pela Secretaria da Educação Básica do Ministério da Educação em conformidade com a Lei de Diretrizes e Bases (1996), Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica (2013) e Plano Nacional da Educação e passou a vigorar como documento oficial do Ministério da Educação brasileiro em 2017. Trata-se de um documento de caráter normativo que define o "conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica" (BRASIL, 2017, p. 7).

A BNCC está estruturada de modo a explicitar as competências que os alunos devem desenvolver ao longo das etapas da Educação Básica (Ensino Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio) que assegurem uma formação integral que visa à construção de uma sociedade justa e democrática. Para o Ensino Fundamentl e Ensino Médio há destaque para cinco áreas de conhecimento: Área de Linguagens, Área de Ciências da Natureza, Área de Ciências Humanas, Área de Ensino Religioso e Área de Matemática (BRASIL, 2017).

A Matemática proposta pela BNCC apresenta competências específicas a serem desenvolvidas pelos alunos, dentre elas:

> - Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar

> informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
> - Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (BRASIL, 2017, p. 267).

Há, no documento, a preocupação em proporcionar aos alunos um ensino de matemática que os auxilie na compreensão da sociedade em que vivem, sendo capazes de posicionar-se diante das situações. Nessa direção, a BNCC propõe cinco unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística) correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo da Educação Básica na área de Matemática.

No documento, a álgebra é uma unidade temática de trabalho, o que expressa uma novidade se comparada aos documentos curriculares anteriores, como os PCN. De acordo com a BNCC, o ensino de álgebra e desenvolvimento do pensamento algébrico deve ocorrer desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, por meio de propostas que foquem:

> as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase [anos iniciais], não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação. A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se 2 + 3 = 5 e 5 = 4 + 1, então 2 + 3 = 4 + 1. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita. A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três), como: "Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco?." (BRASIL, 2017, p. 270).

No intitulado ciclo de alfabetização e letramento (1º ao 3º ano) o foco do documento está no trabalho com a organização e exploração de sequências, cujos elementos podem ser variados: sons, desenhos, figuras geométricas, na organização em ordem crescente e decrescente, com o objetivo de observar regularidades e determinar uma regra geral que possibilite encontrar um termo qualquer da sequência, desenvolvendo a habilidade de generalização.

Já no 4º e 5º ano, para o desenvolvimento do pensamento algébrico, a BNCC propõe um trabalho com foco nas operações aritméticas a fim de investigar regularidades como "múltiplos numa sequência, numa divisão com restos iguais ou ainda reconhecer as relações inversas da adição e subtração e multiplicação e divisão, com o uso de calculadoras e situações-problema" (NORONHA; GOMES, 2020, p. 948). Sugere-se ainda, para o 4º e 5º ano, o trabalho com o sinal de igualdade, explorando seus múltiplos significados em diferentes contextos.

Entendemos, porém, que a proposta de trabalho com a álgebra nos primeiros anos da escolaridade se trata de uma prática em sala de aula que requer um novo olhar para o aprender e ensinar matemática. Um olhar para um lugar considerado *incomum* nessa fase de escolarização. Entretanto, a álgebra compreendida como área da matemática que aborda e lida com os objetos matemáticos e suas relações, permite que ela seja explorada também nos anos iniciais, possibilitando "que a aprendizagem da Álgebra torne-se, de fato, um processo que rompe com a lógica de compartimentalização dos saberes matemáticos" (FERREIRA; LEAL; MOREIRA, 2020, p. 6).

Para os professores que ensinam matemática nos anos iniciais é importante que eles compreendam e reconheçam as potencialidades desse tipo de trabalho, uma vez que:

> Sua constituição [o pensamento algébrico] demanda tempo e pressupõe no currículo de matemática, desde o início da escolarização, um trabalho contínuo que, por meio de diferentes tipos de exploração, vai se tornando complexo, à medida que as tarefas matemáticas e os conceitos também se complexificam (NACARATO; CUSTÓDIO, 2018, p. 14-15).

Consideramos importante explicitar aos professores, participantes da nossa pesquisa, as possibilidades desse trabalho, isto é, a tonalidade que ele deve ter, quais tarefas deve envolver, quais ações são possíveis, que objetivo se espera alcançar e o tipo de raciocínio que se desenvolve. Isso leva-nos às pesquisas em Educação Matemática que tratem do ensino de álgebra e do pensamento algébrico, tanto no âmbito da sala de aula dos anos inicias como na formação continuada de professores desse nível de escolaridade, procurando compreender o modo pelo qual a proposta com ensino de álgebra nos anos iniciais está sendo tratada.

3.1 Pesquisas sobre o ensino de álgebra e pensamento algébrico com alunos dos anos iniciais

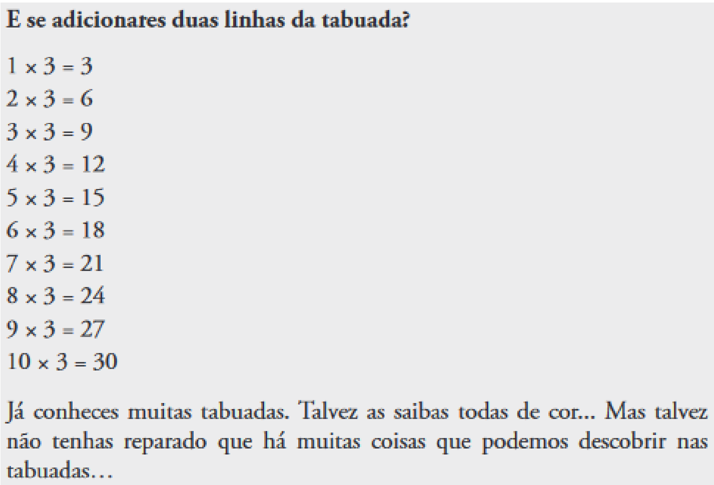
Considerando as sugestões de trabalho com a álgebra e o pensamento algébrico apresentados na BNCC, como a organização e exploração de sequências, operações aritméticas e dos significados do sinal de igualdade, buscamos conhecer pesquisas, em Educação Matemática, que discutem a álgebra e o pensamento algébrico nos anos iniciais, tendo como foco de investigação tarefas que discutam e ampliem as possibilidades apresentadas no documento. As leituras realizadas nos permitiram considerar tarefas de três naturezas: *sentido* *numérico e propriedades das operações*, *padrões e regularidades* e *simetrias*. Destacamos que esse modo de considerar as tarefas num contexto algébrico foi realizado para elucidarmos as características e possibilidades de cada um deles. Entretanto, entendemos que há caminhos possíveis de serem trilhados considerando as relações existentes entre as mesmas.

Importante destacar que as tarefas apresentadas a seguir têm como característica a exploração que, segundo Ponte, Quaresma e Branco (2012), não apresentam uma resolução imediata, requerem do estudante a compreensão dos dados, o delineamento e execução de uma estratégia e reflexão dos resultados obtidos. Na seção quinta deste trabalho, onde apresentamos as tarefas eleitas para trabalhar com os professores no curso de extensão, discutiremos um pouco mais as tarefas de exploração.

3.1.1 Qual a forma do número? Tarefas sobre sentido numérico e propriedades das operações

A investigação de Canavarro (2007) discute o desenvolvimento do pensamento algébrico nos 1º e 2º ciclos (aluno entre 6 à 11 anos) do Ensino Básico de Portugal, a partir de tarefas no âmbito da aritmética generalizada e pensamento funcional, vertentes consideradas pela autora a partir de Blanton e Kaput (2005). Para o diálogo, destacamos uma das tarefas desenvolvidas com os alunos - "E se adicionares duas linhas da tabuada?" - cujo objetivo era explorar e generalizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Figura 1 - Tarefa "E se adicionares duas linhas da tabuada?"


E se adicionares duas linhas da tabuada?

$1 \times 3 = 3$
$2 \times 3 = 6$
$3 \times 3 = 9$
$4 \times 3 = 12$
$5 \times 3 = 15$
$6 \times 3 = 18$
$7 \times 3 = 21$
$8 \times 3 = 24$
$9 \times 3 = 27$
$10 \times 3 = 30$

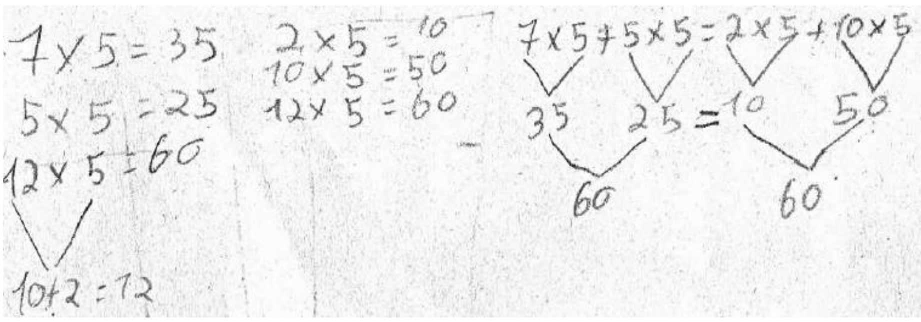
Já conheces muitas tabuadas. Talvez as saibas todas de cor... Mas talvez não tenhas reparado que há muitas coisas que podemos descobrir nas tabuadas…

Fonte: Canavarro (2007)

A professora inicia com a exposição de um exemplo escolhendo a segunda (2 x 3 = 6) e quinta linha (5 x 3 = 15) da tabuada do três. Posteriormente, solicita que os alunos adicionem os números que são o primeiro fator da multiplicação relativos às linhas, 2 e 5 da tabuada. Eles obtêm 2 + 5 = 7. Em seguida ela solicita que somem o produto dessas linhas, eles obtêm 6 + 15 = 21.

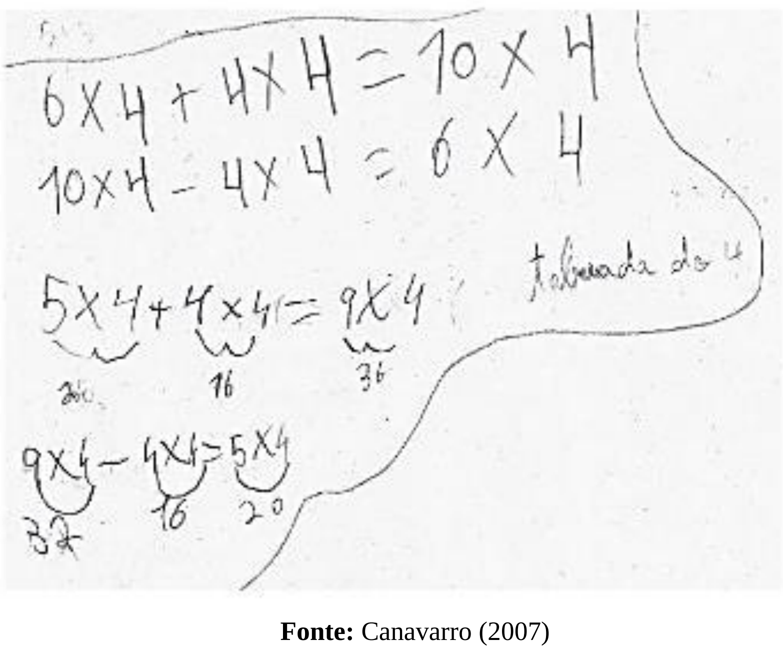
No diálogo conduzido pela professora, os estudantes identificam que as somas por eles encontradas se referem a sétima linha da tabuada: 7 x 3 = 21. Nesse momento a professora questiona-os sobre a possibilidade de estabelecer a mesma relação com outras linhas da tabuada do três e posteriormente com outras tabuadas. A seguir apresentamos a imagem do registro de dois estudantes ao explorarem outras tabuadas:

Figura 2 - Registro do aluno com a tabuada do 5



Fonte: Canavarro (2007)

Figura 3 - Registro do aluno com a tabuada do 4



Fonte: Canavarro (2007)

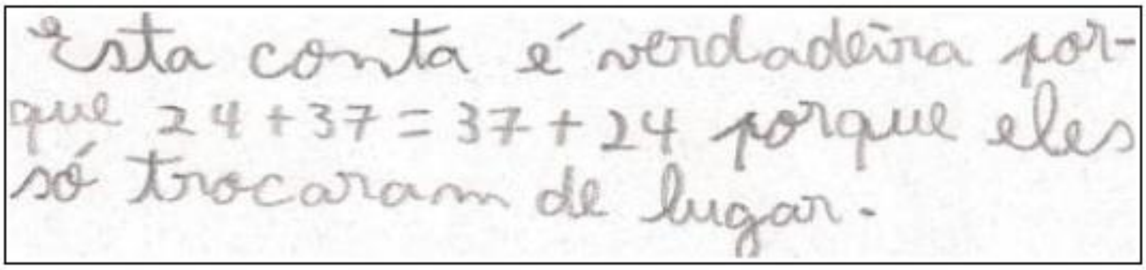
Os alunos vão testando possibilidades para obter os resultados. Na Figura 2, para encontrar o produto de 12 x 5, o aluno utiliza as expressões (7 x 5) + (5 x 5) e (10 x 5) + (2 x 5). Já na Figura 3 ele avalia se a relação encontrada para a adição das linhas da tabuada do 4 vale para a subtração, fazendo (9 x 4) – (4 x 4) = 5 x 4. Isso mostra um modo de "analisar as expressões aritméticas não em termos do valor numérico obtido através do cálculo, mas em termos da sua forma" (CANAVARRO, 2007, p. 89). Esse modo de fazer expressa uma compreensão do Sistema de Numeração Decimal que lhe permite compor e decompor números.

A tarefa sugerida e a mediação da professora focando nas estruturas das expressões escritas e não apenas nos resultados, levam os alunos a investigarem possibilidades de solução e a atribuírem significado a propriedades da multiplicação. Para Canavarro (2007), "tornar visíveis as estruturas e analisá-las é, precisamente, um dos cuidados a ter quando se pretende desenvolver nos alunos o pensamento algébrico" (p. 103). Esse fazer, que considera o sentido numérico, amplia o repertório de estratégias, favorecendo a resolução de situações que envolvam cálculos desse tipo.

Mestre e Oliveira (2011) realizaram um estudo com alunos do 3º ano da Educação Básica de Portugal, na faixa etária de 8 anos, com o objetivo de identificar processos de generalização por meio de tarefas envolvendo as propriedades dos números, operações e exploração de padrões. Os autores se apoiaram nas perspectivas sobre o pensamento algébrico de Blanton e Kaput (2005) e Ponte (2006).

Dentre as tarefas desenvolvidas destacamos as que envolvem expressões numéricas. Aos alunos foi solicitado que analisassem igualdades e determinassem se eram verdadeiras ou falsas como, por exemplo, 24 + 37 = 37 + 24. A seguir trazemos o recorte do que é feito por um dos alunos quando procura justificar sua resposta:

Figura 4 – Registro do aluno 24 + 37 = 37 + 24



Fonte: Mestre e Oliveira (2011)

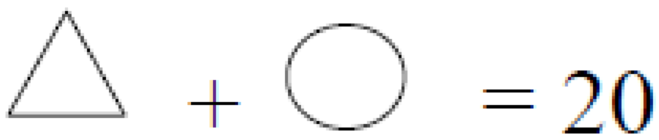
Interpretamos que na, Figura 4, ao escrever "porque eles só trocaram de lugar", o estudante entende a característica da propriedade comutativa da adição, mesmo que não saiba nomeá-la. Os autores destacam que muitos alunos não recorreram aos cálculos para dar a resposta, indicando que eles são capazes de justificar o resultado a partir das propriedades das operações.

Essa característica revela traços do pensar algebricamente, pois os alunos, ao reconhecerem as propriedades operatórias envolvidas no problema, trazem-nas para justificar suas respostas. Isso também se justifica se considerarmos que, no "pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objetos, mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato" (PONTE, 2006, p. 8).

Os autores afirmam que no desenvolvimento das tarefas os alunos deram respostas que indicavam níveis de generalização diferentes revelando que, mesmo nos anos iniciais da Educação Básica, se conduzidos a refletir sobre o sentido numérico, os estudantes podem compreender os números e suas relações, sem ficarem restritos ao trabalho com algoritmos.

Cavalcante, Freitas e Rodrigues (2014), apoiando-se na perspectiva de Lins e Gimenez (1997)[17] para considerar o pensamento algébrico, elaboraram um curso para estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental com a intenção de analisar o potencial de tarefas algébricas nos anos iniciais. Uma das tarefas utilizadas pelos autores envolvia o sinal de igualdade, a operação adição e termos desconhecidos, conforme segue:

Figura 5 - Tarefa com sinal de igualdade



Fonte: Cavalcante, Freitas e Rodrigues (2014)

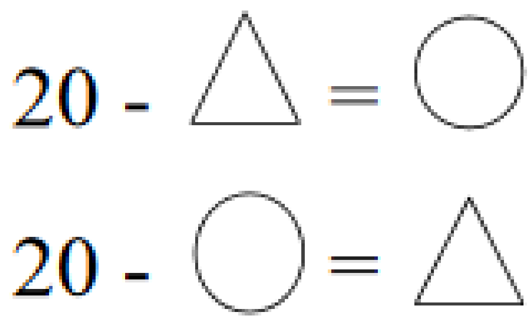
Essa proposta de tarefa é comum nos materiais didáticos dos anos iniciais. O objetivo é levantar possibilidades sobre os valores que podem assumir os termos desconhecidos, no caso

[17] De acordo com Lins e Gimenez (1997) pensar algebricamente envolve algumas características: produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas (chamamos a isso de aritmeticismo); considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não "modelando" números em outros objetos, por exemplo, objetos "físicos" ou geométricos (chamamos a isso internalismo); e, operar sobre os números não conhecidos como se fossem conhecidos (chamamos a isso analiticidade) (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 151).

o triângulo e o círculo, para que a sentença seja verdadeira. Esse exercício permite que os estudantes utilizem a composição e decomposição numérica, explorando as características do Sistema de Numeração Decimal. Cavalcante, Freitas e Rodrigues (2014), destacam que os alunos apresentaram todas as combinações possíveis[18] para o valor do triângulo e do círculo e, a partir disso, propuseram novas questões.

Os autores perguntaram o que aconteceria se, das 20 unidades, se retirasse o triângulo ou círculo. Os alunos responderam, com naturalidade, que restaria o círculo, caso se retirasse o triângulo ou restaria o triângulo se retirasse o círculo, como ilustra a figura a seguir:

Figura 6 – Possibilidade de exploração da tarefa



Fonte: Cavalcante, Freitas e Rodrigues (2014)

Os autores destacam que:

> Os participantes não tiveram dificuldades em abstrair o fato de que se a soma de dois números é igual a um terceiro número, a diferença entre este terceiro número e um dos outros dois será igual a outro número, mesmo que essas duas quantidades seja desconhecidas, em linguagem algébrica usual, poderíamos escrever este fato da seguinte forma: $x + y = C$ logo $C – y = x$ ou $C – x = y$ (CAVALCANTE; FREITAS; RODRIGUES, 2014, p. 11).

Essa tarefa mostra que, mesmo nos anos iniciais, é possível explorar situações que visem desenvolver habilidades relacionadas à generalização levando os alunos a "descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos" (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 10). Uma possibilidade para isso, considerando o currículo dos anos iniciais, é o trabalho com o sentido numérico e das propriedades dos números e operações.

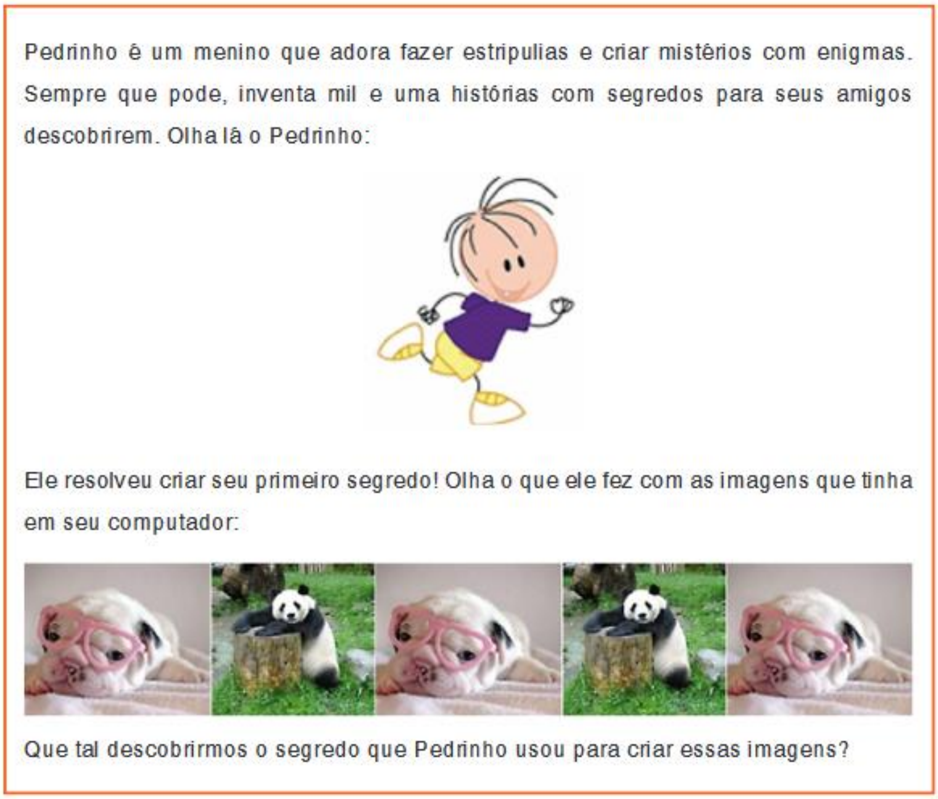
[18] Vale-se destacar que nessa atividade, trabalhou-se com o conjunto dos números naturais.

3.1.2 Quem é o próximo? Tarefas envolvendo padrões e regularidades

São várias as pesquisas que envolvem o trabalho com padrões e regularidades nos anos iniciais. A análise de sequências permite que os alunos, por meio da linguagem corrente, expressem processos de generalizações, desenvolvendo a capacidade de comunicação e o raciocínio matemático, como destaca Ponte, Branco e Matos (2009).

Santos, Luvison e Moreira (2018) relatam o trabalho desenvolvido com alunos dos anos iniciais envolvendo a generalização por meio de observações de regularidades. Uma das tarefas desenvolvidas com alunos do 3º ano do Ensino Fundamental intitulada “As estripulias de Pedrinho I” teve como objetivo introduzir os conceitos de motivo (unidade repetitiva) e regularidade de modo que os alunos fossem capazes de identificá-los e compreendê-los. A figura a seguir ilustra o proposto:

Figura 7 – Tarefa “As estripulias de Pedrinho”

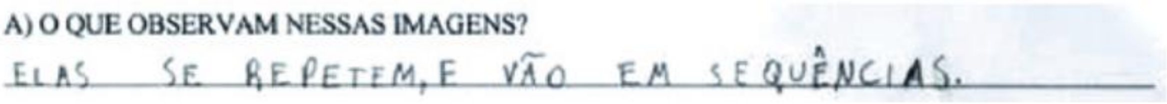


Fonte: Santos, Luvison e Moreira (2018)

A tarefa proposta envolvia uma sequência repetitiva cuja característica principal é a presença de um motivo (composto por um ou diversos elementos) que se repetem ciclicamente.

A tarefa foi desenvolvida em duplas e primeiramente a professora entregou uma folha aos alunos e explicou o objetivo da tarefa que era descobrir o “segredo” de Pedrinho. Após alguns minutos de exploração individual, a professora questionou os estudantes sobre os desenhos. Alguns utilizaram o termo *sequência* para expressarem-se, outros afirmavam que havia desenhos *repetidos*. A seguir trazemos o registro de alguns alunos:

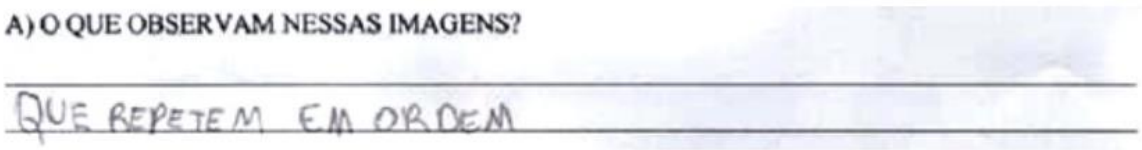
Figura 8 – Registro I da tarefa “As estripulias de Pedrinho”


A) O QUE OBSERVAM NESSAS IMAGENS?
ELAS SE REPETEM, E VÃO EM SEQUÊNCIAS.

Elas se repetem, e vão em sequências

Fonte: Santos, Luvison e Moreira (2018)

Figura 9 – Registro II da tarefa “As estripulias de Pedrinho”


A) O QUE OBSERVAM NESSAS IMAGENS?
QUE REPETEM EM ORDEM

Que repetem em ordem

Fonte: Santos, Luvison e Moreira (2018)

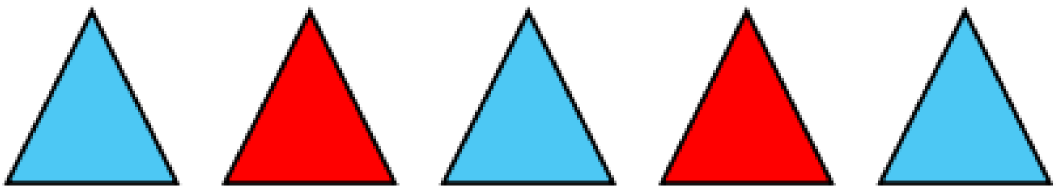
A tarefa e a condução das discussões pela professora permitiram que os alunos se expressassem em relação à sequência criada por Pedrinho. O foco era apresentar aos alunos uma sequência e discutir o que observavam, dando destaque a repetição das imagens, de modo a determinar a unidade repetitiva.

A identificação da unidade repetitiva, o motivo, é importante uma vez que permite que o aluno determine a ordem de outros elementos e possa, posteriormente, generalizar essa relação entre posição e elemento, como afirmam Ponte, Branco e Matos (2009). Esse tipo de tarefa pode ser explorado de diferentes maneiras, variando os elementos que compõem a unidade repetitiva, usando de formas, tamanhos, cores e sons, como mostram as imagens a seguir:

Figura 10– Tarefa “As estripulias de Pedrinho III”

Fonte: Santos, Luvison e Moreira (2018)

Figura 11 – Tarefa “Sequência de Triângulos”



Fonte: Santos, Luvison e Moreira (2018)

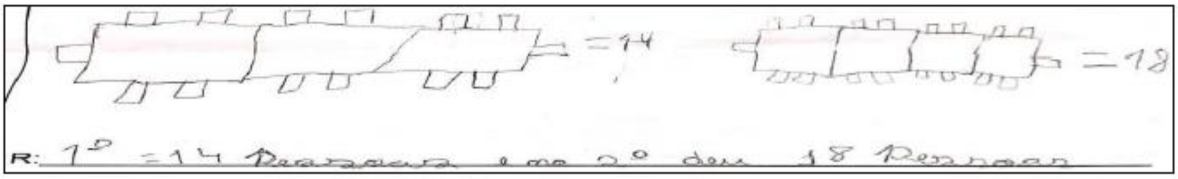
Outra proposta de trabalho com padrões e regularidades destacada por Luna, Souza e Lima (2018) são as sequências recursivas, cuja característica principal é que cada elemento da sequência é determinado a partir do anterior, com a repetição e o acréscimo de novos termos. Os autores desenvolveram uma tarefa com alunos do 3º ano do Ensino Fundamental, como ilustra a figura a seguir:

Figura 12– Tarefa “Pizzaria”

Fonte: Luna, Souza e Lima (2018)

Após discutir com alunos quantos lugares haveria ao se juntar duas mesas, fez outros questionamentos: *Juntando 3 mesas dessa maneira, quantas pessoas se acomodam? E juntando 4 mesas?.* A seguir trazemos o registro de alguns dos alunos:

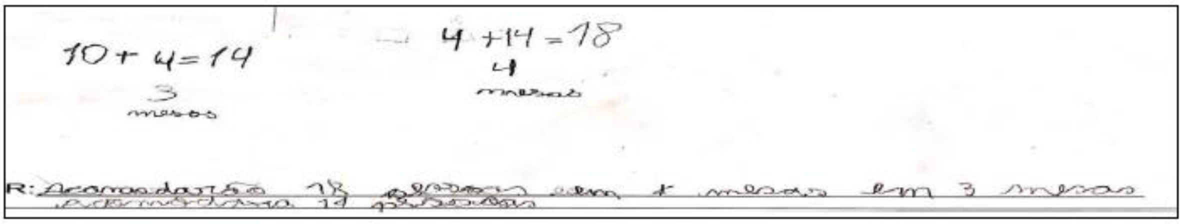
Figura 13 – Registo I da tarefa “Pizzaria”



1º = 14 pessoas e no 2º deu 18 pessoas

Fonte: Luna, Souza e Lima (2018)

Figura 14 – Registo II da tarefa “Pizzaria”



Acomodarão 18 pessoas em 4 mesas, em 3 mesas acomodarão 14 pessoas

Fonte: Luna, Souza e Lima (2018)

Percebemos a presença de diferentes formas de registro do resultado. Na Figura 13, o aluno recorre à elaboração de textos pictóricos para determinar o número de lugares ao se juntar três e quatro mesas, escrevendo: “1º = 14 pessoas e no 2º deu 18 pessoas”. Ponte, Branco e Matos (2009) e Almeida e Santos (2017) destacam que o uso de imagens e desenhos é uma forma inicial para a aproximação da representação simbólica e da organização desses símbolos por meio da linguagem algébrica, ou seja, organização que consiste em operações de procedimentos combinados. Os autores, entretanto, indicam que o pensamento algébrico não se esgota no simbolismo algébrico, sendo este, um importante modo de lidar com os objetos matemáticos, suas características, observação e exploração das relações entre eles.

Além disso, ao desenhar as mesas, o aluno demonstra compreensão sobre o problema, dispõe corretamente as mesas e lugares, de modo a determinar o número total de pessoas.

Na Figura 14, o aluno, ao identificar o número de lugares ao se juntar uma mesa com outra – quatro -, estabelece que ao se adicionar uma mesa, há o acréscimo de quatro lugares, escrevendo: “acomodarão 18 pessoas em 4 mesas, em 3 mesas acomodarão 14 pessoas”. Esse raciocínio é utilizado também para determinar o número de cadeiras da união de quatro mesas.

Os autores entendem que esse tipo de trabalho em sala de aula:

> permite que identifiquemos as características que as crianças atribuem aos números, como adicionam diferentes operações numéricas em função de uma determinada situação e, além disso, como e quando utilizam os desenhos na comunicação dessas operações. Essas temáticas contribuem para a ampliação do repertório das crianças, para a elaboração de diretrizes no campo da formação de professores (LUNA; SOUZA; LIMA, 2018, p. 10).

As tarefas que exploram a observação de padrões e regularidades, como apresentado acima, mostram possibilidades de trabalho em sala de aula que valorizem modos distintos de registros, permitindo que o aluno mobilize seus conhecimentos e os articule com a situação proposta, identificando e estabelecendo relações entre os dados do problema.

3.1.3 Qual a forma da álgebra? Tarefas relacionadas à ideia de simetria

As simetrias são transformações geométricas que conservam a forma de figuras alterando apenas a posição da figura inicial. Elas podem ser classificadas em simetrias de reflexão, translação e rotação. A observação das características de figuras simétricas permite aos alunos identificar padrões, compreender seus elementos característicos e estabelecer relações em outros contextos.

Lopes e Silva (2015) desenvolveram com alunos do 3º ano do Ensino Fundamental tarefas relacionadas às simetrias de reflexão. Inicialmente propuseram uma pesquisa na internet sobre as obras de Maurits Cornelis Escher cuja característica principal é a exploração de diferentes formas geométricas e ilusões de ótica.

Nesse momento, o professor questionou os alunos sobre as obras e o que lhes chamavam a atenção na composição das imagens. Alguns alunos expressaram, imediatmente, em certas obras, reconhecer o padrão das figuras simétricas, o mesmo formato, porém em posição diferente.

Em seguida, foi proposta uma tarefa em que os alunos dobravam uma folha de papel ao meio, na horizontal ou vertical, marcando a dobra, e desenhavam com tinta em um dos lados da linha marcada. Posteriormente os alunos deveriam dobrar a folha na marca feita. A seguir apresentamos o feito por alguns alunos:

Figura 15 – Tarefa com folha e tinta

Fonte: Lopes e Silva (2015)

Os autores relatam que após abrirem a folha, os alunos identificaram rapidamente que ambos os lados tinham a *mesma figura de uma forma diferente,* e já buscavam, nas imagens dos colegas, determinar o eixo de simetria. Após essas primeiras explorações o professor abordou o conceito de eixo de simetria e, junto aos alunos, buscaram na arquitetura, natureza e obras artísticas objetos e imagens que apresentassem essas mesmas características.

> Percebe-se nesse momento da sequência de atividades que os alunos, em sua maioria, já estavam realizando o exercício da abstração do conceito e procurando justificativas para seu raciocínio, seja através de suas próprias palavras ou utilizando-se de exemplos acessíveis como o armário de duas portas presente na sala de aula, as janelas e até mesmo os desenhos formados no assoalho da sala (LOPES; SILVA, 2015, p. 115).

Ao identificarem que as imagens dos lados da marca da folha são a mesma, porém de *forma diferente,* os alunos observaram algumas das características da simetria de reflexão, dentre elas o eixo de simetria presente nas imagens, como destacam os autores. A partir dessas considerações iniciais, os alunos são conduzidos a relacioná-las e pensá-las em outros contextos. Essas habilidades são, a nosso ver, importantes no desenvolver do pensar algébrico, uma vez que, envolvem a identificação e compreensão dos elementos característicos da simetria de reflexão em figuras, através da exploração do padrão existente nas figuras simétricas.

Girardi e Giongo (2013) ao trabalharem com alunos de 4º e 5º ano do Ensino Fundamental propuseram uma tarefa envolvendo figuras geométricas e simetria de reflexão. Foi solicitado que os alunos recortassem uma folha de sulfite dobrada ao meio. A seguir apresentamos o feito pelos estudantes:

Figura 16 – Tarefa de simetria com recortes

Fonte: Girardi e Giogo (2013)

No desenvolvimento das tarefas, um dos alunos diz ao professor: *"É legal fazer as atividades de simetria, a gente precisa primeiro imaginar na cabeça para depois fazer"*. Percebemos na fala do estudante que a produção da figura não se dá por meio de cortes aleatórios, ele destaca ser necessário inicialmente "*imaginar na cabeça".* Entendemos que para o aluno produzir a figura ele precisa decidir, inicialmente, sobre os cortes que irá realizar e a figura desejada, ou seja, há uma relação entre os cortes e a figura produzida, um padrão que se constitui nas figuras simétricas que precisa ser considerado.

Os autores destacam que o objetivo das tarefas foi promover um espaço onde os alunos pudessem analisar os conceitos já conhecidos, no caso, as figuras geométricas, de modo a produzirem outros significados para elas e relacionassem com outros conceitos, como o de simetria, apropriando-se de uma nova linguagem e explorando outras possibildades de pensar (GIRARDI; GIONGO, 2013).

As propostas de tarefas apresentadas nesta seção apresentam possibilidades de trabalho na sala de aula dos anos iniciais para o desenvolvimento do pensar algébrico. Ao indicar o trabalho com o sentido numérico e as propriedades das operações, observação de padrões e simetrias, os autores revelam caminhos para estudar objetos matemáticos já conhecidos, porém com outros olhares. Um olhar com foco em seus elementos característicos e atento ao que se mostra essencial em cada contexto ou problema.

Assim compreendida as possibilidades de trabalho com a álgebra nos anos iniciais de Ensino Fundamental, nos voltamos para a formação docente, mais especificamente para o professor que ensina matemática nesse nível de escolaridade. Aprofundamos nossas leituras sobre a formação continuada desses profissionais no contexto da álgebra e do pensamento algébrico.

3.2 Pesquisas sobre o ensino de álgebra e o pensamento algébrico na formação continuada de professores dos anos iniciais

O volume de trabalhos que focam a formação de professores é bastante grande, o que pode ser constatado em uma busca, por exemplo, nos Grupos de Trabalhos (GT) da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), voltados para essa temática. No entanto, conforme salientamos anteriormente, nossa revisão teórica caminha na direção de compreender o que vem sendo proposto para tratar o ensino de álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais. Desse modo, elegemos algumas pesquisas que tratam da formação continuada de professores no âmbito do ensino de álgebra. Dentre elas, optamos por considerar àquelas cujas propostas se aproximam das perspectivas teóricas indicadas por nós na seção anterior deste trabalho.

Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017) apresentam dados de um curso de formação continuada para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, focando as características do trabalho com as propriedades dos números e das operações, o sinal de igualdade como equivalência, sequências e padrões, enfatizando os elementos que compõem a Aritmética Generalizada e o Pensamento Funcional, proposta por Blanton e Kaput (2005). A investigação tem como quadro teórico Mathematical Knowledge for Teaching (MKT). O curso foi ministrado pelo primeiro autor do texto, como parte da pesquisa de mestrado "Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: uma análise do conhecimento matemático acerca do Pensamento Algébrico".

Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017) apresentam as discussões sobre as tarefas relacionadas às operações matemáticas, dentre elas a seguinte:

Figura 17 - Tarefa proposta sobre operações aritméticas
50

	V	F	Justificativa
24 + 37 = 37 + 24			
46 + 27 – 27 = 27			
◊ x 1 = ◊			
□ + 0 = □			

Fonte: Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (p. 504, 2017)

Os professores foram organizados em grupos de 3 a 4 pessoas. Num primeiro momento responderam a tarefa individualmente e, em seguida, discutiram com os colegas. Num segundo momento, analisaram a resposta dada por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental à mesma tarefa que realizaram. A análise do primeiro momento da tarefa focou em identificar as diferentes argumentações que os professores apresentaram em cada uma das sentenças. Percebeu-se que os participantes usaram "justificativas com base nas propriedades das operações, mas sem nomeá-las explicitamente" (FERREIRA; RIBEIRO; RIBEIRO, 2017, p. 506). Alguns professores justificaram suas respostas usando "resultado" no lugar de "produto" ou "fator" no lugar de "parcela".

Um dos grupos recorreu ao cálculo para justificar a igualdade da sentença 46 + 27 –27 = 27, destacando "fazendo o cálculo não dá este resultado". Os autores interpretam que o grupo de professores atribui o significado operacional ao sinal de igualdade, assim como proposto por Ponte, Branco e Matos (2009). Ou seja, eles fazem a operação do lado esquerdo e compararam com o valor explícito no lado direito. Não houve uma análise dos números envolvidos em cada sentença, nem do significado do sinal de igualdade, uma vez que "a justificativa não necessita sustentar-se no resultado das operações, já que, para concluir a falsidade da expressão, é "suficiente" conhecer e saber usar a propriedade associativa" (FERREIRA; RIBEIRO; RIBEIRO, 2017, p. 506).

Na interpretação do segundo momento da tarefa, onde os professores analisaram as respostas dos alunos, os autores destacaram alguns diálogos com os participantes, indicados pelas siglas P1 e P2:

Figura 18 - Diálogos com professores do curso

P1 – *"Tudo vezes um é igual ao primeiro número"* (a professora leu o que o aluno escreveu na justificativa da questão).
P2 – *Aí ele já sabe as propriedades...*
P1 – *Ele entendeu a propriedade da multiplicação, só não entende a ordem ainda, porque não é necessariamente o primeiro número, porque, se o número um estivesse aqui* (onde está o balão) *e o zero* (o balão) *aqui* (onde está o número um)*, a resposta seria a mesma...*
P2 – *Sim...*
P1 – *Então ... por que ele não entende que o inverso da conta...*
P2 – *Ou talvez ele até entenda, mas como a conta está desta forma...*
P1 – *Se limitou a essa explicação.*
P2 – *Exatamente! Para saber disso* (se o aluno entende que para a propriedade do elemento neutro da multiplicação não importa a ordem dos fatores) *você teria que dar outro exemplo.*
P1 – *Para ver como ele responderia...*

Fonte: Ferreira, Ribeiro, Ribeiro (p. 506, 2017)

O diálogo mostra que os professores detectam a propriedade do elemento neutro da multiplicação usado pelos alunos, ainda que sem nomeá-la, tomando-a não como uma das propriedades da multiplicação, mas como “a propriedade da multiplicação”. Consideramos, assim como Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017), que no ensino da álgebra dos anos iniciais os professores compreendam as propriedades operatórias, uma vez que são elas (as propriedades) que descrevem como as operações se comportam, promovendo um espaço em sala de aula onde alunos e professores possam atribuir sentido ao que se faz e por que se faz, no âmbito das operações aritméticas.

Os professores participantes também destacam sobre o sinal de igualdade e a justificativa dada por um dos alunos:

Figura 19 - Diálogo com participantes sobre sinal de igualdade na expressa 24 +37 = 37 +24

P2 – *Então o resultado para ele..., o resultado não tem que ter isso aqui* (apontando para o 37 + 24), *o resultado tem que acabar aqui* (apontando para o número 37).
P1 – *É verdade!*
P2 – *O resultado nunca tem multiplicação, ou não tem adição, portanto, tá errado...*
P2 – *No sentido de que depois do igual é só um número.*
P1 – *E aí, como é uma expressão, ele confundiu.*
P2 – *Aí, como tem dois* (dois números depois do igual), *tá errado. Como pode ter dois?*
P1 – *É isso mesmo!*
P2 – *Não é isso?*
P1 – *Como que o resultado pode ser outra conta? Né? Nossa, que judiação! Que nó na cabeça dessa criança! Que professora má rsrsrsrs.... É verdade!*
P2 – *Mas na verdade o resultado... quando a gente fala o resultado é esse aqui* (apontando para o trinta e sete).
P1 – *Na verdade ...a gente que ensina, né...o resultado é só aquele. E na hora de fazer ele se confundiu, coitado...*

Fonte: Ferreira, Ribeiro, Ribeiro (p. 507, 2017)

Os participantes reconhecem que os alunos atribuem ao sinal de igualdade apenas o significado operacional, alegando não poder haver outra operação após o sinal de igualdade. Ao mesmo tempo, relatam sobre o papel do professor na proposta da tarefa e sua mediação. A fala, “*a gente que ensina, né ... o resultado é só aquele*”, nos revela a importância desses espaços de formação continuada para refletir sobre os conteúdos matemáticos e as práticas docentes, também no âmbito algébrico, uma vez que, a compreensão do professor sobre o conteúdo e seus significados conduzem as ações em sala de aula, como destacam Ferreira, Ribeiro, Ribeiro (2017).

Nacarato (2017) apresenta alguns aspectos significativos de uma investigação que se desenvolveu num grupo de trabalho colaborativo, dentro do Programa Observatório da Educação (Obeduc), no ano de 2016. O grupo de formação continuada era constituído por quatro professoras da Universidade São Francisco, cinco professoras da escola pública que lecionavam no ciclo de alfabetização (alunos de 6 a 9 anos de idade) e quatro estudantes de pós-graduação (3 mestrandas e 1 doutoranda).

> O grupo se reunia quinzenalmente para estudos ou compartilhamentos das práticas das professoras. A partir dos estudos realizados, as professoras selecionavam tarefas para a sala de aula e sistematizavam suas práticas por meio de narrativas de aulas. Essas narrativas eram compartilhadas no grupo, cujos encontros eram audiogravados. A cada início de ano as professoras decidiam qual seria o foco de estudo. Para 2016 o foco foi no desenvolvimento do pensamento algébrico no início da escolarização (NACARATO, 2017, p. 104).

Considerando a perspectiva histórico-cultural para a proposta de formação continuada, assume que a prática do professor precisa ser "planejada, com objetivos bem definidos e o professor tendo o papel central, como aquele que prepara a tarefa, organiza a turma de alunos para o trabalho, registra os discursos que circulam na sala de aula e sistematiza o movimento vivido" (NACARATO, 2017, p. 107). Para tratar o pensamento algébrico e o ensino da álgebra, valeram-se dos estudos de Radford (2013) e Kaput (2007), focando a exploração de regularidades.

Uma das tarefas elaboradas pelo grupo foi intitulada "O cordão de contas", que consistia em distribuir contas coloridas e um pedaço de fio (barbante, por exemplo), para que os alunos construíssem uma sequência repetitiva. Duas professoras do grupo de formação, Daniela e Eliana, desenvolveram a tarefa em suas turmas. Os alunos de Daniela, do 2º ano, construiriam o cordão de contas e os alunos de Eliana, do 3º ano, analisariam as sequências construídas e deram um retorno aos colegas. Acerca dessa experiência, a professora Daniela destaca:

> Realizei com as duas turmas a explicação da proposta, estabeleci a elaboração de um cordão de contas com 28 miçangas [contas], os alunos poderiam escolher de três a quatro cores, mas alguns alunos também usaram duas cores. Antes fiz alguns questionamentos referentes ao porque iríamos confeccionar um cordão e não um colar, já que um dos alunos no momento da explicação citou que seria como um colar; ressaltei que não, iríamos elaborar um cordão e perguntei o porquê de ser um cordão. Depois de um breve silêncio, o aluno Ruan olhou para meu colar e disse:
> Ruan: O seu colar é finito, você que fez prô? [a expressão prô é um modo carinhoso pelo qual os alunos se reportam à professora].
> Profa: Sim, então por que você acha que não podemos fechar as pontas do nosso cordão?
> Ruan: Porque é que nem o seu colar, ele parece uma sequência das bolinhas coloridas, mas aí você fechou para ficar no pescoço, então ele teve fim, nosso cordão é infinito se um dos alunos do 3º ano quiser continuar ele pode, é uma sequência que não tem fim.
> Essa consideração foi partilhada no grupo de alunos, pois nenhum deles tinha conseguido entender o porquê elaborar um cordão e não um colar de contas; a maioria concluiu que tinha apenas que fechar as pontas para as bolinhas não caírem. (Narrativa da professora Daniela, abril/2016) (NACARATO, 2017, p. 108).

O relato mostra que a professora inicia a tarefa questionando os alunos. Nacarato (2017) destaca que a fala de Ruan não foi algo prevista pela professora. No entanto, ela soube usar o seu comentário pedindo para que ele explicitar o que estava pensando, o que revelou que o aluno já havia entendido que a sequência seria infinita, pois poderiam colocar quantas contas quisessem. Por outro lado, ao fechar o cordão, a sequência se tornaria finita. Nesse processo, de solicitar que o aluno explicite seu raciocínio, a professora permitiu que o aluno e os colegas pudessem retomar o feito, compreendendo-o e apropriando-se dele. (NACARATO, 2017).

Os participantes do grupo de formação continuada relataram a importância e a riqueza das trocas com os colegas no momento da elaboração, do desenvolvimento e da discussão das tarefas propostas para suas práticas e compreensão do conteúdo. Nacarato (2017, p. 110), considera que “a formação precisa se pautar no movimento do estudo, da escrita, discussão e compartilhamento de práticas de sala de aula em grupos colaborativos” (NACARATO, 2017, p. 110), pois a vivência com o grupo de professores permitiu que eles se colocassem em movimento de pensar os conteúdos e suas práticas. Ao compartilhar com o outro, eles conseguiram analisar outros modos de trabalhar os conceitos matemáticos, proporcionando o diálogo e a investigação.

Quartieri et al. (2019) apresentam, também, aspectos significativos de uma formação continuada com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental da rede municipal de ensino da cidade de Vale do Taquari, no estado do Rio Grande do Sul. Pautada na concepção da Investigação Matemática a formação focou o ensino de geometria e de álgebra. Foram planejadas tarefas investigativas para serem realizadas nos encontros semanais de um grupo de professores de matemática do ensino superior, docentes voluntários da Educação Básica, graduandos, mestrandos, doutoranda e bolsistas de iniciação científica.

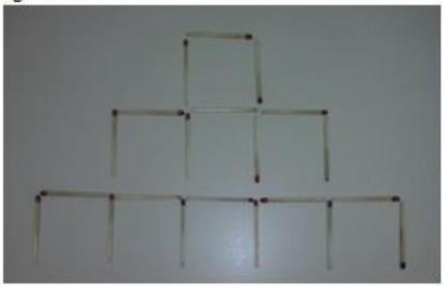
As tarefas investigativas, são compreendidas por Quartieri et al. (2019), como situações abertas que permitem diversificadas formas de resolução e estratégias.

> As situações abertas, cujas questões não estão completamente formuladas, permitem ao aluno envolver-se na atividade desde o seu primeiro momento. De igual modo, na elaboração de estratégias, na generalização de resultados, no estabelecimento de relações entre conceitos e áreas da matemática, na sistematização de ideias e resultados, são múltiplas as oportunidades de trabalho criativo, significativo para quem o empreende (PONTE, 1998 apud QUARTIERI et al., 2019, p. 116).

Para elaborar e desenvolver as tarefas desenvolvidas no grupo de formação continuada, os autores se valeram de propostas da BNCC para o ensino de álgebra e desenvolvimento do pensamento algébrico. Os participantes foram organizados em grupos menores para promover o diálogo e, posteriormente, houve a socialização com os demais professores. Uma das tarefas desenvolvidas com os participantes envolveu o uso de materiais manipulativos, como palitos de fósforo, conforme apresentado na figura 20.

Figura 20 - Tarefa fileiras com palitos

Observar a figura a seguir:



a) Representar a figura utilizando palitos de fósforo.
b) Quantos palitos você utilizou na primeira fileira?
c) Quantos palitos você utilizou na segunda fileira?
d) Quantos palitos você utilizou na terceira fileira?
e) Quantos palitos você utilizaria na quarta, quinta e sexta fileiras?
f) Como você pensou para responder a questão anterior?
g) Se você não tivesse palitos suficientes, como faria para descobrir o número total de palitos que utilizaria na sétima fileira?

Fonte: Quartieri et al. (2019)

Cada grupo menor teve um momento para discutir, entre si, suas estratégias. Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), destacam que, quando se trabalha com a Investigação Matemática, o trabalho em grupo potencializa o surgimento de várias alternativas para a exploração da tarefa.

Dentre as estratégias apresentadas, um dos grupos destacou que, para determinar o número de palitos da fileira posterior, bastava somar quatro palitos na linha anterior.

Figura 21 - Resolução de um dos grupos

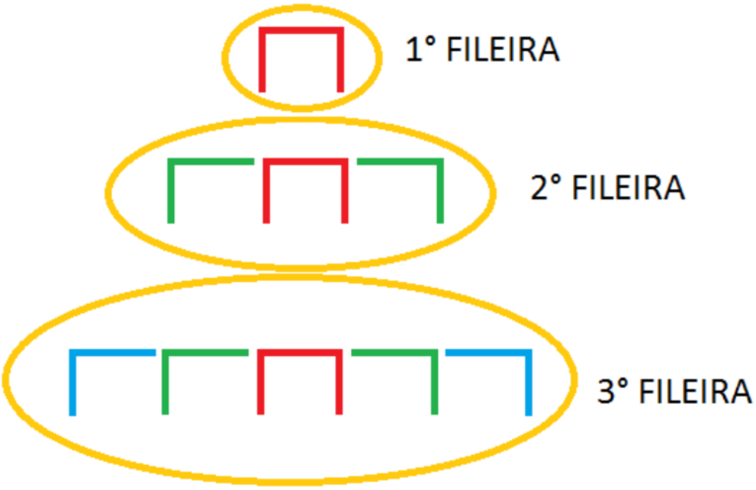
O 3 surgiu da 1ª fileira.

1ª → 3 + (0 x 4)
2ª → 3 + (1 x 4)
3ª → 3 + (2 x 4)
4ª → 3 + (3 x 4)
5ª → 3 + (4 x 4)

Fonte: Quartieri et al. (2019)

O grupo buscou um modo de estabelecer uma relação entre a posição em cada fileira e o número de fósforo usado para compô-la. Outro grupo, se voltou para a posição dos palitos nas fileiras, observando o que acontecia com as posições à medida que se aumentava o número de fileiras:

Figura 22- Resolução de outro grupo



Fonte: Quartieri et al. (2019)

> [19]D3 -A fileira não é só essa?
> D5 -Sempre fica aberto aqui [referindo-se à parte inferior em que o quadrado fica aberto].
> PP2 –Como vocês completam aqui?
> D5 -É que a gente foi por outro raciocínio, dois aqui e dois aqui soma quatro.
> D8 -O primeiro tem três e depois aumenta quatro.
> PP3 –O que o três é do quatro?
> D9 -Um a menos.
> PP3 –O que tem aqui?
> D8 -Oito menos um.
> PP3 -E aqui?
> D8 -Doze menos um.
> D6 -É sempre menos um.
> D8 -É quatro, é os múltiplos de quatro menos um
> (QUARTIERI et al., 2019, p. 125)

Valendo-se da configuração geométrica dos palitos, seu modo de disposição em cada fileira, o grupo buscou uma relação que lhes permitisse expressar a quantidade. Para generalizar, o grupo escreveu a expressão 4x-1, em que o número 4 indicava a quantidade de

[19] Os códigos D’s dizem respeito dos professores dos anos iniciais, já os códigos PP’s se referem aos pesquisadores

palitos que aumenta sempre em relação à figura, a variável x indica a fileira e o número 1 representa a parte inferior da figura (que está aberto).

Os autores destacam que a tarefa permitiu que os professores fizessem explorações, investigando, levantando hipóteses e testando suas estratégias. Houve diferentes caminhos para se chegar à expressão 4x – 1 e, ao socializar a forma percebida, os professores puderam retomar o feito, compreendo-o.

A investigação de Sousa (2004), cujo solo teórico é a perspectiva lógico-histórica, teve como objetivo analisar as possíveis correlações do pensamento manifesto do professor e os pressupostos do desenvolvimento conceitual abordados em atividades de ensino de álgebra.

A perspectiva lógico-histórico, ao ser considerada na sala de aula, objetiva auxiliar "o pensamento a movimentar-se no sentido de encontrar as verdades, a partir de definibilidades próprias do conceito" (SOUSA, 2004, p. 271). A história assume o papel de um elo entre a causalidade dos fatos e a possibilidade de criação de novos conceitos. A autora destaca que as aulas de matemática devem convidar o estudante a voltar-se para o conhecimento matemático, permitindo que haja um encontro afetivo com o conceito, convidando-o a pensar sobre eles.

Para a autora,

> O pensamento algébrico deve considerar os nexos internos dos conceitos de número: qualidade, quantidade, senso numérico, correspondência um-a-um, ordenação, agrupamento, valor posicional, base e representação, presentes no movimento do pensamento numérico e não apenas os aspectos formais que se apresentam no conceito mais geral do número que se formalizam nas propriedades dos campos numéricos diversos. O pensar algébrico, ao considerar o conceito mais geral do número não pode estar apenas relacionado à presença física e formal do número: o numeral (SOUSA, 2004, p. 16).

Sousa (2004) destaca que, ao pensar o número sem o numeral, o estudante tem que conhecer o conceito de número, que não está na manipulação do numeral, mas na compreensão de "o que" o número contém, como os conceitos de senso numérico e correspondência, por exemplo.

A pesquisa relatada pela autora investigou atividades de ensino de álgebra, tanto na formação inicial quanto continuada de professores que ensinam matemática, em disciplinas dos cursos de graduação em Pedagogia e Licenciatura em Matemática. Ao longo de dois anos, foram analisados e refletidos as dúvidas e os questionamentos dos estudantes, enquanto eles vivenciavam e analisavam atividades de ensino que tratavam dos conceitos de fluência, variável, campo de variação e densidade numérica.

A vivência com os estudantes se deu em quatro momentos: o primeiro foi um questionário cujo foco era levantar as compreensões dos alunos sobre a álgebra e suas relações com outras áreas da matemática de aspectos da vida, num segundo momento, os alunos elaboraram um diário de campo para registrar suas considerações após cada uma das aulas desenvolvidas na disciplina. Conforme a autora destaca, "através do diário temos possibilidades de dialogar com o conhecimento do outro, que contém cada um de nós" (SOUSA, 2004, p. 38).

O terceiro momento foi voltado para as aulas, durante elas é que as compreensões são (re)elaboradas de forma individual e coletiva. O último momento ficou destinado a elaboração dos projetos de ensino, pelos alunos.

Ao voltar-se para a produção dos alunos, a autora destaca que seus conhecimentos de álgebra estavam relacionadom aos nexos externos do conceito de álgebra, se referindo, por exemplo, ao "tradicional x". Ou seja, a álgebra era para eles parte da matemática que "lida com o 'x'". Entretanto, no decorrer das aulas, os alunos tiveram um encontro inesperado com os conceitos algébricos, e perceberam que as respostas às atividades não estão prontas e nem são únicas, mas podem ser construídas e elaboradas pelo grupo.

A título de exemplificação desse "encontro com o inesperado", trazemos o registro de um dos participantes das aulas, após uma discussão sobre um texto que trata o pensamento da fluência e da metafísica como concepção do mundo e da ciência.

> Essa aula foi muito gratificante no sentido de me fazer refletir sobre o quanto meu pensamento, frente às ciências exatas, segue os caminhos fixos. Essa fluência de pensamento é algo muito pouco trabalho ou levado à discussão quando nós passamos pela educação matemática, ou mesmo escola e o que nos faz cristalizar um pensamento que está sendo desconstruído pouco a pouco. É incrível como passa a fazer mais sentido a ciência frente a um referencial, do que aquele pensamento único, sujeito ao certo e ao errado. A metafísica é algo tão intrínseco ao nosso pensamento que essa abordagem flexível me trouxe ao mesmo tempo um bem estar, mas também um medo de uma "relativização" total das coisas, momento em que não haveria mais o certo e o errado, já que o referencial é fundamental. Eu ainda não consegui encontrar, particularmente, o meio termo entre a matemática fixa, a qual sempre fui exposta e essa "nova" concepção (SOUSA, 2004, p. 253-254).

Há, de acordo com Sousa (2004), um movimento de considerar as relações entre as definibilidades do sujeito e as estabelecidas pelas diversas civilizações e não a imutabilidade das respostas. As atividades propostas exigiam um novo modo de lidar com os conceitos matemáticos e, nesse processo, os alunos não tinham medo de expor suas dificuldades e incertezas.

Esse modo de conduzir as atividades revela uma perspectiva de formação docente que considera que "o formar-se nunca termina, porque a vida pulsa enquanto tenta se recriar a todo momento, na fluência dos movimentos do universo" (SOUSA, 2004, p. 272).

Esse sentido fluído de formação, trazido pela autora, explicita uma busca constante do professor que nunca se sente formado, não por estar “inacabado”, mas por entender que suas ações se desenvolvem com pessoas e estão sempre abertas a novas possibilidades. Isso nos faz considerar relevante trazer para este texto a perspectiva de formação que assumimos na pesquisa e na condução das tarefas que propusemos aos professores que estiveram conosco dando-nos a conhecer a possibilidade de tratar a álgebra nos anos iniciais.

4 METODOLOGIA DE PESQUISA

Nesta seção apresentamos a opção metodológica assumida na pesquisa. Explicitamos o sentido que fez para nós a pesquisa qualitativa e a abordagem fenomenológica, que nos orientou na elaboração das tarefas desenvolvidas com os professores e nos dá subsídios para analisar e interpretar os dados que foram produzidos.

4.1 Pesquisa qualitativa: do pesquisar às qualidades

Para o que nos propomos a investigar nesta tese de doutorado, entendemos que a pesquisa qualitativa é a que pode nos auxiliar a compreender o interrogado: "*Quais aspectos do fazer do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental revelam características do pensamento algébrico?"*. Entendemos que nossa busca caminha na direção de explicitar as qualidades do que, nos dados, irão se mostrar ao olhar atento do pesquisador. Logo, opta-se pela pesquisa qualitativa.

O termo *pesquisar*, de acordo com Bicudo (2000, 2011), significa trilhar um caminho em busca daquilo que se deseja compreender sobre uma interrogação, considerando a multiplicidade de dimensões que ela carrega, sempre havendo a possibilidade e necessidade de voltarmo-nos à ela interrogando nova e novamente, buscando sentidos e significados.

A pesquisa qualitativa é nossa opção para o estudo empreendido uma vez que ela busca por qualidades dos dados que iremos analisar, envolvendo todos e tudo que constituem um recorte da realidade. Conforme Chizzotti (2003, p. 221), "o termo qualitativo implica uma partilha densa com pessoas, fatos e locais que constituem objetos de pesquisa, para extrair desse convívio os significados visíveis e latentes que somente são perceptíveis a uma atenção sensível".

Bicudo (2012) também salienta que a pesquisa qualitativa em Educação é uma maneira de conduzir a pesquisa colocando os sujeitos envolvidos no processo em destaque, não os evidenciando isoladamente, mas sim contextualizando-os, levando em consideração aspectos sociais, políticos e culturais. O trabalho realizado, na pesquisa qualitativa, envolve diretamente as ações dos sujeitos, já que

> Sendo a realidade criada/ construída por sujeitos engajados e participantes de contextos históricos, estando esses sujeitos sempre no movimento dessa criação e do que já está tradicionalmente presente ao mundo, tem-se que é impossível a investigação separada do mundo e de seu movimento, dos atos criadores e suas manifestações (BICUDO, 2005, p. 24).

Dessa forma, assumimos neste trabalho a pesquisa qualitativa entendendo que, por meio dessa abordagem, seja possível compreender os aspectos humanos envolvidos na interrogação que nos move evidenciando-os durante o processo de pesquisa, pois

> Além de ser um nome que tem designado modos de pesquisar, e que, pelo menos aqui no Brasil, tem sido um recurso amplamente utilizado para definir procedimentos, nós assim a denominaremos para dar maior destaque às nuanças das qualidades percebidas e trabalhadas como dados da investigação (BICUDO, 2011, p.14).

Como dito anteriormente, o que queremos explicitar é a postura assumida durante o processo da pesquisa qualitativa, uma vez que ao tratarmos desta modalidade de pesquisa precisamos determinar como o estudo das qualidades dos dados se dará. A busca pela qualidade pode se dar na observação de um objeto ou por meio da percepção de um fenômeno. Sendo assim, a escolha entre os pares, objeto/observado ou fenômeno/percebido orientará a postura que o pesquisador qualitativo assume.

Na concepção de Bicudo (2011, 2012), o par objeto/observado nos aponta para uma postura de separação entre o sujeito que efetua a observação (pesquisador) e o objeto observado. A procura pela qualidade, foco da pesquisa, seria concentrada na observação do pesquisador, já que o que na pesquisa se foca seria compreendido com a possibilidade de ser observado.

O fato de a qualidade ser passível de observação nos conduz a conceitos já estabelecidos de modo que, para "observar" a qualidade, "[...] seriam tomadas categorizações dessa qualidade e a observação dirigida por essas categorizações. Assim procedendo, acabaríamos por cair no caso semelhante à mensuração ou contagem de qualidades" (BICUDO, 2011, p. 18). Isto é, a qualidade a ser observada teria uma orientação já prévia e definida pelo pesquisador.

Opondo-se a dicotomia entre o sujeito e o objeto ou entre o sujeito que observa e o objeto observado, o par fenômeno/percebido, "indica que a qualidade é percebida, mostrando-se na percepção do sujeito [...] não há uma separação entre o percebido e a percepção de quem percebe." (BICUDO, 2011, p. 19).

> Por isso, diz-se que sujeito e fenômeno são correlatos. Isso indica que não há sujeito "em si" e nem objeto "em si". Mas *fenômeno*, objeto da percepção, é sempre com sentido no horizonte de compreensão do sujeito. Ou seja, na perspectiva fenomenológica, não há separação entre o sujeito e o objeto, pois o percebido é para o sujeito da percepção. O objeto, então, é sempre objeto intencional. Ele é sempre para a *consciência*, entendida como *intencionalidade* ou como o *movimento de voltar-se para* o que se mostra, abarcando o que nesse *voltar-se* para se dá a conhecer (FERREIRA, 2019, p. 29).

Entendemos que só existirá um fenômeno se existir um sujeito para o qual ele se mostre, não há uma realidade separada para o sujeito e o fenômeno. No par percebido revela-se uma postura de atenção ao que é percebido, pois a percepção é dada no momento, no ato de perceber do sujeito. Essa é a postura assumida na *atitude fenomenológica*[20].

Compreendemos, a partir do exposto por Bicudo (2011), que há distintos modos de conduzir a pesquisa qualitativa, podendo assumir diferentes abordagens e procedimentos. Desse modo, destacamos que neste trabalho apresentamos uma pesquisa qualitativa assumindo a abordagem fenomenológica, visto que se pretende explicitar o par fenômeno/percebido na constituição dos dados de análise. Nossa escolha se deve ao fato de entendermos que ela nos permitirá compreender os modos pelos quais o pensar algébrico do professor que ensina matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental se revela.

Essa abordagem irá, portanto, orientar nossa caminhada, desde a elaboração das tarefas desenvolvidas com os professores, sujeitos da pesquisa, quanto na condução do curso e na análise do que, no diálogo com esses professores, se mostrar.

4.2 Pesquisa Qualitativa na abordagem fenomenológica

4.2.1 A Fenomenologia

A fenomenologia que assumimos nesta pesquisa é uma corrente filosófica que teve como precursor o filósofo e matemático alemão Edmund Husserl (1859 – 1938).

Edmundo Gustav Albrecht Husserl, nasceu em Porssnitz, na Morávia, no antigo Império Austríaco, em 8 de abril de 1859 e faleceu em 27 de abril de 1938. Estudou Matemática, Física e Astronomia na Universidade de Leipzig e doutorou-se em Viena em 1883. Dedicou-se a leitura de Aristóteles e à Fenomenologia do Espírito de Hegel. Influenciado pelas concepções do psicólogo e filósofo Franz Brentano, Husserl preparou sua livre-docência em Halle com Stumpf, sendo professor na universidade de Halle de 1887 a 1901. Em 1901 foi nomeado professor na universidade de Göt-tingen sendo este o período de amadurecimento da elaboração de sua fenomenologia. Em 1935 fez sua palestra sobre "a filosofia na crise da humanidade europeia" em Viena e em novembro daquele mesmo ano falou na universidade de Praga sobre "a crise das ciências europeias e a fenomenologia" (ZILLES, 2002).

A atitude e os procedimentos pautados na filosofia fenomenológica husserliana

---

[20] Na atitude fenomenológica, [...] a coisa não é tida como sendo em si, uma vez que: 1) não está além de sua manifestação e, portanto, ela é relativa à percepção e dependente da consciência; 2) a consciência não é parte ou região de um campo mais amplo, mas é ela mesma um todo que é absoluto e não dependente, e que não tem nada fora de si [...] Ela busca a manifestação da coisa que se expõe na percepção e, portanto, é dependente da consciência. Mas consciência é movimento, é ato de expandir para, inclusive em sua própria direção (BICUDO, 2013, p. 121).

influenciaram as filosofias de Heidegger e Sartre e também outras esferas do conhecimento, como "o neotomismo e sobre a filosofia em geral, sobre o direito, as ciências da linguagem, como sobre a estética, a sociologia e a psicologia" (ZILLES, 2002, p.11).

Husserl desenvolve a fenomenologia "como ciência fundamentadora, baseando-se na análise reflexa do conteúdo do ato de pensar enquanto manifesta a realidade (fenômeno)" (ZILLES, 2002, p. 6). Para o filósofo alemão, encontrar o fundamento do que se busca compreender exige "colocar-se acima da mera experiência prática e despir-se de todos os preconceitos, orientando-se apenas por uma evidência apodítica, ou seja, destituída de toda a possibilidade do seu contraditório" (ZILLES, 2002, p. 6). Entendemos, desse modo, que a fenomenologia desenvolvida por Husserl busca compreender o modo pelo qual o conhecimento é constituído.

Para dizermos da pesquisa que assume a abordagem fenomenológica entende-se que é preciso, antes de tudo, destacar o significado dessa corrente filosófica. Segundo Bicudo (2011):

> Fenomenologia é uma palavra composta pelos termos *fenômeno* mais *lógos*. Fenômeno diz do que se mostra na intuição ou percepção e logos diz do articulado nos atos da consciência em cujo processo organizador a linguagem está presente, tanto como estrutura, quanto como possibilidade de comunicação e, em consequência, de retenção em produtos culturais postos à disposição no mundo-vida (BICUDO, 2011, p. 29).

Desse modo, fenomenologia "fala da vida do homem que está no mundo, e do seu modo de existir no mundo" (GRZIBOWSKI, 2016, p. 70), sendo este mundo, mundo-vida, que "é um movimento que presentifica a historicidade da cultura, portanto dos hábitos, das crenças, das atividades práticas do cotidiano, da ética de uma comunidade" (BICUDO, 2020, p. 48). Assim, compreendido o mundo-vida, a fenomenologia pode ser entendida como "um pensar a realidade de modo rigoroso" (BICUDO, 1994, p.17) para que seja possível compreender a realidade da experiência vivida por meio do estudo dos fenômenos, explicitando o sentido dessa vivência.

Fenômeno, tal qual ele é compreendido na fenomenologia, "é o que se mostra em um ato de intuição ou de percepção" (BICUDO, 2011, p. 30). Isto é, o fenômeno é o que se mostra ou o que aparece na percepção do sujeito (pesquisador), sendo

> Aquilo que surge para uma consciência, o que se manifesta para essa consciência como resultado de uma interrogação. Consciência que não se refere apenas a um conjunto de neurônios ou parte qualquer do organismo: refere-se a um estado de alerta para o mundo e por isso, é sempre consciência de alguma coisa, está dirigida para, apresenta uma direção (ESPÓSITO et al, 2014, p. 156).

O sujeito, atento, se dirige de modo intencional ao que está solicitando sua atenção, e então, o fenômeno se mostra, "percebido como uma totalidade que se destaca de um fundo, o solo mundano em que se situa” (BICUDO, 2020, p. 34). Esse fundo é um destaque (temporal e espacial) da realidade vivida.

Entendemos que a compreensão do interrogado se dá, na pesquisa fenomenológica, na explicitação dos sentidos que as coisas do mundo fazem para o sujeito que interroga o fenômeno, buscando, segundo Husserl (2008), “ir ao encontro das coisas em si mesmo”, tal ação significa “recusar as argumentações doutrinárias e os sistemas autocoerentes em proveito das interrogações nativas pelo mundo que vivemos e que a nossa vida se alimenta” (GRZIBOWSKI, 2016, p. 68).

Esse modo de compreender o fenômeno diz das vivências no mundo que, segundo Husserl (2008), se dão na e pela consciência, sendo esta sempre *intencionalidade*, isto é,

> estar consciente não quer dizer que, a todo momento, estejamos refletindo sobre nossos atos. Apenas diz que percebemos, ou seja, sabemos que estamos agindo. A consciência sempre está lá, nos atos que realizamos. É um movimento intencional mantido na intencionalidade. Esta é um conceito nuclear da fenomenologia. É complexo e difícil de explica-lo. Mas, conforme entendo, pode ser compreendido a um primeiro olhar como um fio invisível que nos contata às coisas e as traz à consciência como percebidas (BICUDO, 2020, p. 35).

A percepção, ao ser explicitada, traz um modo de o sujeito compreender o que a ele se mostra. Em nossa pesquisa, o fazer matemática do professor que ensina matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental num contexto algébrico é o fenômeno interrogado. Portanto, o modo de o professor vivenciar e expressar o seu pensar algébrico é o que buscamos compreender.

Esse modo de o sujeito compreender o que se mostra não é único, uma vez que, segundo Bicudo (2012), o que se mostra se revela por *perfis*, sempre aberto a novos olhares.

Isso significa que o interrogado, na pesquisa de orientação fenomenológica, não se esgota, sendo o percebido suscetível à interpretações e compreensões do pesquisador, a partir das manifestações do que se mostra, oriundas de acontecimentos dinâmicos e complexos da realidade. Bicudo (2012) indica que as compreensões possíveis em uma pesquisa são originadas nas perspectivas (ou nos perfis) do fenômeno percebido. Mostrar-se por perfis não significa ser incompleto, mas, antes, que o que se mostra o faz em *modos de aparecer*, sempre aberto a novos modos e, portanto, a novos olhares, a outro ato de percepção.

As compreensões que a fenomenologia visa, portanto, exigem, por parte do pesquisador, um rigor[21] que “se impõe a cada momento em que interroga o fenômeno e ao seu próprio pensar

[21] Rigor exprime o cuidado que se tem ao proceder à busca pelo interrogado ou pela solução do problema proposto. Esse não é um cuidado subjetivo, carregado de aspectos emocionais. Mas é um cuidado que busca a atenção constante do pesquisador para proceder de modo lúcido, analisando os passos que dá em sua trajetória, conseguindo clareza dos seus “por quês” e “comos”, o que significa, dos fundamentos de seu modo de investigar

esclarecedor" (BICUDO, 1994, p.20). Para expor o que é essencial à compreensão do interrogado é preciso estar atento às ações, pois

> o que é visto não é percebido de maneira isolada, mas em uma região de fenômenos co-percebidos. [...] Sujeitos e fenômenos estão no mundo-vida juntos com outros sujeitos, co-presenças que percebem fenômenos. A co-participação de sujeitos em experiências vividas em comum permite-lhes partilhar compreensões, interpretações, comunicações, desvendar discursos (BICUDO, 1994, p. 19).

Pode-se dizer que a pesquisa qualitativa de abordagem fenomenológica centra-se na compreensão das vivências que transcendem o agora, que "se expandem em possibilidades históricas as quais se materializam na temporalidade, espacialidade e dinamismo do mundo-vida" (BICUDO, 2011, p. 38). Por isso o registro (escrito, oral e audiovisual) e a descrição tornam-se fundamentais nesse modo de proceder à pesquisa.

Assumindo a fenomenologia husserliana, o pesquisador se volta de modo atento ao fenômeno, ao que se mostra. Descreve o vivenciado de maneira atenta, rigorosa e tão livre quanto possível de "conceitos prévios ou preconcepções que sejam considerados para explicar ou justificar o que se mostra" (FERREIRA, 2019, p. 30).

Com o desejo de "despir-se de todos os preconceitos", como sugere Zilles (2002), nos voltamos ao que se mostra orientados apenas por nossa interrogação de pesquisa: "*Quais aspectos do fazer do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental revelam características do pensamento algébrico?*".

4.2.2 Pesquisa Fenomenológica

Ao se assumir a abordagem fenomenológica na pesquisa qualitativa opta-se por uma discussão dos pressupostos tidos como naturais na ação humana. Isto é, busca-se, na pesquisa, compreender características de fenômenos conhecidos do cotidiano. Entretanto, tal busca é orientada para uma compreensão além da percepção usual, ou dos dados intuitivos, uma vez que, objetiva a essência de determinado fenômeno.

"A pesquisa fenomenológica parte da compreensão do viver e não de definições ou conceitos, é uma compreensão voltada para os significados do perceber" (COLTRO, 2000, p. 39). Entendemos que, ao adotar a abordagem fenomenológica, o pesquisador coloca o fenômeno em suspensão diante de seus olhos e projeta-se com os sentidos e significados que se mostram através do fenômeno interrogado e que vão se constituindo no contexto da pesquisa.

---

e da visão de que modalidade de conhecimento sobre o indagado está construindo, ao proceder do modo pelo qual está encaminhando sua investigação (BICUDO, 2005, p. 11).

Desse modo, a abordagem fenomenológica sustenta-se na postura assumida pelo pesquisador, cuja atenção deve estar direcionada para a compreensão do fenômeno, tomando como ponto de partida uma investigação sem conceitos já formados, definidos e formalizados. Isto é, sem ater-se a teorias explicativas, pois tal abordagem tem como objetivo a compreensão de fenômenos envolvendo ações humanas, sujeita a modificações e alterações com origens diversas, entre elas o contexto ou a situação em que o fenômeno se dá a perceber.

> O primeiro passo do método fenomenológico consiste em abster-se da atitude natural, colocando o mundo entre parênteses (*epoqué)*. Isso não significa negar sua existência, mas metodicamente renunciar ao seu uso. Ao analisar, após essa redução fenomenológica, a corrente de vivências puras que permanecem, constata que a consciência é consciência de algo (ZILLES, 2007, p. 218).

A suspensão dos conhecimentos já consolidados permite que o pesquisador ultrapasse a atitude natural, a obviedade e se volte de maneira atenta para o que se mostra. O pesquisador interroga a realidade à luz do que deseja compreender, isto é, da sua interrogação. Nesse sentido, "o que ilumina toda a trajetória é a interrogação que se mantém viva ao longo da pesquisa e sustenta o movimento da compreensão" (FERREIRA, 2019, p. 31).

Consideramos importante, ainda, destacar o sentido da interrogação que orienta a pesquisa na abordagem fenomenológica. De acordo com Bicudo (2005),

> A interrogação é uma pergunta dirigida a algo que se quer saber. É fruto de uma dúvida, de uma incerteza em relação ao que se conhece ou ao que é tido como dado, como certo. Ou ainda pode ser incerteza em relação ao vivido no cotidiano, quando a organização posta ou os acertos mantidos começam a não fazer sentido (BICUDO, 2005, p. 9).

No caso desta pesquisa a interrogação "Quais aspectos do fazer do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental revelam características do pensamento algébrico?", foi motivada por uma inquietação[22] que nos intrigou durante o desenvolvimento da dissertação de mestrado em Educação Matemática, quando propusemos para professores dos anos iniciais tarefas envolvendo o Cálculo Mental, conforme já salientado anteriormente.

Essa interrogação, segundo Bicudo (2011), muitas vezes não está clara ao pesquisador. Isso, porém, não indica que ele não tenha uma interrogação, ou um desejo de querer saber, já que ela se origina na experiência vivida. Há, portanto, um jogo de clareza e estranheza. De

[22] Como já dito anteriormente, a abordagem fenomenológica visa à compreensão do fenômeno sem que se tome de partida concepções prévias. Porém, é preciso que o pesquisador possua certa familiaridade com o contexto no qual o fenômeno se situa. Essa familiaridade lhe dá uma orientação inicial que não é concebida por teorias explicativas e previamente definida, mas é originada da sua vivência, do contexto no qual o fenômeno se situa e que gera a interrogação que conduz a pesquisa.

acordo com Fini (1994), esse percurso entre a clareza do que se deseja compreender e a possibilidade de explicitar esse desejo, por meio de uma pergunta orientadora, é própria do caminhar da pesquisa, pois

> ao mesmo tempo que o fenômeno lhe causa certa estranheza, ele também lhe é familiar pois faz parte do seu "mundo-vida". Esta familiaridade, entretanto, não é ainda conhecimento. Assim, delineia-se o primeiro momento da pesquisa fenomenológica que se denomina pré-refexivo, ou seja, há algo sobre o qual o pesquisador tem dúvidas, quer conhecer, mas que ainda não está bem explicitado para ele. Quando ele interroga este "algo", tem o fenômeno e a maneira de interrogá-lo, indica-lhe o caminho a ser seguido, o que na abordagem fenomenológica denomina-se trajetória e não método, para não confundi-lo com a compreensão mais tradicional da palavra método (FINI, 1994, p. 27).

Entendemos, assim como Ferreira (2019), que pesquisar numa postura fenomenológica é percorrer um caminho que vai se constituindo durante o pesquisar rumo à compreensão do interrogado, "sendo essa interrogação o que dirige o olhar e exige que a ela nos voltemos inúmeras vezes, sempre perguntando pelo sentido que ela tem para o pesquisador" (p. 31).

Assim, ao interrogar "Quais aspectos do fazer do professor dos anos inicias do Ensino Fundamental revelam características do pensamento algébrico?", o que perguntamos? Primeiramente destacamos que a palavra "aspecto"; ela pode ser usada para dizer de uma *perspectiva* pela qual algo pode ser visto ou explicado, mas pode, também, dizer de um *modo pelo qual* algo se expõe ou é estudado. Em nosso caso, ao nos voltarmos para os *aspectos do fazer do professor* procuramos destacar os *modos* desse fazer matemática revelar *características*, particularidades, peculiaridades do pensamento algébrico.

No curso, voltamo-nos para o fazer do professor visando os modos pelos quais ele se envolve com as tarefas e expressa o que compreende dos conteúdos matemáticos, dialogando com os colegas e com a pesquisadora. Ficamos atentos as suas estratégias para resolver determinada tarefa, a manifestação do pensamento algébrico. Ou seja, direcionamos nosso olhar para uma perspectiva do fenômeno buscando clareza para o interrogado (MACHADO, 1994).

> A postura fenomenológica nos leva a assumir um modo de fazer pesquisa que busca deixar que o discurso dos sujeitos seja revelador do sentido do interrogado, destacando que a interrogação está situada. Ou seja, os sujeitos da pesquisa são em um determinado "contexto" que é aquele da experiência vivida o que torna o fenômeno situado. Dito de outro modo, pode-se entender que o fenômeno da fenomenologia dá-se no mundo-vida da experiência vivida, situado num tempo e espaço vividos considerado *Região de Inquérito* (FERREIRA, 2019, p. 32).

Nossa direção se dá pela interrogação da pesquisa e nos leva à uma região de inquérito, aos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental que estão em um ambiente com tarefas do contexto algébrico. Para compreender a região de inquérito buscamos entender o pensar algébrico num contexto histórico e filosófico, a formação desses profissionais em espaços dedicados à formação de professores, em especial a formação matemática e as possibilidades de se trabalhar com o pensamento algébrico nas aulas de matemática nesse nível de escolaridade, destacando potencialidades apontadas pelos autores lidos.

Os sujeitos da pesquisa foram então evidenciados: os professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, pois na pesquisa fenomenológica,

> [...] não existe a possibilidade de interrogar, por exemplo, o ensino ou a aprendizagem, mas sim o sujeito que está ensinando e o sujeito que está aprendendo. Na pesquisa fenomenológica sempre haverá um sujeito, numa situação, vivenciando o fenômeno educacional (FINI, 1994, p.25).

. A região de inquérito abre-se em um contexto em que seja possível estar junto com esses professores desenvolvendo tarefas para que, mediante o diálogo, o seu pensar algébrico pudesse ser expresso.

Ao se considerar professores, alunos, seres humanos lançados no mundo da experiência vivida é preciso considerar que o ato de compreender é sempre um ato de *compreender-com*, portanto situado na relação *com o outro* na qual se abrem as possibilidades de explicitação do percebido. Sendo no mundo com os outros é possível atribuir significados às coisas de modo que o movimento de compreensão e interpretação faz sentido.

A busca pela compreensão do fenômeno, agora explícito pelo desejo de conhecer os *modos de pensar algébrico dos professores* que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, permite-nos tornar claras as características do modo pelo qual a produção de dados na pesquisa é antevista. Produzimos e oferecemos para professores dos anos iniciais do município de Guaratinguetá, um curso de extensão universitária, intitulado “Qual o X da questão? Pensamento Algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental I”. Com o grupo constituído[23] realizamos algumas tarefas matemáticas e conversamos sobre o feito.

Os encontros com os professores foram gravados e essas gravações transcritas, dando origem aos dados da pesquisa. Consideramos importante destacar que, assumindo uma postura fenomenológica, os dados da pesquisa é o “que chega ao sujeito que, de modo atento, olha para algo querendo saber do se trata. Esse algo poderia ser visto como a “coisa”, que nos escapa ao conhecimento, mas que se doa aos nossos sentidos, em seus modos de doação” (BICUDO, 2020, p. 34). Assim, quando o sujeito se volta intencionalmente para o que solicita sua atenção,

[23] Esse grupo será melhor explicitado na próxima seção.

o fenômeno a ele se mostra, como percebido em uma totalidade que se destaca do solo mundano em que se situa. Ou seja, o “dado” é dado nas sensações e nas percepções.

Em nossa pesquisa os dados se constituíram na descrição da vivência com os professores que se envolviam com as tarefas propostas, discutindo os conteúdos matemáticos. É por meio da descrição que o fenômeno se torna possível de ser compreendido, sendo que ela “não tem caráter explicativo e sim se constituem de um relato que permita a maior fidelidade possível da experiência, é uma forma de o sujeito colocar sua experiência rigorosamente como ela está acontecendo” (MACHADO, 1994, p. 39).

4.2.3 Procedimentos de Análise

Na pesquisa qualitativa na abordagem fenomenológica, a compreensão do fenômeno é possibilitada pelo rigor a que está submetido o processo de análise e interpretação dos dados produzidos. Em nossa pesquisa, filmamos os encontros com os professores, o que nos permitiu registrar o vivenciado no curso. Os filmes foram transcritos tornando-se texto aberto à interpretação.

> Ao analisar os discursos, a primeira questão que se coloca é: o que o pesquisador busca nas descrições? Ele busca o invariante, o que permanece, aquilo que aponta para o fenômeno em sua essência. Será preciso ler através dos discursos, das descrições, captando os significados, perguntando-se a todo o momento: o que isto quer dizer? Quanto mais refinado o seu pré-reflexivo, mas saberá ler as descrições e captar os significados nelas contidos. Essa leitura inclui mensagens implícitas e explícitas, alternativas e contraditórias. Desse modo, tópicos e temas vão sendo gerados e a partir da análise dos discursos e da sua contextualização no estudo (ESPÓSITO et al., 2014, p. 157).

Vale destacar que, “para a análise do fenômeno [...] abandonamos a maneira comum de olhar, estabelecendo contato direto com o fenômeno vivido através de uma leitura cuidadosa de todas as descrições” (MACHADO, 1994, p. 40). Ou seja, tomando o texto construído da transcrição dos vídeos voltamo-nos para ele com um olhar além do habitual, iniciando a análise. Tal análise, na pesquisa fenomenológica, envolve dois grandes momentos: a Análise Ideográfica e a Análise Nomotética.

Foram transcritos vídeos dos oito encontros com os professores, com a intenção de trazer para a forma escrita o vivido no espaço do curso. Iniciamos a leitura cuidadosa e atenta dos discursos dos sujeitos, buscando o sentido do que no texto se mostrava, sem fazer destaques. Esse momento caracteriza o início da Análise Ideográfica.

A Análise Ideográfica pode ser entendida como um olhar individual para os dados produzidos, no qual o pesquisador busca “acesso ao mundo-vida e ao pensar do sujeito”

(MACHADO, 1994, p. 41). Nesse momento as primeiras leituras são feitas procurando o sentido do que é expresso. De acordo com Bicudo (2011), essas leituras precisam ser atentas, uma vez que as transcrições expõem discursos sobre o fenômeno. A leitura deve ser repetida quantas vezes forem necessárias para que seja possível, ao pesquisador, compreender o sentido do texto.

Após essa leitura inicial, o pesquisador realiza uma nova leitura buscando destacar *unidades de significado* ou trechos dos discursos dos sujeitos que revele, ao pesquisador, aspectos relevantes do interrogado:

> As Unidades de Significado são postas em frases que se relacionam umas com as outras indicando momentos distinguíveis na totalidade do texto da descrição. Elas não estão prontas no texto, mas são articuladas pelo pesquisador (BICUDO, 2011, p. 57).

Isto é, o pesquisador coloca em sua linguagem o que compreende do que é dito pelo sujeito, o que lhe chama a atenção, o que se revela a priori, sempre à luz da interrogação. Em nosso caso destacamos como significativos trechos do diálogo em que se pudesse compreender modos de pensar algébrico desses professores. Para poder apresentar neste texto o movimento interpretativo realizado criamos códigos e organizamos um quadro. Por exemplo, o código Fernanda E1A1, é usado para nos referirmos à fala da professora Fernanda, ocorrida no primeiro encontro do curso durante a realização da primeira tarefa.

Com as *unidades de significados* destacadas do texto e organizadas em um quadro que as exponha, passamos a buscar convergências de ideias que estavam implícitas ou explícitas em cada trecho destacado. Ou seja, mantendo-se fiel aos discursos dos sujeitos e as descrições produzidas, orientando-nos sempre pela interrogação da pesquisa, lançamo-nos a interpretação do que foi dito pelo sujeito que nos permita compreender o que é interrogado. A reescrita do que era dito pelo sujeito trouxemos no quadro com o nome: Asserção Articulada. Essas articulações e interpretações que realizamos nos permitem, à luz do interrogado, expor as *ideias nucleares*, ou seja, o que no discurso dos sujeitos se mantém, revelando aspectos do que nesse discurso são relevantes à interrogação da pesquisa. A seguir exemplificamos, no quadro 1, com um resumo desse movimento de análise e interpretação que descrevemos.

Quadro 2- Do discurso à Ideia Nuclear

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
ENCONTRO 1			
Cuidando do seu rebanho			
Fernanda E1A1	"Podemos pegar as pedrinhas e contar....e depois faz desenhos de riscos na folha, tem que relacionar mesmo"	Ao buscar um modo de controlar o número de animais (riscos, nós, cores), Fernanda afirma que é preciso relacionar uma representação a quantidade de animais.	1. Associa a contagem dos animais com objetos manipuláveis.

Fonte: Autoria própria

Para organizar o movimento de convergência de ideias que foi sendo construído, optamos por numerar as ideias nucleares de modo que, num segundo momento de análise, elas nos auxiliassem a ver o sentido geral do que nos discursos estava sendo expresso. Iniciamos a Análise Nomotética, entendida como "uma reflexão acerca da estrutura do fenômeno e expressa aspectos gerais do percebido – generalidades – permitindo a explicitação do compreendido que se materializa na discussão das categorias de análise" (FERREIRA, 2019, p. 67).

"O termo nomotético deriva-se de *nomos*, que significa uso de leis, portanto, normatividade ou generalidade, assumindo um caráter de princípio ou lei" (MACHADO, 1994, p.42). Nesse movimento da análise o pesquisador busca um modo de interpretação que vai do nível individual para o nível geral, trazendo à tona as relações vividas que se apresentam de modo geral e que lhe permita compreender o interrogado.

"Essas convergências dos aspectos individuais, percebidas nos discursos dos sujeitos, levam o pesquisador às Categorias Abertas, grandes regiões de generalidades que passam a ser interpretadas pelo pesquisador." (PAULO; AMARAL; SANTIAGO, 2010, p. 74). Ou seja, do nível individual ao geral, o pesquisador é guiado pelas interpretações das *unidades de significados* cujas convergências de ideias são destacadas possibilitando as articulações que lhe permite dizer do interrogado. Ou seja, o pesquisador caminha na interpretação de seus dados em busca de *Categorias Abertas*.

A partir de então o pesquisador inicia a discussão do que se revela como característico ou geral no que interroga, procurando evidenciar compreensões. Essas compreensões do pesquisador,

> Determinam quais aspectos das estruturas individuais manifestam uma verdade geral, podendo ser tomadas como afirmações verdadeiras e quais não o podem. As convergências passam a caracterizar a estrutura geral do fenômeno. As divergências indicam percepções individuais resultantes de modos pessoais de reagir mediante agentes externos (MACHADO, 1994, p.42).

Os aspectos gerais percebidos pelo pesquisador não são universalidades sobre o fenômeno investigado, mas são proposições de ordem geral. De acordo com Machado (1994) tais proposições revelam uma perspectiva do fenômeno investigado, ou seja, considerando

> que o fenômeno mostra-se de diferentes perspectivas e para diferentes olhares, as generalidades são articuladas e expressas no movimento interpretativo que é orientado pela interrogação da pesquisa e procura dar visibilidade ao que está sendo interpretado pelo sujeito que vivencia a pesquisa (o pesquisador) junto com os sujeitos (FERREIRA, 2019, p. 67).

À luz da interrogação, a compreensão do fenômeno se dá permitindo ao pesquisador que, diante de uma postura rigorosa, coloque em relevo a estrutura do interrogado tal qual a ele se mostrou.

Na sequência deste texto apresentamos os participantes da pesquisa e as tarefas do curso de extensão.

5. CONHECENDO A PESQUISA: dos participantes às tarefas propostas

5.1 Os participantes

Para a produção de dados da pesquisa realizamos um curso de extensão universitária para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental da Prefeitura Municipal de Guaratinguetá. A escolha desse município deve-se a parceria já existente entre a Universidade e a Secretaria Municipal de Educação para o desenvolvimento de projetos, o que tornou possível o convite aos professores.

O curso intitulado "O X da questão – Pensamento Algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental I" teve como objetivo desenvolver tarefas passíveis de abertura ao diálogo sobre as estruturas e significados de conteúdos matemáticos que comumente eles trabalham em sua sala de aula, como as tabuadas, os padrões e regularidades, o sinal de igualdade, dentre outros.

Entramos em contato com a coordenadora dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental da Secretaria Municipal de Educação do município de Guaratinguetá e lhe apresentamos a proposta do curso e o número de vagas disponíveis. Após análise da proposta e aceite do convite, abrimos as inscrições. Estabelecemos um limite de 30 vagas, em virtude da capacidade do espaço físico onde se deram os encontros. O convite foi feito aos professores da rede municipal pela coordenadora e as inscrições ficaram abertas durante o período de um mês. Tivemos 27 professores inscritos.

O curso teve uma carga horária de 20 horas distribuídas em 8 encontros que aconteciam às quartas-feiras, das 19h às 21h, no segundo semestre de 2019, entre os meses de agosto a novembro. Dos 27 inscritos, 18 participaram efetivamente de todo o curso.

As tarefas desenvolvidas no curso foram elaboradas pela pesquisadora com base em sugestões de documentos oficiais[24] e textos que tratam do tema, cujos autores foram lidos para a revisão de literatura desta tese e foram expostos na seção 2 deste trabalho. Elegemos, para a elaboração e adaptação das tarefas, a BNCC e suas sugestões de trabalho para o ensino de álgebra nos anos inicias do Ensino Fundamental, por se tratar do atual documental de orientação pedagógica. Norteamo-nos pelas propostas do 1º ao 3º ano, cujo foco está no trabalho com a organização e exploração de sequências e na ordenação crescente e decrescente. Em seguida propusemos tarefas que fossem ao encontro das sugestões para o 4º e 5º ano, como foco nas operações aritméticas e do sinal de igualdade. Destacamos, entretanto, que o documento foi um

[24] Os documentos considerados foram os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), as Orientações Curriculares do Estado de São Paulo (São Paulo, 2014), Plano Nacional de Alfabetização na Idade Certa (Brasil, 2014) e Base Nacional Comum Curricular (2017).

disparador para a elaboração e discussão das tarefas, pois, no decorrer do curso, as explorações deram abertura para outros modos de pensar o ensino de álgebra para além do proposto na BNCC.

Não houve número mínimo de tarefas programadas para cada encontro. A dinâmica foi posta pelo envolvimento e a dificuldade dos participantes. Com isso, houve encontros nos quais foi possível realizar mais tarefas e, em outros, menos tarefas.

Os encontros foram gravados em vídeo com a ciência dos participantes (Apêndice A) de modo que fosse possível registrar a expressão deles, relativamente a sua compreensão do pensamento algébrico. Para viabilizar o registro, organizamos os professores em pequenos grupos para fazerem as discussões e, posteriormente, fazíamos uma plenária de exposição coletiva que facilitava a gravação pela pesquisadora. Visando à preservação da identidade de cada um, neste texto usaremos nomes fictícios.

Todos os professores atuavam nos anos iniciais no município de Guaratinguetá/SP, sendo que, alguns deles eram coordenadores em suas respectivas escolas ou atuavam também em outros municípios do interior paulista, também na sala de aula dos primeiros anos do Ensino Fundamental. No quadro a seguir apresentamos nomes dos professores participantes e a(s) turma(s) nas quais eles lecionavam no ano de 2019. Esclarecemos que esses nomes são fictícios, visando preservar a sua identidade[25], conforme acordado com eles.

[25] Os professores participantes do curso assinaram uma carta de cessão de direitos, declarando ciência de estarem participando de uma pesquisa de doutorado. Eles autorizaram o uso dos dados para a pesquisa. No entanto, foi acordado que seus nomes não seriam divulgados no trabalho. A carta de cessão de direitos pode ser consultada no Apêndice A.

Quadro 3 – Professores Participantes

Nome	Turma	Formação
Valter	4º e 5º ano	Pedagogia
Luisa	5º ano	Magistério, Pedagogia e Especialização
Andrea	Coordenadora	Pedagogia
Felix	4º ano	Pedagogia
Mona	4º ano	Pedagogia
Francine	4º ano	Pedagogia
Poliana	1º ano	Pedagogia
Catarina	5º ano	Pedagogia
Fernanda	4º ano	Pedagogia
Cristiana	4º ano	Pedagogia
Ruth	Coordenadora	Magistério e Pedagogia
Bianca	4º ano	Pedagogia e Especialização
Maria	4º ano	Magistério e Pedagogia
Wiliam	4º ano	Pedagogia
Ina	4º ano	Magistério e Pedagogia
Mari	5º ano	Pedagogia
Carla	2º ano	Pedagogia
Alex	5º ano	Pedagogia

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

5.2 Os encontros presenciais

Conforme destacado, cada encontro teve uma proposta envolvendo um tema matemático dos anos iniciais como tabuadas, padrões e regularidades, o sinal de igualdade, dentre outros. Embora houvesse um planejamento em termos de conteúdo previsto para cada encontro, a dinâmica das discussões permitia que, a cada encontro, os conteúdos fossem revisitados. Como nossa intenção era conhecer o modo pelo qual o professor expressava sua compreensão sobre o pensar algébrico, em todos os encontros dividimos os participantes em pequenos grupos de 4 a 5 pessoas para que houvesse uma discussão e exposição de opiniões.

Os encontros eram iniciados com a apresentação do tema proposto pela pesquisadora (sem aprofundamento). Em seguida, os participantes se organizavam em pequenos grupos (a sua escolha) e era-lhes apresentada a proposta da primeira tarefa. Em cada encontro foi reservado um momento para que a resolução das tarefas nos pequenos grupos fosse discutida, bem como para expor, no coletivo, essas discussões.

Para a gravação, a pesquisadora contou com o apoio de dois estudantes, um de graduação e outro de pós-graduação, que auxiliavam na filmagem nos pequenos grupos. A pesquisadora não participava das discussões com os professores nos pequenos grupos, indo eles somente se fosse solicitada sua presença.

Na discussão coletiva a intenção era estabelecer o diálogo entre os professores e entre eles e a pesquisadora, debater os conteúdos das tarefas, expressar os modos de compreendê-las e realiza-las.

Os professores comentavam, também, a possibilidade (ou não) dessas tarefas serem feitas em sala de aula, com seus alunos. Esses momentos coletivos também foram gravados e considerados na transcrição. Para expor o que, de modo geral, foi proposto ao grupo de professores apresentamos as tarefas.

A principal característica das tarefas propostas, como citado na seção 3, foi sua natureza exploratória (PONTE, QUARESMA, BRANCO, 2012). Para esses autores, o que distingue as essas da dos problemas matemáticos, é a explicitação do que é dado e o que é pedido, ou seja, há um elemento de indefinição ou de abertura que requer uma atenção especial à sua formulação, enquanto nos problemas os dados se apresentam de maneira explícita. Entretanto, há espaços de exploração em problemas matemáticos clássicos, caso seja possível levantar hipóteses, particularizar as condições dadas ou formular conjeturas acerca da solução, analisando as consequências dos caminhos escolhidos (PONTE; QUARESMA; BRANCO, 2012).

Conforme salientam esses autores,

> a característica distintiva [da tarefas de exploração é a] de requererem sempre um trabalho atento de interpretação da situação, a precisar ou reformular as questões a investigar e a construir representações apropriadas. Mais do que um contexto para aplicar conceitos já aprendidos, estas tarefas servem principalmente para promover o desenvolvimento de novos conceitos e para aprender novas representações e procedimentos matemáticos (PONTE; QUARESMA; BRANCO, 2012, p. 2).

Os autores ainda destacam que as explorações têm muito de modelação – permitem criar representações que sirvam de base para um modelo matemático da situação - além de serem "situações que permitem um fácil envolvimento da generalidade dos alunos" (PONTE; QUARESMA; PONTE, 2012, p. 3).

Na sequência deste texto descrevemos os encontros e apresentamos as tarefas propostas.

Sua formulação foi orientada pela proposta da BNCC e inspiradas nos autores lidos.

5.2.1. Encontro 1: “Matematiquês: números, símbolos e representações”

No primeiro encontro apresentamos a dinâmica do curso, o cronograma e objetivos. Para iniciar o trabalho foram realizadas quatro tarefas - “Cuidando de seu rebanho”, “O comércio do Sr. Durval”, “O problema do funcionário Roberval” e “As fitas de Analu”.

O objetivo neste encontro era discutir os modos de expressar os conceitos matemáticos, não para enfatizar que há um único modo de expressão, mas para salientar que há diversas formas de dizer sobre o que se faz e como se faz. De acordo com a BNCC, um dos objetivos da unidade temática Álgebra é o desenvolvimento do pensamento algébrico, o que dá importância à compreensão dos diferentes modos de os alunos expressarem quantidades e as relações estabelecidas entre elas.

A tarefa “Cuidando de seu rebanho” visava desencadear uma discussão sobre a necessidade e importância da criação dos números, dando destaque ao controle da quantificação. Sobre esse tema, a BNCC destaca a relevância de desenvolver habilidades de quantificar atributos de objetos, julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. Essas habilidades contribuem para a construção da noção de número e podem ser exploradas por meio de situações que envolvam as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, fundamentais ao pensamento matemático. Tais situações devem, gradativamente, ir ampliando os campos numéricos, enfatizando formas de registros, usos, significados e operações.

Apresentamos aos professores uma situação em que deveriam controlar a quantidade de ovelhas de um determinado rebanho. Entretanto, para esse controle eles não poderiam usar os símbolos numéricos conhecidos. O objetivo da tarefa era favorecer uma discussão da ideia de número como quantidade e seus modos de expressão.

O “Comércio do Sr. Durval”, outra tarefa proposta no primeiro encontro, envolvia uma situação de registro de entrada e saída de produtos de um comércio.

Figura 23 – Comércio do Sr. Durval

Hoje, às seis horas do dia treze de outubro de dois mil e dezoito, sob as graças do senhor, iniciei o meu negócio com sessenta quilos de arroz em saca; às oito horas da manhã vendi trinta e oito quilos de arroz ao senhor Petrúcio; logo após esta transação adentra em meu estabelecimento a senhora Lurdes a quem vendo exatamente vinte quilos deste arroz. Após algum tempo faço outra venda que é ao senhor Castor que compra três quilos de arroz.

Fonte: Adaptada pela pesquisadora [26]

Após a apresentação da situação, fizemos alguns questionamentos aos grupos:

- *O que vocês acharam do registro do Sr. Durval?*
- *O que pode acontecer se chegarem 5 clientes ao mesmo tempo, querendo comprar produtos diferentes?*
- *Como ele pode controlar o seu caixa no final do dia?*
- *Há outras possibilidades de registro?*

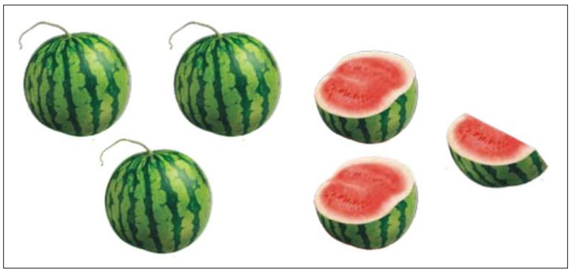
A tarefa na qual nos inspiramos para fazer esta adaptação, tinha como objetivo mostrar explorar a álgebra retórica, considerando o período do renascimento na Europa. Com o desenvolvimento do trabalho humano os movimentos quantitativos que se precisava administrar se tornaram mais intensos. As trocas comerciais aumentaram, de tal modo que expressá-las em palavras se tornou algo inviável (MOURA; SOUSA, 2004).

A adaptação deu-se em função de nosso objetivo, pois não tínhamos a intenção de tratar o contexto histórico da álgebra, mas propiciar um espaço de debate sobre modos de expressar os números (por extenso ou através de símbolos), discutindo sua diferença.

A tarefa "O problema do funcionário Roberval", foi proposta para discutir formas de notação ou escrita de um número. A BNCC destaca a importância de os alunos terem contato com diferentes contextos numéricos o que pode ser feito mediante a variação das tarefas propostas. Nessas tarefas "os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária" (BRASIL, 2017, p. 269). Isso foi proposto considerando-se a quantidade de melancias que havia na banca em que Roberval trabalhava.

[26] Inspirado na proposta de Moura e Sousa (2004)

Figura 24 – O problema do funcionário Roberval



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Nesta tarefa os participantes deveriam ajudar Roberval a responder à pergunta de seu chefe: *"Quantas melancias há na banca?"*.

A última tarefa desse primeiro encontro foi "As fitas de Analu", que também propunha explorar as diferentes formas de expressar quantidades (desenho, escrita, símbolos, etc).

Figura 25 – Fitas de Analu

Analu é uma menina apaixonada por fitas, ela possui uma coleção com várias, de diferentes tamanhos, cores, texturas e modelos que usa para decorar cadernos, almofadas entre outros objetos. Ela ganhou da avó um rolo de fita vermelha e decidiu usar metade da fita para construir um estojo. Do que sobrou ela cortou em duas partes iguais para decorar um caderno e uma almofada.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Após a apresentação da situação, fizemos alguns questionamentos aos grupos:

- *Qual a parte da fita que Analu usou para construir o estojo*[27]*?*
- *E para decorar o caderno e a almofada?*
- *Como podemos expressar essas quantidades? Há outros modos?*

5.2.2 Encontro 2: "Igual a quê? Significados do sinal de igualdade"

No segundo encontro trabalhamos com os diferentes significados do sinal de igualdade. De acordo com a BNCC, discussões sobre o sinal de igualdade podem ser iniciadas, por exemplo, com tarefas nas quais os alunos analisem sentenças como: se 2 + 3 = 5 e 5 = 4 + 1,

[27] A construção do estojo com fitas se dá pela união, através da costura, de suas extremidades, consideradas na horizontal.

então 2 + 3 = 4 + 1. Esse tipo de tarefas, conforme o documento, pode contribuir para “a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita” (BRASIL, 2017, p. 270) e, a partir do 3º ano do Ensino Fundamental, devem-se propor situações em que essa variedade de significados possa ser explorada.

Para situar nossa proposta, iniciamos apresentando aos professores uma pesquisa realizada com alunos de idade entre 6 e 12 anos (FALKNER; LEVI; CARPENTER, 1999). A tarefa requeria que esses alunos colocassem, no espaço em branco da sentença matemática apresentada, o número faltante:

Figura 26 – Sentença matemática

$$\boxed{8 + 4 = \_\_\_\_ + 5}$$

Fonte: Falkner, Levi e Carpenter (1999)

Apresentamos aos professores as respostas dos alunos trazida na pesquisa.

Figura 27 – Respostas dos alunos

Percent of children offering various solutions to 8 + 4 = □ + 5

Grade	Answers Given					Number of Children
	7	12	17	12 and 17	Other	
1	0	79	7	0	14	42
1 and 2	6	54	20	0	20	84
2	6	55	10	14	15	174
3	10	60	20	5	5	208
4	7	9	44	30	11	57
5	7	48	45	0	0	42
6	0	84	14	2	0	145

Fonte: Falkner, Levi e Carpenter (1999)

Solicitamos que eles analisassem as diferentes respostas e, em seguida, propusemos a tarefa “É tudo a mesma coisa?”, em que eles deveriam observar as afirmações escritas na linguagem corrente e reescrevê-las de outra forma, usando o sinal de igualdade.

- *O resultado de 45 multiplicado por 3 é 135.*
- *A divisão de 121 por 11 resulta em quociente 11.*
- *A cantina do Sr. Juvenal é conhecida pelos deliciosos pratos italianos. O mais famoso é o espaguete ao molho bolonhesa. A massa é vendida em porção individual no valor de R$ 36,00. Quanto pagará uma família de quatro pessoas, que quiser comer, cada uma, um espaguete ao molho bolonhesa?*

- *Os irmãos Pedro e Bino estão brincando no mercadinho da mãe, Dona Marlene. No estabelecimento há uma balança de dois pratos, uma herança da família que não é muito utilizada por Marlene. Os irmãos curiosos começaram a colocar objetos em cada prato para ver o que acontecia. Num determinado momento, Pedro colocou 2 pacotes de 5 quilos de arroz num prato e Bino 5 pacotes de 2 quilos de açúcar no outro prato. Perceberam que os dois pratos ficaram na mesma altura.*
- *Poliana e João colecionam figurinhas de um álbum. Eles iniciaram a coleção recentemente, e decidiram comparar a quantidade de figurinhas que cada um possuía. Poliana disse que tinha 16 figurinhas ao todo, e João disse que tinha 5 na primeira página, 6 na terceira página e 5 na última página.*

Solicitamos que os professores realizassem essa tarefa individualmente, para terem um momento particular de interpretação do proposto. Em seguida, abriu-se à discussão nos pequenos grupos e, depois, a exposição geral das estratégias utilizadas. O objetivo era analisar se em todas as situações o sinal de igualdade possuía o mesmo significado.

5.2.3 Encontro 3: “Descobrindo segredos: explorando as propriedades numéricas”

O terceiro encontro teve como objetivo trabalhar com as propriedades numéricas. Autores como Canavarro (2007), Mestre e Oliveira (2011) e Cavalcante, Freitas e Rodrigues (2014) ou mesmo a BNCC, dizem que, nos anos iniciais, tarefas que explorem o sentido numérico e as operações são relevantes para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Isso porque elas possibilitam que os alunos compreendam os “diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados” (BRASIL, 2017, p. 268). As propostas podem envolver, por exemplo, a exploração e observação das operações matemáticas, buscando compreendê-las e relacioná-las.

Considerando essa argumentação elaboramos as situações do segundo encontro do curso. Iniciamos com a tarefa, “Verdadeiro ou falso”, que visava explorar algumas propriedades da adição e multiplicação. Cada participante recebeu uma folha com a seguinte imagem:

Figura 28 – Tarefa "Verdadeiro ou Falso"

	V	F	Justificativa
24 + 37 = 37 + 24			
46 + 27 – 27 = 27			
◊ x 1 = ◊			
□ + 0 = □			

Fonte: Mestre e Oliveira (2011)

Nela, o professor deveria julgar se era verdadeira ou falsa a sentença e apresentar uma justificativa. Como no encontro anterior, houve a discussão nos pequenos grupos, seguida do diálogo e exposição geral. À medida que eram apresentadas as justificativas, fomos discutindo as propriedades de cada uma das sentenças, nomeando-as e considerando as possibilidades de elas serem tratadas na sala de aula dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A tarefa seguinte foi "Explorando a tabuada". Nela o objetivo era estudar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Para isso propusemos, começamos analisando a tabuada do 3. Tomamos duas linhas da tabela dessa tabuada, a segunda (2 x 3 = 6) e a quinta linha (5 x 3 = 15) e solicitamos aos participantes que somassem o primeiro fator de cada uma das multiplicações, isto é, 2 + 5, obtendo 7. Eles deveriam, também, somar os produtos das respectivas linhas: 2 x 3 e 5 x 3, obtendo 21. Após esse procedimento, encaminhamos uma discussão para que os professores analisassem se havia alguma relação entre os valores encontrados. O objetivo era identificar que o feito resultava na sétima linha da tabuada, isto é, 7 x 3 = 21. Após a discussão inicial, nomeamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e exploramos sua validade em outras tabuadas.

5.2.4 Encontro 4: "Desvendando Mistérios: Sequências e Padrões"

No quarto encontro exploramos sequências e padrões. Na BNCC, esses temas são tratados na unidade temática Álgebra. Destaca-se que, para o desenvolvimento do pensamento algébrico, "é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas" (BRASIL, 20017, p. 270). A proposta é que as habilidades relativas a esse tema sejam desenvolvidas ao longo de todos os anos do ensino fundamental.

Autores como Canavarro (2007), Ponte, Branco e Matos (2009), Santos, Luvison e Moreira (2018) e Luna, Souza e Lima (2018), nos inspiram na construção de tarefas para essa temática. Iniciamos com a tarefa "Qual é o próximo?". Os professores foram organizados em dois grupos: um deles ficou fora da sala enquanto a pesquisadora formava uma sequência com os participantes do outro grupo que haviam ficado. Ao retornar para a sala, o grupo que estava fora deveria observar o padrão da sequência e dar-lhe continuidade.

Num segundo momento, ainda divididos em dois grupos (um fora da sala), os participantes que estavam na sala montaram uma sequência, na qual a distância entre os elementos (integrante da sequência) caracterizava posições "em branco" (elementos faltantes). A proposta era que o grupo que estava fora da sala identificasse os elementos ausentes e se posicionasse para completar a sequência.

Após a dinâmica, abrimos para a discussão coletiva onde as estratégias foram expostas e discutimos o conceito de sequência e suas características.

A segunda tarefa do encontro, "Lápis e borracha", apresentava a seguinte situação aos professores:

Figura 29 – Tarefa "Lápis e Borracha"

Enquanto a turma da professora Linda estava na aula de Educação Física, ela organizava o material da turma, em especial, lápis e borrachas. Ela iniciou organizando da forma como apresentamos a seguir:

Ela precisou sair da sala de aula por um momento e quando voltou faltavam arrumar mais 5 itens. Você consegue ajudar a professora Linda a terminar de organizar o material?

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

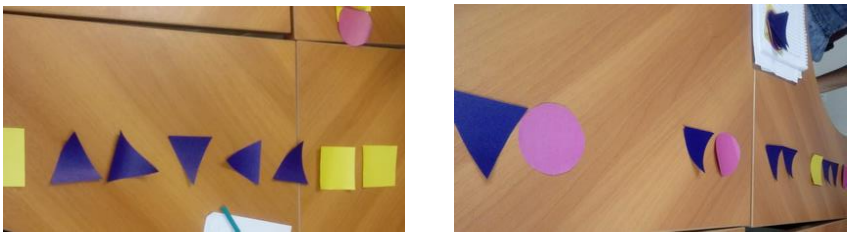
Foram feitos alguns questionamentos aos professores:

- *Qual a quantidade de lápis e borrachas que faltavam ser organizados?*
- *Como ficaria a organização final dos materiais?*
- *A professora Linda usou alguma estratégia para organizar o material?*
- *Há alguma relação entre a posição dos materiais e o tipo de material?*

O objetivo foi discutir e explorar as regularidades em sequências repetitivas, identificando a unidade repetitiva (motivo) e as relações entre os elementos e sua posição. Esse tipo de sequência permite discutir o sentido de padrão ou motivo em uma sequência e estabelecer uma relação entre o elemento e sua posição na sequência. Nesta sequência em particular, como o motivo era formado por dois elementos, o conceito de número par e ímpar pôde ser resgatado. Ou seja, se a posição na sequência fosse um número par, saberíamos que ela era ocupada pela borracha.

A última tarefa do encontro, “Construindo Segredos”, propunha que os participantes criassem sequências repetitivas usando figuras geométricas. O objetivo era, além de explorar um pouco mais esse tipo de sequência, resgatar a classificação de figuras geométricas.

Figura 30 – Tarefa “Construindo Segredos”



Fonte: Arquivo da pesquisadora

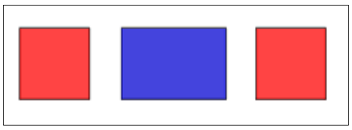
Após criarem as sequências nos pequenos grupos, os professores compartilharam com todos o que haviam feito discutindo o padrão da sequência, possibilidades para continuá-las, as relações entre posição e elementos e outros aspectos que foram surgindo no diálogo.

5.2.5 Encontro 5: “Desvendando Mistérios: Sequências e Padrões Parte II”

No quinto encontro continuamos as discussões sobre sequências e padrões. A BNCC propõe que, para o desenvolvimento do pensamento algébrico, haja uma articulação entre a unidade temática Álgebra e Números. Uma das sugestões de trabalho é a discussão sobre sequências. Destacam a relevância de fazer explorações “com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação” (BRASIL, 1997, p. 270). Ainda, considerando o trabalho dos autores lidos, elaboramos mais algumas tarefas com sequências.

Iniciamos o 5º encontro com a tarefa “Como continuar?”.

Figura 31 – Tarefa “Como continuar?”



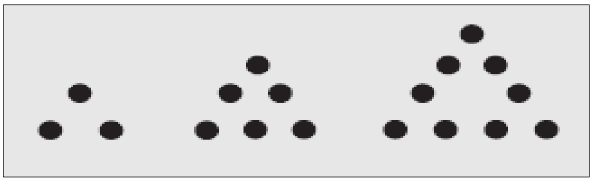
Fonte: Elaborado pela pesquisadora

O objetivo era discutir com os participantes, por meio de algumas questões, modos de continuar essa sequência.

> • *Há modos distintos de continuar a sequência? Por quê?*
> • *Em cada possibilidade, qual a unidade que se repete?*
> • *Se eu acrescentar mais uma figura no modelo dado, como posso continuar a sequência?*

O trabalho seguiu-se nos pequenos grupos para, em seguida, abrimos a discussão coletiva. Continuando com o tema, após a discussão, propusemos a tarefa “Quantas bolinhas tem os triângulos?”, para explorar sequências recursivas. A figura 26 ilustra essa proposta.

Figura 32 – Tarefa “Quantas bolinhas tem os triângulos?”



Fonte: Canavarro (2007)

Apresentamos e discutimos com os professores as sequências recursivas. Perguntamos como seria possível descobrir a quantidade de bolinhas em triângulos de posições mais distantes e se era possível estabelecer uma relação entre a quantidade de bolinhas do triângulo e sua posição na sequência. Destacamos que, na tarefa original (CANAVARRO, 2007), não era requerida essa relação com a posição, uma possibilidade que consideramos razoável fazer com os professores, em decorrência das discussões anteriores.

A última tarefa do encontro foi “Quantas sequências?”, cuja proposta era que os grupos criassem uma sequência numérica a partir de um quadro com número de 1 a 100, como ilustra a imagem a seguir. O critério da sequência poderia ser escolhido pelo grupo. Poderia ser criada, por exemplo, uma sequência com números múltiplos de 2: 2,4,6,8,10.

Figura 33 – Tarefa “Quantas sequências?”

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

O objetivo da tarefa foi, a partir das sequências numéricas criadas, analisar a sua regra de formação.

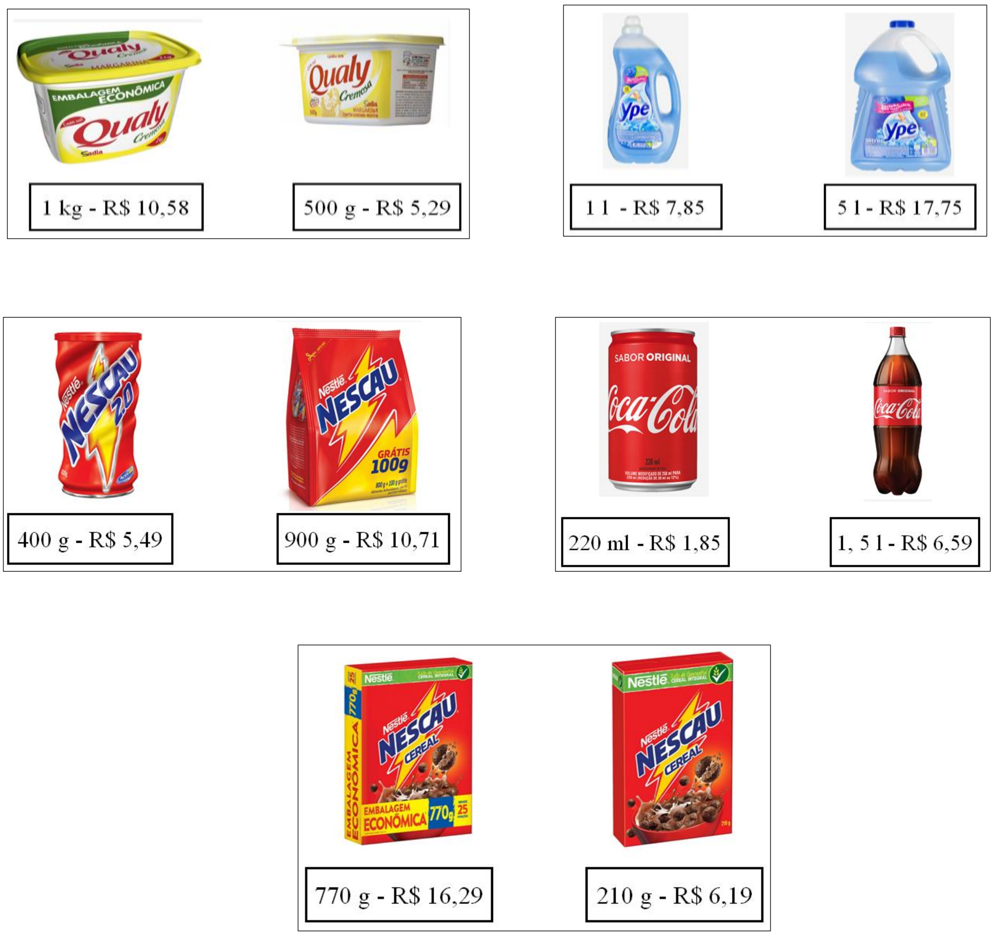
5.2.6 Encontro 6: “Vamos pensar diferente? Explorando a proporcionalidade”

A BNCC considera que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que permitem fazer conexões entre tais campos. Dentre os temas, citam equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Para o sexto encontro elegemos o tema proporcionalidade que, conforme esse documento, deve permear os estudos das,

> operações com números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas, etc. (BRASIL, 2017, p. 268).

A proporcionalidade é uma das ideias matemáticas fundamentais da unidade temática Álgebra. A partir do 4º ano do Ensino Fundamental já há destaque para habilidades envolvendo o tema. Para explorar a ideia de proporcionalidade, elaboramos a tarefa intitulada “Vamos ao supermercado?”. Para realizá-la, cada pequeno grupo recebeu uma folha com um tipo de produto que é vendido em embalagens com pesos diferentes.

Figura 34 – Tarefa “Vamos ao supermercado?”



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

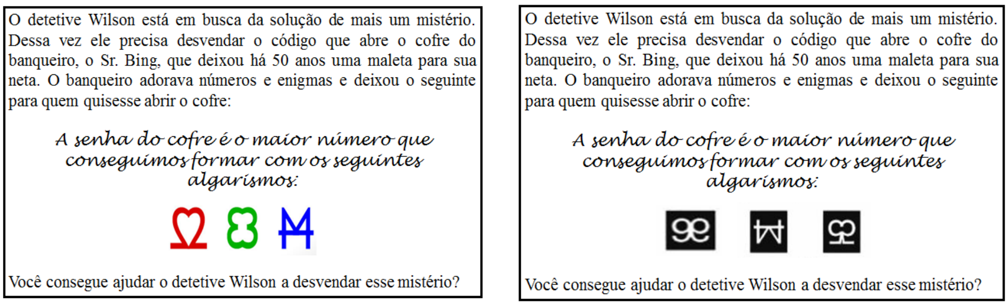
A proposta era que os professores discutissem, nos pequenos grupos, qual das embalagens era uma compra “mais vantajosa”. Importante destacar que o termo “mais vantajosa” diz respeito, no curso desenvolvido, apenas às questões numéricas, ou seja, a embalagem “mais vantajosa” era aquela que apresentava a mesma quantidade de produto pelo menor preço. Pedimos que eles explicitassem o modo de justificar a escolha. Após a discussão nos pequenos grupos, houve a discussão coletiva.

5.2.7 Encontro 7: “Dobrar, recortar e desenhar: explorando as características da simetria de reflexão e translação”

No sétimo encontro discutimos características sobre algumas transformações geométricas, como a simetria de reflexão e translação. O objetivo das tarefas de simetria era explorar a ideia de regularidade de uma outra perspectiva: a presente em figuras simétricas. De acordo com a BNCC “o estudo das simetrias deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de softwares de geometria dinâmica” (BRASIL, 2017, p. 272).

No decorrer da tarefa discutimos as características que se mantinham nas figuras simétricas, observando seus padrões, como propõem Girardi e Giongo (2013) e Lopes e Silva (2015). Iniciamos as discussões com a tarefa “Brincando de detetive”, cujo objetivo era observar característica da simetria de reflexão. Propusemos duas situações aos professores:

Figura 35 - Tarefa “Brincando de detetive”

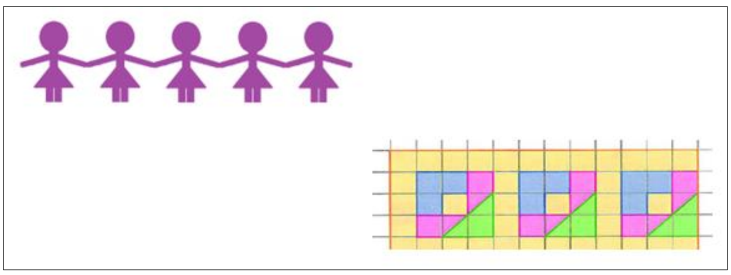


Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Pedimos que eles analisassem as características que se mantinham nas figuras - essas formas que compõem o segredo - destacando a simetria de reflexão. Após as discussões no pequeno grupo, exploramos essas características com todos os participantes, apresentando a definição de simetria de reflexão e discutindo suas propriedades.

Na segunda tarefa do encontro, intitulada “Faixas Decorativas”, cada participante recebeu um papel quadriculado para criar faixas decorativas. Apresentamos alguns exemplos para inspiração, mas sem discutir as características.

Figura 36 – Tarefa “Faixas Decorativas”

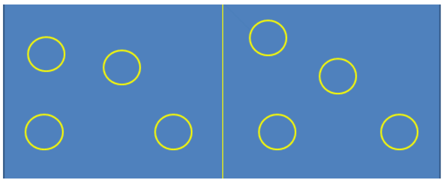


Fonte: Ochi et al. (2006)

Durante o desenvolvimento da tarefa, os participantes discutiram entre si como criar as faixas. Após a conclusão da tarefa, discutimos a estrutura das faixas decorativas, destacando a direção do deslocamento e o comprimento da translação, apresentamos a definição de simetria de translação e discutindo as propriedades.

A última tarefa do encontro foi o jogo "Campo Minado", para trabalhar as propriedades da simetria de reflexão. Cada dupla recebeu uma folha de sulfite que deveria dobra ao meio no sentido horizontal, marcando a dobra – eixo de simetria. A folha seria dividia em duas partes formando dois "campos", um para cada jogador. Cada jogador deveria desenhar em seu campo de 4 a 6 círculos. A imagem a seguir ilustra uma possibilidade.

Figura 37 – Tarefa "Campo Minado"



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Cada jogador, na sua vez, marca um X em seu campo. Em seguida, dobra a folha na marca - eixo de simetria - e reforça o traçado do X feito para marcá-lo no campo do adversário. Se a marca atingir um círculo do adversário, o jogador marca um ponto. Ganha aquele que atingir primeiro todos os círculos do adversário.

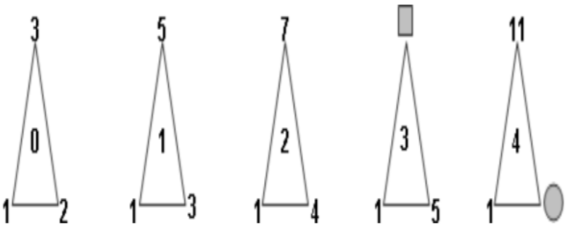
5.2.8 Encontro 8: "Vamos brincar e conversar? Compartilhando as experiências em (e fora da) da sala de aula"

O último encontro foi organizado em dois momentos. No primeiro momento, cada um dos professores pôde expor as tarefas do curso que havia feito com seus alunos (pois, ao longo dos encontros, eles comentavam que estavam desenvolvendo algumas das tarefas em sala). Eles apresentaram as tarefas realizadas e comentaram o envolvimento da turma, as dificuldades percebidas e opiniões sobre modos de trabalhar com a álgebra em sala de aula.

No segundo momento, realizamos algumas tarefas dispostas nas estações. Essa estratégia das "estações" permite que se organize a sala em grupos (com mesas ou carteiras – denominadas 'estação') e, em cada uma delas, há uma tarefa a ser resolvida. Não há ordem entre as estações, podendo-se escolher por qual delas deseja-se começar. Os professores foram organizados em grupos 4 a 5 pessoas. Cada grupo escolheu uma estação para começar e, após determinado tempo - estipulado pela pesquisadora – os grupos trocavam de estação. Todos os grupos deveriam passar por todas as estações. A cada estação o grupo registrava sua resposta em um papel e guardava. No final discutimos as estratégias de resolução de cada grupo para cada uma das tarefas.

A primeira estação tinha a tarefa "O encaixe perfeito": uma sequência de triângulo com alguns números escritos. O objetivo era determinar o número a ser preenchido nos espaços em branco indicados na figura, considerando a regularidade observada na sequência.

Figura 38 – Tarefa "O encaixe perfeito"



Fonte: Ponte, Brancos e Matos (2009)

A tarefa "Escrevendo Números" retomava a composição numérica e o sinal de igualdade, discutido no primeiro e segundo encontro. O objetivo era formar sentenças matemáticas usando o sinal de igualdade.

Figura 39 – Tarefa "Escrevendo Números"

Usando apenas os algarismos a seguir (sem formar outros números), escreva o maior número de sentenças matemáticas usando o sinal de igualdade:

2 – 2 – 3 – 3 – 4 – 4 - 9

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Em outra estação era proposta a tarefa "Lados do retângulo" que requeria investigar as dimensões de um retângulo de área 24 unidades, modo que seu perímetro fosse o maior possível. O objetivo, neste caso, era explorar os fatos fundamentais da multiplicação cujo produto é 24.

Figura 40 – Tarefa “Lados do retângulo”

Um retângulo tem área igual a 24 unidades. Quais as dimensões do retângulo de modo que o perímetro seja o maior possível?

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

A tarefa “Meninas e Meninos” propõe uma situação problema envolvendo um grupo de músicos em um concerto. A intenção foi retomar as discussões sobre sequências repetitivas discutidas no quarto encontro e determinar o número de meninas e meninos do grupo, sabendo a disposição deles ao final da apresentação e a quantidade total de músicos.

Figura 41 – Tarefa “Meninas e Meninos”

Um dia fui ver um concerto e no final os músicos, que eram os senhores que estavam a tocar e a cantar, levantaram-se e deram as mãos para agradecer ao público os aplausos. A esse grupo musical pertenciam meninos e meninas, e eram ao todo 15. No momento dos agradecimentos os músicos para não estarem todos desorganizados decidiram dar as mãos da seguinte maneira: dois meninos e uma menina. Qual o número de meninas e meninos que pertenciam ao grupo?

Fonte: Alves (2015)

A última estação apresentava a tarefa “Quantos telefonemas?”. Nela os participantes precisavam analisar uma situação problema e determinar o número de telefonemas que foram feitos. O objetivo foi retomar as discussões sobre as formas de registro, do primeiro encontro,

Figura 42 – Tarefa “Quantos telefonemas”

Cinco alunos ganharam um concurso. Quando souberam da notícia, telefonaram uns aos outros e felicitarem-se. Descobre quantas chamadas tiveram que fazer os cinco amigos para se felicitarem todos entre si?

Fonte: Canavarro (2007)

Terminado o curso, iniciamos a transcrição dos vídeos para ser possível descrever a experiência vivida com os professores. O texto dessa descrição expõe o diálogo com os professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e, ao proceder a analise, pode-se compreender *o que se revela acerca do pensamento algébrico*.

6 DISCUSSÃO DOS DADOS

6. 1 O movimento da análise fenomenológica

Conforme explicitado na seção quatro, a análise ideográfica visa expor aspectos individuais, ou seja, nos voltamos para as falas de cada um dos professores atentos ao que era relevante à compreensão do fenômeno. Para cada encontro construímos um quadro de análise ideográfica no qual são destacadas as tarefas que trazem falas significativas à compreensão do interrogado. Antes de cada quadro, trazemos diálogos do encontro que dá origem aquele quadro, na intenção de auxiliar a compreensão do leitor. Os quadros de análise ideográfica estão construídos com 4 colunas. Na primeira há o nome do professor (fictício) e um código identificativo da Unidade de Significado (U.S.) - recorte da fala do sujeito. Por exemplo, Luisa E1A3, indica o destaque feito na fala da professora Luisa no primeiro encontro (E1) e na terceira tarefa (A3), daquele encontro.

Na segunda coluna há a transcrição da fala do participante, como foi dita por ele. Na terceira coluna trazemos uma articulação dessa fala, segundo a compreensão da pesquisadora (asserção articulada). A última coluna foi construída posteriormente. Nela se expõe as “ideias nucleares” que, segundo a interpretação da pesquisadora, o núcleo da fala do sujeito de pesquisa.

Destacamos que, como em um mesmo encontro foram desenvolvidas várias tarefas, consideramos importante inserir algumas linhas com o título da tarefa a que os diálogos seguintes se referem. Entendemos que isso também pode vir a contribuir para que o leitor entenda o contexto ao qual se referem as unidades de significados.

1º Encontro

Discussão da tarefa “Cuidando do seu rebanho”

Pesquisadora: “Pensem, vocês tem que cuidar do seu rebanho, mas como é que você vai controlar a quantidade que sai e volta?”

Mona: “Faz marquinhas”

Professores ficam pensativos, colocam a mão no rosto...

Valter: “É o mesmo princípio do número”

Carla: [fica pensativa e gesticula com movimento de vai e volta] “podemos pegar as pedrinhas e contar....”

Fernanda: “Tem que relacionar mesmo”

Andrea: [gesticula com as mãos] “Tira quando elas saem e volta quando eles chegam”

Pesquisadora: “Deu pra pensar um pouquinho? Como podemos controlar se a mesma quantidade que saiu voltou? Que ninguém se perdeu ou fugiu? Como vocês fariam?”

Alguém fala: “Acho que todo mundo teve a mesma ideia né?”

Maria: “A gente pensou em risquinho, porque carregar pedra ninguém merece [risos]”

Cristiana: “Riscar”

Ruth: “Nós em corda de cipó”

Catarina: “Eu imaginei as sementes como números”

Discussão da tarefa “Comércio do senhor Durval”

Andrea: “Tem números com horas, tem vários símbolos”

Luisa: “É diferente, mas é mais difícil”

Pesquisadora: “Por que é mais difícil?”

Valter: “Por que geralmente você lê e você interpreta, depois você só vai olhando os números e fazendo......”

Pesquisadora: “Eu consigo representar essa situação de outra forma?”

Cristina fica pensativa e gesticula de modo afirmativo com a cabeça

Valter: “Com os algarismos”

Ruth: “Usando uma expressão”

Maria: “Desenho”

Pesquisadora: “O que mais a gente pode pensar....O que vocês acharam do registro do Sr Durval?”

Cristiana: “Ele não sabe fazer livro caixa”

Luisa: “Ele tá fazendo tipo um diário”

Ruth: “Mas ele só vende arroz? É mais fácil se ele tem só arroz”

Pesquisadora: “E a última questão: Como ele pode controlar o caixa no final do dia”

Valter: “Aí...[expressa-se de modo duvidoso]”

Mona: “Vai ter que repor as anotações”

Fátima: “Dá pra montar uma expressão, uma expressão numérica”

Francine: “Pra você poder entender”

Discussão da tarefa “O problema do funcionário Roberval”

Catarina: “Mas tem que saber que as duas metades ali é um”

Ruth gesticula com as duas mãos, “fechando-as” como unindo as duas metades da melancia

Cristiana fala: “Três inteiros e algumas partinhas” [risos]

Andrea: “Eu fui pensando nas frações que representam os desenhos”

Mona: “Quatro melancias mais um quarto”
Fernanda: “Três inteiros, duas metades e um quarto”
Valter: “Eu fiz aqui e deu dezessete quartos”
Catarina: “É né, se fosse dividir, dava dezessete”
Valter: “É, fazer o MMC”
Pesquisadora: “O que vocês acham que o Roberval ia fazer”
Francine: “Vamos partir tudo”
Andrea: “Segundo o Valter vamos partir tudo”
Pesquisadora: “Você tá na feira, e o chefe pede pra falar, como ele ia fazer”
Cristiana: “Duas inteiras, duas metades e uma metade da metade”
Valter: “Eu marquei quatro inteiros e um quarto”
Andrea: “Eu li e já fui fazendo representação, desenho”
Pesquisadora: “E se eu tô pensando em pedaços, qual seria o tamanho do meu pedaço? Quem fez dezessete quartos, como fez?”
Valter: “Eu fui somando, três inteiros, mais metade, mais metade, mais um quarto e o mmc deu quatro, fui fazendo, multiplicando e dividindo deu dezessete”

Discussão da tarefa “As fitas de Analu”

Cristiana pega uma folha de sulfite e usa como se fosse toda a fita. Dobra ao meio. Logo depois Cristiana fala: “Essa [uma das metades] ele fez o estojo, isso [outra metade] ela dobrou de novo”
Cristiana: [dobrando a folha]: “Pode ser duas partes iguais assim [horizontal] ou assim [vertical]”
Cristiana: “Duas partes iguais!”

Andrea: “Ah...partes iguais”

Pesquisadora: “Qual a parte da fita que Analu usou para fazer o estojo?”

Silêncio

Valter: “Um quarto”

Mona: “Metade da metade”

Ruth: “Não, para o estojo foi a metade”

Pesquisadora: “Como eu posso pensar essa metade?”

Francine: “Posso usar fração”

Pesquisadora: “E pro caderno e pra almofada?”

Valter e Bianca: “Um quarto pra cada”

Quadro 4 - Análise Ideográfica do 1º encontro

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
ENCONTRO 1			
Cuidando do seu rebanho			
Fernanda E1A1	“Podemos pegar as pedrinhas e contar....e depois faz desenhos de riscos na folha, tem que relacionar mesmo”	Ao buscar um modo de controlar o número de animais (riscos, nós, cores), Fernanda afirma que é preciso relacionar uma representação a quantidade de animais.	1. Estratégia para realizar contagem.
Ruth E1A1	“Eu imaginei as sementes como números”	Ruth busca associar o número de animais a objetos que pode manipular.	2. Estratégia para realizar contagem.
O comércio do senhor Durval			
Andrea E1A2	“Tem que olhar ...Tem número com horas, tem vários símbolos”	Andrea retoma o problema proposto destacando que o mesmo tipo de registro (número por extenso) é colocado em diferentes contextos (ora como hora, ora como peso, etc) e a importância	3. Aponta a importância de compreender os significados dos números em contextos diferentes.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
		de analisá-los para dar uma resposta.	
Valter E1A2	"É mais difícil na matemática [números escritos por extenso] /.../ geralmente você lê e você interpreta, depois você só vai olhando os números e fazendo, porque não interessa para quem ele vendeu"	Valter destaca que a solução de um problema inicia-se com a leitura e interpretação dos dados.	4. Aponta a importância da leitura para compreender o que é para ser feito.
Fernanda E1A2	"Dá pra montar uma expressão, uma expressão numérica ... pra você poder entender"	Fernanda sugere montar uma expressão numérica para expor o problema de forma que seja compreensível.	5. Reescreve o problema na linguagem matemática
O problema do funcionário Roberval			
Carla E1A3	"Mas tem que saber que as duas metades [gesticula com as duas mãos, "fechando-as" como unindo as duas metades da melancia] ali é um"	Carla destaca que, para contar a quantia de melancias, é preciso considerar que as duas metades formam uma melancia inteira.	6. Expressa, por meio de frações, uma ideia de quantidade relacionada ao número 1.
Bianca E1A3	"Eu fui pensando nas frações que representam os desenhos"	Para determinar o número total de melancias, Bianca considera os desenhos e os associa com frações.	7. Representa a quantidade usando frações.
Andrea E1A3	"Eu li e já fui fazendo representação, desenho"	Andrea, para solucionar o problema, faz desenhos no decorrer da sua leitura.	8. Reescreve o problema na linguagem matemática.
Luisa E1A3	"Tem uma fração mista e uma imprópria, dá pra transformar uma na outra"	Luisa identifica nos desenhos os tipos de frações e sugere um modo de somá-las, usando transformação.	9. Identifica diferentes notações de fração 10. Propõe reduzir as frações à mesma notação para somá-las
As fitas de Analu			
Carla E1A4	[Pega uma folha de sulfite] "Pode ser duas partes iguais assim [horizontal] ou assim [vertical]"	Carla usa uma folha de sulfite para explicitar modos de representar os dados do problema.	11. Usa recurso manipulável para se expressar.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTICULADA	IDEIAS NUCLEARES
Maria E1A4	Pesquisadora: “Como eu posso pensar essa metade?” Maria: “Posso usar fração”	A professora destaca um modo de representar os dados do problema	12. Identifica a fração como possibilidade de expressar metade

Fonte: Autoria própria

2º Encontro

Discussão da tarefa "É tudo a mesma coisa?"

Valter: "No da Poliana, que diz que Poliana tinha 16 e João tinha 5, depois mais 6, depois mais 5 que é a mesma coisa, eu disse que P = J. Porque tem a mesma coisa, mas tão perguntando quem tem mais"

Francine sobre problema do espaguete: " 36 é pra uma pessoa só"

Mona: "Se eu dividir por 4, dá 9 reais pra cada um"

Francine: "Não....36 reais é um prato só"

Pesquisadora: "Vamos pensar a respeito dessas situações agora? Pedi que vocês pensassem e representassem elas com o sinal de igualdade. A primeira era: o resultado de 45 multiplicado por 3 é 135. Como que eu posso escrever esse resultado usando o sinal de igualdade?"

Bianca: "45 x 3 = 135"

Valter: "Eu coloquei assim: 13, 5 x 10 = 135 x 1"

Valter: "Na verdade eu pensei no resultado, 135, e pensei em outra forma de representar. 45 x 3 eu sei de cabeça que é 135, daí eu fiz [representou] de outra forma, transformei o número, que dá o mesmo resultado. Como se fosse uma equação do primeiro grau. Mas 135 não é igual a 135?" [risos]

Alex: "Elas são iguais se formos pensar na ideia de equivalência, as duas estão comparando o resultado que é 135"

Pesquisadora: "E qual o papel, o significado desse sinal de igualdade aqui?"

Cristiana: "Que 135 é igual a 135"

Maria: "Na verdade o resultado é o mesmo, mas a operação tá diferente"

Pesquisadora: "Vamos considerar o problema da Poliana e do João. Como vocês pensaram?"

Valter: "Então, eu coloquei P = J. É, a Poliana tem a mesma quantidade que o João"

Poliana: "Eu coloquei – número de figurinhas de Poliana = número de figurinhas de João, 'ou dois tem o número de figurinhas =, usei o símbolo"

Andrea: "Eu coloquei desenho, eu fiz desenho. Fiz desenhos para cada um, Poliana e João. E também Poliana = João, só que como ele [Valter] colocou letras, eu escrevi os nomes. E 16 = 16”

Pesquisadora: “E o da cantina? Como vocês pensaram?”

Andrea: “Eu fiz 36 x 4 = 30 + 30 +30 +30 + 6 + 6 + 6 + 6 = 36 + 36 + 36 + 36 = 36 x 4 = 144. É um comparativo”

Valter: “Eu fiz um aqui oh: 4p = 36 x 4, 4 pessoas = 36 x 4”

Pesquisadora: “Agora que representamos vamos discutir. Em todas as representações que vocês fizeram, o sinal de igualdade tem o mesmo significado?”

Grupo fala tímido: “Sim”

Cristiana: “Igual é igual”

Andrea: “É equivalência e igualdade. Será que é isso?”

Pesquisadora: “Vou colocar um situação aqui pra ajudar a gente a pensar. Vamos supor que temos essa situação – Qual o resultado de 5 + 3 + 8? Não sei se vocês já presenciaram isso, mas eu já. Vou resolver: 5 + 3 = 8 + 8 = 16”

Alguém fala: “Ah sim”

Luisa: “Tá errado”

Catarina gesticula negativamente com a cabeça

Valter: “5 + 3 = 8 + 8”

Poliana: “5 + 3 é igual a 8 mas 8 mais 8 não é igual a 5 + 3”

Valter: “Se tá falando que 8 [5 + 3] é igual a 16 [8 + 8]”

Alex: “5 + 3 não é igual a 8 + 8”

Cristiana: “5 + 3 não é igual a 8 + 8”

Pesquisadora: “E qual o papel do sinal de igualdade nisso? 5 + 3 = 8”

Poliana: “Ele dá um pausa [gesticula com as mãos]. 5 + 3 = 8. Pronto. Depois mais 8, que dá 16”

Maria: “Ele para pra pensar”

Alex: “Ele usa o igual, na verdade ele dá uma função operacional pra ele. Ele usa o igual como se fosse uma ordem para ele fazer o cálculo”

Poliana: “Ele [aluno] entende que tem que fazer uma operação”

Pesquisadora: “O que esse sinal de igual tá dizendo pra ele?”

Mona: “Faça a conta e dê o resultado”

Pesquisadora: “Na situação da Poliana, e nessa daqui [5 + 3 = 6 + 2], qual o significado do sinal de igualdade?”

Alex: “Quer dizer que 5 + 3 equivale a 6 + 2, tem o mesmo valor”

Pesquisadora: “E o da cantina, como a gente pode pensar o sinal de igualdade. Tem várias representações. O que será que tá indicando o sinal de igual?”

Luisa: “O valor que você paga...”

Pesquisadora: “Vamos pensar numa outra situação...Gasolina, o quanto a gente paga e o quanto de litros nós colocamos. Eu posso representar essa situação com o sinal de igualdade?”

Mona: “Pode!”

Ruth: “Quantidade de litros e valor pago” [não fala do sinal de igualdade]

Pesquisadora “E onde vai entrar o sinal de igualdade considerando a quantidade de litros e o valor pago?”

Ruth: “No meio”

Pesquisadora: “Isso, esse sinal de igualdade está indicando uma relação ou uma função”

Andrea: “Ah...” [faz cara de surpresa]

Discussão da pesquisa sobre o sinal de igualdade

Pesquisadora: “Por que as respostas das crianças são tão diferentes?”

Andrea: “Tá somando”

Valter: “Ele somou”

Poliana: “Ele somou oito mais quatro, doze e depois...”

Cristina: “E depois mais o cinco”

Pesquisadora: “A criança que colocou sete entendeu o quê?”

Andrea: “Ela entendeu, ele viu que tinha que comparar, o valor que tava num lado tinha que tá no outro. O significado de equivalência”

Pesquisadora: “Qual o significado do sinal de igualdade aqui?”

Maioria do grupo: “De equivalência”

Pesquisadora: “A criança que colou 12, pensou como?”

Mona: “Somou oito mais quatro!”

Pesquisadora: “Esse sinal de igualdade teve qual significado pra ela?”

Felix: “De operação”

Andrea: “Operacional”

Quadro 5 - Análise Ideográfica do 2º encontro

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
ENCONTRO 2			
É tudo a mesma coisa?			
Valter E2A1	“Às vezes dá pra pensar em uma outra relação [para o enunciado: o produto de 45 multiplicado por 3 é 135]”	A partir do enunciado, Valter destaca ser possível estabelecer outros modos de obter o mesmo resultado, por exemplo, 135 x 1 = 13,5 x 10.	13. Identifica outros fatores que têm o mesmo produto.
Alex E2A1	“Elas são iguais [135 x 1 = 13,5 x 10] se formos pensar na ideia de equivalência, as duas estão comparando o resultado que é 135”	Ao discutir a expressão 13,5 x 10 = 135 x 1 e 135 = 45 x 3, Alex destaca que são expressões iguais destacando a equivalência entre elas.	14. Ressalta a equivalência entre sentenças matemáticas.
Andrea E2A1	Pesquisadora: “Tem várias situações aqui na lousa, em todas elas o sinal de	Na discussão sobre os significados do sinal de	15. Identifica o sinal de igualdade como equivalência.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
	igualdade significa a mesma coisa?" Andrea: "É equivalência a igualdade"	igualdade, Andrea destaca a equivalência.	
Poliana E2A1	"5 + 3 é igual a 8, mas 8 mais 8 não é igual a 5 + 3" [Sobre a resolução da expressão 5 + 3 + 8. Modo como aluno resolve: 5 + 3 = 8 + 8 = 16]	Na discussão da resolução de 5 + 3 + 8, Poliana reconhece que a igualdade entre as expressões não está correta [5 + 3 = 8 + 8 = 16]	16. Identifica o sinal de igualdade como equivalência
Valter E2A1	"Ele já emendou aí. O raciocínio dele está certo, o problema é como ele representou" [Sobre a resolução da expressão 5 + 3 + 8. Modo como aluno resolve: 5 + 3 = 8 + 8 = 16]	Valter ao analisar a resolução proposta destaca que o modo de pensar do aluno está correto, porém o registro feito não está.	17. Identifica o sinal de igualdade na sentença como uma operação a ser realizada.
Maria E2A1	"Ele dá um pausa [gesticula com as mãos]. 5 + 3 = 8. Pronto. Depois mais 8, que dá 16. Ele [aluno] entende que tem que fazer uma operação" [Sobre a resolução da expressão 5 + 3 + 8. Modo como aluno resolve: 5 + 3 = 8 + 8 = 16]	Maria considera que o aluno usa o sinal de igualdade para indicar uma operação a ser realizada.	18. Identifica o sinal de igualdade na sentença como uma operação a ser realizada.
Alex E2A1	"Ele usa o igual, na verdade ele dá uma função operacional pra ele. Ele usa o igual como se fosse uma ordem para ele fazer o cálculo" [Sobre a resolução da expressão 5 + 3 + 8. Modo como aluno resolve: 5 + 3 = 8 + 8 = 16]	Alex identifica que na resolução [5 + 3 = 8 + 8 = 16] o aluno usa o sinal de igualdade para indicar um procedimento a ser realizado.	19. Interpreta o sinal de igualdade como indicativo do resultado da operação realizada.
Alex E2A1	Pesquisadora: "Na situação da Poliana, e nessa daqui [5 + 3 = 6 + 2], qual o significado do sinal de igualdade?"	Alex indica que o sinal de igualdade na sentença indica que as operações realizadas antes e depois do sinal possuem o mesmo valor.	20. Interpreta o sinal de igualdade como equivalência.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
	Alex: "Quer dizer que 5 + 3 equivale a 6 + 2, tem o mesmo valor"		
Valter E2A1	"Quando a gente trabalha fração equivalente, eu pensei nisso, quando a gente quer relacionar metade, dois quartos, oito dezesseis avos e vai indo e vamos falando para eles que é a mesma coisa [...] O legal da fração é que dá pra você fazer e explicar pra eles depois com o desenho, fazer o desenho e provar pra você que isso é isso"	Valter associa o sinal de igualdade em expressões com a equivalência de frações. Destaca o uso de desenhos para mostrar o significado da equivalência de frações.	21. O desenho como recurso para a significação de equivalência de frações.
Mona E2A1	"Formar essa quantidade [número oito], e isso vai abrir um leque, porque são várias possibilidades de formar o mesmo número"	Mona considera que existem várias formas de compor um número.	22. Destaca que há formas distintas para compor um número.
Discussão da pesquisa com crianças (8 + 4 = ___ + 5)			
Andrea E2A2	"Da equivalência da resposta [...] Ela entendeu, ele viu que tinha que comparar o valor que estava num lado tinha que tá no outro. O significado de equivalência"	Andrea identifica que a resposta 7 para o espaço em branco indica que o aluno compreendeu a relação de equivalência	23. Atribui significado ao sinal de igualdade.

Fonte: Autoria própria

3º Encontro

Discussão da tarefa "Verdadeiro ou falso"

Poliana: "Aqui [primeira linha] é porque eles são iguais? É isso?"

Mona para a terceira linha: "Só pode dar ele né? É vezes um" [sobre o símbolo da terceira linha]

Mona: "Zero mais zero sempre é igual a zero. Por que? Se você substituir por zero, zero mais zero é igual a zero, vai dar o quadradinho"

Mona: "Por que? [se referindo a terceira linha] Porque todo número multiplicado por um dá ele mesmo. E todo número somado com zero [fica pensativa] não....[fica em dúvida]"

Francine: "Dá ele mesmo"

Mona: "Todo número somado a zero dá ele mesmo"

Valter: "Aqui [primeira] é verdadeiro porque vai dar a mesma coisa dos dois lados"

Valter: "E nesse, todo número multiplicado por um o produto é ele mesmo"

Mona: "Aqui no primeira, a gente colocou sim porque a ordem dos fatores não altera o produto. Nesse [segunda linha] Se somando ou se subtraindo não vai dar o resultado, 27"

Pesquisadora: "Vamos ao primeiro 24 + 37 = 37 + 24, o que vocês acham?"

Grupo: "Verdadeiro"

Ruth: "Porque eu olho pro resultado [das operações] e é igual"

Pesquisadora: "Isso, se eu sei que a soma das parcelas não altera o resultado na adição no conjunto dos números naturais, então se eu sei essa propriedade eu posso usá-la. Alguém lembra o nome dessa propriedade?"

Valter: "Comutativa"

Pesquisadora: "Vamos pro próximo, segunda linha [46 + 27 – 27 = 27]. O que vocês acham?"

Grupo: "Falso"

Luisa: "Porque o sinal de igualdade e eles não são iguais"

Luisa: “Porque ali tem o sinal de igualdade e os números são diferentes”

Valter: “Os resultados”

Pesquisadora: “A primeira coisa que a gente faz são as contas mesmo, mas eu posso pensar de uma outra forma?”

Luisa: “O meu pensamento foi colocar 27 e tirar 27 vai dar nada ali, então 46 é diferente de 27. Então eu nem fiz a conta”

Catarina: “Eu coloquei 46 é diferente de 27. Eu pensei, mais 27 e menos 27 anula, então”

Pesquisadora: “A ordem natural é eu realizar 46 mais 27 e do resultado disso eu subtraio 27. E então eu comparo os números. O que é legal eu pensar com essa situação?”

Ina: “O mais e menos 27”

Luisa: “Eu tô colocando e tirando a mesma coisa”

Pesquisadora “E a próxima? O que vocês acham? Verdadeiro ou falso?”

Andrea e restante do grupo: “Verdadeiro”

Pesquisadora: “Por quê?”

Valter: “Todo número multiplicado por um dá ele mesmo”

Pesquisadora: “E aqui que não temos um número, mas um símbolo”

Andrea: “Não tem problema”

Valter: “Mas ali pode ser substituído por qualquer coisa”

Pesquisadora: “No nosso caso eu tenho uma quantidade vezes um que dá essa mesma quantidade, independente da quantidade. Na sala de aula eu posso trazer várias situações dessa, até com a calculadora, pois eles vão percebendo essa propriedade. Como a gente chama essa propriedade?”

Valter: “Elemento neutro”

Pesquisadora: “Isso, o elemento neutro da adição que diz que é um elemento que ao ser somando com outro não altera seu valor”

Discussão da tarefa “Explorando a tabuada”

Pesquisadora: “Vamos trabalhar com a tabuada do três. Eu quero que vocês escolham duas linhas, quaisquer, e pode rabiscar no papel se quiser. Por exemplo, eu escolhi a linhas 2 e a linha 5. Daí 3 x 2 = 6 e 3 x 5 = 15. Lembrem que estamos trabalhando com propriedades e elas independem dos números que estou trabalhando. Agora quero que vocês somem os valores das respectivas linhas, no meu caso, somar 2 e 5, que dá 7”

Valter: “Eu escolhi a 4 e a 9 e passou” [o professor já interpreta a propriedade]

Pesquisadora: “Somaram? Agora somem os produtos dessas respectivas linhas. No meu caso, a linha 2 tem resultado 6 e a linha 5 tem resultado 15, somando dá 21. Há alguma relação entre esses números que encontramos?”

Ruth: “Deu a linha do resultado” [referindo-se aos produtos]

Andrea: “15 [3 x 5] mais 30 [3 x 10], 45. Se a gente continuasse a tabuada achava, é que a gente parou no dez”

Luisa: “Você percebeu a mesma coisa que ela?”

Felix para Pesquisadora: “Eu percebi que são múltiplos de 3” [sobre as linhas e os produtos, escolheu linha 3 e linha 5]

Pesquisadora: “Então todos eles estão na tabuada do 3, e agora, será que há mais alguma relação? Que linha que está o 24? Isso, na do 8, então o que será que eu posso perceber?”

Felix: “Que 8 é a linha 3 e a linha 5”

Bianca: “Isso dá em toda tabuada? Em toda tabuada dá certo?” [expressão de curiosidade]

Alguém fala: “Dá!”

Bianca: “Ou só na do 3? Deixa eu vê a do 4” [testa alguns valores]

Pesquisadora: “Pessoal, deu pra pensar em alguma coisa?

Bianca: “A soma das linhas é igual a soma dos produtos”

Luisa para Andrea: “Você testou para outras?”

Andrea: “Mas vale. O movimento é o mesmo”

Bianca: “Coloca 3 x 3 = 9 e 3 x 6 = 18, se você multiplicar 3 com 6 dá 18 e se você somar 3 com 6 dá 9, tá vendo? Mas não deu em outra”

Pesquisadora: “O que eu proponho é que vocês tentem a relação que pensaram para outras linhas....”

Valter: “O 3 x 5 está implícito ali no meio do 3 x 2 mais 3 x 3” [esse é o exemplo usado]

Valter: “O 3 x 5 é o 3 x 2 mais o 3 x 3”

Pesquisadora: “Olhem como é legal perceber, que o 3 x 5 está em vários lugares. Vocês já pararam pra pensar porque que a gente faz a tabuada até o 10?”

Bianca: “Porque o restante você vai fazendo, por exemplo 11 [3 x 11], 3 x 1! Se você sabe 3 x 1 você sabe 3 x 11”

Ruth: “E isso é bom que vai ajudando o aluno a criar estratégias. Porque as vezes, é um estalo, tipo nossa é assim, que é preciso para o aluno”

Quadro 6 - Análise Ideográfica do 3º encontro

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
ENCONTRO 3			
Verdadeiro ou falso?			
Mona E3A1	“Só pode dar ele né? É vezes um [...] Por quê? [se referindo a terceira linha] Porque todo número multiplicado por um dá ele mesmo”	Mona enfatiza que na multiplicação em que um dos fatores é 1 o produto é sempre o outro fator. Ao dizer isso busca generalizar a observação feita pelo grupo	24. Destaca o elemento neutro da multiplicação. 24. Generaliza uma propriedade da multiplicação.
Mona E3A1	“Todo número somado a zero dá ele mesmo, por isso é verdadeiro”	Mona destaca que a expressão é verdadeira, pois zero é elemento neutro da adição.	25. Destaca zero como elemento neutro da adição.
Valter E3A1	“Todo número multiplicado por um dá ele mesmo. Mas ali [1 x * = *] pode ser substituído por qualquer coisa”	Valter destaca que na sentença da multiplicação em que um dos fatores é um os símbolos podem representar qualquer número que a veracidade não se altera.	26. Identifica o elemento neutro da multiplicação 27. Generaliza o identificado (propriedade)
Maria E3A1	“Porque não tá somando. A parcela zero não interfere no resultado. Zero mais qualquer coisa é qualquer coisa”	Na última sentença [* + 0 = *], Maria destaca que não há soma, ou seja, não há adição de qualquer quantidade.	28. Associa a adição a zero com uma “não operação”. 29. Expressa uma propriedade da adição em que uma das parcelas é zero.
Mona E3A1	“Aqui na primeira [24 + 37 = 37 + 24], a gente colocou sim [verdadeiro]	Mona diz que a sentença é verdadeira e procura justificar usando a propriedade comutativa da	30. Identifica a equivalência entre as sentenças matemáticas.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
	porque a ordem dos ‘fatores’ não altera o ‘produto’”	multiplicação (em decorrência do uso dos termos).	31. Identifica a propriedade comutativa da adição.
Francine E3A1	“É aquela que a ordem não altera o resultado, né?”	Francine justifica sua resposta considerando a ordem das parcelas, embora não use os termos corretos.	32. Identifica a propriedade comutativa da adição
Andrea E3A1	“A ordem das parcelas não altera a soma”	Andrea justifica a resposta para a sentença [24 + 37 = 37 + 24] usando a propriedade comutativa da adição.	33. Identifica a propriedade comutativa da adição
Luisa E3A1	“O meu pensamento foi [na sentença 46 + 27 – 27 = 27], colocar 27 e tirar 27 vai dar nada ali [...] Eu tô colocando e tirando a mesma coisa, então 46 é diferente de 27. Então eu nem fiz a conta”	Para determinar a veracidade da sentença matemática, Luisa recorre a soma de números opostos (cujo resultado é zero) e conclui que a sentença não pode ser verdadeira.	34. Realiza a subtração de quantidades iguais. 35. Identifica o elemento neutro na adição.
Catarina E3A1	“Eu coloquei 46 é diferente de 27. Eu pensei: mais 27 e menos 27 anula, então ...”	Para determinar a veracidade da sentença matemática, Catarina reconhece que +27 e – 27 irão se anular (resultam zero) e, portanto, 46 é diferente de 27. .	36. Identifica que a soma de números opostos é zero.
Valter E3A1	“Tem que ter sentido também. Por exemplo, na multiplicação, na tabuada, quando tem 2 x 1, eles nem vão olhar, já sabem que é ele mesmo”	Valter destaca que o conhecimento e a compreensão das propriedades auxiliam os alunos na realização dos cálculos.	37. Identificar uma propriedade facilita a interpretação da situação.
Explorando a tabuada			
Andrea E3A2	“15 [3 x 5] mais 30 [3 x 10], 45. Se a gente continuasse a tabuada achava, é que a gente parou no dez”	Andrea reconhece que a tabuada “continua” e é possível encontrar a linha cujo produto seja 45.	38. Destaca um modo de fazer a tabuada que pode ser alterado.
Felix E3A2	“Que [a linha] 8 é a linha 3 e a linha 5”	Ao analisar a relação entre as linhas que escolheu, Felix observa que o produto [24] está na linha 8, que é a soma da linha 5 com a linha 3.	39. Identifica uma relação entre as linhas da tabuada.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
Bianca E3A2	"Isso dá em toda tabuada? Em toda tabuada dá certo? Ou só na do 3? Deixa eu vê a do 4" [testa alguns valores]	Ao analisar a relação entre as linhas da tabuada, Bianca questiona se a relação encontrada é valida para outras tabuadas.	40. Identifica a relação entre as linhas da tabuada. 41. Investiga a relação encontrada na tabuada.
Wiliam E3A2	"Tentando aqui oh" [testa a relação encontrada por Bianca para outras tabuadas]	Com o questionamento de Bianca, Wiliam testa a relação encontrada para outras tabuadas.	42. Investiga a relação encontrada
Bianca E3A2	"A soma das linhas é igual a soma dos produtos"	Bianca identifica uma relação entre as linhas da tabuada	43. Investiga a relação encontrada
Bianca E3A2	"Eu fiz uma coisa aqui, mas depois eu vi que não dava na outra [escolhendo outras linhas]. Multiplique a linha 3 x 6, por exemplo, dava 18 e daí somando as linhas dava o outro resultado. Só que eu já tentei em outra tabuada e não deu"	Bianca busca outras relações entre as linhas da tabuada e, para validá-las, testa em outras tabuadas.	44. Investiga relações entre as linhas da tabuada 45. Investiga buscando generalizar o feito.
Valter E3A2	"O 3 x 5 está implícito ali no meio do 3 x 2 mais 3 x 3"	Valter identifica que o produto entre 3 e 5 pode ser obtido conhecendo-se o produto entre 3 e 2 e entre 3 e 3.	46. Identifica a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
Bianca E3A2	"Porque o restante você vai fazendo, por exemplo, 11 [3 x 11], 3 x 1! Se você sabe 3 x 1 você sabe 3 x 11"	Bianca destaca que sabendo a tabuada até o 10 é possível obter outros produtos considerando as relações que estão sendo estabelecidas.	47. Identifica relação entre as linhas da tabuada 48. Vê a possibilidade da decomposição numérica.

Fonte: Autoria própria

4º Encontro

Discussão da tarefa "Qual é o próximo?"

Pesquisadora: "Eu montei uma sequência aqui gente. Quem pode continuar essa sequência pra mim?"

Andrea: "Eu ia ficar virada pra frente"

Pesquisadora: "Como você pensou?"

Andrea: "Pra lá, pra frente, pra cá" [gesticula com as mãos imitando a posição dos corpos]

Pesquisadora: "Você olhou pra quem pra pensar?"

Andrea: "Eu olhei pra Poliana, e como a cada três em três é um grupinho"

Felix gesticula com as mãos para contar e entender a posição dos participantes

Pesquisadora: "Como vocês pensaram para descobrir o segredo das filas"

Andrea: "As regularidades" [expressão de muito simples]

Pesquisadora: "Regularidades do quê?"

Andrea: "Da posição de cada um"

Pesquisadora: "Então como vocês olharam?"

Andrea: "Eu separei em grupinhos. No primeiro caso de três em três, e no segundo de cinco em cinco. Eu fui olhando a sequência" [gesticula com as mãos, uma fica parada como se fosse o primeiro elemento e a outra se movimenta]

Pesquisadora: "O que é regularidade?"

Andrea: "O que repete"

Poliana: "Tem uma sequência"

Pesquisadora: "Eu posso pensar em outras situações no ensino de matemática onde eu tenho sequências?"

Ruth: "Sim, por exemplo, 5, 10, 15, 20..."

Pesquisadora: “Você precisa olhar para mais coisa, para determinar a regularidade. E o modo como eu coloco os elementos também, aqui eles tentaram colocar a mão em lugares diferentes, entre outros. E como eu poderia trabalhar essa atividade em sala de aula?”

Poliana: “Eu trabalho com cor, com formas”

Andrea: “Eu pensei na faixa pra decorar”

Poliana: “Movimento”

Pesquisadora: “Como isso pode ajudar na aprendizagem?

Poliana: “Observação”

Mona: “Pra pensar”

Andrea: “Olhar para os dados”

Valter: “Você tem que pegar todos os dados...”

Mona: “Avaliar os dados”

Valter: “E vê o que tá acontecendo”

Andrea: “E pensar em hipóteses, como que eu vou resolver?”

Discussão da tarefa “Lápis e Borracha”

Pesquisadora: “Quantos itens faltavam ser organizados”

Valter: “ 3 borrachas e 2 lápis”

Pesquisadora: “Para continuar a sequência como que foi?”

Bianca: “Só repetir o que tava no começo”

Mona: “Tranquilo”

Pesquisadora: “Ela [professora Linda] usou alguma estratégia para organizar esse material?”

Valter: “Uma sequência de lápis e borracha”

Mona: “Um do lado do outro, intercalados”

Pesquisadora: “Se eu consigo entender que os lápis estão na posição ímpares e as borrachas nas posições pares eu posso perguntar qual o elemento vai estar na posição 30. Ele é capaz de me dizer?”

Valter: “É onde tá borracha, a borracha tem que cair no par”

Poliana: “Se ele conhecer os números pares e ímpares”

Pesquisadora: “Se ele conseguir entender a relação entre a posição e os termos ele consegue me dizer...”

Ruth: “Qualquer um dos termos”

Luisa: “Padrão?”

Pesquisadora: “Entender esse padrão significa o quê?”

Mona: “Primeiro conhecer os números, identificar eles”

Luisa: “Depois a sequência”

Pesquisadora: “Qual a sequência que se repete no nosso exemplo?”

Ina: “Lápis e borracha”

Valter: “Tem, por exemplo que nem você falou ali, se eles fazerem a relação entre par e ímpar e os elementos e eu perguntar que vai ocupar a posição trigésima, eles vão saber que quem vai ocupar é a borracha, se eles não fizerem essa relação eles não vão conseguir.”

Pesquisadora: “Isso, e o que isso tem haver com os nossos últimos encontros? Como por exemplo estabelecer essas relações?”

Ruth: “A tabuada que a gente trabalhou não é essa relação de regularidade?”

Pesquisadora: “Eu posso sim identificar uma regularidade na tabuada, é um link que eu posso estabelecer, entender a regularidade da tabuada me permite trabalhar com qualquer tabuada. A professora Bianca perguntou no último encontro se a relação que ela tinha encontrada valia para outras tabuadas. Isso que é legal, buscar as regularidades existentes entre os conteúdos que a gente trabalha”

Bianca: “Não tem um quê de maturidade na idade também pra fazer essa abstração? Quem dá aula pra quinto ano tem essa dificuldade, eles não pegam pá, de cara. É um ou outro”

Valter: “Antigamente pegava, agora não pega nada”

Bianca: “Mas é difícil, porque eles estão acostumados com o sinal de igual só pra resposta né?”

Discussão da tarefa “Construindo segredos”

Andrea: “Quantas peças tem?”

Valter: “Ah é, vamos descobrir?”

Luisa: “Mas não importa, pode fazer de 3 em 3”

Poliana muda rotacionando o quadrado: “Ih, vou falar igual as crianças, girou já não é mais quadrado” [risos]

Os grupos terminavam e tentavam continuar a sequência criada pelos colegas. Discutiram sobre a sequência repetitiva

Pesquisadora: “A professora Ina colocou uma questão legal. Hoje nós trabalhamos com as sequências repetitiva, onde há uma unidade que se repete. Alguns grupos criaram sequências crescentes, onde muda a quantidade de elementos de uma posição para outras. Como vocês fizeram para descobrir os próximos termos?”

Bianca: “Observação. Para identificar as formas que estavam na sequência”

Maria: “Para gente vê onde terminava a unidade de sequência” [unidade repetitiva]

Quadro 7 - Análise Ideográfica do 4º encontro

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
ENCONTRO 4			
Qual é o próximo?			

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
Andrea E4A1	"A cada três é uma sequência, esquerda, frente e direita"	Ao analisar a sequência, Andrea identifica uma regularidade na organização dos participantes.	49. Identifica uma regularidade na sequência.
Andrea E4A1	"As regularidades... Eu separei em grupinhos. No primeiro caso de três em três, e no segundo de cinco em cinco. Eu fui olhando a sequência"	Andrea destaca que, para analisar as sequências, observou como elas foram formadas e procurou identificar grupos de mesmos elementos.	50. Cria estratégias para buscar a regularidade na sequência.
Valter E4A1	"Preciso interpretar primeiro, você tem que pegar todos os dados e vê o que tá acontecendo"	Valter destaca os procedimentos para solucionar uma situação, como a tarefa de produzir sequências.	51. Importância da leitura para a compreensão e interpretação dos dados.
Lápis e Borracha			
Valter E4A2	"A borracha tem que cair no par, se ele souber contar, ele já consegue entender o que é par e o que é ímpar. Ele começa a entender"	Valter identifica que a borracha ocupa a posição de números pares.	52. Identifica a relação entre um elemento da sequência e sua posição.
Ruth E4A2	Pesquisadora: "Se ele conseguir entender a relação entre a posição e os termos ele consegue me dizer..." Ruth: "Qualquer um dos termos"	Ruth mostra compreender que qualquer um dos termos de uma sequência pode ser identificado se houver uma relação entre ele e sua posição.	53. Compreende a importância da relação entre a posição e um elemento de uma sequência.
Valter E4A2	"Tem, por exemplo, que nem você falou ali, se eles fizerem a relação entre par e ímpar e os elementos e eu perguntar quem vai ocupar a posição trigésima, eles vão saber que quem vai ocupar é a borracha, se eles não fizerem essa relação eles não vão conseguir"	Valter destaca a importância de os alunos reconhecerem a relação entre a posição e os elementos de uma sequência.	54. Identifica uma relação entre o elemento e sua posição 55. Generaliza a relação entre posição e elemento. 56. Destaca a importância da relação entre elementos de uma sequência e posição.
Construindo segredos			
Luisa E4A3	Andrea: "Quantas peças tem?" Luisa: "Mas não importa, pode fazer	Para construir a sequência, Luisa fala que não importa a quantidade de peças, mas sim como	57. Identifica a importância do padrão na sequência.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
	de 3 em 3"	vão pensar o padrão da sequência.	
Bianca E4A3	Pesquisadora: "Como vocês fizeram para descobrir os próximos termos?" Bianca: "Observação ... Para identificar as formas que estavam na sequência"	Bianca destaca que é importante olhar a sequência procurando identificar o padrão em que as formas são posicionadas.	58. Destaca a importância de identificar um padrão.

Fonte: Autoria Própria

5º Encontro

Discussão da tarefa "Quem é o próximo?"

Pesquisadora: "Como eu poderia continuar a sequência?"

Luisa: "Aí é um retângulo azul e um quadrado vermelho"

Valter: "É o jeito de olhar" [sobre continuar a sequência e unidade repetitiva]

Valter para Felix apontando para imagem: "Depende de como você vê, pode ser também os três juntos"

Ina: "Pode repetir essa sequência aqui" [apontando para continuar]

Valter: "Pode colocar dois retângulos azuis e continuar a sequência"

Andrea: "Pode vermelho, azul, vermelho, vermelho, azul, vermelho"

Pesquisadora: "Tem algum que está certa ou errada?"

Grupo: "Não"

Andrea: "Tem que continuar"

Luisa: "Depende da sua lógica"

Pesquisadora coloca mais um termo na sequência, um retângulo

Pesquisadora: "Como vocês continuariam?"

Luisa: "Da mesma forma"

Bianca: "Igual"

Pesquisadora: "O que acontece?"

Valter: "Muda a estrutura"

Discussão da tarefa "Quantas bolinhas tem os triângulos?"

Valter: “Ah lá, a razão é três, progressão aritmética. O próximo ali é cinco [bolinhas] na base. A próxima é com 15, já vou fazer até a próxima já. A próxima a base vai ser seis”

Mona para seu grupo: “Tá de três em três”

Pesquisadora: “Quem pode me ajudar a desenhar a próxima figura?”

Valter: “A próxima base é cinco [bolinhas]”

Bianca: “Cinco, cinco, cinco” [sobre cada lado do quadrado]

Pesquisadora: “Como vocês chegaram que era cinco, cinco, cinco”

Bianca e Ina: “Pela base”

Andrea: “A gente viu a base”

Valter: “Eu comparei o primeiro [termo] e o segundo e vi a diferença de um pro outro até o terceiro, dava três. A quantidade [total de bolinhas] vai subindo de três em três, fiz assim. O primeiro tem três, o segundo seis...”

Bianca: “É múltiplo de três”

Andrea: “Observando, no primeiro tem dois, no segundo tem três, no terceiro tem quatro...”

Valter: “Como é um triângulo, e o triângulo tem três lados, vai aumentar um [bolinha] em cada lado”

Pesquisadora: “Muito bem, observaram as características dos elementos que eu já tinha. E por que não colocaram as bolinhas aleatoriamente?”

Poliana: “Pra seguir a sequência”

Pesquisadora: “Já entendemos o formato do elemento de cada posição, agora vamos ver a quantidade de bolinhas que cada elemento tem. A próxima figura teria quantas bolinhas?”

Grupo: “15”

Pesquisadora: “Eu consigo pensar nisso para as próximas figuras? Você consegue determinar o número de bolinhas da 9ª figura?”

Valter e Andrea respondem rapidamente: “Vinte e sete!”

Pesquisadora: “No nosso caso, que relação eu posso estabelecer entre o número de bolinhas e a minha posição?”

Valter: “Vezes três”

Andrea: “É a posição vezes o três”

Pesquisadora: “Que situações da sala de aula podemos trabalhar com esse tipo de sequência?”

Valter: “A tabuada. Os resultados da tabuada do três. Eu poderia falar pro aluno que a quinta posição ele poderia contar a segunda e a terceira, pra saber a quantidade que ele vai colocar na quinta posição. A minha quinta posição é a segunda posição mais a terceira”

Discussão da tarefa “Quantas sequências?”

Valter: “Vou fazer por linha, acho que é mais fácil”

Poliana: “Dá pra fazer a de par, ímpar”

Valter: “Vou fazer uma aqui, múltiplos de 10 [fica pensativo]. Dá pra fazer de 5 também”

Luisa: “Dá pra fazer na diagonal, tabuada do 9”

Andrea: “Do onze também dá”

Luisa: “Subindo subtrai nove, descendo soma nove”

Pesquisadora: “E a diagonal? Essa muita gente fez”

Valter: “Se subir dá mais nove, se descer menos nove”

Pesquisadora: “Vamos olhar para a posição deles”

Valter: “Como se dezena e unidade subissem uma unidade”

Mona: “A sequência de um a dez” [estão todos na mesma linha]

Bianca: “E por que do lado de lá [diagonal da direita pra esquerda] é nove?”

Valter: “Ele desce uma linha e vai pra frente uma coluna”

Pesquisadora: “O que significa somar onze então?”

Valter: “Somar dez e depois mais um”

Pesquisadora: “Isso, então somar onze é o mesmo que somar dez e depois um. Podemos pensar do mesmo modo com a outra diagonal. Então...”

Poliana: “Somou dez”

Luisa gesticula: “E andou pra cá [esquerda]”

Pesquisadora: “O que está acontecendo?”

Valter: “A mesma coisa só que ao contrário”

Pesquisadora: “O que significa somar 9 então? Somar 10 e...”

Valter: “Subtrair um”

Ina: “Como a tabela é de dez [colunas e linhas] se você descer e for para a direita você soma, se você descer e for para a esquerda você subtrai”

Pesquisadora: “Exatamente. E isso eu posso fazer em qualquer diagonal da tabela. Então eu posso discutir por exemplo o que significa somar nove”

Poliana: “É dez menos um”

Pesquisadora: “E o que significa somar 11?”

Poliana: “É dez mais um”

Próxima foto:

Pesquisadora: “Tem as diagonais e outros. Vamos ver...Tem 2, 4 8. Será que é uma sequência?”

Ina: “É”

Pesquisadora: “2, 4 e 8?”

Ina: “O 1, 2, 4 e 8”

Pesquisadora: “Vamos ver se há uma regularidade aqui”

Bianca: “1 + 1, 2. 2 + 2, 4”

Poliana: “1 + 1, 2. 2 + 2, 4. 4 + 4, 8...Ah já sei”

Valter: “É o dobro”

Pesquisadora: “Será que tem como encontrar o termo de qualquer posição?”

Valter: “É a tabuada do 2”

Valter olhando para a lousa: “Não tem como não depender do anterior, porque eles começam a ficar mais coisa a partir do 4 [difícil] ali”

Valter: “É sempre duas vezes o anterior, não pode pensar no anterior?”

Luisa: “Vamos pensar na posição”

Andrea vai escrevendo no papel: “Oitava, nona, décima posição....Vamos pensar. Vamos testar” [vão levantando algumas hipóteses]

Valter: “Eu tô querendo entender, como sem nenhum termo eu vou saber”

Poliana: “Mas antes, dois elevado a primeira potência”

Andrea: “Ah é...”

Valter para o seu grupo: “Se você quiser o elemento da 36ª posição, você tem que fazer 2 elevado a 36”

Pesquisadora: “Qual a relação?”

Ina: “O número que ele tá sendo elevado está aumentado uma unidade”

Valter: “A posição é a potência [expoente]”

Quadro 8 - Análise Ideográfica do 5º encontro

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
ENCONTRO 5			
Quem é o próximo?			
Valter E5A1	Pesquisadora: “Como vocês continuariam?” Valter: “O que dá pra fazer é ir aumentando o número de quadrados, tipo, dois quadrados, dois retângulos,	Valter destaca que, nas sequências, a inserção de elementos pode mudar a estrutura da unidade repetitiva (ou seja, o padrão).	59. Identifica o padrão da sequência.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
	põe um quadrado, um retângulo, dois quadrados, dois retângulos e repete de novo, muda a estrutura”		
Quantas bolinhas tem os triângulos?			
Valter E5A2	“Eu comparei o primeiro [termo] e o segundo e vi a diferença de um pro outro até o terceiro, dava três. A quantidade [total de bolinhas] vai subindo de três em três, fiz assim. O primeiro tem três, o segundo seis...”	Valter relata sua estratégia para identificar o padrão da sequência: observou a quantidade de bolinhas em cada um dos termos, comparou e identificou um padrão.	60. Estratégias para identificar regularidade numa sequência. 61. Identifica o padrão na sequência.
Andrea E5A2	“É a posição vezes o três”	Andrea, ao analisar a sequência, estabelece uma relação entre a posição e o número de bolinhas desenhadas em cada posição,	62. Identifica a relação entre a posição e os elementos na sequência.
Valter E5A2	Pesquisadora: “Como vocês fizeram para saber o próximo [termo]? Valter: “Observamos a figura”	Valter destaca que observaram a sequência como uma forma de ver como ela havia sido construída.	63. Importância da análise da sequência na busca por regularidade.
Valter E5A2	“A minha quinta posição é a segunda posição mais a terceira”	Valter e o grupo buscam estabelecer outras relações na sequência.	64. Investigam relações em sequências numéricas.
Luisa E5A2	“Nós estávamos brincando e fizemos com o quadrado e o hexágono, descobrimos que com o retângulo não dá, porque os lados não são iguais”	O grupo de Luisa busca criar outras figuras geométricas com as bolinhas e investiga relações nas sequências. Notam que o retângulo, por não ser um polígono regular, não é possível.	65. Exploram a construção de outras sequências. 66. Realizam investigações mantendo o padrão da sequência. 67. Identificam possibilidades a partir do padrão oferecido.
Quantas sequências?			
Valter E5A3	“Ele desce uma linha e vai pra frente uma coluna”	Valter identifica, no tabuleiro, uma relação entre o número e o seu valor quando adicionado 11.	68. Investiga relações nas sequências.
Wilian E5A3	Pesquisadora: “O que significa somar 11 então?” Wilian: “Somar dez e depois mais	Wilian destaca que o desenho ajuda a compreender que somar 11 unidades significa somar 1 dezena e 1 unidade.	69. Identifica uma forma de fazer a adição solicitada.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
	um”		
Ina E5A3	“Como a tabela é de dez [colunas e linhas] se você descer e for para a direita, você soma [dezenas e unidade], se você descer e for para a esquerda você subtrai [subtrai unidades]”	Ina identifica, a partir da configuração do tabuleiro, uma relação entre as linhas e colunas, destacando que “descer” significa somar dezenas e deslocar para direita ou esquerda indica o número de unidades a serem adicionadas ou subtraídas.	70. Identifica um padrão na sequência.
Andrea E5A3	“Mas dá certo também. Todas elas funcionam”	Andrea destaca que todas as diagonais da esquerda para a direita somam 11 a cada linha	71. Identifica a relação estabelecida na sequência.
Luisa E5A3	“Olha, de 1 pra 11 aumentou 10, de 2 pra 12 aumentou 10. Tem 10 casas, então 100”	Luisa, ao analisar a disposição das casas no tabuleiro e a sua forma, conclui que há 100 casas.	72. Investiga a forma do tabuleiro.
Ruth E5A3	“É sempre o dobro do anterior”	Observando a sequência [1, 2, 4, 8, 16 32] Ruth identifica que um termo é o dobro do anterior.	73. Identifica o padrão na sequência
Luisa E5A3	“Vamos pensar na posição dos elementos na sequência”	Para generalizar a sequência encontrada, Luisa sugere ao grupo pensar na posição dos elementos.	74. Sugere buscar, na sequência, uma relação entre posição e os elementos.
Andrea E5A3	“Vamos testar”	Na busca pela generalização da sequência [2, 4, 8, 16, 32] Andrea sugere que eles testem as relações que consideram válidas.	75. Investigam relações nas sequências
Andrea E5A3	“Eu tô mexendo com um quadrado”	Na busca pela generalização da sequência [2, 4, 8, 16, 32] Andrea destaca que está observando a presença de quadrado [potências de 2]	76. Explora a sequência numérica. 77. Investiga relações na sequências numéricas.
Valter E5A3	“A posição é a potência [expoente]”	A posição é a potência [expoente]	78. Identifica a relação entre o elemento e sua posição na sequência.

Fonte: Autoria própria

6º Encontro

Pesquisadora explica a situação e entrega cada produto para um grupo

Andrea para grupo: “Daria para comprar 3” [detergente Ypê]

Valter: “Fiz porcentagem. Cada litro desse [embalagem 2] dá pra comprar 2 desse [embalagem 1] e ainda sobre uns quadrados ainda”

Valter: “Vai sobrar 0,75 centavos ainda. Primeiro eu fiz regra de três para vê, 1 litro é 7,85, então 5 litros vai ser quantos? E deu 39,25. Depois eu fiz aqui [comparou], 5 litros é 17,75, pra vê quanto é o litro desse [embalagem 2] que deu 3,55. Então como esse valor [embalagem um] dá pra comprar dois desse [embalagem 2] e ainda sobre 0,75 centavos. Daria para pensar com porcentagem isso, por exemplo, quantos por cento desse dá esse. Agora no caso da fração, se você número inteiro daria pra dizer, por exemplo, 2 por 1”

Andrea: “Eu fiz, um litro desse para cinco litros, é vezes 5. Daí eu vi que esse valor [5 litros da embalagem 1] daria pra comprar uma dessa [embalagem 2], e sobraria 21 e pouco, que daria pra comprar outra e ainda sobra um valor. Daí eu fiz uma fração dos preços de cada litro [de cada embalagem]”

Pesquisadora: “Com essa fração a gente pode começar a pensar na proporcionalidade, por que você fez isso?”

Andrea: “Pra saber tudo de um litro”

Pesquisadora: “Isso você está comparando o preço de um litro”

Andrea: “Isso, a gente pode só comparar”

Pesquisadora: “Como vocês pensaram?”

Poliana: “Ah o nosso é fácil, é o dobro. Tanto faz ele levar essa [embalagem 1kg] como duas dessas [embalagem de 500g]. É o mesmo valor, só depende da quantidade”

Pesquisadora: “Por quê?”

Poliana: “É a mesma coisa, é equivalente. Posso pensar em relação a quantidade e preço”

Pesquisadora: “Como eu poderia representar isso para saber que é a mesma coisa?”

Bianca: “Pra dar um kilo aqui [embalagem 2] você vai pagar os 10,58 de lá [embalagem 1]” [usa comparação]

Fernanda: “Eu multipliquei 5,29 vezes 2”

Pesquisadora: “Por que multiplicar por 2 na primeira situação e dividir por 2 na segunda?”

Carla: “Por causa do quilo”

Ina: “Porque meio quilo vezes dois dá um quilo”

Cristiana: “E meio quilo é metade de um quilo”

Pesquisadora: “Mas por que eu preciso fazer isso? [as multiplicações e divisões]

Poliana: “Pra vê a relação”

Cristiana: “Porque eu tô comparando”

Poliana: “Porque eu tô comparando preço e quantidade”

Bianca: “Se o grama é o mesmo valor, né?”

Poliana: “Tem que fazer uma razão pra vê se é equivalente. É uma relação”

Pesquisadora: “Vamos pensar, nesta embalagem [I], um quilo custa 10,58. Vamos para a outra embalagem. Eu posso pegar 500 gramas?”

Grupo: “Não”

Andrea: “A mesma medida”

Pesquisadora: “Então eu vou pegar também um quilo. Um quilo aqui custa 10,58”

Poliana: “Não é igual?”

Pesquisadora mostra como pensou para comparar o preço de 100g de cada embalagem

Pesquisadora: “Essa ideia dá pra fazer com....”

Poliana: “Dá pra fazer com tudo”

Bianca para seu grupo: “Vamos calcular 100 ml de cada um”

Andrea: “Qual valor que poderia ser para ser equivalente?”

Valter: “A não ser que divida pra achar 100 ml?”

Pesquisadora: “Vamos vê mais um. Vocês dividiram por quanto?”

Ruth: “Como são 4 pacotinhos de 100g e 9 pacotinhos de 100g dividimos por 4 e por 9”

Pesquisadora: “Ótimo, vou colocar aqui na lousa. Então se o peso eu dividi por 4 o valor eu também dividirei por 4. Dando...”

Ruth: “1,37”

Pesquisadora: “Ou seja, 100g do meu produto nesta embalagem [I] custa 1,37. Vamos fazer a mesma coisa com a outra embalagem. Vocês fizeram como?”

Rita: “1,19. Daí a gente montou as frações”

Mona: “Não são proporcionais”

Pesquisadora: “Vamos pegar outro”

Bianca: “Aí é fácil, é um litro” [sobre as transformações]

Pesquisadora: “Preciso escolher a mesma quantidade”

Valter: “O frasco I tem um litro só, então eu peguei e multipliquei esse litro por 5 para eu saber quanto custa 5 litros nessa embalagem, que dá 39,25, que é a quantidade do frasco II. Porque a ali [frasco II], o litro fica 3,55” [Valter cria uma regra de três simples para determinar o valor de um e cinco litros em cada embalagem]

Valter: “Eu fiz de cada um dos frascos”

Felix: “Então você vai comparar o quê?”

Valter: “O preço de um litro de cada embalagem”

Andrea: “Eu fiz considerando 100ml de cada frasco. Em um deu 0,78 [7,85/10] e o outro 0,35 [17,5/50]. Pra isso eu descobri por quanto que eu tinha que dividir”

Felix: “Eu coloquei o mesmo preço, pra vê quanto que dava pra comprar com o mesmo valor”

Pesquisadora: “É uma possibilidade também! Vamos para o da coca! Vamos vê quanto custa 100ml em cada latinha”

Bianca: “Divide por 2,2; 0,84”

Pesquisadora: “Vamos vê a garrafa, quanto que eu pago em cada 100 ml?. Por quanto eu divido?”

Ina: “Dividir por 15”

Pesquisadora: “Agora vamos ao último, o cereal da caixa”

Ina: “Mas se a gente fizer considerando um grama dá proporcional”

Inara: “Fizemos, 16,29 dividido por 770, deu 0,02. 6,19 dividido por 210 deu 0,02.Nós fizemos assim também e deu igualzinho o seu, mas assim deu um pouco diferentes”

Poliana: “Mas era pra dar igual” [os valores das frações]

Carla: “Não, deu diferente”

Quadro 9 - Análise ideográfica do 6º encontro

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
ENCONTRO 6			
Vamos ao supermercado?			
Andrea E6A1	“Pra saber tudo de um litro [...] Isso, a gente pode só comparar”	Andrea, ao analisar os preços das embalagens dos amaciantes, destaca que determinou o preço de um litro o que lhe permite comparar qual embalagem será mais vantajosa para a compra.	79. Sugere a determinação do valor de um litro para fazer comparação.
Bianca E6A1	Pesquisadora: “Como eu poderia expressar isso [embalagens equivalentes] para saber que é a mesma coisa?” “Pra dar um quilo aqui [embalagem 2 – 500g] você vai pagar os 10,58 de lá [embalagem 1 – 1hg]”	Ao analisar o preço das embalagens de margarina, Bianca ressalta que duas embalagens de 500 gramas custam R$ 10,58 que é o mesmo valor da embalagem de 1kg.	80. Identifica uma proporção.
Poliana E6A1	“É o mesmo valor, só depende da quantidade, é a mesma coisa, é equivalente. Posso pensar numa	Poliana diz que, ao comparar o preço e a quantidade de margarina, vê que o preço a pagar por certa quantidade independe da embalagem	81. Identifica a proporcionalidade entre os

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
	relação entre quantidade e preço, porque eu tô comparando preço e quantidade”	(são equivalentes).	conteúdos das embalagens e o preço.
Bianca E6A1	Pesquisadora: “Mas por que eu preciso fazer isso? [multiplicações ou divisões com os valores para chegar a mesma quantidade]” Bianca: “Pra vê se o grama é o mesmo valor”	Ao ser questionada sobre ser preciso converter os preços ou quantidades, Bianca diz que é para se saber o valor unitário (de um grama) em cada uma das embalagens tornando a comparação possível.	82. Reconhece ser preciso reduzir à mesma unidade de medida para comparar.
Poliana E6A1	“Dá pra fazer com tudo”	Poliana destaca que é possível usar esse processo (de valor unitário) para comparar qualquer produto.	83. Reconhece o processo para a comparação.
Ruth E6A1	“Como são 4 pacotinhos de 100g e 9 pacotinhos de 100g dividimos [o preço] por 4 e por 9”	Ruth, para determinar qual embalagem é mais vantajosa, inicia a resolução obtendo o preço de cada 100 gramas.	84. Determina o preço para a mesma quantidade em cada embalagem.
Valter E6A1	“O frasco I tem um litro só, então eu peguei e multipliquei esse litro por 5 para eu saber quanto custa 5 litros nessa embalagem, que dá 39,25, que é a quantidade do frasco II”	Para identificar qual das embalagens é mais vantajosa, Valter calcula o preço de 5 litros em ambos os recipientes e conclui ser o mesmo.	85. Reconhece a proporcionalidade.
Andrea E6A1	“Eu fiz considerando 100 ml de cada frasco. Em um deu 0,78 [7,85/10] e o outro 0,35 [17,5/50]”	Andrea destaca que considerou a mesma quantidade, 100 ml, para determinar qual embalagem era mais vantajosa.	86. Estabelece uma razão preço/quantidade.
Felix E6A1	Eu coloquei o mesmo preço, pra vê quanto que dava pra comprar com o mesmo valor.	Felix, ao analisar as embalagens, opta por igualar os preços e comparar qual embalagem comprava mais por menos.	87. Escolhe o menor preço como razão de comparação.

Fonte: Autoria própria

7º Encontro

Discussão da tarefa “Brincando de detetive”

Pesquisadora lê a situação proposta

Pesquisadora: “Qual seria a senha?”

Valter e mais algumas pessoas: “432”

Mona: “São eles dobrados né?”

Pesquisadora: “Como vocês fizeram para determinar esse número?”

Ina: “A gente pensou nos números, na simetria, no dois, no três e no quatro”

Pesquisadora: “O que vocês percebem, lembram quando veem esse tipo de figura?”

Ina: “Espelho”

Cristiana faz o movimento com as mãos juntados: “É que se fechar encaixa”

Fernanda: “É idêntico”

Ruth: “Tem um eixo só”

Pesquisadora: “Isso mesmo, eu tenho uma figura semelhante a original, porém em outra posição. E na outra situação, como vocês pensaram para descobrir a senha”

Ina: “Do mesmo jeito, 654”

Pesquisadora: “Vamos pensar juntos aqui”

Valter: “Ah ali é seis”

Poliana: “Ah o seis tá de ponta cabeça”

Ina: “Eu falei 654, porque o 5 e o 4 estão de cabeça para baixa também”

Pesquisadora: “Vamos pensar...Como surgiu esse número, 954. Se colocarmos o espelho em cima teremos um formato parecido com o quatro, mas ainda não conseguimos o identificar, então eu tenho que...”

Ina: “Colocar mais um espelho”

Poliana: “Por isso que tem que fazer com o primeiro [número] ali”

Pesquisadora: “Isso, pois fizemos isso para descobrir o 4 e o 5. Então temos como maior número o 654. Vamos ver como foi pensando esses números. Então eu tinha o 6, onde fica o meu espelho para eu fazer a figura?”

Maria: “Em cima” [pesquisadora vai desenhando conforme professores vão participando]

Pesquisadora: “Já fiz a figura então?”

Ina: “Não, tem que fazer de novo”

Ruth: “Pro seu lado”

Andrea vira o corpo para enxergar a figura

Pesquisadora: “Isso, há vários modos de eu pensar no meu espelho. Posso colocar em qualquer lugar?”

Felix: “Tem que ser idêntico o espaço”

Valter: “Tem que ter a mesma distância”

Pesquisadora traz a definição de simetria

Pesquisadora: “O importante quando eu trabalho com simetria é eu me atentar a...”

Felix: “Ao eixo e a distância”

Quadro 10 - Análise Ideográfica do 7º encontro

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
ENCONTRO 7			
Brincando de detetive			
Valter E7A1	“Não pode ser nove, é o seis mesmo, porque o nove é assim oh [escreve no	Analisando o modo de determinar um dos números do enigma, Valter destaca que é preciso	88. Identifica padrão na sequência.

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
	"ar" o algarismo] e se fizer os espelhos igual dos outros dá errado"	seguir o mesmo modo usado para determinar os outros números.	
Ina E7A1	"No seis, teve que pensar onde colocar, senão não formava a figura que eu queria"	Ina relata que, ao observar a imagem a ser reproduzida [sequência de números seis refletidos], é preciso se atentar ao modo de obter os elementos dela.	89. Importância da identificação da regularidade na sequência.
Valter E7A1	"Tem que pensar na equivalência das distâncias"	Valter destaca que, na tarefa de construir faixas decorativas, é preciso pensar na distância entre os elementos	90. Importância da identificação da regularidade na sequência.
Ruth E7A1	Pesquisadora: "Como é a posição das figuras refletida?" Ruth: "Igual e muda a posição da figura, dependendo do espelho"	Ruth identifica que as figuras refletidas mantem o formato, mas mudam a posição.	91. Identifica o padrão nas figuras.

Fonte: Autoria Própria

8º Encontro

Discussão da tarefa "Vamos brincar?"

Andrea: "E se usar todos de uma vez só?" [sobre a tarefa "Escrevendo números"]

Fátima: "Tem que respeitar só a igualdade, não importa como vamos montar"

Andrea: "Eu pensei numa regra, e ela é válida"

Pesquisadora: "Vamos pensar nas questões. Nessa primeira [tarefa "o encaixe perfeito"], como é?"

Andrea: "Essa é fácil"

Cristiana: "Essa não tinha muita dúvida, era uma sequência"

Pesquisadora: "E esse aqui?" [tarefa "escrevendo números"]

Valter: "Tem como fazer de várias formas. É só ir pensando nos números"

Pesquisadora: "O próximo, dos meninos e meninas?"

Andrea: "Não importa a ordem, a posição que queremos vai ser a mesma"

Pesquisadora: "Vamos ver. A gente percebe que se começarmos com meninos ou com meninas a posição que queremos é a mesma" [pesquisadora faz as duas possibilidades na lousa]

Andrea: "Isso aí mesmo !"

Pesquisadora: "E a próxima? Dos telefonemas?"

Luisa: "Essa nós erramos, nós não pensamos"

Pesquisadora: "Como pensaram?"

Cristiana: "Fizemos o desenho, para saber"

Pesquisadora: "Como?"

Cristiana: "O primeiro fala com todos, o segundo fala com todos menos o primeiro, o terceiro fala com todos menos e segundo e primeiro e assim por diante"

Pesquisadora: "Isso, então no total temos?"

Cristiana: "21"

Pesquisadora: "E o das sequências? Cada grupo tinha uma sequência..."

Wiliam: "A gente foi olhando para os quadradinhos pintados, nem pensamos nos números. Na segunda linha não tinha nada pintado, então ignoramos e fomos contando e buscando uma regra"

Maria: "Olha, pintou o 7, depois o 13, se vermos, 7 com 7 dá 14, menos 1, 13"

Walter: "É o dobro menos um"

Pesquisadora: "E esse daqui. 5, 6, 8, 12, 17, 18"

Ina: "A gente segui a sequência: quatro sem pintar, daí pintou dois seguidos, daí pulou um....Daí percebemos um padrão"

Pesquisadora: "Vocês não olharam para os números né?"

Ina: "Olhamos para os quadradinhos" [posição]

Luisa: "Essa lógica tá certa"

Pesquisdora: "Eu pensei no dobro menos 4. Mas foi bem legal esse modo de pensar, vocês olharam para a disposição dos quadradinhos"

Pesquisadora: "Próximo. Ficou 3, 9, 21 e 45"

Luisa: "Também pensamos nos quadradinhos, dois sem pintar, pinta um, depois ficou seis sem pintar....e assim por diante. Mas qual a regra com os números?"

Walter: "Tem algo haver com o dobro"

Ruth: "É o dobro mais três"

Luisa: "Ah sim!"

Pesquisadora: "O último é do retângulo! Quais são as dimensões do retângulo"

Luisa: "Quanto mais eu agrupar [indaca mão estendendo] maior é o perímetro"

Pesquisadora: “Alguém pensou de um outra forma?”

Ina: “A gente pensou na fórmula, base vezes altura. Daí base 24 e altura 1”

Pesquisadora: “Temos vários modos da área ser 24, mas e o perímetro?”

Poliana: “O maior é o com um e vinte e quatro mesmo”

Quadro 11 - Análise Ideográfica do 8º encontro

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASSERÇÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
ENCONTRO 8			
Vamos brincar?			
Fernanda E8A2	“Tem que respeitar só a igualdade, não importa como vamos montar”	Na tarefa que solicitava escrever sentenças matemática usando o sinal de igualdade, Fernanda destaca que os números e operações usados para montar a sentença poderiam ser variados, desde que a igualdade se mantivesse.	92. Identifica a igualdade como objetivo.
Carla E8A2	“Fizemos o desenho para saber: o primeiro fala com todos, o segundo fala com todos menos o primeiro, o terceiro fala com todos menos o segundo e primeiro e assim por diante”	Carla destaca que, para saber o número de telefonemas dados, fez desenhos que lhe possibilitasse analisar como seriam as ligações entre os amigos.	93. Usa desenhos para ilustrar a situação proposta no problema. 94. Identifica o padrão na sequência de telefonemas
Ina E8A2	“Olhamos para os quadradinhos, a gente seguiu a sequência: quatro sem pintar, daí pintou dois seguidos, daí pulou um .... percebemos um padrão”	Para determinar o próximo número da sequência, Ina destaca que observaram os quadradinhos coloridos e buscaram um padrão.	95. Identifica o padrão na sequência.

Fonte: Autoria própria

Na pesquisa, buscamos compreender “quais aspectos do fazer do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental revelam características do pensamento algébrico?”. Assumimos uma postura fenomenológica para a investigação e com os quadros anteriores explicitamos o movimento da análise ideográfica. Conforme dissemos, a última coluna foi feita por último, após se ter a visão do todo. Agora, nos voltamos para as ideias nucleares que enunciamos nessa quarta coluna e interrogamos o que elas nos dizem acerca do interrogado.

Para tanto, construímos um quadro que não trazemos neste texto, apenas expondo todas as ideias nucleares (96 ideias nucleares). No movimento, algumas delas nos pareciam próximas, isto é, diziam de um mesmo aspecto do modo do fazer matemática do professor dos anos iniciais. Procuramos agrupá-las segundo essa interpretação, o que deu origem ao quadro 12 que nomeamos: primeiras convergências do movimento de análise nomotética, isto é, estamos buscando na análise individual características gerais. Esse quadro 12 também foi construído em dois momentos. Primeiro fizemos a primeira coluna em que identificamos as ideias nucleares (usando números) e as agrupamos por semelhança de significado. Depois, lendo várias vezes o que tais ideias procuravam expressar e buscando entender por que as tínhamos colocado “em um mesmo grupo”, fomos construindo a segunda coluna, que “nomeia” o grupo – 1ª convergência.

Quadro 12 - Análise Nomotética- primeiras convergências

Ideias Nucleares	1º Convergência
1. Estratégia para realizar contagem. 2. Estratégia para realizar contagem. 3. Aponta a importância de compreender os significados dos números em diferentes contextos. 9. Identifica diferentes notações de fração. 4. Aponta a importância da leitura para compreender o que é para ser feito. 11. Usa recurso manipulável para se expressar. 21. O desenho como recurso para expressar a equivalência de frações. 53. Importância da leitura para a compreensão e interpretação dos dados. 94. Usa desenhos para ilustrar a situação proposta no problema.	**1. Estratégias para ler e interpretar problemas**
5. Reescreve o problema na linguagem matemática 6. Expressa, por meio de frações, uma ideia de quantidade relacionada ao número 1. 7. Representa a quantidade usando frações. 9. Identifica diferentes notações de fração. 10. Propõe reduzir as frações à mesma notação para somá-las. 12. Identifica a fração como possibilidade de expressar metade. 21. O desenho como recurso para expressar a equivalência de frações. 22. Destaca que há formas distintas para compor um número. 49. Vê a possibilidade da decomposição numérica.	**2. Usa notação matemática para se expressar**
13. Identifica outros fatores que têm o mesmo produto. 14. Ressalta a equivalência entre sentenças matemáticas. 15. Identifica o sinal de igualdade como equivalência. 16. Identifica o sinal de igualdade como equivalência 17. Identifica o sinal de igualdade na sentença como uma operação a ser realizada 18. Identifica o sinal de igualdade na sentença como uma operação a ser realizada. 19. Interpreta o sinal de igualdade como indicativo do resultado da operação realizada. 20. Interpreta o sinal de igualdade como equivalência. 23. Atribui significado ao sinal de igualdade. 31. Identifica a equivalência entre as sentenças matemáticas 52. Importância da leitura para a compreensão e interpretação dos dados. 93. Identifica a igualdade como objetivo.	**3. Leitura e interpretação do sinal de igualdade**

Ideias Nucleares	1º Convergência
24. Destaca o elemento neutro da multiplicação. 25. Generaliza uma propriedade da multiplicação. 26. Destaca zero como elemento neutro da adição. 27. Identifica o elemento neutro da multiplicação 28. Generaliza o identificado (propriedade) 29. Associa a adição a zero com uma "não operação". 30. Expressa uma propriedade da adição em que uma das parcelas é zero. 32. Identifica a propriedade comutativa da adição. 33. Identifica propriedade comutativa da adição. 34. Identifica propriedade comutativa da adição. 35. Realiza a subtração de quantidades iguais. 36. Identifica o elemento neutro na adição. 37. Identifica que a soma de números opostos é zero. 38. Identificar uma propriedade facilita a interpretação da situação. 39. Destaca um modo de fazer a tabuada que pode ser alterado. 40. Identifica a relação entre as linhas da tabuada. 42. Investiga a relação encontrada na tabuada. 43. Investiga a relação encontrada. 44. Investiga a relação encontrada. 45. Investiga relações entre as linhas da tabuada 46. Investiga buscando generalizar o feito. 47. Identifica a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. 48. Investiga relações entre as linhas da tabuada 70. Identifica uma forma de fazer a adição solicitada.	**4. Explora propriedades ao trabalhar com as operações**

Ideias Nucleares	1º Convergência
50. Identifica uma regularidade na sequência. 51. Cria estratégias para buscar a regularidade na sequência. 54. Identifica a relação entre um elemento da sequência e sua posição. 55. Compreende a importância da relação entre a posição e um elemento de uma sequência. 56. Generaliza a relação entre posição e elemento. 57. Destaca a importância da relação entre elementos de uma sequência e posição. 58. Identifica a importância do padrão na sequência. 59. Destaca a importância de identificar um padrão. 60. Identifica o padrão na sequência. 61. Estratégias para identificar regularidade numa sequência. 63. Identifica a relação entre a posição e os elementos na sequência. 64. Importância da análise da sequência na busca por regularidade. 65. Investigam relações em sequências numéricas. 66. Exploram a construção de outras sequências. 67. Realizam investigações mantendo o padrão da sequência. 68. Identificam possibilidades a partir do padrão oferecido. 69. Investiga relações nas sequências. 71. Identifica um padrão na sequência. 72. Identifica a relação estabelecida na sequência. 73. Investiga a forma do tabuleiro. 74. Identifica um padrão na sequência. 75.Sugere buscar, na sequência, uma relação entre posição e os elementos. 76. Investigam relações nas sequências 77. Explora a sequência numérica. 78. Investigam relações nas sequências numéricas 79. Identifica a relação entre o elemento e sua posição na sequência. 89. Identifica um padrão na sequência 90. Importância da identificação da regularidade na sequência. 91. Importância da identificação da regularidade na sequência. 92. Identifica o padrão nas figuras. 95. Identifica o padrão na sequência de telefonemas 96. Identifica o padrão na sequência	**5. Explora padrões e sequências**

Ideias Nucleares	1º Convergência
80. Sugere a determinação do valor de um litro para fazer comparação. 81. Identifica uma proporção. 82. Identifica a proporcionalidade entre o conteúdo das embalagens e o preço. 83. Reconhece ser preciso reduzir à mesma unidade de medida para comparar. 84. Reconhece o processo para a comparação. 85. Determina o preço para a mesma quantidade em cada embalagem. 86. Reconhece a proporcionalidade. 87. Estabelece uma razão preço/quantidade. 88. Escolhe o menor preço como razão de comparação.	**6. Explora a ideia de proporcionalidade**

Fonte: Autoria própria

As seis primeiras convergências ainda não nos apontavam características gerais para compreender "quais aspectos do fazer do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental revelam características do pensamento algébrico?", pois interpretávamos que havia similaridades entre elas. Assim, prosseguimos com o movimento interpretativo, interrogando o que se mostra nessas convergências que, de modo geral, diz dos aspectos do fazer matemática do professor dos anos iniciais que foram expressos no curso. Salientamos que esse é o momento da pesquisa fenomenológica em que o pesquisador é orientado apenas por sua interrogação ou, segundo Husserl, é o movimento da *époche* ou redução fenomenológica, "no qual o pesquisador procura colocar em 'suspensão' ou 'entre parênteses' seus conhecimentos ou opiniões sobre o que interroga de modo que seja possível que os dados lhe sejam reveladores do indagado" (FERREIRA, 2019, p. 153).

Nesse movimento interpretativo, as seis convergências que revelavam aspectos do fazer matemática do professor nos diziam de seu modo de expressar os objetos matemáticos e de seus modos de explorar os conteúdos matemáticos. Ou seja, para nós esses são os aspectos que indicam características do pensamento algébrico manifesto pelos professores ao longo de toda a vivência no curso. Essa interpretação caminha na direção de duas grandes regiões de generalidade ou Categorias Abertas, que denominamos "Modos de expressar o feito matematicamente" e "Modos de explorar os conteúdos matemáticos".

A categoria *Modos de expressar o feito matematicamente* envolve ideias relacionadas aos modos pelos quais os professores expressam o fazer matemático. Ou seja, ela indica que há um modo de o professor fazer matemática e que ele busca expressar esse fazer por meio da linguagem (oral e escrita), valendo-se de notações matemáticas e de outros modos de expressão como desenhos, dobras em papel, etc.

Já a categoria denominada *Modos de explorar os conteúdos matemáticos* as ideias estão relacionadas aos modos pelos quais os professores compreendem, exploram e lidam com os conteúdos matemáticos. As ideias nucleares que convergiram para esta categoria nos indicam que ao fazer matemática, os professores se lançam às tarefas de formas variadas, buscando conteúdos que consideram relevantes para solucionar o proposto. No diálogo com o grupo, eles expressam esses conteúdos matemáticos para os quais estão atribuindo significado mediante as relações que estão estabelecendo.

É importante dizer que, embora no texto escrito essas categorias sejam duas e que iremos discuti-las separadamente, elas se complementam, podendo haver aspectos de uma na outra. Isso, para nós faz sentido, pois se pensamento e linguagem são simultâneos, o fazer matemática e expressar o feito, não podem ser considerados atos disjuntos.

Na sequência deste texto, apresentamos o quadro 13 com a convergência para as Categorias Abertas e, em seguida, passamos a discuti-las, à luz da interrogação de pesquisa e em articulação com os autores lidos.

Quadro 13 - Categorias Abertas

1ª Convergência	Categorias abertas
1. Estratégias para ler e interpretar problemas	Modos de expressar o feito matematicamente
2. Usa notação matemática para se expressar	
3. Leitura e interpretação do sinal de igualdade	
4. Explora propriedades ao trabalhar com as operações	Modos de explorar os conteúdos matemáticos
5. Explora padrões e sequências	
6. Explora a ideia de proporcionalidade	

Fonte: Autoria própria

6. 2 Interpretação das categorias abertas

Conforme destacamos anteriormente, nesta seção pretende-se expor o compreendido acerca da interrogação. Para tanto, vamos abrir à interpretação de cada uma das categorias enunciadas.

6.2.1 Modos de expressar o feito matematicamente

. A proposta do curso levou os participantes a buscarem modos de expor o feito e o compreendido acerca das situações que vivenciavam. No diálogo, alguns aspectos do seu fazer matemática foram se revelando. A nomeação das categorias foi inspirada nesse fazer, pois elas expõem aspectos que convergiram para a forma pela qual os professores se voltavam para a leitura, a interpretação, as notações que usavam e os modos de se expressarem usando diversas formas de linguagem, entre elas a linguagem matemática.

As ideias nucleares que convergem para esta primeira categoria indicam que o fazer matemática do professor que ensina nos anos iniciais revela-se pelos modos expressão. Isso nos faz atentos os modos de expressão dos participantes. Nem sempre eles se valiam da fala (linguagem oral) ou da escrita para dizer algo. Antes, havia "uma intenção de comunicar ao outro o percebido, no qual o corpo estava presente" (PAULO, 2001, p. 71). Ou seja, gestos e atitudes foram importantes formas de comunicação.

Conforme entendemos em Merleau-Ponty (1994), o corpo não é apenas o que define a biologia e a fisiologia.

> Ele é a origem de todos os outros, o próprio movimento de expressão, aquilo que projeta as significações no exterior dando-lhes um lugar, aquilo que faz com que elas comecem a existir como coisas, sob nossas mãos, nossos olhos [...] o corpo é o nosso meio geral de ter um mundo (MERLEAU-PONTY, 1994, p. 202-203).

Nesse sentido, o corpo é o "veículo do ser no mundo" (MERLEAU-PONYT, 1994, p. 122) e, *com* ele, em nossas possibilidades táteis, visuais, olfativas, etc, percebo o mundo, pois o corpo é um ser de potência que percebe, compreende, interpreta e expressa.

Merleau-Ponty (1994) destaca que por meio dos gestos expressamos uma forma de ser no mundo. Os gestos expressivos se valem da fala, da escrita, da pintura, da música, da dança, do meu corpo. Bicudo (2020), interpretando Merleau-Ponty (1994), diz que a expressão

> Abrange toda a dimensão da linguagem humana: do corpo-vivente, pelos gestos e respectivos movimentos intencionais (kinestésicos) que evidenciam a direção da ação, pela fala de palavras carregadas de sentidos e significados histórico-culturais, pela estrutura gramatical da língua de um povo, por desenhos, rituais e por aí vai (BICUDO, 2020, p. 40).

Compreendemos, com as leituras de Merleau-Ponty (1994), que a expressão é uma atitude do corpo que manifesta o percebido, e o corpo é potência motora, afetiva e expressiva.

> O corpo se move de acordo com sua afetividade e expressa esse movimento na intersubjetividade. O corpo é corpo próprio e ser no mundo, ao mesmo tempo e tal ambiguidade é que revela o enigma da expressão, pois o corpo se expressa ao expressar o mundo, ou seja, expressa seu sentido ao expressar o sentido que o mundo tem para ele (REIS, 2011, p. 142).

O meu corpo, enquanto potência de intencionalidade, se lança da expressão para o mundo e, ao estar *com o mundo,* expõe possibilidades de compreensão que, na visão heideggeriana, é "uma possibilidade que o homem traz consigo de organizar o mundo, as coisas e escolher o seu modo de ser [...] se dá nas possibilidades que o homem tem de ser e estar no mundo" (PAULO, 2001, p. 21-22).

Entende-se que a potência da expressão se dá na abertura da experiência ao novo, na possibilidade do sujeito se voltar para o feito de modo atento, procurando compreendê-lo.

Em nossa investigação, buscamos conhecer características do pensamento algébrico reveladas no fazer matemática do professor que ensina matemática nos anos iniciais e, para isso, procuramos estar com esses professores no curso de extensão. Ao *estar junto a* eles, os ouvimos, deixando-os se expressar, visando entender o seu pensar quando estão com a álgebra. Conforme entendemos, a expressão e o pensamento são fenômenos indissociáveis. Merleau-Ponty (1994) nos diz que é por meio da expressão que o pensamento se torna nosso, isto é, para o autor, pensamento e expressão se constituem simultaneamente, não havendo uma hierarquia ou ordenação. Isso é tão potente no autor que, “um pensamento que se contentasse em existir para si, fora dos incômodos da fala e da comunicação logo que aparecesse cairia na inconsciência o que significa dizer que ele nem mesmo existiria para si” (MERLEAU-PONTY, 1994, p. 241).

Vale destacar que, para Merleau-Ponty, a linguagem é uma forma de expressão e toda palavra carrega em si um sentido que está presente no mundo. A palavra não é algo vazio que apenas expressa um pensamento ou que o pensamento é “interior” à palavra, pois ele não existe fora do mundo e das palavras. Merleau-Ponty (1994) destaca que o que nos faz crer que um pensamento existiria por si antes da expressão, é a existência de pensamentos já expressos e dos quais lembramos.

Assim, “a palavra tem o sentido sem, no entanto, contê-lo [...] o sentido irrompe através da palavra, projetando no silêncio articulador da linguagem o que este queria e sozinho não obtinha, mas sem obturá-lo” (FURLAN; BOCCHCI, 2003, p. 450). Esse *sentido* destacado pelos autores não é dado, mas compreendido nas ações, na atividade do sujeito que está junto ao mundo e ao outro, que se abre ao diálogo e a escuta.

> O maior benefício da expressão não é consignar em um escrito pensamentos que poderiam perder-se, um escrito quase não relê suas próprias obras e as grandes obras depositam em nós, na primeira leitura, tudo aquilo que a seguir extrairemos dela. A operação da expressão, quando é bem-sucedida, *não* deixa apenas um sumário para o leitor ou para o próprio escritor, ela faz a significação existir como uma coisa no próprio coração do texto, ela a faz viver em um organismo de palavras, ela a instala no escritor ou no leitor como um novo órgão dos sentidos, abre para nossa experiência um novo campo ou uma nova dimensão (MERLEAU-PONTY, 1994, p. 248).

É pela expressão que o sujeito se ex-põe, dá-se ao conhecimento de si e do outro e, por isso, o sujeito busca formas de expressão já conhecidas, de modo que elas possam corresponder às suas experiências. Conforme Bicudo (2020, p 43), “ao se valer de linguagens já postas no mundo-vida, que habita com os outros e à medida que o expresso faz sentido para o outro que também com ele [sujeito] compartilha o mundo-vida, é que há uma aceitação do expresso pelos sujeitos que estão juntos”.

No curso, os professores se envolveram com o fazer matemática, buscando diferentes modos de expressar o compreendido e foram envolvidos por um movimento que lhes permitia organizar o pensar e expô-lo, tornando a comunicação possível. Essa comunicação que se estabelece no grupo funda um sentido comum às experiências e significações de cada um e possibilita que novas significações sejam produzidas.

Ao nos voltarmos para a experiência vivida com os professores que ensinam matemática nos anos iniciais, à luz de nossa pergunta de pesquisa – *Quais aspectos do fazer matemática do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental revelam características do pensamento algébrico?* - entendemos que seus modos de compreender e expressar os conteúdos matemáticos revelam características do pensamento algébrico.

As tarefas desenvolvidas no curso envolveram os conteúdos matemáticos rotineiramente discutidos na sala de aula dos anos iniciais, como números, tabuadas, sinal de igualdade, entre outros. Ao se dispor a discutir e resolver o que lhes estava sendo proposto, os professores passaram a ler, escrever e interpretar a linguagem matemática.

Essa linguagem, pode ser entendida como um ato de revelação do compreendido, daquilo que para os professores fazia sentido ao estar com as tarefas matemáticas. É, na visão heideggeriana, uma possibilidade humana de expressão e compreensão que se dá na abertura do homem para a experiência. Antes de ser a expressão do pensamento, a linguagem é o que possibilita ao homem ser (ROCHA, 1983).

Entendendo a linguagem como expressiva de compreensões, questionamos: "o que é isto, a linguagem matemática?". Longe de buscar uma definição ou um tratado sobre a linguagem matemática, queremos expor o modo pelo qual a estamos considerando nesta pesquisa. Para tanto, buscamos as palavras de Lorenzatti (2009), para quem,

> A linguagem matemática pode ser definida como um sistema simbólico, com símbolos próprios que se relacionam segundo determinadas regras. Esse conjunto de símbolos e regras deve ser entendido pela comunidade que o utiliza. A apropriação desse conhecimento é indissociável do processo de construção do conhecimento matemático (LORENZATTI, 2009, p. 90).

Assim compreendida pode-se dizer que a linguagem matemática está articulada à produção de conhecimento o que nos leva novamente à visão merleaupontyana de linguagem e pensamento como fenômenos indissociáveis, constituindo-se simultaneamente. Isso significa que "ela *é* a tomada de posição do sujeito no mundo, de suas significações" (MERLEAU-PONTY, 1994, p. 262), uma vez que expõe o modo de o sujeito compreender o mundo e expressar o compreendido.

> É preciso reconhecer então essa potência aberta e indefinida de significar – quer dizer, ao mesmo tempo de apreender e de comunicar um sentido – como um fato último pelo qual o homem se transcende em direção a um comportamento novo, ou em direção ao outro, ou em direção ao seu próprio pensamento, através de seu corpo e de sua fala (MERLEAU-PONTY, 1994, p. 263)

A linguagem matemática tem um estilo próprio que permite que o sujeito organize, estruture e expresse os objetos matemáticos compreendidos. Esse estilo, entretanto, deve fazer sentido aos sujeitos.

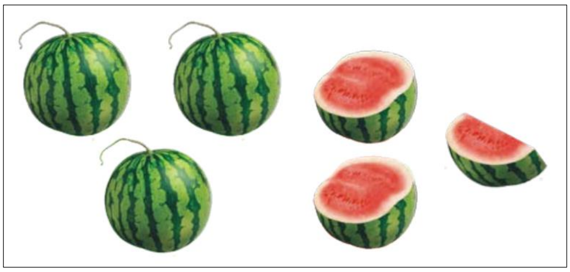
Para Garnica e Bicudo (1994), a compreensão da linguagem matemática pode se dar por meio da interpretação de textos de matemática, uma vez que, se há uma linguagem matemática, existem textos que se valem dela. Para os autores, um texto é todo discurso fixado pela escrita, sendo algo que se constroi na tarefa da leitura, entendida "não [como] uma decifração de sinais gráficos, mas sim como uma compreensão da expressão de uma linguagem, uma possibilidade de revelação do mundo" (GARNICA; BICUDO, 1994, p. 96). Isto é, a leitura e interpretação do texto matemático possibilitam uma compreensão do mundo ou uma perspectiva pela qual ele se mostra.

Esse processo compreensivo envolve tanto a leitura quanto a interpretação do texto escrito na linguagem matemática. Ao investigar a escrita matemática, Machado (2003), destaca-a como atividade humana, como procedimento intelectual e de possibilidades de formalização. A escrita matemática é uma possibilidade de realização da linguagem matemática, sendo o termo "realização" utilizado para "expressar a ação ou o movimento de tornar real ou efetivo; de acontecer, efetuar; de por em ação ou em prática a expressão da compreensão de ideias matemáticas mediante a linguagem" (MACHADO; BICUDO, 2006, p. 109). Desse modo, a escrita matemática permite que o sujeito expresse sua compreensão sobre a matemática e sobre o seu próprio fazer matemática, sendo "utilizada como elo no processo de comunicação" (MACHADO; BICUDO, 2006, p. 109).

Direcionando-se para a região de inquérito da nossa pesquisa, ou seja, para o curso de extensão com professores dos anos iniciais, vimos que os participantes, ao estarem com os colegas, a pesquisadora e as tarefas matemáticas, se valeram (também) da linguagem matemática para expressar o seu fazer e os modos pelos quais compreendiam os conteúdos, revelando características do pensamento algébrico.

Para os participantes, é importante que se compreenda o que é expresso numa situação para que, posteriormente, possam-se eleger estratégias de solução. No primeiro encontro do curso, intitulado "Matematiquês", na tarefa "O problema do funcionário Roberval", percebemos certa inquietação nos participantes.

Figura 43 - Tarefa "O problema do funcionário Roberval"



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Essa inquietação revelava uma curiosidade e uma hesitação sobre a forma pela qual deveriam expressar a quantidade de melancias. Havia uma disposição ao pensar, ou seja, uma atitude do professor que se lançava às possibilidades de compreender o desconhecido.

Suas falas trazem uma preocupação com a forma correta de dizer, para que mostre o conhecido e seja compreendido pelo outro. À medida que analisam a situação, os professores compartilham essa ansiedade e discutem com os colegas modos de interpretar o que na imagem conseguem ler.

Wiliam: "Quem contar vai contar assim?"

Ruth: "Mas será que o Roberval vai pensar assim?"

Grupo olha bastante para a imagem. Alguns vão explicando para outros.

Catarina: "Mas tem que saber que as duas metades ali é um"

Ruth para Carla: gesticula com as duas mãos, "fechando-as" como unindo as duas metades da melancia.

Cristiana: "Três inteiros e algumas partinhas" [risos]

Grupos escrevem bastante nas folhas

Bianca: "Eu fui pensando nas frações que representam os desenhos"

Andrea vai explicando para colega como pensou, escrevendo na folha.

Eles analisam o que é expresso em cada figura (cada uma das melancias) interrogando se é possível relacioná-las e, se for, como fazê-lo? Há um movimento dos professores que se lançam à exploração. O "estar-lançado refere-se ao modo no qual estamos cotidianamente jogados no desempenho de uma tarefa, o fato de estarmos imersos em uma determinada ocupação e nela nos empenharmos" (SANTOS; RIBEIRO, 2007, p. 7).

Os professores compartilham compreensões, comunicam-se.

A comunicação se dá na existência de uma significação comum que permite que as pessoas se relacionem. O homem, entendido como ser-no-mundo, é engajado em uma cultura de tal modo que a expressão pode ser vista como um 'renovar de significações'

> já assimiladas pela cultura [...] Isso nos leva a entender que, para Merleau-Ponty, a comunicação se dá entre sujeitos falantes, dotados de certo estilo próprio, e não entre pensamentos abstratos ou representações. Dessa forma, a comunicação não é fundada em um sentido comum das experiências de cada um, mas ela própria funda esse sentido comum. O comportamento humano, como afirma o autor, cria significações e a fala é apenas um caso entre outros. O ser humano visa ao mundo e passa a expressá-lo pelo seu corpo (FERREIRA, 2019, p. 47).

As estratégias compartilhadas vão se complementando, pois o solo lhes é comum: eles compartilham de um modo de fazer matemática que é cultural. A abertura ao diálogo os faz explorar modos de tratar os conteúdos matemáticos e, à medida que elas vão sendo expressas, possibilitam novos significados.

Continuam as discussões, buscando a quantidade total de melancia.

> *Pesquisadora: "Pessoal! Vamos tentar ajudar o Roberval, quantas melancias há na banca de frutas do chefe dele?*
>
> *Wiliam: "Quatro melancias mais um quarto"*
>
> *Catarina: "Três inteiros, duas metades e um quarto"*
>
> *Valter: "Eu fiz aqui e deu dezessete quartos"*
>
> *Carla: "É né, se fosse dividir, dava dezessete"*
>
> *Walter: "É, fazer o MMC"*
>
> *Luisa: "Ah é"*
>
> *Maria: "Vamos partir tudo!"*
>
> *Andrea: "Segundo o Valter, vamos partir tudo"*
>
> *Cristiana: "Duas inteiras, duas metades e uma metade da metade"*
>
> *Valter: "Eu fiz de outro jeito também. Eu marquei quatro inteiros e um quarto"*
>
> *Pesquisadora: "Como vocês fizeram?"*
>
> *Andrea: "Tem que ler e interpretar. Acho que é difícil você representar, as partes. Eu li e já fui fazendo representação, desenho"*
>
> *Bianca: "Fui pensando nas frações que representam os desenhos"*
>
> *Pesquisadora: "Valter, como você pensou no dezessete quartos?"*
>
> *Valterr: "Eu fui somando, três inteiros, mais metade, mais metade, mais um quarto e o mmc deu quatro, fui fazendo, multiplicando e dividindo deu dezessete"*

Nota-se que, entre os professores, há a preocupação em expressar a situação através da linguagem matemática. Eles buscam "traduzir" os desenhos para a notação matemática, usando seus conhecimentos sobre frações. Catarina ressalta: "*Três inteiros, duas metades e um quarto"* e Cristiana: *"Duas inteiras, duas metades e uma metade da metade"*.

Vê-se que, inicialmente, os professores exploram a figuras se atendo aos aspectos visuais. No decorrer do diálogo, eles caminham para uma interpretação da quantidade. O que essas imagens dizem em termos de uma quantidade de melancias? Eles iniciam uma busca que não diga apenas daquelas melancias ali desenhadas, mas seja expressão da situação matemática retratada.

Ponte, Branco e Matos (2009), destacam que uma das características do pensamento algébrico é a capacidade de o sujeito "traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa" (p. 11). O que se mostra no diálogo é uma busca pela linguagem. Ou seja, a quantidade de melancia que está no desenho pode ser vista de diversas formas, mas como, do ponto de vista da linguagem matemática, poderíamos expressar tal quantidade?

As frações são identificadas como possibilidade de expressar o que está sendo questionado, resta encontrar o modo correto de responder. Valter quer adicionar inteiros e partes e diz precisar do mínimo múltiplo comum (m.m.c): *"Eu fiz aqui e deu dezessete quartos. Eu fui somando, três inteiros, mais metade, mais metade, mais um quarto e o mmc deu quatro, fui fazendo, multiplicando e dividindo deu dezessete".* Mas Maria se surpreende: *vamos partir tudo!* Carol, concorda e justifica: *você pega o menor pedaço e compara.*

O pensar vai sendo explícito e traz a experiência dos professores com o conteúdo matemático. Carla considera que a ideia ainda precisa ser mais bem detalhada e complementa: "*Assim oh: você pega o menor pedaço e compara*".

Manifesta-se o conhecido: para adicionar frações é preciso compará-las. Mas como? Partindo tudo! Ou, ainda, "*pegando o menor pedaço para comparar*". A unidade de medida é necessária. Agora vamos somar frações ou vamos medir? A unidade de medida, o menor pedaço, permite que seja feita a comparação entre todas as figuras e, então, podemos juntar (somar) as partes.

No diálogo os professores lançam mão de modos de expressão para dizer algo sobre as frações. Não somente para somar esses pedaços de melancia, mas para somar quaisquer frações. Os professores buscam modos de resolver a situação no contexto matemático, se voltam para o que a figura expressa, procuram ler o que a eles se anuncia e concordam sobre as possibilidades que se abrem.

Interpretamos que esse processo de explorar, de pensar sobre e com a tarefa proposta, revela características do pensamento algébrico, pois os professores buscam estabelecer relações entre as frações para poder adicioná-las, determinam uma unidade de comparação e mostram *entender* como resolver o proposto. Esse *entendimento* vai sendo constituído na investigação do grupo e no diálogo, no anseio de dar uma resposta que seja satisfatória do ponto de vista da linguagem matemática.

Como destacamos anteriormente, se consideramos que o pensamento algébrico se volta para os objetos matemáticos, entendidos como objetividade, - no caso de nossa tarefa, as frações – vê-se elementos característicos desse pensar que se manifesta na busca por uma relação entre as partes e na investigação dos procedimentos visando atribuir significado ao que se faz.

No 2º encontro do curso, intitulado "Igual a quê? Significados do sinal de igualdade", a segunda tarefa proposta, "É tudo a mesma coisa?", também há diálogos que convergiram para esta categoria.

Figura 44 – Tarefa "É tudo a mesma coisa?"

É tudo a mesma coisa?

O resultado de 45 multiplicado por 3 é 135

A divisão de 121 por 11 resulta em quociente 11

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Figura 45 – Tarefa "É tudo a mesma coisa?" II

Poliana e João colecionam figurinhas de um álbum. Eles iniciaram a coleção recentemente, e decidiram comparar a quantidade de figurinhas que cada um possuía. Poliana disse que tinha 16 figurinhas ao todo, e João disse que tinha 5 na primeira página, 6 na terceira página e 5 na última.

A cantina do Sr. Juvenal é conhecida pelos deliciosos pratos italianos. O mais famoso é o espaguete ao molho bolonhesa. A massa é vendida em porção individual no valor de R$ 36,00. Quanto pagará uma família de quatro pessoas, que quiser comer, cada uma, um espaguete ao molho bolonhesa?

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

No primeiro contato com a tarefa cada um realizava algumas tentativas e, em seguida, buscava a parceria do colega.

> *Pesquisadora: "Vamos considerar o problema da Poliana e do João. Como vocês pensaram?"*
>
> *Valter: "No da Poliana, que diz que Poliana tinha 16 e João tinha 5, depois mais 6, depois mais 5 que é a mesma coisa, eu disse que P = J. É, a Poliana tem a mesma quantidade que o João".*
>
> *Ina: "Eu coloquei – número de figurinhas de Poliana = número de figurinhas de João, os dois tem o número de figurinhas =, usei o símbolo"*
>
> *Andrea: "Fiz desenhos para cada um, Poliana e João. E também Poliana = João. E 16 = 16".*
>
> *Pesquisadora: "E o da cantina? Como vocês pensaram?"*
>
> *Andrea: "Eu fiz 36 x 4 = 30 + 30 +30 +30 + 6 + 6 + 6 + 6 = 36 + 36 + 36 + 36 = 36 x 4 = 144".*
>
> *Valter: "Eu fiz um aqui oh: 4p = 36 x 4, 4 pessoas = 36 x 4".*

No movimento da interpretação, novamente, os professores buscam a escrita matemática para expor suas compreensões sobre o sinal de igualdade no contexto de cada situação. A escrita vai se revelando como "condutora do raciocínio, como estratégia intelectual do sujeito para "ampliar" sua percepção e a sua intuição [...] como extensão do sujeito ao expor o conhecimento construído" (MACHADO; BICUDO, 2006, p. 118).

Questionamos o significado do sinal de igualdade, um símbolo escrito no papel em cada uma das tarefas. Todos os participantes destacaram a ideia de equivalência que, conforme Ponte, Branco e Matos (2009), envolve uma relação específica entre sentenças matemáticas. Insistimos se haveria outra possibilidade para interpretar tal símbolo, e os professores hesitaram.

A fala de um dos participantes ilustra tal dificuldade: "*Igual é igual!*". Parece-nos que essa é uma reflexão que não fez parte da vivência escolar – enquanto estudante ou como professor - o que gera inquietação e desassossego.

Essa experiência nos chama a atenção para a importância de se pensar os objetos matemáticos. Bicudo (1987), ao falar sobre o sentido de ensinar, aprender e conhecer, destaca:

> O conhecimento sobre o corpo de conhecimentos a ser ensinado surge como um foco merecedor de atenção para a atividade de ensino. Tal atividade exige que o professor conheça a realidade do objetivo específico da área de conhecimento com a qual trabalha. Na busca deste conhecimento aparecem indagações sobre o ser dessa área, como ela se mostra, ou seja, quais são as suas afirmações básicas (proposições fundamentais), quais as teorias que a sustentam, qual o seu significado no mundo humano, o que ela revela desse mundo, como procede para gerar os conhecimentos que agrupa de modo lógico no que é denominado de corpo de conhecimentos ou teoria, como expressa seus conhecimentos, ou seja, qual o modo de expressão específico de que se utiliza para comunicar o percebido e o conhecido sobre o mundo (BICUDO, 1987, p. 51).

Considerando nossa discussão sobre o sinal de igualdade, depois de alguma intervenção da pesquisadora, os professores se abrem às suas possibilidades. Ou seja, para provocar outros modos de significar o sinal de igualdade, expusemos a resolução de uma expressão matemática feita por um aluno:

> *Pesquisadora: "Vou colocar uma situação aqui pra ajudar a gente a pensar. Vamos supor que temos essa situação – Qual o resultado de 5 + 3 + 8?"*
>
> *Alguns falam: "16"*
>
> *Pesquisadora: "Vou apresentar a resolução de um aluno dos anos iniciais. Ele fez: 5 + 3 = 8 + 8 = 16"*
>
> *Alguém fala: "Ah sim"*
>
> *Wiliam: "Tá errado"*
>
> *Ruth: "Fazendo de cabeça tá certo"*
>
> *Pesquisadora: "Tá certo?"*
>
> *Carla gesticula negativamente com a cabeça*
>
> *Valter: "Não!"*
>
> *Participantes ficam pensativos*
>
> *Valter: "5 + 3 = 8 + 8"*
>
> *Professores começam a conversar entre si*
>
> *Valter: "Se eu tirar o sinal de igualdade aqui [primeiro] aí sim"*
>
> *Ruth: "Se você tivesse colocado um sinal de mais ali, entre o 8 e 8, ficaria 5 + 3 = 8 + 8....[interrompe a fala] Ah não...Não dá"*
>
> *Fernanda: "Tá errado"*
>
> *Poliana: "5 + 3 é igual a 8 mas 8 mais 8 não é igual a 5 + 3"*
>
> *Andrea: "Tem um 8 sobrando aí"*
>
> *Valter: "Cê tá falando que 8 [5 + 3] é igual a 16 [8 + 8]"*
>
> *Fernanda: "É como se ele tivesse fazendo a expressão, 5 + 3 , 8. Depois 8 + 8, 16"*
>
> *Alex: "5 + 3 não é igual a 8 + 8"*
>
> *Poliana: " 5 + 3 é só 8"*
>
> *Cristiana: "5 + 3 não é igual a 8 + 8"*
>
> *Valter: "Na verdade ele desmembrou a conta ali. Ele fez duas contas para resolver uma"*
>
> *Cristiana: "O que ele fez não é igual a 8 + 8"*

A situação provoca os professores. Há inquietação no grupo que reconhece que há algo *errado*, algo que não satisfaz o procedimento necessário. A interpretação do feito pelo aluno vai dando abertura à interpretação: o que significa o sinal de igualdade?

Entendemos, com Bicudo (1994), que à medida que avançamos nas discussões com os professores, buscamos dar "atenção aos sentidos que surgem e não só aos referentes, aos signos e significados matemáticos" (BICUDO, 1994, p. 7). Compreendemos que, no movimento de interpretação da escrita matemática, há abertura para outros modos de significar o conteúdo matemático. A noção de equivalência atribuída ao sinal de igualdade vai sendo questionada pelos professores, parece haver outras possibilidades. Os professores continuam a discussão sobre o proposto:

> *Valter: "Ele já emendou aí. O raciocínio dele está certo, o problema é como ele representou"*
>
> *Fernanda: "Gente mais isso é uma expressão, o raciocínio está certo"*
>
> *Andrea: "Não!" [grupo gesticula concordando com Andrea]*
>
> *Felix: "É diferente"*
>
> *Andrea: "Tem que fazer expressão"*
>
> *Valter: "Porque ele tem o raciocínio de somar só os dois primeiros números e depois o terceiro"*
>
> *Pesquisadora: "E qual o papel do sinal de igualdade nisso? 5 + 3 = 8"*
>
> *Maria: "Ele dá uma pausa [gesticula com as mãos]. 5 + 3 = 8. Pronto. Depois mais 8, que dá 16"*
>
> *Cristiana: "Ele para pra pensar"*
>
> *Alex: "Ele usa o igual, na verdade ele dá uma função operacional pra ele. Ele usa o igual como se fosse uma ordem para ele fazer o cálculo".*

O professor diz que o aluno "*para pra pensar*" ou que "*ele dá uma pausa*". Mas o que isso significa? Os professores reconhecem que há um equívoco na forma de expressão, mas não no raciocínio; identificam que o sinal de igualdade foi utilizado com um significado diferente daquele de equivalência. Nessa forma de escrita, ele indica uma pausa, um procedimento a ser realizado, o resultado de uma operação.

O sinal de igualdade significa para além do simbolismo algébrico. Toda linguagem, quer algébrica, quer de outra ciência, constitui-se de um vir à luz o pensamento característico daquela atividade que faz dessa linguagem sua expressão. Mas esse revelar-se não se finda nela, ou seja, o domínio da linguagem algébrica não é o objetivo final do trabalho com a álgebra na sala de aula, mas mostra-se como possibilidade para compreender os objetos matemáticos e as relações entre eles.

O diálogo entre os professores nos permitiu conversar com eles sobre outros significados do sinal de igualdade, isto é, a tarefa nos permitiu explorar para além do registro do símbolo, o que com ele podemos produzir.

Ponte, Branco e Matos (2009) destacam três significados do sinal de igualdade: *operacional*, *equivalência* e *relacional*. O significado *operacional* indica uma ação (operação) a ser realizada, normalmente em operações matemáticas. Já a noção de *equivalência* envolve uma relação entre sentenças matemáticas, enquanto o significado *relacional* expressa uma relação funcional entre expressões.

Inicialmente, os professores associaram o sinal de igual à ideia de equivalência e, na provocação da escrita, abriram-se a outros significados possíveis, como o operacional. A tarefa proposta promoveu modos diferentes de pensar os conteúdos matemáticos. Entendemos que discussões como essa, na sala de aula dos anos iniciais, são importantes, pois ao interpretar a situação proposta, o aluno pode ser capaz de estabelecer relações entre os conteúdos matemáticos e expressar sua compreensão.

Esses aspectos do fazer matemática do professor que ensina nos anos iniciais do Ensino Fundamental também nos revelaram características do pensamento algébrico, uma vez que, em cada situação proposta, os participantes se lançaram aos significados dos conteúdos envolvidos na tarefa. Esse lançar-se faz com que eles busquem estabelecer relações, característica do pensamento algébrico, "marcado pela atenção às estruturas [elementos característicos] e suas relações" (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 23).

Nesta categoria discutimos os modos de o professor expressar matematicamente o que fazia nas ações do curso, junto com os colegas e a pesquisadora. Revelaram-se formas de expressar o pensado quando se está com os conteúdos matemáticos que são tratados nos anos iniciais. A experiência vivida nos permite dizer da importância da expressão para a formação docente. O modo pelo qual o professor vai construindo uma forma de se expressar (oralidade, escrita, desenhos) em cada uma das situações propostas, abre possibilidades para novas compreensões e nos dá elementos para ver como ele está organizando suas formas de raciocínio e conhecer o que, para ele, é relevante ao ensinar matemática. Há um modo de pensar a matemática e com a matemática. A expressão foi reveladora do fazer, pois como afirma Merleau–Ponty (1994), dá abertura ao novo.

6.2.2 Modos de explorar o conteúdo matemático

A nomeação desta categoria foi inspirada nos modos de o professor fazer matemática que evidenciavam a exploração do conteúdo ou a forma de lidar com as características dos objetos matemáticos, identificando-as, estabelecendo relações entre elas, destacando propriedades, etc.

As ideias nucleares que convergem para esta categoria indicam que o fazer matemática do professor que ensina nos anos iniciais revela modos de tratar os objetos matemáticos considerando suas características e não apenas sua forma, ou seja, há um olhar atento para o conteúdo expresso.

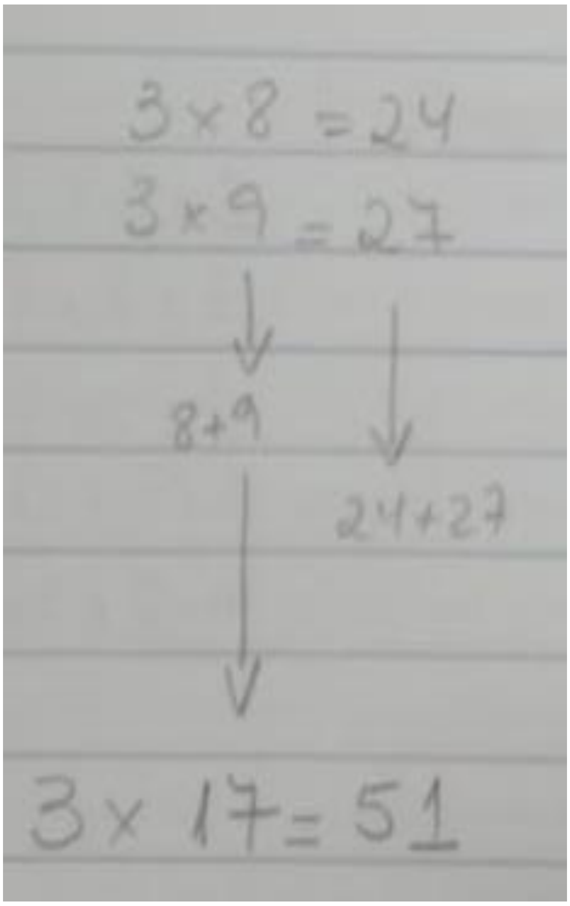
Para discutir as ideias nucleares que convergiram para essa categoria vamos, inicialmente, considerar as ações explícitas quando exploravam tarefas relativas às operações e propriedades numéricas. De acordo com Blanton e Kaput (2005) e Canavarro (2007), tarefas desse contexto possibilitam a análise de expressões numéricas considerando o Sistema de Numeração Decimal e suas características.

A tarefa "Explorando a tabuada", que aconteceu no terceiro encontro e foi proposta para explorar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, abriu o diálogo com os professores. Após as primeiras orientações eles passaram a discutir a questão.

> *Francine: "Ah eu não consigo pensar"*
>
> *Valter: "Deu a linha do resultado" [referindo-se aos produtos]*
>
> *Andrea: "15 [3 x 5] mais 30 [3 x 10], 45. Se a gente continuasse a tabuada achava, é que a gente parou no dez"*
>
> *Andrea: "Eu peguei"*
>
> *Lucia para Valter: "Você percebeu a mesma coisa que ela?"*
>
> *Felix para pesquisadora: "Eu percebi que são múltiplos de 3" [sobre as linhas e os produtos, escolheu linha 3 e linha 5]*
>
> *Pesquisadora (voltando-se para Felix): "Sim, são múltiplos de 3. O 9 [produto da linha três] está na tabuada do 3 e o 15 [produto da linha cinco] está na tabuada do 3. E o 24 [produto da linha 8]?"*
>
> *Felix: "Tá também"*
>
> *Pesquisadora (ainda considerando a escolha de Felix): "Então, todos eles estão na tabuada do 3. E agora, será que há mais alguma relação? Em qual linha está o 24?"*
>
> *Felix: "Na do 8!"*
>
> *Pesquisadora: "Isso, na do 8. E o que isso pode indicar?"*
>
> *Felix: "Que 8 é a linha 3 mais a linha 5"*

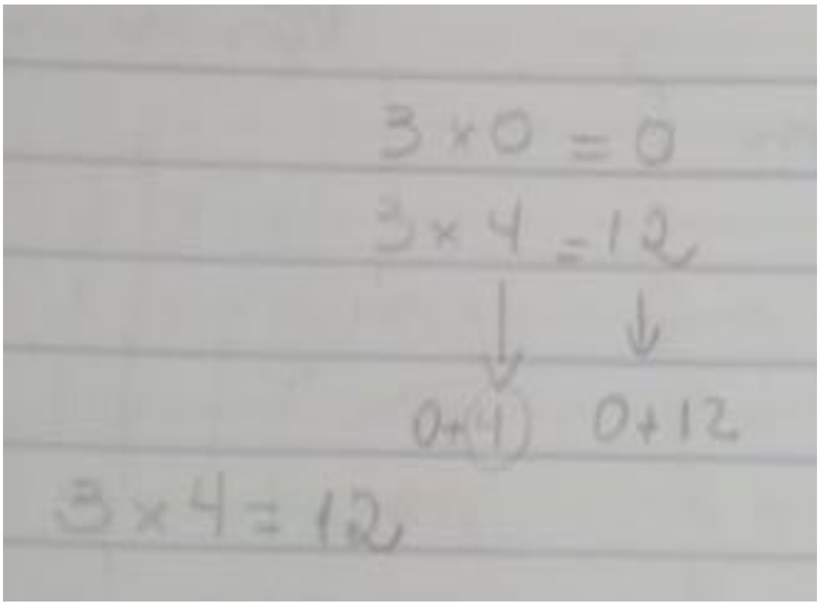
Os demais professores se voltam para o que haviam feito e analisam se a relação destacada por Andrea e Felix valeria para as linhas que escolheram. Seguiram-se algumas explorações e tentativas de registro.

Figura 46 - Registro do professor Felix sobre exploração da relação identificada



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 47 - Registro do professor Valter sobre exploração da relação identificada



Fonte: Arquivo do pesquisador

Havia, no grupo, uma busca por uma regularidade que lhes permitissem estabelecer uma relação válida para as demais linhas da tabuada. Evidencia-se, um fazer no qual “dá-se atenção não só aos objetos, mas principalmente às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 11).

Interpretamos que os professores buscavam uma generalidade, o que se revela característico no que acabavam de “descobrir” e isso indica aspectos de um pensar algébrico. No diálogo expunham-se modos de compreender, expunha-se, também, uma atribuição de significado para o que faziam na sala de aula quando exploravam determinadas tarefas e propriedades numéricas e operatórias. A tarefa da tabuada levou-os à busca de regularidades, pois compreendiam propriedades que ainda não tinham explorado em suas aulas. Que propriedades eram essas? O que essas propriedades significavam (e implicavam) no contexto do conteúdo?

A busca por regularidade é uma tentativa de justificar o que faziam, bem como de e extrapolar o anunciado de modo imediato. As perguntas da pesquisadora provocavam novas ações e estas os impulsionavam a pensar. E se eu escolher outra tabuada? E se eu extrapolar o “10” da tabuada?

> *Bianca (dirigindo-se aos colegas do seu grupo): “Isso dá em toda tabuada? Em toda tabuada dá certo?” [expressão de curiosidade]*
>
> *Andrea: “Dá!”*
>
> *Luisa: “Legal!”*
>
> *Bianca: “Deixa eu ver a do 4” [testa alguns valores]*
>
> *Andrea: “Tentando aqui oh [...] Mas vale, o movimento é o mesmo” [mostra aos colegas que fez teste para outras tabuadas]*
>
> *Bianca: “Isso se chama ...” (tenta nomear a relação encontrada pelo grupo)*

A tabuada vai ganhando destaque nesse momento com um modo de fazer diferenciado. As linhas da tabuada não estão mais isoladas, elas deram abertura para ver uma relação entre elas. O que se pode explorar se olhamos a tabuada para além do seu fazer convencional? O que há para além do exercício de recita-la? Instaurava-se no grupo um movimento de ação-reflexão-ação-reflexão que caracteriza o processo de forma/ação, destacado por Miarka e Bicudo (2010).

Esse modo de considerar a tabulada causa estranheza (MOCROSKY, et al, 2019), um sentimento que se deixa transparecer, pois os participantes vivenciam uma situação diferente da que costumam experimentar na sala de aula ao ensinar tabuada a seus alunos; traz inquietude; deixa-os em alerta, atentos a outras formas de explorar a tabuada.

A professora Bianca quer entender essa “novidade” e questiona: “Isso dá em toda tabuada?”. Esse questionar revela um modo de lidar com o conteúdo no curso que é característico do pensamento algébrico, tal como o assumimos na pesquisa, isto é, como um voltar-se para o objeto matemático buscando o que lhe é característico. O grupo se dispõe a investigar a propriedade que se elucida e fazem explorações, movimentam-se para responder à questão de Bianca, que também é de todos.

Lançando-se às “outras tabuadas” a professora vê que a relação é válida, pois o *movimento é o mesmo.* Esse “movimento” que a professora identifica é um fazer que permanece, uma propriedade matemática: a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, ainda em estado nascente, isto é, não nomeada e vista em um contexto distinto do que normalmente se vê.

Há, em nossa interpretação, outro movimento, o do *pensar* no grupo. Kampff (2017) destaca que, para Heidegger, é através de um salto que o homem se lança a pensar, um salto em direção ao desconhecido. Esse salto, talvez tenha sido favorecido pela proposta do curso, que levou os professores a explorarem os conteúdos. Para eles, a álgebra é uma área da Matemática em que se estuda as equações, os sistemas, as “coisas” que envolvem letras. É associada à manipulação de regras e ao uso de uma determinada linguagem. Não é “coisa” de se tratar nos anos iniciais. Mas, eles “saltam” para a álgebra, pois querem compreender um modo de explorar situações do contexto numérico em que a generalização lhes ajudaria a justificar o que veem.

Esse “salto” os carrega para um lugar incomum, mas revelam novos aspectos dos conteúdos matemáticos e, talvez, possam alterar a sua prática docente, caso eles conquistem a liberdade de aprender Matemática afastando-se da cercania do comum, do corriqueiro. Nesse “lugar incomum” instaura-se uma liberdade para olhar as tabuadas.

> *Pesquisadora: “Vocês perceberam alguma coisa?”*
> *Bianca: “A soma das linhas é igual a soma dos produtos”*
> *Pesquisadora: “Pessoal, vocês testaram a relação para outras linhas?”*
> *Bianca: “Eu já tentei pra um monte [de linhas]”*
> *Valter: “O 3 x 5 está implícito ali no meio do 3 x 2 mais 3 x 3, o 3 x 5 é o 3 x 2 mais o 3 x 3”*
> *Lucia: “Aí a gente descobriu a regularidade dela”*
> *Valter: “Olhem como é legal perceber, que o 3 x 5 está em vários lugares”*
> *Maria: “É verdade né?”*
> *Bianca: “Por exemplo, 11 [se referindo ao produto 3 x 11] e o 3 x 1. Se você já sabe o 3 x 1, você sabe 3 x 11” [se referindo que o produto 3 x 11 pode ser obtido da soma dos produtos 3 x 10 e 3 x 1].*

> *Pesquisadora: "É um modo de pensarmos, porque vamos até o 10 [como um dos fatores], porque o 11, por exemplo, ele está nesta tabuada [de fatores do 0 ao 10], porém escrito de uma forma diferente"*

Identificar, compreender e relacionar os objetos matemáticos passa a ser um modo de estar no curso procurando entender o fazer algébrico. A disposição das linhas da tabuada vai revelando outros modos de obter o produto entre os números, outros modos de compreender a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, de aprender e ensinar tabuadas, de ser professor, "outros" possíveis.

A estranheza inicial dá abertura à exploração da tabuada para além de sua forma usual, considerando as relações entre suas linhas. Mesmo que os professores não saibam nomear a propriedade observada, eles reconhecem a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, como revela a fala de Bianca: "*A soma das linhas é igual a soma dos produtos*".

Em dois encontros do curso discutimos sequências e regularidades, pois consideramos que são temas presentes em toda a Educação Básica, segundo os documentos oficiais considerados. De acordo com Brasil (2017), nos anos iniciais, há destaque para a exploração de padrões em sequências numéricas e tabelas com números e nos anos finais do Ensino Fundamental a ênfase está nos modos de expressão das regularidades, com foco no desenvolvimento da linguagem algébrica. Tarefas que discutem sequências e regularidade, conforme Ponte, Branco e Matos (2009), podem contribuir para o desenvolvimento do sentido numérico, da capacidade de generalização e para o entendimento das expressões algébricas.

Antes de discutirmos o que se revelou no curso com os professores sobre o desenvolvimento de tarefas que envolviam a exploração de padrões em sequências, apresentamos um modo de compreender padrões e suas possíveis relações com o pensamento algébrico assumido por nós na pesquisa.

De acordo com Vale e Pimentel (2013), quando observamos um arranjo de qualquer natureza, temos um padrão. Há uma regularidade, "se for possível detectar uma relação à que corresponde uma lei ou regra claramente definida" (p. 108). Entretanto, essa regra pode não ser única, variar de acordo com o contexto e interpretação que o sujeito dá ao arranjo, em decorrência da possibilidade de vários modos de ver (VALE; PIMENTEL, 2013).

Desse modo, os autores propõem uma definição de padrão ampliada, entendendo-o como "uma relação discernível, apreendida de modo pessoal, num arranjo de qualquer natureza, através de um processo mental que pode ser partilhado, e que corresponde a uma estrutura traduzível por uma lei matemática" (PIMENTEL; VALE, 2012, p. 33).

Entendemos, à luz dos autores, que, ao propor tarefas que explorem padrões em sequências, buscamos proporcionar situações em que os sujeitos possam explorar visualmente certas configurações e destacar um arranjo, que pode envolver elementos dispostos em distintas configurações. No entanto, mesmo que o padrão seja um recurso visual, se ele está presente em uma sequência que tem uma regularidade e obedece a certa "lei matemática", a busca deve ser pelos invariantes que compõem os arranjos, o que leva a fazer conjecturas e estabelecer relações.

Isso é para nós particularmente interessante, pois ao voltarmo-nos para a possibilidade de entender o pensamento algébrico, como o estamos assumindo, um modo de o sujeito compreender, relacionar e expressar os elementos característicos dos objetos matemáticos em diferentes contextos, a exploração de padrões em sequências, por exemplo, é um recurso importante, uma vez que permite que o sujeito se lance às possibilidades de identificar padrões e buscar seus invariantes.

No curso, no 4º encontro intitulado: "Desvendando Mistérios: Padrões e Regularidades – Parte I", propusemos tarefas que envolviam sequências repetitivas. Neste tipo de sequência, há uma unidade (composta por diversos elementos ou termos) que se repete e é conhecida como motivo.

A tarefa "Lápis e Borracha" pedia que se organizassem mais 5 itens na sequência, mantendo o padrão. Não foram definidos os tipos de itens, apenas que os 5 precisavam manter a mesma organização. No diálogo abaixo trazemos algumas falas dos participantes para a discussão.

Pesquisadora: "Quantos itens faltavam ser organizados"

Valter: "3 borrachas e 2 lápis"

Mona: "2 lápis e 3 borrachas"

Nesse momento há um burburinho no grupo, discordância sobre a quantidade correta

Pesquisadora: "Para continuar a sequência como que foi?"

Bianca: "Só repetir o que estava no começo"

Mona: "Tranquilo"

Pesquisadora: "Ela [professora Linda] usou alguma estratégia para organizar esse material?"

Alguém fala: "Um sim e um não"

Valter: "Uma sequência de lápis e borracha"

Maura: "Um do lado do outro, intercalados"

Os professores não apresentaram dificuldade para continuar a sequência proposta, cada um interpretando de um modo e justificando o feito. Nas discussões coletivas, eles começam a se envolver com a exploração da sequência de lápis e borrachas:

> *Maria: "Tem que seguir a sequência que ela fez"* [se referindo ao proposto na tarefa]
>
> *Valter: "As borrachas estão sempre viradas para a mesma posição?"*
>
> *Luisa: "No enunciado tá falando lápis e borracha, então é assim" [sobre colocar primeiro lápis e depois borracha"*
>
> *Ruth: "É que primeiro usa o lápis né? E depois a borracha, não é isso?"*
>
> *Poliana: "Dá pra pensar em ímpar e par"*
>
> *Valter: "Entendi"*
>
> *Luisa: "As borrachas estão nas posições pares"*
>
> *Valter: "Dá pra fazer a pergunta se é lápis ou borracha que ocupa a posição de número primo"*

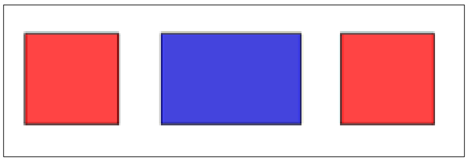
Esta tarefa aconteceu no 4º encontro do curso e a postura dos professores ao discutirem as tarefas propostas já é diferente. Há uma abertura para o dizer do outro e para se compreender as possibilidades que se abrem. Há disposição para pensar o conteúdo junto com o colega. A sequência de lápis e borracha expressa algo além da organização de materiais (forma); ela permite olhar um modo de relacionar seus elementos, as posições que ocupam (conteúdo). Ao expressar o compreendido, os professores trazem o conteúdo que veem implícito, como sugere Poliana: *Dá pra pensar em ímpar e par*.

> *Pesquisadora: "Se eu consigo entender que os lápis estão nas posições ímpares e as borrachas nas posições pares eu posso perguntar: qual elemento vai estar na posição 30? Ele [aluno] é capaz de me dizer?"*
>
> *Mona: "Ah ficou fácil"*
>
> *Valter: "É onde tá borracha, a borracha tem que cair no par"*
>
> *Poliana: "Se ele conhecer os números pares e ímpares"*
>
> *Pesquisadora: "Se ele conseguir entender a relação entre a posição e os termos ele consegue me dizer..."*
>
> *Ruth: "Qualquer um dos termos"*
>
> *Valter: "Se eles fizerem a relação entre par e ímpar e os elementos e eu perguntar quem vai ocupar a posição trigésima, eles vão saber que quem vai ocupar é a borracha, se eles não fizerem essa relação eles não vão conseguir."*
>
> *Luisa: "Tem um padrão"*
>
> *Pesquisadora: "Entender esse padrão significa o quê?"*
>
> *Mona: "Primeiro conhecer as figuras, identificar elas"*
>
> *Luisa: "Depois a sequência"*

Conhecer e explorar a estrutura da sequência permitiu aos professores estabelecerem relações entre a posição e seus termos. Mona, ao dizer que "p*rimeiro conhecer as figuras, identificar elas*", mostra entender que o padrão significa "*conhecer as figuras, identificar elas".* Mas o que isso significa? Para a professora, a sequência se constitui segundo um padrão que caracteriza o arranjo dos elementos que a compõem: o lápis e a borracha. Não há, de imediato, uma preocupação em relacionar posição e termos, mas entender como esse arranjo se dá; há um foco na compreensão da forma da sequência. Explorando suas características os professores se voltam para a estrutura, procurando relacionar os elementos com a posição. Esse modo de se voltar para... revela características do pensamento algébrico, pois eles buscam o invariante, a lei matemática que expressa a sequência: na posição par ficam as borrachas.

A tarefa "Vamos continuar?" mobilizam outros olhares dos professores para determinar os próximos termos da sequência.

Figura 48 - Imagem da tarefa

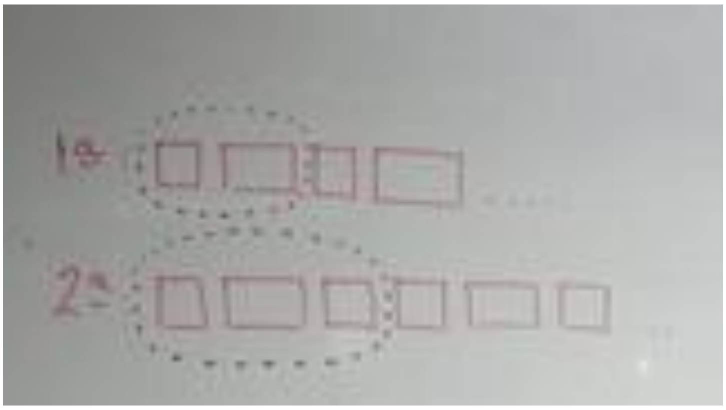


Fonte: Elaborado pela autora

> *Valter: "É o jeito de olhar" [sobre continuar a sequência e unidade repetitiva]*
>
> *Valter para Felix apontando para imagem: "Depende de como você vê, pode ser também os três juntos"*
>
> *Ina: "Pode repetir essa sequência aqui" [apontando para continuar]*
>
> *Bianca: "Isso, fazer outro quadrado vermelho, retângulo azul, quadrado vermelho ..."*
>
> *Valter: "Pode colocar dois retângulos azuis e continuar a sequência"*
>
> *Andrea: "Pode vermelho, azul, vermelho, vermelho, azul, vermelho"*

Os professores sugerem distintas formas de continuar a sequência, buscam uma forma de registro e, mediante a questão da pesquisadora, se lançam a discutir se é ou não repetitiva.

Figura 49 - Respostas dos professores à tarefa Vamos Continuar?



Fonte: Elaborado pela autora

Valter: "Assim é o jeito legal de fazer, fazendo joguinho de três"

Andrea: "Ou de dois"

Pesquisadora: "Tem algum que está certa ou errada?"

Grupo: "Não"

Andrea: "Tem que continuar"

Luisa: "Depende da sua lógica"

Pesquisadora: "Qual a diferença entre as sequências?"

Valter: "Acho que tem a ver com a última aula, das repetitivas"

Luisa: "Eu acho que não"

Valter: "Tá sendo repetitiva, tá sendo um quadrado, um retângulo, quadrado, um retângulo"

Pesquisadora: "As duas continuam sendo sequências repetitivas?"

Valter: "Eu acho que não, só a primeira"

Pesquisadora: "Por que só a primeira?"

Valter: "Porque tá repetindo"

Luisa olha intrigada para lousa: "Não, as duas são, porque" [fica pensativa]

Valter para Luisa: "Na semana passada a gente tinha dois [elementos] que se repetiam, era uma borracha e um lápis"

Valter: "Pra mim a primeira que é repetitiva, a segunda..."

Andrea: "Ué, ela pode ser repetitiva com três elementos"

Valter: "Ah, ok, ela pode ser repetitiva com os três elementos, isso mesmo"

No diálogo os professores retomam o que havia sido discutido no encontro anterior quando trabalharam com sequências repetitivas. Para classificá-las, eles querem identificar a unidade repetitiva em cada uma delas. Porém, no caso da sequência da figura 48, isso não é consenso entre eles.

Novamente há a estranheza, há algo que os mobilizam a discutir e se fazer entender pelo colega (MOCROSKY et al., 2019). Os professores discutem e expõem as possibilidades que consideram para dar continuidade à sequência. Valter não considera que a sequência é repetitiva como a que analisaram com lápis e borracha. Andrea insiste com o colega, que a sequência pode ser repetitiva, mesmo que tenha três elementos a serem repetidos. Valter entende o ponto de vista da colega e concorda. No entanto, vamos acompanhar um pouco mais o diálogo.

> *Pesquisadora: "O que muda da primeira para a segunda?"*
>
> *Valter e Andrea: "A quantidade de elementos"*
>
> *Valter: "A quantidade de vezes que aparece para repetir"*
>
> *Pesquisadora: "Como chamamos isso na semana passada?"*
>
> *Valter: "Tem a ver com a repetição"*
>
> *Pesquisadora: "Isso, a diferença está na unidade repetitiva. No primeiro caso qual é a unidade repetitiva" (referindo-se ao desenho da figura 48 que está na lousa)*
>
> *Alguém fala: "Quadrado e retângulo"*
>
> *Pesquisadora: "E no segundo caso?"*
>
> *Alguém fala: "Quadrado, retângulo e quadrado"*
>
> *Valter: "O que dá pra fazer é ir aumentando o número de quadrados, tipo, dois quadrados, dois retângulos. Põe um quadrado, um retângulo, dois quadrados, dois retângulos, três quadros, três retângulos e vai aumentando"*
>
> *Pesquisadora: "Fica como as sequências repetitivas que estamos discutindo?"*
>
> *Vagner: "Não, muda a estrutura"*

Nota-se que Valter vê outra possibilidade para a sequência que faz com que ela deixe de ser repetitiva. Embora ainda não se tivesse discutido com o grupo as sequências recursivas, e Valter não nomeie a sequência que propõe, ele vê que sua *estrutura* muda. A *estrutura* é o elemento característico da sequência (seu invariante). Ou seja, Valter compreende que não há uma unidade repetitiva fixa, mas sim uma relação que pode ser construída entre os termos da sequência, podendo caracteriza-la como uma sequência recursiva crescente (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009). Explorando as sequências, o grupo vai retomando conceitos e buscando formas de compreender a importância do trabalho com sequências.

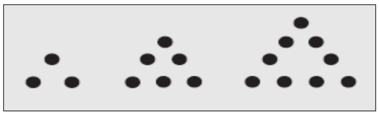
Aproveitando a discussão sobre a mudança do tipo de sequência, ainda no 5º encontro, propusemos a tarefa "Quantas bolinhas tem o triângulo?". Nela, exploramos sequências crescentes que, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009, p. 42), são constituídas por elementos diferentes em que, "cada termo na sequência depende do termo anterior e da sua posição na sequência, que designamos por ordem do termo".

De acordo com o documento canadense Paying Attention to Algebric Reasoning (CANADÁ, 2013), esse tipo de sequência permite discutir generalizações estabelecendo relação entre dois conjuntos de números, o que expressa os termos da sequência e o que expressa suas respectivas posições. Ainda, de acordo com esse documento, o trabalho com regularidades,

> Pode oferecer uma maneira de se envolver com quantidades Matemáticas que vai além das respostas "certas" e "erradas" da aritmética. Os padrões podem explicitar as várias estratégias de solução dos alunos, permitir que eles pensem sobre a estrutura Matemática e engajá-los na oferta de conjecturas e na justificativa de seu pensamento (CANADÁ, 2013, p. 11, tradução nossa).

Nossa proposta foi que os professores explorassem a sequência de triângulos, conforme figura 50.

Figura 50 - Tarefa "Quantas bolinhas tem os triângulos?"



Fonte: Canavarro (2007)

Fizemos questões semelhantes às propostas nos livros didáticos, como a que pede para "descobrir" os próximos termos da sequência. Os professores conversaram no pequeno grupo para, posteriormente, abrirmos para a discussão coletiva.

> *Valter: "Ah lá, a razão é três, progressão aritmética. /.../ O próximo ali é cinco [bolinhas] na base. /.../ A próxima é com 15, já vou fazer até a próxima já. A próxima a base vai ser seis"*
>
> *Mona (para seu grupo): "Tá de três em três"*
>
> *Pesquisadora: "Quem pode me ajudar a desenhar a próxima figura?"*
>
> *Valter: "Na próxima, a base é cinco [bolinhas]"*
>
> *Bianca: "Cinco, cinco, cinco" [indicando cada lado do triângulo]*
>
> *Valter: "Vai dar.... doze" [total de bolinhas da quarta figura]*
>
> *Poliana (para Mona, gesticulando com as mãos como se desenhasse os lados do triângulo): "Você vai fazer cinco assim, cinco assim, cinco assim. Depois seis assim, assim e assim".*

Os professores identificam a regularidade na sequência e percebem a configuração. Valter identifica que a sequência se caracteriza como uma progressão aritmética de razão 3, em decorrência do total de bolinhas necessárias para desenhar cada triângulo. Outros professores consideram a disposição das bolinhas, vendo-as como "lados do triângulo", como Bianca: "*Cinco, cinco, cinco*". Porém, nas duas formas de considerar a sequência eles analisam a relação entre os termos, isto é, o que varia de uma determinada posição para a posição seguinte.

Esse modo de considerar a sequência, analisando a variação entre termos consecutivos, segundo o documento canadense, revela o pensamento recursivo e não a relação entre dois conjuntos numéricos.

> Esse tipo de pensamento recursivo destaca as mudanças dentro de um conjunto de números, as peças [termos], mas não na relação entre os dois conjuntos de números - a posição ou número do termo do padrão e o número de peças [elementos] em cada posição. [...] Focar no pensamento funcional exige enfatizar a relação entre o número do termo e o número de ladrilhos em cada termo: conforme um conjunto de números muda, o outro conjunto também muda de uma maneira previsível; esses dois conjuntos de números covariam (CANADÁ, 2013, p. 9, tradução nossa).

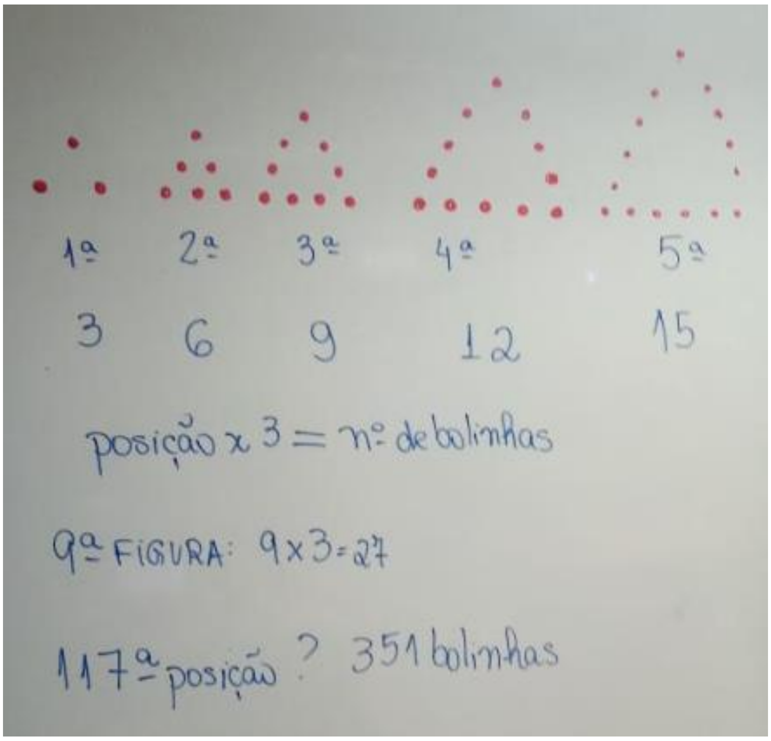
Nesse modo de os professores explorarem a sequência não se manifesta a relação funcional, ou seja, não se busca como varia a quantidade de "bolinhas" do triângulo em relação à "posição" que cada um desses triângulos ocupa na sequência. No entanto, essa é uma possibilidade que o trabalho com sequências recursivas proporciona, como destaca Ponte, Branco e Matos (2009).

Entretanto, os professores identificaram a relação funcional.

> *Pesquisadora: "Já entendemos o formato do elemento de cada posição, agora vamos ver a quantidade de bolinhas que cada elemento tem. A próxima figura teria quantas bolinhas?"*
>
> *Grupo: "15"*
>
> *Pesquisadora: "E outras figuras?"*
>
> *Andrea: "Não sei..."*
>
> *Pesquisadora: "Você consegue determinar o número de bolinhas da 9ª figura?"*
>
> *Valter e Andrea respondem rapidamente: "Vinte e sete!"*
>
> *Pesquisadora: "Que rápido!"*
>
> *Valter: "Vezes três"*
>
> *Andrea: "É a posição vezes o três"*

Com essa discussão, propusemos que o grupo trouxesse o seu registro para o quadro.

Figura 51 - Registro da tarefa “Quantas bolinhas tem os triângulos?”, feito pela pesquisadora



Fonte: Arquivo da pesquisadora

O registro escrito foi importante para os professores explorarem os conjuntos numéricos (posição e número de bolinhas do triângulo em cada posição), estabelecendo uma relação. A escrita genérica sugerida foi “posição x 3 = número de bolinhas”, em decorrência do modo pelo qual eles perceberam a regularidade. Machado (2003) destaca que a escrita matemática é uma atividade humana, um procedimento intelectual em que há possibilidade de sistematização. No entanto, a linguagem Matemática não pode ser o ponto de partida da exploração matemática e nem mesmo ser o principal objetivo.

> É inquestionável que os sistemas axiomáticos são uma das características mais marcantes da Matemática dos nossos dias. Um conjunto de axiomas é o resultado final de um longo período de elaboração de uma teoria, não o começo. Pensar de modo axiomático é um processo sofisticado e abstrato, que não se pode impor como sistema de trabalho, porque nem todas as pessoas vão ser matemáticos profissionais (MELLO, 2010, p. 185).

Consideramos que é importante valorizar as formas de expressão para que o pensado não se perca, uma vez que, como destaca Merleau-Ponty (1994, p. 224), é “pela expressão que o pensamento se torna nosso, ou seja, ele permanece e não se deixa perder”. Ao explorarem as sequências, os professores usam a linguagem corrente para dizer o que identificam, as relações que percebem, o modo como a configuração vai se evidenciando para eles. Há, porém um invariante percebido: a sequência cresce de 3 em 3, seja porque eles a associam com uma progressão aritmética, isto é, analisando-a do ponto de vista numérico e buscando a diferença entre a quantidade de bolinhas de dois termos consecutivos, seja pela configuração geométrica, que mostra um triângulo. Mas esse triângulo também tem seus lados aumentado. Ou seja, de uma posição para a seguinte, aumenta-se uma bolinha em cada lado, logo o triangulo seguinte terá 3 bolinhas a mais que o anterior.

A relação entre os elementos de cada termo (bolinhas do triângulo) e a sua posição na sequência, relação funcional, é provocada pela pesquisadora, mas identificada pelos professores. Segundo Blanton e Kaput (2005), esta é considerada uma das formas do pensamento algébrico se apresentar e envolve a descrição e identificação das relações entre grandezas nas quais se investigam as regularidades, quer sejam do contexto numérico ou geométrico, a variação de quantidades e a determinação de valores particulares de uma função.

O percurso de exploração que foi se constituindo no grupo revela que eles caminham "da percepção, da intuição sensorial à intuição eidética" (BICUDO, 2010, p. 34). Ou seja, a ação do sujeito o encaminha para a essência, para o que é invariante no percebido e que pode ser "materializado pela linguagem" (BICUDO, 2010, p. 34) tornando-se disponível como conhecimento produzido. Evidencia-se o ato original em que o sentido se faz para o sujeito. Portanto, para nós, o pensar, no contexto do ensino de álgebra, envolve a ação do sujeito que, em um ato original, se volta para o sentido do conhecimento produzido, expresso em uma determinada linguagem, procurando reativá-lo. Os modos de o professor explorar o conteúdo matemático vão explicitando essas formas de significar, se reativar o sentido original.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta seção buscamos olhar para o caminhar na pesquisa buscando ver o que se mostrou para nós, até agora, nesse percurso. Mas, como fazer isso? Iniciamos recordando que o nosso objetivo na investigação é compreender os aspectos do fazer matemática do professor que revelam características do pensamento algébrico, ou seja, conhecer os *modos* pelos quais o fazer matemática do professor revela *características*, isto é, particularidades, peculiaridades do pensamento algébrico.

Tal objetivo é originado de inquietações vividas ainda no percurso do mestrado, onde estivemos com professores que ensinam matemática nos anos iniciais no contexto de tarefas relacionadas ao Cálculo Mental. Na busca de compreender essas e outras inquietações, no doutorado, organizamos um curso de extensão intitulado "Qual o X da questão? Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental I", no qual professores dos primeiros anos do Ensino Fundamental participaram e tiveram um espaço para dialogar sobre os conteúdos discutidos nessa fase da escolaridade. Ou seja, o solo no qual se assenta a produção de dados da pesquisa é a formação continuada de professores que ensinam matemática. Por isso, esse espaço do curso, que interpretamos como um espaço formativo, no qual as tarefas matemáticas que elaboramos e propusemos a eles envolviam situações que interpretamos serem do contexto algébrico.

Entretanto, nosso trilhar inicia-se antes mesmo do desenvolvimento do curso, com as inquietações que puderam ser explícitas pela interrogação da pesquisa, "*Quais aspectos do fazer do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental revelam características do pensamento algébrico?"*. Essa foi a luz que se lançou e iluminou todo o caminho trilhado na busca, na pesquisa. Isso porque, considerando a pergunta e suas possibilidades, elaboramos o curso e nos voltamos para as pesquisas já realizadas nessa temática, visando conhecer a região de inquérito do interrogado. Assumimos uma postura tanto na produção quanto na análise dos dados, conduzimos as ações com os professores, discutimos as categorias de análise e procuramos, neste momento, nos voltarmos para o feito e explicitar o que para nós se revelou.

Em nosso caminhar fomos compreendendo as aberturas da investigação com a formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, considerando aspectos do fazer matemático que se explicitam na álgebra e, especificamente, no pensamento algébrico. A experiência com os professores no curso nos permitiu ver como as ações de ensinar e aprender matemática se entrelaçam na sala de aula permitindo que os conteúdos matemáticos possam ser explorados para além dos métodos tradicionais que visam apresentar o conteúdo, para além das cercanias da opinião comum do que significa ensinar matemática nos anos iniciais.

Compreender o fenômeno – o fazer matemática do professor que ensina matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental num contexto algébrico – exige que articulemos nossas compreensões sobre a álgebra, o pensamento algébrico e a formação docente. Para isso, na escrita do texto, abrimos seções nas quais trouxemos outras pesquisas que tratam a temática e deram possibilidade para explicitar compreensões.

Junto a essa exposição, entendemos que, para compreender o fenômeno, o espaço formativo foi fundamental, possibilitando conhecer as características do pensamento algébrico dos professores participantes e, com eles, discutir os conteúdos matemáticos dos anos iniciais.

Como aponta Kampff (2017), o estar no curso revelou-se, para nós, como um salto dado pelos professores em direção aos conteúdos matemáticos considerados num contexto algébrico. Um salto que visava um lugar tido como incomum nos anos inicias, mas repleto de possibilidades.

Entendemos que, a abertura do curso é o que convida os professores a se lançarem às tarefas propostas, permitindo-lhes se entregarem ao espaço formativo e ao diálogo com o outro - colega que está junto e a pesquisadora. Nessa atitude de lançar-se à experiência do curso, às tarefas, os modos de pensar sobre os conteúdos matemáticos em contextos algébricos vão sendo expressos.

O visto na nossa pesquisa, nos lançou à compreensão do pensar entendido em uma perspectiva fenomenológica. Pouco discutido nos textos sobre pensamento algébrico, o pensar revelou-se como solo fundamental e elucidá-lo foi uma contribuição deste texto para as pesquisas que focam essa temática – do pensamento algébrico.

Com Heidegger (1996, 2012) e Merleau-Ponty (1994), pudemos entender que, esclarecer o que significa pensar, não é uma tarefa fácil. Para o primeiro autor, o pensar é uma possibilidade humana: “o homem pode pensar à medida que tem possibilidade para tal" (HEIDEGGER, 20122, p. 111). O homem que se lança no pensar, se dispõe às possibilidades do desconhecido.

Complementarmente, para Merleau-Ponty (1994), o pensar “é, com efeito, uma experiência, no sentido em que nós nos damos nosso pensamento pela fala interior ou exterior" (MERLEAU-PONTY, 1994, p. 241). Sendo experiência, dá-se na vivência, no modo de o sujeito estar no mundo com o outro, aberto e disposto.

Entendendo a complexidade do tema e não almejando esgotar as possibilidades de compreensão do pensar, assumimos, à luz desses autores, o pensar como ato do sujeito que, pela disposição, se lança às possibilidades que lhes são abertas para compreender o que se mostra. Essa compreensão nos lança numa dúvida: se o pensar é um ato do sujeito, seria possível então adjetivá-lo? Seria possível caracterizá-lo como algébrico?

Vimos que, com Heidegger (1996) e Merleau-Ponty (1994), não somos capazes de responder tais questões, uma vez que os autores consideram o pensar uma atividade da consciência e se voltam para o seu conteúdo de sentido: o pensado. E é sobre o pensado ou sobre o que é expresso, que nos direcionamos na pesquisa.

Dessa forma, assumimos na investigação o pensamento algébrico como um processo que expressa o pensado; algébrico, pois se está lidando com os objetos matemáticos do contexto algébrico, estamos nos voltando para tais objetos resgatando seus elementos característicos produzidos na temporalidade. E é sobre esses modos de expressão, revelados no curso, que nos voltamos para compreender o interrogado.

No curso, os professores se depararam com conteúdos matemáticos comumente trabalhados nos anos inicias, embora propostos de formas diferentes. Inicialmente, isso causou-lhes estranheza, mas, ao estar com o grupo dialogando e discutindo as tarefas foram significadas por eles. Nesse processo de significação, os modos de expressão tornaram-se essenciais para expor o compreendido, bem como explicitá-los.

Os atos expressivos revelaram, em nosso movimento interpretativo, aspectos do fazer matemática do professor que expõem características do seu pensamento algébrico, no que diz respeito aos seus *modos de expressar o feito matematicamente* e de seus *modos de explorar os conteúdos matemáticos*. Tais características corroboram com o dito por Merleau-Ponty (1994) acerca da simultaneidade entre pensamento e linguagem, uma vez que, no movimento de discutir e resolver as tarefas propostas, os participantes se valem da expressão para expor o feito e, à medida que vão dialogando, vão articulando novas compreensões, mudando formas de fazer, reorganizando o pensar.

Na interpretação da categoria *Modos de expressar o feito matematicamente* vê-se que os primeiros modos expressivos são gestos. Para Merleau-Ponty (1994), o corpo encarna a possibilidade de compreender os gestos e as palavras e, com isso, assinala que a significação tem caráter corpóreo. Apreendemos um gesto porque há reciprocidade de comportamentos vividos, uma vez que somos pertencentes a um mesmo contexto social. Para esse autor, o corpo não pode ser entendido apenas em seus aspectos físicos e biológicos, mas é o “veículo do ser no mundo” (MERLEAU-PONYT, 1994, p. 122) e, *com* ele, nas possibilidades táteis, visuais, olfativas, etc, que percebo o mundo e expresso o percebido. O corpo é um *ser de potência* que percebe, compreende, interpreta e expressa.

Outros modos de expressão como o escrito, os desenhos, uma obra de arte, dobras em papel, etc., são formas de linguagem sedimentadas, construídas como formas de expressão de um dado meio social e cultural. A expressão do pensado, o pensamento algébrico, é uma dessas formas de expressão que vai sendo significada à medida que é compreendida pelo sujeito e pelo outro. Os modos pelos quais os professores se expressam, ao fazerem as tarefas propostas, vão abrindo possibilidades para compreender os conteúdos matemáticos e permite que eles reorganizem suas formas de raciocínio. Como citado anteriormente, a expressão foi reveladora do fazer e dá abertura ao novo (MERLEAU-PONTY, 1994).

Na interpretação da categoria *modos de explorar os conteúdos matemáticos* se revela o estranhamento dos participantes relativamente às tarefas do curso e, nesse “estranhar-se”, eles vão produzindo outros modos de estar no curso. Expressões de surpresa, de desconfiança, de dúvidas e de descoberta vão caracterizando essa categoria, bem como os modos de eles estarem no curso com o outro – colega e pesquisadora.

As ações de identificar, compreender e relacionar os objetos matemáticos passa a ser um modo de estar no curso procurando entender o fazer algébrico. Tarefas do contexto diário são reinterpretadas: o que há por trás do movimento de recitar a tabuada? Na exploração dos conteúdos matemáticos vai se revelando características do seu pensamento algébrico. Vê-se que o professor se volta ao que é característico do objeto matemático buscando identificá-lo, relacioná-lo e significa-lo.

Ao finalizarmos a pesquisa, olhamos para o caminho percorrido e entendemos que o fazer matemática dos professores dos anos iniciais revelam modos de ele trabalhar com os alunos determinados conteúdos e, no curso, outro(s) percurso(s), novas possibilidades para ensinar e aprender matemática foram vistas. A experiência vivida abre oportunidade para que o sentido de fazer matemática se transforme. O “modo tradicional” de fazer matemática vai sendo analisado e são consideradas suas limitações. No silêncio do pensar e no barulho das discussões, sufocam-se a timidez e se dá lugar a coragem para tentar caminhos outros que, embora esbarrem nas dificuldades pessoais com os conteúdos, é incentivada pela vontade de promover mudanças visando à produção de conhecimento dos alunos.

O desejo de aprender e dialogar levou os professores a participarem do curso, a se abrirem as discussões, a estarem uns com os outros e a pesquisadora, fora de seu horário de trabalho, voluntariamente dispostos a aprender. Essa disposição, que é expressa pelo corpo-próprio, toma conta do ambiente.

No silêncio e no barulho do espaço formativo os professores vão ressignificando seus modos de ser professor, modos que se enlaçam a vontade de aprender. A cada encontro, os participantes se lançam aos conteúdos, ao diálogo, aos colegas, à formação. Uma formação que, assim como discute Bicudo (2003), não visa formas prontas e rígidas de ser professor, mas abre possibilidades para que o fazer de sala de aula, ao ser refletido, discutido enlace formas outras de ser professor. No decorrer do curso, os professores trouxeram contribuições para o diálogo, expuseram as tarefas que desenvolveram com seus alunos, elaboradas a partir da proposta dos encontros. Estar no curso não era separado de estar em sala de aula; pensar as tarefas com os colegas era um modo de pensá-las no seu ambiente de trabalho. O explícito gerava novas formas de estar na sala de aula ensinando matemática e trazia novos modos de estar no curso tornando claro o movimento dialético da forma/ação que a fenomenologia considera relevante e traz como proposta.

A forma de ser professor se revelou no movimento *com* o outro em um processo de ir e vir considerando os conteúdos matemáticos, a sala de aula, os alunos, a escola, a comunidade escolar. Estar com outros professores possibilitou aos participantes lançar-se aos conteúdos do contexto algébrico de uma forma não comum, permitindo-lhes vislumbrar um lugar incomum, um espaço de possibilidades.

Nossa pesquisa não esgota as compreensões sobre o pensamento algébrico ou sobre o modo de desenvolver ações que visam o pensamento algébrico nos anos iniciais, mas esclarece alguns aspectos e abre novas possibilidades, principalmente se consideramos a forma/ação docente. Embora tenhamos nos voltado para a álgebra e seu ensino, há outras áreas da matemática que devem ser exploradas nessa fase da escolaridade e que merecem discussões.

Ainda, em nossa pesquisa nos voltamos para o pensamento algébrico tratando o tema em uma perspectiva fenomenológica, com tarefas elaboradas considerando-se o solo da fenomenologia cujo foco é a experiência vivida pelo professor ao estar com seus alunos. Estando em atividade com seus alunos ele está sempre atento, buscando ouvi-los, compreender o que fazem. Conforme Bicudo (2010a, p. 215) “ao assumir-se a atitude fenomenológica, trabalha-se com a busca do sentido que o mundo-vida faz para as pessoas. /.../ O sentido se dá no real vivido, no presente, no modo de estar junto com as pessoas e os programas pertinentes à escolarização”.

Essa é uma possibilidade que abrimos no texto desta tese ao expor o vivenciado com os professores, entretanto, o percurso da pesquisa revelou que nosso caminhar é repleto de inquietações e afetações que se encontram e se enlaçam com tantas outras. Nesse encontro, passageiro e intenso, caminhos se abrem para mostrar que é possível um fazer acontecer, um fazer acontecer matemática, um fazer acontecer uma forma/ação de professores que se dispõem a estar junto, a pensar e a dialogar.

8. REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R.; SANTOS, M. C. Pensamento Algébrico: Em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.6, n. 10, p. 34 – 60, jan-jun. 2017. Disponível em:< http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/1124/pdf_207>. Acesso em: 12 mai 2020.

ALVES, B. S. **Prática de Ensino Supervisionada em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico: Desenvolver o pensamento algébrico através de padrões**. 2015. 174f. Dissertação (Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico) – Universidade de Évora, Escola de Ciências Sociais, 2015. Disponível em :< https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/14904/1/Relat%C3%B3rio%20final-Desenvolver%20o%20pensamento%20alg%C3%A9brico%20atrav%C3%A9s%20de%20padr%C3%B5es%20-%20Beatriz%20Alves%20n%C2%BA11435.pdf>. Acesso em 21 abr 2020.

BARBARIZ, T. A. **A constituição de conhecimento matemático em um curso de matemátia à distância.** Rio Claro: Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Unesp, 2017. Disponível em:< https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UNSP_384b972c9f18b349acdcb11edd051b17>. Acesso em 04 jul 2021.

BASTOS, L. S.; MERLINI, V. L. Early Algebra: a álgebra que emerge das estratégias de resolução utilizadas por alunos dos anos iniciais. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 11, n. 1, p. 91 – 109, 2020. Disponível em:< http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/viewFile/2031/1220> . Acesso em: 16 mar. 2020.

BATISTA, C. C.; PAULO, R. M. Como os professores se percebem ensinando matemática com tecnologias? **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, v. 73, p. 100-114.

BICUDO, M. A. P. Pesquisa Fenomenológica em Educação: Possibilidades e desafios, **Revista Paradigma**, Ribeirão Preto, v. 41, p. 30-56, jun. 2020. Disponível em:< http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/928/779>. Acesso em 20 jul 2020.

BICUDO, M. A. V. Sobre história e historicidade em Edmund Husserl**. Cadernos da EMARF, Fenomenologia e Direito**, Rio de Janeiro, v.9, n.1, p.21-48, 2016. Disponível em:< http://www.mariabicudo.com.br/artigos-em-peri%C3%B3dicos.php> Acesso em: 11 fev. 2019.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 5ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013. p.111-124.

BICUDO, M. A. V. Um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. In: FLORES, R. F.; CASSIANI, S. (Eds). **Tendências Contemporâneas nas Pesquisas em Educação Matemática e Científica**: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas: Mercado das Letras, 2013. Disponível em: <

http://www.mariabicudo.com.br/resources/CAPITULOS_DE_LIVROS/Um%20ensaio%20sobre%20concep%C3%A7%C3%B5es%20a%20sustentarem%20sua%20pr%C3%A1tica%20pedag%C3%B3gica%20e%20produ%C3%A7%C3%A3o%20de%20conhecimento.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2021.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa em educação Matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v.5, n. 2, p. 15-26, mai-ago. 2012. Disponível em:<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1185/840> Acesso em: 23 dez. 2016.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa qualitativa olhada para além dos seus procedimentos. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa Qualitativa Segundo a Visão Fenomenológica**. 1 ed. São Paulo: Cortês, 2011. p. 11-28.

BICUDO, M. A. V. Análise fenomenológica estrutural e variações interpretativas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa Qualitativa Segundo a Visão Fenomenológica**. 1 ed. São Paulo: Cortês, 2011. p. 53-74.

BICUDO, M. A. V. Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). **Filosofia da Educação Matemática:** fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. 1ªed.São Paulo: Editora UNESP, 2010b, v. 1, p. 23-47.

BICUDO, M. A. V**.** Possibilidades pedagógicas. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). **Filosofia da Educação Matemática:** fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. 1ªed. São Paulo: Editora UNESP, 2010a, v. 1, p. 213-223.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa Qualitativa: significados e a razão que a sustenta. **Revista Pesquisa Qualitativa**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 07-26, 2005. Disponível em:< http://rpq.revista.sepq.org.br/index.php/rpq/article/view/7/7>. Acesso em: 23 dez. 2016.

BICUDO, M. A. V. A formação do professor: um olhar fenomenológico. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Formação de Professores?** Da incerteza a compreensão. Bauru: SP, EDUSC, 2003. p. 19-46.

BICUDO, M.A.V. **Fenomenologia:** Confrontos e Avanços. São Paulo: Cortez editora, 2000.

BICUDO, M. A. P. A compreensão do Simbólico na Educação Matemática, **Revista Bolema**, Rio Claro, v. 9, n. 10, p. 1-8, 1994. Disponível em:< http://mariabicudo.com.br/resources/ARTIGOS/A%20compreens%C3%A3o%20do%20simb%C3%B3lico%20na%20educa%C3%A7%C3%A3o%20matem%C3%A1tica.pdf >. Acesso em: 20 jul 2020.

BICUDO, M. A. V. Sobre a Fenomenologia. In: BICUDO, M. A. V.; ESPOSITO, V. H. C. (Orgs.). **A pesquisa qualitativa em educação:** um enfoque fenomenológico. Piracicaba: Editora Unimep, 1994. p. 15-21.

BICUDO, M. A. V. **O Professor de matemática nas escolas de 1º e 2º graus**. In: BICUDO, M.A.V. (Org.). Educação Matemática. São Paulo: Moraes, 1987, v. , p. 45-57.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. **Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning**. Journal for Research in Mathematics Education, v. 36, n. 5, 2005, p. 412-443. Disponível em:< http://mathed.byu.edu/kleatham/Classes/Fall2010/MthEd590Library.enlp/MthEd590Library.Data/PDF/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning-1974150144/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning.pdf>. Acesso em: 11 mai 2020.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. Ed da Universidade de São Paulo. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1974. 496 p.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular. Ministério da Educação**, Secretaria de Educação Básica, Brasília, 2017. 470 p. Disponível em:< http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf > Acesso em: 01 fev. 2020.

BRASIL. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa:** Cadernos de Formação / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2014. Disponível em:< http://pacto.mec.gov.br/2012-09-19-19-09-11>.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: SEC/SEF, 1997. Disponível em:< http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em 04 jul 2021.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases de 1961- Lei nº 4024, de 20 de dezembro de 1961**. Diposnível em:< https://presrepublica.jusbrasil.com.br/legislacao/108164/lei-de-diretrizes-e-base-de-1961-lei-4024-61>. Acesso em 22 dez 2020.

BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. Justificando Generalizações Geométricas na Formação Inicial de Professores dos Primeiros Anos. **Revista Bolema,** |Rio Claro, v. 33, n. 63, p. 88-108, abr. 2019. Disponível em:< http://www.scielo.br/pdf/bolema/v33n63/1980-4415-bolema-33-63-0088.pdf>. Acesso em 03 abr 2019.

CANADÁ. **Paying Attention to Algebric Reasoning**. p. 1-24. 2013. Disponível em:< http://edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/PayingAttentiontoAlgebra.pdf>. Acesso em 10 abr 2021.

CANAVARRO, A. P. **O pensamento algébrico na aprendizagem matemática nos primeiros anos**. Revista Quadrante, v. 16, n. 2, p.1 – 81, 2007. Disponível em:< https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4301/1/_Quadrante_vol_XVI_2-2007-pp000_pdf081-118.pdf>. Acesso em: 11 out. 2018.

CARDOSO, C. L. **Um estudo fenomenológico sobre a vivência em família**: com a palavra a comunidade. 2007. 212f. Tese (Doutorado em Psicologia). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007. Disponível em https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/11321/11321_1.PDF. Acesso em 24 de abril de 2021.

CAVALCANTE, J. L.; FREITAS, L. C. A.; RODRIGUES, I. G. Educação Algébrica nos Anos Iniciais: uma experiência com alunos do 2º ciclo do Ensino Fundamental. In: ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8. 2014, Paraíba, **Anais**... Campina Grande, 2014, p.1-12 . Disponível em:< http://www.editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/Modalidade_1datahora_23_10_2014_12_52_39_idinscrito_342_624bd30a2a41f1d177226c93e3453961.pdf>. Acesso em: 11 out. 2018.

CHIZZOTTI, A. A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evoluções e desafios. **Revista Portuguesa de Educação,** Braga, v.16, n.2, p. 221-236, 2003. Disponível em:< http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=37416210>. Acesso em: 23 dez. 2016.

COELHO FILHO, M. S.; GHEDIN, E. L. Formação matemática do professor dos anos inicias: reflexões e considerações. In: COLÓQUIO LUSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO, 4. 2018, Braga. **Anais**...Braga: Universidade do Estado de Santa Catarina e Universidade do Minho, 2018. p. 1.12. Disponível em:< http://www.revistas.udesc.br/index.php/colbeduca/article/view/11473>. Acesso em 21 mai. 2019.

COELHO, F. V.; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Revista Estudos Avançados**, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 171-188, set-dez. 2018. Disponível em:< http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40142018000300171> Acesso em: 11 fev 2019.

COLTRO, A. A fenomenologia: um enfoque metodológico para além da modernidade. **Caderno de pesquisas em administração**, São Paulo, v.1, n. 11, p. 37-45, 1º trim. 2000. Disponível em :< http://www.regeusp.com.br/arquivos/C11-art05.pdf >. Acesso em: 23 dez. 2016.

CORRÊA, B. M. **A introdução à arte analítica de François Viète**: Comentários e tradução. 2008. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008. Disponível em:< http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/MSc%2007_Bruna%20Moustapha%20Correa.pdf>. Acesso em 12 jul 2021.

CUNHA, D. R. **A matemática na formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental**: relações entre a formação inicial e a prática pedagógica. 2010. 108f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Faculdade de Física. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2010. Disponível em:< http://tede2.pucrs.br/tede2/handle/tede/3394>. Acesso em 21 mai 2019.

CURI, E. **A matemática e os professores dos anos iniciais**. São Paulo: Musa Editora, 2005, 158 p.

ESPÓSITO, V. H. C. et al. Desenvolvimento humano e a produção do conhecimento: trajetórias de investigação de natureza fenomenológica e hermenêutica. **Revista Memorandum: Memória e História em Psicologia**, Belo Horizonte, n. 26, p. 153-167, abr. 2014. Disponível em:< https://periodicos.ufmg.br/index.php/memorandum/article/view/6526>. Acesso em 30 abr. 2020.

ESPINOSA, A. J. **Quando professores de Matemática da escola e da universidade se encontram: re-significação e reciprocidade de saberes.** 2002. 249 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

ESQUINCALHA. A. C. Nicolas Bourbaki e o Movimento Matemática Moderna, **Revista Educação, Ciências e Matemática**, Cascavel, v. 2, n. 3, p. 28-37, set-dez. 2012. Disponível em:< http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/1865/1085>. Acesso em: 11 fev 2019.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Traduzido por Hygino. H. Domingues. São Paulo: Editora da UNICAMP, 1995. 843 p.

FERREIRA, M. C. N.; RIBEIRO, M.; RIBEIRO, A. L. Conhecimento matemático para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Revista Zetetiké**, Campinas, v.25, n.3, p.496-514, set-dez. 2017. Disponível em:< https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8648585>. Acesso em: 13 jan. 2018.

FALKNER, K.; LEVI, L.; CARPENTER, T. Children's understanding of equality: a foundation of algebra. **Teaching Children Mathematics**, Reston, VA, v. 6, n. 4, p. 232-236, 1999.

FERREIRA, M. J. A. **A constituição e a produção do conhecimento matemático ao ser-com o computador**. 2019. 207 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituo de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2019. Disponível em:<https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/181912/ferreira_mja_dr_rcla.pdf?sequence=3&isAllowed=y>. Acesso em: 30 abr. 2020.

FERREIRA; W. C.; LEAL, M. C.; MOREIRA, G. E. Early Algebra e a Base Nacional Comum Curricular: desafios aos professores que ensinam matemática. **Revista Eletrônica de Educação Matemática,** Santa Catarina, v. 15, n. 1, p. 1-21, 2020. Disponível em:< https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2020.e67670>. Acesso em 27 mai 2020.

FINI, M. I. Sobre a Pesquisa Qualitativa em Educação, que Tem a Fenomenologia como Suporte. In: BICUDO, M. A. V.; ESPOSITO, V. H. C. (Orgs) **A pesquisa qualitativa em educação:** um enfoque fenomenológico. Piracicaba: Editora UNIMEP, 1994. p. 23-33.

FISCHIBEIN, E. The Theory of Figural Concepts. In: **Education Studies in Mathematics**, p. 139-162. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1993, p. 139-162

FURLAN, R.; BOCCHI, J. C. O corpo como expressão e linguagem em Merleau-Ponty. **Estudos de Psicologia**, Campinas, São Paulo. v. 8, n. 3, 2003. p. 445-450.

GADAMER, H. G. **Verdade e Método**. 4. ed. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 1997

GARNICA, A. V. M.; BICUDO, M. A. V. Um estudo hermenêutico do texto de

Matemática. In: **Pesquisa Qualitativa em Educação**: um enfoque fenomenológico, UNIMEP, 1994, p. 95-102.

GIRARDI, F.; GIONGO, I. M. Geometria e estimativa nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Revista Destaques Acadêmicos**, Lajeado, v. 5, n. 4, 161-171, 2013. Disponível em:<http://www.univates.br/revistas/index.php/destaques/article/view/336>. Acesso em: 10 jan. 2019.

GRZIBOWSKI, S. Intuição e percepção em Hurssel: leituras de Emamnuel Levinas. **Revista Nufen**, Belém, v. 8, n. 2, p. 65-76, ago-dez., 2016. Disponível em:< http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2175-25912016000200006>. Acesso em 30 abr 2020.

HEIDEGGER, M. **Ser e Tempo**. Petrópolis: Vozes, 1995.

HEIDEGGER, M. **O que quer dizer pensar?** Ensaios e conferências. Traduzido por: Emmanuel Carneiro Leão, Gilvan Fogel, Marcia Sá Calvacante Schuback, 8ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

HEIDEGGER, M. Que é isto – A Filosofia? In: HEIDEGGER, M., **Conferências e escritos filosóficos**. Traduzido por: Ernildo Stein, São Paulo: Nova Cultural, 1996.

HURSSEL, E. **Meditações Cartesianas e Conferências de Paris.** Tradução de Pedro M. S. Alves. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Forense, 2013, 228 p.

HUSSERL, E. **A crise da humanidade europeia e a filosofia**. Porto Alegre; EDIPUCRS,

JULIO, R. S.; SILVA, G. H. G. Compreendendo a Formação Matemática de Futuros Pedagogos por meio de Narrativas. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 1012-1029. dez 2018. Disponível em:< http://www.scielo.br/pdf/bolema/v32n62/1980-4415-bolema-32-62-1012.pdf> Acesso em: 21 mar. 2019.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E. ROMBERG, T.A.(Orgs.), **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. 1999. Disponível em:< http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS%5CKaput_99AlgUnd.pdf>. Acesso em: 08 nov. 2018.

KLUTH, V. S. Pesquisando a construção do conhecimento algébrico: um mergulho na História. In: SEMINÁRIO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 5. 2003, Rio Claro. **Anais**...Rio Claro, 2003. p. 453-464.

KLUTH, V. S. Uma visão filosófica do pensar algébrico. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL, 7. 2004, Pernambuco. **Anais**...Pernambuco, 2004. p. 1-14. Disponível em :< http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/15/PA10.pdf>. Acesso em: 28 abr. 2017.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 5ª ed. Campinas: Papirus, 1997. 176p.

LOPES, D. C. V.; SILVA, R. S. Uma experiência de ensino-aprendizagem sobre simetria nos anos iniciais através do uso de materiais concretos e digitais. **Revista Cadernos de Aplicação**, Porto Alegre, v. 27/28, p. 111-118, jan-dez. 2015. Disponível em:<https://seer.ufrgs.br/CadernosdoAplicacao/article/view/32223. Acesso em: 10 jan. 2019.

LORENZATTI, E. J. C. Linguagem Matemática e Língua Portuguesa: diálogo necessário na resolução de problemas matemáticos. **Revista Conjectura**, Caxias do Sul, v. 14, n. 2, maio/ago. 2009, p. 89-99. Disponível em: <http://www.ucs.br/site/midia/arquivos/linguagem.pdf>. Acesso em fevereiro de 2014.

LUNA, A. V. A.; SOUZA, E. G.; LIMA, L. B. D. A produção de textos algébricos nos anos iniciais do Ensino Fundamental. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 7. 2018, Foz do Iguaçu. **Anais**...Foz do Iguaçu, 2018. p. 1-12. Disponível em:< https://arquivo.sepq.org.br/V-SIPEQ/Anais/>. Acesso em: 10 jan. 2019.

MACHADO, A. P. **Do Significado da Escrita da Matemática na Prática de Ensinar e no Processo de Aprendizagem a Partir do Discurso de Professores**. 2003. 291 f. Tese (Doutor em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2003. Disponível em:< http://www.mariabicudo.com.br/resources/TESES_e_DISSERTA%C3%87%C3%95ES/Ant%C3%B4nio%20P%C3%A1dua%20Machado_T.pdf>. Acesso em: 20 jul 2020.

MACHADO, A. P.; BICUDO, M. A. V. Significados da escrita matemática. In: Meneghetti, R. C. G. (Org.). **Educação Matemática** – vivências refletidas. São Paulo: Centauro, 2006, p. 105-120.

MACHADO, O. V. M. Sobre a Pesquisa Qualitativa em Educação, que Tem a Fenomenologia como Suporte. In: BICUDO, M. A. V.; ESPOSITO, V. H. C. (Orgs) **A pesquisa qualitativa em educação:** um enfoque fenomenológico. Piracicaba: Editora UNIMEP, 1994. p. 35-46.

MANCINI, L. C. M. **Leituras de práticas na alfabetização matemática:** um fenômeno formativo. 2019. 191f. Dissertação (Mestre em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2019. Disponível em:< https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/65861/R%20-%20D%20-%20LIDIANE%20CONCEICAO%20MONFERINO%20MANCINI.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 22 jul. 2021.

MERLEAU-PONTY, M. **Fenomenologia da Percepção**. 2ª ed. São Paulo: Editora Martins Fontes, 1994.

MESTRE, C.; OLIVEIRA, H. O pensamento algébrico e a capacidade de generalização de alunos do 3º ano de escolaridade do ensino básico. In: C. Guimarães & P. Reis (Orgs.) **Professores e Infâncias:** Estudos e experiências. São Paulo: Junqueira & Marin Editores, 2011, p. 201 -223. Disponível em:< http://ie.ulisboa.pt/pls/portal/docs/1/334683.PDF>. Acesso em: 11 out. 2018.

MIARKA, R.; BICUDO, M. A. V. Forma/ação do Professor de Matemática e suas concepções de Mundo e de Conhecimento. In: CLARETO, S. M.; DETONI, A. R.; PAULO,

R. M. (Orgs.). **Filosofia, matemática e educação matemática**: compreensões dialogadas, 1.ed. Juiz de Fora, MG.: Editora da UFJF, 2010, p.85-102.

MILLIES, C. P. Breve História da Álgebra Abstrata. In: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2. 2004, SALVADOR. **Anais**... Salvador, 2004, p. 1-58. Disponível em:< http://www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf>. Acesso em: 11 fev. 2019.

MOCROSKY, L, F. et al. Frações na Formação Continuada de Professores dos Anos Iniciais: fragmentos de uma complexidade. **Bolema**, Rio Claro, v.33, n. 65, p. 1444-1463, 2019. Disponível em:< https://www.scielo.br/j/bolema/a/FK477dCbhhQTYn4yzt47DdC/?lang=pt&format=pdf>. Acesso em 09 jul. 2021.

MOCROSKY, L. F.; ORLOVSKI, N.; LIDIO, H. O professor que ensina matemática nos anos iniciais: uma abertura ao contínuo acontecer histórico. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 12, n. 1, p. 222-236, jan/mar., 2019. Disponível em:https://periodicos.fclar.unesp.br/iberoamericana/article/view/10894/7893. Acesso em: 27 mar. 2020.

MOCROSKY, L, F. et al. No Movimento Contínuo da Formação do Professor de Matemática dos Anos Iniciais: vamos fazer um pacto? **Revista Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v.9, n. 21, seção temática, p. 1040-1057, 2016. Disponível em:< http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2081>.

MOCROSKY, L. F. A forma-ação do professor de matemática: (re)elaborando concepções. In: CLARETO, S. M.; DETONI, A. R.; PAULO, R. M. (Orgs.). **Filosofia, matemática e educação matemática:** compreensões dialogadas, 1.ed. Juiz de Fora, MG.: Editora da UFJF, 2010, p.103-106.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013, 138 p.

MONDINI, F. **A presença da álgebra na legislação brasileira**. 2013. 433 f. Tese (Doutora em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2013. Disponível em:< https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102139/mondini_f_dr_rcla.pdf?sequence=1>. Acesso em: 06 out 2018.

MONDINI, F. **Modos de conceber a álgebra em cursos de formação de professores de matemática**. 2009. 169 f. Dissertação (Mestre em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2019. Disponível em:< https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91077/mondini_f_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y> . Aceso em 10 fev 2019.

MOURA, A. R. L.; SOUSA, M. C. O lógico-histórico da álgebra nas séries iniciais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8. 2004, Pernambuco. **Anais**... Pernambuco, 2004. p.1-18. Diposnível em :< http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/01/MC06705545968.pdf>. Acesso em 21 abr. 2020.

NACARATO, A. M.; CUSTÓDIO, I. A. O desenvolvimento do pensamento algébrico: algumas reflexões iniciais. In: NACARATO, A. M.; CUSTÓDIO, I. A. (Orgs.), **O desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Educação Básica**: Compartilhando Propostas de Sala de Aula com o Professor que Ensina (Ensinará) Matemática. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018, p. 13-23. Disponível em:< http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_desenv.pdf?fbclid=IwAR1E-EkmCiAVzgq-0zbYDtiXkEZ8K0mzki0wKDCyB4bgNT8rwv5CbuGqzpE>. Acesso em: 15 nov. 2018.

NACARATO, A. M. Conhecimento produzido por professoras dos anos iniciais com tarefas sobre o pensamento algébrico. In: Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, 8. 2017, Madrid, **Anais…**Madrid, 2017. p. 103-111. Disponível em:http://funes.uniandes.edu.co/20178/1/Mendes2017Conhecimento.pdf. Acesso em 26 jul. 2021.

NACARATO, A. M. O professor que ensina matemática: desafios e possibilidades no atual contexto. **Revista Espaço Pedagógico**, Passo Fundo, v. 20, n.1, p. 11-32, jan./jul. 2013. Disponível em:< http://seer.upf.br/index.php/rep/article/view/3505> Acesso em: 27 nov. 2016.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica 2009. 158 p.
necessário na resolução de problemas matemáticos. **Revista Conjectura**, Caxias do

NORONHA, C. A.; GOMES, L. P. S. La enseñanza del álgebra en los años iniciales de la enseñanza fundamental: investigaciones y orientaciones curriculares. **Revista Paradigma**, Ribeirão Preto, v. 51, jun. 2020. p. 938-959. Disponível em:< http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/869>. Acesso em 01 jul. 2020.

OCHI, F.H. et al. **O uso de quadriculados na geometria**. IME-UPS. 2006. 54p.

ORTEGA, E. M. V.; SANTOS, V.M. A matemática e o lugar do professor nos anos iniciais: o ponto de vista dos alunos da Pedagogia. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v.6, n. 1, p. 27-43, mai. 2012. Disponível em:< http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/369/171>. Acesso em 10 nov. 2016.

PAULO, R. M. ; AMARAL, C. L. C.; SANTIAGO, R. A. A pesquisa fenomenológica: explicitando uma possibilidade de compreensão do ser-professor de Matemática. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, Belo Horizonte, v.10, n. 3, p. 71-85, 2010. Disponível em:< https://seer.ufmg.br/index.php/rbpec/article/view/2290/1689>. Acesso em: 23 dez. 2016.

PAULO, R. M. **A compreensão geométrica da criança:** um estudo fenomenológico. 2001. 321 f. Dissertação (Mestre em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2001. Disponível em:< https://www.sepq.org.br/producoes/0/4/22 >. Acesso em: 01 set 2020.

PIMENTAL, T; VALE, I. Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. **Revista Quadrante**, Lisboa, v. 21, n. 2, p. 29-50, 2012. Disponível em < https://quadrante.apm.pt/article/view/22881>. Acesso em 18 set. 2021.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem Matemática. In: PONTE, J. P. (Ed.) **Práticas profissionais de professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014, p. 13-27.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; BRANCO, N. Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. **Revista Educação Matemática em Foco**, João Pessoa, v. 1, n. 1, p. 9-29, 2012. Disponível em:< https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/28726/1/Ponte%2C%20Quaresma%2C%20Branco%20EMEF%202012.pdf>. Acesso em 20 jul. 2021.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: DGIDC. 2009. 181 p. Disponível em:< http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-Branco-Matos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf>. Acesso em: 11 out. 2018.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemática na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTE, J. P. Números e Álgebra no contexto escolar. In: VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L. & CANAVARO, P. (Orgs.), **Números a álgebra na aprendizagem matemática e na formações de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2006. p. 5 – 7.Disponível em:< http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4525/1/06-Ponte%28Caminha%29.pdf>. Acesso em: 11 mai 2020.

QUARTIERI, M. T. et al. Formação continuada de professors: tendências para o Ensino de geometria e algebra nos anos iniciais. **Revista Educação Online**, Rio de Janeiro, n. 30, p. 112-130, 2019. Disponível em:< http://educacaoonline.edu.puc-rio.br/index.php/eduonline/article/view/438/232>. Acesso em 26 jul. 2021.

RADFORD, L. The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In: KIERAN, C (Org.), **Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds**: The global evolution of an emerging field of research and practice. New York: Springer, 2018, p. 3-25. Disponível em:<http://www.luisradford.ca/pub/2018%20-%20Radford%20-%20The%20emergence%20of%20symbolic%20algebraic%20thinking%20-%20web.pdf>. Acesso em: 16 nov. 2018.

RADFORD, L. The progressive development of early embodied algebraic thinking. **Mathematics Education Research Journal**, Australia, n. 26, p. 257-277, 2014. Disponível em:<http://www.luisradford.ca/pub/Radford%20L.%20(2014)%20-%20The%20progressive%20development.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2018.

RADFORD, L. On the development of early algebraic thinking. **PNA**, UK, v. 6, n. 4, p. 117-133, 2012. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/12342220.pdf>. Acesso em: 11 mai 2020.

RADFORD, L. Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective**. Research in Mathematics Education**, v. 12, n.1, p. 1-19, mar. 2010. Disponível em:<http://www.luisradford.ca/pub/22_RME2010Algebraicthinkingfromaculturalsemioticperspective.pdf>. Acesso em : 16 nov. 2018.

RADFORD, L. Sings, gestures, meanings: algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: PROCEEDINGS OF THE SIXTH CONFERENCE OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 6. 2009, França, **Anais**... Lyon, 2009. p. 1-23. Disponível em:< http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.617.8010&rep=rep1&type=pdf>. Acesso em 11 mai 2020.

RADFORD, L. 2006. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. **PME**, v. 1, p. 1-20, 2006. Disponível em:< http://www.luisradford.ca/pub/60_pmena06.pdf >. Acesso em 11 mai 2020.

REIS, N. B. O corpo como expressão segundo a filosofia de Merleau-Ponty, **Revista Kínesis**, Santa Maria, v. 3, n. 6, p. 137-153. 2011. Disponível em:< https://www.marilia.unesp.br/Home/RevistasEletronicas/Kinesis/NayaraBorgesReis.pdf>. Acesso em 04 set. 2021.

ROCHA, I. L. V. A linguagem em Heidegger: considerações sobre o tema e algumas de suas possibilidades educacionais, **Revista Educação em Debate**, Fortaleza, v. 4-5, n. 2-1, p. 49-54, jan/jun. 1983. Disponível em:< http://www.periodicosfaced.ufc.br/index.php/educacaoemdebate/article/view/180/109#>. Acesso em: 20 jul 2020.

SANTOS, C. C. S.; LUVISON, C. C.; MOREIRA, K. G. A construção do pensamento algébrico no Ensino Fundamental I: possíveis trabalhos para a percepção de regularidades e de generalizações. In: NACARATO, A. M.; CUSTÓDIO, I. A. (Orgs.), **O desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Educação Básica**: Compartilhando Propostas de Sala de Aula com o Professor que Ensina (Ensinará) Matemática. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018, p. 71-196. Disponível em:< http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_desenv.pdf?fbclid=IwAR1E-EkmCiAVzgq-0zbYDtiXkEZ8K0mzki0wKDCyB4bgNT8rwv5CbuGqzpE>. Acesso em: 10 jan. 2019.

SANTOS, J. C. A. P. **A ideia de número no ciclo de alfabetização matemática:** o olhar do professor. 2016a. 219 f. Dissertação (Mestre em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. 2016a. Disponível em:< http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/137822/santos_jcap_me_rcla.pdf?sequence=3&isAllowed=y>. Acesso em: 23 dez. 2016.

SANTOS, J. C. A. P. Compreensões de números expressas por professores que ensinam matemática no ciclo de alfabetização: convivência com números. **Revista Perspectiva da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 9, n. 21, 2016, p. 600-617. Disponível em:< https://seer.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2249>. Acesso em 21 jul. 2021.

SANTOS, L. A.; RIBEIRO, G. M. F. O fenômeno da abertura como modo de manifestação do ser. **Revista Eletrônica do Grupo PET**, São João Del Rei, n. 3, 2007, p. 1-10. Disponível em:< https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/existenciaearte/Edicoes/3_Edicao/FENOMENO%20DA%20ABERTURA%2

0COMO%20MODO%20DE%20MANIFESTACAO%20Leandro.pdf>. Acesso em 18 mai 2020.

SÃO PAULO. **Ler e Escrever:** Jornada de Matemática / Secretaria da Educação, Fundação para o Desenvolvimento da Educação. - São Paulo: FDE, 2010. 160 p. Disponível em:< http://www.crmariocovas.sp.gov.br/Downloads/jornada/Ler_e_EscreverJornada_de_Matematica.pdf>. Acesso em: 12 dez. 2016.

SOUSA, M. C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica:** um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental. 2004. 308f. Tese (Doutora em Educação). Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Faculdade de Educação, Campinas, 2004. Disponível em:< http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/252372?mode=full>. Acesso em 21 jul. 2021.

VALE, I.; BARBOSA, A. Pensamento algébrico: contributo da visualização na construção da generalização, **Revista Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 21, n. 3, p. 398-418, 2019. Disponível em:< https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/44297>. Acesso em 25 out. 2020.

VALE, I.; PIMENTEL, T. O pensamento algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores. **Revista da Investigação à pratica**, Lisboa, v. 2, n. 1, p. 98-124, 2013. Disponível em:<https://repositorio.ipl.pt/bitstream/10400.21/3098/1/O%20pensamento%20alg%C3%A9brico.pdf>.Acesso em 18 set. 2021

ZILLES, U. A Fenomenologia husserliana como método radical. In: HUSSERL, E. **A crise da humanidade europeia e a filosofia**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002, p. 08-42.

ZILLES, U. Fenomenologia e a teoria do conhecimento em Hurssel. **Revista da Abordagem Gestáltica,** v. 13, n. 2, p. 216-221, 2007. Disponível em:< http://pepsic.bvsalud.org/pdf/rag/v13n2/v13n2a05.pdf>. Acesso em 04 mai 2020.

APÊNDICE A – Carta de cessão de direitos

Carta de cessão de direitos

Guaratinguetá, 21 de agosto de 2019.

Eu, ________________________________, carteira de identidade número ________________ declaro que cedo os direitos de todas as minhas participações, vídeos, imagens, diálogos, descrições e tarefas realizadas no curso de extensão universitária "Qual o X da questão? Pensamento Algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental I" ofertado pela Universidade Estadual Paulista – Campus Guaratinguetá a Vanessa de Oliveira, aluna regularmente matriculada no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, nível de doutorado, sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Rosa Monteiro Paulo com fins de investigação acadêmica, afirmando que delas poderá valer-se para tanto integralmente ou em partes, sem restrições de prazos e citações, desde a presente data.

Abdicando de direitos meus e de meus descendentes, subscrevo a presente declaração.

____

Assinatura