

**HIAGO DONIZETTI OLIVEIRA DIMAS DO CARMO**

**A origem da inércia e referenciais não inerciais**

**Hiago Donizetti Oliveira Dimas do Carmo**

**A origem da inércia e referenciais não inerciais**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física (Licenciatura) da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de graduação em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Lourenço Cindra

C287o Carmo, Hiago Donizetti Oliveira Dimas do  
A origem da inércia e referenciais não inerciais / Hiago Donizetti  
Oliveira Dimas do Carmo – Guaratinguetá, 2020.  
66 f.: il.  
Bibliografia: f. 65-66

Trabalho de Graduação em Licenciatura em Física – Universidade  
Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2020.  
Orientador: Prof. Dr. José Lourenço Cindra


1. Ciência - Estudo e Ensino. 2. Forças de Inércia. 3. Massa (Física).  
I. Título.

CDU 53

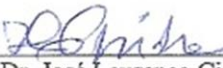
**Hiago Donizetti Oliveira Dimas do Carmo**

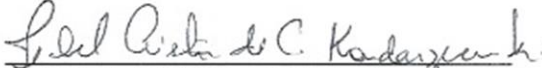
ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO  
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE  
"GRADUADO EM FÍSICA"

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE  
GRADUAÇÃO EM NOME DO CURSO

  
Prof. Dr. Júlio Mesquita Hoff de Silva  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**

  
Prof. Dr. José Lourenço Cindra  
Orientador/UNESP-FEG

  
Prof. Dr. Isabel Cristina de Castro Kondarzewski  
UNESP-FEG

  
Prof. Dr. Elias Leite Mendonça  
UNESP-FEG

Outubro 2020

À minha mãe, ao meu pai, Andréia,  
Matheus e Rafael, ao professor Cindra,  
dedico este trabalho, de forma especial.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha mãe e meu pai por toda a ajuda em minha vida;  
à Andréia pelo o companheirismo nos momentos mais difíceis;  
ao professor Cindra ao qual, com muita paciência, me orientou a escrever este trabalho;  
à todos os professores me fizeram chegar até aqui;  
aos meus amigos e em especial ao meu amigo Lucas que muito me ajudou no final da  
minha graduação.

“Esvazie sua mente de modelos, formas, seja amorfo como a água. Se você coloca a água em um copo, ela se torna o copo. Se você a coloca em uma chaleira, ela se torna a chaleira. A água pode fluir, a água pode destruir. Seja água meu amigo.”

(Bruce Lee)

## RESUMO

A origem da inércia e o estudo de movimentos em referenciais não inerciais são temas pouco discutidos no ensino médio. Acredito que uma análise sobre esses temas é necessária para uma melhor compreensão da física e pode ter importância para uma discussão em aulas de física no ensino médio e superior. Neste Trabalho de Graduação (TG) é feito um estudo da evolução histórica por que passou o conceito de inércia e de força de inércia. A física aristotélica desconhecia a noção de movimento inercial, enquanto a física dos tempos modernos, que tem origem em Galileu, Descartes e outros, parece ter nascido sob a influência direta desse novo conceito que ia aos poucos se formando. A força de inércia que aparece no grande trabalho de Newton com o nome de *vis insita* adquire conotações diferentes nos trabalhos de Euler e d'Alembert. O que mesmo é a inércia, uma propriedade inerente da matéria ou uma propriedade relacional, dependente da matéria distante do Universo? Estão aí as duas visões sobre a inércia: a de Newton e Mach, respectivamente. Neste trabalho ainda foi feito um estudo sobre as forças de inércia que surgem nos referenciais não inerciais, pois o mais comum atualmente é reservar o nome de forças de inércia exclusivamente para as forças que surgem ao se utilizar referenciais inerciais.

**PALAVRAS-CHAVE:** Inércia. Força de inércia. Espaço absoluto. Princípio de Mach. Referencial inercial. Referencial não inercial.



## ABSTRACT

The origin of inertia and the investigation of the motions in non-inertial reference frames are not studied enough in the highschools. I am of opinion that an analysis of this issue is necessary for a better understanding of physics and it can be important for a discussion in classrooms. In this work of Graduation is studied the historical development of the concept of inertia and the inertial force. The Aristotelian physics did not had the notion of inertial motion, while the physics of modern times, which began with the works of Galileo, Descartes and others, appears to be borned under the direct influence of this new concept, which was slowly being formed. The inertial force which appears in the great work of Newton with the name of *vis insita* gets different connotations in Euler's and d'Alembert's works. What is properly inertia, an inherent property of matter or a relational property, which depends on the distant bodies of the Universe? Here are the two main viewpoints about inertia: the Newton's and Mach's, respectively. Furthermore, in this Final Graduation Work a study has been done about the inertial forces which appear in the non-inertial reference frames, considering that nowadays the name inertial forces generally is reserved for the forces which appears when the motion is studied in the non-inertial reference frames.

**KEYWORDS:** Inertia. Force of inertia. Absolute space. Mach's principle. Inertial reference frame. Non-inertial reference frame.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Fases da experiência do balde de Newton .....	24
Tabela 1 - Contribuição relativa a inércia .....	31
Figura 2 - O Universo como sendo uma aproximação de uma esfera / aceleração do universo causando efeitos inerciais no objeto (como imaginava Mach).....	33
Figura 3 - Movimento da pedra caindo do navio observado por diferentes referenciais inerciais. ....	37
Figura 4 - Mudança de um referencial S para um referencial S' .....	38
Figura 5 - Relação das coordenadas de uma partícula nos sistemas S e S'. .....	39
Figura 6 - Movimento de uma bola girando, suspensa por uma corda em um círculo horizontal, analisada em S e S'. .....	44
Figura 7 - Medida da força necessária para manter um objeto em um sistema de referência em rotação .....	45
Figura 8 - Descrições de movimento nos referenciais S e S' numa mesa giratória. ....	47
Figura 9 - Movimento nos referenciais S e S'.....	48
Figura 10 - Esquema para o cálculo da magnitude da força de Coriolis a partir da deflexão AB em S.....	49
Figura 11 - Rotação de um vetor deslocamento A arbitrário, analisado em S e S' .....	51
Figura 12 - Esquema vetorial: Patinador de gelo girando .....	55
Figura 13 - (a) As forças que atuam sobre uma partícula em repouso, vistas de um sistema girante, como a própria Terra. (b) Desvio à oeste de um objeto em queda, num sistema de referência solidário ao da Terra. (c) Movimento de queda em (b) observado em um sistema fixo. ....	57
Figura 14 - Experiência do balde de Newton: Geometria do problema .....	59
Figura 15 - Plano Zr no balde de Newton .....	60
Figura 16 - Formação de um furacão no hemisfério norte, causado pela força de Coriolis que atua nas partículas de Ar.....	61

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

MRU	Movimento retilíneo uniforme
MCU	Movimento circular uniforme
TG	Trabalho de Graduação

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mu$	Massa inercial na equação de Mach
$\lambda$	Latitude
$k$	Constante eletrostática
$G$	Constante gravitacional
$\omega$	Velocidade angular

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	13
<b>2</b>	<b>PENSADORES PRÉ ISAAC NEWTON: CONCEPÇÕES DO ESPAÇO E FORÇA</b> .....	15
2.1	PRÉ ARISTOTELISMO: CONCEPÇÕES DE FORÇA .....	15
<b>2.1.1</b>	<b>Aristóteles: conceitos de força e espaço</b> .....	16
<b>2.1.2</b>	<b>Pós Aristóteles: uma nova física</b> .....	17
2.2	CONCEITOS PRIMITIVOS DE INÉRCIA: GALILEU GALILEI.....	18
<b>3</b>	<b>A ORIGEM DA INÉRCIA: DE NEWTON À MACH</b> .....	21
3.1	NEWTON: CONCEITOS FUNDAMENTAIS EM PRINCIPIA.....	21
3.2	ESPAÇO ABSOLUTO: UMA EXPLICAÇÃO DA ORIGEM DA INÉRCIA .....	23
<b>3.2.1</b>	<b>A experiência do balde</b> .....	24
3.3	LEIBNIZ E HUYGENS: OS PRIMEIROS RELATIVISTAS .....	27
3.4	O PRINCÍPIO DE MACH: A ORIGEM DA INÉRCIA ATRAVÉS DE MOVIMENTOS RELATIVOS.....	28
<b>3.4.1</b>	<b>O princípio de Mach</b> .....	28
<b>3.4.2</b>	<b>O princípio de Mach por Sciamia</b> .....	30
<b>4</b>	<b>A MECÂNICA CLÁSSICA: FORÇAS DE INÉRCIA E REFERENCIAIS NÃO INERCIAIS</b> .....	35
4.1	MOVIMENTOS SOB REFERENCIAL NÃO ACELERADO: PRINCIPIO DE RELATIVIDADE DE GALILEU.....	35
<b>4.1.1</b>	<b>A transformação de Galileu</b> .....	37
4.2	MOVIMENTO SOB REFERENCIAIS ACELERADOS.....	39
4.3	REFERENCIAIS ACELERADO: FORÇAS INERCIAIS. ....	41
<b>4.3.1</b>	<b>Forças de inércia em referenciais em rotação</b> .....	43
4.3.1.1	Força centrífuga.....	43
4.3.1.2	Força de Coriolis: .....	46
4.3.1.3	Força de Euler .....	50
<b>4.3.2</b>	<b>Equação geral para o movimento em um referencial não inercial</b> .....	51
<b>4.3.3</b>	<b>Patinador de gelo girando</b> .....	55
<b>4.3.4</b>	<b>A Terra como referencial girante:</b> .....	56
4.3.4.1	O valor local da aceleração da gravidade .....	56
4.3.4.2	Geometria da superfície do balde de Newton .....	59

4.3.4.3	Circulação Atmosférica.....	61
5	<b>CONCLUSÃO</b> .....	63
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	65

## 1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é investigar através da história da ciência e das principais literaturas de física sobre o tema, a problemática em torno do conceito de inércia e de forças de inércia. Precisamos compreender as vicissitudes que acompanharam a construção científica do conceito de inércia, ao longo da história e fazermos reflexões sobre algumas abordagens controversas, para sua melhor aplicação no ensino de física.

Eu não posso deixar de salientar que a ciência pode aprender com a história da ciência e pode progredir retomando e reformulando antigas teorias[...] (ÉVORA, 1992, p. 18).

Por outro lado, a noção de força de inércia, como ressaltam Igal Galili e Michael Tseitlin, designa todo um conglomerado de significados e se relaciona com diferentes assuntos. Esses autores ressaltam que, na história da física, o termo força de inércia é usado em pelo menos cinco diferentes significados, que coexistem e, em geral, causam confusão no principiante.

Kepler introduziu o termo “inércia” no contexto científico, ainda de forma muito precária. Inércia, para Kepler, era apenas a capacidade dos corpos resistir a qualquer tentativa de serem colocados em movimento. Ele chamou essa propriedade de “indolência” dos corpos. Newton, influenciado pelos trabalhos de Descartes, compreendeu a inércia como algo muito fundamental. Ele cunhou o conceito de força inércia (*vis inertia*) e percebeu que o peso seria proporcional à massa inercial. Euler, que deu continuação à mecânica de Newton, concluiu que a inércia não é uma força, para ele, a inércia seria uma propriedade, uma faculdade, de um corpo. D’Alembert, outro construtor da mecânica no século XVIII, tomou o princípio de inércia como um dos princípios fundamentais da mecânica, e forneceu uma abordagem operacional para a força de inércia: qualquer sistema de forças está em equilíbrio, se a força de inércia é acrescentada às forças impressas, ou seja,  $F - ma = 0$ . Mas com isso, para ele, e para seus sucessores, a força de inércia  $I = -ma$  não passava de um estratagema adequado, para estabelecer o equilíbrio formal e nada mais. Conclusão: a força de inércia seria uma força fictícia. Não podemos esquecer da contribuição de Cristian Huygens, para o conceito de força de inércia. Cientista versátil que foi influenciado pelos trabalhos de Galileu e pela física cartesiana, ele introduziu o conceito de força centrífuga, no contexto de uma experiência de pensamento, ao imaginar um observador não inercial, na periferia de uma roda girante. Se um pêndulo estivesse com uma das extremidades do fio preso a um suporte fixo a essa roda girante, o observador girando junto com esse dispositivo, veria o sistema em equilíbrio, sujeito às forças peso, tração no fio e a força centrífuga, fazendo o fio do pêndulo inclinar-se para fora da roda.

Newton também investigou dispositivos mecânicos desse tipo, mas considerou um observador estacionário vendo a roda girar. Assim ele deu ênfase ao conceito de força centrípeta, em lugar da força centrífuga. Para ser mais preciso, como faz lembrar Galili e Tseitlin, Newton não considerou nenhum observador. Sua visão de um Universo infinito, estático, existindo em um espaço e tempo absolutos, não implicava qualquer observador particular, senão um único verdadeiro observador, o próprio Deus.

Foi preciso esperar chegar o século XIX, quando as mais variadas máquinas faziam mover a Revolução Industrial já em estágio avançado, Gaspard Gustave Coriolis estudando especificamente referenciais girantes deparou com uma nova força de inércia, a nossa conhecida força de Coriolis. Entretanto, uma preocupação com a origem das forças de inércia só passou a fazer sentido depois das investigações de Ernst Mach e Ludwig Lange, nas últimas décadas do século XIX e com Albert Einstein já no século XX. Einstein viu uma grande analogia entre as forças de inércia, principalmente a força de inércia que surge em referenciais não inerciais animados de movimento de translação, e as forças gravitacionais.

Em resumo, na segunda seção, foi feita uma breve análise histórica do desenvolvimento da mecânica até a física do século XVI, na terceira seção, discussões sobre as principais visões sobre a origem da inércia e uma pequena análise do trabalho de Sciamia em relação ao princípio de Mach e na quarta e última seção, discute-se aplicações das forças de inércia e algumas reflexões sobre a possível realidade das forças de inércia.



## 2 PENSADORES PRÉ ISAAC NEWTON: CONCEPÇÕES DO ESPAÇO E FORÇA

Os conceitos de espaço influenciaram o problema que trata da origem da inércia, como veremos mais à frente, ocorreram os embates filosóficos entre Newton e Leibniz e, posteriormente, Mach retoma a crítica às concepções de Newton. A história da ciência pode ser útil para ao menos - mesmo que não tenhamos aparatos necessários para a solução do problema - enxergarmos a origem dele. Toda seção foi embasada na obra de Max Jammer (JAMMER, 2009) e Michel Ghins (GHINS, 1991).

### 2.1 PRÉ ARISTOTELISMO: CONCEPÇÕES DE FORÇA

As primeiras concepções de espaço, pelo menos as que temos acesso, começaram na Grécia antiga. Os pitagóricos, para os quais os números fazem importante de sua teoria, atribuiu aos mesmos certa espacialidade. O vazio deveria existir a fim de garantir o caráter discreto dos números, porém ainda estava longe de ter um significado físico<sup>1</sup>. (JAMMER, 2009, p. 32). Os atomistas Leucipo e Demócrito defendiam a existência de um espaço vazio infinito. Na visão dos atomistas havia os corpos, os átomos, que se moviam num vazio infinito.

Arquitas de Tarento foi o primeiro a diferenciar espaço, lugar e matéria, este afirmou que todo corpo ocupa um lugar e só existe se o lugar existir (ou seja, o espaço existir). (JAMMER, 2009, p. 33-4). Ou seja, a concepção de espaço de Arquitas é o que limita a matéria existente em nosso mundo, e por conseguinte, este é limitado pelo vazio, não existindo matéria no vazio e considerando o universo infinito.

Já para Platão, talvez o último filósofo importante que tenha escrito sobre o espaço antes de Aristóteles, o espaço era uma entidade geométrica, limitando a matéria de acordo com sua geometria. Os elementos tinham formas geométricas bem definidas: A água, um icosaedro; o ar um octaedro; o fogo uma pirâmide e a terra, um cubo. A matéria era definida pelo espaço e este pela geometria (JAMMER, 2009, p. 38-9). Com a Platão a física tornou-se geometria, assim como com os pitagóricos ela se tornou aritmética. Platão teve uma grande aceitação em grande parte da Idade Média. Como escreveu Jammer, o *Timeu* de Platão, como um texto padrão no ensino de física, só foi substituído pela *Física* de Aristóteles, em meados do século XII.

---

<sup>1</sup>Para uma definição de significado físico do espaço, consultar Ghins, 1991;

Como vimos nesses breves comentários, as concepções de espaço antes de Aristóteles eram completamente hipotéticas, mas em geral, no que se concerne ao espaço, este era infinito e a existência de matéria no vazio, permitida.

### **2.1.1 Aristóteles: conceitos de força e espaço**

Aristóteles teve grande influência e autoridade no que se diz respeito à física. Em sua obra *Categorias*, ele descreve uma categoria ligada ao espaço que chama de quantidade. Essa quantidade pode ser uma rocha, por exemplo. Dentro dessa categoria, existem outras duas subcategorias que define se a quantidade é contínua ou discreta. A rocha, assim como o espaço, é uma quantidade contínua, pois é limitada pelo espaço (JAMMER, 2009, p. 40) (O espaço aqui é a somatória de todos os lugares ocupados pelos corpos, e lugar é o espaço que limita o corpo).

Em sua obra, a *Física*, Aristóteles se limita apenas ao estudo do lugar, pois este não concorda com as concepções dos pensadores citados há pouco sobre a existência do vazio, porém, sem conseguir refutá-los, limita-se apenas aos estudos do "lugar", sem definir um espaço geral.

O "lugar" segundo Aristóteles, é real, porém não independente, no sentido de ser substancial. Ele abarca uma coisa, mas não é parte dela, não sendo maior nem menor que ela. A coisa pode ser separável deste lugar, e cada coisa tem o seu "lugar natural".

O espaço para Aristóteles, apesar de não ser material, é um portador de diferenças qualitativas e fornece a base metafísica da mecânica do movimento "natural", ou seja, o espaço causa influência na matéria. Em outras palavras, a concepção de espaço de Aristóteles é muito diferente da concepção de espaço da mecânica clássica dos tempos modernos. O espaço não é homogêneo nem isotrópico. Jammer, faz um comentário interessante a respeito:

Essa definição de espaço nos remete, modernamente falando, como um campo de força. Pois, de acordo com Aristóteles, os elementos como o fogo e a terra, se não forem impedidos, tendem a ficar no seu lugar natural, respectivamente para cima e para baixo, por exemplo. (JAMMER, 2009, p. 42).

O universo para Aristóteles era finito, limitado por uma esfera, que é conhecida como "esfera mais externa". A esfera mais externa é o que abarca o universo geral, não estando contida a mais nenhum outro receptáculo. O centro dessa esfera é a Terra, que é o "lugar natural" dos corpos mais pesados. O espaço então tem influência sobre a matéria, de acordo com Aristóteles (JAMMER, 2009, p. 43).

Para Aristóteles, os movimentos dos objetos só poderiam ser mantidos sob ação de uma força de emanção da substância, como a força de empurrar ou puxar, dependendo sempre do meio externo, de um segundo objeto. Era impossível o movimento de um corpo ser mantido, pois esse deveria ir para seu "lugar natural". (JAMMER, 2011, p. 56).

Algumas características fundamentais da física aristotélica são a concepção de lugares naturais, a convicção de que no mundo sublunar os movimentos locais se dividem em movimento natural e movimento forçado (violento) e que no mundo supralunar, os movimentos seriam do tipo circular uniforme em torno do centro do mundo (a Terra imóvel). Não havia a concepção de movimento inercial, a não ser que vamos chamar o movimento circular dos astros de movimento inercial, mas esse não é o caso.

Apesar de muitos outros filósofos contemporâneos, ou não, a Aristóteles criticarem duramente aspectos de sua física, sua autoridade era grande demais para ser questionada e suas ideias perduraram por muito tempo, porém essas críticas com certeza foram importantes para a revolução da física, principalmente na Itália do século XVI, que foi o ponto de partida de Galileu Galilei. René Descartes e Isaac Newton, cada um a seu modo, criaram outras concepções do mundo e permitiram que uma nova física e uma nova astronomia surgissem.

### **2.1.2 Pós Aristóteles: uma nova física**

Alguns séculos depois da morte de Aristóteles, João Filopono (c. 490-570), filósofo neoplatônico do período tardio da Escola de Alexandria, com certeza merece uma passagem na nossa análise, pois ele ao criticar a concepção de Aristóteles no tocante ao movimento dos projéteis, chegou próximo ao conceito de ímpeto. Por outro lado, foi o ímpeto a base da dinâmica de Galileu. Filopono questiona Aristóteles da seguinte forma: Para Aristóteles, um objeto lançado ao ar, continua a se mover durante determinado tempo, graças à ação do próprio meio, o ar. Filopono duvidou dessa asserção de Aristóteles, e concluiu que ao lançar o objeto, o lançador imprimia no móvel a capacidade de se mover através do ar. Essa "força impressa ao móvel" é que, séculos mais tarde, com Jean Buridan, recebeu o nome de ímpeto (*impetus*, em latim). Filopono criticou também a concepção de lugar de um corpo, segundo Aristóteles.

Apesar de Filopono já não mais concordar com o conceito de "lugar" e "lugar natural", este não desconsiderou os conceitos de "acima" e "abaixo", porém não era mais o espaço que definia quem deveria ir "acima" ou "abaixo" e sim porque os corpos deveriam obedecer as ordens de Demiurgo. Era essa tendência inerente ao corpo em movimento e não ao meio e ao espaço, que correspondia ao "ímpeto" (JAMMER, 2009, p. 87). Filopono não conseguiu de

modo satisfatório, uma nova teoria para explicar o espaço, porém gerou desconfiança em relação as possíveis aplicações das concepções de Aristóteles.

Muitos séculos mais tarde, Galileu Galilei (1564 – 1642), como continuador da chamada física italiana do século XVI, deu grande contribuição no processo de elaboração de uma nova física, uma física que tem como fundamentos o princípio de inércia e a relatividade do movimento. No que diz respeito ao surgimento do princípio de inércia, o astrônomo Johannes Kepler pode ser considerado um precursor. Kepler em seu estudo da órbita de Marte, chegou próximo ao conceito de força gravitacional emanada do Sol, ao mesmo tempo teve uma noção ainda bastante primitiva de inércia da matéria, inércia essa concebida como resistência ao movimento, uma espécie de indolência inerente à matéria em geral.

## 2.2 CONCEITOS PRIMITIVOS DE INÉRCIA: GALILEU GALILEI

Na época de Galileu, a física aristotélica já era uma física que vinha sofrendo algumas críticas bastante acirradas. Controvérsias já haviam surgido em relação a alguns aspectos da teoria de Aristóteles, especialmente sobre o movimento dos corpos lançados próximos à superfície da Terra. Galileu pode ser considerado o principal cientista a contribuir na elaboração de uma nova física. Para nossa pesquisa, daremos enfoque à sua contribuição no diz respeito ao princípio de inércia que posteriormente foi desenvolvido por Newton.

Como citamos anteriormente, Aristóteles defendia que para manter um movimento, era necessária a aplicação de uma força agindo em quanto durasse o movimento. Porém Galileu, em sua famosa obra "Diálogos sobre os dois principais sistemas do mundo", faz uma discussão sobre um conceito que mais tardar viria ser conhecido como princípio de inércia:

**Salviati** - [...] dizei-me: quando tivésseis uma superfície plana, polidíssima como um espelho e de matéria dura como o aço, e que não fosse paralela ao horizonte, mas um pouco inclinada sobre a qual se colocasse uma bola perfeitamente esférica e de matéria pesada e duríssima, como, por exemplo, de bronze, deixada em liberdade, o que acreditais que ela faria? **Simplício** - Não acredito de modo algum que ela ficasse parada; ao contrário, estou perfeitamente seguro de que ela se moveria espontaneamente na direção do declive. [...]

[...] **Salviati**- E qual seria a duração do movimento daquela bola, e com que velocidade? Notai que me referi a uma bola perfeitissimamente redonda e a um plano perfeitamente polido, para remover todos os impedimentos externos e acidentais. E assim também quero que seja abstraído o impedimento do ar mediante a sua resistência a ser aberto, e todos os outros obstáculos acidentais, se outros pudessem existir.

**Simplício** - Compreendi tudo perfeitamente: quanto à vossa pergunta, respondo que ela continuaria a mover-se ao infinito, se tanto durasse a inclinação do plano, e com um movimento continuamente acelerado;

**Salviati** - Mas, se outros quisessem que aquela bola se movesse para cima

sobre aquela mesma superfície, acreditais que ela subiria?

**Simplício** - Espontaneamente não, mas só arrastada ou lançada com violência.

**Salviati** - E quando ela fosse impelida por algum ímpeto que lhe fosse violentamente impresso, qual e quanto seria o seu movimento?

**Simplício**- O movimento iria sempre enfraquecendo e retardando-se, por ser contra a natureza, e seria mais demorado ou mais breve, segundo o maior ou o menor impulso e segundo o maior ou menor aclave.

**Salviati**- Parece-me, portanto, até aqui, que vós me haveis explicado os acidentes de um móvel sobre dois planos diferentes; e que no plano inclinado o móvel pesado espontaneamente desce e vai continuamente acelerando-se, e que, para retê-lo em repouso, é necessário usar força; mas

sobre o plano ascendente é necessário força para fazê-lo avançar e também para pará-lo, e que o movimento que lhe foi impresso vai continuamente enfraquecendo, até que finalmente se anula. Dizeis ainda mais que em um e em outro caso nasce uma diferença dependendo de se a declividade ou aclividade do plano for maior ou menor; de modo que a uma inclinação maior corresponde uma maior velocidade e, ao contrário, sobre o plano em aclave o mesmo móvel lançado pela mesma força move-se uma distância maior quanto menor seja a elevação. Dizei-me agora o que aconteceria com o mesmo móvel sobre uma superfície que não estivesse nem em aclave nem em declive.

**Simplício** - Aqui preciso pensar um pouco na resposta. Como não existe declividade, não pode existir uma inclinação natural ao movimento e, não existindo aclividade, não pode existir resistência a ser movido, de modo que seria indiferente à propensão e à resistência ao movimento: parece-me, portanto, que ele deveria ficar naturalmente em repouso.

Mas como sou esquecido! Porque não faz muito que o Sr. Sagre do me fez entender que assim aconteceria.

**Salviati** -Assim acredito, quando alguém o colocasse parado; mas se lhe fosse dado um ímpeto em direção a alguma parte, o que aconteceria?

**Simplício**- Continuará a mover-se na direção daquela parte.

**Salviati** - Mas com que espécie de movimento? Por um movimento continuamente acelerado, como nos planos em declive, ou por um movimento sucessivamente retardado, como nos aclives?

**Simplício** - Eu não consigo perceber causa de aceleração nem de retardamento, não existindo nem declividade nem aclividade.

**Salviati**- Sim. Mas se não existisse causa de retardamento, muito menos deveria existir de repouso: quanto acreditais, portanto, que duraria o movimento do móvel?

**Simplício**- Tanto quanto durasse o comprimento daquela superfície que não é nem subida, nem descida.

**Salviati** - Portanto, se esse espaço fosse ilimitado, o movimento nele seria igualmente sem fim,ou seja, perpétuo?

**Simplício**- Parece-me que sim, sempre quando o móvel fosse de matéria duradoura (GALILEI, 2011, p. 227-9).

Galileu descreve pela primeira vez o que conhecemos por inércia (pelo menos no sentido de Isaac Newton). Aqui ele descreve, em forma de diálogo, numa situação completamente ideal, que se uma bola perfeitamente esférica for lançada num plano horizontal perfeitamente polido (praticamente sem atrito), ficaria em movimento retilíneo uniforme para sempre. Indo na contramão do que dizia Aristóteles, que afirmava a necessidade de uma força para manter tal movimento.

Galileu não discutiu o porquê do movimento manter-se, porém esse foi o golpe de misericórdia a física de Aristóteles. Newton, em sua gloriosa obra Principia, descreveu com

maiores detalhes a inércia e a classificação dos tipos de força. Esse assunto continuará na próxima seção.

Diversos historiadores da ciência alegam que Galileu não formulou o princípio de inércia de maneira adequada, pois ele ainda estava preso à concepção aristotélica de prioridade do movimento circular. Esse “plano sem aclividade nem declividade” parece ser o plano que, se prolongado continuamente, faz circundar a Terra. Portanto, estamos em presença do movimento circular. A contribuição de Descartes, para o surgimento do princípio de inércia não pode ser desprezada. Descartes sim, ele foi bastante peremptório na defesa do movimento em linha reta, como o protótipo do movimento inercial.

Descartes escreveu em seus *Princípios de Filosofia* de 1644:

Primeira lei da natureza: Que cada coisa permanece no estado em que está, se nada vier a mudá-la.[...]

Segunda lei da natureza: Que todo corpo que se move tende a continuar seu movimento em linha reta (DESCARTES, 1997, p. 76-77).

Esta seção teve como objetivo estudar o desenvolvimento da mecânica até o século XVI, com ênfase na construção do conceito de inércia. A próxima seção tem como objetivo analisar as duas principais visões sobre a origem da inércia.

### 3 A ORIGEM DA INÉRCIA: DE NEWTON A MACH

Há várias teorias tentando explicar a origem da inércia. Galileu, como vimos, somente nos mostrou sua existência, sem se preocupar com explicações mais profundas. René Descartes, com base na concepção da conservação da quantidade de movimento no Universo, chegou muito próximo a formular o princípio de inércia. Isaac Newton, como sucessor de Descartes e contemporâneo de Cristian Huygens pôde avançar mais na questão do movimento inercial. Como veremos em breve, ele a definiu com maior rigor, e buscou uma explicação pra sua origem. Porém, sua explicação, mesmo perdurando como a teoria mais até os dias de hoje pela maioria dos cientistas, não agradou a todos. Leibniz e Huygens, que foram contemporâneos de Newton, o criticaram veemente, porém não obtiveram muito alcance. Somente depois de quase 200 anos, uma nova visão sobre a origem da inércia foi defendida por Ernst Mach. Essa visão, apesar de ser considerados por muitos como muito filosófica, é levada em conta por boa parte dos cosmólogos atuais e foi, com certeza, um dos pilares da teoria geral da relatividade.

#### 3.1 NEWTON: CONCEITOS FUNDAMENTAIS EM PRINCIPIA

Newton, logo no início do primeiro livro dos Principia, define grandezas importantes para a compreensão da inércia. São elas o conceito de massa (ou quantidade de matéria), e a quantidade de movimento:

[...] A quantidade de matéria é a medida da mesma, obtida conjuntamente à partir de sua densidade e volume[...] A quantidade de movimento é a medida do mesmo, obtida conjuntamente à partir da velocidade e a quantidade de matéria[...] (NEWTON, 2008, p. 39-40).

Após essa definição, Newton define os conceitos de força, ele as classifica em três espécies: *vis insita* (força inerente à matéria), que é basicamente uma força de inércia, a *vis impressa* (força exercida ou imprimida sobre um corpo), e a força centrípeta. Uma força centrípeta, segundo Newton, uma força dirigida para um centro. Newton comenta que as forças centrípetas são a força da gravidade, devida à qual os corpos tendem para o centro da Terra, o magnetismo, pelo qual o ferro tende para a magnetita; e aquela força, seja qual for, pela qual os planetas são continuamente desviados dos movimentos retilíneos. Caso contrário, eles prosseguiriam em movimento retilíneo.

[...] *A vis insita* ou força inata da matéria, é um poder de resistir, através de que todo o corpo, no que depende dele, mantém seu estado presente, seja em repouso ou em movimento uniforme em linha reta[...]

[...] Uma força imprimida é uma ação exercida sobre o corpo a fim de alterar seu estado, seja de repouso, seja de movimento uniforme em linha reta[...] (NEWTON, 2008, p. 40-1).

Sobre a força de inércia, Newton faz o seguinte comentário:

Essa força é sempre proporcional ao corpo ao qual ela pertence e em nada difere da inatividade da massa a não ser pela maneira de concebê-la. A partir da natureza inerte da matéria, um corpo não tem seu estado de repouso ou movimento facilmente alterado[...] (NEWTON, 2008, p. 40).

Tal comentário serve para justificar a impossibilidade de haver presença de força de inércia em um corpo desprovido de massa, fazendo ambas definições serem dependentes (massa e inércia). Já a força imprimida, é a força presente apenas em movimentos acelerados, ou seja, tirando um corpo do repouso ou do movimento retilíneo uniforme.

Fica claro então, que para Newton, as duas forças são reais, e necessárias para explicação dos movimentos. Inclusive a força de inércia é considerada para explicar movimentos acelerados, pois na ausência de forças de inércia, uma força imprimida muito pequena já seria capaz de comunicar ao corpo uma aceleração infinita (GHINS, 1991).

Mais adiante no livro I dos *Principia*, Newton enuncia, o que ele chama de primeiro axioma ou primeira lei:

todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta, a menos que ele seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele. (NEWTON, 2008, p. 53).

Apesar de implícita nas definições anteriores, aqui fica mais explícito a sua primeira lei. Ghins, faz um comentário interessante sobre a necessidade de Newton explicitar as definições em um axioma:

O movimento retilíneo uniforme, assim como o repouso, do qual é um caso particular, não necessita de explicação e nenhuma força (nem mesmo de inércia), está presente neste tipo de movimento. O movimento inercial, não pode portanto ser interpretado como um movimento natural, no sentido de que Aristóteles o entendia, isto é, uma causa interna; para Newton, não existe força interna que pudesse manter o corpo sobre uma linha reta e uma velocidade uniforme (GHINS, 1991).



O que é, basicamente, a ideia que Galileu tinha de inércia, como vimos nos diálogos entre Salviati e Simplicio. Porém Newton foi cuidadoso o suficiente para fazer uma diferenciação entre princípio de inércia e força de inércia.

No Escólio do Primeiro Livro dos *Principia*, Newton define o que seria, modernamente falando, o sistema de referência dos movimentos verdadeiros, são eles o tempo e o espaço absoluto. Posteriormente, define o que é movimento absoluto e relativo:

**I-** O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, por si mesmo e por sua natureza, foi uniformemente sem relação com qualquer coisa externa e também é chamado de duração. O tempo comum, aparente e relativo, é uma medida de duração e percepção externa (seja ela exata ou irregular), que é obtida por meio de movimento e que é normalmente usada no lugar do tempo verdadeiro, tal como uma hora, um dia, um mês, um ano.

**II-** O espaço absoluto em sua própria natureza sem relação com qualquer coisa externa, permanece sempre similar e imóvel. Espaço relativo é alguma dimensão ou medida móvel dos espaços absolutos, a qual nossos sentidos determinam por sua posição com relação aos outros corpos[...]

**III-** Lugar é uma parte do espaço que um corpo ocupa, e de acordo com o espaço, é ou absoluto ou relativo[...]

**IV-** Movimento absoluto é a translação de um corpo de um lugar absoluto para outro; e o movimento relativo é a translação de um lugar relativo para outro[...] (NEWTON, 2008, p. 45).

O movimento verdadeiro, que é chamado de absoluto, não é acessado por nossas percepções. Para Newton, estamos restritos ao movimento e ao tempo relativo, porém, ele é demonstrável recorrendo-se à dinâmica.

### 3.2 ESPAÇO ABSOLUTO: UMA EXPLICAÇÃO DA ORIGEM DA INÉRCIA

Apesar de não conseguirmos termos acesso ao espaço absoluto por meio de nossas percepções, Newton define as diferenças entre os movimentos relativos e absolutos:

A causa pelas quais os movimentos verdadeiros e relativos são diferenciados, um do outro, são as forças imprimidas sobre os corpos para gerar movimento. O movimento verdadeiro não é nem gerado nem alterado, a não ser por alguma força imprimida sobre o corpo movido; mas o movimento relativo pode ser gerado ou alterado sem qualquer força imprimida sobre o corpo (NEWTON, 2008, p. 48).

Essa distinção entre movimento relativo e movimento absoluto pode ser vista em alguns efeitos que surgem acompanhando certos movimentos absolutos. Como por exemplo, efeitos causados pelas forças de inércia, que resultam de uma modificação do estado de repouso ou de MRU, em relação ao estado absoluto:

Os efeitos que distinguem o movimento absoluto e relativo são as forças que agem no sentido de provocar um afastamento à partir do eixo do movimento circular; pois não há tais forças em um movimento circular meramente relativo; Mas em um movimento circular verdadeiro e absoluto, elas são maiores ou menores, dependendo da quantidade de movimento (NEWTON, 2008, p. 49).

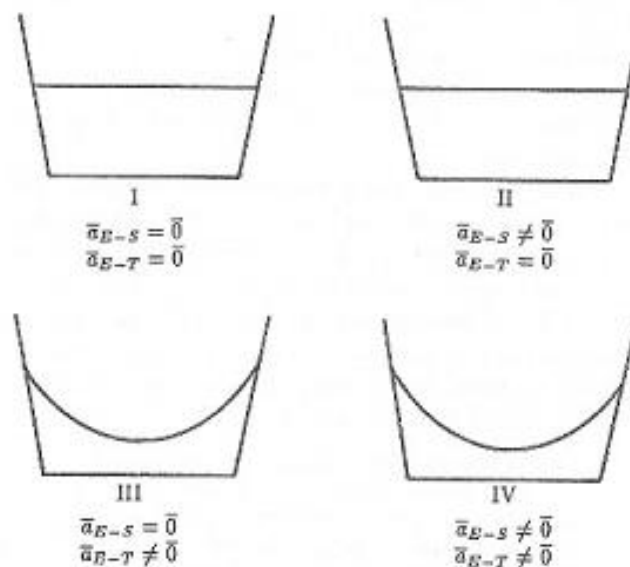
### 3.2.1 A experiência do balde

Os efeitos citados logo acima, são descritos com maiores detalhes logo em seguida, na famosa experiência do balde. Essa experiência serve como argumentação experimental a favor da entidade espaço absoluto:

Se um recipiente, suspenso por uma longa corda, e tantas vezes girado, a ponto da corda ficar torcida, e então enchido com água e suspenso em repouso junto com a água; a seguir, pela ação repentina de outra força, é girado pelo lado contrário, e enquanto a corda desenrola-se, o recipiente continua nesse movimento por algum tempo; A superfície plana da água, de início, será plana como antes do recipiente começar a se mover; mas depois disso o recipiente, por comunicar gradualmente o seu movimento à água, fará com que ela comece nitidamente a girar e a se afastar pouco a pouco do meio e a subir pelos lados do recipiente, transformando-se em uma figura côncava (conforme eu mesmo experimentei), e quanto mais alto se torna o movimento, mais a água vai subir, até que, finalmente, realizando suas rotações nos mesmos tempos que o recipiente, ela fica em repouso relativo nele (NEWTON, 2008, p. 49).

Esta experiência se divide em quatro fases, conforme a figura abaixo:

Figura 1 - Fases da experiência do balde de Newton



Fonte: Ghins (1991).

Façamos uma análise das quatro fases, considerando  $\vec{a}_{E-S}$  sendo a aceleração da água em relação à Terra e  $\vec{a}_{E-T}$  sendo a aceleração da água em relação à Terra. Na primeira fase, não existe movimento acelerado da água em relação ao balde, e também não há aceleração da água em relação a Terra, e a superfície da água é plana.

Na segunda fase, o balde ainda não comunicou seu movimento à água: A aceleração da água em relação ao balde é máxima, enquanto que em relação à Terra continua nula. Sua superfície continua plana.

Na terceira fase, de acordo com Newton, a água e o balde estão em repouso relativo e ambos acelerados em relação à Terra. A água agora apresenta uma superfície côncava.

Finalmente, na quarta fase, o balde se encontra em repouso em relação à Terra, enquanto a água continua acelerada em relação a Terra e sua forma permanece côncava. (Essa análise pode ser encontrada em Ghins, 1991).

Newton, então concluiu que a concavidade da água, o fenômeno que devemos observar nessa experiência, não se explica pelo movimento da água em relação ao balde, pois na fase II e IV, suas acelerações são as mesmas, porém, em II a água tem superfície plana e em IV, côncava. Então devemos descartar o movimento relativo entre a água e o balde para explicar a concavidade da água. Continuemos a análise, após essa passagem em Principia:

Essa subida da água mostra seu esforço a se afastar do eixo de seu movimento; e o movimento circular verdadeiro e absoluto da água que aqui é diretamente contrário ao relativo, torna-se conhecido e pode ser medido por este esforço. De início, quando o movimento relativo da água no recipiente era máximo, não havia nenhum esforço para se afastar do eixo; a água não mostrava nenhuma tendência à circunferência, nem ascendia em relação aos lados do recipiente, mas mantinha uma superfície plana, e, portanto, seu movimento circular verdadeiro ainda não havia começado. Mas, posteriormente, quando o movimento relativo da água havia diminuído, a subida em direção aos lados do recipiente mostrou o esforço dessa para se afastar do eixo; e esse esforço mostrou o movimento circular real da água aumentando continuamente, até adquirir sua maior quantidade, quando a água ficou em repouso relativo no recipiente. (NEWTON, 2008, p. 49)

O primeiro possível movimento relativo seria em relação às paredes do balde, o que de acordo com o que citamos acima não poderia ser possível, de acordo com as fases II e IV. Aliás, esse foi um golpe à física de Descartes, pois para este, um corpo está em movimento verdadeiro e filosófico, quando está em movimento em relação a sua vizinhança imediato. Se o movimento da água em relação ao balde não pode explicar a tendência da água a se afastar do balde, sua teoria de movimento não poderia ser aceita (GHINS, 1991).

Outra possibilidade de explicação da concavidade da água, sem que seja necessário atribuir ao tipo de movimento, seria investigar a força de atrito entre a água e o balde, já que

essa é responsável por comunicar o movimento de rotação do balde à água. Porém, essas forças desaparecem no momento em que o sistema água e balde entram em repouso relativo. Não sendo possível o atrito ser a causa da concavidade da água (SOMMERFELD, 1950, p. 46-8).

A última possibilidade da concavidade da água ser causada por movimentos relativos, seria o movimento relativo da água em relação à Terra, aos planetas ou às estrelas. O que de acordo com Newton, também não pode ser explicado:

E, portanto, esse esforço não depende de qualquer translação da água em relação aos corpos ambiente, nem podendo ser o movimento circular verdadeiro ser definido por tal translação. Há somente um único movimento circular real de qualquer corpo em rotação, correspondendo a um único poder de tendência de afastamento, a partir de seu eixo de movimento, como efeito próprio e adequado; mas movimentos relativos, em um mesmo e único corpo, são inumeráveis, de acordo com as diferentes relações que ele mantém com corpos externos e, como outras relações, são completamente destituídas de qualquer efeito real, embora eles possam talvez compartilhar daquele único movimento verdadeiro (NEWTON, 2008, p. 49).

Pressupõe se aqui, uma argumentação de Newton para um princípio de uniformidade em que não há corpo material privilegiado, ou seja, se escolhermos que o corpo tenha uma rotação relativa ao Sol, à Terra ou a qualquer outro planeta, deveríamos observar efeitos diferentes, o que de fato não acontece. Este argumento é explicitado na regra II do terceiro livro:

As qualidades dos corpos que não admitem intensificação nem diminuição de graus, e que pertencem a todos os corpos dentro do alcance de nossas experiências, devem ser considerados como qualidades universais, de todos os corpos de qualquer tipo (NEWTON, 2012, p. 186).

Com essas afirmações, Newton poderia definir que nenhum movimento relativo poderia ser a causa da concavidade da água, causada pelos efeitos de forças centrífugas, que são forças de inércia. As forças de inércia têm uma dupla origem: A massa inercial, que como foi definido por Newton, é o que oferece resistência a ações externas. Porém, a entidade espaço absoluto também é o motivo da causa do aparecimento das forças de inércia, pois estas apenas aparecem quando em rotação em relação ao espaço absoluto.

A argumentação a favor do espaço absoluto não agradou a todos, principalmente os que chamaremos aqui de relativistas, que defendem que a causa de qualquer movimento devem ser a partir de movimentos relativos. Contemporâneos à Newton, Huygens e Leibniz foram os que mais tentaram refutar a teoria newtoniana de espaço absoluto e posteriormente, Ernst Mach, quase 200 anos após as publicações de Newton, tentou criar uma nova teoria para a origem da

inércia com argumentos a favor ao relativismo do movimento. Analisemos primeiramente, os principais argumentos de Leibniz e Huygens (GHINS, 1991).

### 3.3 LEIBNIZ E HUYGENS: OS PRIMEIROS RELATIVISTAS

Leibniz não concordou com Newton em relação ao espaço absoluto. Sua primeira refutação contra o espaço absoluto, foi o fato de que apesar do argumento de Newton na experiência do balde ter um significado físico palpável, o MRU era desprovido de qualquer significado físico, pois este movimento apesar de estar em relação ao espaço absoluto, não apresentava nenhum efeito observável. Porém Leibniz, em sua célebre correspondência com Clarke, porta-voz de Newton, não conseguiu explicar como um movimento relativo poderia causar efeitos de forças de inércia, e então teve de concordar, pelo menos momentaneamente, com Clarke:

Quando Clarke se referiu ao escólio e as demonstrações que haveria ali da existência do espaço absoluto e do movimento absoluto por meio das forças centrífugas, Leibniz sentiu-se obrigado a reconhecer (o espaço absoluto) (JAMMER, 2009, p. 156)

Em uma tentativa fracassada, Leibniz ainda tentou reduzir a gravidade como sendo uma força centrífuga, sendo uma força que não agia a distância, e sim através do éter circundante. Porém, essa foi outra tentativa fracassada (JAMMER, 2009).

Alguns anos após as correspondências com Clarke, Leibniz se juntou a Huygens para uma possível resposta a favor do movimento relativo ser a causa das forças de inércia. Eles concordavam que deveria existir uma equivalência cinemática e dinâmica, onde nenhum sistema de referências deveria gozar de privilégios (JAMMER, 2009).

Apesar de nunca terem sido publicadas nenhuma resposta para este problema, em 1920, Ludwig Lange achou quatro folhas soltas de manuscritos de Huygens endereçados a Leibniz com uma possível solução do problema. Huygens supôs que um disco girante somente produzia forças centrífugas por causa dos movimentos relativos das diferentes partes do disco. Se fosse escolhido um sistema de referência que tivesse a mesma velocidade angular (e a mesma origem) que o disco, os efeitos das forças centrífugas desapareceriam. Porém, sabemos que se adotarmos esse referencial, estes efeitos não desaparecem, como Huygens previa. (JAMMER, 2009).

Apesar das teorias de Leibniz e Huygens serem um fracasso, seja por falta de argumentos ou mesmo argumentos errôneos, estes foram os primeiros a acreditarem num princípio de relatividade, mesmo que de forma totalmente primitiva. Isso me remete à como a ciência

aprende com a história da ciência, pois com certeza, com a argumentação contrária a Newton à favor de um princípio de relatividade, foi a inspiração para os relativistas modernos que ajudaram a construir o princípio da relatividade de Einstein.

### 3.4 O PRINCÍPIO DE MACH: A ORIGEM DA INÉRCIA ATRAVÉS DE MOVIMENTOS RELATIVOS

Newton, como vimos anteriormente, precisou recorrer ao espaço absoluto para explicar a origem das forças de inércia. O sucesso de sua teoria, como por exemplo a previsão do retorno do cometa Halley, com certeza lhe rendeu uma autoridade no campo da mecânica, e as críticas vindas de Leibniz e Huygens passaram despercebidas. Porém outro grande cientista e filósofo, Ernst Mach, quase 200 anos após a publicação dos *Principia*, reacendeu as ideias do relativismo, atacando o espaço absoluto de Newton, pois este escapava de todos os meios de detecção experimental. Mach, viu a necessidade de elaborar uma nova teoria para origem das forças de inércia.

#### 3.4.1 O princípio de Mach

Mach não via sentido em movimentos absolutos, sua aversão a conceitos metafísicos era enorme, de acordo com Max Jammer (JAMMER, 2009, p. 185), Mach, na quarta edição de sua obra *Mecânica*, resume de forma bem clara suas ideias sobre movimentos relativos:

Para mim, só existe movimento relativo, e não vejo nenhuma diferença entre rotação e translação. Uma rotação em relação às estrelas fixas faz aparecer, em um corpo, forças de alongamento do eixo; se a rotação não ocorre em relação às estrelas fixas, essas forças de alongamento não existem. Não me oponho a que se dê à primeira rotação o nome de absoluta, desde que não se esqueça que ela é apenas uma rotação relativa às estrelas fixas. Será que poderíamos fixar o recipiente d'água de Newton, em seguida fazer girar o céu de estrelas fixas e provar então que essas forças de alongamento estão ausentes? Essa experiência é irrealizável, essa ideia não tem sentido, pois os dois casos são indiscerníveis na percepção sensível. Portanto, considero que esses dois casos como sendo o mesmo. A distinção entre eles, que Newton faz, é ilusória.

De acordo com Jammer (JAMMER, 2009, p. 184), Mach (1902, p. 232), julgava desnecessária a hipótese do espaço absoluto para explicar as forças centrífugas no movimento de rotação na experiência do balde:

O experimento de Newton com o recipiente cheio d'água e submetido a um movimento de rotação, nos informa, simplesmente, que a rotação relativa da água com respeito aos lados do recipiente não produz forças centrífugas aparentes, mas que tais forças são produzidas por seu movimento relativo à massa da Terra e aos outros corpos celestes. Ninguém pode dizer como transcorreria o experimento se os lados do recipiente aumentassem em espessura e massa até finalmente alcançarem várias léguas de espessura.

A reinterpretação de Mach para a experiência do balde se dava justamente por Mach ser um empirista de tendência positivista que queria, de qualquer forma, acabar com qualquer conceito metafísico na área das ciências exatas, e o espaço absoluto, se analisarmos as posições de Newton sobre religiosidade, este era um homem muito religioso (JAMMER, 2009).

Para Mach, o movimento do balde apenas em relação à água não gerava forças centrífugas perceptíveis. De acordo com ele, uma rotação do balde em relação as massas do universo distante as geravam. Bastasse que a espessura do balde fosse aumentada de forma suficientemente grande, para que na fase II (que descrevi anteriormente na experiência do balde), o balde causasse efeitos centrífugos perceptíveis na água.

As citações acima são em resumo o que se conhece por Princípio de Mach, termo que foi cunhado por Einstein, para resumir as concepções de Mach a respeito da origem da inércia. Este princípio corresponde à ideia de que a inércia mede a resistência de aceleração, não em relação ao espaço absoluto, e sim em relação às massas de todos os corpos do universo. Seu problema para elaborar uma nova teoria, se resumia num modelo cosmológico. Mach propôs então, a seguinte lei de inércia:

$$\mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} \right) = \text{constante} (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1)$$

Onde  $\mu$  é a massa de um dado corpo,  $m_i$  são as massas presentes no universo e os  $r_i$  representam as distâncias do centro de gravidade em relação ao centro de gravidade da massa  $\mu$ .

Ou seja, as forças de inércia dependem de todas as massas do universo, porém isso era tão inverificável quanto à lei de inércia de Newton, pois não havia na época de Mach, nenhum modelo cosmológico que chagasse perto da descrição de todas massas do Universo.

Mesmo assim, Einstein, o qual cunhou o termo princípio de Mach, utilizou as ideias de Mach no princípio da relatividade, e pelo menos qualitativamente, achou respostas a favor do princípio de Mach (GHINS, 1991).

O fato observado de que uma força gravitacional é localmente indistinguível de uma força de inércia, no sentido de que ambas induzem a mesma aceleração em todos os corpos, sugeriu a Einstein que é a influência gravitacional de todo o Universo que dá origem à inércia. A teoria geral da relatividade foi criada para incorporar essa ideia, mas, como foi enfatizado pelo próprio Einstein, ela falhou em realizar essa ideia. Portanto, a Teoria Geral da Relatividade mostrou não incorporar o princípio de Mach em toda a sua plenitude.

### 3.4.2 O princípio de Mach por Sciama

Agora apresentemos o princípio de Mach num contexto que vai além dos aspectos qualitativos e filosóficos da questão, ou seja, de um modo mais adequado aos procedimentos da física. Sabemos que, de acordo com a Mecânica newtoniana, um objeto com aceleração  $\vec{a}$ , com respeito a um sistema inercial com relação às estrelas fixas sofre a ação de uma força  $m\vec{a}$  que expressa a resistência do objeto a ser acelerado. Segundo Mach, temos o mesmo direito de admitirmos um movimento em que o referencial associado ao objeto. Neste referencial, o resto do universo tem uma aceleração  $\vec{a}' = -\vec{a}$  e a força de inércia  $m\vec{a}'$  a qual o objeto experimenta é causada pela aceleração de outras massas.

Em 1952, D. W. Sciama escreveu um trabalho bastante interessante sobre a origem da inércia. Nesse trabalho, Sciama faz uma descrição sumária do que se entende por Princípio de Mach. Referenciais inerciais são aqueles que não apresentam aceleração em relação às “estrelas fixas”. Outra abordagem do princípio de Mach, segundo Sciama, consiste na equivalência das seguintes afirmações: (a) A Terra está em movimento de rotação e o universo está em repouso, (b) A Terra está em repouso e o universo está em movimento de rotação. Consequentemente, um dos aspectos do princípio de Mach consiste em afirmar que movimentos cinematicamente equivalentes devem ser dinamicamente equivalentes. Por outro lado, se o resto do Universo determina os referenciais inerciais, temos, como consequência a inércia não ser uma propriedade intrínseca da matéria, senão que ela surge como resultado da interação da matéria local com a restante matéria do Universo.

Agora, tomemos em resumo as ideias de Sciama: Se uma massa  $M$ , a uma distância  $r$  tem uma aceleração relativa a  $\vec{a}$ , a um dado objeto, que contribuição essa massa  $M$  terá sobre um objeto de massa  $m$ ?

Foi feita então, uma analogia com a eletrostática. Sabemos que duas cargas  $q_1$  e  $q_2$ , separadas por uma distância  $r$ , fará com que  $q_1$  exerça uma força em  $F_{12}$  do tipo:



$$F_{12} = \frac{kq_1 q_2}{r^2} \quad (2)$$

que é a Lei de Coulomb. Entretanto, se a carga  $q_1$  sofre uma aceleração  $\vec{a}$ , então a lei de coulomb deve ser modificada da seguinte forma:

$$F_{12} = \frac{kq_1 q_2 a}{c^2 r} \quad (3)$$

Onde  $c$  é a velocidade da luz. Como vemos, esta força, com o aumento da distância, diminui mais devagar que a força da equação (2). Isto por exemplo, é o que explica como sinais eletromagnéticos podem ser transmitidos a longas distâncias (FRENCH, 1974).

Suponhamos agora, uma situação análoga à lei da gravitação universal. Sabemos que ela tem a seguinte forma:

$$F_{12} = \frac{GMm}{r^2} \quad (4)$$

Se a força sobre  $m$  for associada com uma aceleração  $a$  de  $M$ , temos:

$$F_{12} = \frac{GMma}{c^2 r} \quad (5)$$

Com isso, podemos associar as magnitudes relativas das contribuições de várias massas de inércia: Terra, Sol, nossa própria galáxia e o próprio universo (como desejava Mach). A tabela abaixo, mostra a contribuição relativa a inércia de algumas massas (o valor para a massa do universo é a melhor aproximação teórica que temos):

Tabela 1 - Contribuição relativa a inércia

Fonte	M,kg	r,m	M/r, kg/m	M/r(relativa)
Terra	$10^{25}$	$10^7$	$10^{18}$	$10^{-8}$

Sol	$10^{30}$	$10^{11}$	$10^{19}$	$10^{-7}$
Nossa Galáxia	$10^{41}$	$10^{21}$	$10^{20}$	$10^{-6}$
Universo	$10^{52}$	$10^{26}$	$10^{26}$	1

Fonte: French (1974).

De acordo com os dados acima, vemos que a contribuição da Terra, Sol e até nossa galáxia, torna-se desprezível em relação ao nosso universo.

A força total de inércia que deve aparecer caso todo universo (considerando o universo como uma casca esférica ao nosso redor) adquira uma aceleração  $a$ , com respeito a um objeto, devemos considerar todas as massas do universo em (5):

$$F_{inercial} = ma \sum \frac{GM}{c^2 r} \quad (6)$$

Para que a teoria esteja válida, a força inercial, proposta por Newton, deveria ter a mesma magnitude de (6), então, deve-se cumprir a seguinte identidade:

$$\sum \frac{GM}{C^2 r} = 1 \quad (7)$$

Calculemos a razão entre a massa e o raio do universo, como o universo sendo aproximadamente uma esfera centrada em nós mesmos:

$$\sum_{universo} \frac{M}{r} \implies \int_0^{R_u} \frac{4\pi\rho r^2 dr}{r} = 2\pi\rho R_u^2 \quad (8)$$

A massa total deve ser:

$$M_u = \frac{4\pi\rho R_u^3}{3} \quad (9)$$

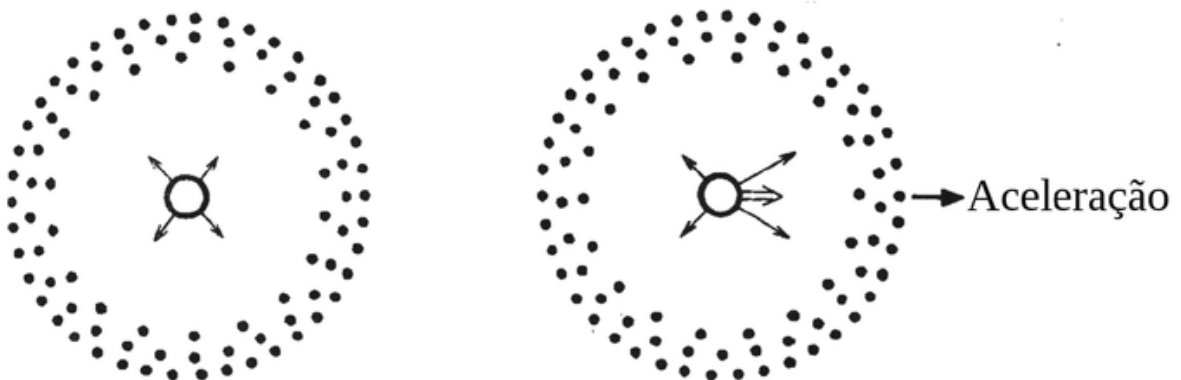
Assim, teremos uma razão entre a massa e o raio do universo a partir de uma geometria euclidiana:

$$\sum_{\text{universo}} \frac{M}{r} = \frac{3M_U}{2R_u} = 10^{26} \quad (10)$$

Utilizando os valores  $G \approx 10^{-10} N - m^2/kg^2$  e  $c^2 = 10^{17} m^2/s^2$ :

$$\sum \frac{GM}{c^2 r} = 10^{-1} \quad (11)$$

Figura 2 - O Universo como sendo uma aproximação de uma esfera / aceleração do universo causando efeitos inerciais no objeto (como imaginava Mach).



Fonte: O autor (2020).

Tendo consciência que não temos certeza da distribuição da massa do universo, podemos dizer que o fator 10, que separa a teoria do valor empírico, não é nem um pouco significativa. Porém, retomamos os problemas de Mach, apenas a falta de um modelo cosmológico para o cálculo da massa do universo separa a possível confirmação de sua teoria.

Entretanto, muitos cosmólogos têm aceitado essa teoria como a mais correta para explicação da origem da inércia. Mais recentemente André Assis (ASSIS, 1998). propôs uma teoria a partir da força de Weber, a qual tem resultados também bastante interessantes a favor do princípio de Mach.

A origem das forças de inércia ainda continua um mistério, sem haver nenhuma teoria que seja um consenso entre os físicos. Porém, mesmo sem uma resposta satisfatória para sua origem, tais forças causam efeitos bem reais em determinados movimentos, estes efeitos explicam uma gama de movimentos que acontecem na Terra. Julgo necessário estudá-los mais profundamente na próxima seção.

## 4 A MECÂNICA CLÁSSICA: FORÇAS DE INÉRCIA E REFERENCIAIS NÃO INERCIAIS.

Apesar de não haver um consenso em relação à origem das forças de inércia e apesar de Newton dizer que não podemos detectá-las através de movimentos relativos, apenas podemos observar os efeitos causados, como no caso da experiência do balde. sabe-se que a validade de suas leis só acontece na relatividade galileana, compatível apenas com a utilização de referenciais inerciais. Sem fazer esta restrição, a teoria newtoniana parece não funcionar adequadamente. O objetivo desta seção é investigar se é possível uma medição das forças de inércia e quais efeitos essas forças causam nos movimentos, principalmente fenômenos terrestres. Toda discussão matemática é encontrada na obra de French (FRENCH, 1974).

### 4.1 MOVIMENTOS SOB REFERENCIAL NÃO ACELERADO: PRINCIPIO DE RELATIVIDADE DE GALILEU

Um sistema de referência não acelerado é denominado referencial inercial. Essa denominação foi feita por Ludwig Lange, em 1885, pois o conceito de espaço absoluto sugerido por Newton soava como uma ideia fantasmagórica para a física prática. Lange, para continuar dando um significado físico ao conceito de espaço absoluto, criou um sistema chamado sistema inercial, onde é possível fazer a medição dos movimentos através de termos bem concretos<sup>2</sup> e que a lei da inércia continue valendo (JAMMER, 2009).

Para aproximações locais, sabemos que a superfície da Terra pode ser considerada um sistema inercial e conseqüentemente, qualquer outro corpo que se mova em MRU em sua superfície. O próprio Galileu foi o primeiro a reconhecer o fato de que podemos mudar para qualquer referencial inercial e mesmo assim não haverá mudanças na medição dos movimentos relativos. Entretanto, é preciso lembrar que Galileu não poderia ter falado em referencial inercial, o que ele escreveu foi sobre movimento uniforme, regular. Podemos ver essa descrição em sua obra *Diálogo sobre os dois sistemas máximos de mundo*:

**Salviati** : [...]E aqui, como um último sinal da nulidade de todas as experiências apresentadas, parece-me que é o tempo e o lugar de mostrar o modo de experimentá-las todas muito facilmente. Fechai-vos com algum amigo no maior compartimento existente sob a coberta de algum grande navio, e fazei que aí existam moscas,

---

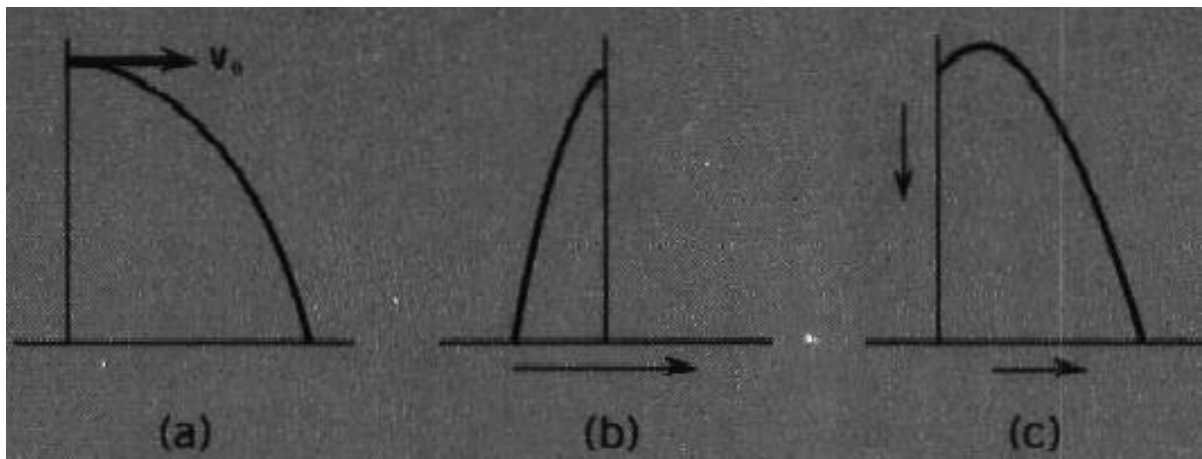
<sup>2</sup>como três barras rígidas definindo um sistema cartesiano e um relógio para a medição do tempo.

borboletas e semelhantes animaizinhos voadores; seja também colocado aí um grande recipiente com água, contendo pequenos peixes; suspenda -se ainda um balde, que gota a gota verse água em outro recipiente de boca estreita, que esteja colocado por baixo: e, estando em repouso o navio, observai diligente mente como aqueles animaizinhos voadores com igual velocidade vão para todas as partes do ambiente; ver-se-ão os peixes nadar indiferentemente para todos os lados; as gotas cadentes entrarem todas no vaso posto embaixo; e vós, lançando alguma coisa para o amigo, não a deveis lançar com mais força para esta que para aquela parte, quando as distâncias sejam iguais; e saltando, como se diz, com os pés juntos, transporíeis espaços iguais para todas as partes. Assegurai-vos de ter diligentemente todas essas coisas, ainda que não exista dúvida alguma de que enquanto o navio esteja parado as coisas devem acontecer assim, e fazei mover o navio com quanta velocidade desejardes; porque (sempre que o movimento seja uniforme e não flutuante de cá para lá) não reconhece reis uma mínima mudança em todos os mencionados efeitos, nem de nenhum deles podereis compreender se o navio caminha ou está parado: saltando, percorreríeis no tablado os mesmos espaços que antes, nem daríeis saltos maiores para a popa que para a proa, porque o navio se move velocissimamente, ainda que, no tempo durante o qual estejais no ar, o tablado subjacente deslize para a parte contrária ao vosso salto; e jogando alguma coisa ao companheiro, não será necessário atirá-la com mais força para alcançá-lo, se ele estiver para a proa e vós para a popa, que se estivésseis colocados ao contrário; e as gotas continuarão a cair como antes no recipiente inferior, sem que nenhuma caia em direção à popa, ainda que, enquanto a gota está no ar, o navio navegue muitos palmos; os peixes na sua água nadarão sem maior esforço tanto para a parte precedente quanto para a parte subsequente do vaso, e com a mesma facilidade chegarão ao alimento colocado em qualquer lugar da borda do recipiente; e finalmente as borboletas e as moscas continuarão seus voos indiferentemente para todas as partes, e nunca acontecerá que se concentrem na parte endereçada para a popa, como se estivessem cansadas de acompanhar o curso veloz do navio, do qual seriam separadas, por manterem-se no ar por longo tempo; e se queimando alguma lágrima de incenso produzísseis um pouco de fumaça, veríeis que ela se eleva para o alto e como uma pequena nuvem aí se mantém, movendo-se indiferentemente não mais para esta que para aquela parte. E a razão de toda esta correspondência de efeitos é ser o movimento do navio comum a todas as coisas contidas nele e também no ar, razão pela qual sugeri que se estivesse sob a cobertura do navio; porque, quando se estivesse na cobertura do navio e ao ar livre que não segue o curso do navio, ver-se-iam diferenças mais ou menos notáveis em alguns dos efeitos mencionados: e não existe dúvida de que a fumaça ficaria para trás, como o próprio ar; do mesmo modo as moscas e as borboletas, impedidas pelo ar, não poderiam acompanhar o movimento do navio, quando se separassem dele por um espaço bastante considerável; mas mantendo-se próximas, posto que o próprio navio, enquanto construção anfractuosa, leva consigo parte do ar que lhe está próximo, sem obstáculo ou cansaço seguiriam o navio, e pela mesma razão vemos algumas vezes, ao cavalgar, as moscas importunas e os moscões seguirem os cavalos, voando-lhes ora nesta e ora na que la parte do corpo. Mas nas gotas que caem, pouquíssima seria a diferença, e nos saltos e nos projéteis pesados, totalmente imperceptível.

**Sagredo:** Estas observações, ainda que navegando não me tenha deliberadamente ocorrido fazê-las, todavia estou mais que certo de que acontecerão da maneira relatada: e como confirmação disso, lembro-me de que, estando no meu camarote, encontrei -me por centenas de vezes perguntando se o navio caminhava ou estava parado e, algumas vezes, fantasiando, acreditava que ele seguisse numa direção, enquanto o movimento era na direção contrária. Portanto, até aqui estou satisfeito e persuadido da nulidade do valor de todas as experiências efetuadas para provar mais a parte negativa que a afirmativa da rotação da Terra. Falta agora o argumento assentado sobre o ver pela experiência como uma rotação veloz tem a faculdade de expulsar e dispersar as matérias aderentes à máquina que dá voltas; pelo que parecia a muitos, e também a Ptolomeu, que, quando a Terra girasse sobre si mesma com tanta velocidade, as pedras e os animais deveriam ser lançados para as estrelas, e que as construções não se poderiam assentar nos alicerces com nenhum cimento tão tenaz, sem sofrer também elas semelhante destruição. [...] (GALILEI, 2011, p. 267-9).

Nesta passagem, vemos que Galileu afirma que uma pedra caindo do mastro de um navio em MRU, cairá sempre no pé do mastro, independente de onde estejamos observando os movimentos, eles serão sempre equivalentes. Sugerindo ainda, que a Terra também é um sistema inercial e está em repouso relativo. Entretanto, a Terra não é um sistema inercial. Um sistema inercial está em repouso ou se desloca em movimento retilíneo uniforme. A Terra em rotação em torno de seu eixo e em movimento orbital em torno do Sol não satisfaz os critérios de referencial inercial. Por que, apesar de tudo, as conclusões de Galileu são bastante expressivas? Simplesmente porque os efeitos não inerciais causados pelo movimento de rotação da Terra são bastante débeis. Galileu não estava em condição de perceber esses efeitos, nem de fazer considerações teóricas sobre eles.

Figura 3 - Movimento da pedra caindo do navio observado por diferentes referenciais inerciais.



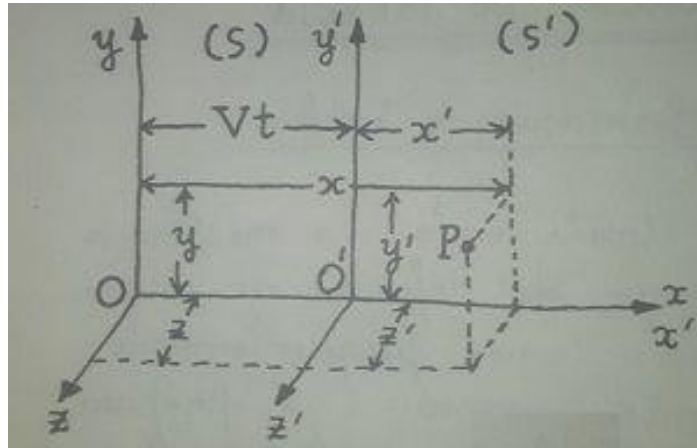
Fonte: French (1974).

Em todos os casos sugeridos por Galileu, quando analisados, a pedra cairá somente sob efeito da aceleração da gravidade, sem alteração da aceleração em nenhuma componente, em movimento de forma parabólica, independente do referencial adotado. Essa análise ficou conhecida como princípio de relatividade de Galileu. (JAMMER, 2011). Devemos investigar, se matematicamente, quando mudarmos de um referencial inercial para outro referencial inercial, os movimentos permanecerão equivalentes.

#### 4.1.1 A transformação de Galileu

Como vimos há pouco, Galileu afirma que movimentos sob referenciais inerciais são equivalentes. façamos uma investigação matemática:

Figura 4 - Mudança de um referencial S para um referencial S'



Fonte: O autor (2020).

Consideremos a mudança de referencial de S para S', num movimento de translação com velocidade  $\vec{V}$  conforme a figura 4. De acordo com Galileu, essa mudança deve ser equivalente:

$$\begin{aligned}x' &= x - Vt \\y' &= y \\z &= z' \\t' &= t\end{aligned}\tag{12}$$

Se tomarmos a derivada de (12) em relação ao tempo, a transformação da velocidade e da aceleração na passagem de S para S':

A velocidade:

$$\begin{aligned}v'_x &= v_x + V \\v'_y &= v_y \\v'_z &= v_z\end{aligned}\tag{13}$$

A aceleração



$$\begin{aligned} a'_x &= a \\ a'_y &= y \\ a'_z &= a_z \end{aligned} \tag{14}$$

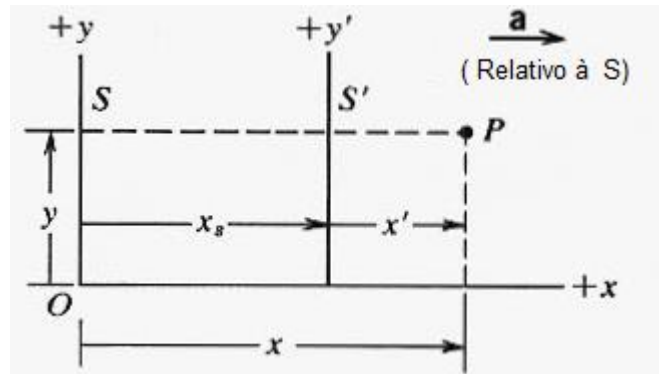
Isso nos informa, que as componentes da aceleração não se alteram nos referenciais inerciais, o que é conhecido como transformação de Galileu. Isso era esperado, pois na experiência sugerida por Galileu, mencionada há pouco, o movimento acelerado da caída da pedra, foi equivalente nos 3 casos, conforme a figura 3. Com isso, podemos dizer que a segunda lei de Newton é covariante em referenciais inerciais. Devemos analisar agora se o mesmo acontece em referenciais não inerciais, ou seja, um referencial acelerado.

#### 4.2 MOVIMENTO SOB REFERENCIAIS ACELERADOS

Suponhamos agora, que um objeto em queda, a partir do repouso, em um sistema de referência acelerado. Para fazermos as transformações do referencial inercial S (que pode ser o da terra), para o referencial acelerado, consideramos o eixo x positivo como sendo o sentido da aceleração, num sistema cartesiano. S é o sistema de referência em repouso em relação à Terra, e S' o sistema de referência acelerado. As origens se coincidem em  $t = 0$  e a velocidade de S' com respeito a S neste instante é  $v_0$ . os eixos verticais y e y' são idênticos:  $y = y'$ .

Quais seriam as trajetórias descritas pelo em S e S'? O movimento em S é obvio, o objeto está em queda livre com velocidade  $v_0$ :

Figura 5 - Relação das coordenadas de uma partícula nos sistemas S e S'.



Fonte: French (1974).

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= h - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \quad (15)$$

Estas equações definem unicamente a posição do objeto no tempo  $t$ , porém em  $S'$ , devemos expressar o resultado seguindo a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} x_s &= v_0 t + \frac{at^2}{2} \\ x' &= v_0 t - x_s = v_0 t - \left( v_0 t + \frac{at^2}{2} \right) = \frac{-at^2}{2} \\ y' &= h - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

onde  $x_s$  é a separação do eixo  $x$  de  $S$  à  $S'$ , se substituirmos  $y'$  em  $x'$  da equação (16), temos:

$$x' = \frac{-a(h - y')}{g} \quad (17)$$

A equação (17) nos informa que a partícula se move em  $S'$  em uma trajetória reta.

Essa reta é diferente do que esperávamos caso o movimento fosse em  $S$ , no qual de acordo com a figura 3, é uma parábola. Isso nos remete que há não somente aceleração da gravidade

atuando na partícula e sim duas componentes de aceleração. A validade das transformações de Galileu não acontece quando os referenciais são acelerados, então devemos investigar pela dinâmica, quais são as consequências de uma troca de referencial inercial para um não inercial.

### 4.3 REFERENCIAIS ACELERADO: FORÇAS INERCIAIS.

Anteriormente, estudando o movimento em referenciais inerciais, a escolha de diferentes referenciais não fazia diferença no movimento e comprovamos isso através das transformações de Galileu. O que claramente, não alteravam as leis de Newton. Porém, vimos que no caso de um referencial acelerado, o movimento ganha um termo de aceleração não previsto. Analisemos as consequências disso para a dinâmica.

Newton afirmava, como citado anteriormente na experiência do balde, que não podemos medir uma força de inércia através de movimentos relativos, apenas conseguimos fazer tais medidas se essas forem em relação ao espaço absoluto, ao qual não temos acesso aos sentidos. Porém, para argumentar a favor do espaço absoluto, Newton afirma que os efeitos de inércia são observáveis, como é o caso da força centrífuga fazendo a água se afastar do balde.

Entretanto, acabamos de ver que o fato de acelerarmos um referencial, conseguimos medir uma aceleração por intermédio de um movimento relativo acelerado, como exemplificado. Então, se recorrermos a dinâmica, devemos ter uma base para calcularmos uma aceleração a partir das forças de inércia.

Façamos uma análise: Consideremos as transformações relativas à figura 5.

$$\begin{aligned}x &= x' + x_s \\ y &= y'\end{aligned}\tag{18}$$

Tomando a segunda derivada em relação ao tempo em (18), temos:

$$\begin{aligned}a_x &= a'_x + a_s \\ a_y &= a'_y\end{aligned}\tag{19}$$

Se escrevermos vetorialmente, temos:

$$\begin{aligned}\vec{a}_x &= \vec{a}'_x + \vec{a}_s \\ \vec{a}_y &= \vec{a}'_y\end{aligned}\tag{20}$$

Se multiplicarmos os termos de (20) por uma massa  $m$ , aplicando a segunda lei de Newton, temos:

$$\vec{F} = m\vec{a}' + m\vec{a}_s\tag{21}$$

O qual também aparece uma nova força  $-m\vec{a}$  não esperada pela aplicação da lei de Newton, caso o referencial adotado fosse inercial. Podemos então afirmar que as leis de Newton não são válidas em referenciais acelerados. Essa nova força de origem desconhecida é a mesma força de origem desconhecida a qual discutimos na seção 3, é uma força de inércia. Porém, como o pensamento newtoniano é muito enraizado na física, geralmente a equação (21) é escrita da seguinte forma:

$$\vec{F}' = \vec{F} - m\vec{a}_s = m\vec{a}'\tag{22}$$

Essa nova forma de escrever (20) é um jeito para "corrigir" a lei de Newton em referenciais não inerciais, para que suas leis continuem valendo em qualquer referencial. Então, no sistema  $S'$ , temos uma força real, dada por  $\vec{F}$  e uma força de inércia a qual deve ser descontada da força real para as leis de Newton continuem válidas. Costuma-se chamar as forças de inércia de pseudoforça, com o argumento que só aparecem em referenciais não inerciais.

Porém, de acordo com Feynman, que também chama as forças de inércia, como pseudoforça, este faz o seguinte comentário:

Uma característica muito importante das pseudoforças é que elas são sempre proporcionais às massas; o mesmo é verdade para a gravidade. A possibilidade existe, portanto, que a própria gravidade seja uma pseudoforça (FEYNMAN, 2008, p. 147).

Ou seja, ou consideramos as forças de inércia, como sendo reais, ou consideramos as forças de inércia e a força gravitacional como pseudoforças, senão, o princípio de equivalência (que diz que a massa gravitacional e a massa de inércia são equivalentes), fundamento da relatividade geral, não tem validade alguma.

De acordo com (FRENCH, 1974, p. 528), o mais correto para designar o termo de força não esperado, como na equação (22), é utilizar o termo força de inércia, pois forças desse tipo são experimentadas por quem está num referencial não inercial, não fazendo muito sentido chamá-las de força fictícia.

Este exemplo geral de força de inércia visto em (22), é um exemplo de força de inércia que surge associada a um movimento de translação. Porém, em um referencial não inercial de rotação, temos uma gama de forças conhecidas que são necessárias para a explicação de vários fenômenos, inclusive a comprovação da rotação da Terra.

### **4.3.1 Forças de inércia em referenciais em rotação.**

Existem **dois** principais tipos de força de inércia, que explicam muitos fenômenos, são elas: força centrífuga (como a da experiência do balde) e a força de Coriolis<sup>3</sup>. Essas forças aparecem sempre em referenciais em rotação. Se estivermos em um referencial em rotação com velocidade angular variável, surge ainda mais uma força de inércia, que é a força de Euler.

#### **4.3.1.1 Força centrífuga**

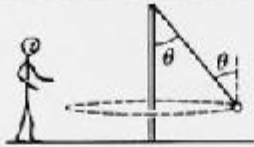


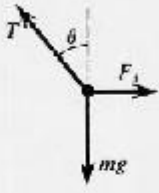
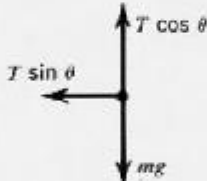
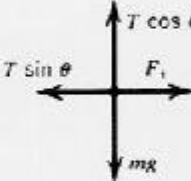
As forças centrífugas apareceram na experiência do balde de Newton. Porém, para uma facilidade inicial dos cálculos, consideremos um exemplo mais trivial para calcularmos sua magnitude.

Façamos uma análise por meio de dois referenciais  $S$  e  $S'$ , inercial e não inercial, respectivamente. Agora consideremos o movimento de uma bola, presa a uma corda em MCU horizontal. A figura abaixo, ilustrará de forma mais clara:

---

<sup>3</sup>Gaspard-Gustave Coriolis (1792-1843), responsável pelos estudos dessa força de inércia.

Figura 6 - Movimento de uma bola girando, suspensa por uma corda em um círculo horizontal, analisada em S e S'.

procedimento	Vista do sistema em repouso S	Vista do sistema girante S'
<p>Quadro esquemático simulando o problema</p>	 <p>O garoto observa como a bola se movimenta com velocidade <math>v</math> em um círculo de raio <math>r</math>.</p>	 <p>O garoto gira com mesma velocidade angular que a bola; do seu ponto de vista, a bola está em repouso.</p>
		 <p><math>T</math> = Tensão na corda  <math>mg</math> = Força peso  <math>F_i</math> = Força de inércia observada em um sistema de rotação</p>
<p>Para facilitar os cálculos, decompos as forças em suas componentes.</p>	 <p>Direção vertical</p>	 <p>Direção vertical</p>
<p>Agora, analisamos o problema em termos de <math>F=ma</math></p>	<p>Como não tem aceleração vertical, chegamos a conclusão que a força vertical resultante é zero</p> $T \cos \theta = mg$ <p>Direção horizontal</p> <p>O objeto está em um movimento circular, portanto é um movimento acelerado. A força resultante (isto é, a soma de todas as forças) é uma força horizontal dirigida ao centro do círculo.</p> $T \sin \theta = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$ <p>esta força tem direção ao interior do círculo</p>	<p>Como não tem aceleração vertical, chegamos a conclusão que a força vertical resultante é zero</p> $T \cos \theta - mg$ <p>Direção horizontal</p> <p>O objeto está em "repouso", por tanto, a soma de todas as forças sobre ele deve ser zero. Portanto, <math>F_i</math> é igual a magnitude da tensão <math>T \sin \theta</math>, como já calculamos essa magnitude na coluna à esquerda, temos:</p> $F_i = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$ <p>Esta força de inércia tem direção pra fora do círculo</p>

Fonte: French (1974).

Por conveniência, o eixo  $z$  e  $z'$  são coincidentes. A velocidade angular de  $S'$  em relação a  $S$  é dada por  $\omega$ . A figura 6 nos mostra as observações feitas em cada referencial.

Do ponto de vista de  $S$ , a bola tem uma aceleração  $-\omega^2 r$ , em relação ao eixo de rotação. A força que causa essa aceleração é dada por:

$$F_r = -m\omega^2 r \quad (23)$$

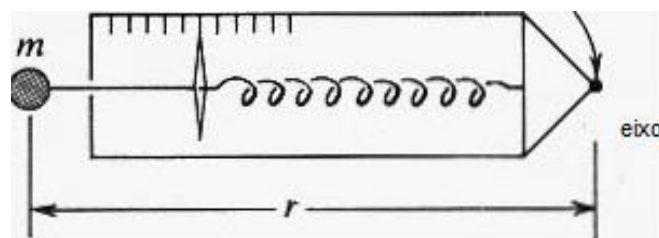
Porém, em  $S'$ , a aceleração da bola é nula, pois o referencial é solidário à rotação. Para conservarmos a validade da lei de Newton, devemos aplicar (22) ao caso:

$$\begin{aligned} F_r' &= F_r + F_i = 0 \\ F_i &= m\omega^2 r \end{aligned} \quad (24)$$

A força  $F_i$ , que é uma força de inércia, é o que chamamos de força centrífuga.

Para o cálculo da magnitude da força centrífuga, podemos utilizar um experimento usando uma balança de mola em um sistema de rotação  $S'$ , basta que se acople uma massa  $m$  em sua extremidade e mantenha-a estacionária em seu ponto de vista.

Figura 7 - Medida da força necessária para manter um objeto em um sistema de referência em rotação



Fonte: French (1974).

Se a massa estiver em qualquer posição, exceto sobre o eixo de rotação, a balança de mola mostrará que há uma força exercendo sobre a massa, para dentro, proporcional a  $m$  e  $r$ . Se o

observador em  $S'$ , souber o valor de sua velocidade angular  $\omega$  em  $S$ , este pode confirmar que a força é igual a  $m\omega r^2$ . O Observador explica que o alargamento da mola, é explicado por uma força centrífuga para fora de  $m$ . Aliás, se a mola se romper, a massa  $m$  terá uma aceleração de  $\omega^2 r$ . O que nos faz refletir se as forças de inércia são realmente pseudoforças ou apenas forças de inércia, as quais não temos capacidade de encontrar um outro sistema físico para justificar sua origem. Adler, Bazin e Schiffer fazem um comentário interessante a essa questão:

As forças aparentes eram, em última análise, bem reais. Um motor que explodisse, causaria danos consideráveis, mesmo que a força centrífuga que o tivesse destruído fosse apenas aparente (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975, p. 3, com adaptações).

Há muitos problemas nas definições de forças de inércia, estes problemas sem soluções se devem ao fato da discussão da terceira seção, onde até o atual período deste trabalho, não há uma teoria que seja consenso sobre a origem das forças de inércia. Continuemos com a força de Coriolis.

#### 4.3.1.2 Força de Coriolis:

Como vimos, em um referencial rotacional, aparecem forças centrífugas. Porém, há outra força chamada força de Coriolis, que também aparecem nesse tipo de referencial. Essa força é dependente da velocidade da partícula, mas não de sua posição, como no caso da força centrífuga. Façamos uma análise bidimensional, para uma observação de suas características.

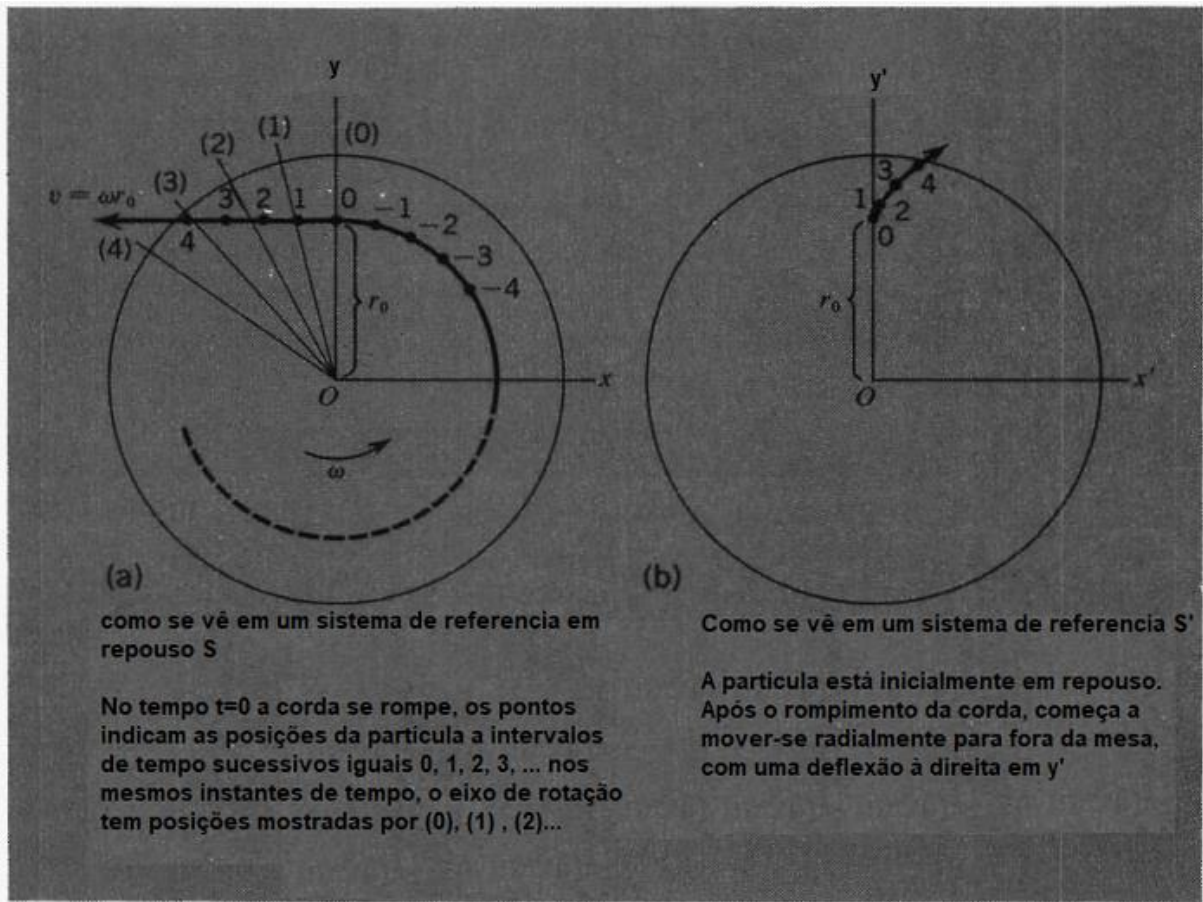
Analogamente à análise da força centrífuga, façamos uma comparação entre o movimento em  $S$  e  $S'$ . Suponha que  $S'$  é um sistema de coordenadas unido a uma mesa horizontal circular, que gira com velocidade angular  $\omega$ . O eixo de rotação é o eixo vertical, saindo do plano na mesa,  $z'$ . A mesa não tem atrito. Agora, ligamos com uma corda, uma partícula de massa  $m$ , do centro da mesa até uma distância  $r_0$ .

Em  $S'$ , de acordo com a figura abaixo, considerando que a força peso e a força normal estão em equilíbrio, temos um sistema em equilíbrio com a tensão do fio e a força centrífuga se anulando.

Já em  $S$ , a mesma partícula presa a uma corda a uma distância  $r_0$  do centro, considerando  $t = t' = 0$  como sendo o tempo inicial após o rompimento da corda. Antes do rompimento da corda a partícula se encontra com velocidade de translação  $v_0 = \omega r_0$ , entretanto, as forças horizontais não estão em equilíbrio, visto que não há forças centrífugas em um referencial inercial, apenas a força de tensão.



Figura 8 - Descrições de movimento nos referenciais S e S' numa mesa giratória.



Fonte: French (1974).

Após o rompimento da corda, em  $t = 0$ , em S a partícula começa a mover-se em linha reta para fora da mesa com velocidade  $v_0 = \omega r_0$ , como mostra a figura 8(a), o que era previsto para acontecer, pois se não há mais nenhuma força atuando na partícula, o movimento deve ser em linha reta, de acordo com a lei da inércia. Para deduzir o movimento de S', comparamos este com o movimento em relação a S. Observa-se que a partícula não apenas move-se radialmente para fora da mesa, mas também à direita de  $y'$ . Isso se explica pelo não balanceamento de forças, já que não temos mais a força de tensão atuando na partícula. porém, se somente tivéssemos a força centrífuga atuando sobre a partícula não haveria uma deflexão à direita, como visto na figura acima. Essa deflexão deve ser explicada pela atuação de outra força e essa outra força chama-se força de Coriolis.

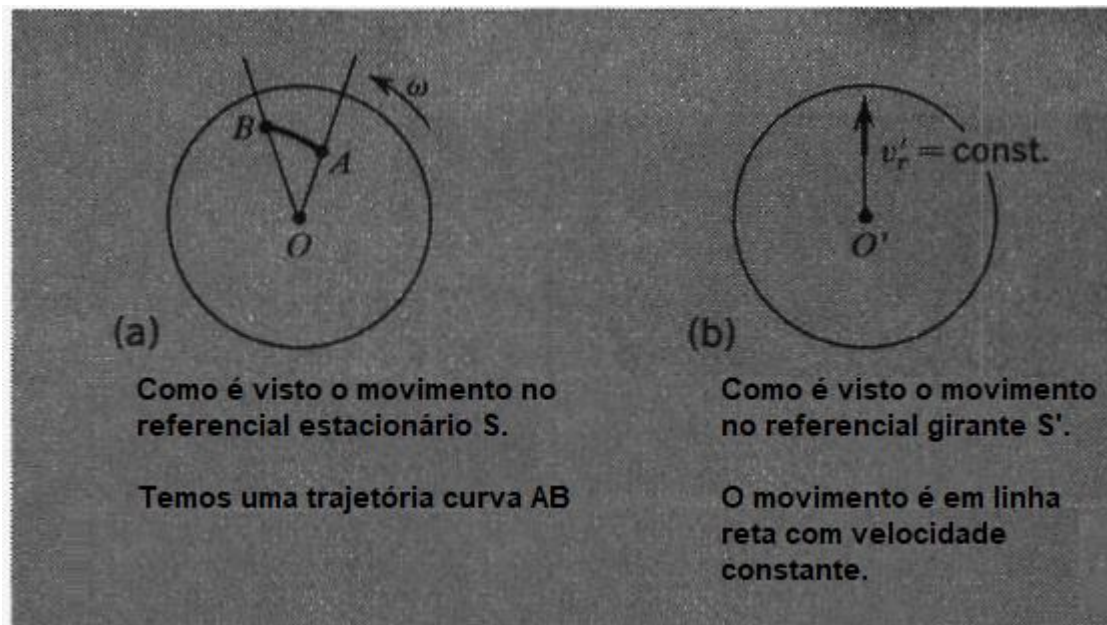
Para calcularmos sua magnitude, assim como fizemos com a força centrífuga, façamos a seguinte suposição: Imagine uma partícula de massa  $m$ , movendo-se radialmente com velocidade  $v_r$  em uma mesa girante.

Nessa situação, não deve haver forças atuando sobre a partícula. Entretanto, temos que aplicar uma força real para balancear a força centrífuga variável à medida que a partícula se move. Não consideraremos componentes radiais de força, que são causadas pelas forças centrífugas, pois nesse caso, em relação as componentes tangenciais, são desprezíveis.

O movimento nos dois sistemas, de acordo com a figura 9, se dá da seguinte forma: Em  $S'$ , temos uma trajetória retilínea, já que não há nenhuma força atuando sobre a partícula. Já em  $S$ , temos um movimento curvo, como o trecho  $AB$  na figura 9(a). Em  $S$ , a partícula tem uma velocidade tangencial  $v_\theta = \omega r$ , que é maior em  $B$  do que em  $A$ . Se considerarmos a lei da inércia, existe uma força real atuando sobre a partícula, para que aconteça esse aumento de velocidade. Essa força pode ser fornecida com uma balança de mola, como a figura 7, por exemplo.

Entretanto, mesmo que em  $S'$  não haja nenhuma força atuando sobre a partícula, um observador em  $S'$  perceberá que tem uma força de inércia na direção de  $-\theta$  balanceando a força real na direção de  $+\theta$ , observada em  $S$ . Essa força de inércia é a força de Coriolis.

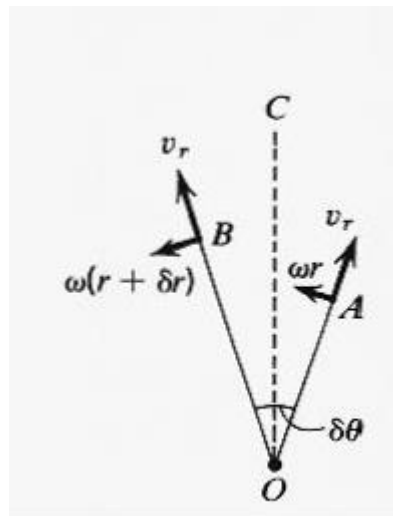
Figura 9 - Movimento nos referenciais  $S$  e  $S'$ .



Fonte: French (1974).

Para determinar a magnitude dessa força real, considere o esquema da figura 10:

Figura 10 - Esquema para o cálculo da magnitude da força de Coriolis a partir da deflexão AB em S.



Fonte: French (1974).

Seja OA e OB, na figura 10, as posições sucessivas da mesma linha radial em uma variação de tempo dada por  $\Delta t$ . Seja OC a bissetriz do ângulo  $\Delta\theta$ . A velocidade perpendicular OC varia em  $\Delta v_\theta$  durante  $\Delta t$ . Onde temos:

$$\Delta v_\theta = \left[ \omega(r + \Delta r) \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) + v_r \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \right] - \left[ \omega r \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) - v_r \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \right] \quad (25)$$

Para ângulos pequenos, podemos considerar o cosseno sendo igual a 1 e o seno como o próprio ângulo, o que nos leva a uma simplificação considerável de  $\Delta v_\theta$ :

$$\Delta v_\theta \approx \omega \Delta r + v_r \Delta\theta \quad (26)$$

A aceleração tangencial  $a_\theta$  é então dada por:

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = v \quad \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \omega \implies a_{\theta} = \frac{\Delta v_{\theta}}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta r}{\Delta t} + v_r \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = 2\omega v_r \quad (27)$$

Se multiplicarmos (27) por uma massa  $m$ , temos:

$$F_{\theta} = 2m\omega v_r \quad (28)$$

Essa é a força real necessária para produzir a aceleração real medida em S. Porém, como a força no sistema S', é contrária à força real, a força de Coriolis é dada por:

$$F_{Coriolis} = -2m\omega v_r \quad (29)$$

Voltemos à discussão anterior. Mesmo que se chame a força de Coriolis como sendo uma pseudoforça, uma pessoa no referencial girante sentirá uma força completamente real. Será mesmo que essa força é fictícia ou esse seria mais um argumento à favor da teoria de Mach, sugerindo que as forças de inércia são causadas por movimentos relativos? Apesar de não termos respostas, esse é um caso a se refletir. Podemos ver essa possível realidade da força centrífuga e de Coriolis de forma mais palpável, no filme educacional (Frames..., 1960).

Com a apresentação das principais forças de inércia, precisamos de um aparato matemático mais geral, para podermos calcular e explicar fenômenos causados pelas forças de inércia.

#### 4.3.1.3 Força de Euler

A força de Euler é mais uma força que surge em um referencial não inercial animado de movimento de rotação, desde que a velocidade angular seja variável. Semelhante à força centrífuga, a força de Euler depende também da posição do objeto em relação ao referencial girante.

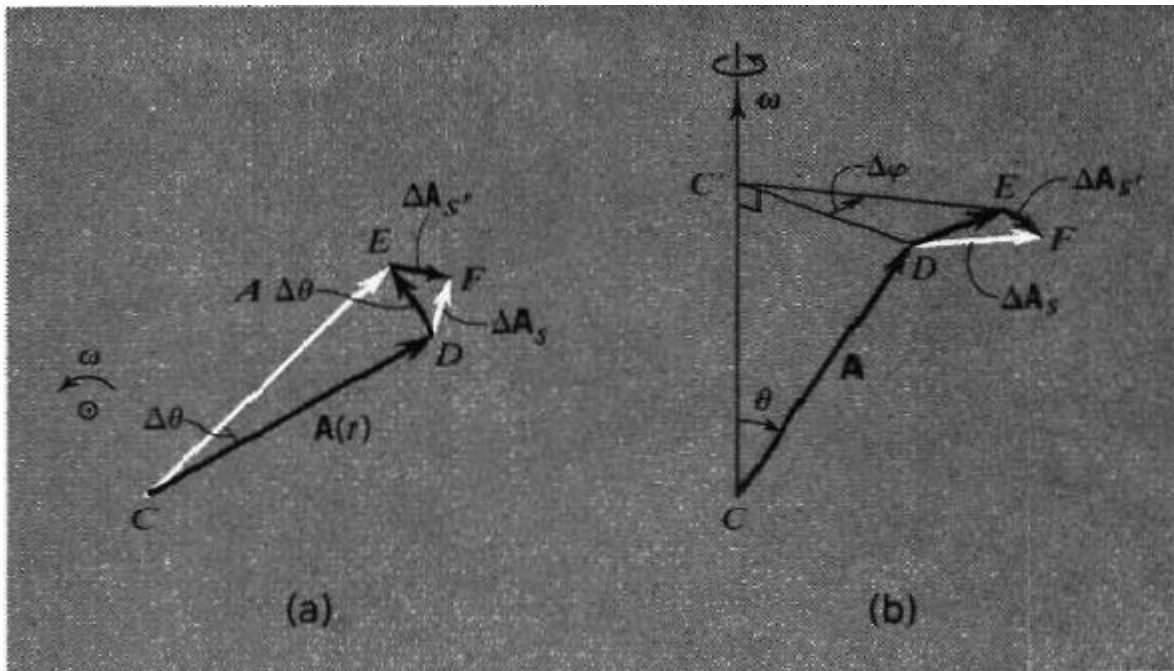
$$F_{Euler} = -m\dot{\omega}r \quad (30)$$

### 4.3.2 Equação geral para o movimento em um referencial não inercial

Para uma maior generalização das forças de inércia, as quais descrevemos acima, devemos achar a segunda derivada em relação ao tempo do deslocamento de uma partícula passando do referencial S fixo para um referencial S' girante (com a possibilidade da velocidade angular ser variável no tempo), porém agora com um tratamento vetorial em 3 dimensões.

Analisemos o seguinte esquema da figura abaixo:

Figura 11 - Rotação de um vetor deslocamento A arbitrário, analisado em S e S'



Fonte: French (1974).

A figura 11(a) é o deslocamento (em rotação) de um vetor arbitrário  $\vec{A}$ , com movimento restringido ao plano, analisados nos referenciais S e S'. Do ponto de vista do referencial fixo,  $\vec{A}$  no instante  $t$ , se representa pela reta  $CD$ . Num instante  $t + \Delta t$  o vetor deslocamento é representado por  $CE$  onde, então, a rotação de  $\vec{A}$  pode ser escrita em sua forma geral como  $DE$ , ou seja,  $DE = A\Delta\theta$ , sendo  $\Delta\theta = \omega\Delta t$ , então  $DE = A\omega\Delta t$ . Em S', a mudança de  $\vec{A}$  em relação

ao tempo se dá por DF e chamaremos de  $\Delta A_{S'}$ . Já a mudança em S' é a soma de CD com CE, ou seja DE, ao DE, ao qual chamaremos de  $\Delta A_S$ .

Agora analisemos essas mudanças em 3 dimensões, na figura 11(b). O módulo de DE agora é igual a  $A \sin \theta \Delta \varphi$ , sua direção é perpendicular ao plano definido por  $\omega$  e A. Já que  $\Delta \varphi = \omega \Delta t$ , podemos escrever:

$$\text{vetor deslocamento } \vec{DE} = (\vec{\omega} \times \vec{A}) \Delta t \quad (31)$$

O deslocamento  $\Delta A_{S'}$ , pode ter qualquer direção com respeito a DE, porém ambos se combinam em um deslocamento total DF e podemos então escrever  $\Delta A_S$  em termos de  $\Delta A_{S'}$ , mais uma rotação em torno de algum eixo, o que vai de acordo com o teorema de Chasles<sup>4</sup>:

$$\Delta \vec{A}_S = \Delta \vec{A}_{S'} + (\vec{\omega} \times \vec{A}) \Delta t \quad (32)$$

Podemos agora deduzir uma relação do vetor deslocamento  $\vec{A}$  analisados em S e S', respectivamente:

$$\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_S = \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (33)$$

Esta relação em (33) é muito importante, pois podemos escolher qualquer vetor, não necessariamente sendo o vetor  $\vec{A}$ . Consideremos em (33), o vetor posição  $\vec{r}$ , então, o primeiro termo de (33) é a velocidade real  $\vec{v}$ , e o segundo termo é a velocidade aparente  $\vec{v}'$ , observada em S', então temos (no caso da velocidade angular não ser constante):

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (34)$$

---

<sup>4</sup>Consultar anexo A.

Se tomarmos mais uma derivada em relação ao tempo em (33), temos:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{S'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (35)$$

Onde o termo da esquerda de (35) é a aceleração real observada no referencial S, e o primeiro termo da direita de (35) é uma espécie de híbrido, pois ele é a variação em S' da velocidade observada em S. Podemos dar a isso mais sentido, se substituirmos (34) no primeiro termo da direita de (35), nos dando:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{S'} = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S'} \quad (36)$$

Ou seja, de acordo com 36, temos:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{S'} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (37)$$

substituindo em(36) em (35), temos:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (38)$$

Do último termo à direita:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (39)$$

Substituindo (39) em (38), temos:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ \vec{a} &= \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')\end{aligned}\quad (40)$$

Se multiplicarmos (40) por uma massa  $m$ , vemos que o termo à esquerda  $m\vec{a}$  é a força externa total no sistema fixo:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{net} = m\vec{a}' + 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}') + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (41)$$

Se quisermos conservar a lei de Newton, podemos escrever da seguinte forma:

$$\vec{F}'_{net} = m\vec{a}' \implies \vec{F}'_{net} = \underbrace{m\vec{a}}_{\text{força "real"}} + \underbrace{-2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')}_{\text{força de Coriolis}} + \underbrace{-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{força centrífuga}} + \underbrace{m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{\text{força Azimutal ou de Euler}} \quad (42)$$

Essas são as forças de inércia que citamos anteriormente, na sua forma geral:

Façamos o seguinte resumo:

- I. Força "real": É a soma de todas as forças reais sobre a partícula, como as forças magnéticas, elétricas, gravitacionais, etc. São observadas apenas no sistema fixo S.
- II. Força de Coriolis: A força de Coriolis é sempre uma força de deflexão, perpendicular à velocidade  $v'$  de uma partícula de massa  $m$ . Se o objeto não tem velocidade no sistema de referência girante S', não há força de Coriolis.
- III. Força centrífuga: Depende unicamente da posição, e é sempre radial "pra fora" do sistema girante é uma força somente observada num referencial não inercial S'.
- IV. Força azimutal (ou de Euler): Aparece apenas quando temos um sistema girante com velocidade angular variável no tempo.

Podemos agora continuar nossa análise para movimentos mais complexos em três dimensões.



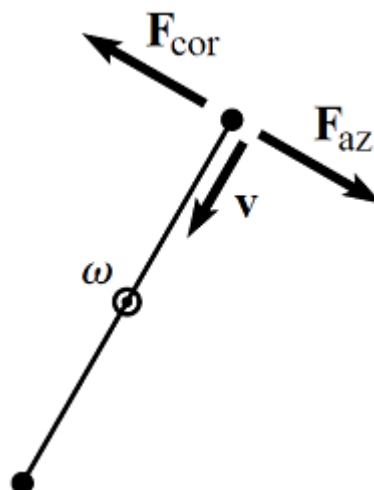
### 4.3.3 Patinador de gelo girando

Todos nós já vimos patinadores de gelo aumentarem sua velocidade, trazendo os braços perto do corpo. Isso pode ser entendido em termos de momento angular; um menor momento de inércia requer um  $\omega$  maior para manter  $L$  constante. Mas podemos analisar a situação em termos de forças fictícias. Vamos idealizar as coisas dando ao patinador mãos enormes e desconsiderar a massa dos braços/corpo.

Olhemos para o referencial do patinador (que tem um  $\omega$  crescente), definido pelo plano vertical contendo as mãos. O importante a perceber aqui é que o patinador sempre permanece no referencial do patinador. Portanto, o patinador deve sentir a força tangencial resultante zero em seu referencial, porque caso contrário ela aceleraria com respeito a ele. Suas mãos estão sendo atraídas por uma força muscular que funciona contra a força centrífuga, mas não pode haver força tangencial resultante nas mãos no referencial do patinador, por definição.

Quais são as forças tangenciais no referencial do patinador? Deixemos as mãos serem puxadas em velocidade  $v$  (ver figura abaixo). Então, há uma força de Coriolis (na mesma direção que o giro) com magnitude  $2m\omega v$ . Há também uma força azimutal com magnitude  $mr\dot{\omega}$  (na direção oposta ao giro, como você pode verificar). A força tangencial é zero no referencial do patinador, devemos ter (de acordo com a figura abaixo):

Figura 12 - Esquema vetorial: Patinador de gelo girando



Fonte: Morin (2008).

$$2m\omega v = mr\dot{\omega} \quad (43)$$

Essa relação faz sentido? Bem, vamos dar uma olhada nas coisas no referencial básico. O momento angular total das mãos na altura do solo é constante. Portanto,  $\frac{d(mr^2\omega)}{dt} = 0$ . Tomando essa derivada e usando  $\frac{dr}{dt} = v$  dá a Eq. (43).

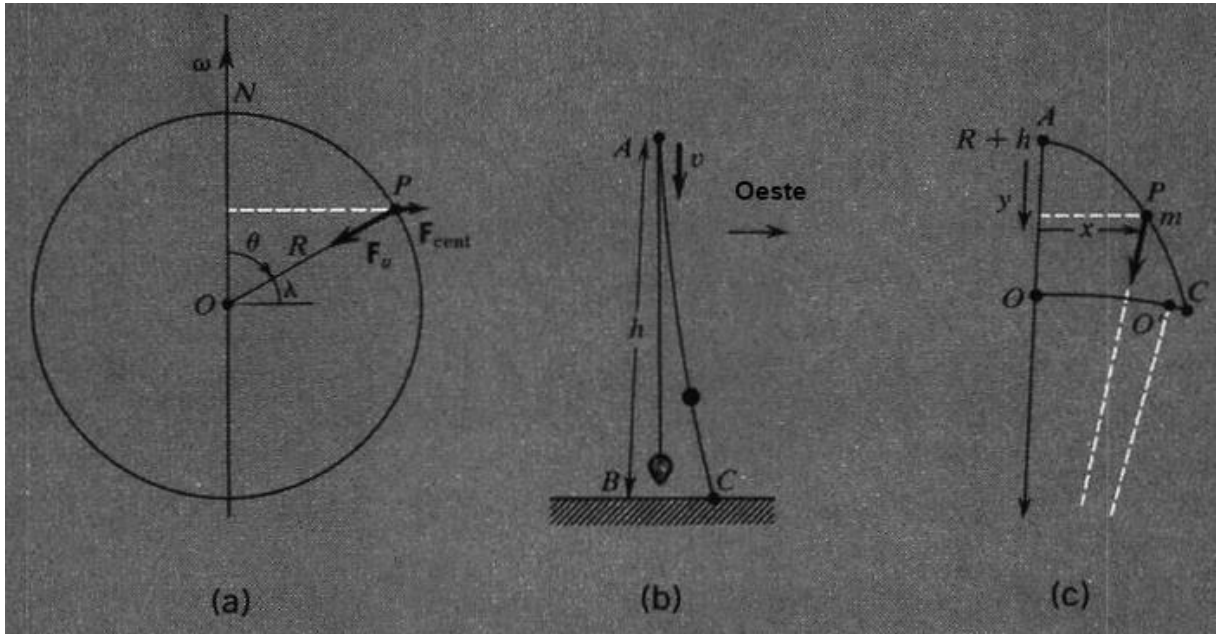
#### 4.3.4 A Terra como referencial girante:

Todos nós aprendemos que a Terra gira em torno de seu próprio eixo e viaja numa órbita quase circular ao redor do sol. Como então a lei da inércia parece funcionar normalmente num referencial sobre a Terra? Responderemos essa pergunta a seguir.

##### 4.3.4.1 O valor local da aceleração da gravidade

Se uma partícula P está em repouso em uma latitude  $\lambda$  em relação à superfície da Terra, essa estará sujeita à força gravitacional  $F_g$  e à força centrífuga  $F_{cent}$ , de acordo com a figura abaixo:

Figura 13 - (a) As forças que atuam sobre uma partícula em repouso, vistas de um sistema girante, como a própria Terra. (b) Desvio a oeste de um objeto em queda, num sistema de referência solidário ao da Terra. (c) Movimento de caída em (b) observado em um sistema fixo.



Fonte: French (1974).

A força centrífuga para a partícula, de acordo com (36), nos fornece:

$$m\omega^2 R \sin \theta = F_{cent} \quad (44)$$

Onde  $R$  é o raio da Terra. Na equação geral considerando que a força de Coriolis nesse caso é desprezível, temos:

$$F'_r = F_g - F_{cent} \cos \lambda = F_g - m\omega^2 R \cos^2 \lambda \quad (45)$$

$$F'_\theta = F_{cent} \sin \lambda = -m\omega \cos \lambda \sin \lambda R \quad (46)$$

Ou seja, o objeto é defletido, de acordo com (45) na direção leste, de acordo com a figura acima, porém, a atuação da força gravitacional também é diminuída.

Se analisarmos (45), percebemos que, como a força centrífuga atuante é dependente do cosseno, então a aceleração da gravidade é menor quanto mais próxima ao equador, e maior quanto mais próxima aos polos. Esse é o argumento de Newton, para explicar, por exemplo, o achatamento nos polos da Terra:

[..] Se o movimento diurno fosse acelerado ou retardado em qualquer proporção, a força centrífuga seria aumentada ou diminuída, quase na mesma proporção ao quadrado, de modo que a diferença dos diâmetros (latitudinal e longitudinal) seria aumentada ou diminuída na mesma razão ao quadrado, muito aproximadamente[...] (NEWTON, 2012, p. 217).

Porém, continuemos com nosso questionamento anterior: Por que a lei da inércia continua válida mesmo quando utilizamos um referencial na superfície da Terra? Primeiramente, analisemos somente a aceleração da gravidade considerando a Terra como um referencial girante, reescrevendo (45), temos:

$$ma'_r = mg - m\omega^2 R \cos^2 \lambda \quad (47)$$

Dividindo (47) por m, temos:

$$a'_r = g - \omega^2 R \cos^2 \lambda \quad (48)$$

A partir de (48), bastamos substituir pelos dados da Terra:

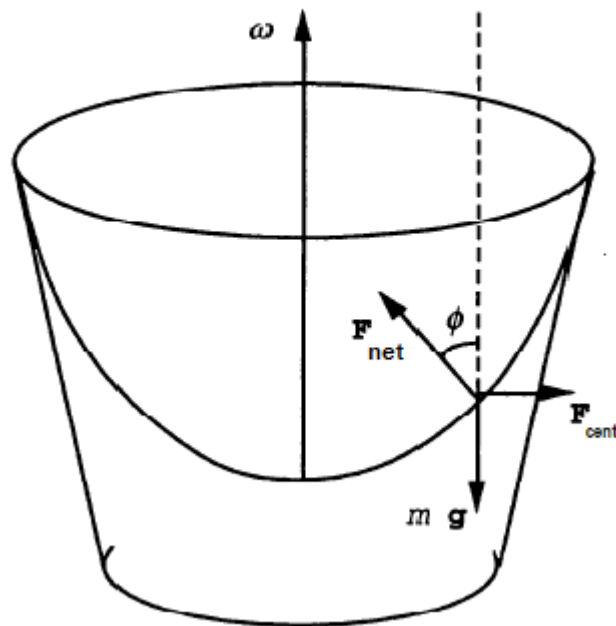
$$\begin{aligned} & \text{Dados da Terra} \\ \omega_{Terra} &= 7,27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} \\ R_{Terra} &= 6,38 \times 10^6 \text{ m} \\ \lambda_{Equador} &= 0^\circ \\ g &= 9,81 \text{ m/s}^2 \\ a'_r &= 9,81 - (6,38 \times 10^6)(7,27 \times 10^{-5})^2(\cos^2 0) = 9,78 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \quad (49)$$

Ou seja, há uma diferença de apenas  $0,033\text{m/s}^2$  na magnitude da aceleração da gravidade. Podemos a partir de (41), ao invés de utilizarmos os dados terrestres do equador, escolhermos um dos polos como referência para os dados, a diferença será exatamente a mesma, porém, ao invés de um decréscimo, há um acréscimo de  $0.033\text{m/s}^2$  à magnitude da aceleração da gravidade. Porém, apesar deste resultado acima causar o achatamento dos polos da Terra, por exemplo, num experimento de laboratório, este resultando é totalmente mascarado pela aceleração da gravidade teórica, de  $9,81\text{m/s}^2$  aproximadamente, e por isso a lei da inércia contínua aproximadamente, válida.

#### 4.3.4.2 Geometria da superfície do balde de Newton

De acordo com a experiência descrita por Newton (seção 3), o balde gira com velocidade angular  $\omega$  relativo ao referencial inercial. A água é forçada para a borda do balde por causa da força centrífuga, a partir de um pequeno elemento de massa  $m$ , determinemos à superfície da água:

Figura 14 - Experiência do balde de Newton: Geometria do problema



Fonte: Knudsen e Hjorth (2000).

De acordo com a experiência descrita por Newton (seção 3), o balde gira com velocidade angular  $\omega$  relativo ao referencial inercial. A água é forçada para a borda do balde por causa da força centrífuga, a partir de um pequeno elemento de massa  $m$ , determinemos a superfície da água:

Considerando que o elemento de massa da superfície da água está em repouso (fase três, figura 1), A força resultante  $F_{net}$  é dividida em:

$$F_{net} \sin \phi = m\omega^2 R \quad (50)$$

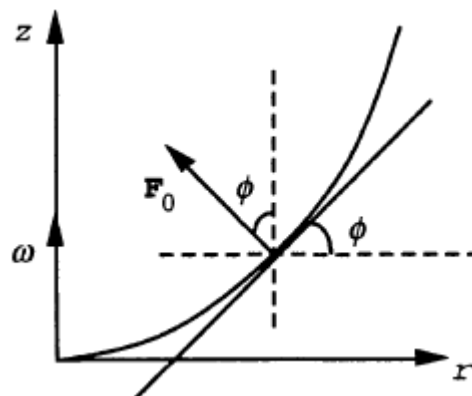
$$F_{net} \cos \phi = mg \quad (51)$$

Escrevendo em (50) e (51) em função da tangente, temos:

$$\text{tg } \phi = \frac{\omega^2 R}{g} \quad (52)$$

Considerando o plano Zr, temos:

Figura 15 - Plano Zr no balde de Newton



Fonte: Knudsen e Hjørth (2000).

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 R}{g} \int_0^r r dr \implies z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad (53)$$

Ou seja, um parabolóide de revolução.

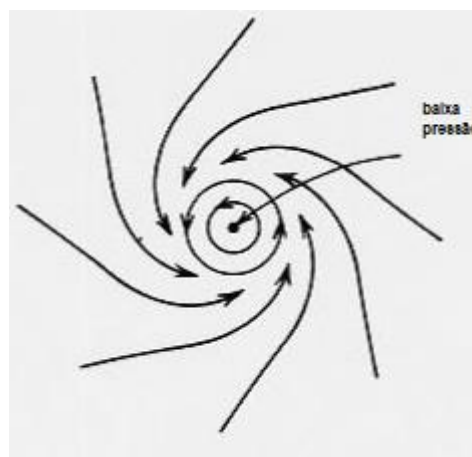
Apesar de não termos uma certeza sobre a origem das forças de inércia, uma reflexão importante que devemos fazer, é sobre a possível realidade das forças de inércia, que causam efeitos bem reais e poderiam ser aceitas caso conseguíssemos um sistema de referência universal.

Até o momento analisamos somente exemplos de efeitos em movimentos terrestres causados pela força centrífuga. Analisemos um exemplo causado pela força de Coriolis.

#### 4.3.4.3 Circulação Atmosférica

Sempre que olhamos uma imagem de satélite, as nuvens sempre têm um padrão de movimento em forma de espiral circular. Esse espiral pode ter um sentido de giro radialmente para dentro no caso de uma região de baixa pressão ou para fora de seu centro, se for uma região de alta pressão. Como de acordo com a figura abaixo:

Figura 16 - Formação de um furacão no hemisfério norte, causado pela força de Coriolis que atua nas partículas de ar.



Fonte: French (1974).

Como o hemisfério norte é uma região de baixa pressão, as massas de ar se concentram no centro de um determinado ponto, como por exemplo, na figura 16. À medida que as massas

de convergem para o centro da região de baixa pressão, produzem uma rotação no sentido contrário ao do relógio, causada pelas forças de Coriolis. Se considerarmos uma massa de 1 kg de ar, a uma velocidade de 10m/s e uma latitude de 45° Norte, aplicando a equação geral, temos:

$$F_{Coriolis} = 2m\omega v' \sin \lambda = 2(1)(2\pi \times 10^{-5})(10)(0,707) = 10^{-3} N \quad (54)$$

Se quisermos calcular o raio de curvatura causado apenas por 1 kg de ar, teremos os seguintes valores:

$$F = \frac{mv^2}{R} \implies R = \frac{mv^2}{F_{Coriolis}} = \frac{1 \times 100}{10^{-3}} = 10^5 m \quad (55)$$

Como sabemos que as massas de ar são bem maiores que 1 kg, isso causaria um enorme turbilhão, o que conhecemos por furacão. Há algumas especulações que a água sugada por uma pia, por exemplo, também tem uma direção preferencial para fora ou para dentro do centro de rotação.

Um experimento clássico em que se manifesta a presença da força de Coriolis é o famoso pêndulo de Foucault.



## 5 CONCLUSÃO

Vimos de modo sucinto no decorrer deste trabalho toda a construção científica dos conceitos de espaço e força que surgiram até o século XIX. Enquanto houve dominância da física de Aristóteles, a física e a astronomia foram tratadas de acordo com uma concepção metafísica muito forte. A superioridade do movimento circular sobre o movimento retilíneo era aceita pela física aristotélica. Galileu ainda manteve uma visão geral de predominância do movimento circular sobre outros tipos de movimento. Tanto é assim que Galileu não se entusiasmou muito com as órbitas elípticas dos planetas, descobertas por Kepler. Entretanto, adotando uma física que passou a valorizar o lado matemático da questão, associada aos seus aspectos experimentais, Galileu mudou a visão de espaço, passando da concepção de lugares naturais, para a de espaço geométrico euclidiano. Ele deu assim os primeiros passos no longo caminho que iria culminar no princípio de inércia. Descartes, Huygens e Newton fizeram amadurecer a ideia de movimento por inércia e de força de inércia, ou seja, a *vis insita* de Newton. Entretanto, a origem das forças de inércia foi compreendida como sendo o movimento em relação a uma entidade da qual não temos acesso experimental, o espaço absoluto. Mach, de modo contrário a Newton, afirmou que a inércia deve ter origem numa interação dos corpos aqui com as massas lá, as massas distantes do Universo, as estrelas fixas.

Porém, apesar de não haver um consenso entre as teorias sobre a origem forças de inércia, pudemos ver na seção 4, que elas causam efeitos bastante reais sobre determinados movimentos e o termo pseudoforça ou força fictícia, deve existir pelo fato da lei de Newton ser aceita sem maiores discussões, o que é um retrocesso ao ensino de ciências.

Pouquíssimos exemplos na literatura de física trata o assunto com maior seriedade, dando ênfase apenas na mecânica newtoniana inercial e raras as vezes o conceito de espaço absoluto é mencionado, o que para muitos físicos é um conceito metafísico e obviamente não deveria ser aceito sem uma evidência experimental.

O objetivo deste trabalho não é refutar a teoria de Newton ou de Mach, e sim exercer reflexões sobre as duas principais teorias da origem da inércia e uma possível aplicação ao ensino de física, através da história da ciência, como a evolução dos conceitos de espaço e força no qual esbocei na segunda seção, e quando necessário, levar a reflexão da possível realidade(ou não, caso haja algum argumento contra uma mecânica relacional), das forças de inércia.

Como prosseguimento pessoal, pretendo aplicar o tema no ensino de física, buscando juntar o conhecimento obtido na pesquisa com ferramentas pedagógicas, afim de que no ensino

médio, a discussão possa formar alunos que sejam capazes de entender de forma mais crítica o conceito de inércia.

## REFERÊNCIAS

- ADLER, Ronald ; BAZIN, Maurice; SCHIFFER, Menahem. **Introduction to general relativity**. 2. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1975. 549 p.
- ASSIS, André. **Mecânica relacional**. Campinas: Centro de lógica, epistemologia e história da ciência - UNICAMP, v. 22, 1998. 349 p. (Coleção CLE).
- DESCARTES, René. **Princípios da filosofia**. Tradução João Gama. Lisboa: Edições 70, 1997. 279 p. Tradução de: Principia philosophiae.
- ÉVORA, Fátima. **Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea**. Campinas: Centro de lógica, epistemologia e história da ciência, v. 11, 1992. 439 p. (Coleção CLE).
- FEYNMAN, Richard . **Lições de física: mecânica, radiação e calor**. Tradução Adriana Válio Roque da Silva. São Paulo: ARTMED, v. 1, 2008. 1712 p. Tradução de: The Feynman Lectures on Physics: The Definitive and Extended Edition, 2nd Edition.
- FRAMES of reference. Direção de Richard Leacock. Produção de Physical Science Study Committee. Toronto, 1960. Filme educacional (27).
- FRENCH, Anthony. **Mecânica Newtoniana**. Tradução José Casanova Colas. 3. ed. Barcelona: Reverté, 1974. 793 p. (MIT PHYSICS COURSE). Tradução de: Newtonian Mechanics.
- GALILI, Igal ; TSEITLIN, Michael. **Excuse to the history of inertial force**. The Hebrew University of Jerusalem . Jerusalem, 2010. 28 p. Disponível em:<http://www.huji.ac.il/htbin/doctors/index.cgi?tofes/Inertia-Galili>. Acesso em: 4 out. 2019.
- GALILEI, Galileu. **Díálogo sobre os dois máximos sistemas de mundo ptolomaico e copernicano**. Tradução Pablo Rubén Mariconda. 3. ed. São Paulo: 34, 2011. 888 p. (Coleção de Estudos sobre a Ciência e a Tecnologia). Tradução de: Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo.
- GHINS, Michel. **A inércia e o espaço tempo absoluto: de Newton à Einstein**. Campinas: Centro de lógica, epistemologia e história da ciência- UNICAMP, v. 9, 1991. 312 p. (Coleção CLE).
- JAMMER, Max. **Conceitos de espaço: a história das teorias do espaço na física**. Tradução Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Contraponto, 2009. 323 p. Tradução de: Concepts of space.
- JAMMER, Max. **Conceitos de força: estudo sobre os fundamentos da dinâmica**. Tradução Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Contraponto, 2011. 333 p. Tradução de: Concepts of force.
- KNUDSEN, Jens; HJORTH, Poul. **Elements of newtonian mechanics: including non linear dynamics**. 3. ed. Nova Iorque: Springer, 2000. 451 p.
- MORIN, David. **Introduction to classical mechanics: with problems and solutions**. Nova Iorque: Cambridge University Press, 2008. 719 p.

NEWTON, Isaac. **Principia**: princípios matemáticos da filosofia natural. Tradução André Koch Torres Assis. 2. ed. São Paulo: EDUSP, v. 1 e 2, 2012. 448 p. Tradução de: *philosophiae naturalis principia mathematica*.

NEWTON, Isaac. **Principia**: princípios matemáticos da filosofia natural. Tradução Trieste Ricci. 2. ed. São Paulo: EDUSP, v. 1, 2008. 326 p. Tradução de: *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

SOMMERFELD, Arnold. **Mechanics of deformable bodies**. Nova Iorque: Academic Press, v. 2, 1950. 408 p.

THORNTON, Stephen; MARION, Jerry. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. Tradução All Tasks. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. 575 p. Tradução de: *Classical dynamics of particles and systems*.