

LEONARDO THOMAZ VILLAS BOAS

Simulação numérica do desenvolvimento de esteiras de aeronaves utilizando um método determinístico para resolver a equação da difusão da vorticidade

Leonardo Thomaz Villas Boas

Simulação numérica do desenvolvimento de esteiras de aeronaves utilizando um método determinístico para resolver a equação da difusão da vorticidade

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Alex Mendonça Bimbato

V726s Villas Boas, Leonardo Thomaz
Simulação numérica do desenvolvimento de esteiras de aeronaves utilizando um método determinístico para resolver a equação da difusão da vorticidade / Leonardo Thomaz Villas Boas. – Guaratinguetá, 2021.
68 f : il.
Bibliografia: f. 62-68

Trabalho de Graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2021.
Orientador: Prof. Dr. Alex Mendonça Bimbato

1. Mecânica dos fluidos 2. escoamento multifásico 3. Lagrange, Funções de 4. Métodos de simulação I. Título

CDU: 532

LEONARDO THOMAZ VILLAS BOAS

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE
DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
“GRADUADO EM ENGENHARIA MECÂNICA”

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECANICA.

Prof. Dr. Celso Eduardo Tuna
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Alex Mendonça Bimbato
Orientador/UNESP-FEG



Profª. Drª. Eliana Vieira Canettieri
UNESP/FEG



Prof. Dr. Thiago Averaldo Bimestre
UNESP/FEG

Fevereiro 2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, ao meu Deus, que me permitiu chegar até aqui, pois sem Ele eu não existiria;

Aos meus pais, *Celso e Mônica*, e à minha irmã, *Léa*, pelo apoio incondicional em todos os momentos de minha vida;

Ao meu orientador, *Prof. Dr. Alex Mendonça Bimbato*, por ter tornado possível a realização deste trabalho com sua paciência inesgotável e sua didática impecável;

E um grande obrigado a todos os professores que fizeram parte da minha caminhada até aqui.

“A persistência é o menor caminho do êxito.”

Charles Chaplin

RESUMO

O método de vórtices discretos é utilizado para analisar e prever, sem a utilização de malhas, o comportamento de um campo de vorticidades em escoamentos viscosos. O estudo da vorticidade divide-se, de forma independente, em duas etapas: a evolução por advecção e a evolução difusiva desta propriedade no escoamento, ambas ocorrendo no mesmo intervalo de tempo. O processo de advecção é simulado acompanhando-se cada vórtice discreto por meio de uma descrição lagrangiana tradicional, enquanto a simulação do processo difusivo, neste trabalho, explora o método do crescimento do raio do núcleo do vórtice modificado para resolver a equação da difusão da vorticidade. A aplicação desta metodologia é conciliada ao caso prático da operação de uma aeronave na proximidade da pista de decolagem. A perturbação gerada pela aproximação da aeronave é representada por um par de vórtices de ponta de asa, e a pista é representada por meio do método de painéis. Por intermédio da lei de Biot-Savart, pode-se determinar o campo de velocidades a partir do campo de vorticidades, e acompanhar a trajetória dos vórtices discretos no decorrer do tempo. O desenvolvimento teórico e experimental da nuvem de vórtices é comparado, e discute-se a influência de parâmetros intrínsecos à simulação usando o método do crescimento do raio do núcleo do vórtice modificado. Por fim, verifica-se a funcionalidade da metodologia determinística e sugere-se alternativas para contornar suas desvantagens em termos de esforço computacional.

PALAVRAS-CHAVE: Método de vórtices discretos. Método do crescimento do raio do núcleo do vórtice modificado. Difusão da vorticidade. Descrição lagrangiana. Método de painéis.

ABSTRACT

The discrete vortex method is used to analyze and predict, without using meshes, the behavior of a vorticity field in viscous flows. The study of vorticity is independently divided into two stages: the evolution by advection and the diffusive evolution of this property in the flow, both occurring in the same time interval. The advection process is simulated by following each discrete vortex through a traditional Lagrangian description, whereas the simulation of the diffusive process, in this bachelor's thesis, explores the core spreading method to solve the diffusive part of the vorticity equation. This methodology is applied in the practical situation of operating an aircraft in the vicinity of a runway. The disturbance generated by the approach of the aircraft is represented by a pair of wingtip vortices, and the runway is represented through the panel method. Based on the Biot-Savart law, it is possible to determine the velocity field given the vorticity field, and then follow the trajectory of the discrete vortices over time. The theoretical and experimental development of the vortex cloud is compared, and the influence of parameters intrinsic to the simulation is discussed using the modified core spreading method. Finally, the functionality of the deterministic methodology is verified and alternatives are suggested to overcome its disadvantages in terms of computational effort.

KEYWORDS: Discrete vortex method. Core spreading method. Vorticity diffusion. Lagrangian description. Panel method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1. Aeronave em procedimento de pouso ou decolagem.....	11
Figura 2. Número de voos operados pela indústria aeronáutica mundial entre 2004 e 2021.	12
Figura 3. (a) Aeronave em procedimento de decolagem (b) par contrarrotativo de vórtices utilizado para representar a situação física apresentada em (a).	14
Figura 4. Características gerais das discretizações por métodos eulerianos e lagrangianos.	15
Figura 5. Estudos recentes envolvendo o método de vórtices discretos.....	16
Figura 6. Problema do vórtice pontual resolvido para duas constantes de tempo distintas pelo MCRNM, utilizando-se o método dos anéis de Lewis (1991).....	22
Figura 7. Camada limite: perfil de velocidade.	22
Figura 8. Comparação entre os coeficientes de arrasto originais e modificados.....	24
Figura 9. Esboço do problema estudado.....	25
Figura 10. Distribuições gaussianas de vorticidade no interior do núcleo de vórtices discretos. .	29
Figura 11. Distribuição de singularidades de densidade constante ao longo de um painel plano. .	32
Figura 12. Velocidade induzida no ponto $P(x,y)$ por uma distribuição de fontes com densidade $\sigma(x)$ e comprimento $x_2 - x_1$	32
Figura 13. Geometria de um painel plano e do vórtice discreto gerado em seu ponto de desprendimento.	35
Figura 14. Velocidade tangencial induzida em função do raio para o vórtice de Lamb.	38
Figura 15. Vórtice original repartindo-se e dando origem a quatro novos vórtices discretos.	40
Figura 16. Fluxograma do laço maior do programa Main.for.	49
Figura 17. Fluxograma do laço menor do programa Main.for.	50
Figura 18. Desenvolvimento da nuvem de vórtices usando o MAR (a) $NZ = 100$ e $m = 120$; (b) $NZ = 2000$ e $m = 120$ e (c) $NZ = 100$ e $m = 240$	52
Figura 19. Resultados experimentais da evolução da nuvem de vórtices discretos.	56
Figura 20. Desenvolvimento da nuvem de vórtices usando o MCRNM.....	58
Figura 21. Comparação entre os resultados experimentais e do MCRNM.	59

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	JUSTIFICATIVA.....	11
1.2	OBJETIVOS DO TRABALHO.....	14
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2.1	PROBLEMA PROPOSTO	16
2.2	MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS.....	17
2.3	MÉTODO DO CRESCIMENTO DO RAIOS DO NÚCLEO DO VÓRTICE MODIFICADO	20
3	METODOLOGIA	25
3.1	SIMPLIFICAÇÕES ADOTADAS E EQUAÇÕES GOVERNANTES	25
3.2	ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA	27
3.3	O MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS APLICADO AO PROBLEMA	27
3.4	A EQUAÇÃO DO TRANSPORTE DA VORTICIDADE.....	29
3.5	O ALGORITMO DE SEPARAÇÃO DA PARTE VISCOSA	29
3.6	A LEI DE BIOT-SAVART.....	30
3.7	CÁLCULO DO CAMPO DE VELOCIDADES DO ESCOAMENTO	31
3.7.1	Contribuição da fronteira sólida: o método de painéis	31
3.7.2	Geração de vorticidade	34
3.8	CONTRIBUIÇÃO DA NUVEM DE VÓRTICES DISCRETOS	37
3.9	A SOLUÇÃO DO PROBLEMA ADVECTIVO	38
3.10	A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DIFUSIVO: O MÉTODO DO CRESCIMENTO DO RAIO DO NÚCLEO DO VÓRTICE MODIFICADO (MCRNM)	39
4	ALGORITMO DE IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE VÓRTICES	41
4.1	ROTINA MAIN.FOR	41
4.2	ROTINA INPUT.FOR	41
4.3	ROTINA DATAPREPGP.FOR	41
4.4	ROTINA PAIRCLOUD.FOR	42
4.5	ROTINA PRINT.FOR	43
4.6	ROTINA COUPLING_COEFFICIENTS_S.FOR.....	43
4.7	ROTINA COUPLING_COEFFICIENTS_V.FOR	43
4.8	ROTINA MODIFY_MATRIX.FOR	43
4.9	ROTINA COMP_UM_VM.FOR.....	44

4.10	ROTINA RIGHT_HAND_SIDES_S.FOR.....	44
4.11	ROTINA COMP_US_VS.FOR	44
4.12	ROTINA RIGHT_HAND_SIDES_V.FOR	44
4.13	ROTINA MODIFY_RHS.FOR	45
4.14	ROTINA MINI_QUAD.FOR	45
4.15	ROTINA GAUSSPIV.FOR	45
4.16	ROTINA VERIFY_MASS_CONSERVATION.FOR	45
4.17	ROTINA VERIFY_BOUND_CIRC_CONSERVATION.FOR.....	45
4.18	ROTINA GENERATION.FOR	45
4.19	ROTINA GENERATION_EXTRA.FOR.....	46
4.20	ROTINA COMP_UM_VM_EXTRA.FOR	46
4.21	ROTINA VELOCITY_FIELD.FOR.....	46
4.22	ROTINA COMP_UB_VB.FOR	46
4.23	ROTINA COMP UAV_VAV.FOR	47
4.24	ROTINA ADVECTION.FOR	47
4.25	ROTINA MCRNM.FOR	47
4.26	ROTINA REFLECT_GROUND.FOR	47
4.27	FLUXOGRAMA DA ROTINA MAIN.FOR	48
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	51
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	61
	REFERÊNCIAS	62

1 INTRODUÇÃO

Correntes de ar estão presentes em diversos fenômenos de nosso planeta e de nosso cotidiano. Pode-se citar sua participação nos fenômenos meteorológicos ou até em aplicações mais corriqueiras, como o conforto térmico (ventiladores e equipamentos de ar-condicionado) e o escoamento aerodinâmico presente em veículos e aeronaves em movimento. Muitas destas situações, embora comuns à nossa experiência, ainda não são perfeitamente compreendidas pela ciência. Apesar de o escoamento viscoso ser simples aos nossos sentidos, ele requer um modelo matemático complexo para descrever propriedades fluidodinâmicas importantes, como a velocidade, a força de arrasto e de sustentação, e, também, outros efeitos da viscosidade do fluido ao percorrer diferentes terrenos com geometrias distintas.

Na engenharia, o estudo do escoamento de um fluido ao redor de fronteiras sólidas se depara inevitavelmente com a presença de um campo de vorticidades, que, na maioria dos problemas de interesse científico e tecnológico, dificulta ou impossibilita a solução analítica do problema. O processo de desprendimento de vórtices afeta significativamente as propriedades fluidodinâmicas e tem sido foco de diversos estudos desde o início do último século. Aliado a este fato, ainda existem fenômenos intrínsecos à hidrodinâmica não-linear, como a separação da camada limite e a transição para a turbulência. A presença simultânea de tais fenômenos atravanca a solução de um problema de escoamento. Deste modo, a utilização de técnicas experimentais e/ou numéricas se torna o único meio viável para determinar o campo de velocidades e o campo de pressões em escoamentos com a presença de vorticidade.

Agrega-se aos fenômenos anteriores a importância de se analisar o efeito da viscosidade sobre o campo de vorticidades. A viscosidade é responsável pelo espalhamento da vorticidade para as regiões vizinhas do domínio fluido onde o escoamento é irrotacional. Portanto, se o efeito de espalhamento da vorticidade não for estudado e entendido corretamente, os modelos de turbulência não representarão apropriadamente o efeito de dissipação de energia.

Quando há movimento relativo entre um fluido viscoso e um corpo imerso, verifica-se a condição física de não-deslizamento das partículas do fluido em relação à superfície do corpo. Assim, ao incidir sobre o corpo, o escoamento sofrerá o efeito da rotação de partículas próximas à superfície e, como consequência, passa a existir um gradiente de velocidade e tensões tangenciais, que formam a camada-limite. O conceito de camada-limite foi introduzido pioneiramente por Ludwig Prandtl em 1904 e marcou o início da era moderna da mecânica dos fluidos.

Dada a rotação das partículas fluidas dentro da camada-limite, ocorre o fenômeno da

geração de vorticidade, em que as partículas em rotação se movimentam para jusante do escoamento e se desprendem da superfície do corpo imerso, concentrando-se, então, na esteira viscosa do corpo.

Na situação abordada no presente trabalho, ilustrada na Figura 1, o fluido em questão é o ar, e o corpo imerso é uma aeronave de dimensão qualquer em procedimento de pouso ou decolagem. Com o movimento relativo entre a aeronave e o fluido, o ar escoar ao redor das asas, e as partículas em rotação se desprendem da superfície do avião nos pontos de separação, formando a extensa esteira viscosa à jusante, que descarrega as estruturas vorticosas no ar após a passagem da aeronave.

Figura 1. Aeronave em procedimento de pouso ou decolagem.



Fonte: Liftaviation (2021).

Em seguida, a vorticidade descende e interage com o solo, induzindo a geração de vorticidade também na pista. Por mais que o efeito solo tenha influência significativa em operações de pouso e decolagem, o presente trabalho analisa um espaço bidimensional, cujo escoamento é perturbado pela passagem apenas do par de pontas de asas da aeronave. Por este motivo, não há ligação entre o problema analisado e o efeito solo, visto que não há nenhum corpo presente no plano sob análise.

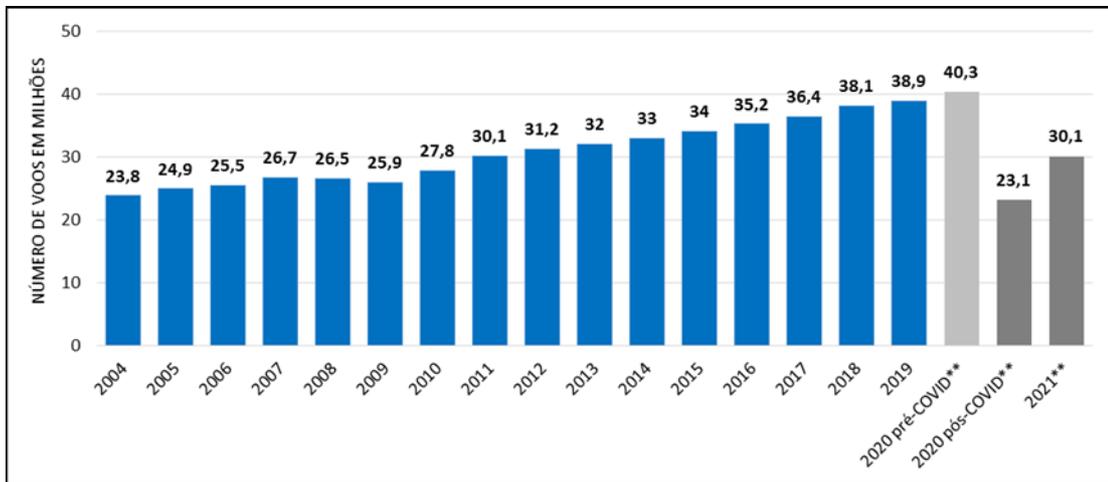
1.1 JUSTIFICATIVA

A geração da vorticidade pelas pontas de asa do avião é uma perturbação de tamanha magnitude, que pode alterar o campo de velocidades do fluido de forma brusca, ocasionando até mesmo acidentes graves a uma segunda aeronave que venha a operar na mesma pista vários minutos após a passagem da primeira (MACHOL, 1993).

De acordo com reportagem da editora Abril, o número de bilhetes aéreos emitidos no mundo triplicou entre 1998 e 2017 (ano do dado mais recente encontrado). Segundo a Forbes, a Associação Internacional de Transporte Aéreo prevê que esse número ainda irá dobrar nas próximas duas décadas, totalizando 8,2 bilhões de passageiros em 2037. A estimativa é baseada em um crescimento médio anual de 3,5% do setor e foi realizada antes da pandemia de Sars-Cov-2.

A Figura 2 ilustra o número de voos operados pela indústria aeronáutica mundial ao longo das últimas duas décadas.

Figura 2. Número de voos operados pela indústria aeronáutica mundial entre 2004 e 2021.



Fonte: Statista (2020).

Para acompanhar o rápido avanço da indústria aeronáutica, aeroportos e aeronaves terão que se adaptar tanto em estrutura quanto em eficiência. A este último fator está atrelado o estudo de esteiras de vórtices, o qual está fortemente ligado à delimitação de um intervalo seguro entre operações subsequentes em uma mesma pista.

Tendo em vista o crescimento desenfreado do setor, surge a necessidade de se criar métodos cada vez mais robustos para solucionar o mesmo problema. Motivado ainda pela importância de simular corretamente a dinâmica da vorticidade para a precisão dos resultados, o presente trabalho modela a operação de pouso ou decolagem de maneira computacional. A solução do campo de vorticidades é alcançada através de simulações numéricas, dadas as devidas simplificações que são citadas nos próximos capítulos. Por intermédio da lei de Biot-Savart, pode-se transformar a solução do campo de vorticidades em uma resposta para o campo de velocidades, componente primordial para o entendimento de qualquer escoamento na mecânica dos fluidos.

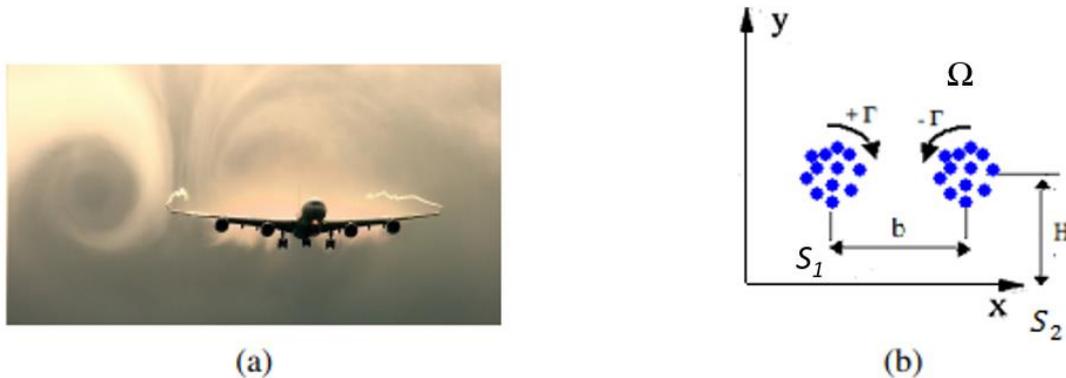
Nas simulações, há o desenvolvimento de uma nuvem de vórtices discretos que representa as perturbações geradas no fluido após a passagem da aeronave. Numericamente, analisam-se os vórtices discretos, partículas fictícias portadoras de vorticidade, e seus movimentos no decorrer do tempo. A movimentação dos vórtices discretos é dividida na parcela advectiva e na parcela difusiva. O termo advecção é utilizado para se referir ao transporte de matéria pelo movimento de grande escala de correntes no fluido, enquanto o termo difusão refere-se ao movimento Browniano aleatório de partículas individuais no fluido. No contexto tanto da transferência de massa quanto de calor, o termo convecção é usado para referir-se à soma de transferências advectivas e difusivas.

O método de vórtices discretos utilizado para a solução das etapas difusiva e advectiva neste trabalho pertence ao genérico método de partículas. A abordagem desta metodologia é lagrangiana. Isto significa que uma propriedade do escoamento, no caso a vorticidade, é discretizada, e seu movimento é acompanhado individualmente e descrito em função do tempo. Desta forma, abandona-se a utilização de malhas e volumes de controle comumente presentes nos métodos eulerianos. Esta característica torna a análise numérica mais direcionada e conveniente, uma vez que somente a porção rotacional do escoamento é analisada. Além disso, as condições de contorno são automaticamente satisfeitas em regiões suficientemente distantes das superfícies sólidas.

Na Figura 3a é mostrada a formação de vórtices livres na extremidade da asa de uma aeronave em procedimento de decolagem. Durante este processo, os vórtices livres se deslocam sobre a pista e podem causar sérios problemas a aviões menores que estejam realizando processos de pouso ou de decolagem, por exemplo. Por esta razão, torna-se necessário estimar o tempo que estes vórtices permanecem sobre a pista.

Na Figura 3b está esquematizado o par contrarrotativo de vórtices presente no domínio fluido Ω , e, também, torna-se claro que em uma região suficientemente distante da passagem da aeronave (S_2), o ar tende à sua condição não perturbada. Este fato é aproveitado pela metodologia lagrangiana utilizada na simulação, que se preocupa em descrever apenas regiões próximas à perturbação, onde há vorticidade.

Figura 3. (a) Aeronave em procedimento de decolagem (b) par contrarrotativo de vórtices utilizado para representar a situação física apresentada em (a).



Fonte: (a) Chemtrailbrasil (2020); (b) Autoria própria.

1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

A contribuição principal deste trabalho de graduação é a implementação de um algoritmo do método do crescimento do raio do núcleo do vórtice modificado para resolver a etapa difusiva da equação do transporte da vorticidade. O novo algoritmo implementado tem como característica principal ser puramente determinístico e de rápida convergência, apresentando soluções mais robustas que métodos probabilísticos comumente usados, como o método do avanço randômico.

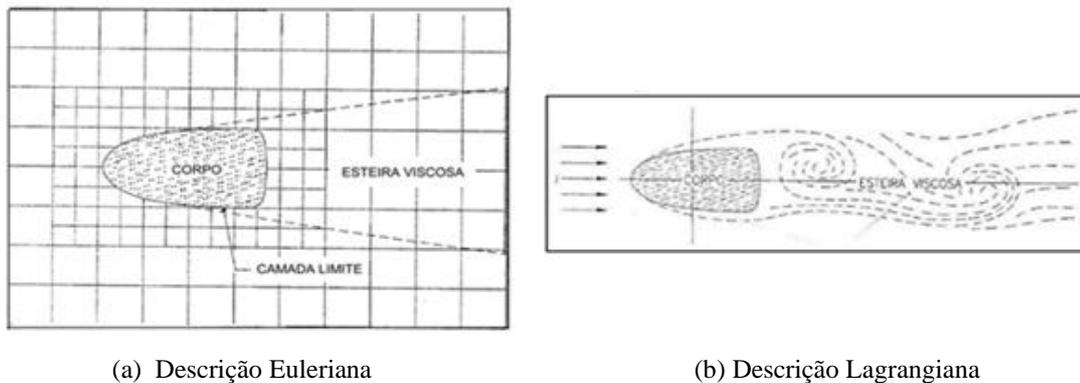
As vantagens e aplicações da metodologia determinística são cada vez mais proeminentes na literatura, como é mostrado nos capítulos seguintes. Por outro lado, a principal desvantagem é o esforço computacional elevado comparado a métodos estocásticos. Comumente, rotinas de coalescência de vórtices são usadas na simulação para contornar esta dificuldade e prover resultados fiéis no tempo desejado.

Além disso, a situação física analisada no presente trabalho encontra motivação nas operações de pouso e decolagem em grandes aeroportos. Durante tais operações, vórtices são desprendidos das pontas das asas das aeronaves e interagem com a pista do aeroporto, de forma a retardar operações subsequentes.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A simulação numérica de escoamentos tem sido basicamente realizada com a utilização de dois enfoques: a descrição euleriana, caracterizada pela necessidade de se criar uma malha de discretização do domínio fluido, e a descrição lagrangiana, que tem a característica de acompanhar cada partícula durante todo o tempo de simulação numérica. Na Figura 4 são apresentados esboços com características genéricas de escoamentos estudados usando a metodologia euleriana, evidenciando a utilização das malhas, e a lagrangiana, ressaltando o percurso percorrido por cada partícula individualmente.

Figura 4. Características gerais das discretizações por métodos eulerianos e lagrangianos.



Fonte: Hirata *et al.* (2003).

Os representantes tradicionais dos métodos eulerianos são o método de diferenças finitas, o método de elementos finitos e o método de volumes finitos. Em geral, nestes métodos há a discretização de todo o domínio fluido considerado, e podem surgir algumas complicações: existem dificuldades intrínsecas para a especificação das condições de contorno a grandes distâncias das fronteiras sólidas (onde termina a malha de discretização), existem esforços adicionais de pré-processamento para a geração da malha, e há, ainda, problemas de instabilidades numéricas para simulações com altos valores do número de Reynolds.

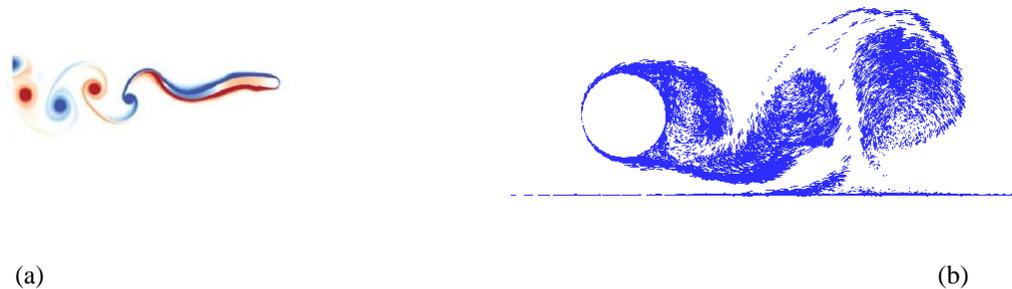
Os métodos que utilizam a descrição puramente lagrangiana têm como principal característica a discretização de uma propriedade do escoamento. O método de vórtices discretos é o principal representante desta classe de métodos numéricos e a propriedade que deve ser discretizada é a vorticidade. Uma nuvem de vórtices discretos é utilizada para simular numericamente a evolução no tempo do campo de vorticidades; esta evolução é

simulada através dos processos de advecção e de difusão viscosa da vorticidade.

Como as condições de contorno a grandes distâncias das fronteiras sólidas são automaticamente satisfeitas pela nuvem de vórtices discretos, conforme ela se desenvolve no tempo, a atenção é voltada, exclusivamente, para a vizinhança das superfícies sólidas onde a vorticidade é gerada e para a esteira viscosa desenvolvida a jusante de tais fronteiras. Tal característica contrapõe-se aos métodos eulerianos, visto que, nos mesmos, é problemático definir malhas para a esteira viscosa a jusante de certos escoamentos, por exemplo. Portanto, problemas com a presença de fronteiras sólidas móveis e/ou deformáveis são facilmente formulados e resolvidos utilizando-se o método de vórtices discretos.

Na Figura 5 apresentam-se, como exemplos, o estudo do desempenho hidrodinâmico de um competidor de natação (Figura 5a), e o estudo do comportamento aerodinâmico de um corpo submetido às condições de efeito solo (Figura 5b).

Figura 5. Estudos recentes envolvendo o método de vórtices discretos.



Fonte: Gazzola *et al.* (2011); Bimbato *et al.* (2013).

2.1 PROBLEMA PROPOSTO

Como mencionado no Capítulo 1, é de se esperar que nas próximas décadas haja tanto crescimento do tráfego aéreo quanto aumento no porte das aeronaves. Estes fatores em conjunto contribuem para o risco de acidentes dentro dos próprios aeroportos, pondo em xeque a almejada eficiência no controle do fluxo aéreo.

De acordo com Machol (1993), o fundamento do controle do tráfego aéreo é evitar que uma aeronave opere na esteira de outra que a antecede. Os problemas de segurança nas operações de pouso e decolagem ocorrem quando estas acontecem na esteira remanescente (sobre a pista) resultante da operação anterior de uma aeronave de grande porte.

Segundo Critchley & Foot (1991), acidentes deste tipo ocorrem comumente em baixíssimas altitudes (30 a 70 metros), principalmente porque as formações vorticosas da

esteira sofrem influência do solo.

Ainda, Zheng & Ash (1996) elucidam a proporção direta entre o tamanho e velocidade da aeronave em operação com a intensidade da circulação dos vórtices desprendidos no ar. Torna-se claro, então, que a situação de maior perigo é a operação de um avião pequeno após a operação de uma aeronave de grandes proporções.

Donaldson & Bilanin (1975) dedicam atenção especial ao problema como um todo, compilando pesquisas e resultados importantes alcançados até meados da década de 1980. Posteriormente, Zheng (1993) analisa a influência do número de Reynolds no desenvolvimento da esteira de vórtices junto ao solo utilizando o método de diferenças finitas.

2.2 MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS

O método de vórtices discretos se embasa na formulação das equações de Navier-Stokes em termos do campo de vorticidades. Um dos teoremas de Helmholtz (Batchelor, 1967; Sherman, 1990) evidencia a relação entre os vórtices discretos (elementos computacionais) e as partículas materiais de um fluido. A partir desta correspondência, submete-se os vórtices discretos a um processo advectivo com a mesma velocidade das partículas fluidas, caracterizando um método puramente lagrangiano. Seguindo a lei de Biot-Savart, pode-se determinar o campo de velocidades do escoamento integrando-se o seu campo de vorticidades.

Os primeiros estudos a respeito do método de vórtices discretos datam do início do século XX. Muitos destes continuam sendo citados até os dias atuais, como é o caso do importante trabalho de Rosenhead (1931). Seu trabalho constituiu-se na análise de instabilidades na camada-limite e de deformações em folhas de vórtices utilizando vórtices discretos potenciais. No decorrer dos anos, o método de Rosenhead (1931) não levou a soluções esperadas, mostrando uma movimentação caótica dos vórtices discretos após poucos incrementos de tempo da simulação. Apesar disso, Rosenhead (1931) iniciou um processo histórico de aprimoramento do método de vórtices discretos, e chegou a conclusões relevantes, especialmente a respeito da concentração de vórtices na esteira viscosa. Principalmente pela omissão dos efeitos difusivos no trabalho de Rosenhead (1931), Birkhoff & Fischer (1959) e Birkhoff (1962) o criticaram e observaram inconsistências na convergência de seu método.

Poucos anos depois, Batchelor (1967) estudou o equacionamento de problemas de escoamento aplicando a lei de Biot-Savart e os conseguiu descrever completamente através do

acompanhamento individual de vórtices discretos. Um legado valioso de seu trabalho é o enunciado da equação do transporte da vorticidade, a qual é discutida em maiores detalhes nos capítulos seguintes do presente trabalho.

Assim como Batchelor (1967), Sherman (1990), décadas depois, também aplicou um dos teoremas descritos em Helmholtz (1858) para criar a referência entre partículas materiais do fluido e partículas vorticosas discretizadas na simulação computacional.

Já em meados da década de 1970, Chorin (1973) desenvolveu uma metodologia primordial para lidar com a difusão viscosa, denominada método do avanço randômico. Em seu método, Chorin (1973) tratou a difusão da vorticidade através da geração de valores aleatórios para o deslocamento dos vórtices discretos, baseados em uma média e desvio padrão dependentes de propriedades básicas do fluido e do escoamento. Desta maneira, o gradiente de transporte das partículas é aproximado estatisticamente para a sua verdadeira distribuição.

Ao longo dos anos, a assertividade do método de Chorin (1973) foi considerável, e sua aplicação, extensa. Porém, o caráter estocástico do método submete-o a erros estatísticos, principalmente para quantidades relativamente pequenas de vórtices discretos. Posteriormente, Santiago *et al.* (2006) demonstrou que amostras de tamanho reduzido, aliadas à falta de interseção entre os núcleos dos vórtices discretos geram grandes oscilações nos resultados obtidos através do método do avanço randômico. Tal inferência verifica-se na estatística, uma vez que, quando há uma quantidade insuficiente de elementos para o caráter probabilístico dos resultados serem estabilizados, estes sofrem maior impacto da variabilidade.

Além do já citado método do avanço randômico de Chorin (1973), vale a pena citar outras técnicas aplicadas para resolver a parcela difusiva de problemas de escoamento na mesma época:

- O método do crescimento do raio do núcleo do vórtice de Leonard (1980);
- O método da mudança da intensidade da partícula de Degond & Mas-Gallic (1989);
- O método de Fishelov (1990);
- O método da velocidade de difusão de Ogami & Akamatsu (1991) e Kempka & Strickland (1993);
- O método da redistribuição de velocidade de Shankar & Dommelen (1996).

As características inerentes de cada técnica trazem vantagens e desvantagens dependendo do problema em questão. Algumas contam inclusive com o uso de malhas para

redistribuir a intensidade dos vórtices a cada iteração da simulação, como é o caso do método da mudança da intensidade da partícula.

No final do século XX, um dos pontos mais relevantes das pesquisas envolvendo o método de vórtices discretos era a convergência matemática de diferentes metodologias que caminhavam em paralelo, como retratado em Hald & Mauceri (1978), Hald (1979) e Beale & Majda (1981, 1982a, 1982b, 1985). Além disso, os trabalhos citados a seguir serviram como pilar para sustentar o método de vórtices discretos como hoje é conhecido.

Nagano *et al.* (1982) estudou a modelagem numérica da difusão viscosa e apresentou a técnica de crescimento do raio do núcleo do vórtice. Ao final da década, Park e Higuchi (1989) aplicaram-na e puderam verificar e validar os coeficientes de arrasto mensurados na literatura.

Na mesma década, Greengard & Rokhlin (1987) trabalhavam no método de expansão em multipolos. Este é um algoritmo que agiliza o cálculo de interações partícula-partícula em problemas de grande escala.

Inspirado pelo trabalho dos predecessores, Koumoutsakos (1993) aprofundou-se na aplicação do método de multipolos rápidos como alternativa à lei de Biot-Savart. Em relação aos esforços computacionais, o método de multipolos rápidos permite que o processador diminua consideravelmente a quantidade de operações. Ainda, Salmon *et al.* (1994) implementou eficientemente o método de multipolos rápidos.

Alcântara Pereira (1999) destaca que para maior precisão das simulações, é imprescindível que haja o desprendimento de um grande número de vórtices discretos. Porém, o tempo de CPU torna-se bastante oneroso. Por esta razão, uma tendência atual é a procura por algoritmos como a lei de Biot-Savart modificada de Alcântara Pereira (1999) e o método de expansão em multipolos de Greengard & Rokhlin (1987), além da expectativa de desenvolvimento de técnicas como a computação paralela. Nesta, diversas CPUs interconectadas permitem o trabalho conjunto de vários processadores na simulação, como discutido em Takeda *et al.* (1999).

Na virada do milênio, Kamemoto *et al.* (2000) discutem a busca por resultados cada vez mais realísticos nas simulações, e reúne um apanhado de informações sobre o método de vórtices discretos, elucidando a importância do desenvolvimento de modelos de turbulência para os métodos lagrangianos. Dando sequência, Alcântara Pereira *et al.* (2002) e Mustto (2004) exploraram a fundo os aspectos de turbulência em suas simulações.

2.3 MÉTODO DO CRESCIMENTO DO RAIOS DO NÚCLEO DO VÓRTICE MODIFICADO

A metodologia proposta por Leonard (1980), o método do crescimento do raio do núcleo do vórtice, foi contestada por Greengard (1985), que provou que a técnica não convergia para as equações de Navier-Stokes.

Em meados da década de 1990, Rossi (1996) trouxe vida nova ao método, aplicando uma lógica de crescimento dos vórtices discretos até um valor máximo, seguida da partição em novos vórtices discretos, cujos raios podem novamente se expandir. Após as correções de Rossi (1996), que garantiram a convergência do método, este ficou conhecido como método do crescimento do raio do núcleo do vórtice modificado (MCRNM). Este método determinístico para a solução da etapa difusiva da equação do transporte da vorticidade, desenvolvido originalmente por Leonard (1980) e corrigido por Rossi (1996), é o tema central do presente trabalho.

Dando procedência ao aperfeiçoamento do MCRNM, Shiels (1998) incorporou fronteiras sólidas no escoamento ao redor de um cilindro circular, expandindo a aplicação do método, até então utilizado somente para escoamentos sem fronteiras sólidas. No fim, descreveu o MCRNM como promissor, com acurácia comparável ao seu predecessor nas simulações de Shiels (1998): o PSE (*Particle strength exchange method*). Aquele mostrou-se em vantagem mais uma vez, já que além de acurácia semelhante, tem custo computacional consideravelmente menor que este.

Posteriormente, utilizando como referência a solução analítica puramente difusiva para o vórtice de Lamb, Santiago *et al.* (2006) realizou uma análise comparativa entre quatro métodos para a solução do problema puramente difusivo do vórtice pontual, sendo eles: o método do avanço randômico (MAR), o método da velocidade de difusão (MVD), o método da redistribuição da vorticidade (MRV) e o método do crescimento do raio do núcleo do vórtice modificado (MCRNM).

Para tal, determinou-se o campo de vorticidade utilizando a metodologia descrita por Lewis (1991), onde são traçados anéis concêntricos, sobre os quais é calculada a vorticidade de acordo com o número de vórtices encontrados em cada anel. Alternativamente, o campo de vorticidade também é calculado desingularizando-se os vórtices e aplicando o princípio da superposição de efeitos.

Santiago *et al.* (2006) constatou que o MCRNM e o MRV são os que se mostram mais acurados de um modo geral, além de não apresentarem o problema de convergência resultante

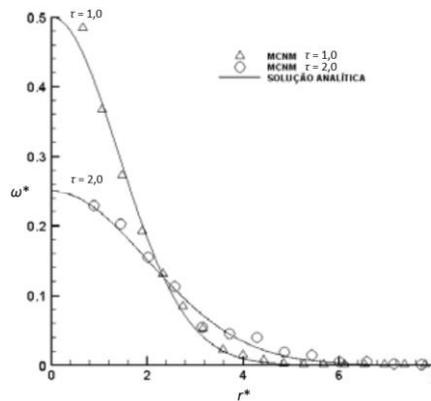
da baixa ocorrência de interseção entre os núcleos dos vórtices discretos. No entanto, o MCRNM possui erros médios de até uma ordem de grandeza menores que o MRV, e é muito mais simples de ser implementado. Nota-se, também, que o MAR apresenta as maiores oscilações nos resultados, tornando inviável sua aplicação em simulações de grande precisão sem que haja um mecanismo de introdução de vórtices na região rotacional, reduzindo as flutuações nos resultados obtidos.

Em contrapartida, quando comparado ao MAR, o contador de operações do MCRNM é exponencialmente elevado com a repartição dos vórtices discretos, enquanto o daquele sofre uma variação direta com o número de partículas de vorticidade. O crescimento exponencial do número de operações do MCRNM gera custos computacionais relativamente altos, principalmente quando há números de Reynolds baixos envolvidos. Entretanto, o tempo de CPU pode ser drasticamente reduzido utilizando um algoritmo de aglomeração de vórtices discretos, como o desenvolvido por Rossi (1997) e o método de multipolos rápidos aplicado por Takeda *et al.* (1997), adaptando o código criado por Van Dommelen *et al.* (1989).

Segundo Santiago *et al.* (2006), um fator que também deve ser levado em conta na comparação quanto ao custo computacional, é uma especificidade do problema puramente difusivo do vórtice discreto. Neste tipo de problema, surgem vórtices discretos coincidentes ao se utilizar o MCRNM, que acabam elevando o contador de operações e tornando-o mais caro. Porém, em problemas de escoamento com a aplicação de um algoritmo de aglomeração dos vórtices discretos, produz-se, por fim, a modelagem da região rotacional do escoamento com menos vórtices discretos do que a quantidade esperada inicialmente, reduzindo, então, o tempo de CPU.

A Figura 6 mostra a solução analítica do problema do vórtice pontual puramente difusivo comparada à solução do MCRNM utilizando o método de anéis para a obtenção do campo de vorticidades. Santiago *et al.* (2006) constatou, ainda, que a determinação do campo de vorticidades através do método da superposição de efeitos é mais precisa que a metodologia de Lewis (1991). Ressalta-se que a nomenclatura “MCNM” utilizada por Santiago *et al.* (2006) na Figura 6, corresponde ao já exposto MCRNM.

Figura 6. Problema do vórtice pontual resolvido para duas constantes de tempo distintas pelo MCRNM, utilizando-se o método dos anéis de Lewis (1991).

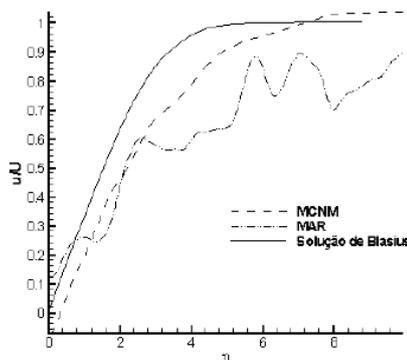


Fonte: Santiago *et al.* (2006).

Santiago *et al.* (2006) atentou-se, também, ao problema da camada limite de Blasius sobre uma placa plana, sendo um problema advectivo/difusivo com solução exata, para comparar o MCRNM ao MAR. Segundo o autor, tal problema pode ser modelado pelo método de vórtices discretos como o resultado de um escoamento uniforme U que incide impulsivamente sobre a placa em $t = 0$ e que resulta na geração de uma folha de vorticidade na placa de intensidade $\gamma(s_i) = U$ em $0 \leq x \leq 1$. Esta vorticidade gerada na placa se difunde para o meio fluido e sofre, em seguida, advecção e difusão, dando origem a uma nuvem de vórtices que representa a região rotacional do escoamento.

O perfil de velocidades é calculado e comparado à solução de Blasius para camada limite. Os resultados encontrados permitem uma comparação efetiva entre a acurácia do MAR e do MCRNM, conforme mostrado na Figura 7.

Figura 7. Camada limite: perfil de velocidade.



Fonte: Santiago *et al.* (2006).

A Figura 7, gerada para $Re_x \equiv Ux/\nu = 50000$, sendo $\eta \equiv y(U/(vx))^{1/2}$, permite que se constate a melhor qualidade dos resultados obtidos pelo MCRNM em comparação ao MAR. A grande oscilação observada nos resultados obtidos com o MAR é fruto do caráter estocástico do método e à relativa falta de interseção entre os núcleos dos vórtices discretos. Por outro lado, o MCRNM não possui essas deficiências e sua curva de u/U é muito mais suave.

Por fim, Santiago *et al.* (2006) ressalta que a aplicação efetiva do MCRNM ao método de vórtices requer ainda estudo e pesquisa adicionais, sobretudo no que se refere ao já citado problema do aumento indiscriminado do número de vórtices discretos. Porém, é inegável a sua superioridade em acurácia, o que garante a este método a permanência em linhas de pesquisa que buscam aprimorar os resultados de suas simulações com o método de vórtices discretos.

Recentemente, Huang *et al.* (2011) propôs modificações no MCRNM para aumentar a precisão do método. Dentre elas, a substituição da solução aproximada de Koumoutsakos (1994) para a vizinhança de fronteiras sólidas pela solução do método dos elementos do contorno (*Boundary-element-method*), a incorporação de um novo algoritmo para lidar com os vórtices discretos muito pequenos, e uma nova perspectiva para difundir a circulação de vórtices discretos muito próximos a corpos com curvaturas acentuadas.

Huang *et al.* (2011) constatou que a aplicação do MCRNM no problema do escoamento ao redor de um cilindro circular inicialmente impulsionado mostra, a princípio, resultados condizentes e precisos. Porém, no decorrer da simulação, perde-se acurácia gradativamente. Há duas possíveis razões para a ocorrência deste problema. A primeira envolve a geração de vórtices discretos de intensidade extremamente fraca após sucessivas repartições, os quais afetam pouco a simulação do escoamento e são deletados da simulação por terem atingido uma intensidade limite especificada previamente. Se estes vórtices discretos não fossem deletados, o número total de vórtices discretos cresceria de maneira inviável para qualquer simulação. Entretanto, a quantidade de vórtices discretos retirados do domínio fluido aumenta com o tempo, e gera, eventualmente, erros de proporções inaceitáveis.

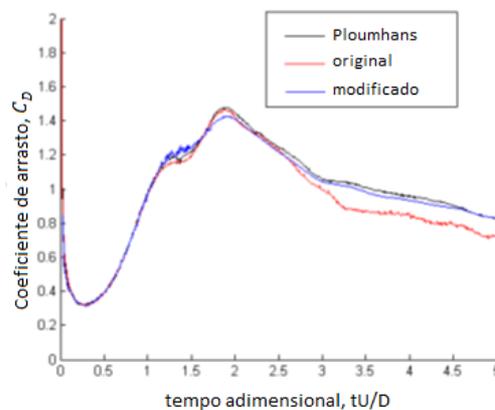
A segunda razão deve-se ao emprego de painéis lineares, os quais ignoram a curvatura local da fronteira sólida. Deste modo, no decorrer da simulação, a advecção das partículas que representam a vorticidade as move em direção à fronteira sólida. Uma vez próximas, a extremidade gaussiana da partícula estende-se para o interior do corpo sólido, causando erros significativos.

A solução encontrada por Huang *et al.* (2011) para a primeira razão do problema foi distribuir a circulação de qualquer vórtice discreto extremamente fraco igualmente entre seus vizinhos antes de apagá-lo. Para tal, selecionam-se vórtices adjacentes por mérito de proximidade ao vórtice a ser retirado do domínio fluido, e pela semelhança do sentido de rotação.

Para a segunda razão do problema, introduziram-se, em regiões específicas externas ao corpo sólido, as chamadas partículas de parede. No primeiro trabalho de Huang *et al.* (2009), estas partículas eram dispostas ao longo da superfície curvada, e cada painel distribuía a circulação para dez vórtices discretos adjacentes, sendo cinco deles tratados como colineares. Esta aproximação, no entanto, gera erros significativos, especialmente quando a curvatura do corpo em questão é acentuada, como, por exemplo, o bordo de fuga de um aerofólio. Portanto, em seu trabalho mais recente, Huang *et al.* (2011) utiliza um artifício para contornar este problema, e apresenta resultados positivos.

A Figura 8 mostra o coeficiente de arrasto do escoamento ao redor do cilindro circular inicialmente impulsionado com $Re_D = UD/\nu = 3000$. O resultado base na literatura para a comparação realizada, cuja simulação utiliza o PSE (*Particle strength exchange*) modificado, pertence a Ploumhans *et al.* (2000). Huang *et al.* (2011) concluem, portanto, que com suas modificações houve uma melhora significativa na acurácia do MCRNM, tanto para lidar com os vórtices discretos de intensidade extremamente fraca, quanto para modelar as propriedades do escoamento ao redor de corpos com curvaturas acentuadas. Deste modo, o método passa a prever o valor numérico do coeficiente de arrasto e do coeficiente de sustentação de forma ainda mais confiável.

Figura 8. Comparação entre os coeficientes de arrasto originais e modificados.

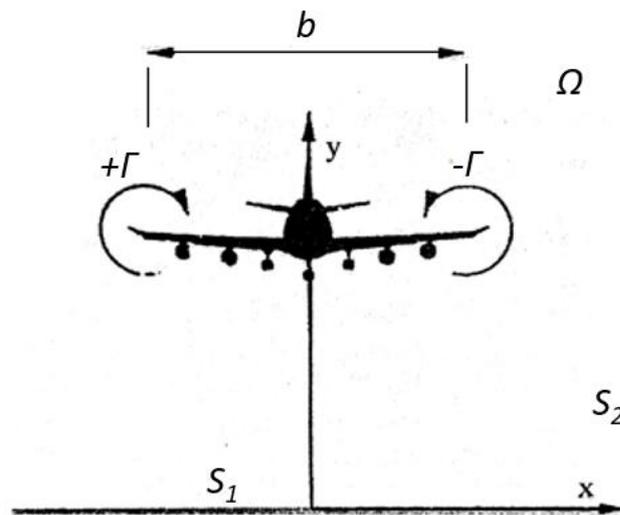


Fonte: Huang *et al.* (2011), traduzido pelo autor.

3 METODOLOGIA

A Figura 9 ilustra o problema estudado neste trabalho. Nesta situação, a interação entre as pontas de asa da aeronave e o fluido é representada numericamente por vórtices discretos, mantendo as propriedades físicas como a circulação e o momento. A partir dessa ilustração, serão apresentadas as hipóteses simplificadoras utilizadas, bem como o equacionamento necessário para resolver o problema.

Figura 9. Esboço do problema estudado.



Fonte: Adaptado de Hirata *et al.* (2002).

3.1 SIMPLIFICAÇÕES ADOTADAS E EQUAÇÕES GOVERNANTES

Este problema será descrito como um escoamento bidimensional, incompressível, e em regime não permanente de um fluido newtoniano com propriedades constantes. O problema será resolvido numericamente através do método de vórtices discretos.

Resumindo, para simplificá-lo, adotam-se as seguintes hipóteses:

- Região fluida bidimensional;
- Fluido newtoniano;
- As propriedades do fluido permanecem constantes;
- Escoamento incompressível;
- Escoamento laminar.

É relevante observar a última hipótese, de escoamento laminar. Apesar de o número de Reynolds adotado nas simulações deste trabalho ser alto, não é utilizada nenhuma modelagem de turbulência. Assim, o escoamento está sendo considerado laminar.

Atentando-se, agora, ao equacionamento, evidencia-se a formulação da equação diferencial da continuidade após a consideração da hipótese de escoamento incompressível, a qual resulta na equação 1.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

Ressalta-se, também, que, sob as hipóteses simplificadoras, as equações de Navier-Stokes em forma vetorial podem se reduzir à equação 2.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{u} \quad (2)$$

Assim, as equações que governam o fenômeno estudado representam o princípio de conservação da massa (PCM: equação 1) e o princípio de conservação da quantidade de movimento linear (PCQML: equação 2). A hipótese de propriedades constantes do fluido remete à condição de escoamento isotérmico, eliminando, então, o princípio de conservação da energia (PCE) do sistema de equações a ser resolvido.

Para resolver o sistema de equações, devem ser introduzidas três condições de contorno, sendo elas: (a) a condição de impenetrabilidade em S_1 ,

$$u_n - v_n = 0 \quad (3)$$

sendo u_n o componente normal da velocidade da partícula fluida e v_n o componente normal da velocidade da fronteira sólida (S_1); (b) a condição de não deslizamento (ou não escorregamento) em S_1 ,

$$u_\tau - v_\tau = 0 \quad (4)$$

sendo u_τ o componente tangencial da velocidade da partícula fluida e v_τ o componente tangencial da velocidade da fronteira sólida (S_1); e (c) a condição de escoamento não perturbado em S_2 ,

$$|\vec{u}| \rightarrow 0 \quad (5)$$

3.2 ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Para facilitar a comparação dos resultados do programa computacional com os dados experimentais da literatura, e reduzir a quantidade de variáveis envolvidas no fenômeno físico estudado, adota-se a técnica da adimensionalização. Para tal, definem-se as grandezas características do problema, sendo elas:

- b : comprimento característico – distância entre os centros dos vórtices de ponta de asa;
- $u^* = \Gamma/b$: velocidade característica;
- $t^* = b^2/\Gamma$: escala de tempo adimensionalizada;
- $Re = \Gamma/\nu$: número de Reynolds, sendo ν a viscosidade cinemática do fluido.

A partir destas grandezas, todas as outras envolvidas no problema podem ser facilmente adimensionalizadas. Em consequência disto, o sistema de equações adimensionalizadas que define o problema toma a seguinte forma:

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{u}^* = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{u}^* = -\vec{\nabla}^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{2*} \vec{u}^* \quad (7)$$

Por outro lado, as condições de contorno adimensionalizadas são:

$$u_n^* - v_n^* = 0 \quad (8)$$

$$u_\tau^* - v_\tau^* = 0 \quad (9)$$

$$|\vec{u}^*| \rightarrow 0 \quad (10)$$

3.3 O MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS APLICADO AO PROBLEMA

Neste trabalho, o par contrarrotativo de vórtices de ponta de asa é representado por um

número Z de vórtices discretos de Lamb (duas nuvens de vórtices discretos, cada uma com $Z/2$ vórtices discretos). Cada vórtice discreto da nuvem possui uma distribuição gaussiana de vorticidade no seu interior e, como há uma indução mútua de velocidade entre os vórtices das duas nuvens, o par contrarrotativo de vórtices começa a se deslocar no meio fluido, também sofrendo influência da fronteira sólida, que representa a pista do aeroporto.

A simulação numérica consiste, portanto, no cálculo do deslocamento das duas estruturas vorticosas utilizando-se o método de vórtices discretos. Cada vórtice discreto i utilizado para representar as estruturas vorticosas é composto por um vetor posição x_i , pela intensidade do vórtice Γ_i , e por um raio do núcleo σ_i . O campo de vorticidades bidimensional é representado na sua forma discreta por um somatório de elementos discretos de vorticidade:

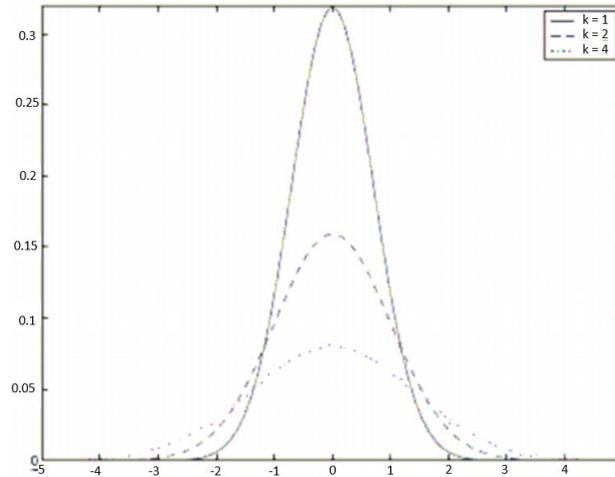
$$\omega(x, t) = \sum_{i=1}^Z \Gamma_i(t) \zeta_{\sigma_i}(x - x_i(t)) \quad (11)$$

No interior do núcleo de cada vórtice discreto há uma distribuição de vorticidade dada por ζ_{σ_i} , comumente chamada de função corte do raio do núcleo. Esta função corte é frequentemente representada por uma distribuição gaussiana e o tamanho do raio dos núcleos é uniforme ($\sigma_i = \sigma$), resultando, para problemas bidimensionais em:

$$\zeta_{\sigma}(x) = \frac{1}{k\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|x|}{k\sigma^2}\right) \quad (12)$$

sendo que a constante k determina o tamanho do corte e é escolhida por diferentes autores na literatura como 1, 2 ou 4. As três versões de distribuições gaussianas de vorticidade no interior do núcleo de vórtices discretos estão apresentadas na Figura 10. Quanto maior o valor de k , mais precisa é a representação do campo de vorticidades, porém, a simulação também se torna mais onerosa em termos de tempo computacional. Como o MCRNM já é dispendioso, será adotado $k = 1$ neste trabalho.

Figura 10. Distribuições gaussianas de vorticidade no interior do núcleo de vórtices discretos.



Fonte: Barba *et al.* (2004).

3.4 A EQUAÇÃO DO TRANSPORTE DA VORTICIDADE

Para se obter a equação do transporte da vorticidade, toma-se o rotacional da equação do princípio de conservação da quantidade de movimento linear (equação 4) e, com o auxílio da equação da continuidade (equação 3), chega-se à equação desenvolvida por Batchelor (1967). Sua forma simplificada pela adoção da hipótese de escoamento bidimensional é expressa pela equação 13. Ressalta-se que, a partir deste ponto, o símbolo caracterizante das grandezas adimensionais será omitido nas equações apresentadas por comodidade de digitação.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (13)$$

Os termos da equação do transporte da vorticidade, da esquerda para a direita, representam: a taxa de variação local da vorticidade, a taxa de variação convectiva da vorticidade, e a taxa de variação da difusão da vorticidade.

3.5 O ALGORITMO DE SEPARAÇÃO DA PARTE VISCOSA

Para simplificar a implementação numérica da equação 13, Chorin (1973) propôs o algoritmo de separação da parte viscosa da equação do transporte da vorticidade. Este algoritmo parte do pressuposto de que os efeitos da advecção da vorticidade podem ser

calculados independentemente dos efeitos da difusão desta grandeza, mas, considerando ambos no mesmo incremento discreto de tempo. Deste modo, a equação da advecção da vorticidade e a equação da difusão da vorticidade na forma bidimensional tomam, respectivamente, as seguintes formas:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \omega = \frac{D\omega}{Dt} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (15)$$

Observa-se que, para intervalos de tempo muito pequenos, as equações separadas pelo algoritmo recaem na própria equação do transporte da vorticidade. Nota-se, também, que para valores altos de Reynolds, a vorticidade gerada sobre a fronteira sólida sofre efeitos muito maiores da advecção do que da difusão, permanecendo, pois, confinada na camada limite e, posteriormente, arrastada para a esteira viscosa. É interessante notar que a derivada material, D/Dt , é característica da descrição lagrangiana, na qual as partículas de vorticidade (vórtices discretos de Lamb) são acompanhadas individualmente durante todo o tempo de simulação numérica.

3.6 A LEI DE BIOT-SAVART

Como a solução do campo de vorticidades do escoamento é obtida com mais facilidade do que a do campo de velocidades, pretende-se transportar a solução dos vórtices discretos para uma solução que descreva o comportamento das partículas materiais do fluido ao longo do tempo. Segundo Katz & Plotkin (1991), para a determinação do campo de velocidades \vec{u} a partir de uma distribuição de vorticidade conhecida, toma-se um vetor \vec{A} de modo que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (16)$$

Em seguida, escreve-se este vetor como uma função de $\vec{\omega}$, e, por meio do teorema de Green, conforme apresentado por Karamcheti (1967), obtém-se a solução da equação na seguinte forma:

$$\vec{u} = \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{\omega}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|} \right) dV \quad (17)$$

O vetor \vec{A} é avaliado no ponto P, que está a uma distância \vec{r}_1 da origem e é o resultado da integração da vorticidade no ponto \vec{r}_0 . Resolvendo-se a equação 17, obtém-se a expressão, denominada lei de Biot-Savart para o campo de velocidades incompressível, induzido pela vorticidade concentrada em uma região finita, de volume V , onde a vorticidade está distribuída. Para o escoamento bidimensional, tem-se:

$$\vec{u} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{\omega} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^2} d\Omega \quad (18)$$

sendo $|\vec{r}_0 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$, em que o índice 1 denota o ponto onde se deseja determinar a velocidade induzida pelo campo de vorticidades localizado em \vec{r}_0 , $|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|$ é a distância entre os pontos, e Ω é o domínio fluido.

Nas seções seguintes, determina-se o campo de velocidades com auxílio da lei de Biot-Savart e procede-se à solução das equações da advecção e da difusão da vorticidade.

3.7 CÁLCULO DO CAMPO DE VELOCIDADES DO ESCOAMENTO

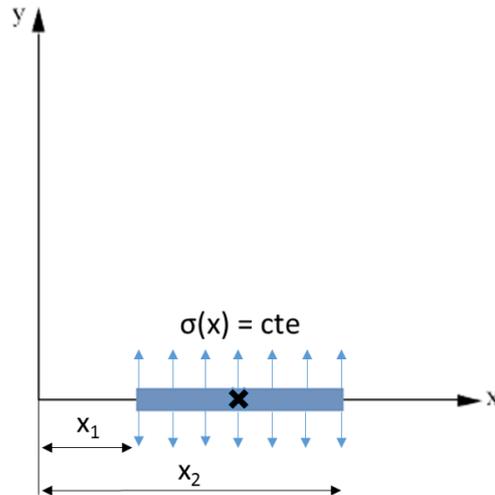
3.7.1 Contribuição da fronteira sólida: o método de painéis

Para resolver a etapa advectiva da equação do transporte da vorticidade, se faz necessário determinar o campo de velocidades do escoamento na posição ocupada por cada um dos vórtices discretos de Lamb utilizados para discretizar o campo de vorticidades. No caso do presente trabalho, o campo de velocidades do escoamento sofre a influência de duas contribuições, a saber: (i) a contribuição da fronteira sólida; (ii) a contribuição da nuvem de vórtices discretos.

O método de painéis de Katz & Plotkin (1991) é utilizado para representar corpos de forma conhecida através de painéis planos ou curvos, distribuindo singularidades sobre estes, de forma a garantir a validade das condições de contorno sobre cada ponto de controle de cada painel.

Estas singularidades podem apresentar densidade concentrada, constante, ou linear ao longo de cada painel. Neste trabalho, serão utilizados painéis planos com distribuição de singularidades do tipo fontes com densidade constante (ou uniforme), como mostra a Figura 11 (Katz & Plotkin, 1991).

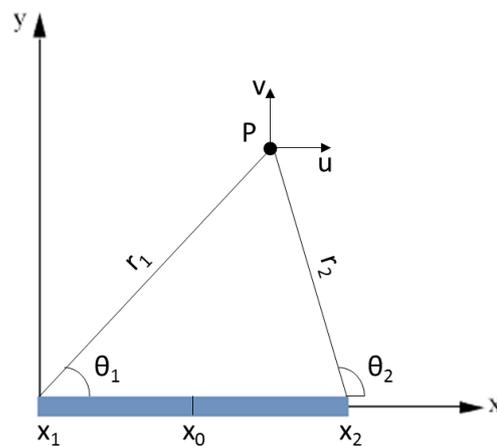
Figura 11. Distribuição de singularidades de densidade constante ao longo de um painel plano.



Fonte: Autoria própria, baseado em Katz & Plotkin (1991).

Foca-se a análise, agora, na influência da distribuição de fontes de intensidade $\sigma(x)$ entre x_1 e x_2 em um ponto $P(x,y)$, como mostrado na Figura 12. A influência desta distribuição no ponto $P(x,y)$ é a integral das influências de todos os elementos pontuais (Katz & Plotkin, 1991).

Figura 12. Velocidade induzida no ponto $P(x,y)$ por uma distribuição de fontes com densidade $\sigma(x)$ e comprimento $x_2 - x_1$.



Fonte: Katz & Plotkin (1991).

Desta forma, as componentes da velocidade induzida nas direções x e y no ponto $P(x,y)$ pela distribuição de fontes são:

$$u = \frac{\sigma(x)}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} dx_0 \quad (19)$$

$$v = \frac{\sigma(x)}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} dx_0 \quad (20)$$

Resolvendo as integrais acima, segundo Katz & Plotkin (1991):

$$u = \frac{\sigma(x)}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (21)$$

$$v = \frac{\sigma(x)}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \quad (22)$$

sendo:

$$r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + y^2}, \quad i = 1, 2 \quad (23)$$

$$\theta_i = \text{tg}^{-1} \left(\frac{y}{x-x_i} \right), \quad i = 1, 2 \quad (24)$$

Além disso, Katz & Plotkin (1991) avaliam ainda a autoindução de velocidade de um painel com distribuição de singularidades de intensidade $\sigma(x)$ e comprimento $(x_1 - x_2)$ sobre ele mesmo. Como resposta, encontram que a autoindução existe apenas nas redondezas do ponto x_0 (vide Figura 12) e tem módulo $0,5 \cdot \sigma(x)$.

A incógnita do problema torna-se, portanto, a densidade de fontes a ser distribuída sobre os painéis de forma a garantir a condição de impenetrabilidade nos pontos de controle dos painéis (ponto central).

Para encontrar a resposta, avalia-se a velocidade normal induzida em cada painel, por cada distribuição de fontes, e por cada vórtice discreto no domínio fluido. Quando a velocidade normal induzida nos painéis é zero, ou muito próxima a este valor, pode-se dizer que a condição de impenetrabilidade é satisfeita.

Este problema pode ser escrito como um sistema linear na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & K_{12}^S & K_{13}^S & \dots & K_{1m}^S \\ k_{21}^S & 0,5 & k_{23}^S & \dots & K_{2m}^S \\ K_{31}^S & K_{32}^S & 0,5 & \dots & K_{3m}^S \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{m1}^S & K_{m2}^S & K_{m3}^S & \dots & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RHSS_1 \\ RHSS_2 \\ RHSS_3 \\ \vdots \\ RHSS_m \end{pmatrix} \quad (25)$$

sendo:

$K_{i,j}^S$: é um elemento da matriz de influência de fontes que representa a velocidade normal induzida pelo painel j no ponto de controle do painel i , quando se tem uma distribuição de fontes com densidade uniforme e unitária sobre o painel j . Note que o valor 0,5 representa a autoindução de um painel e m representa o número de painéis planos utilizados para discretizar a pista;

σ_j : é a incógnita do problema e representa a distribuição uniforme de fontes e sumidouros (fontes com distribuição de intensidade negativa) sobre o painel j ;

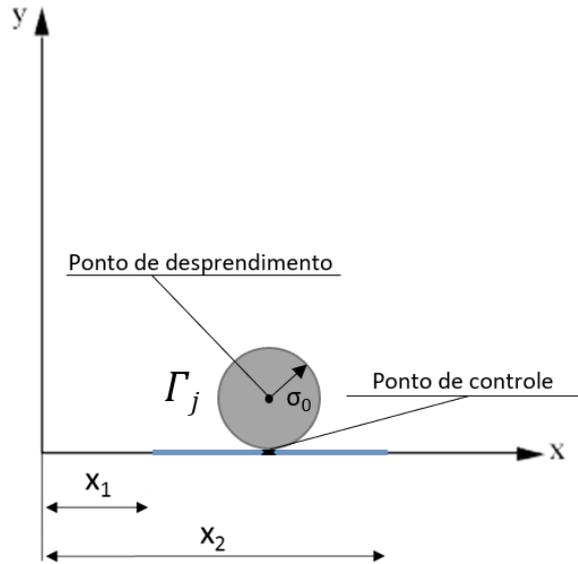
$RHSS_i$: representa a velocidade normal total induzida no ponto de controle do painel i , devido à contribuição da nuvem de vórtices discretos de Lamb, sendo $RHSS_i$ nulo no início das simulações.

3.7.2 Geração de vorticidade

Por outro lado, deve-se também garantir a condição de não-escorregamento, ou seja, a velocidade tangencial na superfície da pista, discretizada por m painéis, deve ser nula. Para tanto, vórtices discretos são gerados no ponto de desprendimento dos painéis (ponto central deslocado de acordo com uma normal que passa pelo ponto de controle do painel que dá origem ao vórtice discreto, como mostrado na Figura 13) de forma a anular a componente tangencial da velocidade no ponto de controle dos painéis, como enuncia Bimbato (2012).

Analogamente à matriz de influência de fontes, a matriz de influência de vórtices tem como incógnita a intensidade dos vórtices discretos gerados para anular a velocidade tangencial induzida sobre o ponto de controle de cada painel utilizado para discretizar a pista.

Figura 13. Geometria de um painel plano e do vórtice discreto gerado em seu ponto de desprendimento.



Fonte: Autoria própria.

Portanto, a matriz de influência de vórtices é escrita como se segue:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^V & K_{12}^V & K_{13}^V & \cdots & K_{1m}^V \\ K_{21}^V & K_{22}^V & K_{23}^V & \cdots & K_{2m}^V \\ K_{31}^V & K_{32}^V & K_{33}^V & \cdots & K_{3m}^V \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ K_{m1}^V & K_{m2}^V & K_{m3}^V & \cdots & K_{mm}^V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \vdots \\ \Gamma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RHSV_1 \\ RHSV_2 \\ RHSV_3 \\ \vdots \\ RHSV_m \end{pmatrix} \quad (26)$$

sendo:

$K_{i,j}^V$: é um elemento da matriz de influência de vórtices que representa a velocidade tangencial induzida no ponto de controle do painel i por um vórtice discreto localizado no ponto de desprendimento j , considerando que tal vórtice discreto possua intensidade unitária.

Γ_j : é a incógnita do problema e representa a intensidade do vórtice discreto localizado no ponto de desprendimento j ;

$RHSV_i$: representa a velocidade tangencial total induzida no ponto de controle do painel i , devido à contribuição da nuvem de vórtices discretos de Lamb, sendo $RHSV_i$ nulo no início das simulações.

Os componentes da velocidade induzida pelo modelo do vórtice de Lamb, que apresenta uma distribuição gaussiana da vorticidade no interior do seu núcleo (ao longo de seu raio), são dados por:

$$u_{ij} = \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{y_i - y_j}{r_{ij}^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r_{ij}^2}{\sigma_j^2}\right) \right] \quad (27)$$

$$v_{ij} = \frac{-\Gamma_j}{2\pi} \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r_{ij}^2}{\sigma_j^2}\right) \right] \quad (28)$$

sendo u_{ij} e v_{ij} as componentes da velocidade induzida pelo vórtice discreto localizado no ponto de desprendimento j , no ponto de controle do painel i e r_{ij} é a distância entre tais pontos.

Desta forma, como já exposto, convém-se determinar a intensidade da circulação do vórtice discreto no ponto de desprendimento que anule a componente tangencial da velocidade induzida no ponto de controle do painel, garantindo a condição de não-escorregamento.

No presente trabalho resolve-se os dois sistemas lineares simultaneamente para determinar a densidade de fontes e a intensidade dos vórtices discretos. Contudo, um fator que dificulta esta abordagem é que, quando vórtices discretos são gerados para garantir a condição de não-escorregamento, a condição de impenetrabilidade é desfeita devido à indução de novas velocidades nos pontos de controle dos painéis; além disso, ao se determinar uma nova distribuição de fontes para garantir a condição de impenetrabilidade, perde-se a condição de não-escorregamento outrora satisfeita. Assim, a determinação da intensidade do conjunto de fontes e vórtices, respectivamente, distribuídos e desprendidos, é obtida através do processo iterativo desenvolvido por Bimbato (2012) e validado em diversas aplicações (Bimbato *et al.*, 2018; Oliveira *et al.*, 2020; Alcântara Pereira *et al.*, 2020; Bimbato *et al.*, 2020).

Uma observação importante é que a introdução de fontes e sumidouros no problema é equivalente à adição ou subtração de vazão no escoamento. Por este motivo, é necessário impor a conservação de massa na solução do sistema de equações de fontes, acrescentando-se a equação 29 na linha $m+1$ do referido sistema de equações.

$$\sum_{j=1}^m \sigma_j \cdot \Delta s_j = 0 \quad (29)$$

sendo σ_j a distribuição de fontes/sumidouros sobre o painel j , e Δs_j o comprimento do painel

j , retratado nas figuras desta seção como x_2-x_1

Matematicamente, o sistema torna-se sobredeterminado e é necessário utilizar artifícios como o método dos mínimos quadrados e o pivoteamento parcial de Gauss para se obter a solução da distribuição de fontes.

O mesmo ocorre para a matriz de vórtices, visto que a geração de vórtices discretos desestabiliza a conservação de circulação do escoamento. Como contrapeso, impõe-se a conservação de circulação na matriz de vórtices e repete-se o procedimento análogo à matriz de fontes.

$$\sum_{i=1}^m \Gamma_i = 0 \quad (30)$$

sendo Γ_i a intensidade da circulação do vórtice gerado no ponto de desprendimento do painel i .

Isto significa que determinados vórtices discretos são gerados com intensidade positiva, e outros, com intensidade negativa, garantindo que o somatório final de todas as intensidades seja nulo.

Portanto, com a condição de impenetrabilidade e a condição de não-escorregamento simultaneamente satisfeitas, a condição de aderência é automaticamente atendida, bem como a conservação da massa e da circulação do problema.

3.8 CONTRIBUIÇÃO DA NUVEM DE VÓRTICES DISCRETOS

O método de vórtices discretos discretiza a vorticidade do escoamento bidimensional a partir de elementos chamados vórtices discretos. Um vórtice discreto pode ser definido como uma região finita no plano, que possui vorticidade não-nula e que é circundado por um escoamento irrotacional, como enunciado em Saffman (1992)

Para a análise da contribuição da nuvem de vórtices discretos neste trabalho, é utilizado o modelo do vórtice de Lamb. O vórtice de Lamb, segue uma distribuição normal da vorticidade ao longo do comprimento radial e representa a solução exata da equação da difusão para escoamentos bidimensionais.

No modelo do vórtice de Lamb, a velocidade tangencial induzida é finita para qualquer distância radial (r) entre o centro do vórtice e o ponto do escoamento onde a velocidade induzida é calculada, e é dada, de acordo com a lei de Biot-Savart, por:

$$u_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \right] \quad (31)$$

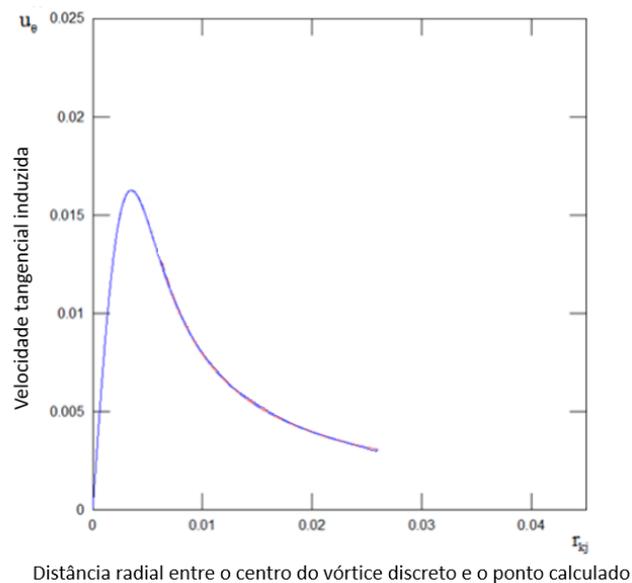
sendo:

- $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ e (x,y) o ponto onde se deseja determinar a velocidade induzida pelo campo de vorticidades concentrado em (x_0,y_0) ;
- σ o raio do núcleo do vórtice discreto, expresso por $\sigma = \sqrt{4\nu t}$;
- Γ a intensidade do vórtice discreto de Lamb.

Em coordenadas cartesianas, o campo de velocidades é representado pelas equações 27 e 28, sendo que o vórtice discreto j induz velocidade no vórtice discreto i presente no domínio fluido, e r_{ij} é a distância radial entre os vórtices discretos.

A Figura 14 mostra a curva do comportamento da velocidade tangencial induzida em função da distância radial entre o vórtice de Lamb e o ponto de cálculo no escoamento.

Figura 14. Velocidade tangencial induzida em função do raio para o vórtice de Lamb.



Fonte: Adaptado de Bimbato (2012).

3.9 A SOLUÇÃO DO PROBLEMA ADVECTIVO

Estudando a advecção da vorticidade de forma independente da difusão, tem-se um escoamento considerado ideal, e o vórtice discreto comporta-se como uma partícula material de fluido. Deste modo, a solução do problema consiste em resolver a equação da trajetória do elemento de vorticidade:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}, t) \quad (32)$$

Esta equação pode ser resolvida numericamente por diversos esquemas de avanço, dentre eles o método de primeira ordem de Euler (Ferziger, 1981). A advecção de um vórtice discreto da nuvem através de tal esquema é dada pelas equações 33 e 34, sendo u_{t_k} e v_{t_k} as componentes da velocidade total induzida no vórtice discreto k , já calculadas nas seções anteriores (veja as Equações 21, 22, 23, 24, 27 e 28).

$$x_k(t + \Delta t) = \Delta x_{conv_k} = x_k(t) + u_{t_k}(t) \cdot \Delta t \quad (33)$$

$$y_k(t + \Delta t) = \Delta y_{conv_k} = y_k(t) + v_{t_k}(t) \cdot \Delta t \quad (34)$$

3.10 A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DIFUSIVO: O MÉTODO DO CRESCIMENTO DO RAIOS DO NÚCLEO DO VÓRTICE MODIFICADO (MCRNM)

Os métodos de crescimento do núcleo consistem no uso de uma distribuição gaussiana ao redor de partículas discretas, mantendo a circulação constante. Baseiam-se, também, na observação de que expressões gaussianas são soluções explícitas para as equações do calor e para a linearidade da equação da difusão.

Segundo Papaioannou (2001), o campo de vorticidades pode ser representado por uma superposição de campos elementares de vorticidade gaussiana. Quando cada um destes campos satisfizer a equação da difusão, o mesmo acontecerá com o campo de vorticidade total.

No MCRNM, a taxa de crescimento do raio do núcleo é determinada por:

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = \nu \quad (35)$$

No problema em questão, a equação anterior toma, ainda, a seguinte forma adimensionalizada:

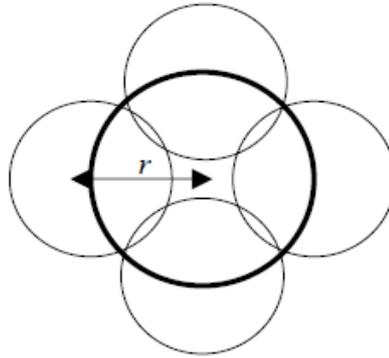
$$\sigma_i(t + \Delta t) = \sqrt{\sigma_i^2(t) + \frac{\Delta t}{Re}} \quad (36)$$

sendo Δt o incremento de tempo adimensional e i um vórtice discreto da nuvem.

Como Greengard (1985) provou que esta metodologia não convergia para a solução das equações de Navier-Stokes, em estudos posteriores, Rossi (1996), desenvolveu a teoria de convergência linear e expôs as exatas condições para que o método se tornasse convergente. Dentre as principais modificações, está o refinamento espacial.

Segundo Santiago *et al.* (2006), devem-se definir os parâmetros numéricos α [0,1] e L , que determinam a frequência do referido refinamento espacial. Assim, um vórtice discreto com intensidade inicial Γ terá seu raio variando de um valor mínimo inicial αL a um valor máximo L . E, então, sofrerá uma divisão em quatro novos vórtices discretos com intensidade $\Gamma/4$. Estes novos vórtices discretos são posicionados a 90° uns dos outros, e a uma distância r em torno do vórtice discreto original, conforme mostrado na Figura 15.

Figura 15. Vórtice original repartindo-se e dando origem a quatro novos vórtices discretos.



Fonte: Santiago *et al.* (2006).

O valor de r é dado pela expressão a seguir, sendo σ_i o raio do núcleo do vórtice discreto i , e α o parâmetro de frequência de repartição dos vórtices discretos.

$$r = 2 \cdot \sigma_i \cdot \sqrt{1 - \alpha^2} \quad (37)$$

Em suma, a difusão se dá tanto pelo crescimento do raio do núcleo do vórtice original, quanto pela partição. E a partição ocorre somente quando o vórtice original atinge o tamanho crítico. Desta forma, o número de vórtices discretos não aumenta em toda iteração da simulação, mas sim quando o incremento acumulado em seu tamanho resulta em um tamanho maior que o valor máximo determinado para o raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb.

4 ALGORITMO DE IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE VÓRTICES

4.1 ROTINA MAIN.FOR

Main.for é o programa principal. Em seu escopo, ocorre a chamada de todas as outras rotinas do programa na ordem mais conveniente. Além disso, no programa principal é feita a declaração de todas as variáveis, bem como a abertura e fechamento dos arquivos de controle de qualidade da simulação e de leitura de dados.

Exemplificando, imprime-se na tela os resultados *STEP* – passo atual da simulação, o *STOP* – passo final da simulação, o número de vórtices discretos livres, e a porcentagem de vórtices refletidos (veja a seção 4.26).

4.2 ROTINA INPUT.FOR

Esta rotina tem a finalidade de ler os dados contidos em um arquivo de extensão “.DAT”, a saber:

- *STOP* – número de iterações da simulação;
- *m* – número de painéis da pista do aeroporto;
- *NZ* – número de vórtices discretos em cada vórtice de ponta de asa;
- *L* – comprimento da pista do aeroporto;
- *H* – altura de aproximação da aeronave;
- *D* – Deslocamento da nuvem de vórtices para a esquerda (metade da envergadura *b*);
- *DELT* – incremento de tempo;
- *RE* – número de Reynolds;
- *ALFA* – parâmetro de frequência do refinamento espacial (α);
- *COREMIN* – parâmetro necessário para a aplicação do MCRNM. Indica o tamanho mínimo do núcleo do vórtice discreto (imediatamente após a partição);

Além disto, nesta rotina ocorre a distribuição da quantidade especificada de painéis ao longo do comprimento da pista, construindo-a numericamente.

4.3 ROTINA DATAPREPGP.FOR

A rotina Dataprepgp.for calcula os parâmetros geométricos dos painéis. Em primeira

instância, são determinados a coordenada dos pontos extremos e o ângulo de orientação dos painéis, que no caso abordado é sempre 0° . Em sequência, calcula-se a posição do ponto de controle (central) e o comprimento dos painéis. Por fim, uma coordenada de grande interesse é o ponto de desprendimento dos vórtices discretos.

4.4 ROTINA PAIRCLOUD.FOR

Esta rotina implementa o método do avanço randômico (MAR), utilizado apenas para a geração dos vórtices discretos no instante inicial. Neste instante, todos os vórtices discretos estão concentrados em um único ponto, que coincide com a origem do sistema de referência.

Nas iterações seguintes, a posição de cada vórtice discreto é redefinida de forma aleatória, com o intuito de construir a nuvem de vórtices discretos. Para dar fim às iterações, estabelece-se uma condição arbitrária de parada: a maior distância entre um vórtice discreto gerado e a origem deve exceder 10% da envergadura da aeronave.

Portanto, esta rotina prepara e inicia o desenvolvimento do par de vórtices discretos. Para isto, toma-se a altura de voo, o comprimento da pista do aeroporto e o comprimento da asa da aeronave, lidos na rotina “Input.for”, e definem-se posições x e y para cada vórtice discreto, as quais são espelhadas para formar o par contrarrotativo.

Além disso, é adotado um valor unitário para a intensidade conjunta dos vórtices em uma ponta de asa, e uma intensidade unitária de sinal contrário, para a intensidade conjunta dos vórtices da outra ponta. Desta forma, garante-se que o momento e a circulação globais são nulos. Portanto, para cada vórtice discreto, a intensidade é representada por um valor unitário dividido pelo número de vórtices discretos presentes na respectiva ponta de asa.

Por fim, nesta rotina também é designado o valor inicial do raio do núcleo do vórtice para cada vórtice discreto. Este valor é calculado como uma fração do tamanho máximo do núcleo do vórtice, parâmetro lido na rotina Input.for. O ponderador desta fração é o parâmetro α . O parâmetro α indica a frequência do refinamento espacial, conforme a modificação de Rossi (1996) para garantir a convergência do MCRNM. O valor desta grandeza varia entre 0 e 1, sendo que valores próximos da unidade garantem repartições mais frequentes, e resultados mais confiáveis, porém exigem maior esforço computacional por se trabalhar com quantidades maiores de vórtices discretos.

4.5 ROTINA PRINT.FOR

A rotina Print.for possibilita a visualização do que ocorre na simulação através da impressão de dados em arquivos. Para tal, escreve-se, a cada iteração da simulação, a posição dos painéis (estática) e a posição de todos os vórtices discretos (dinâmica). Além disto, também são impressas a intensidade da circulação, o raio do núcleo, e as componentes da velocidade advectiva induzida de cada vórtice discreto presente no domínio fluido. Nos arquivos de saída, é possível obter todas essas informações para cada passo da iteração, e, além disso, pode-se verificar a quantidade de vórtices discretos presentes em cada etapa da simulação.

4.6 ROTINA COUPLING_COEFFICIENTS_S.FOR

A rotina Coupling_coefficients_s.for calcula os coeficientes de influência da matriz de influência de fontes mostrada na seção 3.7.1 a fim de encontrar uma distribuição de fontes e sumidouros que garanta a condição de impenetrabilidade nos pontos de controle dos painéis.

Especificamente, calcula-se $K_{i,j}^S$, que representa a velocidade normal induzida pelo painel j no ponto de controle do painel i , a partir das equações 21 e 22.

4.7 ROTINA COUPLING_COEFFICIENTS_V.FOR

Analogamente à rotina Coupling_coefficients_s.for, a rotina Coupling_coefficients_v.for calcula os coeficientes de influência da matriz de influência de vórtices a fim de estimar a intensidade dos vórtices discretos que serão gerados para garantir a condição de não-escorregamento nos pontos de controle dos painéis.

Especificamente, calcula-se $K_{i,j}^V$, que representa a velocidade tangencial induzida no ponto de controle do painel i por um vórtice discreto localizado no ponto de desprendimento j (veja as equações 27 e 28).

4.8 ROTINA MODIFY_MATRIX.FOR

A rotina Modify_matrix.for tem duas funções, e é guiada por uma variável-bandeira definida como *mcoup*. Na situação em que a função é chamada com $mcoup = 1$, esta rotina

acrescenta uma linha contendo o comprimento de cada painel no lado esquerdo da matriz de influência de fontes. Desta forma, a equação 29 é incorporada ao sistema, garantindo a conservação de massa.

Por outro lado, quando a função é chamada com $mcoup = 2$, a rotina adiciona uma linha contendo valores unitários na matriz de influência de vórtices. Portanto, a equação 30 é incorporada ao sistema, garantindo a conservação de circulação.

4.9 ROTINA COMP_UM_VM.FOR

Esta rotina calcula as componentes da velocidade induzida no ponto de controle de cada painel por cada vórtice discreto da nuvem. Para tal, utiliza as equações de acordo com o modelo do vórtice de Lamb.

4.10 ROTINA RIGHT_HAND_SIDES_S.FOR

A rotina `Right_hand_sides_s.for` compõe o lado direito da equação matricial de fontes. Para tanto, utiliza as velocidades induzidas calculadas pela rotina `Comp_um_vm.for` e as soma à contribuição do escoamento incidente, que, no caso abordado neste trabalho, é nula. Assim, tem-se então a velocidade normal total induzida no ponto de controle de cada painel.

4.11 ROTINA COMP_US_VS.FOR

Esta rotina calcula as componentes da velocidade induzida no ponto de controle de cada painel pela distribuição uniforme de fontes presente em todos os painéis. Para tanto, utilizam-se as equações 21, 22, 23 e 24.

4.12 ROTINA RIGHT_HAND_SIDES_V.FOR

Analogamente à rotina `Right_hand_sides_s.for`, a rotina `Right_hand_sides_v.for` compõe o lado direito da equação matricial de vórtices. Para tanto, leva em conta a velocidade tangencial induzida no ponto de controle de cada painel pela contribuição da distribuição de fontes e da nuvem de vórtices discretos, conforme calculado nas rotinas `Comp_um_vm.for` e `Comp_us_vs.for`.

4.13 ROTINA MODIFY_RHS.FOR

A rotina `Modify_rhs.for` acrescenta linhas com valor nulo no lado direito das equações matriciais de fontes e de vórtices. Desta forma, a igualdade apresentada nas equações 29 e 30 é garantida, e impõe-se a conservação de massa e de circulação, respectivamente.

4.14 ROTINA MINI_QUAD.FOR

Após as modificações realizadas pelas rotinas `Modify_matrix.for` e `Modify_rhs.for`, o sistema torna-se sobredeterminado. Portanto, a rotina `Mini_quad.for` aplica o método dos mínimos quadrados para transformá-lo em um sistema possível e determinado.

4.15 ROTINA GAUSSPIV.FOR

A rotina `Gausspiv.for` aplica o pivoteamento parcial de Gauss para obter a solução das equações matriciais de fontes e de vórtices. Desta forma, encontram-se dois vetores-resposta contendo a distribuição de fontes sobre os painéis e a intensidade dos vórtices discretos que devem ser posicionados nos pontos de desprendimento.

4.16 ROTINA VERIFY_MASS_CONSERVATION.FOR

A rotina `Verify_mass_conservation.for` calcula a equação 29 com base no vetor-resposta obtido na rotina `Gausspiv.for`. O resultado esperado é o mais próximo de zero possível, provando que a massa se conserva.

4.17 ROTINA VERIFY_BOUND_CIRC_CONSERVATION.FOR

Analogamente, a rotina `Verify_mass_conservation.for` calcula a equação 30 com base no vetor-resposta obtido na rotina `Gausspiv.for`. O resultado esperado é o mais próximo de zero possível, provando que a circulação se conserva.

4.18 ROTINA GENERATION.FOR

A rotina `Generation.for` posiciona um vórtice discreto no ponto de desprendimento de

cada um dos painéis. Como já explicitado, a intensidade deste vórtice discreto deve anular a componente tangencial da velocidade induzida no ponto de controle do painel. Quando esta rotina é chamada no programa, a intensidade-resposta já foi calculada na rotina Gausspiv.for

4.19 ROTINA GENERATION_EXTRA.FOR

A rotina Generation_extra.for é chamada na seção do programa que visa, por meio de um processo iterativo, atender à condição de aderência. Esta rotina corrige a intensidade dos vórtices discretos posicionados nos pontos de desprendimento de cada painel para garantir a condição de não-deslizamento. Para isto, elimina os vórtices discretos inicialmente gerados pela rotina Generation.for e os substitui por um novo conjunto de vórtices discretos.

4.20 ROTINA COMP_UM_VM_EXTRA.FOR

A rotina Comp_um_vm_extra.for, assim como a rotina Comp_um_vm.for, calcula as componentes da velocidade induzida em um painel k por um vórtice discreto j . Entretanto, os vórtices discretos posicionados no ponto de desprendimento dos painéis no passo atual da simulação são desconsiderados, pois serão substituídos por um novo conjunto de vórtices discretos na rotina Generation_extra.for.

4.21 ROTINA VELOCITY_FIELD.FOR

A distribuição de fontes/sumidouros regula a condição de impenetrabilidade, e a geração de vórtices discretos nos pontos de desprendimento dos painéis regula a condição de não-escorregamento. Porém, ao gerar novos vórtices para garantir a segunda condição, a primeira é desfeita devido à nova velocidade induzida no ponto de controle dos painéis.

Desta forma, a condição de aderência somente é garantida após um processo iterativo. A rotina Velocity_field.for calcula a velocidade normal total e a velocidade tangencial total induzidas no ponto de controle de cada painel e as imprime em um arquivo de saída a cada iteração. Assim, pode-se facilmente verificar se as condições de contorno da superfície sólida são satisfeitas em todas as iterações da simulação.

4.22 ROTINA COMP_UB_VB.FOR

A rotina `Comp_ub_vb.for` calcula a velocidade induzida em cada vórtice discreto do domínio fluido por todos os painéis com distribuição de fontes uniforme. Para tanto, utiliza as equações 21, 22, 23 e 24.

4.23 ROTINA COMP UAV_VAV.FOR

A rotina `Comp_uav_vav.for` executa o cálculo da velocidade induzida em cada vórtice discreto por todos os outros vórtices discretos da nuvem e soma com a velocidade induzida pelos painéis. Assim como nas outras rotinas que calculam a velocidade induzida por um vórtice discreto de Lamb, esta rotina utiliza as equações 27 e 28 para determinar as componentes da velocidade.

4.24 ROTINA ADVECTION.FOR

A rotina `Advection.for` realiza a advecção da nuvem de vórtices discretos através do esquema de avanço de primeira ordem de Euler. Retorna, então, uma nova posição para cada vórtice discreto a cada vez que é acionada pelo programa principal.

4.25 ROTINA MCRNM.FOR

A rotina “`Mcrnm.for`” simula a difusão da vorticidade, considerando o crescimento do raio do núcleo dos vórtices discretos de acordo com as equações expostas na seção 3.10.

Quando um vórtice discreto atinge o tamanho crítico estabelecido, a rotina “`Mcrnm.for`” realiza sua partição. Todo vórtice discreto que atinge tal condição é dividido em quatro vórtices discretos filhos, os quais são posicionados em torno do vórtice discreto pai, dispostos em 90° entre si. A distância r na qual os vórtices filhos são gerados, assim como a frequência de repartição dos vórtices discretos, são funções do parâmetro de refinamento espacial (α).

Por fim, a rotina recalcula o número total de vórtices discretos no domínio fluido, de acordo com a quantidade de vórtices discretos que foram repartidos.

4.26 ROTINA REFLECT_GROUND.FOR

A rotina `Reflect_ground.for` atua ao final das iterações, uma vez que a nova posição dos vórtices discretos já foi definida. Esta rotina verifica se algum vórtice discreto se encontra abaixo da superfície plana (solo) e enquadra-os em uma de duas situações.

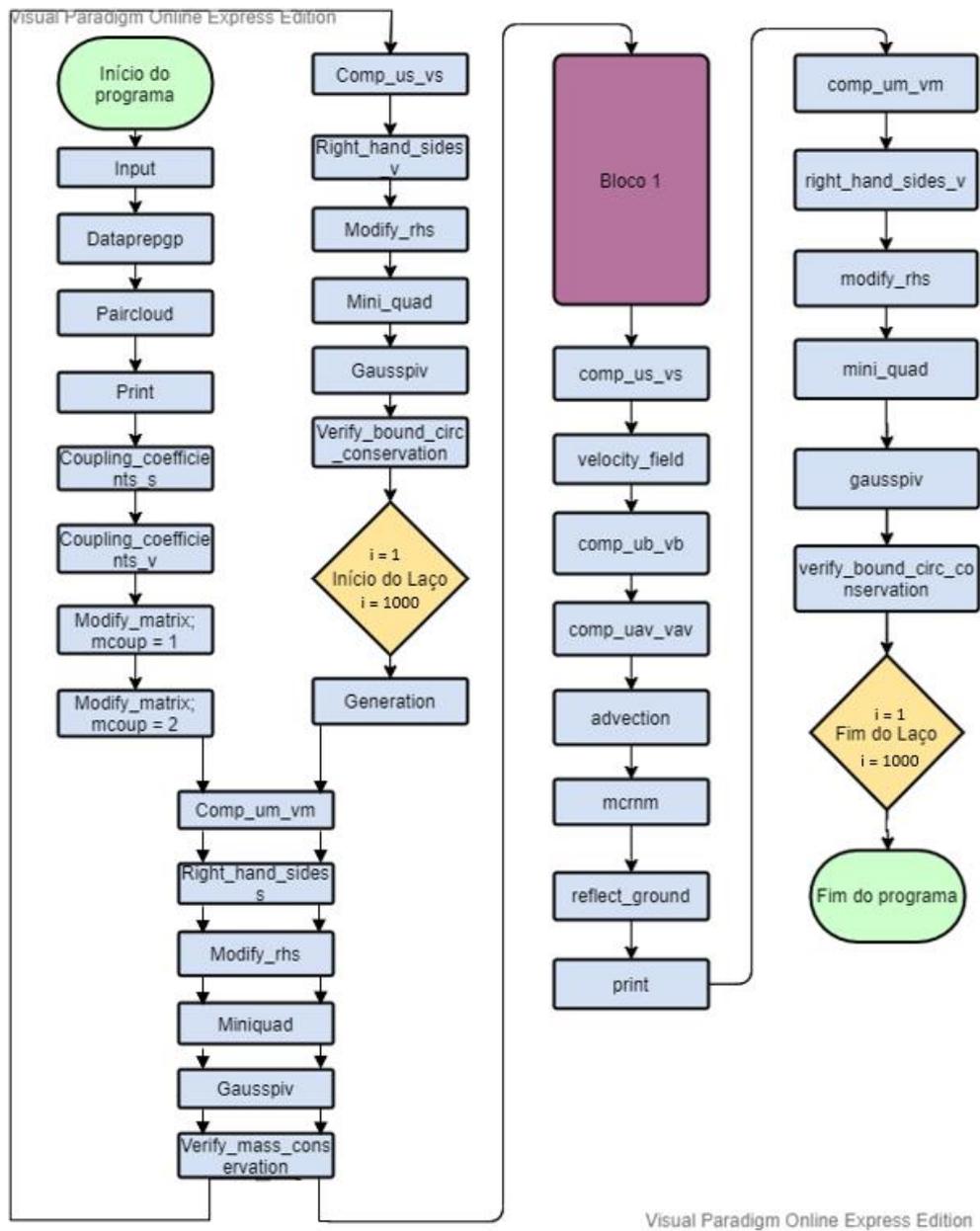
Na primeira situação, a ordenada do vórtice discreto é substituída pelo seu valor oposto, e, após a correção, não há sobreposição vórtice-pista. Na segunda situação, mesmo após o espelhamento do vórtice discreto em relação à abcissa, este ainda se sobrepõe à pista. Neste caso, a ordenada é substituída pelo valor do raio do núcleo do vórtice, de forma que este tangencie a pista, sem jamais penetrá-la.

Posteriormente, a rotina imprime na tela a porcentagem de vórtices refletidos em determinada iteração em relação à quantidade total de vórtices discretos presentes no domínio fluido.

4.27 FLUXOGRAMA DA ROTINA MAIN.FOR

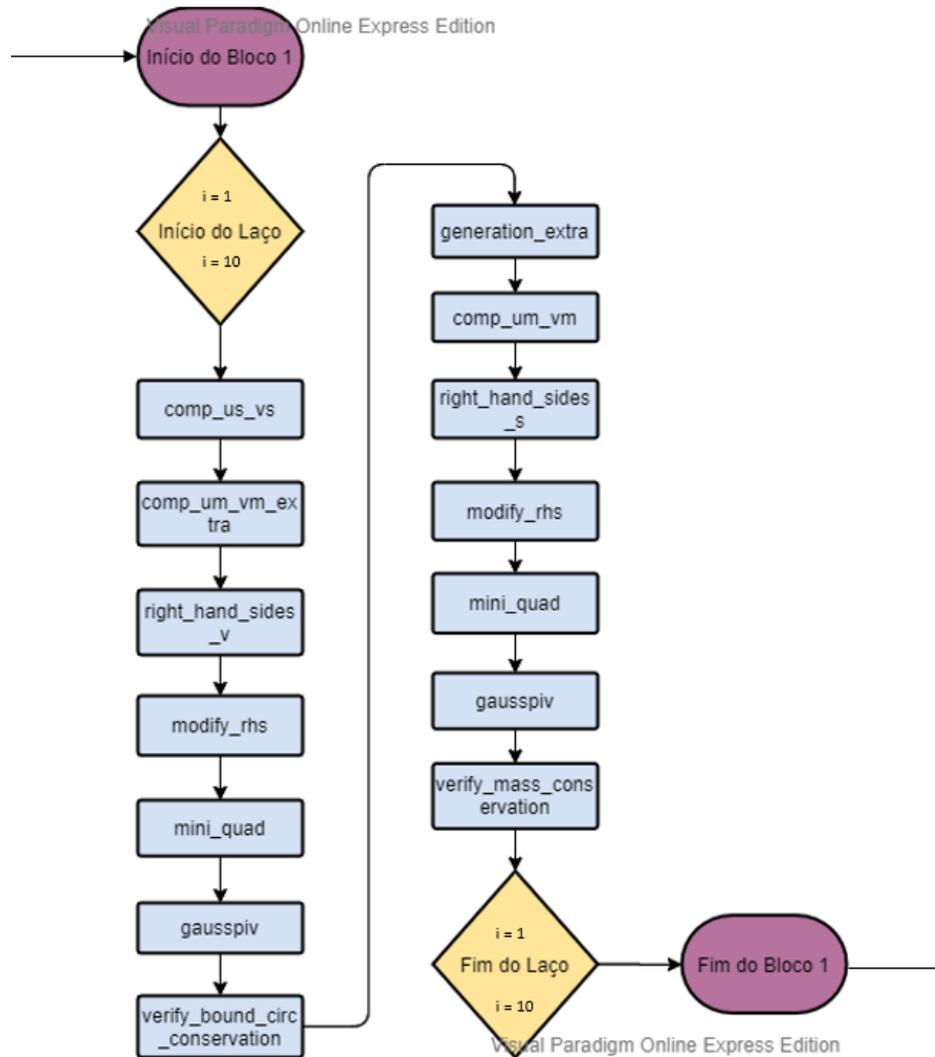
As rotinas citadas neste capítulo são, por vezes, chamadas mais de uma vez no escopo do programa. Portanto, mesmo a descrição individual de cada uma das rotinas não é suficiente para entender o que acontece no decorrer da simulação. Por este motivo, o fluxograma completo é mostrado abaixo nas Figuras 16 e 17. Um fato que requer atenção especial é que a estrutura do código possui um laço (*loop*) maior, que contém um laço (*loop*) menor. A rotina designada como *Bloco 1*, o laço menor, é desmembrada no segundo fluxograma (Figura 17) a fim de não sobrecarregar o leitor.

Figura 16. Fluxograma do laço maior do programa Main.for.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 17. Fluxograma do laço menor do programa Main.for.



Fonte: Autoria própria.

Simplificadamente, o laço maior do programa Main.for (Figura 16) realiza o cálculo do campo de velocidades e atualiza a posição dos vórtices discretos com base no seu movimento advectivo e difusivo (crescimento do raio do núcleo e partição dos vórtices discretos). Já o laço menor do programa (Figura 17) garante a condição de aderência (condição de impenetrabilidade e condição de escorregamento) por meio de um procedimento iterativo.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A fim de delimitar e definir os parâmetros de entrada da simulação, utilizou-se o método do avanço randômico (MAR) como auxílio à implementação do MCRNM. Por prover resultados mais rapidamente, o MAR foi aplicado para estimar o número de iterações necessárias para descrever o intervalo de interesse na evolução da nuvem de vórtices discretos. Além disso, foi feita uma breve análise da influência da variação do número de painéis utilizados para discretizar a pista, e da quantidade de vórtices discretos inicial em cada ponta de asa. Para as primeiras simulações com o método auxiliar, foram escolhidos os seguintes parâmetros de entrada:

- Número de incrementos de tempo da simulação numérica:

$$STOP = 1000$$

- Número de painéis da pista do aeroporto:

$$m = \{120; 240\}$$

- Número de vórtices discretos em cada vórtice de ponta de asa:

$$NZ = \{100; 2000\}$$

- Comprimento da pista do aeroporto:

$$\frac{L}{b} = 8$$

- Deslocamento da nuvem de vórtices para a esquerda:

$$\frac{D}{b} = 0,4$$

- Altura em que o par de vórtices é desprendido das pontas de asa:

$$\frac{H}{b} = 2,2$$

- Incremento de tempo:

$$DELTA = 0,025$$

- Número de Reynolds:

$$RE = 75000$$

Os resultados foram, então, avaliados de forma gráfica e são mostrados nas Figuras 18a, 18b e 18c. Note que a nomenclatura “WK0000” remete à palavra da língua inglesa *wake*, traduzida neste contexto como a esteira ou o rastro dos vórtices discretos, e remete também ao número da iteração. Desta forma, “WK0100” refere-se à iteração de número 100, “WK0200” à iteração de número 200, e assim por diante.

Figura 18. Desenvolvimento da nuvem de vórtices usando o MAR (a) $NZ = 100$ e $m = 120$; (b) $NZ = 2000$ e $m = 120$ e (c) $NZ = 100$ e $m = 240$.

(continua)

(a) $NZ = 100$ e $m = 120$:

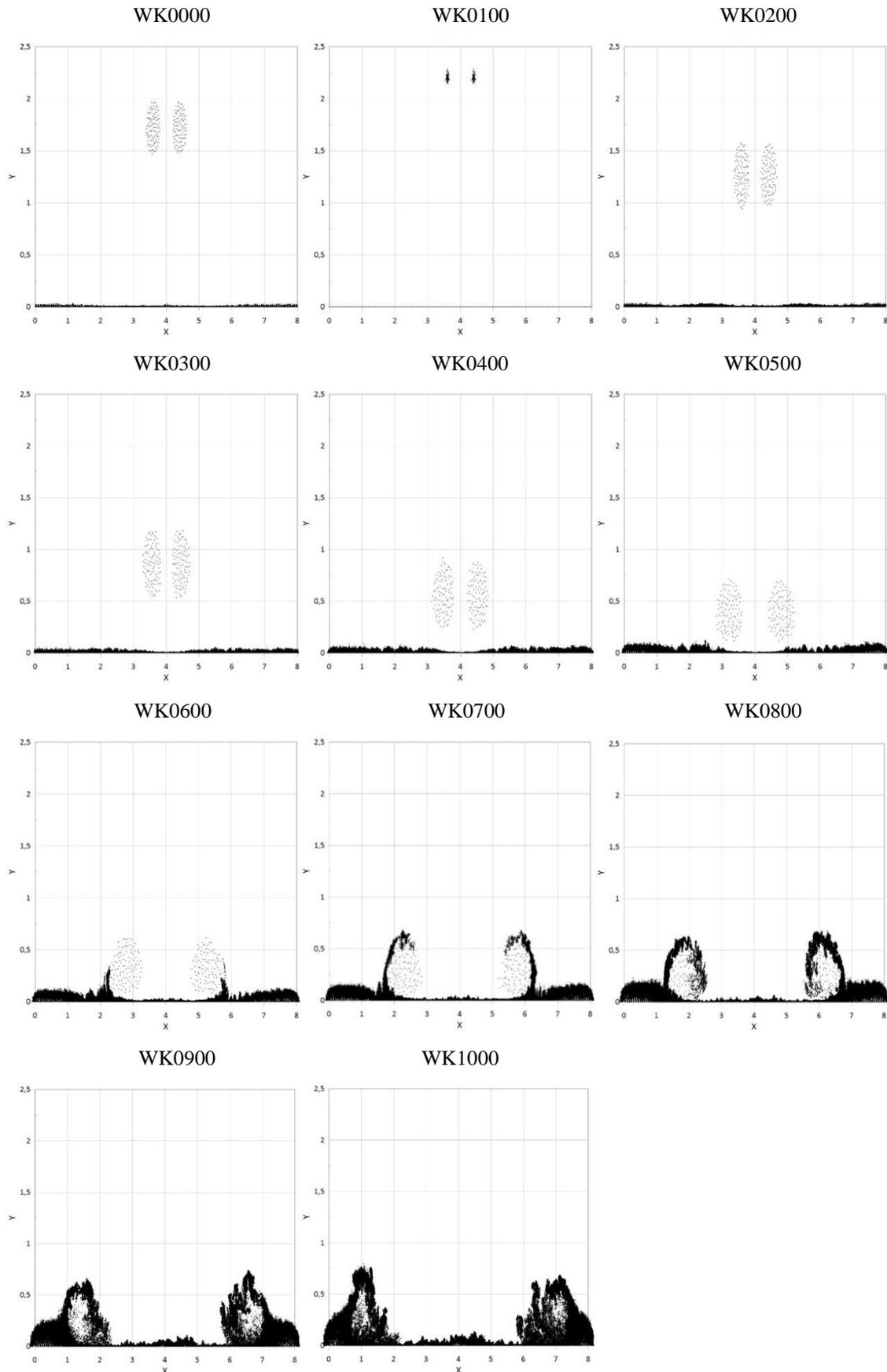


Figura 19. Desenvolvimento da nuvem de vórtices usando o MAR (a) $NZ = 100$ e $m = 120$; (b) $NZ = 2000$ e $m = 120$ e (c) $NZ = 100$ e $m = 240$.

(continuação)

(b) $NZ = 2000$ e $m = 120$:

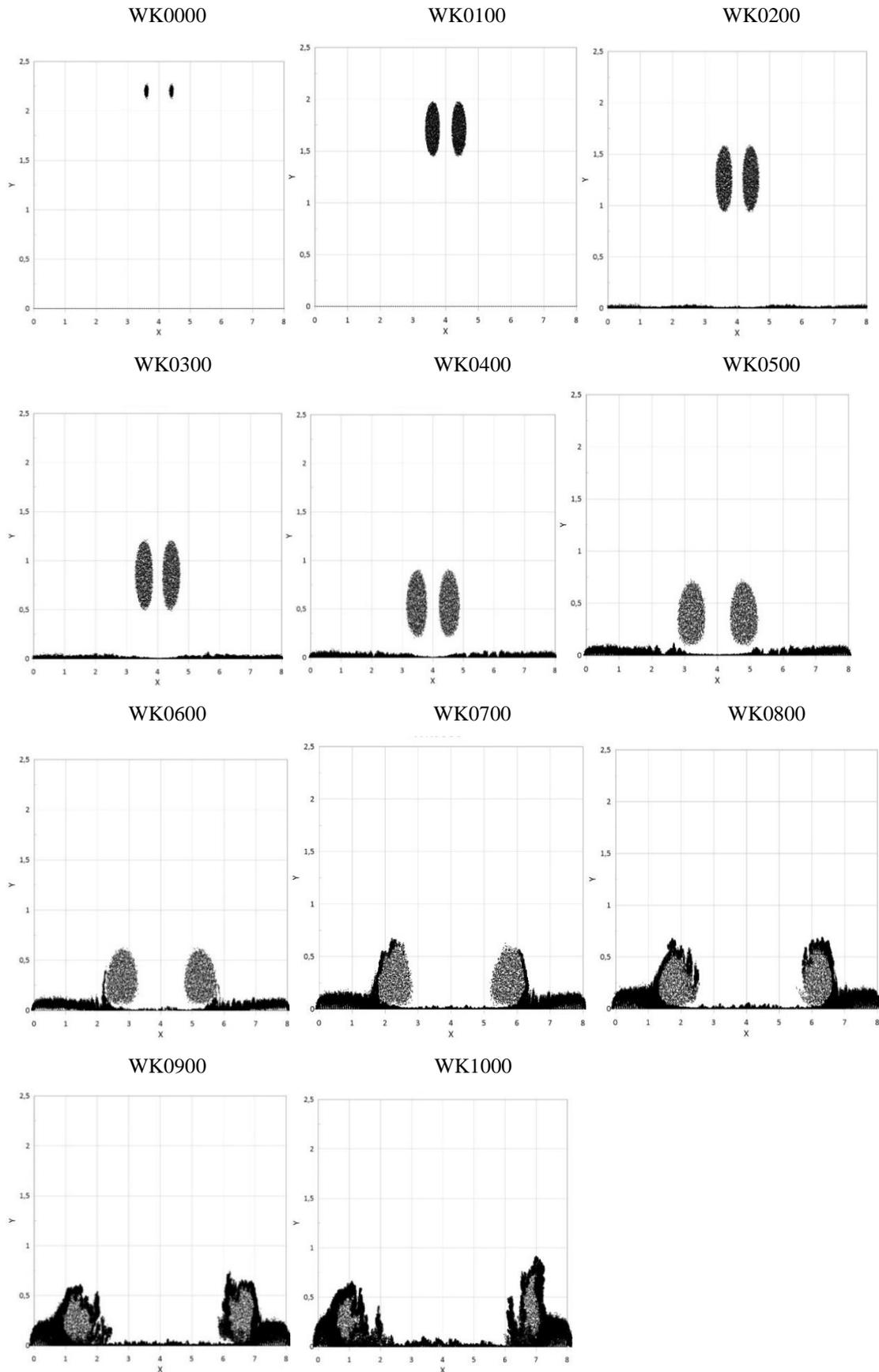
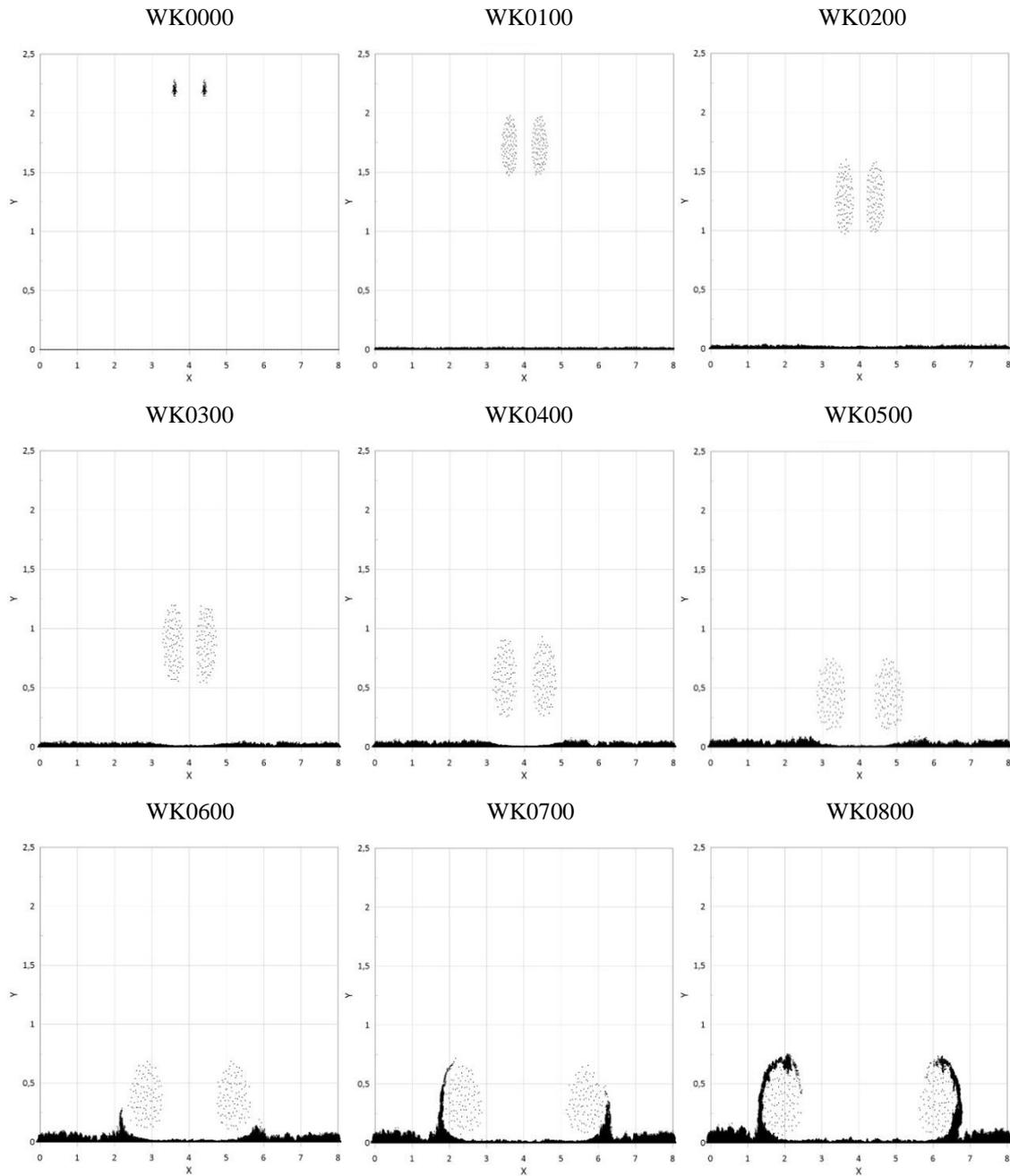


Figura 20. Desenvolvimento da nuvem de vórtices usando o MAR (a) $NZ = 100$ e $m = 120$; (b) $NZ = 2000$ e $m = 120$ e (c) $NZ = 100$ e $m = 240$.

(conclusão)

(c) $NZ = 100$ e $m = 240$:



Fonte: Autoria própria.

Ressalta-se que as Figuras 18a e 18b, em conjunto, permitem visualizar a influência da variação da quantidade de vórtices discretos iniciais na simulação.

Nota-se que, apesar da nuvem de vórtices na Figura 18b ser mais densa do que na Figura 18a, não existem diferenças consideráveis na posição da nuvem de vórtices discretos no decorrer das iterações. Em suma, a presença de maior quantidade de vórtices discretos na nuvem é balanceada por uma intensidade de circulação proporcionalmente menor de cada vórtice discreto, e alterações proporcionais nestes dois parâmetros não resultam em diferenças significativas nas simulações.

Portanto, o valor de $NZ = 100$ é adotado para as simulações com o MCRNM para reduzir o número de operações e agilizar os cálculos computacionais.

Já as Figuras 18a e 18c, em conjunto, mostram a influência da variação da quantidade de painéis usados para discretizar a pista no desenvolvimento da nuvem de vórtices. Visualmente, nota-se que ambas as figuras são similares até a iteração de número 500. Depois deste ponto, a simulação com maior número de painéis (Figura 18c) mostra uma inércia maior dos vórtices discretos próximos à pista, uma vez que estes apresentam uma resposta mais lenta à indução de velocidade dos vórtices discretos da nuvem.

Logo, a influência do número de painéis usados para discretizar a pista é significativa nesta modelagem. Por outro lado, ressalta-se que vórtices discretos são gerados a cada iteração na mesma quantidade de painéis utilizados, aumentando consideravelmente os esforços computacionais. Por esta mesma razão, a Figura 18c mostra o desenvolvimento da nuvem de vórtices apenas até a iteração de número 800.

Como o MCRNM já é dispendioso computacionalmente, opta-se por realizar as simulações com $m = 120$ painéis.

Para iniciar a simulação usando o MCRNM, torna-se necessário definir dois parâmetros adicionais:

- Raio do núcleo do vórtice mínimo (imediatamente depois da partição):

$$COREMIN = 0,0012$$

- Parâmetro de refinamento espacial (α):

$$ALFA = 0,1$$

O valor do raio máximo do vórtice discreto (imediatamente antes da partição) é obtido pela razão entre o valor mínimo do raio do núcleo do vórtice discreto ($COREMIN$, no início da simulação numérica) e o refinamento espacial desejado (relacionado ao parâmetro $ALFA$), o qual está diretamente relacionado à precisão do método. Portanto, pode-se escrever:

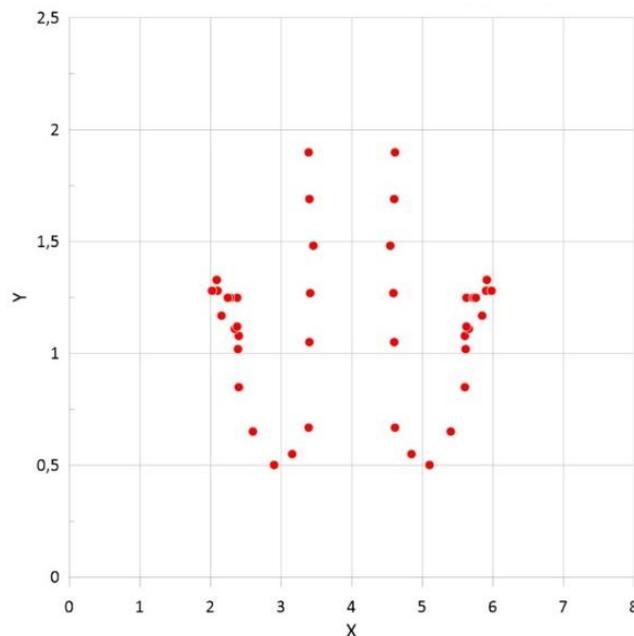
$$COREMAX = \frac{COREMIN}{ALFA} \quad (38)$$

Assim, a simulação da difusão da vorticidade se dá pelo aumento sucessivo do raio do núcleo dos vórtices discretos (de acordo com a equação 36), bem como pelo refinamento espacial propiciado pelo processo de partição dos vórtices discretos que atingem o valor de *COREMAX*.

A equação 36 possibilita calcular de antemão o número de partições que os vórtices discretos sofrerão em determinado número de iterações, e, por consequência, estimar o peso computacional da simulação. Tendo em vista que as simulações tiveram que ser feitas em computador pessoal devido à pandemia do Covid-19, optou-se por escolher *ALFA* = 0,1 para garantir uma exigência computacional condizente.

A literatura contém resultados experimentais apresentados por Liu & Srnsky (1990) que permitem a validação gráfica do método numérico implementado neste trabalho, conforme mostrado na Figura 19.

Figura 21. Resultados experimentais da evolução da nuvem de vórtices discretos.



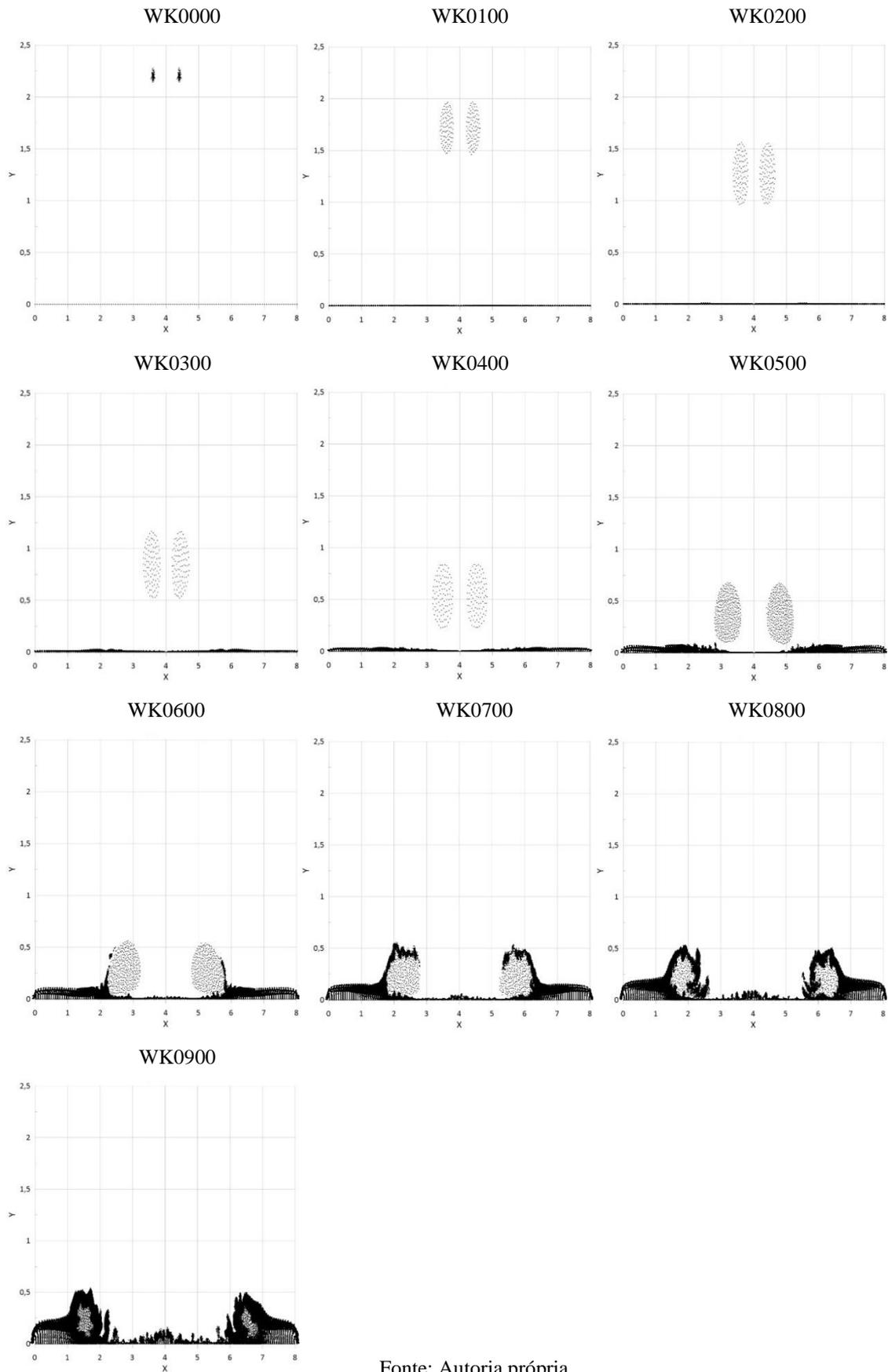
Fonte: Liu & Srnsky (1990).

Os dados experimentais da Figura 19 possibilitam estimar o número de iterações necessárias para descrever o intervalo de interesse do fenômeno a fim de viabilizar

comparações. Considerando o desenvolvimento da nuvem de vórtices mostrado na Figura 18, observa-se que o centro das duas manchas de vórtices discretos leva de 800 a 900 iterações para apresentar o mesmo espaçamento horizontal presente nos dados experimentais (Figura 19), onde a série termina em aproximadamente $x = 2$ e $x = 6$.

Portanto, o critério de parada escolhido para a implementação do MCRNM é $STOP = 900$ iterações. Os resultados da simulação são mostrados na Figura 20.

Figura 22. Desenvolvimento da nuvem de vórtices usando o MCRNM.

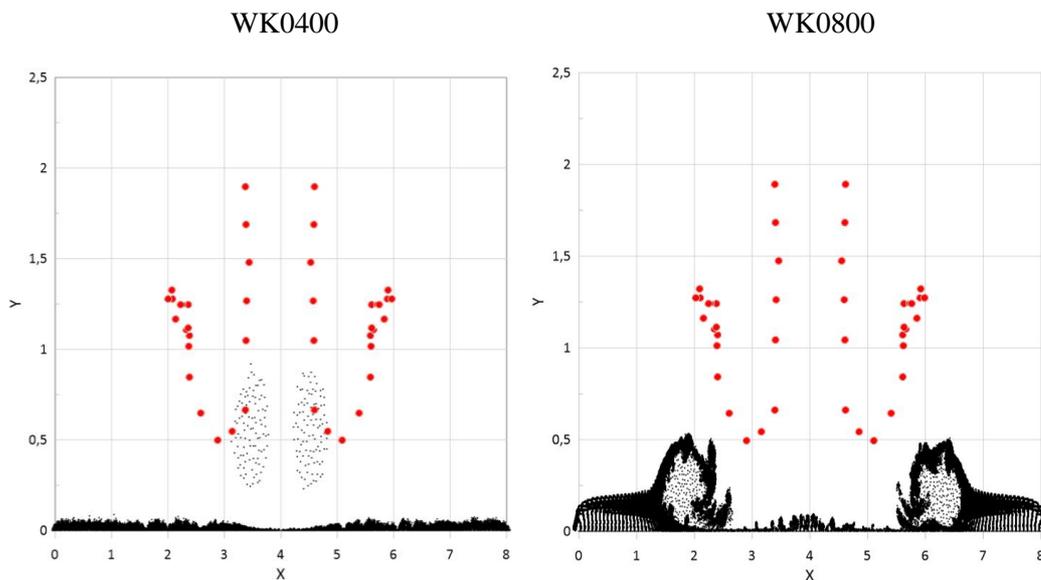


Fonte: Autoria própria.

É perceptível que a nuvem de vórtices discretos da Figura 20 ganha densidade entre as iterações de número 400 e 500. Neste intervalo, ocorre a partição característica do método. Este processo ocorre apenas uma vez devido ao valor baixo do parâmetro de refinamento espacial (α) adotado na simulação.

Com base nos dados experimentais da Figura 19, observa-se que nem a simulação com o MAR nem com o MCRNM seguiram fielmente o comportamento enunciado por Liu & Srnsky (1990). A maior diferença ocorre após a descida das manchas de vórtices discretos até o valor de $Y = 0,5$. Ao invés de apresentar a ascensão mostrada nos resultados experimentais, os vórtices discretos mantêm a altura e se dispersam horizontalmente, como mostrado na Figura 21, que sobrepõe os resultados de Liu & Srnsky (1990) e os do MCRNM.

Figura 23. Comparação entre os resultados experimentais e do MCRNM.



Fonte: Autoria própria.

Como a mesma divergência foi observada em dois métodos distintos, presume-se que a maior fonte de erros provém da quantidade insuficiente de painéis usados para discretizar a pista, ou de um comportamento não linear da nuvem de vórtices discretos em relação à quantidade inicial de vórtices discretos no par de pontas de asa. Neste trabalho, o intervalo de $NZ = 100$ a $NZ = 2000$ foi avaliado, e o desenvolvimento da nuvem de vórtices discretos não apresentou diferenças significativas. Porém, pode existir um valor ainda maior de NZ que descreva mais fielmente os resultados experimentais de forma computacional.

Por fim, para comparar o esforço computacional entre o MAR e o MCRNM, escolhe-se o caso representado na Figura 18a (MAR com $NZ = 100$ e $m = 120$) e a simulação principal,

mostrada na Figura 20 (MCRNM com $NZ = 100$ e $m = 120$). Em um processador *Intel Celeron* com 4,00GB de memória RAM, o tempo que o MAR leva para atingir a iteração de número 900 é de 71 horas e 52 minutos, enquanto o MCRNM precisa de 304 horas e 15 minutos, ou seja, um aumento de 323%.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como comprovado neste trabalho e mencionado na literatura, o MCRNM demanda alto esforço computacional. Para contornar este problema e obter soluções mais robustas, trabalhos futuros podem considerar o método de multipolos rápidos como alternativa à lei de Biot-Savart para o cálculo do campo de velocidades. Esta metodologia pode reduzir as N^2 operações necessárias para o cálculo do campo de velocidades para até N operações, diminuindo significativamente o tempo computacional. Além disso, a lei de Biot-Savart modificada pode também ser explorada como alternativa para balancear as desvantagens do método determinístico.

Um segundo benefício obtido ao reduzir o tempo computacional das simulações é a possibilidade de se optar por valores maiores do parâmetro de refinamento espacial (α). O incremento deste parâmetro implica na partição mais frequente dos vórtices discretos e proporciona resultados mais robustos, a troco de uma simulação mais pesada computacionalmente. Além disto, a redução dos custos computacionais intrínsecos ao MCRNM permitiria otimizar a aplicação do método de painéis, utilizando, por exemplo, mais painéis para discretizar a pista do aeroporto.

Em sua iniciação científica apresentada à FAPESP, o autor deste trabalho analisou a situação física do desprendimento de estruturas vorticosas das pontas de asa de uma aeronave na ausência na pista do aeroporto utilizando o MCRNM aliado a um algoritmo de coalescência de vórtices discretos. Este tipo de algoritmo coalesce vórtices arbitrariamente próximos, ponderando a posição e o raio do núcleo do vórtice discreto resultante com base nas respectivas intensidades de circulação pré-partição. O resultado é uma simulação com uma quantidade significativamente menor de vórtices discretos no domínio fluido e, conseqüentemente, um número menor de operações realizadas a cada iteração. Em contrapartida, se vórtices muito distantes forem coalescidos, gera-se um impacto negativo na representação da situação real e, logo, na acurácia dos resultados da simulação.

Recomenda-se, portanto, a conciliação de uma ou mais das metodologias citadas para reduzir o custo computacional do MCRNM, sem negligenciar o equilíbrio entre simulações comodamente rápidas e a acurácia dos resultados desejados.

REFERÊNCIAS

- ALCÂNTARA PEREIRA, L. A. **Simulação numérica do escoamento em torno de um corpo de forma arbitrária utilizando o método de vórtices discretos**. 1999. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Mecânica, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Itajubá, 1999.
- ALCÂNTARA PEREIRA, L. A. **Simulação numérica do escoamento ao redor de perfis aerodinâmicos montados em grades lineares de turbomáquinas utilizando o método de vórtices discretos com modelagem sub-malha de turbulência**. 2002. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Mecânica, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Itajubá, 2002.
- ALCÂNTARA PEREIRA, L. A.; RICCI, J. E. R.; HIRATA, M. H.; SILVEIRA NETO, A. Simulation of the vortex-shedding flow about a circular cylinder with turbulence modeling. **Japan Society of Computational Fluid Dynamics: computational fluid dynamics journal**, Koganei, Japão, v. 11, n. 3, p. 315-322, 2002.
Citado em: https://scholar.google.com/citations?user=a0wAdxkAAAAJ&hl=pt-BR#d=gs_md_cita-d&u=%2Fcitations%3Fview_op%3Dview_citation%26hl%3Dpt-BR%26user%3Da0wAdxkAAAAJ%26citation_for_view%3Da0wAdxkAAAAJ%3AWp0gIrvW9MC%26tzom%3D180.
- ALCÂNTARA PEREIRA, L. A.; DE OLIVEIRA, M. A.; DE MORAES, P. G; BIMBATO, A. M. Numerical experiments of the flow around a bluff body with and without roughness model near a moving wall. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Rio de Janeiro, v. 42, n. 3, mar. 2020. Disponível em: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s40430-020-2217-6.pdf>. Acesso em: 04 mar. 2021.
- BARBA, L. A.; LEONARD, A.; ALLEN, C. B. Vortex method with fully meshless implementation for high-reynolds number flow computations. *In*: EUROPEAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN APPLIED SCIENCES AND ENGINEERING, 2004, Jyväskylä. **Proceedings** [...]. ECCOMAS, 2004.
Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/228720059_Vortex_method_with_fully_mesh-less_implementation_for_high-reynolds_number_flow_computations. Acesso em: 24 fev. 2021.
- BATCHELOR, G. K. **An introduction to fluid dynamics**. Cambridgeshire: Cambridge University Press, 1967. 658p.
- BEALE, J. T.; MAJDA, A. Rates of convergence for viscous splitting of the navier-stokes equations. **Mathematics of Computation**, Rhode Island, v. 37 p. 243-259, 1981.
Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2007424?seq=1>. Acesso em: 24 fev. 2021.
- BEALE, J. T.; MAJDA, A. Vortex methods I: convergence in three dimensions. **Mathematics of Computation**, Rhode Island, v. 39, p. 1-27, 1982a.
Disponível em: <https://www.ams.org/journals/mcom/1982-39-159/S0025-5718-1982-0658212-5/S0025-5718-1982-0658212-5.pdf>. Acesso em: 24 fev. 2021

BEALE, J. T.; MAJDA, A. Vortex methods II: High-order accuracy in two and three dimensions. **Mathematics of Computation**, Rhode Island, v. 39, p. 29-52, 1982b.
Disponível em: <https://www.ams.org/journals/mcom/1982-39-159/S0025-5718-1982-0658213-7/S0025-5718-1982-0658213-7.pdf>. Acesso em: 24 fev. 2021.

BEALE, J. T.; MAJDA, A. High-order accurate vortex methods with explicit velocity kernels. **Journal of Computational Physics**, New Jersey, v. 58, p. 188-208, 1985.
Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999185901767>. Acesso em: 24 fev. 2021.

BIMBATO, A. M. **Estudo de escoamentos turbulentos em torno de um corpo rombudo de superfície hidraulicamente lisa ou rugosa utilizando o método de vórtices discretos**. 2012. 165 f. Tese (Doutorado em Dinâmica dos Fluidos e Máquinas de Fluxo) – Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2012.

BIMBATO, A. M.; ALCÂNTARA PEREIRA, L. A.; HIRATA, M. H. Suppression of vortex shedding on a bluff body. **Journal of Wind Engineering & Industrial Aerodynamics**, Netherlands, v. 121, p. 16-28, 2013.

BIMBATO, A. M.; ALCÂNTARA PEREIRA, L. A.; HIRATA, M. H. Development of a new Lagrangian vortex method for evaluating effects of surface roughness. **European Journal of Mechanics: B Fluids** 74, Netherlands, p. 291-301, 2018.

BIMBATO, A. M.; ALCÂNTARA PEREIRA, L. A.; HIRATA, M. H. Study of surface roughness effect on a bluff body – the formation of asymmetric separation bubbles. **Energies**, Switzerland, v. 13, p. 6094, 2020.

BIRKHOFF, G. Helmholtz and Taylor instability. **Symposia in Applied Mathematics**: American Mathematical Society, v. 13, p. 55-76, 1962.
Disponível em: <https://www.ams.org/books/psapm/013/>. Acesso em: 04 mar. 2021.

BIRKHOFF, G.; FISHER, J. Do vortex sheets roll up? **Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2**, v. 8, p. 77-90, 1959.

CHORIN, A. J. Numerical study of slightly viscous flow. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridgeshire, v. 57, p. 785-796, 1973.
Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/numerical-study-of-slightly-viscous-flow/4E4FE6AE32F826FFFD6F46E3E86F330A>. Acesso em: 24 fev. 2021

CRITCHLEY, J.; FOOT, P. UK CAA wake vortex database: analysis of incidents reported between 1982 and 1990. **Civil Aviation Authority**, London, v. 91, 1991.
Disponível em: <https://library.metoffice.gov.uk/portal/Default/en-GB/RecordView/Index/172863>. Acesso em: 24 fev. 2021.

DEGOND, P.; MAS-GALLIC, S. The weighted particle method for convection diffusion equations part 1: the case of an isotropic viscosity. **Mathematics of Computation**, Rhode Island, v. 53, p. 485- 507, 1989.
Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2008716?seq=1>. Acesso em: 24 fev. 2021.

DONALDSON, C. D.; BILANIN, A. Vortex wakes of conventional aircraft. **Advisory Group for Aerospace Research and Development: Aeronautical Research Associates of Princeton**, New Jersey, 1975, 79 p.
Disponível em: <https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a011605.pdf>. Acesso em: 24 fev. 2021

FERZIGER, J. H. **Numerical methods for engineering application**. New Jersey: John Wiley & Sons Inc., 1981. 400 p.

FISHELOV, D. A new vortex scheme for viscous flows. **Journal of Computational Physics**, Berkeley, v. 86, p. 211-224, 1990.
Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002199919090098L>. Acesso em: 24 fev. 2021.

GAZZOLA, M. *et al.* Simulations of single and multiple swimmers with non-divergence free deforming geometries. **Journal of Computational Physics**, Zurich, v. 230, p. 7093-7114, 2011.
Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999111002737>. Acesso em: 24 fev. 2021.

GREENGARD, C. The core spreading vortex method approximates the wrong equation. **Journal of Computational Physics**, New York, v. 61, p. 345-348, 1985.
Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999185900919>. Acesso em: 24 fev. 2021.

GREENGARD, L.; ROKHLIN, V. A fast algorithm for particle simulations. **Journal of Computational Physics**, New Haven, v. 73, p. 325-348, 1987.
Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999187901409>. Acesso em: 24 fev. 2021.

HALD, O. Convergence of vortex methods for Euler's equations II. **SIAM Journal of Numerical Analysis**, Rhode Island, v. 16, p. 726-755, 1979.
Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2156630?seq=1>. Acesso em: 24 fev. 2021.

HALD, O.; MAUCERI DEL PRETE, V. Convergence of vortex methods for Euler's equations. **Mathematics of Computation**, Rhode Island, 1978, v. 32, p. 791-801, 1978.
Disponível em: <https://www.ams.org/journals/mcom/1978-32-143/S0025-5718-1978-0492039-1/S0025-5718-1978-0492039-1.pdf>. Acesso em: 24 fev. 2021.

HELMHOLTZ, H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. **Journal für die reine angewandte Mathematik**, Germany, v. 55, p. 25-55, 1858.
Disponível em: <https://eudml.org/doc/147720>. Acesso em: 24 fev. 2021.

HIRATA, M. H.; OLIVEIRA, W.; RICCI, J. E. R.; ALCÂNTARA PEREIRA, L. A. **Método de vórtices**. Itajubá: Universidade Federal de Itajubá, Departamento de Mecânica, 2003. CD-ROM.

HIRATA, M. H.; RIOS RICCI, J. E.; DE OLIVEIRA, W. Comportamento da esteira de aeronaves nas operações de pouso e decolagem. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA E CIÊNCIAS TÉRMICAS, 9., 2002, Caxambu-MG, Brasil. **Anais [...]**.

Caxambu: ENCIT, 2002.

HUANG, M. J.; HUANG, C. J.; CHEN, L. C. A further improvement on the resurrected core-spreading vortex method. **International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering**: World Academy of Science, Engineering and Technology 79., Pakistan, v. 5, n. 7, 2011.

Disponível em: <https://publications.waset.org/2200/a-further-improvement-on-the-resurrected-core-spreading-vortex-method>. Acesso em: 24 fev. 2021.

HUANG, M. J.; SU, H. X.; CHEN, L. C. A fast resurrected core-spreading vortex method with no-slip boundary conditions. **Journal of Computational Physics**, Pakistan, v. 228, p. 1916-1931, 2009.

Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999108006086>. Acesso em: 24 fev. 2021.

KAMEMOTO, K.; ZHU, B.; OJIMA, A. Attractive features of an advanced vortex method and its subjects as a tool of lagrangian LES. **Japan Society of CFD Symposium**, Tokyo, v. 14, p. 1-10, 2000.

Disponível em: https://jglobal.jst.go.jp/en/detail?JGLOBAL_ID=200902151057764422. Acesso em: 24 fev. 2021.

KARAMCHETI, K. **Principles of ideal-fluid aerodynamics**. Malabar, Florida: Robert Krieger Publ. Co, 2 ed, 1967. 654 p.

KATZ, J.; PLOTKIN A. **Low-speed aerodynamics**: from wing theory to panel methods. Singapore: McGraw-Hill, 1991. 632 p.

KEMPKA, S. N.; STRICKLAND, J. H. **A method to simulate viscous diffusion of vorticity by convective transport of vortices at a non-solenoidal velocity**. Sandia National Labs. Report, SAND93-1763, Sandia Laboratories, Albuquerque, 1993.

Disponível em: <https://www.semanticscholar.org/paper/A-method-to-simulate-viscous-diffusion-of-vorticity-Kempka-Strickland/415fffd953f54b8e739f4caa13d3f876c72a774f>. Acesso em: 24 fev. 2021.

KOUMOUTSAKOS, P. D. **Direct numerical simulations of unsteady separated flows using vortex methods**. 1993. Thesis (PhD in Engineering and Applied Science) – California Institute of Technology, California, 1993.

KOUMOUTSAKOS, P.; LEONARDO, A.; PEPIN, F. Boundary condition for viscous vortex methods. **Journal of Computational Physics**, Pasadena, v. 113, p. 52-61, 1994.

Disponível em: <https://thesis.library.caltech.edu/4516/>. Acesso em: 24 fev. 2021.

LEONARD, A. Vortex methods for flow simulation. **Journal of Computational Physics**, Moffett field, v. 37, p. 289-335, 1980.

Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999180900406>. Acesso em: 24 fev. 2021.

LEWIS, R. I. **Vortex element method for fluid dynamic analysis of engineering systems**. Cambridgeshire: Cambridge Univ. Press, 1991. 566 p.

LIU, H.T.; SRNSKY, R.A. **Laboratory investigation of atmospheric effects on vortex wakes**. Flow Research Inc., Report number 497, Bellville, WA, 1990.

Disponível em: <https://www.sbir.gov/sbirsearch/detail/167740>. Acesso em: 24 fev. 2021.

MACHOL, R. Wake vortices a primer. **FAA Aviation Safety Journal**, Washington, v. 3, n. 1, p. 16-19, 1993.

Disponível em:

https://books.google.com.br/books?id=ug4rAAAAMAAJ&pg=PA87&lpg=PA87&dq=MACHOL,+R.+Wake+vortices+a+primer.&source=bl&ots=ODyy23h4B3&sig=ACfU3U3PAkyLx_Cf3Fwk12G83_O38owaAA&hl=pt-

[BR&sa=X&ved=2ahUKEwjtlLKl5pbvAhVUMVvKfHZ-](https://books.google.com.br/books?id=ug4rAAAAMAAJ&pg=PA87&lpg=PA87&dq=MACHOL,+R.+Wake+vortices+a+primer.&source=bl&ots=ODyy23h4B3&sig=ACfU3U3PAkyLx_Cf3Fwk12G83_O38owaAA&hl=pt-BR&sa=X&ved=2ahUKEwjtlLKl5pbvAhVUMVvKfHZ-6BOKQ6AEwBXoECAwQAw#v=onepage&q&f=false)

[6BOKQ6AEwBXoECAwQAw#v=onepage&q&f=false](https://books.google.com.br/books?id=ug4rAAAAMAAJ&pg=PA87&lpg=PA87&dq=MACHOL,+R.+Wake+vortices+a+primer.&source=bl&ots=ODyy23h4B3&sig=ACfU3U3PAkyLx_Cf3Fwk12G83_O38owaAA&hl=pt-6BOKQ6AEwBXoECAwQAw#v=onepage&q&f=false). Acesso em: 04 mar. 2021.

MUSTTO, A. A. **Simulação numérica do escoamento turbulento em torno de um cilindro circular via o método de vórtices**. 2004. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

NAGANO, S.; NAITO, M.; TANAKA, H. A numerical analysis of two-dimensional flow past a rectangular prism by a discrete vortex method. **Computers and Fluids**, Tokyo, v. 10, p. 243-259, 1982.

Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0045793082900081>.

Acesso em: 24 fev. 2021.

OGAMI, Y.; AKAMATSU, T. Viscous flow simulation using the discrete vortex model: the diffusion velocity method. **Computers and Fluids**, Tokyo, v. 19, p. 433-441, 1991.

Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/004579309190068S>.

Acesso em: 24 fev. 2021.

OLIVEIRA, M. A.; MORAES, P. G.; ANDRADE, C. L.; BIMBATO, A. M.; ALCÂNTARA PEREIRA, L. A. Control and suppression of vortex shedding from a slightly rough circular cylinder by a discrete vortex method. **Energies**, Switzerland, v. 13, p. 4481, 2020.

PAPAIIOANNOU, G. **A numerical study of vortex method schemes for two dimensional incompressible flows**. 2001. Thesis (Master of Science) – Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 2001.

Disponível em: <http://dspace.mit.edu/handle/1721.1/91349>. Acesso em: 24 fev. 2021.

PARK, W.; HIGUCHI, H. Computation of flow past single and multiple bluff bodies by a vortex tracing method. **American Institute of Aeronautics and Astronautics**, University of Minnesota, Minneapolis USA, 1989.

Disponível em: <http://deb.tratamentodeagua.com.br/cgi-bin/file.php?article=computation.of.flow.past.single.and.multiple.bluff.bodies.by.a.vortex.tracing.method&code=2730405562702f2b0269db1bb0d2d4ad>. Acesso em: 24 fev. 2021.

PLOUMHANS, P.; WINCKELMANS, G. S. Vortex methods for high-resolution simulations of viscous flow past bluff bodies of general geometry. **Journal of Computational Physics**, Louvain-la-Neuve, v. 165, p. 364-406, 2000.

Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999100966142>.

Acesso em: 24 fev. 2021.

ROSENHEAD, L. The formation of vortices from a surface of discontinuity. **Proceedings of the Royal Society of London A**, London, v. 134, p. 170-192, 1931.

Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1931.0189>. Acesso em: 24 fev. 2021.

ROSSI, L. F. Resurrecting core spreading vortex methods: a new scheme that is both deterministic and convergent. **SIAM Journal of Scientific Computing**, Delaware, v. 17, n. 2, p. 370-397, 1996.

Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/247404841_Resurrecting_Core_Spreading_Vortex_Methods_A_New_Scheme_that_is_Both_Deterministic_and_Convergent. Acesso em: 24 fev. 2021.

ROSSI, L. F. A comparative study of Lagrangian methods using axisymmetric and deforming blobs. **SIAM Journal of Scientific Computing**, Delaware, v. 27, n. 4, p. 1168-1180, 2006.

Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/26990195_A_Comparative_Study_of_Lagrangian_Methods_Using_Axisymmetric_and_Deforming_Blobs. Acesso em: 24 fev. 2021.

ROSSI, L. F. Merging computational elements in vortex simulations. **SIAM Journal of Scientific Computing**, Delaware, v. 18, p. 1014-1027, 1997.

Disponível em: <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/S1064827595285287?journalCode=sjoc3>. Acesso em: 24 fev. 2021.

SAFFMAN, P. G. **Vortex dynamics**. Cambridgeshire: Cambridge University Press, 1992. 311 p.

SALMON, J. K.; WARREN, M. S.; WINCKELMANS, G. S. Fast parallel tree codes for gravitational and fluid dynamical n-body problems. **The International Journal of High-Performance Supercomputing Applications**, High Performance Computing, New York, v. 8, n. 2, p. 129-142, 1994.

Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/2777446_Fast_Parallel_Tree_Codes_for_Gravitational_and_Fluid_Dynamical_N-Body_Problems. Acesso em: 24 fev. 2021.

SANTIAGO, V. S. **Modelagem numérica do escoamento ao redor de corpos aerodinâmicos utilizando o método de vórtices**. 2008. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

SANTIAGO, V. S.; BODSTEIN, G. C. R. Estudo comparativo de quatro diferentes métodos de difusão viscosa para aplicação no método de vórtices. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA E CIÊNCIAS TÉRMICAS, 11., 2006, Curitiba- PR, Brasil. **Anais [...]**. Curitiba: ENCIT 2006, n. 5, p. 1-12.

SHANKAR, S.; VAN DOMMELEN, L. A new diffusion procedure for vortex methods. **Journal of Computational Physics**, Tallahassee, v. 127, p. 88-109, 1996.

Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999196901606#:~:text=A%20new%20method%20is%20proposed,the%20vortices%20can%20be%20irregular>. Acesso em: 24 fev. 2021.

SHERMAN, F. S. **Viscous flow**. New York: McGraw-Hill, International Editions Mechanical

Engineering Series, 1990. 746 p.

SHIELS, D. Simulation of controlled bluff body flow with a viscous vortex method. 1998. Thesis (PhD in Engineering and Applied Science) – California Institute of Technology, California, 1998.

Disponível em: <https://thesis.library.caltech.edu/965/>. Acesso em: 24 fev. 2021.

TAKEDA, K.; TUTTY, O. R.; NICOLE, D. A. Parallel discrete vortex method on commodity supercomputers; an investigation into bluff body far wake behaviour. *In: CONTROL, OPTIMISATION AND CALCULUS OF VARIATIONS: International Workshop on Vortex Flows and Related Numerical Methods*, 3., 1999, Toulouse, França. **Proceedings** [...]. Toulouse: ESAIM, 1999. v. 7, p 418-428.

Disponível em: <https://www.esaim-proc.org/articles/proc/abs/1999/02/takeda/takeda.html>. Acesso em: 24 fev. 2021.

TAKEDA, K.; TUTTY, O. R.; FITT, A. D. A comparison of four viscous models for the discrete vortex method. *In: COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS CONFERENCE*, 13., 1997, Snowmass Village, CO. **Proceedings** [...]. Snowmass Village, co: AIAA, 1997.

Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/244953939_A_comparison_of_four_viscous_models_for_the_discrete_vortex_method. Acesso em: 24 fev. 2021.

VAN DOMMELEN, L.; RUNDENSTEINER, E. A. Fast, adaptive summation of point forces in the two-dimensional Poisson equation. **Journal of Computational Physics**, Tallahassee, p. 126, 1989.

Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999189902258>. Acesso em: 24 fev. 2021.

ZHENG, Z.C. The influence of Reynolds number and atmospheric effects on aircraft wake vortices near the ground. 1993. Thesis (PhD in Mechanical and Aerospace Engineering) - Mechanical Engineering and Mechanics Dept., Old Dominion Univ., Norfolk, VA, 1993.

Disponível em:

https://digitalcommons.odu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1297&context=mae_etds. Acesso em: 24 fev. 2021.

ZHENG, Z.C.; ASH, R.L. Study of aircraft wake vortex behavior near the ground. **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, Norfolk, v. 34, n. 3, p. 580-588, 1996.

Disponível em: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/3.13107>. Acesso em: 24 fev. 2021.

LIFTAVIATION. **Performance de aeronaves a jato:** distâncias de decolagem. Disponível em: <https://liftaviation.com.br/cursos/curso-online-de-performance-de-aeronaves-a-jato-distancias-de-decolagem/>. Acesso em: 12 jan. 2021.

SUPER ABRIL. Quinta passada (25 jul. 2019) foi o dia com o maior tráfego aéreo já registrado. São Paulo: Editora Abril, [2019]. Disponível em:

<https://super.abril.com.br/sociedade/quinta-passada-foi-o-dia-com-o-maior-trafego-aereo-ja-registrado/>. Acesso em: 26 abr. 2020.

STATISTA. Number of flights performed by the global airline industry from 2004 to

2021. Disponível em: <https://www.statista.com/statistics/564769/airline-industry-number-of-flights/#:~:text=The%20number%20of%20flights%20performed,to%2016.4%20million%20in%202020>. Acesso: em 30 nov. 2020.