



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Diego Miranda Gonçalves

**Equações Diferenciais sob Ação de
Funções Forçantes Descontínuas ou
Impulsos via Transformadas de Laplace
com Aplicações**

**Rio Claro
2022**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Equações Diferenciais sob Ação de Funções Forçantes Descontínuas ou Impulsos via Transformadas de Laplace com Aplicações

Diego Miranda Gonçalves

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientador
Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá

Rio Claro
2022

G635e

Gonçalves, Diego Miranda

Equações Diferenciais sob Ação de Funções Forçantes
Descontínuas ou Impulsos via Transformada de Laplace com
Aplicações / Diego Miranda Gonçalves. -- Rio Claro, 2022
175 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual
Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
Claro

Orientador: Lucas Antonio Caritá

1. Transformadas de Laplace. 2. Equações Diferenciais. 3.
Descontinuidade. 4. Impulso. 5. Métodos Matemáticos. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Diego Miranda Gonçalves

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS SOB AÇÃO DE FUNÇÕES FORÇANTES DESCONTÍNUAS OU IMPULSOS VIA TRANSFORMADAS DE LAPLACE COM APLICAÇÕES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá
Orientador

Prof. Dr. Vinicius Francisco Wasques
Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais - CNPEM

Profa. Dra. Rosemeire Aparecida Rosa Oliveira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP

Rio Claro, 07 de junho de 2022

Dedico este trabalho a Jesus Cristo.

Agradecimentos

Primeiramente eu agradeço ao Senhor Jesus Cristo, que é minha vida, ajudou e deu forças em momentos de angústia. Como disse o salmista: “Então clamei pelo nome do Senhor: Livra-me, Senhor!” (Salmos 116:4). Este trabalho foi para a glória Dele!

Em segundo lugar, dedico este trabalho à minha digníssima esposa, Larissa Fernandes Franco, por presenciar tais momentos de angústias e ter suportado junto comigo minhas aflições, ela sempre terá minha eterna gratidão! Eu te amo!

Tenho profunda gratidão à minha mãe, Elizeth Miranda da Silva, e ao meu pai, Antônio Gonçalves da Silva, que sempre deram apoio quando mais precisei. Eu amo vocês!

Também agradeço ao meu querido amigo, Gabriel Antonio Caritá, que sempre acreditou na minha capacidade de concluir este grande passo na minha carreira acadêmica.

Ao meu grande orientador, Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá, enviado de Deus, para me auxiliar, incentivar e guiar na construção e desenvolvimento deste grande trabalho.

Aos grandes orientadores Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão e Prof. Dr. Daniel Luiz da Silva que me acompanharam na graduação e estimularam minha progressão na carreira acadêmica.

Agradeço a banca pela disponibilidade e as grandes contribuições sugeridas que fomentaram significativamente o meu trabalho.

Agradeço ao grupo de pesquisa GPMCC em que presenciei inúmeras discussões de suma importância para a minha formação.

Ao programa de pós-graduação e ao corpo docente pela oportunidade de ter ingressado e pelas experiências vividas.

A todos que contribuíram, Deus os abençoe ricamente!

*Homens inteligentes andaram na lua, homens ousados andaram no fundo do oceano, mas
homens sábios andam com Deus.*
Leonard Ravenhill

Prefácio

Para a redação desta dissertação, muitas referências bibliográficas foram consultadas. Os resultados não foram simplesmente extraídos ou recortados destes textos, mas sim foram estudados, compreendidos, reescritos e muitas vezes tiveram suas demonstrações revisitadas e refeitas. A principal contribuição deste trabalho está na forma da apresentação de resultados clássicos com outros pouco difundidos sobre a temática estudada, compondo assim, um texto inédito em sua natureza e formulação. Os conteúdos que aqui estão presentes foram cuidadosamente escolhidos e trabalhados de forma detalhada, trazendo inclusive demonstrações para resultados que nenhuma bibliografia que pudemos encontrar trazia (por exemplo os teoremas da seção 2.6.2) ou propondo demonstrações diferentes das apresentadas por todas as bibliografias que consultamos (por exemplo o Teorema 4.4).

No início de cada capítulo, apontamos as referências que foram consultadas para a sua elaboração. Essa foi uma forma que encontramos para creditar as bibliografias que estudamos, porém sem extrair diretamente conteúdos específicos das mesmas. Todavia, em algumas partes, quando se fez necessário se dar crédito para conteúdos diretamente ligados a algumas obras, as citações foram feitas nas partes do texto que lhes cabem, informando as páginas onde são encontrados tais conteúdos nas obras originais, a fim de que o leitor tenha uma maior elucidação dos conceitos apresentados.

Na parte de aplicações, analisamos alguns sistemas físicos que não foram tão explorados na literatura, como o galvanômetro, um circuito utilizado dentro de um amperímetro ou voltímetro com a finalidade de medir corrente ou tensão. Além disso, também foi estudado um circuito R-L-C (Resistor, Indutor e Capacitor), em que foi utilizado Transformada de Laplace para encontrar a tensão do Capacitor, demonstrando uma forma extremamente útil para resoluções de circuitos elétricos em série ou em paralelo.

As figuras e gráficos que foram inseridos no trabalho tem como objetivo de facilitar a inteligência do que está sendo estudado. Todas elas (com exceção apenas das que aparecem na Introdução) foram elaboradas pelo autor. Utilizou-se *softwares* como o GeoGebra e o CircuitLab para a criação de todas as ilustrações.

Para finalizar, ressalta-se que o leitor deverá ter alguns conhecimentos prévios como, por exemplo, Análise Real, Análise Complexa, Mecânica e Eletromagnetismo, para uma leitura mais fluída.

Resumo

O propósito deste trabalho é estudar a solução de equações diferenciais sob ação de funções forçantes descontínuas ou impulsos, contextualizadas em problemas Físicos ou de Engenharia, utilizando Transformadas de Laplace. Para tanto, a metodologia utilizada se dá no desenvolvimento teórico, rico em detalhes, dessa transformada. Os conceitos abordados incluem integrais impróprias com parâmetro complexo, transformadas integrais, definição e propriedades das Transformadas de Laplace (direta e inversa), convolução, equações diferenciais sob ação de funções forçantes descontínuas ou impulsos e, por fim, aplicações contextualizadas.

Palavras-chave: Transformadas de Laplace, Equações Diferenciais, Descontinuidade, Impulso, Métodos Matemáticos.

Abstract

This work studies the solution of differential equations under the action of discontinuous forcing functions or impulses, contextualized in Physical or Engineering problems, using Laplace Transforms. Therefore, the methodology used is a theoretical development, rich in detail, of this transform. The concepts covered include improper integrals with complex parameters, integral transforms, definition and properties of Laplace Transforms (direct and inverse), convolution, differential equations under the action of discontinuous forcing functions or impulses and, finally, contextualized applications.

Keywords: Laplace Transforms, Differential Equations, Descontinuity, Impulse, Mathematical Methods.

Lista de Figuras

1	Exemplos de funções forçantes descontínuas.	23
2	Exemplo de função forçante com impulso.	24
1.1	Exemplo de função contínua por partes com saltos de descontinuidade.	48
4.1	Função Gamma.	98
4.2	Função erro e erro complementar.	108
4.3	Função Bessel de ordem zero de primeira espécie com $a = 1$	110
5.1	Procedimento para solucionar PVI's com Transformada de Laplace.	114
5.2	Exemplos de função degrau.	119
5.3	Gráfico de $f(t) = u_1(t)(t - 1)^2$	121
5.4	Gráfico de $f(t) = u_2(t)e^{at}$	121
5.5	Gráfico de $f(t) = u_\pi(t) \cos(t - \pi)$	122
5.6	Gráfico de $f(t) = u_{\frac{\pi}{2}}(t) \text{sen}(t)$	122
5.7	Exemplos de ondas quadradas.	124
5.8	Exemplos de ondas triangulares.	128
5.9	Exemplos de ondas senoidais.	132
5.10	Gráfico de $f(t) = \cos(4t) - \cos(4t)u_\pi(t)$	133
5.11	Gráfico de $f(t) = \text{sen}(t)u_{2\pi}(t)$	135
5.12	Gráfico de $f(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$	136
5.13	Exemplos Funções Impulso.	138
6.1	Exemplo de um galvanômetro.	146
6.2	Dois vagões presos a uma mola de constante elástica K	147
6.3	Resistor.	149
6.4	Capacitor.	150
6.5	Indutor.	151
6.6	Gerador.	151
6.7	Circuito com uma malha.	152
6.8	Circuito com duas malhas.	152
6.9	Corrente no circuito com duas malhas.	153
6.10	Circuito R-C.	153
6.11	Gráficos de $q(t)$ e $i(t)$ para circuito R-C.	154
6.12	Circuito R-L.	156
6.13	Gráfico de $i(t)$ para R-L	157
6.14	Tensão do resistor no domínio de s	158
6.15	Tensão do indutor no domínio de s	158
6.16	Tensão do capacitor no domínio de s	159

6.17	Circuito R-L-C no domínio t	160
6.18	Circuito R-L-C no domínio s	160
A.1	Regiões R_P formada pelo quadrado $OACE$, R_1 formada pelo quarto de círculo OAE e R_2 formada pelo quarto de círculo OBD	167

Lista de Tabelas

2.1	Exemplos de transformadas integrais.	53
C.1	Transformadas calculadas no trabalho (parte 1).	173
C.2	Transformadas calculadas no trabalho (parte 2).	174
C.3	Transformadas calculadas no trabalho (parte 3).	175

Sumário

Introdução	23
1 Integrais Impróprias	27
1.1 Funções Complexas de uma Variável Real	27
1.1.1 Limite e Continuidade	27
1.1.2 Diferenciabilidade	29
1.1.3 Integrabilidade	30
1.2 Integrais Impróprias	33
1.2.1 Definições e Primeiros Resultados	33
1.2.2 Alguns Exemplos	34
1.3 Convergência de Integrais Impróprias	38
1.3.1 O Critério da Comparação (para Integrais Impróprias de Funções Reais)	38
1.3.2 O Critério de Cauchy	43
1.3.3 Convergência Condicional e Absoluta	44
1.4 A Convergência de $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$	45
1.4.1 Funções de Ordem Exponencial γ	45
1.4.2 Continuidade por Partes	46
1.4.3 Condições Suficientes para a Convergência	50
2 Transformadas de Laplace	53
2.1 Transformadas Integrais	53
2.1.1 Exemplos de Transformadas	53
2.2 Transformadas de Laplace	54
2.2.1 Definição e Convergência	54
2.2.2 Funções Admissíveis	55
2.3 Linearidade	57
2.4 Primeiro Teorema de Translação	64
2.5 Transformada de Laplace das Derivadas e da Integral de uma Função	65
2.5.1 Transformada das Derivadas de Primeira e Segunda Ordem	65
2.5.2 Transformada da n -ésima Derivada	69
2.5.3 Transformada da Integral	70
2.6 Resultados para $s \in \mathbb{R}$	71
2.6.1 Derivação e Integração de Transformadas de Laplace	71
2.6.2 Teoremas do Valor Inicial e do Valor Final	76

3	Transformadas Inversas de Laplace	79
3.1	Definição e o Teorema de Lerch	79
3.2	Linearidade	82
3.3	Frações Parciais	83
3.3.1	Decomposição de Frações Parciais	83
3.3.2	Pólos Simples	90
4	A Função Gamma	93
4.1	Convolução	93
4.2	Função Gamma	96
4.2.1	Função Erro	104
4.2.2	Função Erro Complementar	107
4.2.3	Função Beta	109
4.2.4	Funções Bessel	109
5	Equações Diferenciais com Funções Forçantes Descontínuas ou Impulsos	113
5.1	Solucionando PVI's com Transformadas de Laplace	113
5.2	Função Degrau Unitário	118
5.3	Segundo Teorema de Translação	120
5.4	Funções Periódicas	123
5.4.1	Ondas Quadradas	123
5.4.2	Ondas Triangulares	127
5.4.3	Ondas Senoidais	130
5.5	Funções Forçantes Descontínuas	132
5.6	Impulso Unitário	137
5.6.1	Função Delta de Dirac	138
6	Aplicações	143
6.1	Discutindo a 2ª Lei de Newton	143
6.1.1	Força Impulsiva	144
6.1.2	Galvanômetro Balístico	145
6.2	Sistemas Acoplados	147
6.2.1	Sistema Massa-Mola com Dois Vagões	147
6.3	Circuitos	149
6.3.1	Componentes de um Circuito	149
6.3.2	As leis de Kirchhoff	152
6.3.3	Circuito R-C em Série	153
6.3.4	Circuito R-L em Série	156
6.3.5	Circuito R-L-C	157
7	Considerações Finais	163
	Referências	165
A	Apêndice: Cálculo de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$	167
B	Apêndice: Equação de Bessel	169
C	Apêndice: Tabela das Transformadas	173

Introdução

As equações diferenciais podem descrever a maneira como certas quantidades variam com o tempo, por exemplo, sistemas massa-mola, circuitos elétricos em série, oscilações de membranas vibrantes ou fluxos de calor por meio de condutores isolados [25]. Em geral essas equações estão vinculadas a condições iniciais que apresentam o estado inicial de tais sistemas. Segundo [33], equações diferenciais do tipo

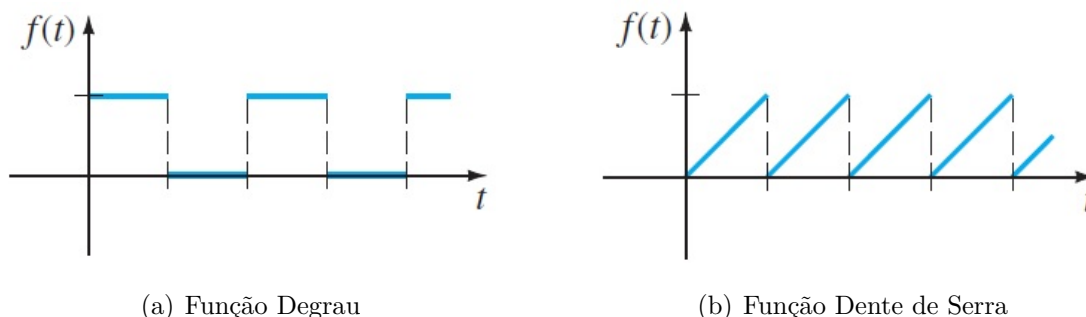
$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

ou

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

são exemplos de modelos de sistemas que possuem “funções forçantes” que podem representar tanto uma força externa $f(t)$ como uma tensão aplicada $E(t)$. É muito comum essas funções forçantes serem descontínuas e, assim, os métodos mais tradicionais para solucionar esse tipo de equação podem se tornar muito laborosos. Por exemplo, a tensão aplicada em um circuito pode ser contínua por partes e periódica, e se comportar como as funções “degrau” ou “dente de serra”, exemplificadas na Figura 1.

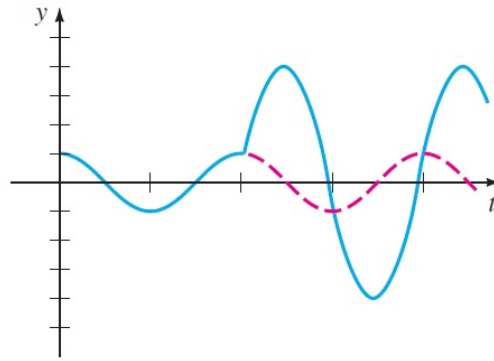
Figura 1: Exemplos de funções forçantes descontínuas.



Fonte: Zill [32].

Também é comum equações diferenciais estarem sob a influência de funções forçantes que sofrem algum tipo de “impulso”, como o exemplificado na Figura 2.

Figura 2: Exemplo de função forçante com impulso.



Fonte: Zill [32].

Em casos como esses, em que as equações estão sob ação de funções forçantes descontínuas ou com impulsos, solucionar a equação diferencial pode ser trabalhoso.

A Transformada de Laplace fornece uma ajuda importante na resolução de problemas deste tipo. O nome se deve ao matemático Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827) que trabalhou com Mecânica Celeste e Teoria das Probabilidades. Na história, de acordo com [31], o desenvolvimento das transformadas integrais se inicia com a busca de soluções de certos tipos de equações diferenciais na forma de integrais reais definidas, contudo, mais tarde, foi descoberto que essas transformadas são integrais de contorno no plano complexo.

O primeiro a estudar transformadas integrais como ferramentas para solucionar equações diferenciais foi Euler (1707 - 1783) [23]. Os resultados obtidos por Euler foram incorporados por Laplace em um artigo chamado *Théorie Analytique des Probabilités* no início do século XIX [31]. Segundo [25], foi Spitzer (1737 - 1880) quem associou o nome de Laplace à transformada

$$Y(s) = \int_a^b e^{st}y(t)dt$$

que foi elaborada por Euler, mas bastante usada por Laplace.

Também, de acordo com [25], em 1910, Bateman (1882 - 1946) aplicou a seguinte transformada

$$Y(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}y(t)dt$$

mais tarde batizada de Transformada de Laplace por Berntein (1880 - 1968), na equação de decaimento radioativo de Rutherford (1871 - 1937)

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y$$

Tal transformada passou a ser discutida para justificar de forma precisa algumas regras operacionais, as quais foram utilizadas por Heaviside (1850 - 1925) no final do século XIX, com o intuito de resolver as equações da Teoria Eletromagnética de Maxwell (1831 - 1879) [31]. Com isso, contribuiu fortemente para a Teoria Eletromagnética de Maxwell diminuindo as 38 equações para apenas 4 equações fundamentais de tal teoria [31].

No início do século XX, depois de muitas tentativas, essa forma de resolver equações obteve sucesso após muito trabalho e dedicação de matemáticos como Bromwich (1875 - 1929), Carson (1886 - 1940) e Van der Pol (1889 - 1959) [29].

A Transformada de Laplace é uma transformada integral com núcleo $K(s, t) = e^{-st}$ e constitui uma ferramenta fundamental para solucionar problemas de valor inicial em equações diferenciais. Por este motivo é muito utilizada como ferramenta nos estudos de Circuitos Elétricos, Sistemas e Sinais, Controle e Automação, Probabilidade e Estatística, Bioengenharia, Engenharia Mecânica e outras áreas [23].

O método funciona basicamente transformando uma equação diferencial complicada na variável t em uma equação algébrica, mais simples de lidar, na variável complexa s . Por exemplo, considerando as notações $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ e $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$ para as Transformadas de Laplace das funções f e y na variável t , o Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y'' + 4y' + 5y = f(t)$$

com $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, é levado em

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 4s + 5}.$$

Conseguir a solução $y(t)$ do PVI de forma explícita é possível por meio da aplicação do conceito de transformada inversa, uma vez que $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))$.

O propósito deste trabalho é estudar a solução de equações diferenciais sob ação de funções forçantes descontínuas ou impulsos, contextualizadas em problemas típicos da Física ou Engenharia, utilizando Transformadas de Laplace.

Estudaremos a Transformada de Laplace a partir da sua definição e calcularemos a transformada de inúmeras funções em detalhes, além de demonstrarmos alguns dos principais teoremas relacionados. Para isso, este texto está dividido da seguinte forma: No Capítulo 1 é feito um estudo sobre integrais impróprias, incluindo parâmetros complexos. Este capítulo é finalizado com alguns teoremas sobre a convergência da integral que define a Transformada de Laplace. No Capítulo 2, apresenta-se a definição formal de Transformada de Laplace, bem como seus principais teoremas. No Capítulo 3, define-se a transformada inversa, de forma simples e sem o uso da Fórmula da Inversão Complexa. No Capítulo 4 apresenta-se a convolução e algumas funções especiais oriundas da Função Gamma. Já o Capítulo 5 versa sobre as funções degrau unitário e delta de Dirac, trazendo PVI's com equações diferenciais sob ação de funções forçantes descontínuas ou impulso, sendo solucionadas com auxílio da Transformada de Laplace. Por fim, o Capítulo 6 trás algumas aplicações em Física ou Engenharias do conteúdo estudado no capítulo anterior.

Para a leitura deste texto, considera-se que o leitor possua familiaridade com resultados de Mecânica Clássica e Eletromagnetismo, além de Cálculo Diferencial e Integral (com funções de uma ou múltiplas variáveis reais), Equações Diferenciais, Análise Real e Complexa.

1 Integrais Impróprias

Este capítulo possui o propósito de fundamentar conceitos matemáticos essenciais para o desenvolvimento da dissertação. Resultados aqui estabelecidos serão amplamente requisitados ao longo do trabalho. Para a elaboração deste capítulo, foram consultadas as seguintes referências: [5],[10], [14], [15], [16], [25], [27] e [30].

1.1 Funções Complexas de uma Variável Real

1.1.1 Limite e Continuidade

Definição 1.1. Uma função do tipo $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ pode ser representada como $f(t) = u(t) + iv(t)$ onde $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $v : A \rightarrow \mathbb{R}$ são funções chamadas de componentes de f . A componente u é a parte real de f e a componente v é a parte imaginária de f .

Definição 1.2. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que f possui limite $L \in \mathbb{C}$ quando $t \in A$ tende a $t_0 \in \mathbb{R}$, e escrevemos $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L$, quando:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |t - t_0| < \delta \implies |f(t) - L| < \epsilon.$$

Definição 1.3. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função com o conjunto A ilimitado superiormente. Dizemos que f possui limite $L \in \mathbb{C}$ quando $t \in A$ tende à infinito, e escrevemos $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = L$, quando:

$$\forall \epsilon > 0, \exists k > 0 \mid t > k \implies |f(t) - L| < \epsilon.$$

Observação 1.4. As Definições 1.2 e 1.3 nos fornecem as seguintes equivalências:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L \iff \lim_{t \rightarrow t_0} |f(t) - L| = 0$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = L \iff \lim_{t \rightarrow +\infty} |f(t) - L| = 0.$$

Teorema 1.5. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função em que $f(t) = u(t) + iv(t)$ e $L = u_0 + iv_0 \in \mathbb{C}$. Temos que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L$ se, e somente se, $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = u_0$ e $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = v_0$.*

Demonstração. De forma direta:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L \iff \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = u_0 + iv_0 \iff \lim_{t \rightarrow t_0} (u(t) + iv(t)) = u_0 + iv_0$$

$$\iff \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) + i \lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = u_0 + iv_0 \iff \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = u_0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = v_0$$

□

Exemplo 1.6. Sendo $s = x + iy \in \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{R}$, provemos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} = 0$ para $\operatorname{Re}(s) = x > a$.

Demonstração. Pela Observação 1.4:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} = 0 &\iff \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{(s-a)e^{(s-a)t}} = 0 \iff \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| -\frac{1}{(s-a)e^{(s-a)t}} - 0 \right| = 0 &\iff \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{(s-a)e^{(s-a)t}} \right| = 0. \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(s-a)e^{(s-a)t}} \right| &\stackrel{s=x+iy}{=} \left| \frac{1}{(x-a+iy)e^{(x-a+iy)t}} \right| = \left| \frac{1}{(x-a+iy)e^{iyt}e^{(x-a)t}} \right| \\ &= \frac{1}{|x-a+iy| |e^{iyt}| |e^{(x-a)t}|} = \frac{1}{|x-a+iy| |\cos(yt) + i \operatorname{sen}(yt)| e^{(x-a)t}} \\ &= \frac{1}{e^{(x-a)t} \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \sqrt{\cos^2(yt) + \operatorname{sen}^2(yt)}} = \frac{1}{e^{(x-a)t} \sqrt{(x-a)^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Assim, se $x > a$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{(s-a)e^{(s-a)t}} \right| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{(x-a)t} \sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = 0$$

já que $e^{-(x-a)t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

□

Definição 1.7. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que f é contínua em $t_0 \in A$ quando $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$. Dizemos que f é contínua, quando for contínua em todos os pontos de A .

Teorema 1.8. *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ função em que $f(t) = u(t) + iv(t)$. Então f é contínua em $t_0 \in A$ se, e somente se, u e v são contínuas em $t_0 \in A$.*

Demonstração. f contínua em $t_0 \stackrel{\text{Def. 1.7}}{\iff} \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0) = u(t_0) + iv(t_0) \stackrel{\text{Teo. 1.5}}{\iff} \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = u(t_0)$ e $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = v(t_0) \iff u$ e v são contínuas em t_0

□

As regras operatórias de limite e continuidade para funções complexas são semelhantes as para as funções reais. O leitor pode conferir nas referências [5] e [27].

1.1.2 Diferenciabilidade

Definição 1.9. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que f é diferenciável em $t_0 \in A$ caso exista o limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

onde $\Delta t = t - t_0$. Esse limite chama-se derivada de f em t_0 e possui notação $f'(t_0)$ ou $\frac{df}{dt}(t_0)$.

Teorema 1.10. Se $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável em $t_0 \in A$, então f é contínua em $t_0 \in A$.

Demonstração. De fato, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} |(f(t) - f(t_0))| &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{|f(t) - f(t_0)|}{t - t_0} (t - t_0) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|f(t) - f(t_0)|}{t - t_0} \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} (t - t_0) \end{aligned}$$

Da diferenciabilidade da f em t_0 e sabendo que $\lim_{t \rightarrow t_0} (t - t_0)$ existe e é igual a zero. Logo obtemos,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |(f(t) - f(t_0))| = f'(t_0) \cdot 0 = 0$$

o que nos mostra, pela Observação 1.4, que f é contínua em t_0 . □

Teorema 1.11. Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função com $f(t) = u(t) + iv(t)$ e $t_0 \in A$. Então f é diferenciável em t_0 se, e somente se, $f'(t_0) = u'(t_0) + iv'(t_0)$.

Demonstração. Note que:

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{u(t) + iv(t) - (u(t_0) + iv(t_0))}{t - t_0} = \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} + i \left(\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \right).$$

Pela Definição 1.9,

$$\begin{aligned} f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} &\iff f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \left[\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} + i \left(\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \right) \right] \\ \iff f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} + i \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} &\iff f'(t_0) = u'(t_0) + iv'(t_0). \end{aligned}$$

□

As regras de derivação para funções complexas são semelhantes as para as funções reais. O leitor pode conferir nas referências [5] e [27].

1.1.3 Integrabilidade

Definição 1.12. Sejam $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função e $P = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$, em que $t_i \in [a, b]$, $0 \leq i \leq n$, com $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$. Considere, aleatoriamente, $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ e denote $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$.

a) A soma $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta t_i$ é chamada *soma de Riemann* de f em relação à partição P .

b) O limite $\lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta t_i$, quando existe, é chamado de integral de f em $[a, b]$.

Nesse caso, usamos a notação $\int_a^b f(t) dt = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta t_i$ e dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

Teorema 1.13. *Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ função em que $f(t) = u(t) + iv(t)$. Então f é integrável em $[a, b]$ se, e somente se, u e v são integráveis em $[a, b]$. Além disso:*

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Demonstração. Por hipótese $f(t) = u(t) + iv(t)$ é integrável em $[a, b]$. Assim, nas condições da Definição 1.12:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \lim_{\max \Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(c_j)\Delta t_j = \lim_{\max \Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n (u(c_j)\Delta t_j + iv(c_j)\Delta t_j) \\ &= \lim_{\max \Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n u(c_j)\Delta t_j + i \lim_{\max \Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n v(c_j)\Delta t_j = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt \end{aligned}$$

□

As regras de integração para funções complexas são semelhantes as para as funções reais. O leitor pode conferir nas referências [5] e [27].

Devido a proposta deste trabalho, selecionamos alguns teoremas interessantes sobre integrabilidade complexa para demonstrar.

Teorema 1.14. *Dada $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função integrável em $[a, b]$ em que $f(t) = u(t) + iv(t)$. Então $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e*

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Demonstração. Por hipótese, f é integrável em $[a, b]$, então, pelo Teorema 1.13, as funções u e v também são integráveis em $[a, b]$. Assim, $u^2 + v^2$ é integrável em $[a, b]$. Como a composição de funções reais integráveis é integrável, segue também que $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$ é integrável.

Agora vamos demonstrar a desigualdade proposta no enunciado.

Se $\int_a^b f(t) dt = 0$ não há o que demonstrar. Então suponha que $\int_a^b f(t) dt = x + iy \neq 0$. Na forma polar:

$$\int_a^b f(t) dt = \left| \int_a^b f(t) dt \right| \cdot (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \implies$$

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^{-1} \cdot \int_a^b f(t) dt \quad (1.1)$$

em que θ é o argumento principal de $x + iy$. Denotemos $k = (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^{-1}$, então $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \operatorname{Re} \left(\int_a^b k f(t) dt \right)$, pois

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\int_a^b k f(t) dt \right) &= \operatorname{Re} \left(k \int_a^b f(t) dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left((\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^{-1} \cdot \left| \int_a^b f(t) dt \right| \cdot (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\left| \int_a^b f(t) dt \right| \right) \\ &= \left| \int_a^b f(t) dt \right|. \end{aligned}$$

Dessa maneira, como $\operatorname{Re} \left(\int_a^b k f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(k f(t)) dt$, segue que:

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b \operatorname{Re}(k f(t)) dt \stackrel{\operatorname{Re}(z) \leq |z| \forall z \in \mathbb{C}}{\leq} \int_a^b |k f(t)| dt = \int_a^b |k| |f(t)| dt.$$

Sabendo¹ que $|k| = \left| \frac{\cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta)}{\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)} \right| = |\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)| = 1$, obtemos:

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

□

Teorema 1.15. Se $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é integrável em $[a, x]$ para todo $x \in [a, b]$, então $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ é diferenciável e $F'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$ para cada $x \in [a, b]$.

Demonstração. Sendo $f(t) = u(t) + iv(t)$, com f integrável em $[a, x]$, então u e v também são integráveis em $[a, x]$ pelo Teorema 1.14. Assim,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^x (u(t) + iv(t)) dt \\ &= \int_a^x u(t) dt + i \int_a^x v(t) dt. \end{aligned}$$

¹Note que $(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))(\cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta)) = \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)$.

Sabemos² da teoria de integrais em uma variável real que $\int_a^x u(t) dt$ e $\int_a^x v(t) dt$ são deriváveis e que $\frac{d}{dx} \left[\int_a^x u(t) dt \right] = u(x)$ e $\frac{d}{dx} \left[\int_a^x v(t) dt \right] = v(x)$. Então,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[\int_a^x u(t) dt + i \int_a^x v(t) dt \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[\int_a^x u(t) dt \right] + i \frac{d}{dx} \left[\int_a^x v(t) dt \right] \\ &= u(x) + iv(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.16. *Se $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável e f' é integrável em $[a, b]$, então $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$.*

Demonstração. Sendo $f(t) = u(t) + iv(t)$ diferenciável, temos $f'(t) = u'(t) + iv'(t)$. Sendo f' integrável em $[a, b]$, pelo Teorema 1.14, u' e v' também são integráveis. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo³ temos $\int_a^b u'(t) dt = u(b) - u(a)$ e $\int_a^b v'(t) dt = v(b) - v(a)$, assim:

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(t) dt &= \int_a^b (u'(t) + iv'(t)) dt \\ &= \int_a^b u'(t) dt + i \int_a^b v'(t) dt \\ &= (u(b) - u(a)) + i(v(b) - v(a)) \\ &= u(b) + iv(b) - (u(a) + iv(a)) \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

□

Com base nos Teoremas 1.15 e 1.16, calcular integrais de funções complexas de uma variável real é um processo muito similar ao cálculo de integrais de funções reais. Podemos, por exemplo, levar em conta o que conhecemos sobre integração por primitivas e o Teorema Fundamental do Cálculo.

Observação 1.17. Considere $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo real e $\Omega \subset \mathbb{C}$. Ao longo deste trabalho, muitas vezes será útil considerar uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, complexa de uma variável real, dada da seguinte forma $f(t) = K(s, t)g(t)$ em que g é uma função real ou complexa e $K : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função onde $s \in \Omega \subset \mathbb{C}$ é um parâmetro fixado. Neste caso, dizemos que uma integral da forma $G(s) = \int_I K(s, t)g(t) dt$ está indexada pelo parâmetro s e, com certa frequência, será de nosso interesse apontar as possibilidades de s para os quais a integral exista.

²O leitor pode conferir o Teorema 8, página 255, do livro [14].

³O leitor pode conferir o Teorema 9, página 256, do livro [14].

1.2 Integrais Impróprias

1.2.1 Definições e Primeiros Resultados

Para as definições e resultados dessa seção, considere f uma função do tipo $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Definição 1.18. Seja $a \in \mathbb{R}$. Se $\int_a^u f(t) dt$ existe para todo $u \geq a$, definimos:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(t) dt$$

desde que o limite exista e seja finito.

Definição 1.19. Seja $b \in \mathbb{R}$. Se $\int_{-u}^b f(t) dt$ existe para qualquer $-u \leq b$, definimos:

$$\int_{-\infty}^b f(t) dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^b f(t) dt$$

desde que o limite exista e seja finito.

As integrais $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ e $\int_{-\infty}^b f(t) dt$, apresentadas nas Definições 1.18 e 1.19, são chamadas impróprias e serão ditas **convergentes** caso os limites existam e, caso contrário, as integrais serão **divergentes**.

Teorema 1.20. *Sejam a e b reais arbitrários. Se $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, $\int_{-\infty}^a f(t) dt$, $\int_b^{+\infty} f(t) dt$ e $\int_{-\infty}^b f(t) dt$ são convergentes então:*

$$\int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^b f(t) dt + \int_b^{+\infty} f(t) dt.$$

Demonstração. Suponha $a < b$, sem perda de generalidade. Pelas Definições 1.18 e 1.19:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^a f(t) dt + \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(t) dt \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^a f(t) dt + \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\int_a^b f(t) dt + \int_b^u f(t) dt \right] \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^a f(t) dt + \int_a^b f(t) dt + \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_b^u f(t) dt \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\int_{-u}^a f(t) dt + \int_a^b f(t) dt \right] + \int_b^{+\infty} f(t) dt \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^b f(t) dt + \int_b^{+\infty} f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^b f(t) dt + \int_b^{+\infty} f(t) dt. \end{aligned}$$

□

Definição 1.21. Considere $a \in \mathbb{R}$. Se as integrais impróprias $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ e $\int_{-\infty}^a f(t) dt$ são convergentes, definimos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt.$$

Pelo Teorema 1.20, a Definição 1.21 independe da escolha do $a \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.22. *Considere $u > 0$ e f uma função integrável em $[-u, u]$. Então*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^u f(t) dt.$$

Demonstração. Sabemos pela Definição 1.21 que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{+\infty} f(t) dt \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^0 f(t) dt + \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u f(t) dt \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\int_{-u}^0 f(t) dt + \int_0^u f(t) dt \right] \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^u f(t) dt. \end{aligned}$$

□

1.2.2 Alguns Exemplos

Agora vejamos alguns exemplos para aplicarmos os conceitos anteriores.

Exemplo 1.23. Provemos que $\int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$ ($\operatorname{Re}(s) > 0$), onde $s \in \mathbb{C}$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-st} dt.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \int_0^u e^{-st} dt &= -\frac{1}{s} \left(e^{-st} \right) \Big|_0^u \\ &= -\frac{1}{s} \left(e^{-su} - 1 \right). \end{aligned}$$

Aplicando o limite:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{s} \left(e^{-su} - 1 \right) \right] = \frac{1}{s}$$

para $\operatorname{Re}(s) > 0$, pois $e^{-su} \rightarrow 0$ conforme $u \rightarrow +\infty$.

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

quando $\operatorname{Re}(s) > 0$.

Exemplo 1.24. Provemos que $\int_0^{+\infty} e^{-st} t dt = \frac{1}{s^2}$ ($Re(s) > 0$), onde $s \in \mathbb{C}$.

Por definição,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-st} t dt.$$

Utilizando integração por partes:

$$\begin{aligned} \int_0^u e^{-st} t dt &= -\frac{t}{s} (e^{-st}) \Big|_0^u + \frac{1}{s} \int_0^u e^{-st} dt \\ &= -\frac{t}{s} (e^{-st}) \Big|_0^u - \frac{1}{s^2} (e^{-st}) \Big|_0^u \\ &= -\frac{u}{s} (e^{-su}) - \frac{1}{s^2} (e^{-su} - 1). \end{aligned}$$

Aplicando o limite:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left[-\frac{u}{s} (e^{-su}) - \frac{1}{s^2} (e^{-su} - 1) \right] = \frac{1}{s^2}$$

para $Re(s) > 0$, pois $e^{-su} \rightarrow 0$ e $-\frac{u}{s} (e^{-su}) \rightarrow 0$ conforme $u \rightarrow +\infty$.

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t dt = \frac{1}{s^2}$$

quando $Re(s) > 0$.

Exemplo 1.25. Provemos que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-st} dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$ ($s > 0$), onde $n \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}$.

Neste caso iremos demonstrar pelo Princípio da Indução⁴.

1. Para $n = 1$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t dt = \frac{1}{s^2}, \text{ conforme Exemplo 1.24.}$$

2. Supondo válido para n :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-st} dt = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

3. Provando para $n + 1$:

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-st} dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u t^n e^{-st} dt.$$

⁴O leitor pode conferir a seção 1 do Capítulo 1, página 2, do livro [16].

Com a utilização da integração por partes:

$$\begin{aligned}\int_0^u t^n e^{-st} dt &= \frac{1}{n+1} \left(e^{-st} t^{n+1} \right) \Big|_0^u + \frac{s}{n+1} \int_0^u e^{-st} t^{n+1} dt \\ &= \frac{1}{n+1} \left(e^{-su} u^{n+1} \right) + \frac{s}{n+1} \int_0^u e^{-st} t^{n+1} dt.\end{aligned}$$

Aplicando o limite quando $u \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u t^n e^{-st} dt &= \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} dt \\ &= \frac{s}{n+1} \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-st} dt\end{aligned}$$

para $s > 0$, pois $\frac{1}{n+1} \left(e^{-su} u^{n+1} \right) \rightarrow 0$ quando $u \rightarrow +\infty$.

Como $\int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$, temos:

$$\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{s}{n+1} \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-st} dt$$

Isolando $\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-st} dt$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-st} dt &= \frac{(n+1)n!}{s(s^{n+1})} \\ &= \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}.\end{aligned}$$

Por indução, segue o resultado.

Exemplo 1.26. Provemos que $\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} dt = \frac{1}{s-\alpha}$ ($\operatorname{Re}(s) > \alpha$), onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{C}$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-st} e^{\alpha t} dt.$$

Usando substituição

$$\begin{aligned}\int_0^u e^{-st} e^{\alpha t} dt &= \int_0^u e^{(\alpha-s)t} dt \\ &= \frac{1}{\alpha-s} \int_0^u e^w dw \\ &= \frac{1}{\alpha-s} \left[e^{(\alpha-s)u} - 1 \right].\end{aligned}$$

Aplicando o limite:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha - s} \left[e^{(\alpha-s)u} - 1 \right] \right\} = \frac{1}{s - \alpha}$$

para $Re(s) > \alpha$, pois $e^{-(s-\alpha)u} \rightarrow 0$ conforme $u \rightarrow +\infty$.

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} dt = \frac{1}{s - \alpha}$$

quando $Re(s) > \alpha$.

Exemplo 1.27. Provemos que $\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos(\alpha t) dt = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$ ($Re(s) > 0$), onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{C}$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos(\alpha t) dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-st} \cos(\alpha t) dt.$$

Com a utilização da integração por partes, realizada duas vezes, segue que:

$$\begin{aligned} \int_0^u e^{-st} \cos(\alpha t) dt &= \frac{e^{-st} \sin(\alpha t)}{\alpha} \Big|_0^u + \frac{s}{\alpha} \int_0^u e^{-st} \sin(\alpha t) dt \\ &= \frac{e^{-st} \sin(\alpha t)}{\alpha} \Big|_0^u + \frac{s}{\alpha} \left(-\frac{e^{-st} \cos(\alpha t)}{\alpha} \Big|_0^u - \frac{s}{\alpha} \int_0^u e^{-st} \cos(\alpha t) dt \right) \\ &= \frac{e^{-st} \sin(\alpha t)}{\alpha} \Big|_0^u - \frac{s}{\alpha^2} \left(e^{-st} \cos(\alpha t) \right) \Big|_0^u - \frac{s^2}{\alpha^2} \int_0^u e^{-st} \cos(\alpha t) dt \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2} \left(e^{-su} \sin(\alpha u) \right) + \frac{s}{\alpha^2 + s^2} - \frac{s}{\alpha^2 + s^2} \left(e^{-su} \cos(\alpha u) \right). \end{aligned}$$

Aplicando o limite:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2} \left(e^{-su} \sin(\alpha u) \right) + \frac{s}{\alpha^2 + s^2} - \frac{s}{\alpha^2 + s^2} \left(e^{-su} \cos(\alpha u) \right) \right] = \frac{s}{\alpha^2 + s^2}$$

para $Re(s) > 0$, pois $e^{-su} \rightarrow 0$ conforme $u \rightarrow +\infty$.

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos(\alpha t) dt = \frac{s}{\alpha^2 + s^2}$$

quando $Re(s) > 0$.

Exemplo 1.28. Provemos que $\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin(\alpha t) dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2}$ ($Re(s) > 0$), onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{C}$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin(\alpha t) dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-st} \sin(\alpha t) dt.$$

Com a utilização da integração por partes, realizada duas vezes, segue que:

$$\begin{aligned} \int_0^u e^{-st} \operatorname{sen}(\alpha t) dt &= -\frac{e^{-st} \cos(\alpha t)}{\alpha} \Big|_0^u - \frac{s}{\alpha} \int_0^u e^{-st} \cos(\alpha t) dt \\ &= -\frac{e^{-st} \cos(\alpha t)}{\alpha} \Big|_0^u - \frac{s}{\alpha} \left(\frac{e^{-st} \operatorname{sen}(\alpha t)}{\alpha} \Big|_0^u + \frac{s}{\alpha} \int_0^u e^{-st} \operatorname{sen}(\alpha t) dt \right) \\ &= -\frac{e^{-st} \cos(\alpha t)}{\alpha} \Big|_0^u - \frac{s}{\alpha^2} \left(e^{-st} \operatorname{sen}(\alpha t) \right) \Big|_0^u - \frac{s^2}{\alpha^2} \int_0^u e^{-st} \operatorname{sen}(\alpha t) dt \\ &= -\frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2} \left(e^{-su} \cos(\alpha u) \right) + \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2} - \frac{s}{\alpha^2 + s^2} \left(e^{-su} \operatorname{sen}(\alpha u) \right). \end{aligned}$$

Aplicando o limite:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2} \left(e^{-su} \cos(\alpha u) \right) + \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2} - \frac{s}{\alpha^2 + s^2} \left(e^{-su} \operatorname{sen}(\alpha u) \right) \right] = \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2}$$

para $\operatorname{Re}(s) > 0$, pois $e^{-su} \rightarrow 0$ conforme $u \rightarrow +\infty$.

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \operatorname{sen}(\alpha t) dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2}$$

quando $\operatorname{Re}(s) > 0$.

1.3 Convergência de Integrais Impróprias

1.3.1 O Critério da Comparação (para Integrais Impróprias de Funções Reais)

Teorema 1.29. Dada $f : [a, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[a, x]$, para qualquer $x \geq a$ com $f(t) \geq 0$ no intervalo $[a, +\infty[$, considere a função $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \geq a$. Então:

- $F(x)$ é crescente em $[a, +\infty[$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ existe se, e somente se, existir $M > 0$ tal que $F(x) \leq M$ para todo $x \geq a$.

Demonstração. a) Considere x_1 e x_2 dois números reais tais que $a \leq x_1 < x_2$, então:

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t) dt - \int_a^{x_1} f(t) dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \geq 0$$

uma vez que $f(t) \geq 0$ para $t \geq a$.

Assim, para quaisquer x_1, x_2 em $[a, +\infty[$, com $x_1 < x_2$, temos que:

$$x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2).$$

Portanto $F(x)$ é crescente.

b) (\implies) Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = A$, então:

$$\forall \epsilon > 0, \exists k > 0 \mid x > k \implies |F(x) - A| < \epsilon.$$

Em particular, para $\epsilon = 1$:

$$\exists k > 0 \mid x > k \implies |F(x) - A| < 1.$$

Ou seja:

$$A - 1 < F(x) < A + 1, \quad \forall x > k.$$

Então, F é limitada para $x > k$. Podemos dizer que existe $M > 0$ tal que $F(x) \leq M$, $\forall x > k$.

$$\text{Se } k > a: F(x) \leq M, \quad \forall x > k > a.$$

$$\text{Se } k \leq a: F(x) \leq M, \quad \forall x > a > k.$$

De todo modo: $\exists M > 0$ tal que $F(x) \leq M, \forall x > a$. No caso em que $x = a$, $F(x) = \int_a^a f(t) dt = 0$. Logo, $F(x) \leq M$ para este caso também.

Portanto, existe $M > 0$ tal que $F(x) \leq M$ para todo $x \geq a$.

(\impliedby) Se $a > 0$, defina $I = \{F(x) \mid x \geq a\}$ e se, $a \leq 0$, defina $I = \{F(x) \mid x > 0\}$. De todo modo, o conjunto I é limitado superiormente, pois existe $M > 0$ tal que $F(x) \leq M, \forall x \geq a$. Denote $A = \sup I$ e provemos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = A$.

Como $A = \sup I$, temos que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \omega \in I \mid A - \epsilon < \omega \leq A.$$

Como $\omega \in I$, então $\omega = F(k)$, para algum $k \geq 0$. Dessa maneira:

$$\forall \epsilon > 0, \exists k > 0 \mid A - \epsilon < F(k) \leq F(x) \tag{1.2}$$

onde $x > k$, pois como F é crescente (Teorema 1.29 (a)):

$$x > k \implies F(x) \geq F(k). \tag{1.3}$$

Assim, pelas Equações (1.2) e (1.3):

$$\forall \epsilon > 0, \exists k > 0 \mid x > k \implies A - \epsilon \stackrel{\text{Eq. (1.2)}}{<} F(k) \stackrel{\text{Eq. (1.2)}}{\leq} F(x) \leq A < A + \epsilon.$$

Isto é,

$$\forall \epsilon > 0, \exists k > 0 \mid x > k \implies |F(x) - A| < \epsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = A.$$

□

Observação 1.30. Uma consequência do item b) do Teorema 1.29 é: Considere $f : [a, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ positiva e integrável em $[a, x]$, para qualquer $x \geq a$. Então $\int_a^{\infty} f(t) dt$ é convergente se, e somente se, existir $M > 0$ tal que $\int_a^x f(t) dt \leq M$ para todo $x \geq a$.

Teorema 1.31 (Critério da Comparação). *Sejam duas funções $f, g : [a, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ positivas e integráveis em $[a, x]$, para qualquer $x \geq a$, em que $f(t) \leq g(t)$ para todo $t \geq a$. Se $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ também é convergente.*

Demonstração. Por hipótese $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ é convergente. Logo $\int_a^{+\infty} g(t) dt = M > 0$, pois $g(t) \geq 0$ para $t \geq a$. Uma vez que $f(t) \leq g(t)$ para qualquer $t \geq a$:

$$\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt = M.$$

Da Observação 1.30, segue que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ é convergente. □

Observação 1.32. Pelo Teorema 1.31 é possível escrever: Sejam duas funções $f, g : [a, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ positivas e integráveis em $[a, x]$, para qualquer $x \geq a$, em que $f(t) \leq g(t)$ para todo $t \geq a$. Se $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ também é divergente.

Teorema 1.33. *São verdadeiras as afirmações:*

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ é convergente se $\alpha > 1$ e divergente se $\alpha \leq 1$.

b) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ é convergente se $\alpha > 0$ e divergente se $\alpha \leq 0$.

Demonstração. a) Para $\alpha = 1$, calculemos a integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\int_1^u \frac{1}{t} dt \right).$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} \int_1^u \frac{1}{t} dt &= \ln |t| \Big|_1^u \\ &= \ln |u| - \ln(1) \\ &\stackrel{u \geq 1}{=} \ln(u). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(u) = +\infty$$

e a integral diverge.

Para $\alpha \neq 1$ temos:

$$\begin{aligned} \int_1^u \frac{1}{t^\alpha} dt &= \frac{1}{1-\alpha} [t^{1-\alpha}] \Big|_1^u \\ &= \frac{1}{1-\alpha} [u^{1-\alpha} - 1] \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{u^{\alpha-1}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Dessa maneira, efetuando o limite quando $u \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{u^{\alpha-1}} - 1 \right) \right] = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & , \alpha > 1 \\ +\infty & , \alpha < 1 \end{cases}$$

Uma vez que:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & , \alpha > 1 \\ +\infty & , \alpha < 1 \end{cases}$$

Conseqüentemente, a integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge para o valor $\frac{1}{\alpha-1}$ se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$.

b) Para $\alpha = 0$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-0t} dt &= \int_0^{+\infty} dt \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u dt \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} u \\ &= +\infty \end{aligned}$$

e a integral diverge.

Se $\alpha \neq 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^u e^{-\alpha t} dt &= -\frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t}) \Big|_0^u \\ &= -\frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha u} - 1) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{e^{\alpha u}} \right). \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-\alpha t} dt \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{e^{\alpha u}} \right) \right] = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & , \alpha > 0 \\ +\infty & , \alpha < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Uma vez que:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\alpha u}} = \begin{cases} 0 & , \alpha > 0 \\ +\infty & , \alpha < 0 \end{cases}$$

Dessa maneira, a integral $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge para o valor $\frac{1}{\alpha}$ se $\alpha > 0$ e diverge se $\alpha \leq 0$. □

Teorema 1.34. *Seja $f : [a, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrável no intervalo $[a, x]$, para qualquer $x > a$, com $f(t) \geq 0$ em $[a, +\infty[$. Suponha que exista um número real α e uma função $g : [a, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que, para todo $t \geq a$ ocorra $f(t) = \frac{1}{t^\alpha} g(t)$. Além disso, considere que $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = L$ com $L > 0$. Então $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ é convergente quando $\alpha > 1$ e divergente quando $\alpha \leq 1$.*

Demonstração. Da hipótese $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = L$, então:

$$\forall \epsilon > 0, \exists k > 0 \mid t > k \implies |g(t) - L| < \epsilon.$$

Abrindo o módulo,

$$|g(t) - L| < \epsilon \iff L - \epsilon < g(t) < L + \epsilon.$$

Tomando $\epsilon = \frac{L}{2}$ obtemos:

$$\frac{L}{2} < g(t) < \frac{3L}{2}.$$

Por hipótese que $f(t) = \frac{1}{t^\alpha} g(t)$, para $t \geq a$, então:

$$\frac{L}{2t^\alpha} < f(t) < \frac{3L}{2t^\alpha}.$$

Integrando esta última desigualdade em $[a, +\infty[$,

$$\frac{L}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt < \int_a^{+\infty} f(t) dt < \frac{3L}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

Do Teorema 1.33 a integral $\frac{3L}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ é convergente para $\alpha > 1$ e pelo Teorema 1.31 (Critério da Comparação), a integral $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ é convergente nesse caso.

Do mesmo modo, do Teorema 1.33, a integral $\frac{L}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ é divergente para $\alpha \leq 1$ e pela Observação 1.32, a integral $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ é divergente nesse caso. □

1.3.2 O Critério de Cauchy

Teorema 1.35 (Critério de Cauchy). *Seja $f : [a, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrável em $[a, x]$, para todo $x \geq a$. Então $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ é convergente se, e somente se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $b, c > A$ resulta $\left| \int_b^c f(t) dt \right| < \epsilon$.*

Demonstração. (\implies) Denotemos $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Sendo $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ convergente, podemos dizer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L$, para algum $L \in \mathbb{C}$. Dessa maneira,

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 \mid x > A \implies |F(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sejam $b, c > A$, assim:

$$\begin{aligned} \left| \int_b^c f(t) dt \right| &= |F(c) - F(b)| \\ &= |F(c) - L + L - F(b)| \\ &\leq |F(c) - L| + |F(b) - L| \\ &\stackrel{b, c > A}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

(\impliedby) Seja (y_n) uma sequência de números reais tal que $\lim y_n = +\infty$. Pela hipótese:

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 \mid y_n, y_m > A \implies |F(y_m) - F(y_n)| < \epsilon.$$

Note que a sequência $(F(y_n))$ é de Cauchy e portanto convergente⁵. Logo $\lim F(y_n) = L$, para algum $L \in \mathbb{C}$.

Provemos agora que qualquer sequência (z_n) com $\lim z_n = +\infty$, temos $\lim F(z_n) = L$, com o mesmo L . Suponha que exista uma sequência (z_n) com $\lim z_n = +\infty$ e $\lim F(z_n) = L_2 \neq L$. Pela hipótese:

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 \mid b, c > A \implies |F(c) - F(b)| < \epsilon.$$

Em particular, para $\epsilon = \frac{|L - L_2|}{3}$:

$$\exists A > 0 \mid b, c > A \implies |F(c) - F(b)| < \frac{|L - L_2|}{3}. \tag{1.4}$$

Tomando $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que: $n > n_1 \implies y_n > A$ e $z_n > A$, temos pela Equação (1.4):

$$n > n_1 \implies |F(z_n) - F(y_n)| < \frac{|L - L_2|}{3}. \tag{1.5}$$

Como $L = \lim F(y_n)$ e $L_2 = \lim F(z_n)$, então:

⁵O leitor pode conferir o Teorema 4.8, página 119, do livro [27].

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} \mid n > n_2 \implies |F(y_n) - L| < \epsilon \text{ e } |F(z_n) - L_2| < \epsilon.$$

Em particular, para $\epsilon = \frac{|L - L_2|}{3}$:

$$n > n_2 \implies |F(y_n) - L| < \frac{|L - L_2|}{3} \text{ e } |F(z_n) - L_2| < \frac{|L - L_2|}{3} \quad (1.6)$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, segue das Equações (1.5) e (1.6):

$$\begin{aligned} n > n_0 \implies |L - L_2| &= |L - F(y_n) + F(y_n) - F(z_n) + F(z_n) - L_2| \\ &\leq |F(y_n) - L| + |F(z_n) - F(y_n)| + |F(z_n) - L_2| \\ &\stackrel{\text{Eq. (1.5) e (1.6)}}{<} \frac{|L - L_2|}{3} + \frac{|L - L_2|}{3} + \frac{|L - L_2|}{3} \\ &= |L - L_2|. \end{aligned}$$

Isto é: $|L - L_2| < |L - L_2|$ que é um absurdo! Portanto não existe (z_n) com $\lim z_n = +\infty$ e $\lim F(z_n) = L_2 \neq L$. Logo, toda sequência (z_n) com $\lim z_n = +\infty$ possui $\lim F(z_n) = L$.

Por fim, provemos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L$. Suponha que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \neq L$. Então existe uma sequência (z_n) com $\lim z_n = +\infty$ e $\lim F(z_n) \neq L$. Mas isso é impossível, uma vez que provamos que nessas condições $\lim F(z_n) = L$. Sendo assim, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L$, em outras palavras, $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ é convergente. \square

1.3.3 Convergência Condicional e Absoluta

Definição 1.36. A integral $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ é chamada de absolutamente convergente se a integral $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ é convergente. Se $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ é convergente, mas $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ é chamada condicionalmente convergente.

Teorema 1.37. Se $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ é absolutamente convergente, então também é convergente.

Demonstração. Se $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge, pelo Teorema 1.35 (Critério de Cauchy):

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 \mid b, c > A \implies \left| \int_b^c |f(t)| dt \right| < \epsilon.$$

Como $\left| \int_b^c |f(t)| dt \right| = \left| \int_b^c f(t) dt \right|$, então

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 \mid b, c > A \implies \left| \int_b^c f(t) dt \right| < \epsilon. \quad (1.7)$$

Da Equação (1.7), novamente pelo Teorema 1.35 (Critério de Cauchy), $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ é convergente. \square

1.4 A Convergência de $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$

Para toda essa seção, considere a função $f : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $s \in \mathbb{C}$.

1.4.1 Funções de Ordem Exponencial γ

Definição 1.38. Uma função f tem ordem exponencial γ se existirem constantes $M > 0$ e $\gamma > 0$ tais que para algum $t_0 \geq 0$,

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Para alguns teoremas, precisaremos garantir que uma função f e algumas de suas derivadas tenham ordem exponencial. Isto, quando for necessário, precisa estar explícito nas hipóteses, uma vez que o primeiro fato não implica o segundo, conforme pode ser conferido no próximo exemplo.

Exemplo 1.39. $f(t) = \text{sen}(e^{t^3})$ possui ordem exponencial, mas $f'(t) = 3t^2 e^{t^3} \cos(e^{t^3})$ não possui.

Demonstração. O $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\text{sen}(e^{t^3}) e^{-\gamma t}| = 0$, já que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\gamma t} = 0$ e $\text{sen}(e^{t^3})$ é limitado. Então, existem constantes $\gamma > 0$ e $M > 0$ tais que para algum $t > 0$,

$$\frac{|\text{sen}(e^{t^3})|}{e^{\gamma t}} \leq M.$$

Da mesma forma, o $\lim_{t \rightarrow +\infty} |3t^2 e^{t^3} \cos(e^{t^3}) e^{-\gamma t}| = +\infty$. Assim, não existem constantes $\gamma > 0$ e $M > 0$ tais que para algum $t > 0$,

$$\frac{|3t^2 e^{t^3} \cos(e^{t^3})|}{e^{\gamma t}} \leq M.$$

Dessa forma, concluímos que $f(t) = \text{sen}(e^{t^3})$ é de ordem exponencial e a função $f'(t) = 3t^2 e^{t^3} \cos(e^{t^3})$ não é de ordem exponencial. \square

Teorema 1.40. *Seja $f : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ derivável. Se f' é contínua em $[0, +\infty[$ e de ordem exponencial γ , segue que o mesmo vale para a função f .*

Demonstração. Da hipótese, f' é de ordem exponencial, então:

$$|f'(t)| \leq M e^{\gamma t}, \quad t \geq t_0.$$

Como f' é contínua, do Teorema 1.16,

$$\int_{t_0}^t f'(\tau) d\tau = f(t) - f(t_0) \implies f(t) = \int_{t_0}^t f'(\tau) d\tau + f(t_0) \quad (1.8)$$

onde $\int_{t_0}^t f'(\tau) d\tau$ é contínua pelo Teorema 1.15. Dessa forma, da Equação (1.8), também concluímos que f é contínua.

Portanto

$$\begin{aligned}
|f(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f'(\tau) d\tau + f(t_0) \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t f'(\tau) d\tau \right| + |f(t_0)| \\
&\stackrel{\text{Ord Exp.}}{\leq} M \int_{t_0}^t e^{\gamma\tau} + |f(t_0)| \\
&= \frac{M}{\gamma} e^{\gamma\tau} \Big|_{t_0}^t + |f(t_0)| \\
&= \frac{M}{\gamma} (e^{\gamma t} - e^{\gamma t_0}) + |f(t_0)| \\
&\leq \frac{M}{\gamma} e^{\gamma t} + |f(t_0)| \\
&\stackrel{\frac{M}{\gamma}=L}{=} L e^{\gamma t} + |f(t_0)|.
\end{aligned}$$

Assim, $|f(t)| \leq L e^{\gamma t} + |f(t_0)|$ e assim é possível encontrar K suficientemente grande tal que $|f(t)| \leq K e^{\gamma t}$. Portanto f é de ordem exponencial γ . □

1.4.2 Continuidade por Partes

Definição 1.41. Uma função f possui um salto de descontinuidade em um ponto t_0 se os limites,

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = f(t_0^-) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) = f(t_0^+)$$

existem (como números) e são distintos, isto é, $f(t_0^-) \neq f(t_0^+)$.

Definição 1.42. Seja $F(s) = \int_0^{+\infty} K(s, t) f(t) dt$. Dizemos que F converge uniformemente em algum domínio Ω no plano complexo se para todo $\epsilon > 0$ existe $\tau_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left| F(s) - \int_0^{\tau} K(s, t) f(t) dt \right| = \left| \int_{\tau}^{+\infty} K(s, t) f(t) dt \right| < \epsilon \quad (1.9)$$

para todo $\tau > \tau_0$ e $s \in \Omega$.

Teorema 1.43. Considere $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $0 < c$. Se $f(x, t)$ é contínua em cada retângulo $a \leq x \leq b$, $0 \leq t \leq c$, exceto por possivelmente um número finito de saltos de descontinuidade, e se $\int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ converge uniformemente para todo x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b \int_0^{+\infty} f(x, t) dt dx = \int_0^{+\infty} \int_a^b f(x, t) dx dt.$$

Demonstração.

$$\int_a^b \int_0^{+\infty} f(x, t) dt dx = \int_a^b \int_0^{\tau} f(x, t) dt dx + \int_a^b \int_{\tau}^{+\infty} f(x, t) dt dx. \quad (1.10)$$

Uma vez que $\int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ é uniformemente convergente, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\tau_0 > 0$ tal que para todo $\tau \geq \tau_0$,

$$\left| \int_{\tau}^{+\infty} f(x, t) dt \right| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

para todo x em $[a, b]$. Portanto, para $\tau \geq \tau_0$,

$$\left| (b-a) \int_{\tau}^{+\infty} f(x, t) dt \right| < \epsilon \implies \left| \int_a^b \int_{\tau}^{+\infty} f(x, t) dt dx \right| < \epsilon$$

isto é,

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_a^b \int_{\tau}^{+\infty} f(x, t) dt dx = 0.$$

Tomando $\tau \rightarrow +\infty$ na Equação (1.10),

$$\int_a^b \int_0^{+\infty} f(x, t) dt dx = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_a^b \int_0^{\tau} f(x, t) dt dx.$$

Dada a hipótese de continuidade da f e a teoria de integração dupla⁶:

$$\int_0^{\tau} \int_a^b f(x, t) dx dt = \int_a^b \int_0^{\tau} f(x, t) dt dx.$$

Portanto,

$$\int_a^b \int_0^{+\infty} f(x, t) dt dx = \int_0^{+\infty} \int_a^b f(x, t) dx dt$$

□

Teorema 1.44. *Considere $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $0 < c$. Suponha que $f(x, t)$ e $\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)$ sejam contínuas em cada retângulo $a \leq x \leq b$, $0 \leq t \leq c$, exceto por possivelmente um número finito de saltos de descontinuidade. Considere também que das integrais*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$$

e

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

a primeira é convergente e a segunda é uniformemente convergente. Então

$$\frac{d}{dx} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt \quad (a < x < b).$$

Demonstração. Seja

$$G(u) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial u} f(u, t) dt.$$

A função G é contínua⁷. Empregando o Teorema 1.43 temos:

⁶O leitor pode conferir o Teorema 4, página 43, do livro [15].

⁷O leitor pode conferir a Proposição 6.7, página 57, do livro [15].

$$\begin{aligned}
\int_a^x G(u) du &= \int_a^x \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial u} f(u, t) dt du \\
&= \int_0^{+\infty} \int_a^x \frac{\partial}{\partial u} f(u, t) du dt \\
&= \int_0^{+\infty} [f(x, t) - f(a, t)] dt \\
&= F(x) - F(a).
\end{aligned}$$

Assim⁸, como $\frac{d}{dx} \int_a^x G(u) du = G(x)$,

$$\frac{d}{dx} F(x) = G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt.$$

□

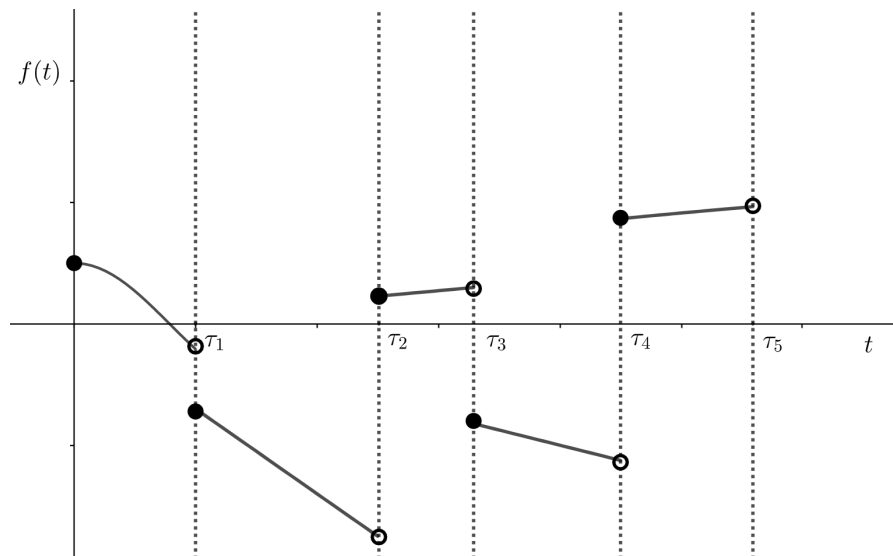
Definição 1.45. Uma função f é contínua por partes no intervalo $[0, +\infty[$ se,

- 1) $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0)$;
- 2) f é contínua em todo intervalo $[0, x[$, para todo $x > 0$, exceto, possivelmente, por um número finito de pontos $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ em $[0, x[$, nos quais f possui um salto de descontinuidade.

Observação 1.46. Na Definição 1.45 estamos assumindo a continuidade de f em $t = 0$, embora não seja totalmente necessário. De fato, basta que $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+)$ exista (como número) para que a Definição 1.45 funcione e os Teoremas 2.26, 2.27 e 2.30 continuariam verdadeiros mesmo trocando $f(0)$ por $f(0^+)$ (ou análogo para as derivadas). No entanto, optamos pela continuidade em $t = 0$ para reduzir e simplificar as notações.

A Figura 1.1 mostra um exemplo de uma função f contínua por partes com alguns pontos que apresentam saltos de descontinuidade.

Figura 1.1: Exemplo de função contínua por partes com saltos de descontinuidade.



Fonte: O autor.

⁸O leitor pode conferir o Teorema 8, página 255, do livro [14].

Observação 1.47. Uma consequência interessante da continuidade por partes de uma função f é que em cada possível subintervalo produzido pelo item 2) da Definição 1.45, f é também limitada. Isto é, para cada subintervalo $]\tau_i, \tau_{i+1}[$, existe $M_i > 0$ tal que $|f(t)| < M_i$, $\tau_i < t < \tau_{i+1}$, onde $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Sendo f contínua por partes em $[0, +\infty[$, para integrar f de 0 à x , onde $x > 0$, basta simplesmente calcular a integral em cada possível subintervalo produzido pelo item 2) da Definição 1.45 e somar os resultados. Ou seja,

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^{\tau_1} f(t)dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)dt + \dots + \int_{\tau_n}^x f(t)dt.$$

Teorema 1.48. *Sejam $f, g : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funções contínuas por partes e de ordem exponencial γ_1 e γ_2 , respectivamente. Então:*

- (i) $c_1 f + c_2 g$ é contínua por partes e possui ordem exponencial $\max\{\gamma_1, \gamma_2\}$, para c_1 e c_2 constantes arbitrárias,
- (ii) fg é contínua por partes e possui ordem exponencial $\gamma_1 + \gamma_2$.

Demonstração. Como a soma e o produto de funções contínuas são contínuas e f e g possuem finitos saltos de descontinuidade, segue que a soma e o produto também terão essas mesmas características, isto é, $c_1 f + c_2 g$ e fg serão também contínuas por partes.

Em relação a ordem exponencial:

- (i) Note que $|f(t)| \leq M_1 e^{\gamma_1 t}$ e $|g(t)| \leq M_2 e^{\gamma_2 t}$. Para $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$, segue que $|f(t)| \leq M_1 e^{\gamma t}$ e $|g(t)| \leq M_2 e^{\gamma t}$. Então

$$\begin{aligned} |(c_1 f + c_2 g)(t)| &= |c_1 f(t) + c_2 g(t)| \\ &\leq |c_1 f(t)| + |c_2 g(t)| \\ &= |c_1| |f(t)| + |c_2| |g(t)| \\ &\leq |c_1| M_1 e^{\gamma t} + |c_2| M_2 e^{\gamma t} \\ &= (|c_1| M_1 + |c_2| M_2) e^{\gamma t} \\ &= M e^{\gamma t} \end{aligned}$$

onde $M = |c_1| M_1 + |c_2| M_2$. Portanto $c_1 f + c_2 g$ possui ordem exponencial $\max\{\gamma_1, \gamma_2\}$.

- (ii) Também,

$$\begin{aligned} |(fg)(t)| &= |f(t)g(t)| \\ &= |f(t)| |g(t)| \\ &\leq M_1 e^{\gamma_1 t} \cdot M_2 e^{\gamma_2 t} \\ &= M_1 M_2 e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t} \\ &= M e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t} \end{aligned}$$

onde $M = M_1 M_2$. Portanto fg possui ordem exponencial $\gamma_1 + \gamma_2$.

□

1.4.3 Condições Suficientes para a Convergência

A seguinte observação será muito importante ao longo do texto, pois será utilizada diversas vezes.

Observação 1.49. Considere $s = x + iy$. Então:

1)

$$\begin{aligned} |e^{-iyt}| &= |\cos(-yt) + i \operatorname{sen}(-yt)| \\ &= |\cos(yt) - i \operatorname{sen}(yt)| \\ &= \sqrt{\cos^2(yt) + \operatorname{sen}^2(yt)} \\ &= \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} |e^{-st}| &= |e^{(-x-iy)t}| \\ &= |e^{-xt}| |e^{-iyt}| \\ &\stackrel{1)}{=} e^{-xt} \end{aligned}$$

Teorema 1.50. *Seja f de ordem exponencial γ e contínua por partes em $[0, x]$ para todo $x > 0$. Então $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ é absolutamente convergente (e também convergente) para $\operatorname{Re}(s) > \gamma$.*

Demonstração. Sendo f de ordem exponencial γ , temos:

$$\exists M_1 > 0, t_0 > 0 \text{ e } \gamma > 0 \mid |f(t)| \leq M_1 e^{\gamma t} \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.11)$$

Como f é contínua por partes em $[0, t_0]$, da Observação 1.47, segue

$$\exists M_2 > 0 \mid |f(t)| \leq M_2 \quad 0 < t < t_0. \quad (1.12)$$

Uma vez que $e^{\gamma t}$ é sempre positivo, podemos dizer da Equação (1.12) que

$$\exists M_3 > 0 \mid |f(t)| \leq M_3 e^{\gamma t} \quad 0 < t < t_0. \quad (1.13)$$

Das Equações (1.11) e (1.13) fica garantido que

$$\exists M > 0 \mid |f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad \forall t > 0. \quad (1.14)$$

Considerando $s = x + iy$, provemos agora que $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$ é absolutamente convergente para $\operatorname{Re}(s) = x > \gamma$

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)| dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u |e^{-st} f(t)| dt$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^u |e^{-st} f(t)| dt &\stackrel{Obs. 1.49}{=} \int_0^u e^{-xt} |f(t)| dt \\
 &\stackrel{Eq. (1.14)}{\leq} M \int_0^u e^{-xt} e^{\gamma t} dt \\
 &= M \int_0^u e^{-(x-\gamma)t} dt \\
 &= \left. \frac{Me^{-(x-\gamma)t}}{-(x-\gamma)} \right|_0^u \\
 &= \frac{M}{x-\gamma} - \frac{Me^{-(x-\gamma)u}}{x-\gamma}.
 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)| dt &\leq \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{M}{x-\gamma} - \frac{Me^{-(x-\gamma)u}}{x-\gamma} \right) \\
 &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{M}{x-\gamma} \left(1 - \frac{1}{e^{(x-\gamma)u}} \right) \\
 &= \frac{M}{x-\gamma}
 \end{aligned}$$

desde que $Re(s) = x > \gamma$.

Portanto $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ é absolutamente convergente, e pelo Teorema 1.37, concluímos que $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ também é convergente para $Re(s) > \gamma$. □

Teorema 1.51. *Seja f de ordem exponencial γ e contínua por partes em $[0, x]$ para todo $x > 0$. Então $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ é uniformemente convergente para $Re(s) > \gamma$.*

Demonstração. Sendo f de ordem exponencial γ , segue que:

$$\exists M > 0, \tau > 0 \text{ e } \gamma > 0 \mid |f(t)| \leq Me^{\gamma t}, \quad t \geq \tau.$$

Considerando que $s = x + iy$, temos:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\tau}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \right| &\stackrel{Obs. 1.49}{\leq} \int_{\tau}^{+\infty} e^{-xt} |f(t)| dt \\
 &\leq M \int_{\tau}^{+\infty} e^{-(x-\gamma)t} dt \\
 &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left. \frac{Me^{-(x-\gamma)t}}{-(x-\gamma)} \right|_{\tau}^u \\
 &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{Me^{-(x-\gamma)\tau}}{x-\gamma} - \frac{Me^{-(x-\gamma)u}}{x-\gamma} \right) \\
 &= \frac{Me^{-(x-\gamma)\tau}}{x-\gamma},
 \end{aligned}$$

desde que $x = \operatorname{Re}(s) > \gamma$. Supondo $x > \gamma$, para qualquer $\epsilon > 0$, sempre pode ser tomado τ suficientemente grande, de forma que

$$\frac{Me^{-(x-\gamma)\tau}}{x-\gamma} < \epsilon.$$

Sendo assim, dado qualquer $\epsilon > 0$, sempre existe um valor $\tau_0 > 0$ tal que

$$\left| \int_{\tau}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \right| < \epsilon, \quad \tau \geq \tau_0$$

para $x = \operatorname{Re}(s) > \gamma$. Pela Definição 1.42, $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ é uniformemente convergente. \square

2 Transformadas de Laplace

Neste capítulo definiremos a Transformada de Laplace e, a partir dele, calcularemos a transformada de diversas funções. Um resumo de todas as transformadas calculadas nesse texto pode ser encontrado nas Tabelas C.1, C.2 e C.3 no Apêndice C. Para a elaboração deste capítulo, foram consultadas as seguintes referências: [2], [6], [9], [16], [25] e [29].

2.1 Transformadas Integrais

Definição 2.1. Dada uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, onde I é um intervalo real, uma transformada integral de f é uma função definida por

$$F(s) = \int_I K(s, t) f(t) dt \quad (2.1)$$

em que $F(s)$ é denominada transformada integral da função f , $K(s, t)$ é chamado de núcleo da transformada e s é um parâmetro complexo.

2.1.1 Exemplos de Transformadas

Considerando uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, a Tabela 2.1 nos mostra alguns exemplos de transformadas de f , em que mudamos apenas o núcleo e o intervalo I (domínio da f):

Tabela 2.1: Exemplos de transformadas integrais.

Núcleo	I	Fórmula	Transformada
$K(s, t) = e^{-st}$	$I = [0, +\infty[$	$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$	Laplace
$K(s, t) = tJ_n(st)$	$I = [0, +\infty[$	$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) t J_n(st) dt$	Hankel
$K(s, t) = t^{s-1}$	$I = [0, +\infty[$	$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt$	Mellin
$K(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{t-s}$	$I = \mathbb{R}$	$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\pi} \frac{1}{t-s} dt$	Hilbert
$K(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ist}$	$I = \mathbb{R}$	$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ist} dt$	Fourier

Na Tabela 2.1, $J_n(t)$ é chamada de Função de Bessel de primeira espécie de ordem n e é representada, para $n = 0, 1, 2, \dots$ como $J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}$.

2.2 Transformadas de Laplace

Na Seção 1.4 do Capítulo 1, estudamos a convergência de integrais do tipo $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$. Como o leitor pode conferir na Seção 2.1.1, tal integral trata-se da Transformada de Laplace de uma função f , definida para valores não negativos de t . Agora, vamos nos aprofundar nos estudos desta transformada.

2.2.1 Definição e Convergência

Definição 2.2. Sejam $f : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função e s um parâmetro real ou complexo. Definimos a *Transformada de Laplace* de f como:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.2)$$

quando a integral imprópria for convergente.

Podemos fazer um paralelo com o Capítulo 1, onde, na Seção 1.2.2, calculamos alguns exemplos de integrais do mesmo tipo da integral da Definição 2.2.

Exemplo 2.3. No Capítulo 1 calculamos as seguintes Transformadas de Laplace. Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } \mathcal{L}(1) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0)$$

$$\text{b) } \mathcal{L}(t) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t dt = \frac{1}{s^2} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0)$$

$$\text{c) } \mathcal{L}(t^n) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N} \quad (s > 0)$$

$$\text{d) } \mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} dt = \frac{1}{s - \alpha} \quad (\operatorname{Re}(s) > \alpha)$$

$$\text{e) } \mathcal{L}(\cos(\alpha t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos(\alpha t) dt = \frac{s}{s^2 + \alpha^2} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0)$$

$$\text{f) } \mathcal{L}(\operatorname{sen}(\alpha t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \operatorname{sen}(\alpha t) dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0)$$

Além dessas transformadas, no Capítulo 1, Seção 1.4.3, também foram demonstrados alguns teoremas sobre a convergência da Transformada de Laplace.

Teorema 2.4. *Seja f de ordem exponencial γ contínua por partes em $[0, x]$ para todo $x > 0$. Então $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ é absolutamente convergente (e também convergente) para $\operatorname{Re}(s) > \gamma$.*

Demonstração. A demonstração segue do Teorema 1.50. □

Teorema 2.5. *Seja f de ordem exponencial γ e contínua por partes em $[0, x]$ para todo $x > 0$. Então $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ é uniformemente convergente para $\operatorname{Re}(s) > \gamma$.*

Demonstração. A demonstração segue do Teorema 1.51. □

Um fato interessante, que pode ser verificado no exemplo a seguir, é que diferentes funções podem ter a mesma transformada.

Exemplo 2.6. Seja

$$g(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha t), & t > 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

visto que um único ponto não altera o valor da integral da Transformada de Laplace, segue que:

$$\mathcal{L}(g(t)) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

resultando exatamente na mesma transformada de $f(t) = \operatorname{sen}(\alpha t)$.

2.2.2 Funções Admissíveis

Definição 2.7. Definimos \mathbb{L} como o conjunto de todas as funções do tipo $f : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tais que a transformada de Laplace existe para algum valor de s .

Definição 2.8. Uma função $f : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é dita admissível se ela for contínua por partes em $[0, x]$ para todo $x > 0$ e possuir ordem exponencial γ .

Pelo Teorema 2.4, funções admissíveis pertencem a \mathbb{L} . No entanto, certamente existem funções em \mathbb{L} que não satisfazem uma ou ambas das condições para ser admissível. Confira o Exemplo 2.9.

Exemplo 2.9. Considere

$$f(t) = 2t e^{t^2} \cos(e^{t^2}).$$

Para todo $\gamma > 0$, como o $\lim_{t \rightarrow +\infty} |2t e^{t^2} \cos(e^{t^2}) e^{-\gamma t}| = +\infty$, não existe $M > 0$ tal que para algum $t_0 \geq 0$,

$$\frac{|f(t)|}{e^{\gamma t}} \leq M, \quad \forall t > t_0.$$

Dessa maneira, concluímos que a função $f(t) = 2t e^{t^2} \cos(e^{t^2})$ não é de ordem exponencial γ para nenhum $\gamma > 0$.

Assim f é contínua por partes em $[0, +\infty[$, mas não é de ordem exponencial. Contudo, a transformada de Laplace de f ,

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} 2t e^{t^2} \cos(e^{t^2}) dt,$$

existe, uma vez que da integração por partes tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) &= \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-st} \operatorname{sen}(e^{t^2}) \Big|_0^a + s \int_0^{+\infty} e^{-st} \operatorname{sen}(e^{t^2}) dt \\ &= -\operatorname{sen}(1) + s\mathcal{L}(\operatorname{sen}(e^{t^2})) \quad (\operatorname{Re}(s) > 0).\end{aligned}$$

Agora perceba que $\mathcal{L}(\operatorname{sen}(e^{t^2}))$ existe, pois $g(t) = \operatorname{sen}(e^{t^2})$ é admissível.

Para todo $\gamma > 0$, como o $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\operatorname{sen}(e^{t^2}) e^{-\gamma t}| = 0$, existe $M > 0$ tal que para algum $t_0 \geq 0$,

$$\frac{|g(t)|}{e^{\gamma t}} \leq M, \quad \forall t > t_0.$$

Desse modo concluímos que a função $g(t) = \operatorname{sen}(e^{t^2})$ é de ordem exponencial.

Obviamente $g(t) = \operatorname{sen}(e^{t^2})$ é contínua e, portanto, contínua por partes em $[0, +\infty[$.

A Transformada de Laplace de $g(t)$ existe pelo Teorema 2.4.

Logo, $\mathcal{L}(2t e^{t^2} \cos(e^{t^2})) = -\operatorname{sen}(1) + s\mathcal{L}(\operatorname{sen}(e^{t^2}))$, onde $\mathcal{L}(\operatorname{sen}(e^{t^2}))$ certamente existe.

Teorema 2.10. Se $f \in \mathbb{L}$ e $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ então

$$\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} F(s) = 0.$$

Demonstração. Sendo $s = x + iy$ e f admissível, temos que existem $\gamma > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \stackrel{\text{Teo. 1.14}}{\leq} \int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)| dt \stackrel{\text{Teo. 1.50}}{\leq} \frac{M}{x - \gamma}$$

para $x > \gamma$.

Assim:

$$\begin{aligned}\left| \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \frac{M}{x - \gamma} &\implies -\frac{M}{x - \gamma} \leq \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \leq \frac{M}{x - \gamma} \implies \\ \implies -\frac{M}{x - \gamma} \leq F(s) \leq \frac{M}{x - \gamma} &\implies -\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{M}{x - \gamma} \right) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} F(s) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{M}{x - \gamma} \right).\end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{M}{x - \gamma} \right) = 0$, segue que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(s) = 0$.

Para os casos em que $f \in \mathbb{L}$, mas não é admissível, o leitor pode encontrar uma demonstração no Teorema 23.2, na página 141, na referência [6]. \square

Observação 2.11. Como consequência do Teorema 2.10, podemos afirmar que qualquer função $F(s)$ que não tende a zero conforme $\operatorname{Re}(s)$ tende a infinito, não pode ser a Transformada de Laplace de nenhuma função $f : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

2.3 Linearidade

Teorema 2.12 (Linearidade). *Se $f_1 \in \mathbb{L}$ para $Re(s) > \alpha$ e $f_2 \in \mathbb{L}$ para $Re(s) > \beta$, então $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in \mathbb{L}$ para $Re(s) > \max\{\alpha, \beta\}$, e*

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}(f_1) + c_2 \mathcal{L}(f_2)$$

para constantes c_1 e c_2 arbitrárias.

Demonstração. Pela Definição 2.2 de Transformada de Laplace, obtemos:

$$\mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = \int_0^{+\infty} (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) e^{-st} dt.$$

Usando a linearidade das integrais,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) &= c_1 \int_0^{+\infty} f_1(t) e^{-st} dt + c_2 \int_0^{+\infty} f_2(t) e^{-st} dt \\ &= c_1 \mathcal{L}(f_1(t)) + c_2 \mathcal{L}(f_2(t)), \quad Re(s) > \max\{\alpha, \beta\}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.13. Calculemos $\mathcal{L}(\cosh(\omega t))$.

A função cosseno hiperbólico é:

$$\cosh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}.$$

Pelo Teorema 2.12,

$$\mathcal{L}(\cosh(\omega t)) = \frac{1}{2} [\mathcal{L}(e^{\omega t}) + \mathcal{L}(e^{-\omega t})] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - \omega} + \frac{1}{s + \omega} \right) = \frac{s}{s^2 - \omega^2}$$

desde que $Re(s) > 0$.

Exemplo 2.14. Calculemos $\mathcal{L}(\sinh(\omega t))$.

A função seno hiperbólico é:

$$\sinh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}.$$

Pelo Teorema 2.12,

$$\mathcal{L}(\sinh(\omega t)) = \frac{1}{2} [\mathcal{L}(e^{\omega t}) - \mathcal{L}(e^{-\omega t})] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - \omega} - \frac{1}{s + \omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$$

desde que $Re(s) > 0$.

Exemplo 2.15. Calculemos $\mathcal{L}(\sin^2(\omega t))$.

Da trigonometria segue que $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega t)$. Pelo Teorema 2.12:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\text{sen}^2(\omega t)) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}(1) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(\cos(2\omega t)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{s}{4\omega^2 + s^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{4\omega^2 + s^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{4\omega^2 + s^2 - s^2}{s(4\omega^2 + s^2)}\right) \\
&= \frac{2\omega^2}{s(4\omega^2 + s^2)}
\end{aligned}$$

desde que $\text{Re}(s) > 0$.

Exemplo 2.16. Calculemos $\mathcal{L}(\cos^2(\omega t))$.

Da trigonometria segue que $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t)$. Pelo Teorema 2.12:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\cos^2(\omega t)) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}(1) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(\cos(2\omega t)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{4\omega^2 + s^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{4\omega^2 + s^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{4\omega^2 + s^2 + s^2}{s(4\omega^2 + s^2)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{4\omega^2 + 2s^2}{s(4\omega^2 + s^2)}\right) \\
&= \frac{2\omega^2 + s^2}{s(4\omega^2 + s^2)}
\end{aligned}$$

desde que $\text{Re}(s) > 0$.

Exemplo 2.17. Calculemos $\mathcal{L}(\cosh^2(\omega t))$.

Sabemos que:

$$\cosh(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}).$$

Elevando os dois lados da igualdade anterior ao quadrado:

$$\begin{aligned}
\cosh^2(\omega t) &= \frac{1}{4}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})^2 \\
&= \frac{1}{4}(e^{2\omega t} + 2e^{\omega t}e^{-\omega t} + e^{-2\omega t}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{2\omega t} + e^{-2\omega t} + 2).
\end{aligned}$$

Aplicando a Transformada de Laplace e usando o Teorema 2.12:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\cosh^2(\omega t)) &= \frac{1}{4} \mathcal{L}(e^{2\omega t} + e^{-2\omega t} + 2) \\
&= \frac{1}{4} (\mathcal{L}(e^{2\omega t}) + \mathcal{L}(e^{-2\omega t}) + 2\mathcal{L}(1)) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s-2\omega} + \frac{1}{s+2\omega} + 2\frac{1}{s} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{s(s+2\omega) + s(s-2\omega) + 2(s^2 - 4\omega^2)}{s(s-2\omega)(s+2\omega)} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{2s^2 + 2s^2 - 8\omega^2}{s(s^2 - 4\omega^2)} \right) \\
&= \frac{s^2 - 2\omega^2}{s(s^2 - 4\omega^2)}
\end{aligned}$$

desde que $Re(s) > 0$.

Exemplo 2.18. Calculemos $\mathcal{L}(\sinh^2(\omega t))$.

Sabemos que:

$$\sinh(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}).$$

Elevando os dois lados da igualdade anterior ao quadrado:

$$\begin{aligned}
\sinh^2(\omega t) &= \frac{1}{4} (e^{\omega t} - e^{-\omega t})^2 \\
&= \frac{1}{4} (e^{2\omega t} - 2e^{\omega t}e^{-\omega t} + e^{-2\omega t}) \\
&= \frac{1}{4} (e^{2\omega t} + e^{-2\omega t} - 2).
\end{aligned}$$

Aplicando a Transformada de Laplace e usando o Teorema 2.12:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\sinh^2(\omega t)) &= \frac{1}{4} \mathcal{L}(e^{2\omega t} + e^{-2\omega t} - 2) \\
&= \frac{1}{4} (\mathcal{L}(e^{2\omega t}) + \mathcal{L}(e^{-2\omega t}) - 2\mathcal{L}(1)) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s-2\omega} + \frac{1}{s+2\omega} - 2\frac{1}{s} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{s(s+2\omega) + s(s-2\omega) - 2(s^2 - 4\omega^2)}{s(s-2\omega)(s+2\omega)} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{2s^2 - 2s^2 + 8\omega^2}{s(s^2 - 4\omega^2)} \right) \\
&= \frac{2\omega^2}{s(s^2 - 4\omega^2)}
\end{aligned}$$

desde que $Re(s) > 0$.

Exemplo 2.19. Seja $f(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$ um polinômio de grau n com coeficientes arbitrários. Calculemos sua Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n).$$

Pelo Teorema 2.12,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n) &= a_0\mathcal{L}(1) + a_1\mathcal{L}(t) + \dots + a_n\mathcal{L}(t^n) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k\mathcal{L}(t^k) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \frac{k!}{s^{k+1}} \end{aligned}$$

desde que $\operatorname{Re}(s) > 0$.

Teorema 2.20. Se

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nt^n$$

onde a_i são coeficientes arbitrários, converge para $t \geq 0$, com

$$|a_n| \leq \frac{k\alpha^n}{n!}$$

para todo n suficientemente grande, $\alpha > 0$ e $k > 0$, então

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\mathcal{L}(t^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}} \quad (\operatorname{Re}(s) > \alpha)$$

com $s = x + iy$.

Demonstração. Como f é representada por uma série de potências convergente, então, f é contínua em $[0, +\infty[$.

Para mostrar que

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\mathcal{L}(t^n)$$

podemos provar que para $N \rightarrow +\infty$, a diferença

$$\left| \mathcal{L}(f(t)) - \sum_{n=0}^N a_n\mathcal{L}(t^n) \right|$$

converge para zero.

Note que

$$\begin{aligned}
 \left| \mathcal{L}(f(t)) - \sum_{n=0}^N a_n \mathcal{L}(t^n) \right| &\stackrel{Teo. 2.12}{=} \left| \mathcal{L} \left((f(t)) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right) \right| \\
 &= \left| \int_0^{+\infty} \left(f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right) e^{-st} dt \right| \\
 &\stackrel{Teo. 1.14}{\leq} \int_0^{+\infty} \left| \left(f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right) e^{-st} \right| dt \\
 &\stackrel{Obs. 1.49}{=} \int_0^{+\infty} \left| \left(f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right) e^{-xt} \right| dt.
 \end{aligned}$$

Isto é,

$$\left| \mathcal{L}(f(t)) - \sum_{n=0}^N a_n \mathcal{L}(t^n) \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| \left(f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right) e^{-xt} \right| dt. \quad (2.3)$$

Definindo $\mathcal{L}_x(h(t)) = \int_0^{+\infty} h(t) e^{-xt} dt$, e tomando $h(t) = f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n$, temos da Equação (2.3):

$$\left| \mathcal{L}(f(t)) - \sum_{n=0}^N a_n \mathcal{L}(t^n) \right| \leq \mathcal{L}_x \left(\left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| \right).$$

Agora, provemos que $\mathcal{L}_x \left(\left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| \right) \rightarrow 0$ conforme $N \rightarrow +\infty$. Para isso, notemos que:

$$\begin{aligned}
 \left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n t^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n t^n| \\
 &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| |t^n| \\
 &\stackrel{t \geq 0}{=} \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| t^n \\
 &\stackrel{Hip.}{\leq} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{k \alpha^n}{n!} t^n \\
 &= k \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} \\
 &= k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} - \sum_{n=0}^N \frac{(\alpha t)^n}{n!} \right) \\
 &= k \left(e^{\alpha t} - \sum_{n=0}^N \frac{(\alpha t)^n}{n!} \right).
 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
\left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| &\leq k \left(e^{\alpha t} - \sum_{n=0}^N \frac{(\alpha t)^n}{n!} \right) \stackrel{\text{Teo. 1.29 (a)}}{\implies} \\
\mathcal{L}_x \left(\left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| \right) &\leq \mathcal{L}_x \left(k \left(e^{\alpha t} - \sum_{n=0}^N \frac{(\alpha t)^n}{n!} \right) \right) \\
&= k \left(\mathcal{L}_x(e^{\alpha t}) - \mathcal{L}_x \left(\sum_{n=0}^N \frac{(\alpha t)^n}{n!} \right) \right) \\
&= k \left(\frac{1}{x - \alpha} - \sum_{n=0}^N \frac{\alpha^n}{n!} \frac{n!}{x^{n+1}} \right) \\
&= k \left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^N \left(\frac{\alpha}{x} \right)^n \right).
\end{aligned}$$

Observe que $\sum_{n=0}^N \left(\frac{\alpha}{x} \right)^n$ é uma série geométrica de razão $\frac{\alpha}{x}$, a qual converge quando $x > \alpha$, quando $N \rightarrow +\infty$.

Neste caso:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_x \left(\left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| \right) &\leq k \left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{x}} \right) \\
&= k \left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x} \frac{1}{\left(\frac{x - \alpha}{x} \right)} \right) \\
&= k \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Assim, para $N \rightarrow +\infty$ e $\text{Re}(s) = x > \alpha$:

$$\left| \mathcal{L}(f(t)) - \sum_{n=0}^N a_n \mathcal{L}(t^n) \right| \leq \mathcal{L}_x \left(\left| f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n \right| \right) \rightarrow 0.$$

Portanto, $\left| \mathcal{L}(f(t)) - \sum_{n=0}^N a_n \mathcal{L}(t^n) \right| \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow +\infty$ e $\text{Re}(s) = x > \alpha$.

Ou seja:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathcal{L}(t^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n!}{s^{n+1}}$$

quando $\text{Re}(s) = x > \alpha$.

□

Exemplo 2.21. Calculemos $\mathcal{L} \left(\frac{\text{sen}(t)}{t} \right)$.

Temos que:

$$f(t) = \frac{\text{sen}(t)}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Considere $x_n = \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$. Então, pelo *Teste de d'Alembert*¹:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| &= \left| \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{(2(n+1)+1)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-1)^n t^{2n}} \right| \\ &= \left| \frac{(-1)^n (-1) t^{2n} t^2}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-1)^n t^{2n}} \right| \\ &= t^2 \left| \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \right|. \end{aligned}$$

Aplicando o limite quando $n \rightarrow +\infty$:

$$t^2 \cdot \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \right) = t^2 \cdot 0 = 0 < 1.$$

Então, pelo *Teste de d'Alembert*, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$ é absolutamente convergente e, portanto, é convergente para todo $t \geq 0$.

Também, note que, denotando $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

$$|a_{2n}| = \frac{1}{(2n+1)!} < \frac{1}{(2n)!} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

Dessa maneira, podemos utilizar o Teorema 2.20. Assim:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\frac{\text{sen}(t)}{t} \right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \mathcal{L}(t^{2n})}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2n+1)! s^{2n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) s^{2n+1}} \\ &= \text{arctg} \left(\frac{1}{s} \right), \quad |s| > 1. \end{aligned}$$

Nesta última igualdade usamos o fato² de que:

¹O leitor pode conferir a página 41 do livro [16].

²Podemos expandir $\frac{1}{1+x^2}$ por série de potências. Se $|x| < 1$ temos:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Desse modo, como $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \text{arctg}(x)$ e $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$, ao integrarmos a série termo a termo, obtemos:

$$\text{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}(x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1\end{aligned}$$

com $x = \frac{1}{s}$, integrando a série termo a termo.

2.4 Primeiro Teorema de Translação

Provemos no seguinte teorema que a translação horizontal da Transformada de Laplace de uma determinada função coincide com a Transformada do produto dessa mesma função por uma exponencial.

Teorema 2.22 (1º Teorema de Translação). *Seja $f \in \mathbb{L}$ com $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ para $\operatorname{Re}(s) > 0$, então para $a \in \mathbb{R}$*

$$F(s - a) = \mathcal{L}(e^{at} f(t)), \quad \operatorname{Re}(s) > a.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}F(s - a) &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt \\ &= \mathcal{L}(e^{at} f(t))\end{aligned}$$

desde que $\operatorname{Re}(s - a) > 0$, isto é, $\operatorname{Re}(s) > a$. □

Exemplo 2.23. Uma vez que, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0)$$

então

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s - a)^{n+1}} \quad (\operatorname{Re}(s) > a).$$

Exemplo 2.24. Uma vez que, para $\operatorname{Re}(s) > 0$,

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen}(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

e

$$\mathcal{L}(\operatorname{cos}(\omega t)) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

então

$$\mathcal{L}(e^{at} \operatorname{sen}(\omega t)) = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

e

$$\mathcal{L}(e^{at} \operatorname{cos}(\omega t)) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

para $\operatorname{Re}(s) > a$.

Exemplo 2.25. Uma vez que, para $\operatorname{Re}(s) > 0$,

$$\mathcal{L}(\operatorname{senh}(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$$

e

$$\mathcal{L}(\operatorname{cosh}(\omega t)) = \frac{s}{s^2 - \omega^2}$$

então

$$\mathcal{L}(e^{at} \operatorname{senh}(\omega t)) = \frac{\omega}{(s-a)^2 - \omega^2}$$

e

$$\mathcal{L}(e^{at} \operatorname{cosh}(\omega t)) = \frac{s-a}{(s-a)^2 - \omega^2}$$

para $\operatorname{Re}(s) > a$.

2.5 Transformada de Laplace das Derivadas e da Integral de uma Função

2.5.1 Transformada das Derivadas de Primeira e Segunda Ordem

Nesta seção e na próxima também, estudaremos ferramentas que são de grande utilidade para a resolução de Problemas de Valor Inicial, quando se conhece as condições iniciais.

Teorema 2.26. *Seja f uma função diferenciável de ordem exponencial γ , com f' contínua por partes em $[0, x]$ para todo $x > 0$. Então*

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$

para $\operatorname{Re}(s) > \gamma$.

Demonstração. Sabendo que,

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\int_0^u e^{-st} f'(t) dt \right)$$

basta calcularmos a integral dentro do parênteses e aplicarmos o limite. Usando integração por partes:

$$\int_0^u e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^u + s \int_0^u e^{-st} f(t) dt = e^{-su} f(u) - f(0) + s \int_0^u e^{-st} f(t) dt.$$

Aplicando o limite,

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(e^{-su} f(u) - f(0) + s \int_0^u e^{-st} f(t) dt \right) = s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt - f(0)$$

para $Re(s) > \gamma$ pois, assim³, $(e^{-su} f(u)) \rightarrow 0$ conforme $u \rightarrow +\infty$.

Temos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt - f(0)$$

para $Re(s) > \gamma$, ou seja,

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0).$$

□

Teorema 2.27. *Sejam f e f' funções diferenciáveis e de ordem exponencial γ , com f'' contínua por partes em $[0, x]$, para todo $x > 0$. Então:*

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 \mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0)$$

para $Re(s) > \gamma$.

Demonstração. Utilizando a mesma linha de raciocínio do Teorema 2.26, obtemos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f''(t) dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\int_0^u e^{-st} f''(t) dt \right).$$

Usando integração por partes

$$\begin{aligned} \int_0^u e^{-st} f''(t) dt &= e^{-st} f'(t) \Big|_0^u + s \int_0^u e^{-st} f'(t) dt \\ &= e^{-su} f'(u) - f'(0) + s \int_0^u e^{-st} f'(t) dt \\ &\stackrel{Re(s) > \gamma}{=} e^{-su} f'(u) - f'(0) + s \left(e^{-su} f(u) - f(0) + s \int_0^u e^{-st} f(t) dt \right) \\ &= e^{-su} f'(u) - f'(0) + s e^{-su} f(u) - sf(0) + s^2 \int_0^u e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

Aplicando o limite,

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(e^{-su} f'(u) - f'(0) + s e^{-su} f(u) - sf(0) + s^2 \int_0^u e^{-st} f(t) dt \right) \\ = s^2 \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

³Isso ocorre porque: $|e^{-su} f(u)| = |e^{(x+iy)u}| |f(u)| = |e^{-xu}| |e^{-iyu}| |f(u)| \stackrel{Obs.1.49}{=} e^{-xu} |f(u)| \stackrel{Ord. Exp.}{\leq} e^{-xu} M e^{\gamma u} = M e^{-(x-\gamma)u} \rightarrow 0$ se $u \rightarrow +\infty$ para $x - \gamma > 0$.

para $Re(s) > \gamma$ pois, assim⁴, $(e^{-su} f(u)) \rightarrow 0$ e $(e^{-su} f'(u)) \rightarrow 0$ conforme $u \rightarrow +\infty$.

Portanto:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f''(t) dt = s^2 \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt - sf(0) - f'(0)$$

para $Re(s) > \gamma$, ou seja,

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 \mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0).$$

□

Exemplo 2.28. Calculemos $\mathcal{L}(\text{sen}^3(\omega t))$.

Com a utilização do Teorema 2.27, temos:

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 \mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0) \quad (2.4)$$

em que

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{sen}^3(\omega t) \implies f(0) = 0 \\ f'(t) &= 3\omega \text{sen}^2(\omega t) \cos(\omega t) \implies f'(0) = 0 \\ f''(t) &= 3\omega^2(\cos(\omega t) \text{sen}(2\omega t) - \text{sen}^3(\omega t)). \end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima na Equação (2.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(3\omega^2(\cos(\omega t) \text{sen}(2\omega t) - \text{sen}^3(\omega t))) &= s^2 \mathcal{L}(\text{sen}^3(\omega t)) \\ \mathcal{L}(3\omega^2(2 \text{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \cos(\omega t) - \text{sen}^3(\omega t))) &= s^2 \mathcal{L}(\text{sen}^3(\omega t)) \\ \mathcal{L}(3\omega^2(2 \text{sen}(\omega t) \cos^2(\omega t) - \text{sen}^3(\omega t))) &= s^2 \mathcal{L}(\text{sen}^3(\omega t)) \\ \mathcal{L}(3\omega^2(2 \text{sen}(\omega t)(1 - \text{sen}^2(\omega t)) - \text{sen}^3(\omega t))) &= s^2 \mathcal{L}(\text{sen}^3(\omega t)) \\ \mathcal{L}(3\omega^2(2 \text{sen}(\omega t) - 2 \text{sen}^3(\omega t)) - \text{sen}^3(\omega t)) &= s^2 \mathcal{L}(\text{sen}^3(\omega t)) \\ \mathcal{L}(6\omega^2 \text{sen}(\omega t) - 6\omega^2 \text{sen}^3(\omega t) - 3\omega^2 \text{sen}^3(\omega t)) &= s^2 \mathcal{L}(\text{sen}^3(\omega t)). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.12,

$$6\omega^2 \mathcal{L}(\text{sen}(\omega t)) - 6\omega^2 \mathcal{L}(\text{sen}^3(\omega t)) - 3\omega^2 \mathcal{L}(\text{sen}^3(\omega t)) = s^2 \mathcal{L} \text{sen}^3(\omega t)$$

$$s^2 \mathcal{L}(\text{sen}^3(\omega t)) + 9\omega^2 \mathcal{L}(\text{sen}^3(\omega t)) = 6\omega^2 \mathcal{L} \text{sen}(\omega t)$$

$$\mathcal{L}(\text{sen}^3(\omega t)) = \frac{6\omega^2}{s^2 + 9\omega^2} \mathcal{L} \text{sen}(\omega t).$$

Como a $\mathcal{L}(\text{sen}(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, obtemos

$$\mathcal{L}(\text{sen}^3(\omega t)) = \frac{6\omega^3}{(s^2 + 9\omega^2)(s^2 + \omega^2)}.$$

⁴Isso ocorre porque: $|e^{-su} f'(u)| = |e^{-(x+iy)u}| |f'(u)| = |e^{-xu}| |e^{-iyu}| |f'(u)|$
 $e^{-xu} |f'(u)| \stackrel{\text{Ord. Exp.}}{\leq} e^{-xu} M e^{\gamma u} = M e^{-(x-\gamma)u} \rightarrow 0$ se $u \rightarrow +\infty$ para $x - \gamma > 0$. Obs.1.49

Após frações parciais⁵

$$\mathcal{L}(\sin^3(\omega t)) = -\frac{3\omega}{4(s^2 + 9\omega^2)} + \frac{3\omega}{4(s^2 + \omega^2)}.$$

Exemplo 2.29. Calculemos $\mathcal{L}(\cos^3(\omega t))$.

Com a utilização do Teorema 2.27, temos:

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0) \quad (2.5)$$

em que

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos^3(\omega t) \implies f(0) = 1 \\ f'(t) &= -3\omega \cos^2(\omega t) \sin(\omega t) \implies f'(0) = 0 \\ f''(t) &= -3\omega^2(-\sin(\omega t) \sin(2\omega t) + \cos^3(\omega t)). \end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima na Equação (2.5)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(-3\omega^2(-\sin(\omega t) \sin(2\omega t) + \cos^3(\omega t))) &= s^2\mathcal{L}(\cos^3(\omega t)) - s \\ \mathcal{L}(-3\omega^2(-2\sin(\omega t) \sin(\omega t) \cos(\omega t) + \cos^3(\omega t))) &= s^2\mathcal{L}(\cos^3(\omega t)) - s \\ \mathcal{L}(-3\omega^2(-2\sin^2(\omega t) \cos(\omega t) + \cos^3(\omega t))) &= s^2\mathcal{L}(\cos^3(\omega t)) - s \\ \mathcal{L}(-3\omega^2(-2(1 - \cos^2(\omega t)) \cos(\omega t) + \cos^3(\omega t))) &= s^2\mathcal{L}(\cos^3(\omega t)) - s \\ \mathcal{L}(-3\omega^2(-2\cos(\omega t) + 2\cos^3(\omega t)) + \cos^3(\omega t)) &= s^2\mathcal{L}(\cos^3(\omega t)) - s \\ \mathcal{L}(6\omega^2 \cos(\omega t) - 9\omega^2 \cos^3(\omega t)) &= s^2\mathcal{L}(\cos^3(\omega t)) - s. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.12,

$$6\omega^2\mathcal{L}(\cos(\omega t)) - 9\omega^2\mathcal{L}(\cos^3(\omega t)) = s^2\mathcal{L}(\cos^3(\omega t)) - s$$

$$s^2\mathcal{L}(\cos^3(\omega t)) + 9\omega^2\mathcal{L}(\cos^3(\omega t)) = 6\omega^2\mathcal{L}(\cos(\omega t)) + s$$

$$\mathcal{L}(\cos^3(\omega t)) = \frac{6\omega^2}{s^2 + 9\omega^2}\mathcal{L}(\cos(\omega t)) + \frac{s}{s^2 + 9\omega^2}.$$

Como a $\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$, obtemos

$$\mathcal{L}(\cos^3(\omega t)) = \frac{6\omega^2 s}{(s^2 + 9\omega^2)(s^2 + \omega^2)} + \frac{s}{s^2 + 9\omega^2}.$$

Após frações parciais⁶

$$\mathcal{L}(\cos^3(\omega t)) = \frac{s}{4(s^2 + 9\omega^2)} + \frac{3s}{4(s^2 + \omega^2)}.$$

⁵O leitor pode conferir o Capítulo 3 dessa dissertação.

⁶O leitor pode conferir o Capítulo 3 dessa dissertação.

2.5.2 Transformada da n -ésima Derivada

Teorema 2.30. *Suponha que $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ sejam diferenciáveis em $[0, +\infty[$ e de ordem exponencial γ com $f^{(n)}$ contínua por partes em $[0, x]$ para todo $x > 0$. Então,*

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n \mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Demonstração. A prova será por indução finita.

- Para $n = 1$,

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt \stackrel{\text{Teo. 2.26}}{=} s \mathcal{L}(f(t)) - f(0).$$

- Suponha que a expressão seja válida para n ,

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n \mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

- Provando para $n + 1$:

Usando integração por partes e aplicando a hipótese de indução,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^{(n+1)}(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[e^{-st} f^{(n)}(t) \right]_0^b + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f^{(n)}(t) dt \\ &= -f^{(n)}(0) + s \mathcal{L}(f^{(n)}(t)) \\ &= -f^{(n)}(0) + s(s^n \mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)) \\ &= s^{n+1} \mathcal{L}(f(t)) - s^n f(0) - s^{n-1} f'(0) - s^{n-2} f''(0) - \dots - s f^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0) \end{aligned}$$

o que termina a demonstração pelo princípio de indução finita. □

Exemplo 2.31. Discutiremos a Transformada de Laplace dos *Polinômios de Laguerre*⁷, definidos por,

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Seja $y(t) = t^n e^{-t}$. Então

$$\mathcal{L}(L_n(t)) = \mathcal{L}\left(e^t \frac{1}{n!} y^{(n)}\right).$$

Como $y(0), y'(0), y''(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ são todos nulos, do Teorema 2.30, temos:

⁷O leitor pode encontrar um estudo sobre estes polinômios em [9].

$$\mathcal{L}(y^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(y) = \frac{s^n n!}{(s+1)^{n+1}}$$

uma vez que $\mathcal{L}(t^n e^{-t}) = \frac{n!}{(s+1)^{n+1}}$. Assim, do Teorema 2.22, segue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(L_n(t)) &= \mathcal{L}\left(e^t \frac{1}{n!} y^{(n)}\right) \\ &= \frac{1}{n!} \mathcal{L}(e^t y^{(n)}) \\ &= \frac{1}{n!} \left[\frac{(s-1)^n n!}{(s-1+1)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} \quad (Re(s) > 1). \end{aligned}$$

2.5.3 Transformada da Integral

Teorema 2.32. *Se f é admissível e*

$$g(t) = \int_0^t f(u) du,$$

então

$$\mathcal{L}(g(t)) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f(t)) \quad (Re(s) > \gamma).$$

Demonstração. Uma vez que $g'(t) = f(t)$, exceto nos possíveis saltos de descontinuidade de f , integrando por partes, temos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} g(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left[\frac{g(t)e^{-st}}{-s} \Big|_0^\tau + \frac{1}{s} \int_0^\tau e^{-st} f(t) dt \right]. \quad (2.6)$$

Como $g(0) = \int_0^0 f(u) du = 0$, para provar que $\mathcal{L}(g(t)) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f(t))$, da Equação (2.6),

precisamos apenas mostrar que $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{g(\tau)e^{-s\tau}}{-s} = 0$.

Para este fim, veja que

$$\begin{aligned} |g(\tau)e^{-s\tau}| &= |g(\tau)| |e^{-s\tau}| \\ &\stackrel{Obs. 1.49}{=} |g(\tau)| e^{-x\tau} \\ &= e^{-x\tau} \left| \int_0^\tau f(u) du \right| \\ &\stackrel{Teo. 1.14}{\leq} e^{-x\tau} \int_0^\tau |f(u)| du \\ &\stackrel{Ord. Exp.}{\leq} M e^{-x\tau} \int_0^\tau e^{\gamma u} du \\ &= \frac{M}{\gamma} (e^{-(x-\gamma)\tau} - e^{-x\tau}) \end{aligned}$$

que tende à zero quando $\tau \rightarrow +\infty$ para $x = \operatorname{Re}(s) > \gamma$. Dessa forma $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{g(\tau)e^{-s\tau}}{-s} = 0$, para $\operatorname{Re}(s) > \gamma$.

Portanto,

$$\mathcal{L}(g(t)) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))$$

para $\operatorname{Re}(s) > \gamma$. □

Exemplo 2.33. Usando o Teorema 2.32, note que:

$$\mathcal{L}(Si(t)) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} du\right) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left(\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right) = \frac{1}{s} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)$$

conforme Exemplo 2.21. A função $Si(t)$ é chamada *seno integral*.

Exemplo 2.34. Sendo $\mathcal{L}(\operatorname{sen}(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, obtemos:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \operatorname{sen}(\omega u) du\right) = \frac{\omega}{s(s^2 + \omega^2)}.$$

Bem como, sendo $\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$, obtemos:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \cos(\omega u) du\right) = \frac{s}{s(s^2 + \omega^2)} = \frac{1}{s^2 + \omega^2}$$

conforme Teorema 2.32.

2.6 Resultados para $s \in \mathbb{R}$

2.6.1 Derivação e Integração de Transformadas de Laplace

Teorema 2.35. Seja $f : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função admissível e $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ com s um parâmetro real. Então

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = \mathcal{L}((-1)^n t^n f(t)) \quad (s > \gamma)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$

Demonstração. A prova será por indução.

- Para $n = 1$:

Sendo $s > \gamma$, pelo Teorema 1.44, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} -te^{-st} f(t) dt \\ &= \mathcal{L}(-t f(t)). \end{aligned}$$

- Supondo que vale para n :

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = \int_0^{+\infty} (-1)^n t^n f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}((-1)^n t^n f(t)) \quad (s > \gamma).$$

- Provando para $n + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}} F(s) &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d^n}{ds^n} F(s) \right) \\ &= \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} (-1)^n t^n f(t) e^{-st} dt \\ &\stackrel{\text{Teo. 1.44}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} \left((-1)^n t^n f(t) e^{-st} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} (-1)^n (-t) t^n f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} (-1)^{n+1} t^{n+1} f(t) e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}((-1)^{n+1} t^{n+1} f(t)) \end{aligned}$$

para $s > \gamma$.

□

Exemplo 2.36. Pelo Teorema 2.35

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t \cos(\omega t)) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\cos(\omega t)) \\ &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= -\left(\frac{s^2 + \omega^2 - s(2s)}{(s^2 + \omega^2)^2} \right) \\ &= \frac{2s^2 - (s^2 + \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^2} \\ &= \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t \sen(\omega t)) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\sen(\omega t)) \\ &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= -\left(\frac{-\omega(2s)}{(s^2 + \omega^2)^2} \right) \\ &= \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.37. Pelo Teorema 2.35

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(t \cosh(\omega t)) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\cosh(\omega t)) \\
 &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 - \omega^2} \right) \\
 &= -\left(\frac{s^2 - \omega^2 - s(2s)}{(s^2 - \omega^2)^2} \right) \\
 &= -\left(\frac{s^2 - \omega^2 - 2s^2}{(s^2 - \omega^2)^2} \right) \\
 &= -\left(\frac{-s^2 - \omega^2}{(s^2 - \omega^2)^2} \right) \\
 &= \frac{s^2 + \omega^2}{(s^2 - \omega^2)^2}
 \end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(t \sinh(\omega t)) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\sinh(\omega t)) \\
 &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \right) \\
 &= -\left(\frac{-\omega(2s)}{(s^2 - \omega^2)^2} \right) \\
 &= \frac{2\omega s}{(s^2 - \omega^2)^2}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 2.38. Pelo Teorema 2.35

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(t^2 \cos(\omega t)) &= \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(\cos(\omega t)) \\
 &= \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) \\
 &= \frac{d}{ds} \left(\frac{s^2 + \omega^2 - s(2s)}{(s^2 + \omega^2)^2} \right) \\
 &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\omega^2 - s^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \right) \\
 &= \frac{-2s(s^2 + \omega^2) + 4s(s^2 - \omega^2)(s^2 + \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^4} \\
 &= \frac{2s(s^2 + \omega^2)[-s^2 - \omega^2 + 2(s^2 - \omega^2)]}{(s^2 + \omega^2)^4} \\
 &= \frac{2s(-s^2 - \omega^2 + 2s^2 - 2\omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^3} \\
 &= \frac{2s(s^2 - 3\omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^3}
 \end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(t^2 \operatorname{sen}(\omega t)) &= \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(\operatorname{sen}(\omega t)) \\
 &= \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\
 &= \frac{d}{ds} \left(\frac{-2s\omega}{(s^2 + \omega^2)} \right) \\
 &= - \left(\frac{2\omega(s^2 + \omega^2)^2 - 8s^2\omega(s^2 + \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^4} \right) \\
 &= \frac{8s^2\omega(s^2 + \omega^2) - 2\omega(s^2 + \omega^2)^2}{(s^2 + \omega^2)^4} \\
 &= \frac{2\omega(s^2 + \omega^2)[4s^2 - (s^2 + \omega^2)]}{(s^2 + \omega^2)^4} \\
 &= \frac{2\omega(3s^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^3}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 2.39. Pelo Teorema 2.35, temos:

$$\mathcal{L}(te^{at}) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s - \alpha} \right) = \frac{1}{(s - \alpha)^2}$$

$$\mathcal{L}(t^2e^{at}) = \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s - \alpha} \right) = -\frac{2}{(s - \alpha)^3}.$$

Nesse caso, por indução, chegamos em:

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(s - \alpha)^{n+1}} \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

De fato,

- Para $n = 1$:

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{(-1)^{2} 1!}{(s - \alpha)^2} = \frac{1}{(s - \alpha)^2}.$$

- Suponha que valha para n :

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{(-1)^{n+1} k!}{(s - \alpha)^{n+1}}.$$

- Provando para $n + 1$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t^{n+1}e^{\alpha t}) &= \frac{d}{ds} \left(\frac{(-1)^{n+1}n!}{(s-\alpha)^{n+1}} \right) \\
&= (-1)^{n+1}n! \left(-\frac{n+1}{(s-\alpha)^{(n+1)+1}} \right) \\
&= (-1)^{n+1}(-1)n! \frac{n+1}{(s-\alpha)^{(n+1)+1}} \\
&= (-1)^{(n+1)+1} \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(s-\alpha)^{(n+1)+1}} \\
&= (-1)^{(n+1)+1} \frac{(n+1)!}{(s-\alpha)^{(n+1)+1}}.
\end{aligned}$$

Portanto, é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.40. *Se f é admissível com $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, sendo s parâmetro real, e tal que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe, então*

$$\int_s^{+\infty} F(x) dx = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) \quad (s > \gamma). \quad (2.7)$$

Demonstração. Sendo

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Segue que

$$\int_s^{+\infty} F(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_s^\omega \left(\int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt \right) dx.$$

Do Teorema 1.51, a integral $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ converge uniformemente para $\gamma < s \leq x \leq \omega$, assim podemos inverter a ordem de integração conforme Teorema 1.43, o que nos dá

$$\begin{aligned}
\int_s^{+\infty} F(x) dx &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(\int_s^\omega e^{-xt} f(t) dx \right) dt \\
&= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left[\frac{e^{-xt}}{-t} f(t) \right] \Big|_s^\omega dt \\
&= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_0^\omega e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt - \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\omega t} \frac{f(t)}{t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt - 0 \\
&= \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) - 0 \\
&= \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right).
\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.41. Note que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(\omega t)}{t} = \omega$. Assim, podemos usar o Teorema 2.40:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{\text{sen}(\omega t)}{t}\right) &= \int_s^{+\infty} \frac{\omega}{x^2 + \omega^2} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_s^u \frac{\omega}{x^2 + \omega^2} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \text{arctg}\left(\frac{x}{\omega}\right) \Big|_s^u \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\text{arctg}\left(\frac{u}{\omega}\right) - \text{arctg}\left(\frac{s}{\omega}\right) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\frac{s}{\omega}\right) \\ &= \text{arctg}\left(\frac{s}{\omega}\right) \quad (s > 0). \end{aligned}$$

Também, note que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{senh}(\omega t)}{t} = \omega$. Então, pelo Teorema 2.40:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{\text{senh}(\omega t)}{t}\right) &= \int_s^{+\infty} \frac{\omega}{x^2 - \omega^2} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_s^u \frac{\omega}{x^2 - \omega^2} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_s^u \left(\frac{1}{x - \omega} - \frac{1}{x + \omega} \right) dx \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln|x - \omega| - \frac{1}{2} \ln|x + \omega| \right) \Big|_s^u \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - \omega}{x + \omega} \right| \right) \Big|_s^u \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{u - \omega}{u + \omega} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{s - \omega}{s + \omega} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{s - \omega}{s + \omega} \right| \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{s - \omega}{s + \omega} \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{s + \omega}{s - \omega} \right| \quad (s > |\omega|). \end{aligned}$$

Observação 2.42. Como $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\omega t)}{t}$ e $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cosh(\omega t)}{t}$ divergem, não podemos utilizar o Teorema 2.40 para calcular $\mathcal{L}\left(\frac{\cos(\omega t)}{t}\right)$ e $\mathcal{L}\left(\frac{\cosh(\omega t)}{t}\right)$.

2.6.2 Teoremas do Valor Inicial e do Valor Final

Os próximos teoremas fornecem informações sobre a função f , para $t \rightarrow 0$ ou $t \rightarrow +\infty$, através da transformada de f , mesmo desconhecendo explicitamente a função.

Teorema 2.43 (Teorema de Valor Inicial). *Seja f uma função diferenciável de ordem exponencial γ , com f' contínua por partes em $[0, x]$ para todo $x > 0$ e $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$. Então,*

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Demonstração. Conforme os Teoremas 2.10 e 2.26, sabemos que para $s > \gamma$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} (sF(s) - f(0)) = 0.$$

O que implica

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s).$$

Sendo f contínua por partes, $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0)$, segue o resultado. \square

Exemplo 2.44. Se $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}$, então $f(0) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \frac{s+1}{(s-1)(s+2)} = 1$.

Teorema 2.45 (Teorema do Valor Final). *Seja f uma função diferenciável de ordem exponencial γ , com f' contínua por partes em $[0, x]$ para todo $x > 0$ e suponha que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ exista. Então, o valor do limite é dado por*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (s \in \mathbb{R})$$

em que $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$.

Demonstração. Sendo f de ordem exponencial γ , pelo Teorema 2.26, para $s > \gamma$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0).$$

Aplicando o limite,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s) - f(0)) &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} f'(t) dt \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u f'(t) dt \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} (f(u) - f(0)). \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (sF(s) - f(0)) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (f(u) - f(0)) \implies \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s).$$

\square

Teorema 2.46 (Generalização do Teorema do Valor Inicial). *Sejam f e g funções diferenciáveis de ordem exponencial γ , com derivadas contínuas por partes em $[0, x]$ para todo $x > 0$ onde $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ e $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$, com s parâmetro real. Se $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$, então $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F(s)}{G(s)} = 1$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F(s)}{G(s)} &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{sF(s)}{sG(s)} \\
 &= \frac{\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)}{\lim_{s \rightarrow +\infty} sG(s)} \\
 &\stackrel{\text{Teo. 2.43}}{=} \frac{\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)}{\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{g(t)} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 2.47 (Generalização do Teorema do Valor Final). *Sejam f e g funções diferenciáveis de ordem exponencial γ , com derivadas contínuas por partes em $[0, t]$ para todo $t > 0$ onde $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ e $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$, com s parâmetro real. Se $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$, então $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s)}{G(s)} = 1$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s)}{G(s)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sF(s)}{sG(s)} \\
 &= \frac{\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} \\
 &\stackrel{\text{Teo. 2.45}}{=} \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)}{\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

3 Transformadas Inversas de Laplace

Estudamos anteriormente a Transformada de Laplace de uma função f definida em $t \in [0, +\infty[$, transformando-a, quando possível, em uma função F definida em $s \in \Omega \subset \mathbb{C}$. De agora em diante, faremos o inverso, conhecendo *a priori* uma função $F(s)$ encontraremos $f(t)$, se possível.

A Transformada de Laplace Inversa é muito importante para o método de solução de Problemas de Valor Inicial (PVI) que estudaremos mais adiante. Tal ferramenta nos auxiliará a solucionar problemas que modelam situações dinâmicas.

Existem duas formas para se abordar a transformada inversa. Uma delas é por meio da Fórmula da Inversão Complexa, que pode ser conferida, por exemplo, no capítulo 4 do livro [25]. Não é nosso intuito usar tal abordagem aqui, pois o conteúdo é extenso e uma dissertação inteira poderia ser redigida sobre ele. Aqui abordaremos simplesmente como, sendo $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, então definimos $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$. Tal definição faz sentido se pudermos garantir a unicidade. Isto faremos sob determinadas condições pelo Teorema de Lerch.

Vimos no Teorema 2.10 que sendo $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, então $\lim_{Re(s) \rightarrow +\infty} F(s) = 0$. Desse modo, só faz sentido procurar $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$ quando a função $F(s) \rightarrow 0$ conforme $Re(s) \rightarrow +\infty$, caso contrário $F(s)$ não pode ser a transformada de nenhuma $f(t)$.

Para a elaboração deste capítulo, foram consultadas as referências [8] e [25].

3.1 Definição e o Teorema de Lerch

Definição 3.1. Considere $f : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ com s um parâmetro complexo. Sendo $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, definimos a *Transformada Inversa de Laplace* de f como:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$$

Um problema para ponderar na Definição 3.1 é que $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$ pode resultar em mais de uma função¹. Todavia, sob determinadas condições, o Teorema a seguir garante unicidade.

Teorema 3.2 (Teorema de Lerch). *Sejam $f, g : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funções contínuas com $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ e $\mathcal{L}(g(t)) = G(s)$ tais que $F(s) = G(s)$, $Re(s) > \alpha$. Então $f(t) = g(t)$.*

Demonstração. Defina $h : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, contínua, por $h(t) = f(t) - g(t)$. Para provarmos que $f(t) = g(t)$, basta provarmos que $h(t) = 0$. Note, primeiramente, que:

$$H(s) = \mathcal{L}(h(t)) = \mathcal{L}(f(t)) - \mathcal{L}(g(t)) = F(s) - G(s) = 0$$

¹Veja o Exemplo 2.6 do Capítulo 2.

ou seja, $H(s) = 0$, para $Re(s) > \alpha$.

Com isso, para $n \in \mathbb{N}$:

$$H(\alpha + n) = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+n)t} h(t) dt = 0 \implies \int_0^{+\infty} e^{-nt} e^{-\alpha t} h(t) dt = 0.$$

Usando integração por partes, temos:

$$u(t) = e^{-nt} \quad dv = e^{-\alpha t} h(t) dt$$

$$du = -ne^{-nt} dt \quad v(t) = \int_0^t e^{-\alpha y} h(y) dy.$$

Logo

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-nt} v(t) \Big|_0^a + n \int_0^{+\infty} e^{-nt} v(t) dt = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-na} v(a) - \lim_{a \rightarrow +\infty} v(0) + n \int_0^{+\infty} e^{-nt} v(t) dt = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-na} \int_0^a e^{-\alpha y} h(y) dy - 0 + n \int_0^{+\infty} e^{-nt} v(t) dt = 0.$$

Como $\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-na} v(a) = 0$ e $v(0) = 0$, segue que:

$$n \int_0^{+\infty} e^{-nt} v(t) dt = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Desse modo,

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt} v(t) dt = 0 \tag{3.1}$$

Queremos provar que $h(t) = 0$. Note que h é contínua e que $\frac{dv(t)}{dt} = e^{-\alpha t} h(t)$. Se provarmos que $v(t) = 0$, teremos $\frac{dv(t)}{dt} = 0 = e^{-\alpha t} h(t)$ e, uma vez que, $e^{-\alpha t} \neq 0$, concluiremos que $h(t) = 0$.

Provemos que $v(t) = 0$. Na Equação (3.1) considere a mudança de variável $t = -\ln(x)$ e $m(x) = v(-\ln(x))$. Então:

$$\int_0^1 x^n m(x) dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como todo polinômio é uma combinação linear finita de $x^0, x^1, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$ e usando a linearidade das integrais, segue que:

$$\int_0^1 p(x) m(x) dx = 0 \tag{3.2}$$

para qualquer polinômio $p(x)$.

Por outro lado, pelo Caso Complexo do Teorema da Aproximação de Weierstrass², para todo $\epsilon > 0$, existe um polinômio $p_\epsilon(x)$ tal que $|m(x) - p_\epsilon(x)| < \epsilon, \forall x \in [0, 1]$.

²O leitor pode conferir o Corolário 1.4 página 8 da dissertação [17].

Da Equação (3.2), para todo $\epsilon > 0$, temos:

$$\int_0^1 p_\epsilon(x)m(x) dx = 0. \quad (3.3)$$

Assim:

$$|m(x) - p_\epsilon(x)| < \epsilon \implies |m(x) - p_\epsilon(x)|^2 < \epsilon^2 \implies |m(x) - p_\epsilon(x)|^2 < \epsilon^2 + p_\epsilon(x)^2 \implies$$

$$\implies \int_0^1 |m(x) - p_\epsilon(x)|^2 dx < \int_0^1 (\epsilon^2 + p_\epsilon(x)^2) dx \stackrel{\text{Eq. (3.3)}}{\implies}$$

$$\implies \int_0^1 m(x)^2 dx - 2 \cdot 0 + \int_0^1 p_\epsilon(x)^2 dx < \epsilon^2 \int_0^1 dx + \int_0^1 p_\epsilon(x)^2 dx \implies$$

$$\implies \int_0^1 m(x)^2 dx < \epsilon^2, \quad \forall \epsilon > 0 \implies$$

$$\implies \int_0^1 (m(x))^2 dx = 0 \implies m(x) = 0, \forall x \in [0, 1].$$

Desse modo, $v(t) = 0, \forall t \in [0, +\infty[$ e, portanto, $h(t) = 0$, como queríamos provar. \square

Exemplo 3.3. Do Exemplo 2.3, segue que:

a) $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \right) = 1$

b) $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2} \right) = t$

c) $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{n!}{s^{(n+1)}} \right) = t^n, \quad n \in \mathbb{N}$

d) $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s - \alpha} \right) = e^{\alpha t}$

e) $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + \alpha^2} \right) = \cos(\alpha t)$

f) $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \right) = \text{sen}(\alpha t).$

3.2 Linearidade

Teorema 3.4 (Linearidade). *Considere $f, g : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Se $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ e $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$, então*

$$\mathcal{L}^{-1}(aF(s) + bG(s)) = af(t) + bg(t)$$

com a e b constantes quaisquer.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(aF(s) + bG(s)) &= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(af(t)) + \mathcal{L}(bg(t))) \\ &= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(af(t) + bg(t))) \\ &= af(t) + bg(t). \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.5.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s+1)}\right) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) \\ &\stackrel{\text{Teo. 3.4}}{=} \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \\ &= \cosh(t). \end{aligned}$$

Exemplo 3.6. Do Exemplo 2.23, vimos que

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\operatorname{Re}(s) > a)$$

Então:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right) = \frac{1}{n!}t^n e^{at}.$$

Exemplo 3.7.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 4s + 1}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s+2)^2 - 3}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2-2}{(s+2)^2 - 3}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2 - 3}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+2)^2 - 3}\right) \\ &\stackrel{\text{Ex. 2.25}}{=} e^{-2t} \cosh(\sqrt{3}t) - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-2t} \sinh(\sqrt{3}t). \end{aligned}$$

Exemplo 3.8. Usando o Teorema 2.35 e considerando $n = 1$, obtemos a seguinte fórmula:

$$f(t) = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d}{ds}F(s)\right). \quad (3.4)$$

Essa fórmula é útil, por exemplo, com ela podemos calcular f onde

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\ln \left(\frac{s+a}{s+b} \right) \right).$$

De fato, uma vez que,

$$\frac{d}{ds} \left(\ln \left(\frac{s+a}{s+b} \right) \right) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$$

obtemos da Equação (3.4), que:

$$f(t) = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right) = \frac{1}{t} (e^{-bt} - e^{-at}).$$

3.3 Frações Parciais

Em muitos casos, quando $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ é uma função racional, as frações parciais podem ser primordiais para encontrar a inversa de uma determinada transformada $F(s)$.

3.3.1 Decomposição de Frações Parciais

Neste tópico estaremos preocupados com o caso em que $F(s)$ é o quociente entre dois polinômios, chamado de função racional

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

em que o grau do polinômio $Q(s)$ é maior que o grau do polinômio $P(s)$ e ambos não possuem fatores comuns. Neste caso, $F(s)$ pode ser expresso como uma soma finita de frações parciais, onde:

- Cada fator linear na forma $as + b$ de $Q(s)$, corresponde a uma fração parcial na forma

$$\frac{A}{as + b}$$

em que A é uma constante.

- Cada fator linear repetido na forma $(as + b)^n$, corresponde a uma soma de frações parciais na forma

$$\frac{A_1}{as + b} + \frac{A_2}{(as + b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(as + b)^n}$$

em que A_1, A_2, \dots, A_n são constantes.

- Cada fator quadrático irredutível na forma $as^2 + bs + c$, corresponde a uma fração parcial na forma

$$\frac{As + B}{as^2 + bs + c}$$

em que A e B são constantes.

- Cada fator quadrático irredutível repetido na forma $(as^2 + bs + c)^n$, corresponde a uma soma de frações parciais na forma

$$\frac{A_1s + B_1}{as^2 + bs + c} + \frac{A_2s + B_2}{(as^2 + bs + c)^2} + \dots + \frac{A_ns + B_n}{(as^2 + bs + c)^n}$$

em que $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ são constantes.

O objetivo é encontrar as constantes, uma vez que, o polinômio $\frac{P(s)}{Q(s)}$ tem sido representado por uma decomposição de frações parciais. Isso pode ser alcançado por diferentes formas, como ilustraremos nos Exemplos que seguem.

Exemplo 3.9. Para encontrar

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right)$$

é necessário aplicarmos frações parciais

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-a)(s-b)} &= \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b} \\ &= \frac{A(s-b) + B(s-a)}{(s-a)(s-b)} \\ &= \frac{As - Ab + Bs - Ba}{(s-a)(s-b)} \\ &= \frac{(A+B)s - Ab - Ba}{(s-a)(s-b)}. \end{aligned}$$

O que implica:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -Ab - Ba = 1 \end{cases}$$

Depois de algumas manipulações algébricas, obtemos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a-b} \\ B &= -\frac{1}{a-b} \end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right) &= A\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) + B\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-b}\right) \\ &= \left(\frac{1}{a-b}\right)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) + \left(-\frac{1}{a-b}\right)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-b}\right) \\ &= \left(\frac{1}{a-b}\right)e^{at} - \left(\frac{1}{a-b}\right)e^{bt}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.10. Para encontrar

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} \right) \quad (a \neq b)$$

utilizamos frações parciais

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} &= \frac{As + B}{s^2 + a^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + b^2} \\ &= \frac{(As + B)(s^2 + b^2) + (Cs + D)(s^2 + a^2)}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} \\ &= \frac{As^3 + Asb^2 + Bs^2 + Bb^2 + Cs^3 + Csa^2 + Ds^2 + Da^2}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} \\ &= \frac{(A + C)s^3 + (B + D)s^2 + (Ab^2 + Ca^2)s + Bb^2 + Da^2}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ Ab^2 + Ca^2 = 1 \\ Bb^2 + Da^2 = 0 \end{cases}$$

Após algumas manipulações algébricas encontramos

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{a^2 - b^2} \\ B &= 0 \\ C &= \frac{1}{a^2 - b^2} \\ D &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} \right) &= A\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + a^2} \right) + B\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2 + a^2} \right) + \\ &\quad + C\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + b^2} \right) + D\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2 + b^2} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{a^2 - b^2} \right) \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + a^2} \right) + \left(\frac{1}{a^2 - b^2} \right) \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + b^2} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{a^2 - b^2} \right) \cos(at) + \left(\frac{1}{a^2 - b^2} \right) \cos(bt). \end{aligned}$$

Exemplo 3.11. Para encontrar

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 - b^2)} \right)$$

utilizamos frações parciais

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 - b^2)} &= \frac{s}{(s^2 + a^2)(s + b)(s - b)} \\ &= \frac{As + B}{s^2 + a^2} + \frac{C}{s + b} + \frac{D}{s - b} \\ &= \frac{(As + B)(s + b)(s - b) + C(s^2 + a^2)(s - b) + D(s^2 + a^2)(s + b)}{(s^2 + a^2)(s + b)(s - b)}. \end{aligned}$$

Assim:

$$s = (As + B)(s^2 - b^2) + C(s^2 + a^2)(s - b) + D(s^2 + a^2)(s + b). \quad (3.5)$$

Tomando $s = b$ na Equação (3.5) temos:

$$D(b^2 + a^2)2b = b \implies D = \frac{1}{2(a^2 + b^2)}.$$

Tomando $s = -b$ na Equação (3.5) temos:

$$C(b^2 + a^2)(-2b) = -b \implies C = \frac{1}{2(a^2 + b^2)}.$$

Expandindo um pouco mais a Equação (3.5) e reordenando os termos,

$$s = (A + C + D)s^3 + (B - Cb + Db)s^2 + (Ca^2 - Ab^2 + Da^2)s - Bb^2 - Ca^2b + Da^2b.$$

O que implica:

$$\begin{cases} A + C + D = 0 \\ B - Cb + Db = 0 \\ Ca^2 - Ab^2 + Da^2 = 1 \\ -Bb^2 - Ca^2b + Da^2b = 0 \end{cases}$$

Sabendo que $C = D = \frac{1}{2(a^2 + b^2)}$, chegamos em $A = -\frac{1}{a^2 + b^2}$ e $B = 0$.

Aplicando a transformada inversa:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 - b^2)} \right) &= A\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + a^2} \right) + B\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2 + a^2} \right) + \\ &+ C\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s + b} \right) + D\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s - b} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2(a^2 + b^2)} \right) e^{bt} + \left(\frac{1}{2(a^2 + b^2)} \right) e^{-bt} + \left(\frac{-1}{a^2 + b^2} \right) \cos(at) \\ &= \left(\frac{1}{a^2 + b^2} \right) (\cosh(bt) - \cos(at)). \end{aligned}$$

Exemplo 3.12.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{2s^2 + s - 1}\right).$$

Aplicando frações parciais,

$$\frac{s}{2s^2 + s - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{(s - 1/2)(s + 1)} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s - 1/2)(s + 1)} &= \frac{A}{s - 1/2} + \frac{B}{s + 1} \\ &= \frac{A(s + 1) + B(s - 1/2)}{(s - 1/2)(s + 1)} \\ &= \frac{As + A + Bs - B/2}{(s - 1/2)(s + 1)} \\ &= \frac{(A + B)s + A - B/2}{(s - 1/2)(s + 1)}. \end{aligned}$$

O que implica

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B/2 = 0 \end{cases}$$

Depois de algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3} \\ B &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{2s^2 + s - 1}\right) &= \frac{1}{2} \left(A\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s - 1/2}\right) + B\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s + 1}\right) \right) \\ &= \frac{1}{6}e^{t/2} + \frac{1}{3}e^{-t}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.13. Para encontrar

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s + 1}{s^2(s - 1)}\right)$$

escrevemos

$$\frac{s + 1}{s^2(s - 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s - 1}$$

ou ainda

$$s + 1 = As(s - 1) + B(s - 1) + Cs^2$$

que é uma identidade para qualquer que seja s . Tomando $s = 0$ encontramos $B = -1$, $s = 1$ encontramos $C = 2$. Com os valores de B e C encontramos $A = -2$.

Aplicando a transformada inversa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2(s-1)}\right) &= A\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + B\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + C\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) \\ &= -2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) \\ &= -2 - t + 2e^t.\end{aligned}$$

Exemplo 3.14. Para encontrar

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2}\right)$$

temos

$$\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2}$$

ou ainda

$$2s^2 = (As+B)(s-1)^2 + C(s^2+1)(s-1) + D(s^2+1).$$

Tomando $s = 1$ encontramos $D = 1$. Da mesma forma, tomando $s = 0$ encontramos $B - C + D = 0$, o que dá

$$B - C = -1. \quad (3.6)$$

Além disso, considerando os coeficientes de s^3 e s , temos

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

Estas duas últimas equações implicam em $B = 0$. Logo da Equação (3.6), $C = 1$; finalmente, encontramos $A = -1$. Aplicando a transformada inversa, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2}\right) &= A\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + B\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + \\ &+ C\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + D\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) \\ &= -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) \\ &= -\cos(t) + e^t + te^t.\end{aligned}$$

Exemplo 3.15.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+1}{s(s-1)^3}\right).$$

Por frações parciais,

$$\begin{aligned} \frac{s^2 + 1}{s(s-1)^3} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{(s-1)^3} \\ &= \frac{A(s-1)^3 + Bs(s-1)^2 + Cs(s-1) + Ds}{s(s-1)^3} \\ &= \frac{As^3 - 3As^2 + 3As - A + Bs^3 - 2Bs^2 + Bs + Cs^2 - Cs + Ds}{s(s-1)^3} \\ &= \frac{(A+B)s^3 + (-3A-2B+C)s^2 + (3A+B-C+D)s - A}{s(s-1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A - 2B + C = 1 \\ 3A + B - C + D = 0 \\ -A = 1 \end{cases}$$

Depois de algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 1 \\ C &= 0 \\ D &= 2 \end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2 + 1}{s(s-1)^3}\right) &= A\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + B\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \\ &\quad + C\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) + D\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^3}\right) \\ &= -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s-1)^3}\right) \\ &= t^2 e^t + e^t - 1. \end{aligned}$$

Exemplo 3.16. Para encontrar

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{s^5 - 3s^4 + 2s^3}\right)$$

é necessário utilizarmos frações parciais

$$\begin{aligned} \frac{s+2}{s^5 - 3s^4 + 2s^3} &= \frac{s+2}{s^3(s-2)(s-1)} \\ \frac{s+2}{s^3(s-2)(s-1)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s-2} + \frac{E}{s-1} \\ &= \frac{As^2(s-2)(s-1) + Bs(s-2)(s-1) + C(s-2)(s-1) + Ds^3(s-1) + Es^3(s-2)}{s^3(s-2)(s-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{As^4 - 3As^3 + 2As^2 + Bs^3 - 3Bs^2 + 2Bs + Cs^2 - 3Cs + 2C + Ds^4 - Ds^3 + Es^4 - 2Es^3}{s^3(s-2)(s-1)} \\
&= \frac{(A+D+E)s^4 + (-3A+B-D-2E)s^3 + (2A-3B+C)s^2 + (2B-3C)s + 2C}{s^3(s-2)(s-1)}
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{cases}
A + D + E = 0 \\
-3A + B - D - 2E = 0 \\
2A - 3B + C = 0 \\
2B - 3C = 1 \\
2C = 2
\end{cases}$$

Após algumas manipulações algébricas

$$\begin{aligned}
A &= \frac{5}{2} \\
B &= 2 \\
C &= 1 \\
D &= \frac{1}{2} \\
E &= -3
\end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{s^5-3s^4+2s^3}\right) &= A\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + B\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + C\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) + \\
&+ D\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) + E\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) \\
&= \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right) + \\
&+ \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) - 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{2t} - 3e^t + \frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

3.3.2 Pólos Simples

Teorema 3.17. Considere $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ onde

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\dots(s-\alpha_n)}$$

com constantes³ tais que $\alpha_i \neq \alpha_j$ para $i \neq j$ e $P(s)$ um polinômio com grau menor que n . Então

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \sum_{i=1}^n \lim_{s \rightarrow \alpha_i} (s - \alpha_i) F(s) e^{\alpha_i t}$$

³Na terminologia de variáveis complexas, os α_i 's são denominados pólos simples de $F(s)$.

Demonstração. Usando a decomposição em frações parciais em $F(s)$,

$$F(s) = \frac{A_1}{s - \alpha_1} + \frac{A_2}{s - \alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{s - \alpha_n}. \quad (3.7)$$

Multiplicando ambos os lados da Equação (3.7) por $s - \alpha_i$ e tomando $s \rightarrow \alpha_i$, obtemos

$$A_i = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} (s - \alpha_i)F(s). \quad (3.8)$$

Desse modo,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A_i}{s - \alpha_i}\right) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\alpha_i t}$$

Utilizando a Equação (3.8) para A_i conseguimos um método muito rápido para encontrar a inversa,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \sum_{i=1}^n \lim_{s \rightarrow \alpha_i} (s - \alpha_i)F(s) e^{\alpha_i t}. \quad (3.9)$$

□

Exemplo 3.18. Seja

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right)$$

então:

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{s \rightarrow a} (s-a)F(s)e^{at} + \lim_{s \rightarrow b} (s-b)F(s)e^{bt} \\ &= \left(\frac{1}{a-b}\right)e^{at} + \left(\frac{1}{b-a}\right)e^{bt} \\ &= \left(\frac{1}{a-b}\right)e^{at} - \left(\frac{1}{a-b}\right)e^{bt} \end{aligned}$$

como visto no Exemplo 3.9.

Exemplo 3.19. Seja

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{2s^2 + s - 1}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{(s-1/2)(s+1)}\right)$$

considerando $F(s) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-1/2)(s+1)}\right)$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} \left(s - \frac{1}{2}\right)F(s)e^{t/2} + \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)F(s)e^{-t} \\ &= \left(\frac{1}{\frac{3}{2}}\right)e^{t/2} + \left(\frac{-1}{-\frac{3}{2}}\right)e^{-t} \\ &= \frac{1}{3}e^{t/2} + \frac{2}{3}e^{-t} \end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{2s^2 + s - 1}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}e^{t/2} + \frac{2}{3}e^{-t}\right) \\ &= \frac{1}{6}e^{t/2} + \frac{1}{3}e^{-t}\end{aligned}$$

como visto no Exemplo 3.12.

4 A Função Gamma

Neste capítulo será estudado um importante resultado chamado de Teorema da Convolução, o qual nos permitirá trabalhar com o produto de duas funções já transformadas no domínio $s \in \mathbb{C}$.

Também será definida e calculada a Transformada de Laplace da Função Gamma, função essa que pode ser utilizada como forçante descontínua em um Problema de Valor Inicial. A partir do estudo da Função Gamma, outras funções especiais serão derivadas, tais como as Funções Erro, Erro Complementar, Beta e de Bessel.

Para a redação deste capítulo, foram consultadas as seguintes referências: [1], [25] e [29].

4.1 Convolução

Definição 4.1. Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções admissíveis definidas para t não negativo. Definimos a convolução de f e g como:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau. \quad (4.1)$$

Teorema 4.2. Sejam f , g e h funções admissíveis definidas para t não negativo. Então,

(i) $c(f * g) = cf * g = f * cg$, em que c é uma constante;

(ii) $(f * g) = (g * f)$ (comutativa)

(iii) $f * (g * h) = (f * g) * h$ (associativa);

(iv) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ (distributiva).

Demonstração. (i) Como

$$c \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau = \int_0^t (cf(\tau))g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)(cg(t - \tau)) d\tau.$$

Segue que $(c(f * g))(t) = (cf * g)(t) = (f * cg)(t)$.

(ii) Fazendo uma mudança de variáveis, com $u = t - \tau$ e $-du = d\tau$, temos:

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \\
&= \int_t^0 f(t - u)g(u) (-du) \\
&= - \int_t^0 g(u)f(t - u)du \\
&= \int_0^t g(u)f(t - u) du \\
&= (g * f)(t).
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
(f(t) * g(t)) * h(t) &= \int_0^t (f * g)(\tau)h(t - \tau)d\tau \\
&= \int_0^t \left[\int_0^\tau f(u)g(\tau - u) du \right] h(t - \tau) d\tau \\
&= \int_0^t \int_0^\tau f(u)g(\tau - u)h(t - \tau) du d\tau \\
&= \int_{0 \leq u \leq \tau \leq t} f(u)g(\tau - u)h(t - \tau) du d\tau \\
&= \int_{u=0}^t \int_{\tau=u}^t f(u)g(\tau - u)h(t - \tau) d\tau du.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis, $x = \tau - u$, onde $dx = d\tau$, temos:

$$\begin{aligned}
(f(t) * g(t)) * h(t) &= \int_0^t f(u) \left[\int_u^t g(\tau - u)h(t - \tau) d\tau \right] du \\
&= \int_0^t f(u) \left[\int_0^{t-u} g(x)h(t - u - x) dx \right] du \\
&= \int_0^t f(u)(g * h)(t - u)du \\
&= f(t) * (g(t) * h(t)).
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
(f * (g + h))(t) &= \int_0^t f(\tau)(g(t - \tau) + h(t - \tau)) d\tau \\
&= \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau + \int_0^t f(\tau)h(t - \tau) d\tau \\
&= (f * g)(t) + (f * h)(t).
\end{aligned}$$

□

Exemplo 4.3. Se $f(t) = e^{at}$ e $g(t) = e^{bt}$, com a e b constantes, então

$$\begin{aligned}
 (f * g)(t) &= \int_0^t e^{a\tau} e^{b(t-\tau)} d\tau \\
 &= \int_0^t e^{a\tau} e^{bt} e^{-b\tau} d\tau \\
 &= \int_0^t e^{bt} e^{(a-b)\tau} d\tau \\
 &= \frac{e^{bt} e^{(a-b)\tau}}{a-b} \Big|_0^t \\
 &= \frac{e^{bt} e^{(a-b)t}}{a-b} - \frac{e^{bt}}{a-b} \\
 &= \frac{e^{bt} e^{at} e^{-bt}}{a-b} - \frac{e^{bt}}{a-b} \\
 &= \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}.
 \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left(\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}\right) &= \frac{1}{a-b} (\mathcal{L}(e^{at}) - \mathcal{L}(e^{bt})) \\
 &= \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right) \\
 &= \frac{1}{a-b} \left(\frac{s-b - (s-a)}{(s-a)(s-b)}\right) \\
 &= \frac{1}{a-b} \left(\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}\right) \\
 &= \frac{1}{(s-a)(s-b)}.
 \end{aligned}$$

O próximo teorema nos dará uma opção para calcular a transformada de uma convolução.

Teorema 4.4 (Teorema da Convolução). *Sejam $f, g : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funções admissíveis com $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ e $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$. Então*

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = F(s) \cdot G(s).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}((f * g)(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right] dt \\
 &= \int_{t=0}^{+\infty} \int_{\tau=0}^t e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt \\
 &= \int_{0 \leq \tau \leq t < +\infty} e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt \\
 &= \int_{\tau=0}^{+\infty} \int_{t=\tau}^{+\infty} e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) dt d\tau.
 \end{aligned}$$

Mudança de variável:

$$u = t - \tau \quad t = \tau \implies u = 0$$

$$du = dt \quad t = +\infty \implies u = +\infty.$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}((f * g)(t)) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-s(u+\tau)} f(\tau)g(u) du d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-su} e^{-s\tau} f(\tau)g(u) du d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} e^{-su} g(u) du \\ &= F(s) \cdot G(s). \end{aligned}$$

□

Exemplo 4.5. Pelo Teorema 4.4 calcularemos novamente a mesma transformada do Exemplo 4.3.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{at} * e^{bt}) &= \mathcal{L}(e^{at}) \cdot \mathcal{L}(e^{bt}) \\ &= \left(\frac{1}{s-a}\right) \cdot \left(\frac{1}{s-b}\right) \\ &= \frac{1}{(s-a)(s-b)}. \end{aligned}$$

Observação 4.6. O Teorema 4.4 nos permite também calcular a inversa do produto de duas transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = (f * g)(t)$$

em que $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ e $\mathcal{L}(g(t)) = G(s)$.

Exemplo 4.7. Pela Observação 4.6 e Exemplo 4.3, temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right) = e^{at} * e^{bt} = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}.$$

4.2 Função Gamma

Sabemos do Exemplo 1.25 que

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2)$$

Agora considere a Equação (4.2). Estendendo-a para valores não inteiros de n , temos

$$\mathcal{L}(t^\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^\nu dt. \quad (4.3)$$

Provemos que a integral da Equação (4.3) converge quando $\nu > -1$ e $s \in \mathbb{R}_+^*$:
De fato,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t^\nu dt = \underbrace{\int_0^1 e^{-st} t^\nu dt}_1 + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-st} t^\nu dt}_2.$$

Provemos a convergência das integrais.

1) Sendo $s \in \mathbb{R}_+^*$, $t^\nu e^{-st} \leq t^\nu$. Com isso:

$$\int_0^1 e^{-st} t^\nu dt \leq \int_0^1 t^\nu dt. \quad (4.4)$$

Para $\nu > -1$, a integral do lado direito da Equação (4.4) é convergente. Portanto, nessas condições, $\int_0^1 e^{-st} t^\nu dt$ também converge.

2) Sendo $s \in \mathbb{R}_+^*$ e $\nu > -1$, para t suficientemente grande:

$$t^\nu \leq e^{\frac{st}{2}} \implies t^\nu e^{-st} \leq e^{\frac{st}{2}} e^{-st} \implies t^\nu e^{-st} \leq e^{-\frac{st}{2}}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} t^\nu e^{-st} dt &\leq \int_1^{+\infty} e^{-\frac{st}{2}} dt \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u e^{-\frac{st}{2}} dt \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{s} e^{-\frac{st}{2}} \right) \Big|_1^u \\ &= \frac{2}{s} e^{-\frac{s}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto $\int_1^{+\infty} t^\nu e^{-st} dt$ converge nessas condições.

Fazendo uma mudança de variáveis $x = st$, com $s > 0$, na Equação (4.3),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^\nu) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^\nu \frac{1}{s} dx \\ &= \frac{\int_0^{+\infty} x^\nu e^{-x} dx}{s^{\nu+1}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

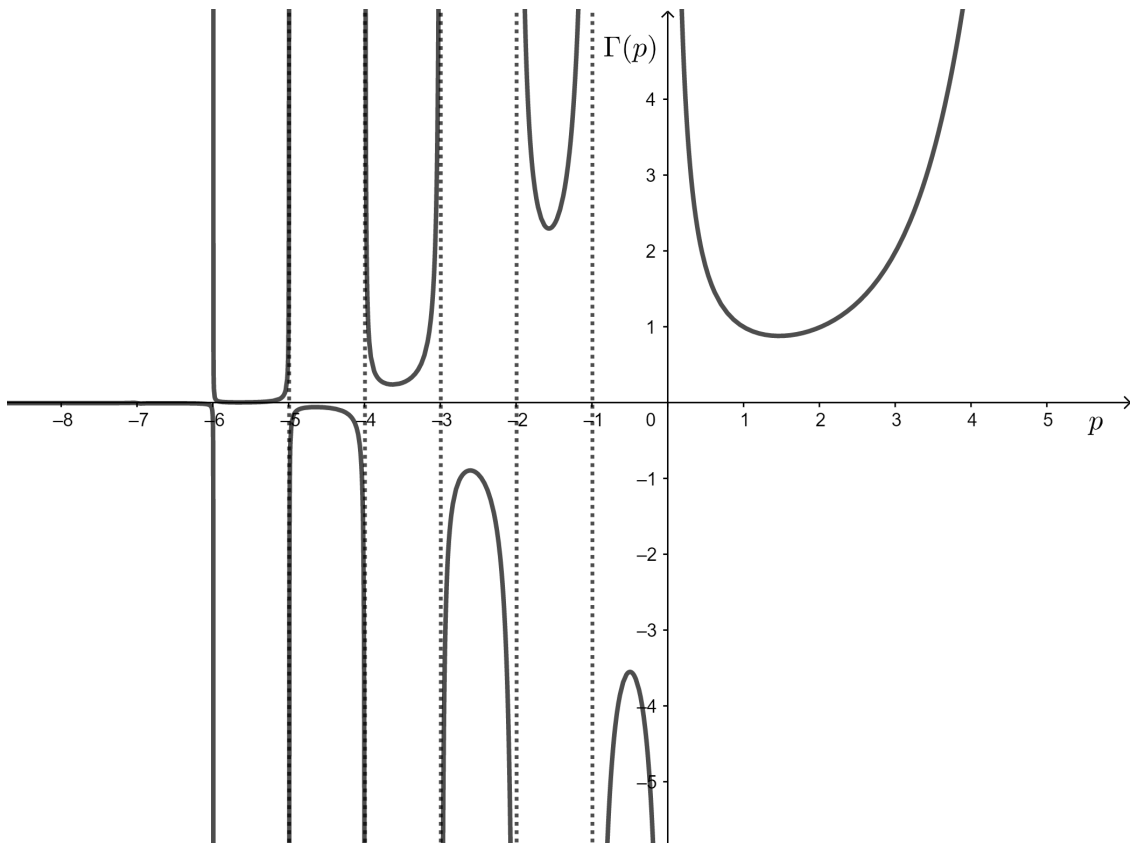
Se denotarmos

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad (4.6)$$

da Equação (4.5) teremos

$$\mathcal{L}(t^\nu) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{s^{\nu+1}}, \quad \nu > -1, \quad s \in \mathbb{R}_+^*. \quad (4.7)$$

Figura 4.1: Função Gamma.



Fonte: O autor.

A Equação (4.6) define a Função Gamma¹, que é representada na Figura 4.1. Provemos algumas propriedades interessantes:

$$1) \quad \Gamma(\nu + 1) = \nu\Gamma(\nu)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu + 1) &= \int_0^{+\infty} x^\nu e^{-x} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u x^\nu e^{-x} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(-x^\nu e^{-x} \Big|_0^u + \nu \int_0^u x^{\nu-1} e^{-x} dx \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(-u^\nu e^{-u} + \nu \int_0^u x^{\nu-1} e^{-x} dx \right) \\ &= 0 + \nu \int_0^{+\infty} x^{\nu-1} e^{-x} dx \\ &= \nu\Gamma(\nu). \end{aligned}$$

□

¹Segundo [33], essa função foi definida por Euler em seu texto “*Institutiones Calculi Integralis*” em 1768.

2) $\Gamma(n) = (n - 1)! \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Demonstração. Por indução,

- Sendo $n = 1$:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-x} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} -e^{-x} \Big|_0^u \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} (-e^{-u} + 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Gamma(1) = 1 = 0!.$$

- Assumindo válido para n :

$$\Gamma(n) = (n - 1)!.$$

- Provemos para $n + 1$:

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!.$$

□

3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Demonstração. Sabendo que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$$

e tomando $x = u^2$, onde $dx = 2u du$, temos:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \int_0^{+\infty} u^{-1} e^{-u^2} u du \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

em que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, conforme Apêndice A.

□

4) $\Gamma(1) = 1$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
 \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} x^0 e^{-x} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\
 &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-x} dx \\
 &= \lim_{u \rightarrow +\infty} -e^{-x} \Big|_0^u \\
 &= \lim_{u \rightarrow +\infty} 1 - e^{-u} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

5) $\Gamma(-n) = \pm\infty$ para $n = 0, 1, 2, \dots$

Demonstração. Por indução²:

- $\Gamma(0) = \pm\infty$, pois $\Gamma(1) = 0 \cdot \Gamma(0)$, com $\Gamma(1) = 1$ e $1 = 0 \cdot \Gamma(0)$, logo $\Gamma(0) = \pm\infty$.
- $\Gamma(-1) = \pm\infty$, pois $\Gamma(0) = -1 \cdot \Gamma(-1)$, com $\Gamma(0) = \pm\infty$ e $\pm\infty = -1 \cdot \Gamma(-1)$, logo $\Gamma(-1) = \pm\infty$.
- Hipótese de indução: $\Gamma(-(n-1)) = \pm\infty$.
- Provemos que $\Gamma(-n) = \pm\infty$:
 $\Gamma(-(n-1)) = -n \cdot \Gamma(-n)$, como $\Gamma(-(n-1)) = \pm\infty$ e $\pm\infty = -n \cdot \Gamma(-n)$, logo $\Gamma(-n) = \pm\infty$.

□

Na Figura 4.1 a propriedade anterior pode ser observada, uma vez que em $0, -1, -2, -3, \dots$ encontram-se assíntotas verticais.

Exemplo 4.8. Provemos que

$$\mathcal{L}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0.$$

Tomando $\nu = -\frac{1}{2}$ na Equação (4.7), obtemos:

$$\mathcal{L}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

²A notação $\Gamma(-n) = \pm\infty$ trata-se de um abuso consciente e proposital de linguagem para simplificar notação, significando que $\Gamma(x) \rightarrow \pm\infty$ conforme $x \rightarrow -n$ para $n = 0, 1, 2, \dots$

Exemplo 4.9. Sabemos que

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n).$$

Dessa maneira, calculemos $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ tomando $n = -\frac{1}{2}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Então,

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$

já que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Exemplo 4.10. Sabemos que

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n).$$

Dessa maneira, calculemos $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$ tomando $n = -\frac{3}{2}$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right).$$

Então,

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{\pi} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

já que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ e $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$.

Teorema 4.11. *Seja f uma função derivável de ordem exponencial γ , com derivadas contínuas por partes em $[0, x]$ para todo $x > 0$ onde $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, com s parâmetro real. Se $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{ct^p} = 1$, onde $p > -1$, então $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F(s)}{\frac{c\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}} = 1$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F(s)}{\frac{c\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}} &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{sF(s)}{s\left(\frac{c\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}\right)} \\ &= \frac{\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)}{\lim_{s \rightarrow +\infty} s\left(\frac{c\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}\right)} \\ &\stackrel{\text{Teo 2.43}}{=} \frac{\lim_{t \rightarrow 0} f(t)}{\lim_{t \rightarrow 0} ct^p} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{ct^p} \\ &= 1 \end{aligned}$$

onde $\frac{c\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} = \mathcal{L}(ct^p)$.

□

O teorema seguinte traz um resultado similar, porém alterando a tendência dos limites.

Teorema 4.12. *Seja f uma função derivável de ordem exponencial γ , com derivadas contínuas por partes em $[0, x]$ para todo $x > 0$ onde $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, com s parâmetro real. Se $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{ct^p} = 1$, onde $p > -1$, então $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s)}{\frac{c\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}} = 1$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s)}{\frac{c\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sF(s)}{s \left(\frac{c\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \right)} \\ &= \frac{\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)}{\lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{c\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \right)} \\ &\stackrel{\text{Teo 2.45}}{=} \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)}{\lim_{t \rightarrow +\infty} ct^p} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{ct^p} \\ &= 1 \end{aligned}$$

onde $\frac{c\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} = \mathcal{L}(ct^p)$. □

Exemplo 4.13. Provemos que

$$\mathcal{L}(t^{\nu-1} \ln(t)) = \frac{\Gamma'(\nu) - \Gamma(\nu) \ln(s)}{s^\nu}, \quad s > 0, \quad \nu > 0.$$

Primeiro, note que sendo $\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx$, temos

$$\Gamma'(\nu) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\nu-1} \ln(x) dx \quad (4.8)$$

uma vez que sabemos que $t^{\nu-1} = e^{(\nu-1) \ln t}$ e aplicando a regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} t^{\nu-1} &= \frac{\partial}{\partial \nu} \left(e^{(\nu-1) \ln(t)} \right) \\ &= e^{(\nu-1) \ln(t)} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} ((\nu-1) \ln(t)) \\ &= e^{(\nu-1) \ln(t)} \cdot \ln(t) \\ &= e^{\ln(t)^{\nu-1}} \cdot \ln(t) \\ &= t^{\nu-1} \ln(t). \end{aligned}$$

Sendo assim, tomando $x = st$, com $s > 0$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(t^{\nu-1} \ln(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{\nu-1} \ln(t) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^{\nu-1} \ln\left(\frac{x}{s}\right) \frac{1}{s} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{x^{\nu-1}}{s^{\nu-1}} \ln\left(\frac{x}{s}\right) \frac{1}{s} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\nu-1} \ln\left(\frac{x}{s}\right) \frac{1}{s^{\nu-1}} \frac{1}{s} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\nu-1} \ln\left(\frac{x}{s}\right) \frac{1}{s^{\nu}} dx \\
 &= \frac{1}{s^{\nu}} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\nu-1} \ln(x) dx \\
 &= \frac{1}{s^{\nu}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\nu-1} \ln(x) dx - \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\nu-1} \ln(s) dx \right) \\
 &\stackrel{\text{Eq. (4.8)}}{=} \frac{1}{s^{\nu}} (\Gamma'(\nu) - \ln(s)\Gamma(\nu)) \\
 &= \frac{\Gamma'(\nu) - \Gamma(\nu) \ln(s)}{s^{\nu}}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 4.14. Provemos que

$$\mathcal{L}(\ln(t)) = -\frac{1}{s} (\gamma + \ln(s))$$

onde $\gamma = -\int_0^{+\infty} e^{-y} \ln(y) dy \approx 0,577215\dots$

Para $\nu = 1$ em:

$$\mathcal{L}(t^{\nu-1} \ln(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-y} \left(\frac{y}{s}\right)^{\nu-1} \ln\left(\frac{y}{s}\right) \frac{1}{s} dy$$

temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\ln(t)) &= \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-y} \ln\left(\frac{y}{s}\right) dy \\
 &= \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-y} \ln(y) dy - \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-y} \ln(s) dy \\
 &= \frac{1}{s} (-\gamma) - \frac{\ln s}{s} \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \\
 &= -\frac{\gamma}{s} - \frac{\ln(s)}{s} \\
 &= -\frac{1}{s} (\gamma + \ln(s))
 \end{aligned}$$

onde $\gamma = -\int_0^{+\infty} e^{-y} \ln(y) dy$.

Note que, quando restrita a números naturais, o resultado da função gamma é idêntico ao fatorial do antecessor deste número. Sendo assim, podemos considerar a função gamma como uma generalização do fatorial. Isso permite estender a ideia de fatorial para números

não naturais, usando a relação $\Gamma(\nu) = (\nu - 1)!$. Por exemplo: $\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Observação 4.15. Apresentaremos agora uma forma de se aproximar o valor de $\ln(n!)$ para valores grande de n utilizando a Função Gamma. É verdade que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = 1.$$

Tal fórmula é conhecida como Fórmula de Stirling³. Usando $\Gamma(n+1) = n!$, esta fórmula significa que

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Essa relação é útil para o cálculo de valores de grandes fatoriais. Uma aproximação mais segura é representada pela seguinte fórmula

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n}\right).$$

De acordo com Schoroeder [26] (Apêndice B.3 - página 389), este termo adicional torna a aproximação mais precisa. Em Física Estatística, por exemplo, a Fórmula de Stirling é comumente utilizada para calcular a aproximação de um logaritmo fatorial, a qual se encontra a evolução da entropia em termos da multiplicidade, como em um sólido de Einstein. O logaritmo de $n!$ é:

$$\ln(n!) \approx n \ln(n) - n + \ln(\sqrt{2\pi n}),$$

que pode ser reduzido desprezando o último termo⁴

$$\ln(n!) \approx n \ln(n) - n.$$

4.2.1 Função Erro

Na Probabilidade, Estatística, Física e problemas de Engenharias como condução de calor ou vibrações de vigas, apresenta-se uma função chamada de função erro [1] definida como

$$erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx, \quad t \geq 0$$

onde, pelo Apêndice A,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1. \quad (4.9)$$

Exemplo 4.16. Calculemos $\mathcal{L}(erf(\sqrt{t}))$.

Sabemos do Exemplo 4.8 que

³O leitor pode consultar o Teorema 4, página 45, do artigo [18].

⁴Note que $n \ln(n)$ cresce muito mais rapidamente que $\ln(\sqrt{2\pi n})$, conforme $n \rightarrow +\infty$.

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

e também

$$\mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{(s-1)}.$$

Logo, pela Definição 4.1 e pelo Teorema 4.4,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * e^t \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi \tau}} e^{t-\tau} d\tau \\ &= \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau. \end{aligned}$$

Fazendo uma substituição de variáveis em que $u = \sqrt{\tau}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right) &= \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du \\ &= e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\mathcal{L}(e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t})) = \frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}.$$

Utilizando o Teorema 2.22 temos

$$\mathcal{L}(\operatorname{erf}(\sqrt{t})) = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

Teorema 4.17. *Seja $a \in \mathbb{R}$ uma constante, é verdade que*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} \operatorname{sen}(a\sqrt{x})}{x} dx = \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right), \quad t > 0.$$

Demonstração. Denotando

$$y(a, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tu^2} \operatorname{sen}(au)}{u^2} 2u du$$

e fazendo uma mudança de variáveis dentro da integral, onde $x = u^2$, temos:

$$y(a, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tu^2} \operatorname{sen}(au)}{u} du. \tag{4.10}$$

Aplicando o Teorema 1.44 na Equação (4.10) para calcular $\frac{\partial y}{\partial a}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial a} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{ue^{-tu^2} \cos(au)}{u} du \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \cos(au) du \\
&= \frac{2}{\pi} Y(a, t)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

onde $Y(a, t) = \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \cos(au) du$.

Resolvendo a integral por partes na Equação (4.11):

$$\begin{aligned}
Y(a, t) &= \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \cos(au) du \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-tu^2} \cos(au) du \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-tu^2} \operatorname{sen}(au)}{a} \Big|_0^b + \frac{2t}{a} \int_0^b e^{-tu^2} u \operatorname{sen}(au) du \right) \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-tb^2} \operatorname{sen}(ab)}{a} + \frac{2t}{a} \int_0^b e^{-tu^2} u \operatorname{sen}(au) du \right) \\
&= 0 + \frac{2t}{a} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} u \operatorname{sen}(au) du \\
&= -\frac{2t}{a} \frac{\partial Y}{\partial a}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

onde $\frac{\partial Y}{\partial a} = -\int_0^{+\infty} e^{-tu^2} u \operatorname{sen}(au) du$.

Resolvendo a equação diferencial produzida pela Equação (4.12) por separação de variáveis, obtemos:

$$\ln(Y) = -\frac{a^2}{4t} + C.$$

Aplicando a exponencial na última igualdade,

$$\begin{aligned}
Y(a, t) &= e^{-\frac{a^2}{4t} + C} \\
&= e^{-\frac{a^2}{4t}} \cdot e^C \\
&= Ke^{-\frac{a^2}{4t}}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

onde $K = e^C$. Agora, note que,

$$Y(0, t) = \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du. \tag{4.14}$$

Fazendo uma mudança de variáveis na Equação (4.14), onde $tu^2 = x^2$ o que implica $x = \sqrt{t}u$ e usando o Apêndice A, obtemos:

$$\begin{aligned} Y(0, t) &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Das Equações (4.13) e (4.15), temos:

$$Y(0, t) = K = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$$

e encontramos, novamente pela Equação (4.13),

$$Y(a, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}.$$

Da Equação (4.11),

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial a} &= \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{a^2}{4t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}} \end{aligned} \tag{4.16}$$

e resolvendo a equação diferencial produzida pela Equação (4.16) por separação de variáveis, obtemos:

$$y(a, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^a e^{-\frac{w^2}{4t}} dw. \tag{4.17}$$

Fazendo uma mudança de variáveis na Equação (4.17), onde $u^2 = \frac{w^2}{4t}$ o que implica $u = \frac{w}{2\sqrt{t}}$, encontramos:

$$\begin{aligned} y(a, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^a e^{-\frac{w^2}{4t}} dw \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \\ &= \operatorname{erf} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

o que termina a demonstração. □

4.2.2 Função Erro Complementar

Do Apêndice A, temos que:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \implies \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1 \xrightarrow{t \geq 0} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1.$$

A função

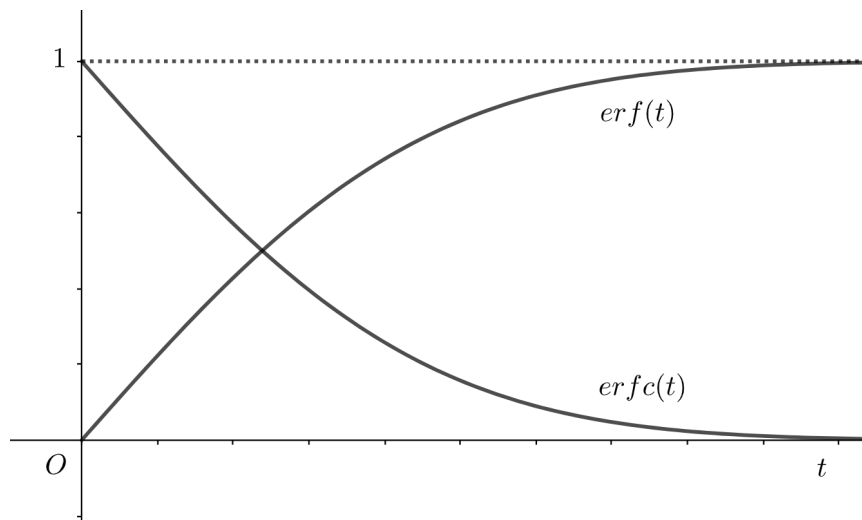
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{+\infty} e^{-x^2} dx = \operatorname{erfc}(t)$$

é chamada de erro complementar. Dessa maneira, temos que:

$$\operatorname{erf}(t) + \operatorname{erfc}(t) = 1.$$

Os gráficos das funções erro e erro complementar podem ser conferidos na Figura 4.2.

Figura 4.2: Função erro e erro complementar.



Fonte: O autor.

Exemplo 4.18. Provemos que

$$\mathcal{L}(\operatorname{erfc}(\sqrt{t})) = \frac{\sqrt{s+1} - 1}{s\sqrt{s+1}}.$$

Sabemos que

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t}) + \operatorname{erfc}(\sqrt{t}) = 1.$$

Então

$$\operatorname{erfc}(\sqrt{t}) = 1 - \operatorname{erf}(\sqrt{t}). \quad (4.18)$$

Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os lados na Equação (4.18), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\operatorname{erfc}(\sqrt{t})) &= \mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(\operatorname{erf}(\sqrt{t})) \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s\sqrt{s+1}} \\ &= \frac{\sqrt{s+1} - 1}{s\sqrt{s+1}}. \end{aligned}$$

4.2.3 Função Beta

Sejam $f(t) = t^{a-1}$ e $g(t) = t^{b-1}$, com $a, b > 0$, então, pelo Teorema 4.4

$$(f * g)(t) = \int_0^t \tau^{a-1} (t - \tau)^{b-1} d\tau.$$

Fazendo uma mudança de variáveis com $\tau = ut$,

$$(f * g)(t) = \int_0^1 (ut)^{a-1} (t(1-u))^{b-1} t du = t^{a+b-1} \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du. \quad (4.19)$$

Da Equação (4.19), o termo

$$B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du \quad (4.20)$$

é conhecido como função beta. Assim:

$$t^{a-1} * t^{b-1} = t^{a+b-1} B(a, b).$$

Então pelo Teorema 4.4 e a Equação (4.7),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^{a+b-1} B(a, b)) &= \mathcal{L}(t^{a-1}) \mathcal{L}(t^{b-1}) \\ &= \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{s^{a+b}}. \end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa dos dois lados na última igualdade, temos

$$\begin{aligned} t^{a+b-1} B(a, b) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{s^{a+b}} \right) \\ &= \Gamma(a) \Gamma(b) \frac{t^{a+b-1}}{\Gamma(a+b)} \end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^{a+b}} \right) = \frac{t^{a+b-1}}{\Gamma(a+b)}$.

Por fim, obtemos a fórmula de Euler para a função beta

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

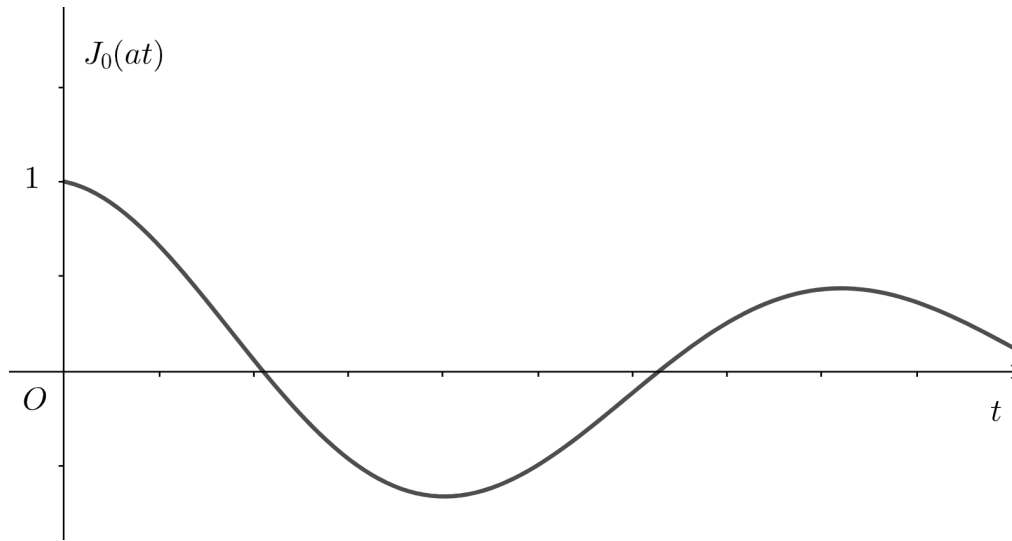
4.2.4 Funções Bessel

As Funções Bessel

$$J_\nu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (t)^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu} n! (n+\nu)!}$$

onde $(n+\nu)! = \Gamma(n+\nu+1)$, são encontradas pela solução da equação diferencial de Bessel⁵ de ordem ν . Seu gráfico pode ser conferido na Figura 4.3.

⁵Veja mais detalhes no Apêndice B.

Figura 4.3: Função Bessel de ordem zero de primeira espécie com $a = 1$.

Fonte: O autor.

Para $\nu = 0$, dizemos que $J_0(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (t)^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$ é função de Bessel de ordem zero de primeira espécie. Provemos que $\mathcal{L}(J_0(\alpha t)) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}}$.

$$J_0(\alpha t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n} t^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} t^{2n}$$

onde $a_{2n} = \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$. Perceba que

$$|a_{2n}| = \frac{|\alpha|^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \leq \frac{|\alpha|^{2n}}{(2n)!}$$

Então, pelo Teorema 2.20 podemos aplicar a Transformada de Laplace de $J_0(\alpha t)$ termo a termo.

Portanto⁶,

⁶Para cálculo de $\mathcal{L}(J_0(\alpha t))$ foi necessário usar uma expansão em séries de Taylor,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \quad (|x| < 1)$$

com $x = \frac{\alpha}{s}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(J_0(\alpha t)) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \mathcal{L}(t^{2n}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n} (2n)!}{2^{2n} (n!)^2 s^{2n+1}} \\
&= \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \left(\frac{\alpha^2}{s^2}\right)^n \\
&= \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \left(\frac{\alpha}{s}\right)^{2n} \\
&= \frac{1}{s} \left(\frac{s}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}} \right) \quad (Re(s) > |\alpha|) \\
&= \frac{1}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}}.
\end{aligned}$$

5 Equações Diferenciais com Funções Forçantes Descontínuas ou Impulsos

Neste capítulo estudaremos como a Transformada de Laplace pode ser utilizada para a resolução de Problemas de Valor Inicial. Além disso, apresentaremos exemplos com as funções degrau e impulso unitário como forçantes, bem como funções periódicas.

Para a redação desse capítulo foram consultadas as referências: [4], [25], [29], [32] e [33].

5.1 Solucionando PVIs com Transformadas de Laplace

No decorrer do trabalho, mostramos que $\mathcal{L}(y^{(n)}(t))$, quando existe, depende de $y(t)$ e de suas $n - 1$ derivadas para $t = 0$. Dessa maneira, a Transformada de Laplace é bem adequada para problemas de valor inicial com coeficientes constantes, podendo transformar $y(t)$ em uma função algébrica simples $Y(s)$. Então, consideremos um problema de valor inicial

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = g(t) \quad (5.1)$$

$$y(0) = y_0 \quad y'(0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$$

onde a_1, \dots, a_n e $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ são constantes, bem como $g, y, y', \dots, y^{(n)} \in \mathbb{L}$. A função g é chamada de função forçante e a solução $y = y(t)$ recebe o nome de resposta. Pela Linearidade da Transformada de Laplace, obtemos:

$$a_n \mathcal{L}\left(\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right) + a_{n-1} \mathcal{L}\left(\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}\right) + \dots + a_0 \mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(g(t)).$$

Pelo Teorema 2.30 encontramos

$$a_n [s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)] + a_{n-1} [s^{n-1} Y(s) s^{n-2} y(0) - \dots - y^{(n-2)}(0)] + \dots + a_0 Y(s) = G(s), \text{ onde } G(s) = \mathcal{L}(g(t)) \text{ e } Y(s) = \mathcal{L}(y(t)).$$

Isto é,

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0] Y(s) = a_n [s^{n-1} y_0 + \dots + y_0^{(n-1)}]$$

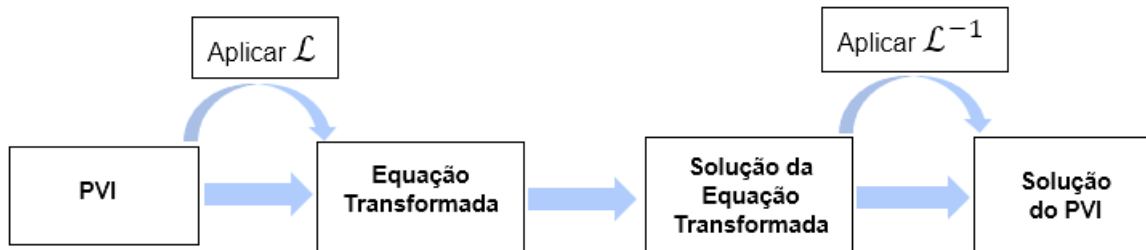
$$+a_{n-1} [s^{n-2}y_0 + \dots + y_0^{(n-2)}] + \dots + G(s).$$

Desse modo, isolando $Y(s)$, obtemos $y(t)$ da seguinte forma:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)).$$

O esquema apresentado na Figura 5.1 nos indica o passo a passo para solucionarmos um PVI conforme explicado.

Figura 5.1: Procedimento para solucionar PVIs com Transformada de Laplace.



Fonte: O autor.

No PVI apresentado na Equação 5.1, no caso de g possuir ordem exponencial γ e for contínua (ou contínua por partes), é possível garantir que a solução $y = y(t)$ também terá essas mesmas propriedades, conforme mostraremos no Teorema 5.1.

Teorema 5.1. *Para a equação diferencial ordinária de ordem n , linear, não homogênea*

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = f(t), \tag{5.2}$$

a_0, a_1, \dots, a_n constantes, se $f(t)$ é contínua em $[0, +\infty[$ e de ordem exponencial, então qualquer solução é também contínua em $[0, +\infty[$ e de ordem exponencial.

Demonstração. Demonstraremos para $n = 2$, a prova segue da mesma forma para equações diferenciais de ordem superior [25]. Dessa forma, temos:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t).$$

Seja $y_h(t)$ a solução da equação homogênea, ou seja, solução de $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$, que é dada por

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

onde $y_1(t), y_2(t)$ são duas soluções linearmente independentes da equação homogênea. Segundo [33], tais soluções são da forma:

- (i) $y_1(t) = e^{m_1 t}, y_2(t) = e^{m_2 t}$,
- (ii) $y_1(t) = e^{mt}, y_2(t) = te^{mt}$,
- (iii) $y_1(t) = e^{at} \cos(bt), y_2(t) = e^{at} \text{sen}(bt)$.

Como cada termo acima tem ordem exponencial, pelo Teorema 1.48 a $y_h(t)$ também é de ordem exponencial e contínua no intervalo $[0, +\infty[$.

Pelo método da variação de parâmetros, de acordo com [33], uma solução particular $y_p(t)$ da Equação (5.2) é da forma

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t),$$

onde

$$u_1'(t) = \frac{-y_2(t)f(t)}{aW(y_1(t), y_2(t))}, \quad u_2'(t) = \frac{y_1(t)f(t)}{aW(y_1(t), y_2(t))},$$

e $W(y_1(t), y_2(t))$ é o Wronskiano¹ dado por

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \neq 0.$$

Nos casos (i), (ii), (iii), $W(y_1(t), y_2(t))$ pode ser determinado e visto como sendo da forma $Me^{\beta t}$. Assim, conforme Teorema 1.48, como o produto de funções de ordem exponencial é de ordem exponencial, concluímos que $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$ têm ordem exponencial e ainda contínuas em $[0, +\infty[$. O mesmo vale para $u_1(t)$, $u_2(t)$ e $y_p(t)$ pelo Teorema 1.40.

Finalmente, a solução geral da Equação (5.2), dada por

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

é contínua e é de ordem exponencial. □

Exemplo 5.2. Encontremos a solução $y = y(t)$ do PVI:

$$\begin{cases} y' + 2y = 1 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Aplicando a transformada e o Teorema 2.26

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) &= \mathcal{L}(1) \\ sY(s) - y(0) + 2Y(s) &= \frac{1}{s} \\ sY(s) - 3 + 2Y(s) &= \frac{1}{s} \\ Y(s)(s + 2) &= \frac{1}{s} + 3 \\ Y(s) &= \frac{1}{s(s + 2)} + \frac{3}{s + 2}. \end{aligned}$$

Após frações parciais

$$Y(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s + 2)} + \frac{3}{s + 2}.$$

Aplicando a transformada inversa, obtemos:

¹O leitor pode conferir o Teorema 4.2, página 149, do livro [33].

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) + 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{5}{2}e^{-2t}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.3. Encontremos a solução $y = y(t)$ do PVI:

$$\begin{cases} y' + 3y = e^t \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Aplicando a transformada e o Teorema 2.26

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y') + 3\mathcal{L}(y) &= \mathcal{L}(e^t) \\ sY(s) - y(0) + 3Y(s) &= \frac{1}{s-1} \\ Y(s)(s+3) - 2 &= \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Logo

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)} + \frac{2}{s+3}.$$

Após frações parciais

$$Y(s) = \frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{4(s+3)} + \frac{2}{s+3}.$$

Aplicando a transformada inversa

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) \\ &= \frac{1}{4}e^t + \frac{7}{4}e^{-3t}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.4. Encontremos a solução $y = y(t)$ do PVI:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = t^3e^{2t} \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicando a transformada e os Teoremas 2.26 e 2.27

$$s^2\mathcal{L}(y(t)) - sy(0) - y'(0) - 4(s\mathcal{L}(y(t)) - y(0)) + 4\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(t^3e^{2t})$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) = \frac{3!}{(s-2)^4}$$

$$(s^2 - 4s + 4)Y(s) = \frac{6}{(s-2)^4}$$

$$Y(s) = \frac{6}{(s-2)^4(s-2)^2}$$

$$Y(s) = \frac{6}{(s-2)^6}.$$

Aplicando a transformada inversa

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{(s-2)^6}\right) \\ &= 6\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^6}\right) \\ &= 6\frac{1}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5!}{(s-2)^6}\right) \\ &= 6\frac{1}{5!}t^5e^{2t} \\ &= \frac{6}{120}t^5e^{2t} \\ &= \frac{1}{20}t^5e^{2t}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.5. Encontremos a solução $y = y(t)$ do PVI:

$$\begin{cases} y'' + 4y = e^{-t} \\ y(0) = 3 \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

Aplicando a transformada e o Teorema 2.27

$$\mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^{-t})$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$s^2Y(s) - 3s + 1 + 4Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s)(s^2 + 4) = 3s - 1 + \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{3s}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{(s+1)(s^2+4)}.$$

Após frações parciais

$$Y(s) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) + 3\left(\frac{s}{s^2+4}\right) - \frac{1}{s^2+4}.$$

Aplicando a transformada inversa

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s+1} \right) - \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2+4} \right) + \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2+4} \right) + \\
&\quad + 3 \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2+4} \right) - \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2+4} \right) \\
&= \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s+1} \right) + \frac{14}{5} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2+4} \right) - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{2}{s^2+4} \right) \\
&= \frac{1}{5} e^{-t} + \frac{14}{5} \cos(2t) - \frac{2}{5} \operatorname{sen}(2t).
\end{aligned}$$

5.2 Função Degrau Unitário

Nesta seção iremos desenvolver um conceito muito utilizado, principalmente na física elétrica, chamado função degrau unitário.

Definição 5.6. Considere $a \in \mathbb{R}$. Definimos u_a a função degrau unitário de índice a (ou função degrau de Heaviside), como

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases} \quad (5.3)$$

Uma outra notação, também bastante útil, é $u_a(t) = u(t-a)$. Se $a = 0$, podemos denotar $u_0(t) = u(t)$.

Depois de definirmos a função degrau podemos calcular sua transformada:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u_a(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} u_a(t) dt \\
&= \int_0^a e^{-st} 0 dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} dt \\
&= \int_a^{+\infty} e^{-st} dt \\
&= -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_a^{+\infty} \\
&= \frac{e^{-as}}{s}
\end{aligned}$$

desde que $\operatorname{Re}(s) > 0$.

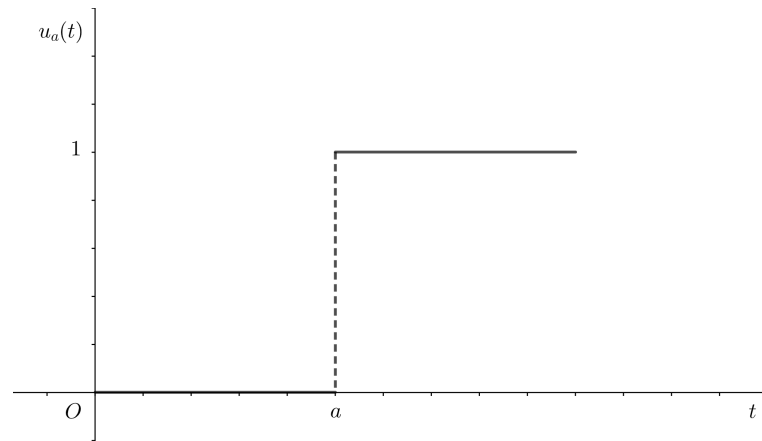
Dessa forma, também podemos escrever

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-sa}}{s} \right) = u_a(t).$$

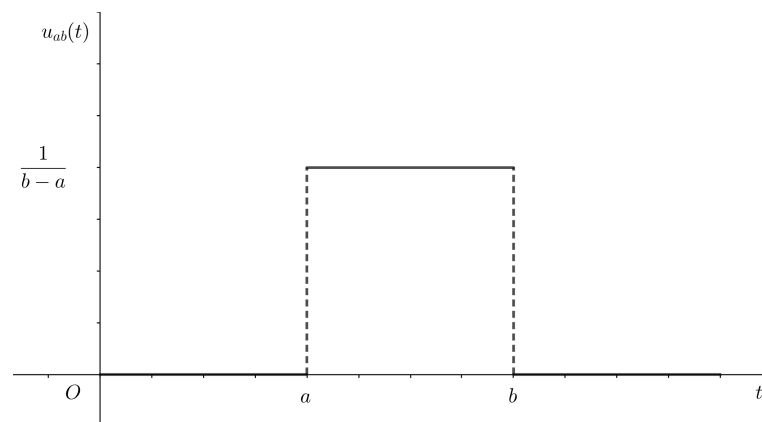
Definição 5.7. Considere $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 \leq a < b$. Definimos u_{ab} , a função degrau de índice ab , como:

$$u_{ab}(t) = \frac{1}{b-a} (u_a(t) - u_b(t)) = \begin{cases} 0, & t < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq t < b \\ 0, & t \geq b \end{cases}$$

Figura 5.2: Exemplos de função degrau.



(a) Exemplo de função degrau unitário de índice a .



(b) Exemplo de função degrau de índice ab .

Fonte: O autor.

Assim

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(u_{ab}(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} u_{ab}(t) dt \\
 &= \int_0^a e^{-st} 0 dt + \int_a^b \frac{e^{-st}}{b-a} dt + \int_b^{+\infty} e^{-st} 0 dt \\
 &= \int_a^b \frac{e^{-st}}{b-a} dt \\
 &= -\frac{e^{-st}}{s(b-a)} \Big|_a^b \\
 &= \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s(b-a)}.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, também podemos escrever

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s(b-a)} \right) = u_{ab}(t).$$

As funções degrau, graficadas na Figura 5.2, são utilizadas para denotar de forma mais simplificada algumas funções que possuem saltos de descontinuidade, conforme veremos mais adiante. Tais funções também podem representar uma dualidade “ligado/desligado”; u_a , por exemplo, serve como ferramenta para descrever uma função ligada a partir de um valor $a \in \mathbb{R}$ e desligada antes disso (ou vice-versa).

5.3 Segundo Teorema de Translação

Teorema 5.8 (2º Teorema de Translação). *Sejam $a \geq 0$ e $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, então*

$$\mathcal{L}(u_a(t)f(t-a)) = e^{-as}F(s).$$

Demonstração. Pela Definição de Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}(u_a(t)f(t-a)) = \int_0^{+\infty} e^{-st}[u_a(t)f(t-a)] dt = \int_a^{+\infty} e^{-st}f(t-a) dt. \quad (5.4)$$

Tomando $\tau = t - a$, o lado direito da Equação (5.4) torna-se

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-s(\tau+a)}f(\tau) d\tau &= e^{-as} \int_0^{+\infty} e^{-s\tau}f(\tau) d\tau \\ &= e^{-as}F(s). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Pelas Equações (5.4) e (5.5), segue o resultado. □

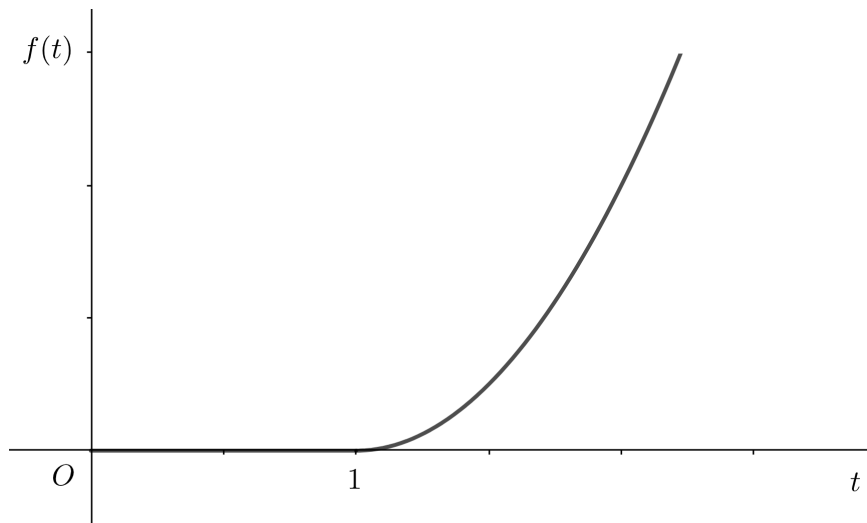
Exemplo 5.9. Seja $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ (t-1)^2, & t \geq 1 \end{cases}$, representada na Figura 5.3.

Primeiramente, note que f pode ser reescrita como $f(t) = u_1(t)(t-1)^2$. Logo, sua transformada é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)) &= \mathcal{L}(u_1(t)(t-1)^2) \\ &\stackrel{\text{Teo. 5.8}}{=} e^{-s} \mathcal{L}(t^2) \\ &= \frac{2e^{-s}}{s^3} \end{aligned}$$

desde que $\text{Re}(s) > 0$.

Figura 5.3: Gráfico de $f(t) = u_1(t)(t - 1)^2$.



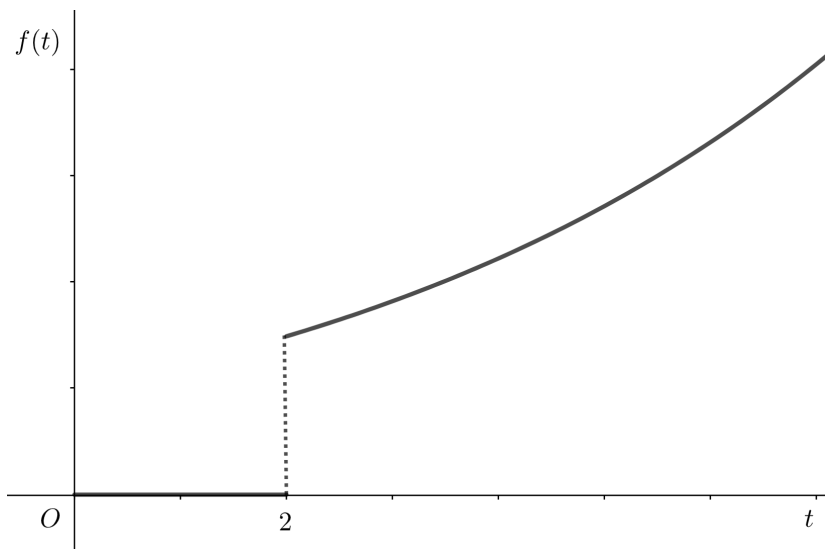
Fonte: O autor.

Exemplo 5.10. Seja $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 2 \\ e^{at}, & t \geq 2 \end{cases}$, representada na Figura 5.4.

Note que f pode ser reescrita como $f(t) = u_2(t)e^{at}$. Logo sua transformada de Laplace pode ser calculada usando o Teorema 2.22.

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(u_2(t)e^{at}) = \frac{e^{-2(s-a)}}{s-a}.$$

Figura 5.4: Gráfico de $f(t) = u_2(t)e^{at}$.

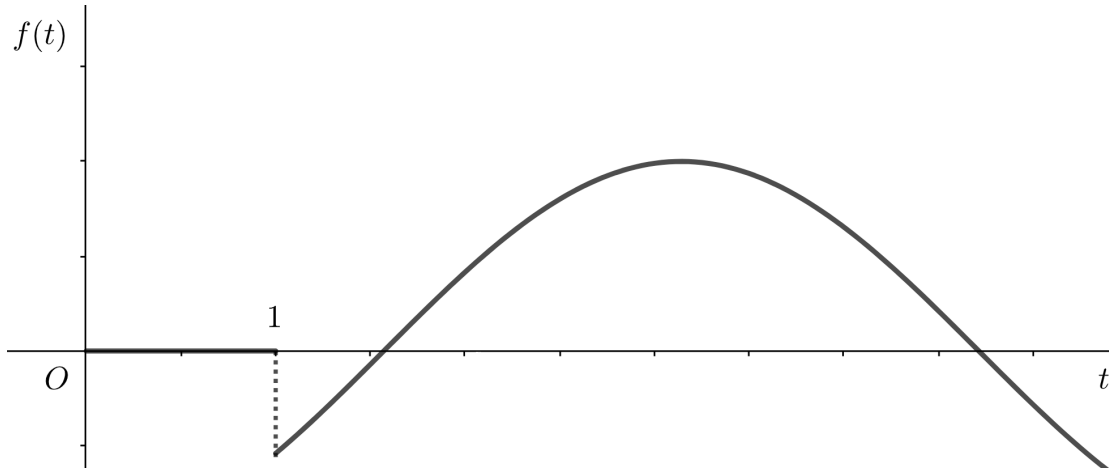


Fonte: O autor.

Exemplo 5.11. Seja $f(t) = u_\pi(t) \cos(t - \pi)$, representada na Figura 5.5. Sua transformada de Laplace, pelo Teorema 5.8, é

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(u_\pi(t) \cos(t - \pi)) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}.$$

Figura 5.5: Gráfico de $f(t) = u_\pi(t) \cos(t - \pi)$.



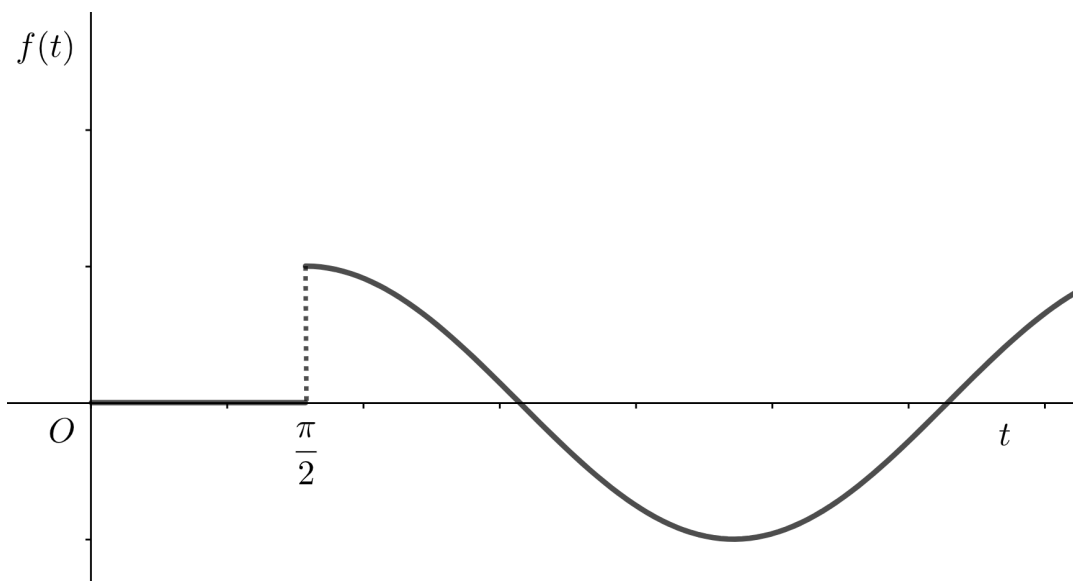
Fonte: O autor.

Exemplo 5.12. Seja $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \text{sen}(t), & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, representada na Figura 5.6.

Note que $f(t) = u_{\frac{\pi}{2}}(t) \text{sen}(t)$. Além disso, $\text{sen}(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$. Pelo Teorema 5.8

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}\left(u_{\frac{\pi}{2}}(t) \text{sen}(t)\right) = \mathcal{L}\left(u_{\frac{\pi}{2}}(t) \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2 + 1}.$$

Figura 5.6: Gráfico de $f(t) = u_{\frac{\pi}{2}}(t) \text{sen}(t)$.



Fonte: O autor.

5.4 Funções Periódicas

Definição 5.13. Uma função f é periódica com período $T > 0$ quando $f(t) = f(t + T)$.

As funções $\cos(t)$ e $\sin(t)$ são periódicas com período $T = 2\pi$, enquanto a função $\operatorname{tg}(t)$ é periódica e apresenta um período de $T = \pi$.

Teorema 5.14. *Seja $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ onde f é uma função periódica de período T , então*

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} F_1(s) \quad (5.6)$$

onde $F_1(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt$.

Demonstração. Pela Definição 1.21, temos

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Fazendo uma mudança de variáveis com $\tau = t - T$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_T^{+\infty} e^{-st} f(t) dt &= \int_0^{+\infty} e^{-s(\tau+T)} f(\tau + T) d\tau \\ &= e^{-sT} \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f(\tau + T) d\tau \\ &= e^{-sT} F(s) \end{aligned}$$

pois $f(\tau + T) = f(\tau)$. Logo

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} F(s)$$

que por sua vez implica

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} F_1(s).$$

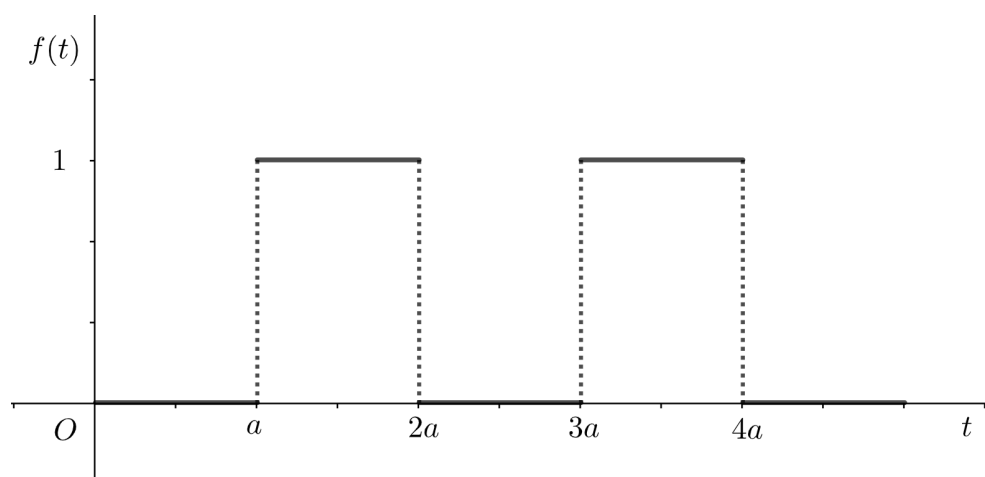
□

5.4.1 Ondas Quadradas

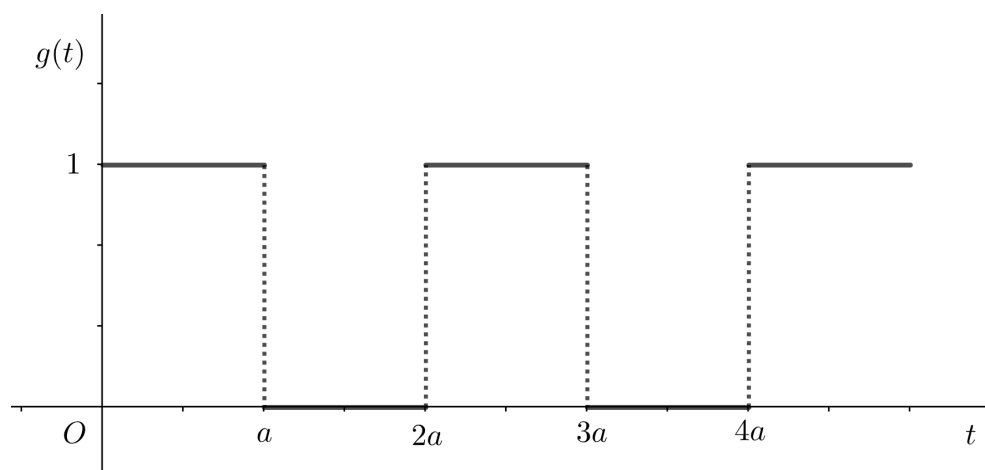
Uma onda quadrada é produzida por uma função periódica não senoidal na qual a amplitude máxima e mínima são constantes e se alteram entre si de forma instantânea possuindo a mesma duração. São comumente utilizadas na modelagem de circuitos de chaveamento digitais.

Vamos estudar as três ondas quadradas representadas na Figura 5.7. Observe que a fase da segunda está invertida em relação a primeira e todas possuem o mesmo período $T = 2a$.

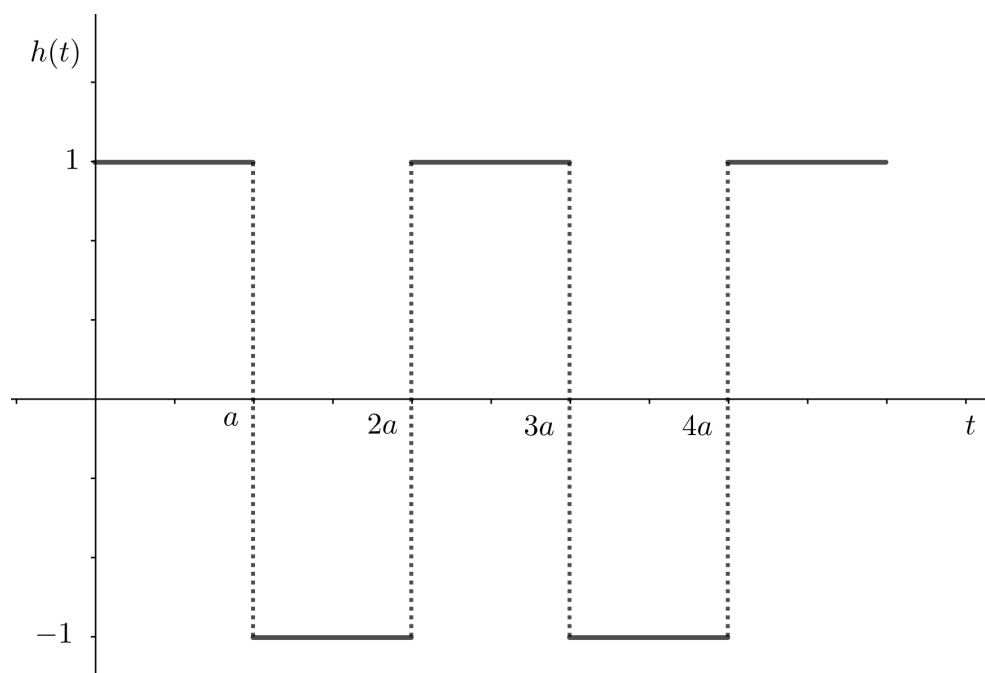
Figura 5.7: Exemplos de ondas quadradas.



(a) 1º Exemplo de Onda Quadrada.



(b) 2º Exemplo de Onda Quadrada.



(c) 3º Exemplo de Onda Quadrada (Função Meandro).

Fonte: O autor.

Em relação a Figura 5.7 (a) temos um período $T = 2a$ para uma onda quadrada produzida pela função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & a \leq t < 2a \end{cases}$$

seguida por $f(t) = f(t + 2a)$. A sua Transformada de Laplace, segundo o Teorema 5.14, é:

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-2as}} F_1(s)$$

em que

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \int_0^{2a} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_a^{2a} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} (e^{-as} - e^{-2as}). \end{aligned}$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{e^{-as} - e^{-2as}}{s(1 - e^{-2as})} \\ &= \frac{e^{-as}(1 - e^{-as})}{s(1 - e^{-as})(1 + e^{-as})} \\ &= \frac{e^{-as}}{s(1 + e^{-as})} \\ &= \frac{\frac{e^{-as}}{e^{-as}}}{s\left(\frac{1}{e^{-as}} + \frac{e^{-as}}{e^{-as}}\right)} \\ &= \frac{1}{s(1 + e^{as})}. \end{aligned}$$

Agora, em relação a Figura 5.7 (b), obtemos

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < a \\ 0, & a \leq t < 2a \end{cases}$$

seguida por $g(t) = g(t + 2a)$. Pelo Teorema 5.14, com período $T = 2a$, temos:

$$G(s) = \frac{1}{1 - e^{-2as}} G_1(s)$$

onde

$$\begin{aligned}
G_1(s) &= \int_0^{2a} e^{-st} f(t) dt \\
&= \int_0^a e^{-st} dt \\
&= -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^a \\
&= -\frac{1}{s} (e^{-as} - 1) \\
&= \frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s}
\end{aligned}$$

Logo, temos como $G(s)$

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{1 - e^{-as}}{s(1 - e^{-2as})} \\
&= \frac{1 - e^{-as}}{s(1 - e^{-as})(1 + e^{-as})} \\
&= \frac{1}{s(1 + e^{-as})}.
\end{aligned}$$

Observação 5.15. Observe que podemos escrever a Equação (5.6) como

$$F(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nTs} F_1(s) \quad (x = \operatorname{Re}(s) > 0).$$

Para a onda quadrada da Figura 5.7 (a), sua função pode ser expressa da seguinte maneira

$$f(t) = u_a(t) - u_{2a}(t) + u_{3a}(t) - u_{4a}(t) + \dots \quad (5.7)$$

Como $F_1(s) = \frac{1}{s(e^{-as} - e^{-2as})}$ reescrevemos a Equação (5.7) na forma,

$$\begin{aligned}
F(s) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nas} \frac{1}{s} (e^{-as} - e^{-2as}) \\
&= \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-(2n+1)as} - e^{-(2n+2)as}) \\
&= \frac{1}{s} (e^{-as} - e^{-2as} + e^{-3as} - e^{-4as} + \dots) \\
&= \mathcal{L}(u_a(t)) - \mathcal{L}(u_{2a}(t)) + \mathcal{L}(u_{3a}(t)) - \mathcal{L}(u_{4a}(t)) + \dots
\end{aligned}$$

isto é, a Transformada de Laplace, nesse caso, poderia ser calculada termo a termo. O mesmo vale para a onda quadrada da Figura 5.7 (b):

$$G(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nTs} G_1(s) \quad (x = \operatorname{Re}(s) > 0)$$

com $g(t) = 1 - u_a(t) + u_{2a}(t) - u_{3a}(t) + u_{4a}(t) - \dots$

A função meandro, ilustrada na Figura 5.7 (c), é dada por

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < a \\ -1, & a \leq t < 2a \end{cases}$$

seguida por $h(t) = h(t+2a)$. Tal função também constitui um exemplo de onda quadrada. Nesse caso, pelo Teorema 5.14, com período $T = 2a$, obtemos

$$H(s) = \frac{1}{1 - e^{-2as}} H_1(s)$$

onde

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \int_0^a e^{-st} dt - \int_a^{2a} e^{-st} dt \\ &= -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^a + \frac{e^{-st}}{s} \Big|_a^{2a} \\ &= -\frac{1}{s} (e^{-as} - 1) + \frac{1}{s} (e^{-2as} - e^{-as}) \\ &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s} + \frac{e^{-2as}}{s} - \frac{e^{-as}}{s} \\ &= \frac{1}{s} (e^{-2as} - 2e^{-as} + 1) \\ &= \frac{1}{s} (1 - e^{-as})^2. \end{aligned}$$

Logo, temos como $H(s)$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{(1 - e^{-as})^2}{s(1 - e^{-2as})} \\ &= \frac{(1 - e^{-as})^2}{s(1 - e^{-as})(1 + e^{-as})} \\ &= \frac{1 - e^{-as}}{s(1 + e^{-as})} \\ &= \frac{1}{s} \operatorname{tgh} \left(\frac{as}{2} \right). \end{aligned}$$

em que a notação $\operatorname{tgh} \left(\frac{as}{2} \right)$ indica tangente hiperbólica de $\frac{as}{2}$.

5.4.2 Ondas Triangulares

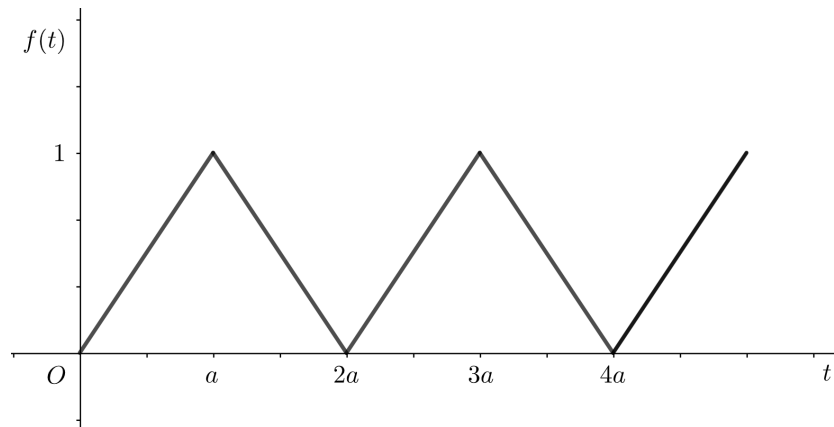
Uma onda triangular é produzida por uma função periódica não senoidal e recebe esse nome por “formar triângulos” em seu gráfico a cada período. Tal função pode ou não ser contínua.

Apresentaremos três exemplos de ondas triangulares, uma contínua e outras duas que não, ilustradas na Figura 5.8.

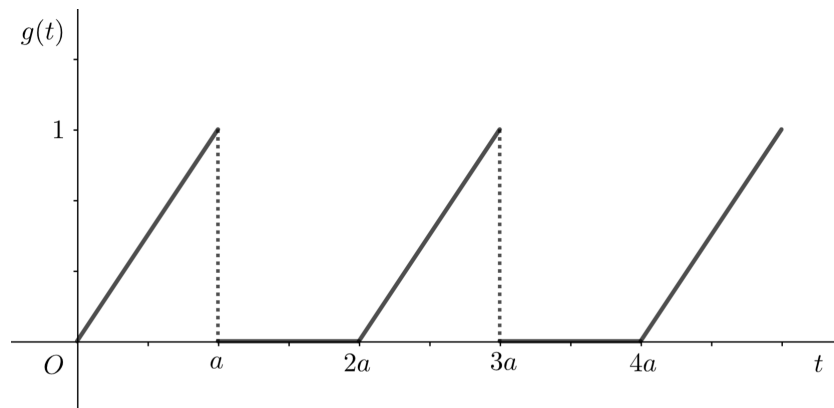
No caso da onda triangular da Figura 5.8 (a), temos

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 \leq t < a \\ 2 - \frac{t}{a}, & a \leq t < 2a \end{cases}$$

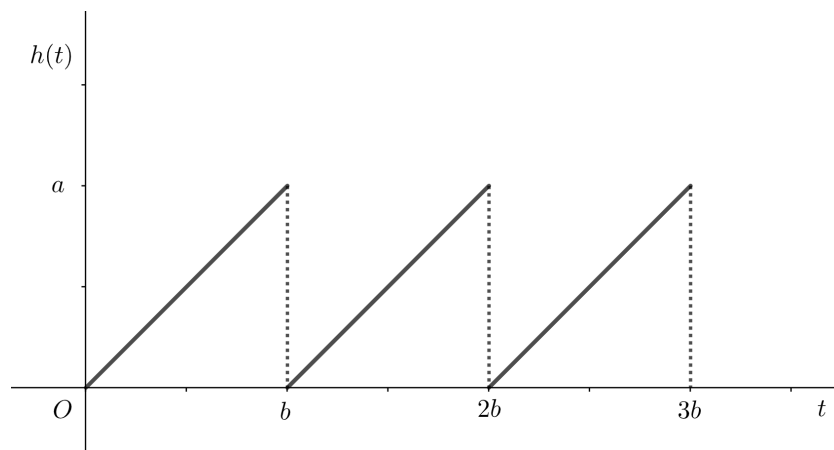
Figura 5.8: Exemplos de ondas triangulares.



(a) Exemplo de onda triangular contínua.



(b) Função meio dente de serra (onda triangular descontínua.)



(c) Função dente de serra (onda triangular descontínua).

Fonte: O autor.

seguida por $f(t) = f(t + 2a)$. Pela Teorema 5.14 com período $T = 2a$,

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-2as}} F_1(s)$$

onde

$$\begin{aligned}
F_1(s) &= \int_0^a \frac{t}{a} e^{-st} dt + \int_a^{2a} \left(2 - \frac{t}{a}\right) e^{-st} dt \\
&= \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{s} (te^{-st}) \Big|_0^a + \frac{1}{s} \int_0^a e^{-st} dt \right] - \frac{2}{s} (e^{-st}) \Big|_a^{2a} - \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{s} (te^{-st}) \Big|_a^{2a} + \frac{1}{s} \int_a^{2a} e^{-st} dt \right] \\
&= \frac{-2e^{-as}}{as^2} + \frac{e^{-2as}}{as^2} + \frac{1}{as^2} \\
&= \frac{1 + e^{-2as} - 2e^{-as}}{as^2} \\
&= \frac{(1 - e^{-as})^2}{as^2}.
\end{aligned}$$

Logo, temos como $F(s)$

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{(1 - e^{-as})^2}{as^2(1 - e^{-2as})} \\
&= \frac{(1 - e^{-as})^2}{as^2(1 - e^{-as})(1 + e^{-as})} \\
&= \frac{1 - e^{-as}}{as^2(1 + e^{-as})} \\
&= \frac{1}{as^2} \operatorname{tgh} \left(\frac{as}{2} \right).
\end{aligned}$$

Em relação a onda da Figura 5.8 (b), formada pela Função Meio Dente de Serra, temos:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 \leq t < a \\ 0, & a \leq t < 2a \end{cases}$$

seguida por $g(t) = g(t + 2a)$. Tal função produz uma onda triangular descontínua. Pelo Teorema 5.14, com período $T = 2a$, segue

$$G(s) = \frac{1}{1 - e^{-2as}} G_1(s)$$

onde

$$\begin{aligned}
G_1(s) &= \int_0^{2a} e^{-st} f(t) dt \\
&= \int_0^a \frac{t}{a} e^{-st} dt \\
&= \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{s} (te^{-st}) \Big|_0^a + \frac{1}{s} \int_0^a e^{-st} dt \right] \\
&= \frac{1}{a} \left[-\frac{ae^{-as}}{s} - \frac{1}{s^2} (e^{-as} - 1) \right] \\
&= \frac{1}{a} \left(-\frac{ae^{-as}}{s} - \frac{e^{-as}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \right) \\
&= -\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-as}}{as^2} + \frac{1}{as^2}.
\end{aligned}$$

Logo, temos como $G(s)$

$$G(s) = \frac{1 - e^{-as} - ase^{-as}}{as^2(1 - e^{-2as})}.$$

A Função Dente de Serra, representada na Figura 5.8 (c), também produz uma onda triangular descontínua. Sua fórmula é:

$$h(t) = \frac{a}{b}t \quad , \quad 0 \leq t < b$$

seguida por $h(t) = h(t + b)$. Pelo Teorema 5.14, com período $T = b$, temos

$$H(s) = \frac{1}{1 - e^{-bs}}H_1(s)$$

onde

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \int_0^b \frac{a}{b}te^{-st} dt \\ &= \frac{a}{b} \left[-\frac{1}{s} (te^{-st}) \Big|_0^b + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} dt \right] \\ &= \frac{a}{b} \left[-\frac{1}{s} (be^{-bs}) - \frac{1}{s^2} (e^{-st}) \Big|_0^b \right] \\ &= \frac{a}{b} \left[-\frac{be^{-bs}}{s} - \frac{1}{s^2} (e^{-bs} - 1) \right] \\ &= \frac{a}{b} \left(-\frac{be^{-bs}}{s} - \frac{e^{-bs}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \right) \\ &= -\frac{ae^{-bs}}{s} - \frac{ae^{-bs}}{bs^2} + \frac{a}{bs^2}. \end{aligned}$$

Logo, temos como $H(s)$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{1 - e^{-bs}} \left(-\frac{ae^{-bs}}{s} - \frac{ae^{-bs}}{bs^2} + \frac{a}{bs^2} \right) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-bs}} \cdot \frac{a}{s} \left(-e^{-bs} - \frac{e^{-bs}}{bs} + \frac{a}{bs} \right) \\ &= \frac{a}{s} \left(\frac{-e^{-bs}}{1 - e^{-bs}} + \frac{1 - e^{-bs}}{bs(1 - e^{-bs})} \right) \\ &= \frac{a}{s} \left(\frac{1}{bs} - \frac{e^{-bs}}{1 - e^{-bs}} \right). \end{aligned}$$

5.4.3 Ondas Senoidais

A função seno meia-onda retificada é dada por

$$f(t) = \begin{cases} \text{sen}(\omega t), & \frac{2n\pi}{\omega} < t < \frac{(2n+1)\pi}{\omega} \\ 0, & \frac{(2n+1)\pi}{\omega} < t < \frac{(2n+2)\pi}{\omega} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Esta função é periódica de período $T = \frac{2\pi}{\omega}$, como vemos na Figura 5.9 (a). Logo, pelo Teorema 5.14,

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} F_1(s)$$

em que

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \omega e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st} \operatorname{sen}(\omega t) dt \\ &= -\frac{1}{s} \left(e^{-st} \operatorname{sen}(\omega t) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} + \frac{\omega}{s} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st} \cos(\omega t) dt \\ &= \frac{\omega}{s} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st} \cos(\omega t) dt \\ &= \frac{\omega}{s} \left[-\frac{1}{s} \left(e^{-st} \cos(\omega t) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} - \frac{\omega}{s} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st} \operatorname{sen}(\omega t) dt \right] \\ &= \frac{\omega}{s} \left[\frac{e^{-\frac{s\pi}{\omega}}}{s} + \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st} \operatorname{sen}(\omega t) dt \right] \\ &= \frac{\omega e^{-\frac{s\pi}{\omega}}}{s^2} + \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st} \operatorname{sen}(\omega t) dt. \end{aligned}$$

Após algumas manipulações algébricas

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st} \operatorname{sen}(\omega t) dt \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \left(1 + e^{-\frac{s\pi}{\omega}} \right). \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)) &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}{(1 + e^{-\frac{\pi s}{\omega}})(1 - e^{-\frac{\pi s}{\omega}})} \\ &= \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(1 - e^{-\frac{\pi s}{\omega}})}. \end{aligned}$$

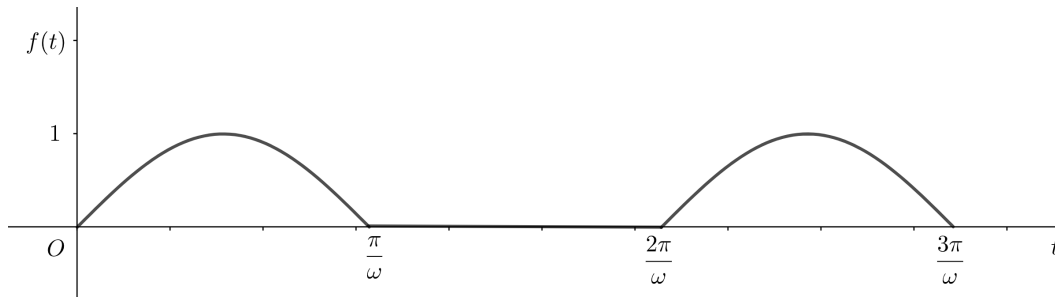
Graficada na Figura 5.9 (b), a função seno de onda completa retificada é dada por

$$g(t) = |\operatorname{sen}(\omega t)|.$$

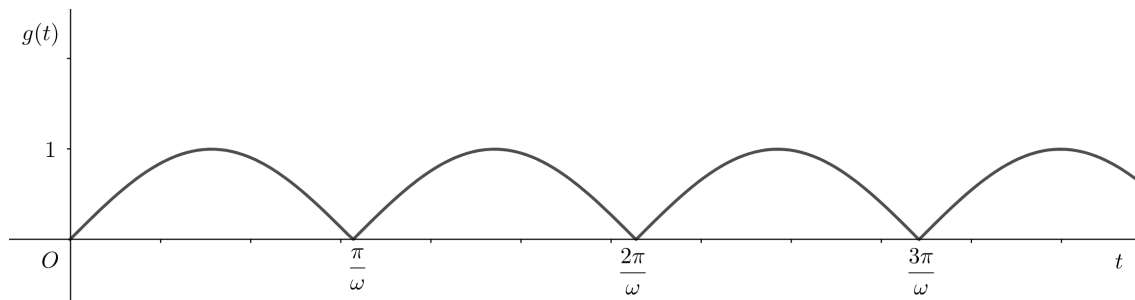
Tomando $G_1(s)$ como a $F_1(s)$ do exemplo anterior, com $T = \frac{\pi}{\omega}$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g(t)) &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi s}{\omega}}} G_1(s) \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \left(\frac{1 + e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{\pi s}{\omega}}} \right) \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \coth \left(\frac{\pi s}{2\omega} \right).\end{aligned}$$

Figura 5.9: Exemplos de ondas senoidais.



(a) Onda senoidal semi-retificada.



(b) Onda senoidal retificada.

Fonte: O autor.

5.5 Funções Forçantes Descontínuas

Na modelagem de algumas situações da Física, como circuitos elétricos ou vibrações mecânicas, é comum se utilizar EDOs não homogêneas com coeficientes constantes. O termo não homogêneo recebe o nome de forçante (ou força externa) e comumente é uma função contínua por partes apresentando saltos de descontinuidade (portanto descontínuas). Podemos utilizar a Função Degrau unitário para representar os saltos de descontinuidade sem ter que escrever a função por partes. Assim, a Transformada de Laplace facilita a resolução de problemas de valor inicial envolvendo tais equações.

Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos de PVI envolvendo EDOs sob ação de funções forçantes descontínuas, ainda sem nos preocuparmos com interpretações físicas.

Exemplo 5.16.

$$y'' + 16y = f(t)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos(4t), & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$

Sabendo que $f(t) = \cos(4t) - \cos(4t)u_\pi(t)$, graficada na Figura 5.10. Como o período do cosseno é 2π , temos que $\cos(4t) = \cos(4t - 4\pi) = \cos(4(t - \pi))$, ou seja, $f(t) = \cos(4t) - \cos(4(t - \pi))u_\pi(t)$. Assim,

$$\mathcal{L}(y'') + 16\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f(t)).$$

Então

$$s^2Y(s) - 1 + 16Y(s) = \frac{s}{s^2 + 16} - \frac{s}{s^2 + 16}e^{-\pi s}$$

$$(s^2 + 16)Y(s) = 1 + \frac{s}{s^2 + 16} - \frac{s}{s^2 + 16}e^{-\pi s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 16} + \frac{s}{(s^2 + 16)^2} - \frac{s}{(s^2 + 16)^2}e^{-\pi s}.$$

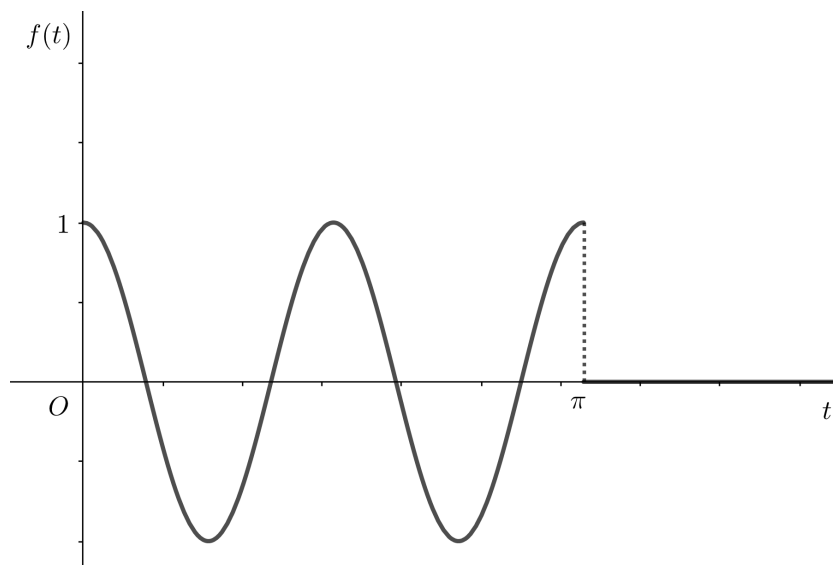
Aplicando a transformada inversa, a solução do PVI é

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) \\ &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2 + 16}\right) + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8s}{(s^2 + 16)^2}\right) - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8s}{(s^2 + 16)^2}e^{-\pi s}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sin(4t) + \frac{1}{8}t\sin(4t) - \frac{1}{8}(t - \pi)\sin(4(t - \pi))u_\pi(t). \end{aligned}$$

Como $\sin(4(t - \pi)) = \sin(4t - 4\pi) = \sin(4t)$, pois o período do seno é 2π , segue que

$$y(t) = \frac{1}{4}\sin(4t) + \frac{1}{8}t\sin(4t) - \frac{1}{8}(t - \pi)\sin(4t)u_\pi(t)$$

Figura 5.10: Gráfico de $f(t) = \cos(4t) - \cos(4t)u_\pi(t)$.



Fonte: O autor.

Exemplo 5.17.

$$y'' - 5y' + 6y = u_1(t)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 1.$$

Temos

$$\mathcal{L}(y''(t)) - 5\mathcal{L}(y'(t)) + 6\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(u_1(t))$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$s^2Y(s) - 1 - 5sY(s) + 6Y(s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$Y(s)(s^2 - 5s + 6) = \frac{e^{-s}}{s} + 1$$

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s(s^2 - 5s + 6)} \right) e^{-s} + \frac{1}{s^2 - 5s + 6}.$$

Uma vez que $s^2 - 5s + 6 = (s - 3)(s - 2)$, após frações parciais

$$Y(s) = \left(\frac{1}{6s} - \frac{1}{2(s-2)} + \frac{1}{3(s-3)} \right) e^{-s} + \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2}.$$

Aplicando a transformada inversa e o Teorema 5.8:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) \\ &= \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s-2}\right) + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s-3}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{2(t-1)} + \frac{1}{3}e^{3(t-1)}\right)u_1(t) + e^{3t} - e^{2t}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.18.

$$y'' + 4y = \text{sen}(t)u_{2\pi}(t)$$

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 0.$$

A função $f(t) = \text{sen}(t)u_{2\pi}(t)$ está graficada na Figura 5.11. Note que

$$\mathcal{L}(y''(t)) + 4\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(\text{sen}(t)u_{2\pi}(t))$$

$$s^2\mathcal{L}(y(t)) - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}(y(t)) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}$$

$$s^2Y(s) - s + 4Y(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}$$

$$Y(s)(s^2 + 4) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1} + s$$

$$Y(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} + \frac{s}{s^2 + 4}.$$

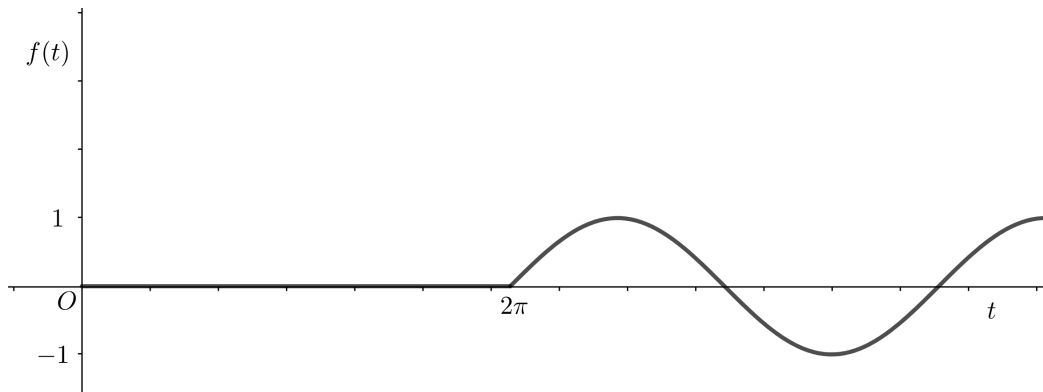
Após frações parciais em $\frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$:

$$Y(s) = \left(\frac{1}{3(s^2 + 1)} - \frac{1}{3(s^2 + 4)} \right) e^{-2\pi s} + \frac{s}{s^2 + 4}.$$

Aplicando a transformada inversa, a solução do PVI é

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) \\ &= \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1} \right) - \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 4} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + 4} \right) \\ &= \frac{1}{3} \text{sen}(t - 2\pi)u_{2\pi}(t) - \frac{1}{6} \text{sen}(2(t - 2\pi))u_{2\pi}(t) + \cos(2t). \end{aligned}$$

Figura 5.11: Gráfico de $f(t) = \text{sen}(t)u_{2\pi}(t)$.



Fonte: O autor.

Exemplo 5.19.

$$y'' + y = f(t)$$

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi \\ 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

Sabendo que $f(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$, graficada na Figura 5.12, temos

$$\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(u_\pi(t)) - \mathcal{L}(u_{2\pi}(t))$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s}$$

$$Y(s)(s^2 + 1) - 1 = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 1)} - \frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2 + 1)} + \frac{1}{s^2 + 1}.$$

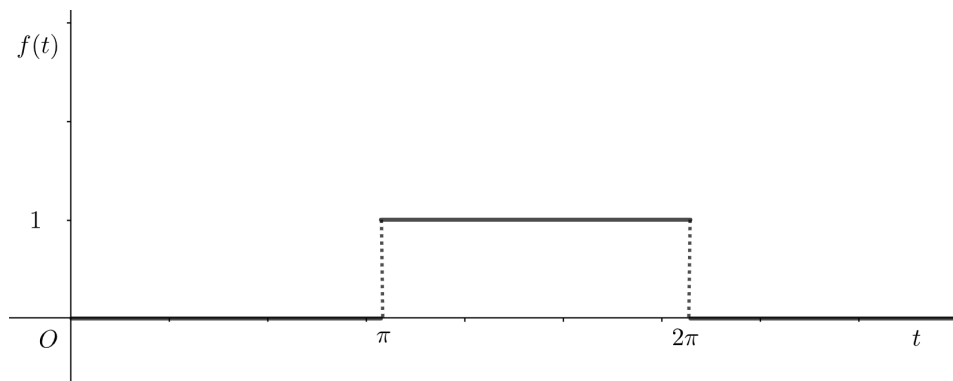
Após frações parciais em $\frac{1}{s(s^2 + 1)}$:

$$Y(s) = e^{-\pi s} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right) - e^{-2\pi s} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right) + \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Aplicando a transformada inversa, a solução do PVI é

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-\pi s}}{s} \right) - \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{se^{-\pi s}}{s^2 + 1} \right) - \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-2\pi s}}{s} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{se^{-2\pi s}}{s^2 + 1} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) \\ &= u_\pi(t) - \cos(t - \pi)u_\pi(t) - u_{2\pi}(t) + \cos(t - 2\pi)u_{2\pi}(t) + \text{sen}(t). \end{aligned}$$

Figura 5.12: Gráfico de $f(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$.



Fonte: O autor.

Exemplo 5.20.

$$y'' + 4y' + 3y = 1 - u_2(t) - u_4(t) + u_6(t)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0.$$

Note que

$$\mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y') + 3\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(u_2(t)) - \mathcal{L}(u_4(t)) + \mathcal{L}(u_6(t))$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 3Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s} + \frac{e^{-6s}}{s}$$

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s} + \frac{e^{-6s}}{s}$$

$$Y(s)(s^2 + 4s + 3) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s} + \frac{e^{-6s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 3)} - \frac{e^{-2s}}{s(s^2 + 3s + 4)} - \frac{e^{-4s}}{s(s^2 + 3s + 4)} + \frac{e^{-6s}}{s(s^2 + 4s + 3)}$$

Como $s^2 + 4s + 3 = (s + 1)(s + 3)$, segue que

$$Y(s) = \frac{1}{s(s + 1)(s + 3)} - \frac{e^{-2s}}{s(s + 1)(s + 3)} - \frac{e^{-4s}}{s(s + 1)(s + 3)} + \frac{e^{-6s}}{s(s + 1)(s + 3)}$$

Após frações parciais e aplicando a transformada inversa

$$y(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-(t-2)} + \frac{1}{6}e^{-3(t-2)}\right)u_2(t) -$$

$$- \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-(t-4)} + \frac{1}{6}e^{-3(t-4)}\right)u_4(t) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-(t-6)} + \frac{1}{6}e^{-3(t-6)}\right)u_6(t).$$

5.6 Impulso Unitário

A função

$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a}, & t_0 - a \leq t < t_0 + a \\ 0, & t \geq t_0 + a \end{cases} \quad (5.8)$$

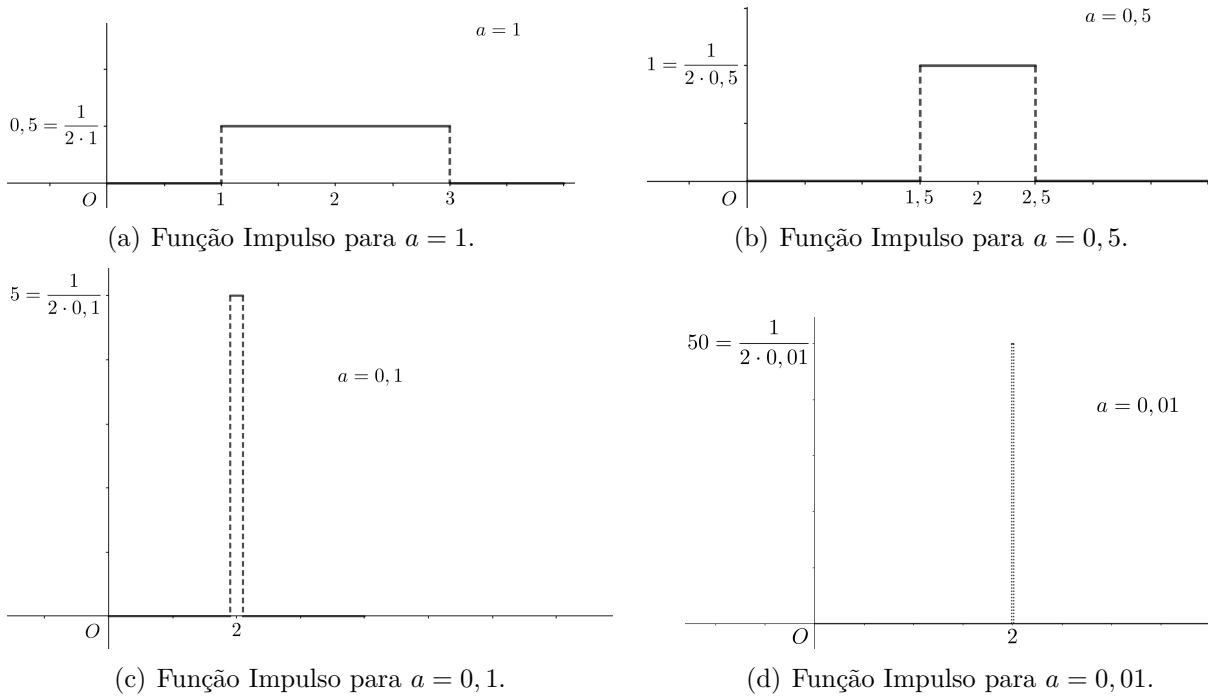
é chamada de Impulso Unitário, com $a > 0$ e $t_0 > 0$. Geralmente utilizada para modelar matematicamente forças externas de grandes amplitudes e em curtos períodos, principalmente em sistemas mecânicos e elétricos sujeitos a ações de forças externas. Para pequenos valores de a , $\delta_a(t - t_0)$ é uma função praticamente constante de grande intensidade agindo por um pequeno intervalo de tempo próximo ao instante t_0 . A Figura 5.13 ilustra o comportamento de $\delta_a(t - 2)$ conforme $a \rightarrow 0$.

Tal função pode ser utilizada para aplicar um impulso em um sistema. Por exemplo, uma asa de avião ser atingida por um raio, uma martelada em uma mola, uma bola atingida por uma tacada e etc [33].

O nome impulso unitário vem da seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \delta_a(t - t_0) dt &= \int_0^{t_0-a} 0 dt + \int_{t_0-a}^{t_0+a} \frac{1}{2a} dt + \int_{t_0+a}^{+\infty} 0 dt \\ &= \frac{1}{2a} t \Big|_{t_0-a}^{t_0+a} = \frac{1}{2a} (t_0 + a - t_0 + a) = \frac{2a}{2a} = 1. \end{aligned}$$

Figura 5.13: Exemplos Funções Impulso.



Fonte: O autor.

5.6.1 Função Delta de Dirac

O limite

$$\delta(t - t_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(t - t_0) \quad (5.9)$$

é caracterizado por duas propriedades

$$(I) \quad \delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$$

$$(II) \quad \int_0^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

O impulso unitário $\delta(t - t_0)$ é chamado de função delta de Dirac². Embora não seja uma função propriamente dita, ainda assim conseguimos obter sua transformada de Laplace supondo

$$\mathcal{L}(\delta(t - t_0)) = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{L}(\delta_a(t - t_0))$$

o que faremos no Teorema a seguir.

Teorema 5.21 (Transformada da Função Delta de Dirac). *Para $t_0 > 0$,*

$$\mathcal{L}(\delta(t - t_0)) = e^{-st_0}.$$

²Na verdade $\delta(t - t_0)$ não é uma função no sentido usual da palavra, pois nesse caso não existe função que satisfaça as propriedades (I) e (II) observadas.

Demonstração. Podemos escrever $\delta_a(t - t_0)$ em termos da função degrau unitário, assim

$$\delta_a(t - t_0) = \frac{1}{2a} [u_{t_0-a}(t) - u_{t_0+a}(t)].$$

Pela Linearidade

$$\mathcal{L}(\delta_a(t - t_0)) = \frac{1}{2a} \left[\frac{e^{-s(t_0-a)}}{s} - \frac{e^{-s(t_0+a)}}{s} \right].$$

Colocando e^{-st_0} em evidência obtemos

$$\mathcal{L}(\delta_a(t - t_0)) = e^{-st_0} \left(\frac{e^{sa} - e^{-sa}}{2sa} \right) \quad (5.10)$$

Na Equação (5.10), para $a \rightarrow 0$, ao calcular $\mathcal{L}(\delta(t - t_0))$, aplicamos *L' Hôpital*³,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\delta(t - t_0)) &= \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{L}(\delta_a(t - t_0)) \\ &= e^{-st_0} \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{e^{sa} - e^{-sa}}{2sa} \right) \\ &= e^{-st_0}. \end{aligned}$$

□

Observação 5.22. Pelo Teorema 5.21, se $t_0 = 0$, obtemos $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$.

Exemplo 5.23.

$$y'' + y = \delta(t - 2\pi)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 1.$$

Temos

$$\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\delta(t - 2\pi))$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = e^{-2\pi s}$$

$$s^2 Y(s) - 1 + Y(s) = e^{-2\pi s}$$

$$Y(s)(s^2 + 1) = 1 + e^{-2\pi s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}.$$

Aplicando a transformada inversa

$$y(t) = \text{sen}(t) + \text{sen}(t)u_{2\pi}(t).$$

³O leitor pode conferir a seção 4.4.4, página 192, do livro [19].

Exemplo 5.24.

$$y'' + 2y' + 3y = \text{sen}(t) + \delta(t - 3\pi)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0.$$

Temos

$$\mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') + 3\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\text{sen}(t)) + \mathcal{L}(\delta(t - 3\pi))$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(sY(s) - y(0)) + 3Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-3\pi s}$$

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-3\pi s}$$

$$Y(s)(s^2 + 2s + 3) = \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-3\pi s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 2s + 3)} + \frac{e^{-3\pi s}}{s^2 + 2s + 3}.$$

Após frações parciais

$$Y(s) = -\frac{1}{4} \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2} \right) + \frac{e^{-3\pi s}}{(s + 1)^2 + 2}.$$

Aplicando a transformada inversa

$$y(t) = -\frac{1}{4} \cos(t) + \frac{1}{4} \text{sen}(t) + \frac{1}{4} e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) + \left(e^{-(t-3\pi)} \text{sen}(\sqrt{2}(t-3\pi)) \right) \frac{u_{3\pi}(t)}{\sqrt{2}}.$$

Exemplo 5.25.

$$y'' + 3y' + 2y = \delta(t - 5) + u_{10}(t)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

Temos

$$\mathcal{L}(y'') + 3\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\delta(t - 5)) + \mathcal{L}(u_{10}(t))$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = e^{-5s} + \frac{e^{-10s}}{s}$$

$$s^2Y(s) - \frac{1}{2} + 3sY(s) + 2Y(s) = e^{-5s} + \frac{e^{-10s}}{s}$$

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = e^{-5s} + \frac{e^{-10s}}{s} + \frac{1}{2}.$$

Como $s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$,

$$Y(s) = \frac{e^{-5s}}{(s+1)(s+2)} + \frac{e^{-10s}}{s(s+1)(s+2)} + \frac{1}{2(s+1)(s+2)}.$$

Após frações parciais

$$Y(s) = e^{-5s} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right) + e^{-10s} \left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right).$$

Aplicando a transformada inversa

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + (e^{-(t-5)} - e^{-2(t-5)})u_5(t) + \left(\frac{1}{2} - e^{-(t-10)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-10)} \right)u_{10}(t).$$

6 Aplicações

Depois da fundamentação teórica precedente, neste capítulo serão apresentadas algumas aplicações utilizando a Transformada de Laplace como ferramenta matemática para resolução de equações diferenciais ordinárias que regem fenômenos físicos como sistema massa-mola e circuitos elétricos.

Para a elaboração deste capítulo, foram consultadas as seguintes referências: [2], [11], [12], [13], [20], [21], [22] e [24].

6.1 Discutindo a 2ª Lei de Newton

Conforme [20] (Capítulo 4 - página 60), temos como princípio fundamental da dinâmica a 2ª Lei de Newton que nos permite caracterizar vários fenômenos da mecânica clássica. Um deles, por exemplo, a 1ª Lei de Newton, que pode muito bem ser determinada pela 2ª Lei no caso em que uma força resultante que atua em uma partícula seja nula. Desse modo, a partícula está ou em movimento retilíneo uniforme ou em repouso já que não existe aceleração ($\mathbf{a} = 0$).

Em muitos momentos essa Lei é reduzida apenas a uma definição de força, mas isso diminui seu teor físico, uma vez que tal definição não é verdadeira, pois as forças de uma partícula são descritas através de sua interação com outras partículas para um dado referencial inercial. Logo, a força \mathbf{F} que define a resultante dessas forças determina a situação na qual a partícula se encontra.

Alguns exemplos desse fenômeno são a Lei da Gravitação Universal (que qualifica a interação gravitacional entre corpos com grandes massas) e a Lei de Coulomb (que descreve a atuação elétrica entre partículas carregadas). Para não acontecer esse reducionismo, pode-se expandir o conceito da 2ª Lei ao expressarmos todas as leis de forças correspondentes a todas interações possíveis da partícula em questão.

Na mecânica clássica, consegue-se com a 2ª Lei definir o conceito de massa inercial m , já que nessa área da física a massa não costuma ser considerada variável, mantendo-se fixa como característica da partícula. Já na relatividade restrita, a massa m varia com a velocidade, o que exclui a aplicabilidade da 2ª Lei do escopo da mecânica clássica, entrando em conceitos da mecânica relativística a qual incorpora partículas com velocidades gigantescas perto da velocidade da luz do vácuo.

A equação

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{6.1}$$

não caracteriza a formulação original do próprio Newton em relação a 2ª Lei. Newton iniciou seu estudo definindo-a a partir da quantidade de movimento ou momento linear que diz:

“A quantidade de movimento é a medida diretamente pela velocidade e sua massa”. Isto é, o momento linear de uma determinada partícula é o produto de sua massa por sua velocidade:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (6.2)$$

Ao derivar a Equação (6.2) em relação a t e supondo que a massa m não varie com o tempo, obtemos:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

Utilizando a Equação (6.1) chega-se na seguinte expressão:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

a qual evidencia a formulação dada por Newton sobre a 2ª Lei:

“A variação do momento é proporcional à força impressa, e tem a direção da força.”

Ou seja, a força é a taxa de variação temporal do momento.

A partir dessa definição pode-se discutir uma aplicação utilizando a 2ª Lei de Newton e a Transformada de Laplace para a sua resolução matemática.

6.1.1 Força Impulsiva

Segundo [2] (Capítulo 15 - página 739), uma força impulsiva agindo sobre uma partícula de massa m , pela 2ª Lei de Newton, é

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t) \quad (6.3)$$

em que $x(t)$ é a posição da partícula, $F = P\delta(t)$ e P é uma constante. Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os lados da Equação (6.3), pela Observação 5.22, obtemos:

$$\begin{aligned} m\mathcal{L}(x'') &= P\mathcal{L}(\delta(t)) \\ ms^2X(s) - msx(0) - mx'(0) &= P. \end{aligned}$$

Dadas as condições iniciais para a posição $x(0) = 0$ e a velocidade $x'(0) = 0$, temos:

$$ms^2X(s) = P.$$

Logo,

$$X(s) = \frac{P}{ms^2}.$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(X(s)) &= \frac{P}{m} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) \\ x(t) &= \frac{P}{m}t. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Derivando a Equação (6.4) em relação a t , obtemos:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{P}{m}. \quad (6.5)$$

Desse modo concluímos da Equação (6.5) que o efeito da força impulsiva é transferir a cada instante P unidades de momento linear à partícula.

6.1.2 Galvanômetro Balístico

Segundo [3] (Capítulo 5 - página 287), o Galvanômetro Balístico é utilizado para a medição de corrente elétrica que é fluída sobre ele, principalmente em amperímetros e voltímetros. Ele possui um bobina conectada aos seus terminais. Desse modo, assim que há uma mudança de fluxo na bobina, uma f.e.m. (força eletromotriz) ε é induzida. Logo, a corrente elétrica i é proporcional à f.e.m. medida pelo galvanômetro.

Esse tipo de galvanômetro também é chamado de D'Arsonval¹. A corrente que passa pelo galvanômetro balístico é uma corrente transitória, ou seja, impulsiva por natureza. Ela existe somente quando há variação de fluxo magnético que está associado à bobina. Dessa maneira, o galvanômetro nos indica um pulso à medida que a corrente flui instantaneamente por ele. O processo de medição não nos dá uma deflexão constante, isto é, a escala do galvanômetro balístico é calibrada de tal maneira que, a partir de seu pulso produzido, consegue-se medir a corrente e a variação do fluxo que a produz.

A deflexão angular (sistema móvel) do galvanômetro é indicada quando ela for proporcional à corrente elétrica. Isso ocorre apenas quando o fluxo magnético produzido pela corrente é máximo. Logo, o sistema móvel do galvanômetro é realizado a partir de um momento de inércia I muito grande, e devido a isso, o sistema continua vibrando entre 10 a 15 segundos. O momento de inércia é originado pela adição de pesos ao sistema móvel. Desse modo, as oscilações desse sistema são amortecidas por um grande período de tempo em uma ínfima razão de amortecimento. Esse pequeno amortecimento nos garante que a primeira deflexão seja de grande amplitude, visto por uma escala numérica.

Por fim, esse efeito pode ser caracterizado matematicamente, onde o torque resultante τ encontrado nesse dispositivo elétrico é ki , em que i é um pulso de corrente e k é uma constante. Sabendo que i é uma corrente de rápida duração, temos:

$$ki = kq\delta(t) \quad (6.6)$$

onde q é a carga total e $\delta(t)$ é a função delta de Dirac. Pelo princípio fundamental da dinâmica para rotações [3], obtemos:

$$\begin{aligned} \tau &= I \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ I \frac{d^2\theta}{dt^2} &= kq\delta(t) \end{aligned} \quad (6.7)$$

em que $\theta(t)$ é o deslocamento angular do ponteiro do galvanômetro e I é momento de inércia.

A partir da Equação (6.7), pode-se aplicar a Transformada de Laplace:

$$I\mathcal{L}(\theta'') = kq\mathcal{L}(\delta(t))$$

¹Para mais detalhes o leitor pode consultar o livro [3], página 76, seção 2.7.

$$I(s^2\Theta(s) - s\theta(0) - \theta'(0)) = kq$$

onde $\Theta(s) = \mathcal{L}(\theta(t))$. Como $\theta(0) = 0$ e $\theta'(0) = 0$ o deslocamento angular e a velocidade angular, respectivamente, nos instantes iniciais, temos:

$$Is^2\Theta(s) = kq$$

$$\Theta(s) = \frac{kq}{I} \frac{1}{s^2}.$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(\Theta(s)) &= \frac{kq}{I} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) \\ \theta(t) &= \frac{kq}{I} t. \end{aligned} \tag{6.8}$$

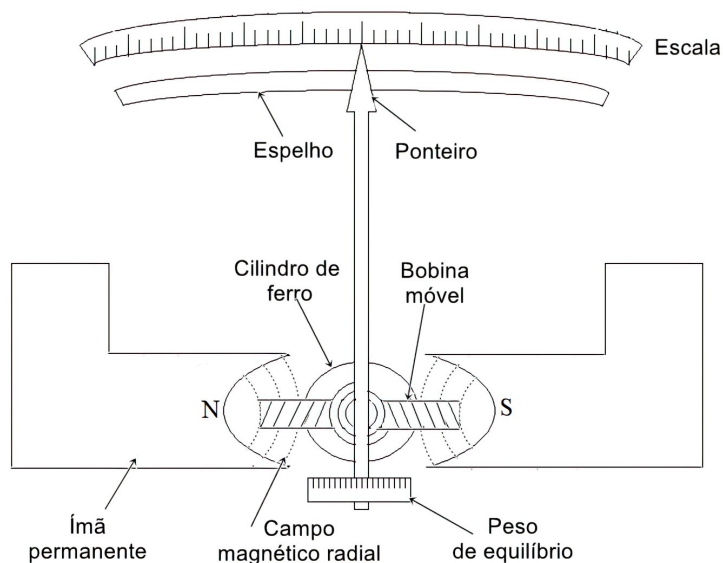
Derivando a Equação (6.8) em relação a t , temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(t)}{dt} &= \frac{kq}{I} \\ I \frac{d\theta(t)}{dt} &= kq \\ I\omega &= kq \end{aligned} \tag{6.9}$$

onde $L = I\omega$ é chamado momento angular.

Portanto, a partir da Equação (6.9) certificamos que a função do pulso de corrente i é de transferir kq unidades de momento angular ao galvanômetro.

Figura 6.1: Exemplo de um galvanômetro.



Fonte: O autor.

A Figura 6.1 nos mostra a configuração do galvanômetro balístico. A bobina móvel (protegida por um cilindro de ferro) é envolvida por um campo magnético produzido pelo ímã permanente. Com uma corrente consegue-se impor outro campo magnético, que a partir do campo magnético produzido pelo ímã tem-se um campo resultante. Esse campo é responsável por gerar uma força magnética e como consequência um torque capaz de mover o ponteiro, o qual está conectado a um eixo ligado também a bobina móvel. O Peso de equilíbrio ajuda a equilibrar o torque do ponteiro e o espelho auxilia na medição da corrente elétrica.

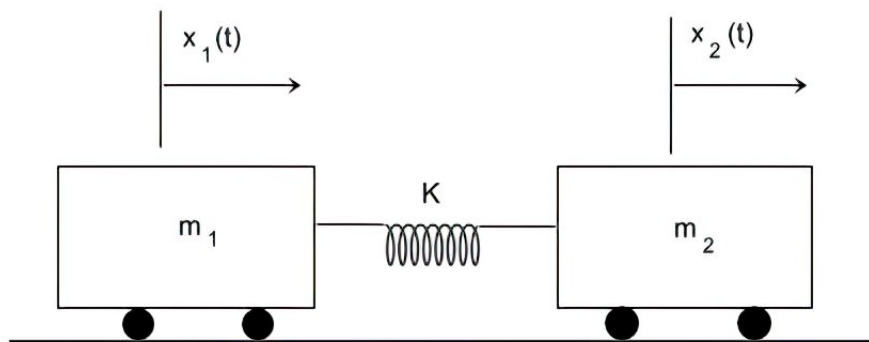
6.2 Sistemas Acoplados

A Transformada de Laplace pode ser aplicada para determinarmos a solução de um sistema excitado por uma função forçante, o que inclui sistemas harmônicos e periódicos, transformando equações diferenciais em equações algébricas mais simples de lidar. Outra vantagem muito importante é o fato de tratar equações descontínuas com muita facilidade além de levar em conta as condições iniciais.

Discutiremos um sistema de equações diferenciais acopladas, em que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ estão misturadas, conforme modelado em [24] (Capítulo 5 - página 192). Contudo, ao empregar o método da Transformada de Laplace é possível desacoplá-las em duas equações algébricas simples na variável s . Com a aplicação da Transformada Inversa de Laplace encontra-se as duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

6.2.1 Sistema Massa-Mola com Dois Vagões

Figura 6.2: Dois vagões presos a uma mola de constante elástica K .



Fonte: O autor.

Considere dois vagões com massas $m_1 = M$ e $m_2 = m$ que estão ligados por uma mola de constante elástica K , conforme Figura 6.2. O vagão de massa $m_1 = M$ está sujeito a uma força impulsiva $F = F_0\delta(t)$. Vamos determinar as soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ utilizando o método de Transformada de Laplace, considerando que os deslocamentos e velocidades sejam nulos no instante inicial.

Pelo princípio fundamental da dinâmica, as equações de movimento dos dois vagões podem ser explicitadas como

$$Mx_1'' + Kx_1 - Kx_2 = F_0\delta(t) \quad (6.10)$$

$$-Kx_1 + mx_2'' + Kx_2 = 0. \quad (6.11)$$

Na Equação (6.10) aplicando a Transformada de Laplace, obtemos:

$$M\mathcal{L}(x_1'') + K\mathcal{L}(x_1) - K\mathcal{L}(x_2) = F_0\mathcal{L}(\delta(t)).$$

Pela Observação 5.22,

$$M(s^2X_1(s) - sx_1(0) - x_1'(0)) + KX_1(s) - KX_2(s) = F_0.$$

Como $x_1(0) = 0$ e $x_1'(0) = 0$,

$$Ms^2X_1(s) + KX_1(s) - KX_2(s) = F_0.$$

Da mesma forma na Equação (6.11)

$$-K\mathcal{L}(x_1) + m\mathcal{L}(x_2'') + K\mathcal{L}(x_2) = 0$$

$$-KX_1(s) + m(s^2X_2(s) - sx_2(0) - x_2'(0)) + KX_2(s) = 0.$$

Como $x_2(0) = 0$ e $x_2'(0) = 0$,

$$-KX_1(s) + ms^2X_2(s) + KX_2(s) = 0.$$

Depois de algumas manipulações

$$X_1(s) = \frac{F_0(ms^2 + K)}{s^2(Mms^2 + K(M + m))} \quad (6.12)$$

$$X_2(s) = \frac{F_0K}{s^2(Mms^2 + K(M + m))}. \quad (6.13)$$

Após frações parciais nas Equações (6.12) e (6.13), obtemos:

$$X_1(s) = \frac{F_0}{M + m} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{m}{M} \left(\frac{1}{s^2 + K \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)} \right) \right) \quad (6.14)$$

$$X_2(s) = \frac{F_0}{M + m} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + K \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)} \right). \quad (6.15)$$

Tomando $\omega^2 = K \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)$ como a frequência angular do sistema massa-mola, temos:

$$X_1(s) = \frac{F_0}{M + m} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{m}{\omega M} \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \right) \quad (6.16)$$

$$X_2(s) = \frac{F_0}{M + m} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{\omega} \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \right). \quad (6.17)$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace nas Equações (6.16) e (6.17), temos:

$$x_1(t) = \frac{F_0}{M+m} \left(t + \frac{m}{M\omega} \text{sen}(\omega t) \right) \quad (6.18)$$

$$x_2(t) = \frac{F_0}{M+m} \left(t - \frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right). \quad (6.19)$$

Conseguimos, portanto, as soluções do deslocamento do sistema massa-mola com dois blocos unidos a uma mola com constante elástica K .

6.3 Circuitos

Os circuitos são aplicações primordiais na área do Eletromagnetismo, como circuitos que operam com potência em grandes escalas ou ainda circuitos de microcomputadores que possuem baixa voltagem [21]. Nesta seção, no desenvolvimento teórico, é imprescindível apresentar os principais componentes de um circuito.

6.3.1 Componentes de um Circuito

Resistor

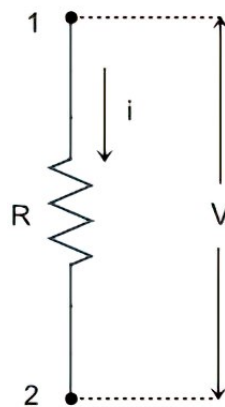
A Figura 6.3 ilustra um resistor representado pela letra R . Pode ser chamado de ôhmico já que obedece à Lei de Ohm, tendo uma queda de potencial na direção da corrente elétrica i por meio de seus extremos, em que $V = V_1 - V_2$. Dessa forma, o potencial é dado por:

$$V = Ri. \quad (6.20)$$

Por efeito Joule, o resistor transforma energia elétrica em energia térmica e sua potência dissipada é:

$$P = i^2 R. \quad (6.21)$$

Figura 6.3: Resistor.



Fonte: O autor.

Capacitor

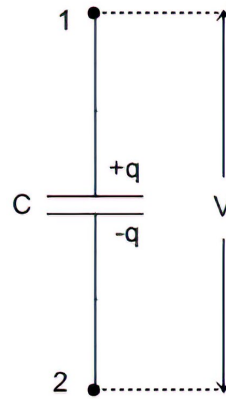
A Figura 6.4 mostra um capacitor, outro elemento importante definido pela letra C sua capacitância. Uma das suas placas ou ainda armaduras tem carga q e a outra tem carga $-q$, sendo que essas cargas podem variar ao decorrer do tempo, desde que estejam em regime quase-estacionário. Seu potencial ou também queda de potencial $V = V_1 - V_2$ entre as placas é dada:

$$V = \frac{q}{C}. \quad (6.22)$$

A função de um capacitor é de ser armazenador de energia elétrica. Logo sua energia é:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{q^2}{2C}. \quad (6.23)$$

Figura 6.4: Capacitor.



Fonte: O autor.

Indutor

A Figura 6.5 indica um indutor representado pela letra L , um solenoide infinito que contém um campo magnético que induz uma corrente elétrica i com resistência desprezível. Tomando o circuito fechado 1234, e sabendo que 3 e 4 são consideravelmente próximos de 1 e 2, temos:

$$\varepsilon = \oint_{1234} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -L \frac{di}{dt} = \int_3^4 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -(V_4 - V_3) = -(V_1 - V_2) = -V \quad (6.24)$$

isto é,

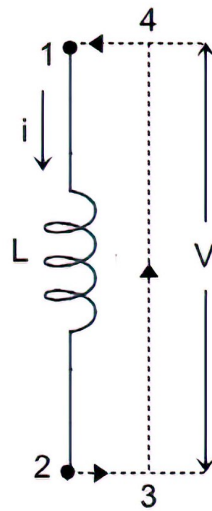
$$V = L \frac{di}{dt} \quad (6.25)$$

a queda de potencial nos extremos do indutor no sentido da corrente i .

Em um indutor há armazenamento de energia magnética dada por:

$$U = \frac{1}{2}Li^2. \quad (6.26)$$

Figura 6.5: Indutor.



Fonte: O autor.

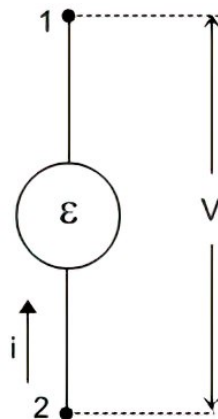
Gerador

A Figura 6.6 exemplifica um gerador, uma fonte de força eletromotriz representado pela letra ε . Ele é responsável por dar energia ao sistema enquanto os outros elementos recebem energia. O gerador é atravessado por uma corrente elétrica i no sentido inverso em relação a queda de potencial, de modo que:

$$V_1 - V_2 = V = -\varepsilon \quad (6.27)$$

que é a queda de potencial para esse caso. O gerador fornece energia a uma taxa de εi .

Figura 6.6: Gerador.



Fonte: O autor.

6.3.2 As leis de Kirchhoff

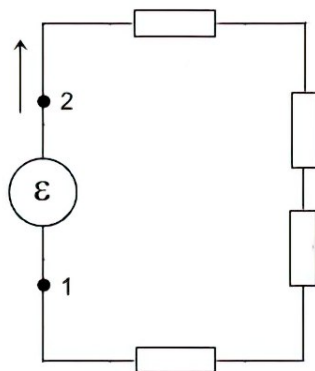
1ª lei de Kirchhoff ou lei das malhas

Considere o circuito representado pela Figura 6.7 com apenas uma malha, em que cada retângulo ilustra um componente elétrico passivo R , L ou C . Sabe-se que

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_1^2 dV = V_1 - V_2 = -\varepsilon \quad (6.28)$$

é a queda de tensão entre os extremos 1 e 2.

Figura 6.7: Circuito com uma malha.



Fonte: O autor.

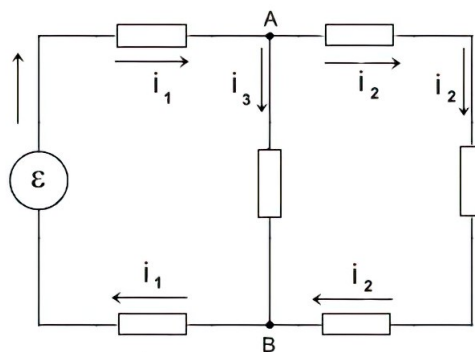
$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k = 0. \quad (6.29)$$

A partir da Equação (6.29) podemos enunciar que a soma de todas as quedas de tensão ao longo de uma malha de um circuito é nula.

Essa é uma soma algébrica, em que a queda de tensão é positiva se adotarmos um caminho no sentido da corrente e é negativa caso tomemos um caminho inverso da corrente.

2ª lei de Kirchhoff ou lei dos nós

Figura 6.8: Circuito com duas malhas.



Fonte: O autor.

Considere agora um circuito conforme Figura 6.8 o qual tem duas malhas. Os pontos A e B são chamados nós e representam a junção de dois ou mais elementos de um circuito. Desse modo, podemos enunciar a seguinte lei:

A soma algébrica de todas as correntes que saem de um nó é nula. Ou seja,

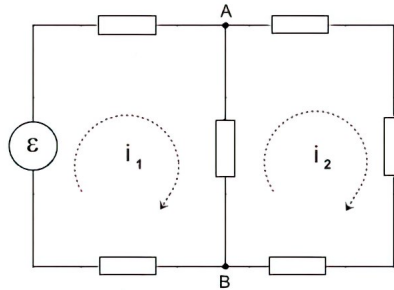
$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n = \sum_{k=1}^n i_k = 0. \quad (6.30)$$

Aplicando a Equação (6.30) no circuito da Figura 6.8 a partir do nó B (pode ser a partir do nó A , já que obteríamos o mesmo resultado), temos:

$$i_3 = i_1 - i_2.$$

Assim, as correntes i_1 e i_2 são as variáveis independentes, isto é, correntes circulantes nas malhas conforme Figura 6.9.

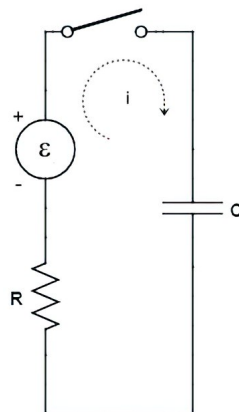
Figura 6.9: Corrente no circuito com duas malhas.



Fonte: O autor.

6.3.3 Circuito R-C em Série

Figura 6.10: Circuito R-C.



Fonte: O autor.

Seja um circuito formado por um capacitor e por um resistor, conforme Figura 6.10. Considere que no instante $t = 0$ o capacitor esteja descarregado e conectado em uma

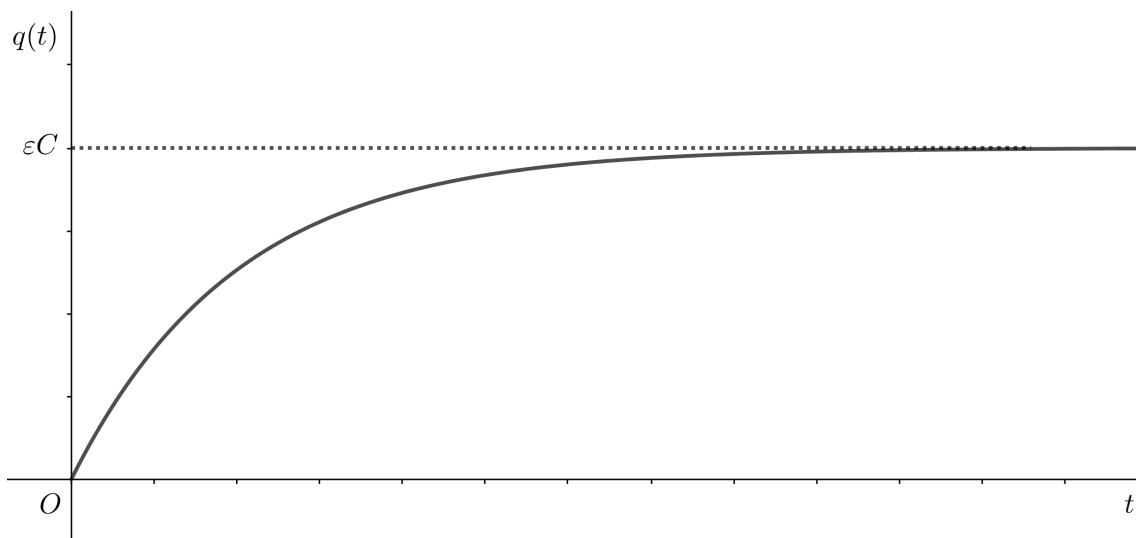
bateria de fem ε . Ligando a chave podemos utilizar a 1ª lei de Kirchhoff para obter a equação diferencial que rege tal circuito:

$$Ri(t) - \varepsilon + \frac{q(t)}{C} = 0 \quad (6.31)$$

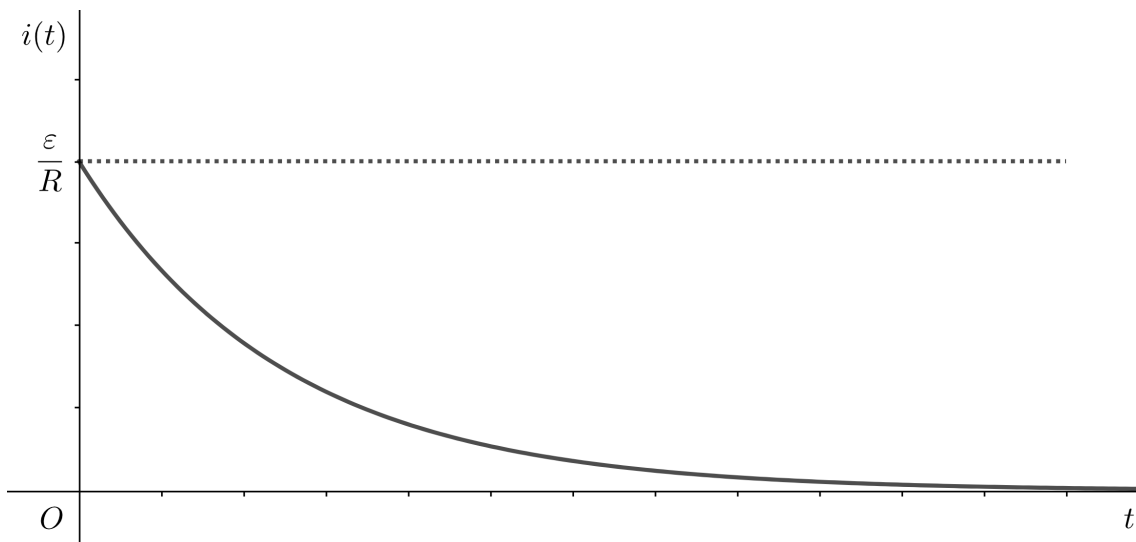
em que $i(t)$ corresponde a corrente elétrica no instante t e $q(t)$ a carga do capacitor armazenada no mesmo instante.

Na Figura 6.11 (a) observamos que a corrente de carga do capacitor cai exponencialmente com o passar do tempo. Caso o capacitor esteja inicialmente carregado e se por acaso removermos a bateria, o capacitor descarrega com a mesma lei exponencial.

Figura 6.11: Gráficos de $q(t)$ e $i(t)$ para circuito R-C.



(a) $q(t)$.



(b) $i(t)$.

Fonte: O autor.

Considerando $q(0) = 0$ e $i(0) = \frac{\varepsilon}{R}$ as condições iniciais da Equação (6.31) e sabendo

que $i = \frac{dq}{dt}$, obtemos:

$$Rq' + \frac{1}{C}q - \varepsilon = 0$$

$$Rq' + \frac{1}{C}q = \varepsilon. \quad (6.32)$$

Aplicando a Transformada de Laplace na Equação (6.32), a condição inicial $q(0) = 0$ e utilizando o Teorema 2.26, temos:

$$R\mathcal{L}(q') + \frac{1}{C}\mathcal{L}(q) = \varepsilon\mathcal{L}(1)$$

$$RsQ(s) - Rq(0) + \frac{1}{C}Q(s) = \varepsilon\frac{1}{s}.$$

Após algumas manipulações:

$$Q(s) = \frac{\varepsilon C}{s(sRC + 1)}. \quad (6.33)$$

Utilizando frações parciais na Equação (6.33)

$$Q(s) = \varepsilon C \left(\frac{1}{s} - \left(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right) \right). \quad (6.34)$$

Logo, efetuando a Transformada Inversa de Laplace na Equação (6.34), temos:

$$q(t) = \varepsilon C (1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \quad (6.35)$$

Conseguimos a função da carga do Circuito R-C. Percebe-se que quando $t \rightarrow +\infty$ a $q(t) = \varepsilon C$, conforme Figura 6.11(a) e a Equação (6.35).

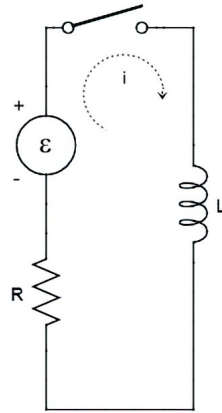
Ao se fazer uma derivada temporal na Equação (6.35) encontra-se a função da corrente elétrica. Assim,

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (6.36)$$

Por fim, a corrente elétrica decai exponencialmente com o tempo e vai à zero quando $t \rightarrow +\infty$. Tal conclusão também notamos na Figura 6.11(b).

6.3.4 Circuito R-L em Série

Figura 6.12: Circuito R-L.



Fonte: O autor.

Considere agora um circuito formado pela resistência R e por um indutor L , conforme Figura 6.12. Ao ligar a chave e aplicando a 1ª lei de Kirchhoff obtemos a equação diferencial que rege esse sistema

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) - \varepsilon = 0 \quad (6.37)$$

em que $i(t)$ corresponde a corrente elétrica no instante t .

Considerando $i(0) = 0$ como condição inicial da Equação (6.37), obtemos:

$$Li' + Ri - \varepsilon = 0$$

$$Li' + Ri = \varepsilon. \quad (6.38)$$

Aplicando a Transformada de Laplace na Equação (6.38) e o Teorema 2.26

$$L\mathcal{L}(i') + R(i) = \varepsilon\mathcal{L}(1)$$

$$L(sI(s) - i(0)) + RI(s) = \varepsilon \frac{1}{s}.$$

Após algumas manipulações

$$I(s) = \frac{\varepsilon}{s(sL + R)}. \quad (6.39)$$

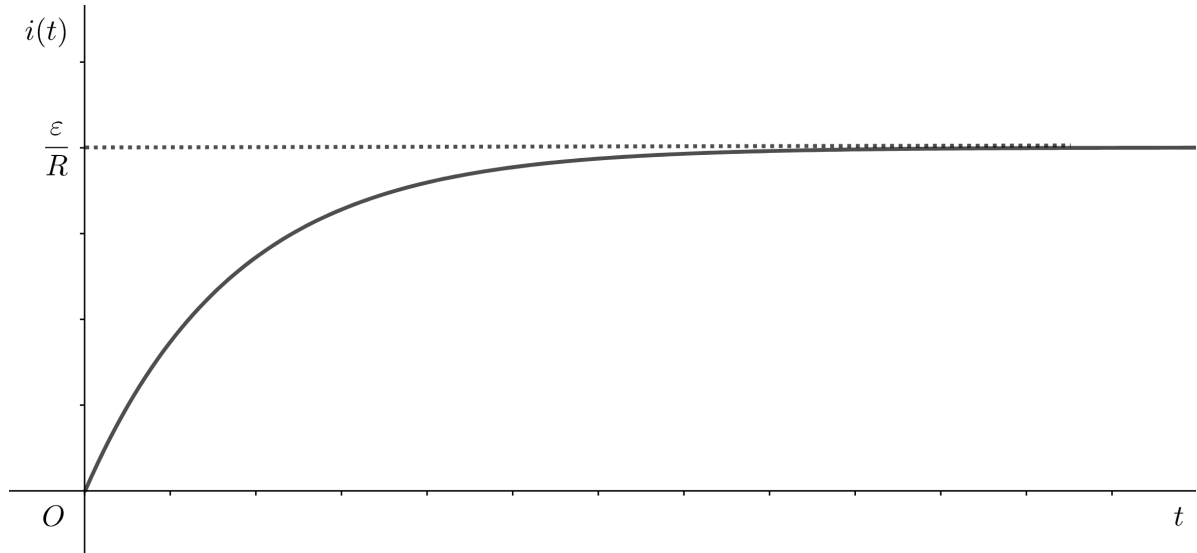
Utilizando frações parciais na Equação (6.39)

$$I(s) = \varepsilon \left(\frac{1}{Rs} - \frac{L}{R(sL + R)} \right). \quad (6.40)$$

Ao efetuar a Transformada Inversa de Laplace na Equação (6.40) encontra-se a função que rege a corrente, assim

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \quad (6.41)$$

Figura 6.13: Gráfico de $i(t)$ para R-L



Fonte: O autor.

A Figura 6.13 e a Equação (6.41) indicam que a corrente se aproxima exponencialmente do valor assintótico dada pela lei de Ohm, já que quando $t \rightarrow +\infty$ a corrente $i = \frac{\varepsilon}{R}$.

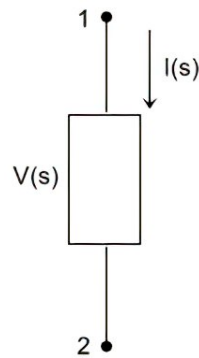
6.3.5 Circuito R-L-C

Conforme [11], [12], [13] e [22], circuitos R-L-C, ou seja, circuitos que possuem um resistor, indutor e capacitor são normalmente chamados de lineares, podendo utilizar a Transformada de Laplace para transformar as funções $i(t)$ (corrente elétrica) e $v(t)$ (tensão) no domínio $t \in \mathbb{R}$ em funções no domínio $s \in \mathbb{C}$ (este também chamado de domínio de frequência). Pode-se analisar um circuito nessa variável tanto qualitativamente quanto quantitativamente. Por fim, as tensões que dão energia ao circuito são funções na forma do degrau unitário $u(t)$.

Modelos para os elementos no domínio $s \in \mathbb{C}$

Resistor

Na Figura 6.14 configura a tensão de um resistor no domínio de s .

Figura 6.14: Tensão do resistor no domínio de s .

Fonte: O autor.

Neste tópico apresenta-se a tensão $v(t)$ do resistor tanto no domínio do tempo t e após a aplicação da Transformada de Laplace no domínio de s . Logo,

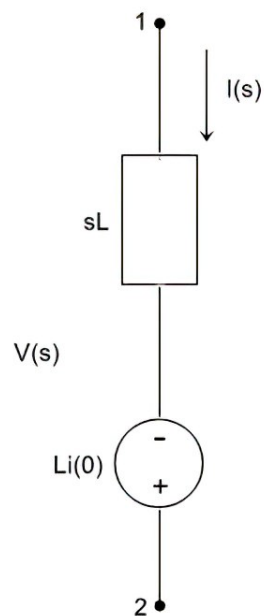
$$v(t) = Ri(t) \quad (6.42)$$

representa a tensão no resistor que obedece à Lei de Ohm.

$$V(s) = RI(s). \quad (6.43)$$

Indutor

A Figura 6.15 representa a configuração da tensão do indutor no domínio de s .

Figura 6.15: Tensão do indutor no domínio de s .

Fonte: O autor.

A tensão $v(t)$ do indutor no domínio t é:

$$v(t) = L \frac{di}{dt}(t). \quad (6.44)$$

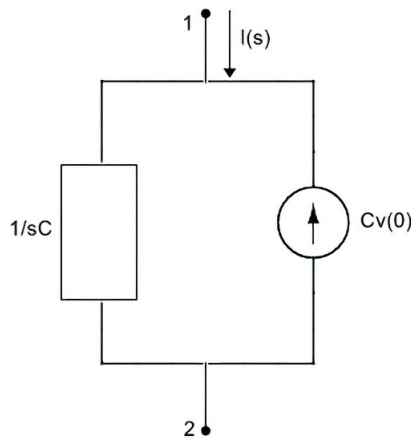
Após a aplicação da Transformada de Laplace e utilizando o Teorema 2.26 temos como tensão do indutor no domínio s :

$$V(s) = LsI(s) - Li(0). \quad (6.45)$$

Capacitor

A Figura 6.16 nos mostra a tensão do capacitor no domínio de s .

Figura 6.16: Tensão do capacitor no domínio de s .



Fonte: O autor.

A corrente $i(t)$ do capacitor no domínio t é:

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}(t). \quad (6.46)$$

Após aplicar a Transformada de Laplace e o Teorema 2.26, obtemos:

$$I(s) = CsV(s) - Cv(0). \quad (6.47)$$

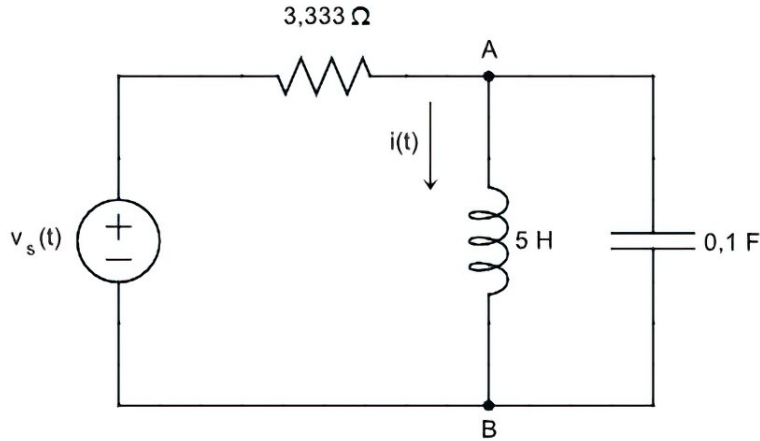
Passo a passo para análise de um circuito linear com Transformada de Laplace

- Transformar circuito do domínio do t para o domínio s usando os elementos apresentados;
- Análise do circuito no domínio s com as mesmas leis e os mesmos métodos do domínio do t ;
- Transformar a solução obtida (tensão ou corrente) de volta para o domínio t .

Solução e Análise de um circuito R-L-C utilizando Transformada de Laplace

Considere o circuito R-L-C representado na Figura 6.17. Vamos determinar a tensão no capacitor $v(t)$ para $t > 0$, considerando as condições iniciais $i(0) = -1A$ e $v(0) = 5V$ e que $v_s(t) = 10u(t)V$, onde $v_s(t)$ é a tensão da fonte e $u(t)$ é função degrau unitário.

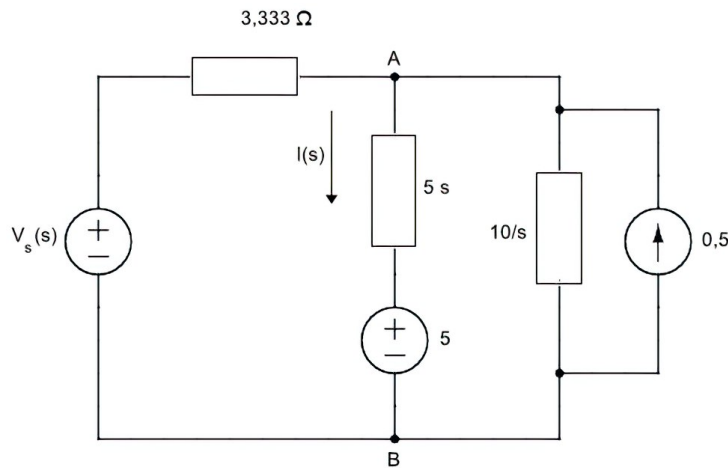
Figura 6.17: Circuito R-L-C no domínio t .



Fonte: O autor.

A Figura 6.18 exemplifica o circuito transformado para a variável s utilizando a Transformada de Laplace.

Figura 6.18: Circuito R-L-C no domínio s .



Fonte: O autor.

Pela 2ª lei de Kirchhoff, obtemos:

$$\frac{V(s) - V_s(s)}{\left(\frac{10}{3}\right)} + \frac{V(s) - 5}{5s} + \frac{V(s)}{\left(\frac{10}{s}\right)} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{3}{10} \left(V(s) - \frac{10}{s} \right) + \frac{1}{5s} (V(s) - 5) + \frac{s}{10} V(s) - \frac{1}{2} = 0$$

$$3s \left(V(s) - \frac{10}{s} \right) + 2(V(s) - 5) + s^2 V(s) - 5s = 0$$

$$(s^2 + 3s + 2)V(s) - 30 - 10 - 5s = 0$$

$$(s^2 + 3s + 2)V(s) - 40 - 5s = 0$$

$$V(s) = \frac{5s + 40}{s^2 + 3s + 2}.$$

Após decomposição por frações parciais, temos:

$$V(s) = \frac{35}{s + 1} - \frac{30}{s + 2}.$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace:

$$v(t) = 35e^{-t}u(t) - 30e^{-2t}u(t).$$

Para $t > 0$:

$$v(t) = 35e^{-t} - 30e^{-2t}.$$

7 Considerações Finais

Em conclusão, os fundamentos matemáticos sobre Transformada de Laplace foram explorados, com o intuito de facilitar o entendimento dos interessados que podem utilizar os tópicos desenvolvidos os auxiliando em seus estudos e pesquisas. Além da fundamentação matemática, foram apresentadas aplicações nas áreas de Física, Engenharia Mecânica e Engenharia Elétrica, usando como base referências de excelência para compreensão e modelagem dos fenômenos naturais. Os *softwares* GeoGebra, CircuitLab e o Photoscape foram utilizados na construção das figuras, que procuram facilitar o entendimento dos conceitos matemáticos e fenômenos físicos.

No decorrer do trabalho foram apresentados os conceitos de limite, derivada e integral em funções $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ como conhecimentos fundamentais a fim de definir e demonstrar teoremas de integrais impróprias, as quais são de suma importância na definição de Transformada de Laplace que é uma transformada integral.

Dessa forma, a partir da definição de Transformada de Laplace, foram calculadas várias transformadas de funções na variável $t \in \mathbb{R}$ transformando-as em funções na variável $s \in \mathbb{C}$, além de teoremas importantes como os teoremas da derivada primeira, segunda, do valor inicial, do valor final e suas generalizações. Foi trabalhada uma demonstração do Teorema de Lerch, resultado imprescindível para garantir a unicidade da Transformada de Laplace de uma função, permitindo calcular a transformada inversa.

Abrangendo a gama de aplicações de Transformada de Laplace, foram apresentadas algumas funções especiais, tais como a função Bessel, função erro, função erro complementar, função beta e a função gamma.

Como tópico principal do trabalho, a Transformada de Laplace das funções delta de Dirac e degrau unitário, as quais são substanciais para aplicações em Física e Engenharia, foram exemplificadas equações diferenciais ordinárias para aplicá-las em PVI's que contenham tais funções como forçantes.

Por último, com essa série de conceitos foi possível entender alguns fenômenos físicos utilizando PVI's com equações diferenciais ordinárias com função impulso ou degrau, resolvendo-os com Transformada de Laplace, transformando funções e suas derivadas na variável t em funções algébricas simples na variável s . Logo após essa transformação, aplica-se a Transformada Inversa de Laplace para se obter as funções que regem tais fenômenos.

Referências

- [1] S. Aggarwal, A. Singh, A. Kumar, and N. Kumar. Application of Laplace Transform for solving Improper Integrals whose Integrand Consisting Error Function. *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics and Statistics*, 4(2):1–7, 2019.
- [2] G. Arfken and H. Weber. *Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*. Elsevier, Rio de Janeiro, 2007.
- [3] U. A. Bakshi and A. V. Bakshi. *Electrical Measurements and Measuring Instruments*. Technical Publications Pune, 2008.
- [4] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Guanabara Dois, 2011.
- [5] J. W. Brown and R. V. Churchill. *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill Book Company, Boston, 8 edition, 2009.
- [6] G. Doetsch. *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Springer-Verlag, New York, 1974.
- [7] E. Brietzke. Funções de Bessel. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~brietzke/bes1/bes1.html>. Acesso em: 26 fevereiro 2022.
- [8] D. G. Figueiredo and A. F. Neves. *Equações Diferenciais Aplicadas*. IMPA, Rio de Janeiro, 3 edition, 2015.
- [9] M. C. Fonçatti. *Polinômios que Satisfazem uma Relação de Recorrência de Três Termos*. Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - UNESP, Presidente Prudente, 2017.
- [10] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo - Volume 2*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 5 edition, 2001.
- [11] S. Haykin and B. Van Veen. *Signals and Systems*. John Wiley & Sons, 1998.
- [12] D. J. Irwin and R. M. Nelms. *Basic Engineering Circuit Analysis*. Wiley, 2015.
- [13] B. P. Lathi. *Signals, Systems and Communication*. Wiley, 1966.
- [14] E. L. Lima. *Curso de Análise - Volume 1*. IMPA, Rio de Janeiro, 1976.
- [15] E. L. Lima. *Análise no Espaço R^n* . IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

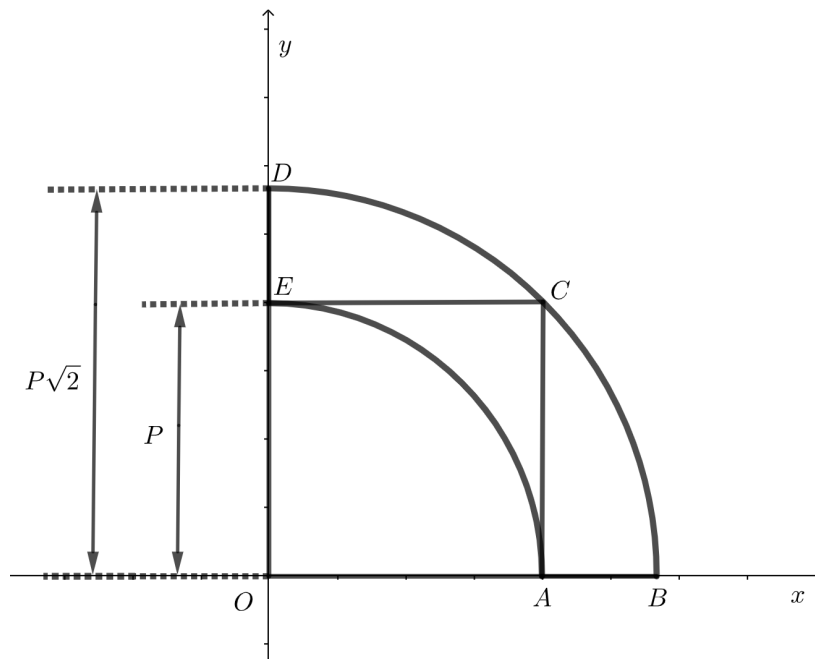
-
- [16] E. L. Lima. *Análise Real - Volume 1 - Funções de Uma Variável*. IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [17] W. A. Lopes. *O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações*. Mestrado em Matemática. Universidade Federal de Uberlândia - UFU, Uberlândia, 2009.
- [18] E. Montoro, W. Barahona, L. Macha, G. Rodríguez, E. Castillo, R. De La Cruz, and P. Becerra. Fórmula de Stirling. *Pesquimat*, 19(1), 2016.
- [19] W. Neves. *Uma Introdução à Análise Real*. Editora UFRJ, Rio de Janeiro, 2014.
- [20] H. M. Nussenzveig. *Curso de Física Básica: Mecânica - Volume 1*. Editora Blucher, 2013.
- [21] H. M. Nussenzveig. *Curso de Física Básica: Eletromagnetismo - Volume 3*. Editora Blucher, 2015.
- [22] A. V. Oppenheim, S. Hamid, and A. S. Willsky. *Signals and Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [23] M. D. Ortigueira and J. T. Machado. Revisiting the 1D and 2D Laplace Transforms. *Mathematics*, 8(8):1330, 2020.
- [24] S. S. Rao. *Vibrações Mecânicas*. Pearson Education do Brasil, São Paulo, 4 edition, 2009.
- [25] J. L. Schiff. *The Laplace Transform: Theory and Applications*. Springer Science & Business Media, New York, 1999.
- [26] D. V. Schroeder. *An Introduction to Thermal Physics*. Addison Wesley Logman, 1999.
- [27] S. M. Silva and M. A. da Silva. *Teoria Básica de Análise Complexa*. Fundação Editora da Unesp (FEU), São Paulo, 1 edition, 2019.
- [28] S. L. Simões. *Contexto Histórico da Equação e Função de Bessel*. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação). Universidade Federal de São Carlos - UFScar, Sorocaba, 2017.
- [29] M. R. Spiegel. *Laplace Transforms*. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [30] J. Stewart. *Cálculo - Volume 1*. Pioneira Thomson Learning Editora C.L., São Paulo, 7 edition, 2014.
- [31] D. A. V. Tonidandel and A. E. A. de Araújo. Transformada de Laplace: Uma Obra de Engenharia. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 34, 2012.
- [32] D. G. Zill. *A First Course in Differential Equations With Modeling Applications*. Cengage Learning, New York, 2012.
- [33] D. G. Zill and M. R. Cullen. *Equações Diferenciais - Volume 1*. Pearson Education, São Paulo, 3 edition, 2001.

A Apêndice: Cálculo de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Provemos que

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Figura A.1: Regiões R_P formada pelo quadrado $OACE$, R_1 formada pelo quarto de círculo OAE e R_2 formada pelo quarto de círculo OBD .



Fonte: O autor.

Demonstração. Seja $I_P = \int_0^P e^{-x^2} dx = \int_0^P e^{-y^2} dy$ e $\lim_{P \rightarrow +\infty} I_P = I$ o valor da integral que queremos encontrar. Logo,

$$\begin{aligned} I_P^2 &= \left(\int_0^P e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^P e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_0^P \int_0^P e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_{R_P} \int e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Em que R_P é a região representada pelo quadrado $OACE$ com lado P conforme Figura A.1.

Assim, sabendo que R_1 é a região do quarto de círculo OAE com raio P e R_2 é a região do quarto de círculo OBD com raio $P\sqrt{2}$, temos:

$$\int_{R_1} \int e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq I_P^2 \leq \int_{R_2} \int e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \quad (\text{A.1})$$

Com a utilização de coordenadas polares e a regra da substituição para o cálculo das integrais duplas em (A.1),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^P e^{-r^2} r dr d\theta \leq I_P^2 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{P\sqrt{2}} e^{-r^2} r dr d\theta$$

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-P^2}) \leq I_P^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2P^2}) \quad (\text{A.2})$$

em que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, pois a região R_P é limitada no primeiro quadrante. Em (A.2) aplicando o limite quando $P \rightarrow +\infty$ e o Teorema do Confronto¹, obtemos:

$$\lim_{P \rightarrow +\infty} I_P^2 = I^2 = \frac{\pi}{4}$$

já que $e^{-P^2} \rightarrow 0$ e $e^{-2P^2} \rightarrow 0$, quando $P \rightarrow +\infty$. Dessa forma,

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

□

¹O leitor pode conferir o Teorema 2, página 63, do livro [16].

B Apêndice: Equação de Bessel

A equação diferencial

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (t^2 - \nu^2)y = 0 \quad (\text{B.1})$$

é chamada de Equação de Bessel¹ de ordem $\nu \in \mathbb{R}$. Nosso objetivo nesse Apêndice é associar as Funções de Bessel, vistas no Capítulo 4, como soluções da Equação (B.1). Faremos isso conforme a referência [7].

O ponto $t_0 = 0$ é um ponto singular regular. Com a utilização do método de Frobenius², procuramos uma solução do tipo,

$$y = t^r \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+r}, \quad \text{com } a_0 \neq 0. \quad (\text{B.2})$$

Substituindo a Equação (B.2) na Equação (B.1), encontramos:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r)a_n t^{n+r} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \nu^2 a_n t^{n+r} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Unindo o primeiro, o segundo e o quarto somatórios na Equação (B.3), temos:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+r)^2 - \nu^2)a_n t^{n+r} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+r+2} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Substituindo $k = n + 2$ no segundo somatório da Equação (B.4) e efetuando algumas manipulações algébricas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+r+\nu)(n+r-\nu)a_n t^{n+r} + \sum_{k=2}^{+\infty} a_{k-2} t^{k+r} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Na Equação (B.5), substituindo o índice k por n no segundo somatório e no primeiro somatório separando os dois primeiros termos, encontramos:

¹Aplicações interessantes dessa equação podem ser conferidas em [28].

²O leitor pode conferir a página 427 do livro [2].

$$(r + \nu)(r - \nu)a_0t^r + (r + \nu + 1)(r - \nu + 1)a_1t^{r+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n + r + \nu)(n + r - \nu)a_n + a_{n-2})t^{n+r} = 0. \quad (\text{B.6})$$

Sabendo que $a_0 \neq 0$, segue que:

$$(r + \nu)(r - \nu) = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$(r + \nu + 1)(r - \nu + 1)a_1 = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$(n + r + \nu)(n + r - \nu)a_n + a_{n-2} = 0 \quad (\text{B.9})$$

A Equação (B.7) é chamada equação indicial, com raízes $r_1 = \nu$ e $r_2 = -\nu$. Para $r_1 = \nu \geq 0$, encontramos da Equação (B.8),

$$(2\nu + 1)a_1 = 0.$$

Com isso,

$$a_1 = 0$$

A partir da Equação (B.9) encontramos a fórmula de recorrência

$$(n + 2\nu)na_n + a_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (\text{B.10})$$

Da Equação (B.10), temos:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n + 2\nu)}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (\text{B.11})$$

Da Equação (B.11) e sabendo que $a_1 = 0$, obtemos:

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = 0.$$

Logo,

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2 + 2\nu)}$$

$$a_4 = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2 + 2\nu)(4 + 2\nu)}$$

$$a_6 = -\frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6(2 + 2\nu)(4 + 2\nu)(6 + 2\nu)}$$

⋮

Fatorando as expressões acima, temos:

$$a_2 = -\frac{a_0}{1(1 + \nu) \cdot 2^2}$$

$$a_4 = \frac{a_0}{1 \cdot 2(1 + \nu)(2 + \nu) \cdot 2^4}$$

$$a_6 = \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3(1 + \nu)(2 + \nu)(3 + \nu) \cdot 2^6}$$

$$\vdots$$

Em geral,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{n!(1 + \nu)(2 + \nu) \dots (n + \nu) \cdot 2^{2n}} \quad (\text{B.12})$$

Escolhendo a_0 como:

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)} \quad (\text{B.13})$$

Com a utilização de várias vezes a seguinte identidade,

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) \quad (\text{B.14})$$

temos:

$$\begin{aligned} (n + \nu) \dots (2 + \nu)(1 + \nu)\Gamma(1 + \nu) &= \\ &= (n + \nu) \dots (2 + \nu)\Gamma(2 + \nu) = \\ &= (n + \nu) \dots (3 + \nu)\Gamma(3 + \nu) = \\ &= \dots = \Gamma(n + \nu + 1) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Depois dessas manipulações a_{2n} resulta:

$$a_{2n} = -\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n + \nu + 1)2^{2n+\nu}}.$$

Que, finalmente, obtemos a seguinte solução:

$$J_\nu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n + \nu + 1)} \frac{t^{2n+\nu}}{2}.$$

A Equação acima é chamada de função de Bessel de primeira espécie de índice ν e é obtida a partir da substituição de a_{2n} na Equação (B.2).

C Apêndice: Tabela das Transformadas

Tabela C.1: Transformadas calculadas no trabalho (parte 1).

$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$	Seção
1	$\frac{1}{s}$	2.2
t	$\frac{1}{s^2}$	2.2
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	2.2
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$	2.2
$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$	2.2
$\text{sen}(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2}$	2.2
$\cosh(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$	2.3
$\text{senh}(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$	2.3
$\text{sen}^2(\alpha t)$	$\frac{2\alpha^2}{s(4\alpha^2 + s^2)}$	2.3
$\cos^2(\alpha t)$	$\frac{2\alpha^2 + s^2}{s(4\alpha^2 + s^2)}$	2.3
$\cosh^2(\alpha t)$	$\frac{s^2 - 2\alpha^2}{s(s^2 - 4\alpha^2)}$	2.3
$\text{senh}^2(\alpha t)$	$\frac{2\alpha^2}{s(s^2 - 4\alpha^2)}$	2.3
$\sum_{k=0}^n a_k t^k, n \in \mathbb{N}$	$\sum_{k=0}^n \frac{k!}{s^{k+1}}$	2.3

Tabela C.2: Transformadas calculadas no trabalho (parte 2).

$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$	Seção
$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, n \in \mathbb{N}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}}$	2.3
$\frac{\text{sen}(t)}{t}$	$\text{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)$	2.3
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	2.4
$e^{at} \text{sen}(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{(s-a)^2 + \alpha^2}$	2.4
$e^{at} \text{cos}(\alpha t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \alpha^2}$	2.4
$e^{at} \text{senh}(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{(s-a)^2 - \alpha^2}$	2.4
$e^{at} \text{cosh}(\alpha t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - \alpha^2}$	2.4
$\text{sen}^3(\alpha t)$	$-\frac{3\alpha}{4(s^2 + 9\alpha^2)} + \frac{3\alpha}{4(s^2 + \alpha^2)}$	2.5
$\text{cos}^3(\alpha t)$	$\frac{s}{4(s^2 + 9\alpha^2)} + \frac{3s}{4(s^2 + \alpha^2)}$	2.5
$L_n(t)$	$\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$	2.5
$Si(t)$	$\frac{1}{s} \text{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)$	2.5
$\int_0^t \text{sen}(\alpha u) du$	$\frac{\alpha}{s(s^2 + \alpha^2)}$	2.5
$\int_0^t \text{cos}(\alpha u) du$	$\frac{1}{s^2 + \alpha^2}$	2.5
$t \text{cos}(\alpha t)$	$\frac{s^2 - \alpha^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	2.6
$t \text{sen}(\alpha t)$	$\frac{2\alpha s}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	2.6
$t \text{cosh}(\alpha t)$	$\frac{s^2 + \alpha^2}{(s^2 - \alpha^2)^2}$	2.6
$t \text{senh}(\alpha t)$	$\frac{2\alpha s}{(s^2 - \alpha^2)^2}$	2.6
$t^2 \text{cos}(\alpha t)$	$\frac{2s(s^2 - 3\alpha^2)}{(s^2 + \alpha^2)^3}$	2.6
$t^2 \text{sen}(\alpha t)$	$\frac{2\alpha(3s^2 - \alpha^2)}{(s^2 + \alpha^2)^3}$	2.6

Tabela C.3: Transformadas calculadas no trabalho (parte 3).

$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$	Seção
$\frac{\text{sen}(\alpha t)}{t}$	$\text{arctg}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$	2.6
$\frac{\text{senh}(\alpha t)}{t}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{s + \alpha}{s - \alpha} \right $	2.6
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$	4.1
$e^{at} * e^{bt}$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$	4.1
$t^\nu, \nu \in]-1, +\infty[$	$\frac{\Gamma(\nu + 1)}{s^{\nu+1}}$	4.2
$t^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	4.2
$t^{\nu-1} \ln(t), \nu \in]0, +\infty[$	$\frac{\Gamma'(\nu) - \Gamma(\nu) \ln(s)}{s^\nu}$	4.2
$\ln(t)$	$-\frac{1}{s}(\gamma + \ln(s)), \gamma \approx 0,58$	4.2
$e^t \text{erf}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{\sqrt{s}(s - 1)}$	4.2
$\text{erf}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{s\sqrt{s + 1}}$	4.2
$\text{erfc}(\sqrt{t})$	$\frac{\sqrt{s + 1} - 1}{s\sqrt{s + 1}}$	4.2
$t^{a+b-1} B(a, b)$	$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{s^{a+b}}$	4.2
$J_0(\alpha t)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}}$	4.2
$u_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	5.2
$u_{ab}(t)$	$\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s(b - a)}$	5.2
$u_1(t)(t - 1)^2$	$\frac{2e^{-s}}{s^3}$	5.2
$u_2(t)e^{at}$	$\frac{e^{-2(s-a)}}{s - a}$	5.2
$u_\pi(t) \cos(t - \pi)$	$\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$	5.2
$u_{\frac{\pi}{2}}(t) \text{sen}(t)$	$\frac{se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2 + 1}$	5.2
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}	5.6