

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

TAMIRES SHIOKAWA DE SIMONE

**PROJETO DE CONTROLADOR ROBUSTO COM REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA
PARA MINIMIZAÇÃO DE CUSTO QUADRÁTICO CONSIDERANDO INCERTEZAS
POLITÓPICAS**

Ilha Solteira - SP

2023

TAMIRES SHIOKAWA DE SIMONE

**PROJETO DE CONTROLADOR ROBUSTO COM REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA
PARA MINIMIZAÇÃO DE CUSTO QUADRÁTICO CONSIDERANDO INCERTEZAS
POLITÓPICAS**

Trabalho de Graduação apresentado à
Universidade Estadual Paulista "Júlio de
Mesquita Filho" Campus de Ilha Solteira
- UNESP, como parte dos requisitos para
obtenção do grau de Engenheiro Eletricista.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira - SP

2023


FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

S598P Simone, Tamires Shiokawa de.
Projeto de controlador robusto com realimentação de saída considerando incertezas politópicas / Tamires Shiokawa de Simone. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2023
59 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Engenharia Elétrica, 2023

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Coorientador: Igor Thiago Minari Ramos
Inclui bibliografia

1. Controle robusto. 2. Realimentação de saída. 3. Desigualdades Matriciais Lineares. 4. Custo garantido. 5. Simulador de bancada. 6. Controlador LQR.

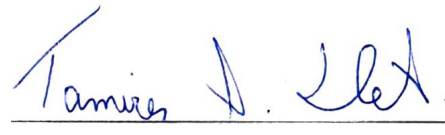

Raiane da Silva Santos

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE GRADUAÇÃO

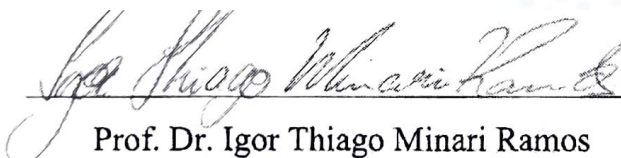
Aos dezoito dias do mês de janeiro do ano de dois mil e vinte e três, a discente Tamires Shiokawa De Simone - RA:161050808 **Lucas Favi Bocca** matriculada sob o nº 161050808, tendo como banca examinadora o seu orientador, o *Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira*, o *Prof. Dr. Igor Thiago Minari Ramos* e o *Prof. Me. Rafael Augusto de Araujo* apresentou o Trabalho de Graduação intitulado **"PROJETO DE CONTROLADOR ROBUSTO COM REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA MINIMIZAÇÃO DE CUSTO QUADRÁTICO CONSIDERANDO INCERTEZAS POLITÓPICAS"** obtendo a nota 10,0 (DEZ INTEIROS) e conceito APROVADA.




Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
- orientador -



Tamires Shiokawa De Simone
- discente -



Prof. Dr. Igor Thiago Minari Ramos
- Membro da Banca -



Prof. Me. Rafael Augusto de Araujo
- Membro da Banca -

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer toda a equipe de docentes e servidores da Universidade Estadual Paulista, principalmente, ao Prof. Dr. Igor Thiago Minari Ramos e ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira por todo o incentivo, paciência, dedicação e as oportunidades oferecidas que me possibilitaram participar de várias atividades e me tornar a profissional que sou hoje.

A todos os membros do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) do campus de Ilha solteira, em especial, ao Prof. Dr. Douglas Buytendorp Bizarro e ao Prof. Dr. Uiliam Nelson Lenzion Tomaz Alves pelas valiosas contribuições dadas no decorrer de minha pesquisa.

À minha família, pela compreensão e apoio durante toda a minha graduação, sobretudo aos meus pais, Sandra Harumi Shiokawa De Simone e Fernando De Simone Neto e ao meu colega Lucas Favi Bocca.

Aos meus companheiros e a todos que direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho propõe um novo projeto de controlador robusto utilizando a realimentação estática de saída considerando o problema de regulador quadrático linear (LQR) baseado em desigualdades matriciais lineares (LMIs). O controlador de realimentação estática de saída pode ser usado quando algumas variáveis de estado não estão disponíveis para a realimentação do sistema. Dessa forma, o projeto do controlador pode resolver problemas práticos em que não há sensores para todas as variáveis de estado da planta. Além disso, a metodologia de controle robusto apresentada busca minimizar um o limite superior do índice quadrático (custo garantido) relacionando-o à saída e ao sinal de controle do sistema linear em malha fechada. Através do projeto do sistema a ser controlado, é possível obter um desempenho otimizado do sistema. Com o objetivo de encontrar o melhor custo garantido relacionado a performance do sistema, um algoritmo de evolução diferencial para uma otimização global foi utilizado. O controlador foi implementado em um módulo de bancada que simula terremotos em uma estrutura com um andar para ilustrar a eficácia da metodologia proposta. Adicionalmente, é comparada a resposta do sistema LQR com a resposta utilizando um controlador considerando a saturação no atuador. Na implementação no módulo de bancada, uma falha de sinal é assumida, e mesmo na presença de ocorrência de uma falha de 40% no atuador, as oscilações são atenuadas pelos controladores LQR propostos.

Palavras-chave: Controle robusto, Realimentação de saída, Desigualdades matriciais lineares, Custo garantido, Simulador de bancada, Controlador LQR.

ABSTRACT

This manuscript proposes a new robust static output feedback control design considering the linear quadratic regulator (LQR) problem based on Linear Matrix Inequalities (LMIs). The output static feedback controller can be used when all the state variables are not available for feedback. Thus, the controller design can solve practical problems in which there are no sensors for all state variables of the plant. Furthermore, the presented robust control methodology minimizes an upper bound of a quadratic index (guaranteed cost) related to the output and the control signal of the uncertain closed-loop linear system. Through the designer's knowledge of the system to be controlled, it is possible to obtain optimized performances. In order to find the best guaranteed cost related to the performance of the system, an algorithm of differential evolution for global optimization was used. The controller was implemented in a bench scale earthquake simulator and the results illustrate the effectiveness of the proposed methodology. Additionally, the response of the LQR system is compared with the response using a controller considering the saturation in the actuator. Even with the consideration of the presence of a 40% fault in the actuator signal, the oscillations of the system response were attenuated by the proposed robust controllers.

Keywords: Robust Control, Static Output Feedback, Linear Matrix Inequality, Guaranteed Cost, Bench Scale Earthquake Simulator, LQR controller.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Diagrama de blocos de um sistema LTI no espaço de estados.	13
Figura 2 – Esquema da definição do conceito de estabilidade.	15
Figura 3 – Interpretação geométrica de uma matriz M definida positiva.	17
Figura 4 – Representação no R^3 das relações de inclusão entre os conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(H)$, $\mathcal{E}(P, \delta)$ e a trajetória do vetor de estados.	23
Figura 5 – Interpretação gráfica da função de saturação.	24
Figura 6 – Sistema amortecedor de massa ativa de bancada Quanser.	42
Figura 7 – Modelo matemático do sistema AMD contendo 1 piso	44
Figura 8 – Sinal senoidal utilizado nos testes.	46
Figura 9 – Sinal terremoto de Northridge utilizado nos testes.	46
Figura 10 – Custo por geração controlador considerando índice de desempenho quadrático.	47
Figura 11 – Posição do piso superior e do sinal de controle utilizado nos testes no módulo Shake Table II utilizando uma onda senoidal.	48
Figura 12 – Posição do piso superior e do sinal de controle utilizado nos testes no módulo Shake Table II utilizando dados de um terremoto.	49
Figura 13 – Custo por geração controlador considerando saturação no atuador.	50
Figura 14 – Posição do piso superior e do sinal de controle utilizado sistema simulando uma onda senoidal aplicado ao módulo Shake Table II no software Simulink.	51
Figura 15 – Posição do piso superior e do sinal de controle utilizado sistema simulando um terremoto aplicado ao módulo Shake Table II no software Simulink.	52
Figura 16 – Fluxograma do algoritmo ED	58
Figura 17 – Sobreposição da resposta do sistema a uma entrada senoidal considerando os controladores sem (Teorema 3) e com a saturação no atuador (Teorema 4), utilizando o software Simulink	59
Figura 18 – Sobreposição da resposta do sistema a um terremoto considerando os controladores sem (Teorema 3) e com a saturação no atuador (Teorema 4), utilizando o software Simulink	59

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros utilizados no sistema AMD com um piso (QUANSER, 2009).	43
--	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AMD	<i>Active Mass Damper</i> (Amortecedor de massa ativa).
EA	<i>Evolutionary Algorithm</i> - (Algoritmo Evolutivo).
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i> (Regulador Quadrático Linear).
LTI	<i>Linear time – invariant system</i> (Sistema linear invariante no tempo).
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i> - (Desigualdades Matriciais Lineares).
SOF	<i>Static output feedback</i> - (Sistema com realimentação de saída).
PID	Proporcional integral derivativo
C_R	Constante de <i>crossover</i> .

LISTA DE SÍMBOLOS

$I_{m \times m}$	Matriz Identidade.
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais.
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
\mathbb{K}_N	Conjunto $\{1, \dots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{M}_{m \times n}$	Matriz de dimensão $m \times n$.
$\mathcal{M}_{m \times n}^l$	l -ésima linha da matriz $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
\mathcal{M}^T	Transposta da matriz \mathcal{M} .
$\mathcal{M} \succ (\succeq) 0$	Matriz \mathcal{M} simétrica e (semi-)definida positiva.
$\mathcal{M} \prec (\preceq) 0$	Matriz \mathcal{M} simétrica e (semi-)definida negativa.
$He(\mathcal{M})$	Denota $\mathcal{M} + \mathcal{M}^T$.
*	Bloco simétrico de uma matriz simétrica.
$\ x\ _2$	Norma euclidiana de x .
\subset	Está contido.
\forall	Para todo.
\in	Pertence.
\exists	Existe.
\Leftrightarrow	Equivalente.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Estrutura do trabalho	11
2	DEFINIÇÕES E TEORIAS	13
2.1	Modelagem no espaço de estados	13
2.2	Conceitos de estabilidade	15
2.2.1	Teoria da estabilidade segundo Lyapunov	16
2.3	Definições matriciais	16
2.3.1	Incertezas politópicas	18
2.3.2	Desigualdades matriciais lineares	19
2.3.2.1	<i>Complemento de Schur</i>	19
2.4	Controle ótimo	20
2.4.1	Saturação	21
2.4.1.1	<i>Definição da região de operação</i>	21
2.4.1.2	<i>Representação como combinação convexa</i>	23
2.4.2	Taxa de decaimento	24
3	PROJETO DE CONTROLADORES	26
3.1	Projeto de controladores para sistema linear com realimentação estática de saída	26
3.2	Projeto de controladores considerando incertezas politópicas e taxa de decaimento	28
3.3	Projeto de controladores considerando índice de desempenho quadrático	30
3.4	Projeto de controladores considerando saturação no atuador	34
4	ALGORITMO DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL	39
5	SISTEMA ACTIVE MASS DAMPER 1 + SHAKE TABLE II	41
5.1	Descrição do equipamento	41
6	PROJETOS, SIMULAÇÕES E IMPLEMENTAÇÕES DOS CONTROLADORES	44
6.1	Controlador considerando índice de desempenho quadrático	47
6.2	Controlador considerando saturação no atuador	49
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	53
7.1	Perspectivas futuras	54
	REFERÊNCIAS	55
	ANEXO A Fluxograma do algoritmo de Evolução Diferencial	58
	ANEXO B Comparação da simulação entre os teoremas	59

1 INTRODUÇÃO

As teorias de controle têm como característica combinar conhecimentos interdisciplinares teóricos e práticos para solucionar problemas reais envolvendo sistemas.

Segundo Ogata (2011), houve uma crescente demanda de sistemas de controle que atendessem a rigorosas exigências de desempenho que, conseqüentemente, aumentam seu grau de complexidade. Dessa forma, desde aproximadamente 1960 a teoria de controle moderno permite uma nova abordagem para a análise desses sistemas.

Enquanto a teoria de controle convencional está diretamente relacionada às relações de sua função de transferência (entrada-saída), a teoria de controle moderno utiliza outra forma de representação dos sistemas baseada em notações vetoriais-matriciais que simplificam o sistema de equações.

Assim, essa teoria tem sido muito utilizada tanto no desenvolvimento de pesquisas acadêmicas, quanto no setor produtivo, gerando demandas por conhecimentos e experiências (SILVEIRA, 2007).

Ao longo da década de 1980, a teoria de controle robusto ganhou atenção, devido a esta representar o sistema de estudo em um grau adequado de aproximação do sistema real. Nesse modelo, são considerados parâmetros que elevam seu nível de complexidade, como a minimização do efeito de distúrbios na planta, incorporação de erros de modelagem nos sistemas de controle projetados, mudanças dinâmicas nos processos e incertezas (OGATA, 2011).

É afirmado por Syrmos et al. (1997) que uma das mais importantes ferramentas da engenharia de controle continua sendo o projeto de controladores estáticos por realimentação de saída (SOF), pois pode ser aplicado nos casos onde o vetor de estados não está acessível devido a razões técnicas ou econômicas. Porém, apesar dessa estratégia de controle ser de fácil implementação, sua solução numérica apresenta uma característica não-convexa, resultando em um comportamento exponencial do tempo computacional utilizado em relação ao tamanho da entrada de dados (MOREIRA, 2009).

Uma abordagem comumente utilizada para resolução de uma grande variedade de problemas, conforme descrito em Syrmos et al. (1997), é o emprego de funções quadráticas de Lyapunov. Apesar de gerarem condições necessárias e suficientes, a estabilidade quadrática permite achar uma solução numérica para a matriz de ganhos, utilizando desigualdades matriciais lineares (LMIs).

Conforme apresentado em Boyd et al. (1994), uma das vantagens de utilizar LMIs é a possibilidade de empregar o uso de interfaces de programação como YALMIP (LOFBERG, 2004), que permite realizar protótipos dos algoritmos de LMIs rapidamente utilizando o ambiente

MATLAB. Como citado em Oliveira (1996), grande parte das pesquisas em controle vêm fazendo o uso dessas ferramentas de programação, sendo capaz de calcular respostas às análises que, há pouco tempo, eram consideradas como problemas de alta complexidade.

Neste trabalho, é utilizada uma abordagem matemática relacionada a sistemas lineares, com incertezas politópicas. De acordo com Silva Marcus Pantoja e Bottura (2010), essa metodologia proporciona um problema de otimização convexa e controladores lineares, simplificando sua solução computacional.

Com o intuito de melhorar o desempenho transitório do sistema, pode-se incluir parâmetros de projeto como taxa de decaimento. Também pode-se considerar a saturação do atuador para atender as regiões de operação e, conseqüentemente, algumas limitações físicas do sistema.

Neste trabalho, objetiva-se modelar um controlador e utilizá-lo na estabilidade de sistemas estruturais, possibilitando que os edifícios sejam mais seguros quando sujeitos a vibrações como terremotos e ventos.

Esses controladores podem atuar em uma massa móvel localizada no piso superior desses edifícios de modo que o conjunto massa móvel mais a estrutura atue de modo a absorver e dissipar a energia de uma maneira estável (JR; NAGARAJAIAH, 2003).

1.1 Estrutura do trabalho

A organização do trabalho é realizada da seguinte forma:

- Capítulo 2: Apresenta um estudo bibliográfico envolvendo os fundamentos da teoria de controle tendo como referências principais Ogata (2011) e Slotine, Li et al. (1991).
- Capítulo 3: As técnicas de modelagem para sistemas SOF são apresentadas de maneira gradativa em relação aos parâmetros de projeto como taxa de decaimento, custo garantido e a saturação nos atuadores. A partir dessas técnicas são propostos teoremas prevendo a estabilidade assintótica dos sistemas.
- Capítulo 4: É descrito o funcionamento do algoritmo de evolução diferencial utilizado no trabalho.
- Capítulo 5: É descrito o comportamento do equipamento Active Mass Damper 1 + Shake Table II utilizado nas simulações.
- Capítulo 6: São apresentadas a modelagem matemática e a descrição em espaços de estados do módulo didático de suspensão ativa da QUANSER. As simulações e implementações dos teoremas propostos estão ilustradas nesse capítulo. Os resultados obtidos são comentados e comparados.

- Capítulo 7: São apresentadas conclusões sobre os resultados obtidos neste trabalho e propostas de trabalhos futuros.
- Apêndice A: Ilustração com pseudocódigo da programação utilizada para resolução de LMIs via software MatLab (LOFBERG, 2004).
- Apêndice B: Comparação gráfica entre as respostas dos controladores projetados, sem (Teorema 3) e com a saturação no atuador (Teorema 4), às entradas consideradas.

2 DEFINIÇÕES E TEORIAS

A teoria de estabilidade tem um papel fundamental na modelagem de sistemas dinâmicos e nos problemas de engenharia (KHALIL, 2015). Nessa seção será abordado como um sistema pode ser descrito em equações no espaço de estados e conceitos como estabilidade assintótica e pontos de equilíbrio, que são imprescindíveis para a compreensão do teorema de Lyapunov.

2.1 Modelagem no espaço de estados

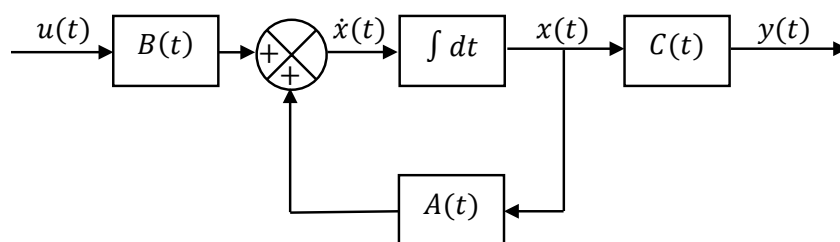
De acordo com Levine (1999), a abordagem utilizando espaços de estados significa descrever um sistema de modo que o estado represente-o completamente em um determinado momento, portanto, devem existir regras definidas para a transição de um estado para outro.

Em outras palavras, o estado do sistema resume todo o comportamento passado com o propósito de determinar o comportamento futuro, representando, assim, sua dinâmica.

Portanto, o menor conjunto necessário para determinar o estado do sistema é denominado de variáveis de estado e um vetor de estado é composto por n variáveis de estado necessárias para descrever completamente o comportamento do sistema (OGATA, 2011).

Será exemplificado a definição de um sistema linear invariante no tempo (LTI) com realimentação de saída no espaço de estados. Considere o sistema, apresentado na Figura 1, que contenha r entradas e m saídas que envolvam n integradores (variáveis que definem o estado do sistema dinâmico):

Figura 1 – Diagrama de blocos de um sistema LTI no espaço de estados.



Fonte: Adaptado de Ogata (2011).

Ele pode ser representado pelo conjunto de Equações:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), \\
 \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), \\
 &\dots, \\
 \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Com as saídas definidas por:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; t), \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; t), \\ &\dots, \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Utilizando os seguintes termos matriciais:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t), \\ x_2(t), \\ \dots, \\ x_n(t) \end{bmatrix}, f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t), \\ u_2(t), \\ \dots, \\ u_r(t) \end{bmatrix}, \\ y(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t), \\ y_2(t), \\ \dots, \\ y_m(t) \end{bmatrix} e g(x, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \\ \dots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

podemos reescrever as Equações 2.1 e 2.2 como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u, t) e \\ y(t) &= g(x, t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ao linearizar as Equações 2.4 em torno de um ponto de operação, podemos utilizar a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) e \\ y(t) &= C(t)x(t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

A solução $x(t)$ das Equações 2.5 corresponde a curva no espaço de estados t que varia de zero até infinito, essa curva é geralmente referenciada como a trajetória do espaço ou trajetória do sistema (KHALIL, 2015).

Com o objetivo de simplificar as notações, a indicação da variável dependente do tempo foi omitida de forma que $x = x(t)$, $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $u = u(t)$ e $y = y(t)$. Portanto o sistema da Figura 1 pode ser descrito como:

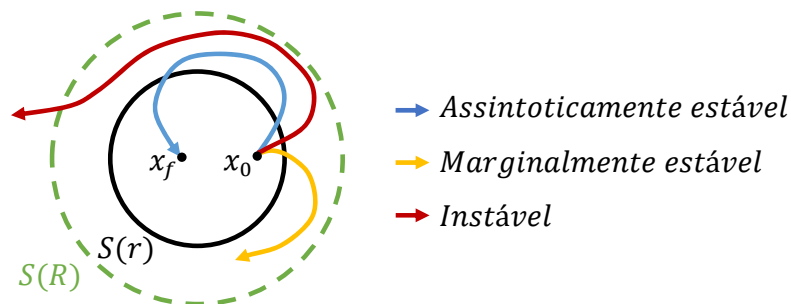
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu e \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2 Conceitos de estabilidade

A noção básica de estabilidade para sistemas lineares pode ser resumida ao estado de equilíbrio que um sistema atinge ao redor de um ponto de operação. Porém, essa definição não pode ser aplicada para sistemas não lineares, porque eles apresentam um comportamento mais complexo.

Desse modo, é preciso definir conceitos como estabilidade assintótica, marginal e instabilidade. É possível visualizar na Figura 2 a representação geométrica das diferentes classificações de estabilidade de um sistema.

Figura 2 – Esquema da definição do conceito de estabilidade.



Fonte: Adaptado de Slotine, Li et al. (1991).

Definição 1. (SLOTINE; LI et al., 1991) O ponto de equilíbrio $x(t) = x_0$ é dito estável, se, $\forall R > 0$ exista um $r > 0$, tal que $|(|x(x_0)|)| < r$, portanto $\forall t \leq 0, |(|x(t)|)| < R$. Caso contrário o ponto de equilíbrio é dito instável.

Essencialmente, a condição para que a trajetória de um sistema seja estável, de acordo com Lyapunov, é que $x(t)$ não ultrapasse uma esfera arbitrária de raio R . E um valor de $r(R)$ pode ser encontrado de tal forma que no tempo $t = 0$ a trajetória de estados estará dentro da esfera de raio R e permanecerá dentro dessa região.

Um ponto de equilíbrio instável é comumente indesejável devido à possibilidade de gerar danos em componentes elétricos ou mecânicos dos sistemas a serem controlados.

Em muitas aplicações de engenharia, a estabilidade de Lyapunov não é suficiente, conforme descrito por Slotine, Li et al. (1991). Por exemplo, quando há uma perturbação na altitude de um satélite, não é desejado apenas que o satélite se mantenha próximo a sua altitude original em relação a magnitude da perturbação, mas que gradualmente o satélite retorne a sua altitude original. Nesse tipo de problema podemos utilizar o conceito de estabilidade assintótica.

Definição 2. (SLOTINE; LI et al., 1991) Um ponto de equilíbrio $x(t) = x_0$ é assintoticamente estável se for estável e adicionalmente existir algum $r > 0$ e uma trajetória que inicie em $x(x_0) < r$ e convirja para $x(x_f) < r$ com t tendendo a infinito, sem que a trajetória deixe a esfera com raio R .

Estabilidade assintótica significa que a região de equilíbrio é estável e, além disso, se inicia perto do ponto de equilíbrio x_0 e converge para o ponto x_f assim que o tempo tende a infinito. Segundo Lyapunov, uma região de equilíbrio estável e não assintoticamente estável é chamado de marginalmente estável.

2.2.1 Teoria da estabilidade segundo Lyapunov

Em Khalil (2015), para um dado sistema de controle, é desejado verificar se o ponto de equilíbrio em que o sistema se encontra é estável ou não, ou seja, se todas as soluções que começam em pontos próximos continuam próximas, caso contrário o ponto de equilíbrio é instável.

A abordagem mais utilizada para verificar a estabilidade de sistemas de controle foi introduzida no século XXI pelo Alexander Mikhailovich Lyapunov que inclui o método de linearização e o método direto.

O método de linearização consegue estabelecer conclusões em relação a estabilidade de um sistema não linear em relação a um ponto de equilíbrio por meio das propriedades de sua aproximação linear.

Definição 3. (KHALIL, 2015) *Se a energia total de um sistema é constantemente dissipada, então o sistema, seja linear ou não, deve eventualmente estacionar em um ponto de equilíbrio.*

O método direto de Lyapunov, apresentado na Definição 3, não é restrito apenas a uma análise local da estabilidade. A partir dele, é possível determinar as propriedades de estabilização de um sistema não linear por meio de uma função escalar de energia para o sistema dinâmico e examinar sua variação com o tempo. Juntos, o método de linearização e o método direto constituem o teorema de Lyapunov (SLOTINE; LI et al., 1991).

Esse teorema pode ser aplicado sem a necessidade de resolver um conjunto de equações diferenciais, o que tornaria o problema mais complexo, porém não há um método sistemático para encontrar a função candidata de Lyapunov (KHALIL, 2015).

2.3 Definições matriciais

Para o desenvolvimento de funções de Lyapunov, é preciso utilizar várias ferramentas matemáticas que serão contempladas nesse tópico.

Definição 4. (SLOTINE; LI et al., 1991) *Uma matriz quadrada M é simétrica se: $M = M^T$, portanto $M_{ij} = M_{ji} \forall i, j$. Uma matriz quadrada M é antissimétrica se: $M = -M^T$ portanto $M_{ij} = -M_{ji}, \forall i, j$.*

Podemos demonstrar que a soma de uma matriz simétrica com uma antissimétrica será sempre zero. Considere uma matriz antissimétrica $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrário, pré e

pós multiplicando M por x^T e x respectivamente, obtêm-se:

$$x^T Mx = -x^T M^T x. \quad (2.7)$$

Como $x^T M^T x$ é um escalar, podemos substituir o lado direito da Equação (2.7) pela sua transposta

$$x^T Mx = -x^T Mx, \quad (2.8)$$

desse modo, conclui-se que

$$\forall x, x^T Mx = 0. \quad (2.9)$$

Como a parte antissimétrica não contribui para esse resultado, não há perda de generalidade ao se considerar a mesma Equação (2.9) para uma matriz M simétrica.

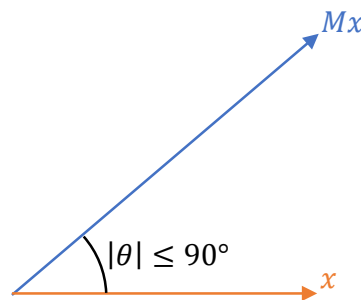
Nas análises de sistemas lineares, são comumente utilizadas funções quadráticas na forma da Equação (2.9) como candidatas a função de Lyapunov.

Definição 5. (SLOTINE; LI et al., 1991) Uma matriz quadrada $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definida positiva se

$$\forall x \neq 0, x^T Mx > 0. \quad (2.10)$$

A Definição 5 não implica dizer que todos os elementos da matriz são positivos, geometricamente essa definição pode ser interpretada por um ângulo sempre menor que 90° entre o vetor x e sua imagem Mx , como ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – Interpretação geométrica de uma matriz M definida positiva.



Fonte: Adaptado de Slotine, Li et al. (1991).

Os conceitos de matriz semi-definida positiva, definida negativa e semi-definida negativa podem ser definidos similarmente. Por exemplo, uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é semi-definida positiva se $\forall x \neq 0, x^T Mx \geq 0$.

Como forma de evidenciar essa propriedade das matrizes, será utilizada a notação:

- $M \succ (\succeq) 0$ para matrizes simétricas e (semi-)definida positivas e
- $M \prec (\preceq) 0$ para matrizes simétricas e (semi-)definida negativas.

Definição 6. (BOYD et al., 1994) Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.11)$$

com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não-singular, será estável, se e somente se existir uma matriz definida positiva M tal que

$$A^T M + MA < 0. \quad (2.12)$$

A condição $M \succ 0$, $A^T M + MA < 0$ é denominada inequação de Lyapunov, ela permite analisar a estabilidade de um sistema dinâmico e pode ser resolvida utilizando um conjunto de equações lineares.

Demonstração. Considere um sistema dinâmico representado no espaço de estados descrito pela Equação 2.6 com $u = 0$ e A sendo uma matriz constante e não singular (MORAES, 2021). Se a Equação 2.10, contendo $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva, for considerada como candidata à função de Lyapunov

$$V(x) = x^T M x \quad (2.13)$$

sua derivada em relação ao tempo pode ser escrita como:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T M x + x^T M \dot{x} \quad (2.14)$$

se $\dot{x} = Ax$ então:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (Ax)^T M x + x^T M (Ax), \\ &= x^T A^T M x + x^T M A x, \\ &= x^T (A^T M + MA)x. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como $V(x)$ é definida positiva, para que o sistema seja assintoticamente estável, $\dot{V}(x)$ tem que ser definida negativa

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x(t) < 0, \quad Q > 0. \quad (2.16)$$

Igualando as duas Equações, pode-se chegar às seguintes restrições:

$$A^T M + MA = -Q, \quad \text{com } P = P^T > 0 \text{ e } Q > 0. \quad (2.17)$$

□

2.3.1 Incertezas politópicas

Uma das ferramentas mais utilizadas para o estudo de sistemas de controle é a abordagem polinomial, ou seja, a descrição da dinâmica de sistemas utilizando matrizes cujos coeficientes são polinômios (KUČERA, 1985).

Para análise da estabilidade robusta desses sistemas são considerados parâmetros incertos, como exemplo, falhas apresentadas no atuador. Uma das formas mais abrangentes para representação de incertezas paramétricas é a politópica (BARMISH; JURY, 1994). Para simplificação das notações, será utilizada a relação $\alpha = \alpha(t)$.

Um politopo $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pode ser definido como um conjunto convexo finito de pontos, onde cada ponto $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pode ser expresso como uma combinação convexa, ou seja, existem escalares reais $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \geq 0$ tais que:

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i A^i \text{ e } \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1. \quad (2.18)$$

É possível estender a Definição 6 para ser utilizada com politopos conforme o enunciado a seguir:

Definição 7. (BOYD et al., 1994) *Considere a equação diferencial*

$$\dot{x} = A(\alpha)x, \quad (2.19)$$

com $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ não-singular. O ponto de equilíbrio $x_e \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ será assintoticamente estável, se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva $M \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tal que para todo $i \in \mathbb{K}_n$, exista

$$A_i^T M + M A_i < 0. \quad (2.20)$$

2.3.2 Desigualdades matriciais lineares

Em controle, a representação de sistemas politópicos utilizando LMIs é uma das formas mais utilizadas devido ao sua grande flexibilidade e popularização devido ao aumento do poder computacional ao longo dos anos (ÂNGELO, 2019). Desse modo, podemos utilizar o seguinte lema para reescrever os sistemas utilizando desigualdades matriciais lineares.

Lema 1. (CHANG; PARK; ZHOU, 2015) *Para as matrizes \mathcal{T} , \mathcal{P} , \mathcal{U} e \mathcal{A} com as dimensões apropriadas e um escalar η , as seguintes afirmações são equivalentes:*

$$(i) \begin{bmatrix} \mathcal{T} & * \\ \eta \mathcal{P}^T + \mathcal{U} \mathcal{A} & -\eta \mathcal{U} - \eta \mathcal{U}^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.21)$$

$$(ii) \mathcal{T} \prec 0, \quad \mathcal{T} + \mathcal{A}^T \mathcal{P}^T + \mathcal{P} \mathcal{A} \prec 0. \quad (2.22)$$

2.3.2.1 Complemento de Schur

O complemento de Schur, definido no Lema 2, tem sido amplamente utilizado em Engenharia de Controle, uma vez que possibilita transformar conjuntos de desigualdades não lineares convexas em LMIs (MOREIRA, 2011).

Lema 2. (BOYD et al., 1994) As seguintes proposições são equivalentes:

$$(i) \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} < 0; \quad (2.23)$$

$$(ii) A - BC^{-1}B^T < 0, C < 0; \quad (2.24)$$

$$(iii) A - B^T A^{-1} B < 0, A < 0. \quad (2.25)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^n$ e $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ simétricas e $C \in \mathbb{R}^m$.

2.4 Controle ótimo

Ao utilizar o método de controle quadrático ótimo, é possível encontrar a matriz de ganhos de controle por realimentação de estado de uma maneira bem definida utilizando um controlador do tipo LQR (Regulador Linear Quadrático) (OGATA, 2011).

Dessa forma, é possível atender aos critérios de projeto por meio da minimização de uma função custo, representada como um índice de desempenho quadrático J , que possui as matrizes de ponderação Q e R que, respectivamente, representam a importância relativa do erro e o consumo da energia, sendo uma técnica de controle ótimo.

A função de custo pode ser representada de maneiras distintas para cada problema, segundo Caun et al. (2018) a função de custo pode ser representada por

$$J = \int_0^\infty \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & * \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix} dt \quad (2.26)$$

com $S \in \mathbb{R}^{n_u \times n_z}$, $Q \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ e $R \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ sendo as matrizes de ponderação entre os estados do sistema, u a entrada de controle e z a saída controlada.

Considerando $S = 0_{n_u \times n_z}$, pode-se desenvolver a Equação 2.26 como:

$$J = \int_0^\infty z^T R z + u^T Q u dt \quad (2.27)$$

considerando que $u = KC_1(\alpha)x$ e $z = C_2(\alpha)x$

$$J = \int_0^\infty x^T C_2^T(\alpha) R C_2(\alpha) x + x^T C_1^T(\alpha) K^T Q K C_1(\alpha) x dt. \quad (2.28)$$

Dado o vetor de condição inicial x_m para $m = 1, 2, \dots, n_{x_0}$, a Equação 2.27 será garantida para qualquer condição inicial $x(0)$ pertencente ao conjunto convexo

$$\mathcal{X}_0 := \left\{ x(0) \in \mathbb{R}^{n_x} : x(0) = \sum_{m=1}^{n_{x_0}} \lambda_m x_m(0), \sum_{m=1}^{n_{x_0}} \lambda_m = 1, \lambda_m \geq 0 \right\}. \quad (2.29)$$

Nesse capítulo serão apresentados índices que podem ser adicionados ao projeto do controlador LQR como a consideração da saturação no atuador e a taxa de decaimento.

2.4.1 Saturação

Nesse trabalho, o projeto de controladores considerando a saturação no atuador tem como base o Corolário 1, descrito em Fernandes (2022), que propõe um controlador com ganho único utilizando o custo garantido.

Para a simulação do sistema no módulo Shake Table II + AMD system, são utilizados os modelos matemáticos deduzidos nos trabalhos de Moraes (2021) e Suman (2020). Nesses trabalhos, também é considerada a saturação do atuador ou sensor no sistema de controle.

Assim, o objetivo de considerar esse índice na modelagem dos controladores é manter o atuador funcionando dentro dos seus limites (HU; LIN, 2001).

2.4.1.1 Definição da região de operação

Para garantir uma representação mais precisa do sistema, uma região de operação da saturação será definida utilizando um conjunto compacto \mathcal{X} como região de operação:

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : |N_h x| \leq \phi_h, h \in [1, 2, \dots, p]\} \quad (2.30)$$

com $N = \begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T & \dots & N_p^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_p \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^p$ conhecidos.

Definida a região de operação, é preciso uma medida adequada do tamanho de um conjunto \mathcal{C} que esteja contido em \mathcal{X} para que a estimativa seja mais exata e possa ser mais facilmente tratada (HU; LIN, 2001).

Assim, é desejado encontrar o maior dos conjuntos que possuam a seguinte propriedade: um conjunto \mathcal{C}_1 é maior que outro conjunto \mathcal{C}_2 se o maior índice $v_1 \mathcal{C}_T$ contido em \mathcal{C}_1 seja maior que o maior índice $v_2 \mathcal{C}_T$ contido em \mathcal{C}_2 , ou seja, $v_T(\mathcal{X}) := \sup\{v > 0 : v \mathcal{C}_T \subset \mathcal{X}\}$.

Portanto, se $v_T \geq \delta$, então o conjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$. Considerando $\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_m \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^m$, $\delta^{-1} = \omega$, $\delta_l > 0$, $l \in \mathbb{K}_m$, dois conjuntos típicos \mathcal{C}_T podem ser descritos por um elipsoide:

$$\mathcal{E}(P, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P x \leq \delta, \delta > 0\} \quad (2.31)$$

e o poliedro definido como:

$$\mathcal{L}(H) = \{x \in \mathbb{R}^n : |H_i x| \leq \delta_i, l = 1, 2, \dots, m\}, \quad (2.32)$$

com H_i sendo a i -ésima linha da matriz H , $H = \begin{bmatrix} H_1^T & H_2^T & \dots & H_m^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

É possível definir as relações entre os conjuntos utilizando LMIs pelo seguinte lema adaptado de (ALVES et al., 2016).

Lema 3. (ALVES et al., 2016) Considerando os conjuntos \mathcal{E} , \mathcal{L} e \mathcal{X} definidos pelas respectivas Equações 2.30, 2.31 e 2.32. O conjunto \mathcal{E} estará contido em \mathcal{L} e \mathcal{X} se as LMIs forem satisfeitas:

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 \omega & * \\ XN_h^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.33)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_l^2 \omega & * \\ G^T & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.34)$$

para todo $X = P^{-1}$ e $G = HX$ com $l = [1, 2, \dots, m]$.

Demonstração. Inicialmente, será verificado se $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{X}$. Ao multiplicar a Equação 2.33 por $\text{diag}(1, P)$ é possível obter:

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 \omega & N_h \\ N_h^T & P \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

aplicando o complemento de Schur na Equação 2.35:

$$\begin{aligned} P - N_h^T \phi_h^{-2} \delta N_h &\geq 0, \\ P &\geq N_h^T \phi_h^{-2} \delta N_h, \end{aligned} \quad (2.36)$$

pré e pós multiplicando Equação 2.36 respectivamente por x^T e x :

$$x^T P x \geq x^T N_h^T \phi_h^{-2} \delta N_h x. \quad (2.37)$$

Considerando que a trajetória do vetor de estados está contida dentro da elipsoide, $x \in \mathcal{E}(P, \delta)$, e levando em conta a Equação 2.31 então $x^T P x \leq \delta$. Dessa forma a Equação 2.37 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \delta &\geq x^T P x \geq x^T N_h^T \phi_h^{-2} \delta N_h x, \\ \delta &\geq \phi_h^{-2} \delta x^T N_h^T N_h x, \\ \phi_h^2 &\geq x^T N_h^T N_h x. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Desse modo, como $x \in \mathcal{L}(H)$ consequentemente é possível afirmar que a elipsoide $\mathcal{E}(P, \delta)$ está contida na região de operação \mathcal{X} .

Em seguida, é necessário verificar se $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{L}(H)$, analisando a LMI contida na Equação 2.34. Pré e pós multiplicando a Equação 2.34 por $\text{diag}(1, P)$, obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} \mu_l^2 \omega & H_l X P \\ P X H_l^T & P X P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_l^2 \omega & H_l \\ H_l^T & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.39)$$

aplicando o complemento de Schur na Equação 2.39:

$$\begin{aligned} P - H_l^T \mu_l^{-2} \delta H_l &\geq 0, \\ P &\geq H_l^T \mu_l^{-2} \delta H_l, \end{aligned} \quad (2.40)$$

pré e pós multiplicando a Equação 2.40 respectivamente por x^T e x :

$$x^T P x \geq x^T H_l^T \mu_l^{-2} \delta H_l x. \quad (2.41)$$

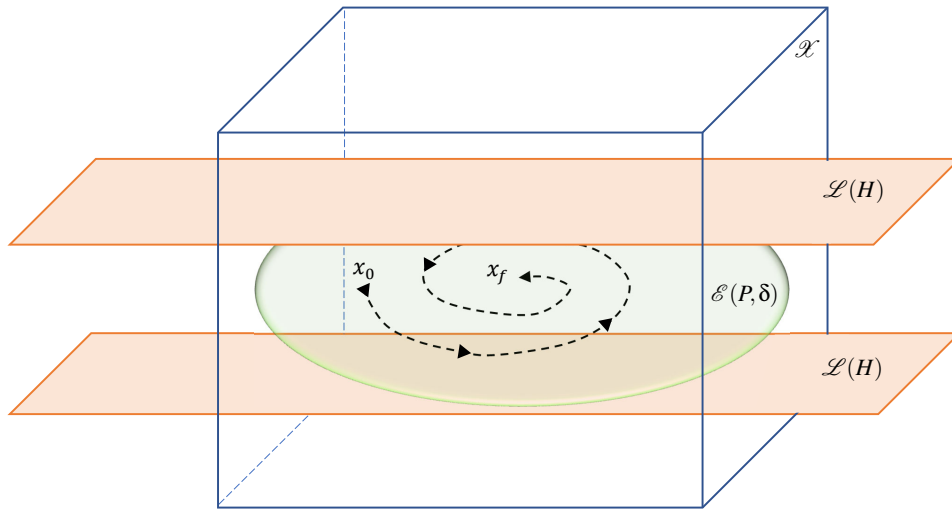
Considerando que $x \in \mathcal{E}(P, \delta)$, então da Equação 2.31 é possível concluir que $x^T P x \leq \delta$. Dessa forma a Equação 2.41 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \delta &\geq x^T P x \geq x^T H_l^T \mu_l^{-2} \delta H_l x, \\ \delta &\geq \mu_l^{-2} \delta x^T H_l^T H_l x, \\ \mu_l^2 &\geq x^T H_l^T H_l x. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Desse modo, $x \in \mathcal{L}(H)$, ou seja, é possível afirmar que a elipsoide $\mathcal{E}(P, \delta)$ está contida no poliedro $\mathcal{L}(H)$.

A representação gráfica dos conjuntos definidos pode ser observada na Figura 4.

Figura 4 – Representação no \mathbb{R}^3 das relações de inclusão entre os conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(H)$, $\mathcal{E}(P, \delta)$ e a trajetória do vetor de estados.



Fonte: Próprio autor.

□

2.4.1.2 Representação como combinação convexa

Conforme demonstrado em Hu, Lin e Chen (2002), para representar a saturação como uma combinação convexa é preciso definir um conjunto \mathcal{D} como sendo

$$\mathcal{D} = \{D_q \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u} : d_{ii} = 0 \text{ ou } 1 \text{ e } d_{ij} = 0, \forall i \neq j \text{ sendo } \forall (i, j) \in \mathbb{K}_{n_u} \times \mathbb{K}_{n_u}\}, \quad (2.43)$$

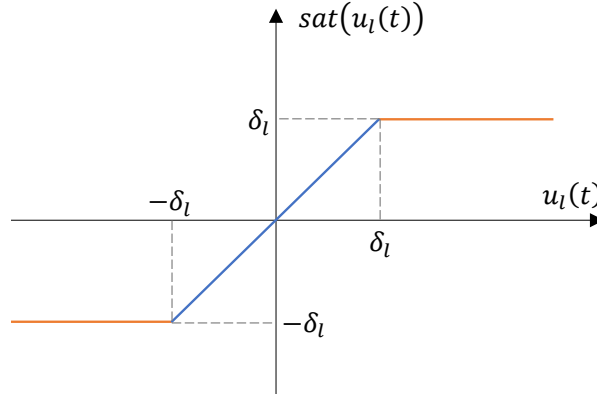
assim, o conjunto da Equação 2.43 possui 2^{n_u} matrizes D_q com $q \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$.

Considere que a função de saturação é simétrica em relação a origem e pode ser descrita pela função não linear

$$sat(u_l) = sign(u_l) \min\{\delta_l, |u_l|\} = \begin{cases} -\delta_l, & \text{se } u_l < -\delta_l, \\ u_l, & \text{se } |u_l| \leq \delta_l, \\ \delta_l, & \text{se } u_l > \delta_l. \end{cases} \quad (2.44)$$

A interpretação gráfica da Equação 2.44 pode ser vista na Figura 5.

Figura 5 – Interpretação gráfica da função de saturação.



Fonte: Próprio autor.

Para simplificar a notação, para o vetor $u \in \mathbb{R}^m$, será utilizada a mesma notação sat para escrever o vetor da função de saturação:

$$sat(u) = \begin{bmatrix} sat(u_1) & sat(u_2) & \dots & sat(u_m) \end{bmatrix}^T. \quad (2.45)$$

Definição 8. (HU; LIN; CHEN, 2002) Considere as matrizes $K, H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ conhecidas e o conjunto \mathcal{D} definindo as matrizes D_q e $\bar{D}_q = I_{n_u} - D_q$. Para $x \in \mathbb{R}^n$, se $x \in \mathcal{L}(H)$ e $u = -Kx$, então

$$sat(u) = \sum_{q=1}^{2^m} \lambda_q (-D_q K + \bar{D}_q H) x, \text{ onde } \sum_{i=1}^{2^m} \lambda_q = 1, 0 \leq \lambda_q \leq 1. \quad (2.46)$$

Ao considerar a realimentação de saída, a Equação 2.46 deve ser adaptada de forma a considerar a lei de controle

$$u = -Ky = -KC_1(\alpha)x, \quad (2.47)$$

consequentemente, a saturação pode ser reescrita como a seguinte combinação convexa

$$sat(u) = \sum_{q=1}^{2^m} \lambda [-D_q KC_1(\alpha) + \bar{D}_q H] x. \quad (2.48)$$

2.4.2 Taxa de decaimento

Neste trabalho, é considerado outro índice de desempenho chamado de taxa de decaimento (γ) que tem como objetivo diminuir o transitório do sistema, aumentando a velocidade de

convergência das variáveis de estado. Ela pode ser definida como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} \|x(t)\| = 0, \quad (2.49)$$

exista para todas as trajetórias de x (BOYD et al., 1994).

Considerando a função candidata de Lyapunov, descrita pela Equação 2.13, a restrição mostrada na Equação 2.50 permite determinar um limite inferior sobre a taxa de decaimento do sistema:

$$\dot{V}(x) \leq 2\beta V(x). \quad (2.50)$$

3 PROJETO DE CONTROLADORES

Neste capítulo são propostos teoremas para o projeto de controladores considerando os conceitos desenvolvidos no capítulo anterior. Além disso, são considerados os parâmetros de projeto como incertezas politópicas, saturação, custo garantido e taxa de decaimento.

3.1 Projeto de controladores para sistema linear com realimentação estática de saída

Considere o seguinte sistema linear descrito pelas Equações:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3.1)$$

$$y = C_1x, \quad (3.2)$$

$$z = C_2x, \quad (3.3)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída mensurável, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ a variável de saída controlada e as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ e $C_2 \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ constantes.

A lei de controle, com realimentação de saída é definida como:

$$u = -Ky = -KC_1x, \quad (3.4)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ é a matriz de ganhos do controlador. Desse modo, o sistema em malha fechada descrito na Equação 3.1 pode ser representado conforme a Equação 3.5.

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax - BKC_1x = (A - BKC_1)x. \quad (3.5)$$

Em conjunto, serão consideradas matrizes de flexibilização $\mathcal{F}_{n_y \times n_z}$ e $\mathcal{F}_{n_y \times n_x}$, que possibilitam condições de projeto menos conservativas, definidas por:

$$\mathcal{F}_{n_y \times n_x} = \begin{cases} I_{n_y \times n_y}, & \text{se } n_y = n_x, \\ \begin{bmatrix} I_{n_y \times n_y} & 0_{n_y \times (n_x - n_y)} \end{bmatrix}, & \text{se } n_y < n_x, \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{F}_{n_y \times n_z} = \begin{cases} I_{n_y \times n_y}, & \text{se } n_y = n_z, \\ \begin{bmatrix} I_{n_y \times n_y} & 0_{n_y \times (n_z - n_y)} \end{bmatrix}, & \text{se } n_y < n_z, \\ \begin{bmatrix} I_{n_z \times n_z} \\ 0_{(n_y - n_z) \times n_z} \end{bmatrix}, & \text{se } n_y > n_z. \end{cases} \quad (3.7)$$

Teorema 1. (BOCCA et al., 2020) Considere o sistema descrito pela Equação 3.1 e com a lei de controle definida pela Equação 3.4, com $K = VU^{-1}$. Sendo $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ uma matriz simétrica

definida positiva, escalares $\eta > 0$ e $\rho > 0$ e as matrizes auxiliares $U \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ e $V \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, o sistema será assintoticamente estável se

$$\begin{bmatrix} He(AX - BV \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * & * \\ -\rho V^T B^T & -I_{n_y \times n_y} & * \\ -\eta V^T B^T + C_1 X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U & -\eta U - \eta U^T \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.8)$$

seja satisfeita.

Demonstração. Considere os seguintes termos relativos à Inequação 3.8:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} He(AX - BV \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ -\rho V^T B^T & -I_{n_y \times n_y} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} -BV \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{A} = U^{-1} \begin{bmatrix} C_1 X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

aplicando o Lema 1 é possível reescrever a Inequação 3.8 como

$$\begin{bmatrix} He(AX) & * \\ 0_{n_y \times n_x} & -I_{n_y \times n_y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} He(-BV \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ -\rho V^T B^T & 0 \end{bmatrix} + He \left(\begin{bmatrix} -BV \\ 0 \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} C_1 X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \end{bmatrix} \right) \prec 0, \quad (3.12)$$

desenvolvendo o terceiro termo da Inequação 3.12, tem-se

$$\begin{bmatrix} He(AX) & * \\ 0_{n_y \times n_x} & -I_{n_y \times n_y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cancel{He(-BV \mathcal{F}_{n_y \times n_x})} & * \\ \cancel{-\rho V^T B^T} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} He(-BVU^{-1}C_1X) + \cancel{He(BV \mathcal{F}_{n_y \times n_x})} & * \\ (\rho BV)^T & 0 \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.13)$$

substituindo $K = VU^{-1}$ é possível reescrever a Inequação 3.13 como

$$\begin{bmatrix} He(AX - BKC_1X) & * \\ 0_{n_y \times n_x} & -I_{n_y \times n_y} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.14)$$

Considerando que $-I_{n_y \times n_y} \prec 0$ é possível aplicar o complemento de Schur (definido pela Equação 2.24) na Inequação 3.14

$$AX + XA^T - BKC_1X - XC_1^T K^T B^T \prec 0. \quad (3.15)$$

Pré e pós multiplicando a Inequação 3.15 por $P = X^{-1}$, obtêm-se:

$$PA + A^T P - PBK C_1 - C_1^T K^T B^T P \prec 0. \quad (3.16)$$

Conforme a Definição 5, considere a candidata à função de Lyapunov descrita como $V(x) = x^T P x > 0$ com $P = X^{-1}$ e o sistema de malha fechada definido conforme a Equação 3.5. Derivando a função candidata em relação ao tempo:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}, \\ &= x^T (A^T P + P A - P B K C_1 - C_1^T K^T B^T P) x < 0,\end{aligned}\quad (3.17)$$

pré e pós multiplicando a Equação 3.17 por respectivamente x^T e x , tem-se

$$x^T (P A + A^T P - P B K C_1 - C_1^T K^T B^T P) x < 0. \quad (3.18)$$

Deste modo, conforme descrito em Boyd et al. (1994) e apresentado na Definição 6 é possível classificar o sistema como assintoticamente estável, $\dot{V}(x) < 0$, evidenciado pelas Equações 3.17 e 3.18. \square

3.2 Projeto de controladores considerando incertezas politópicas e taxa de decaimento

Considere o seguinte sistema linear descrito pelas Equações:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\alpha)x + B(\alpha)u, \\ y &= C_1(\alpha)x, \\ z &= C_2(\alpha)x,\end{aligned}\quad (3.19)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída mensurável, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ a variável de saída controlada e as matrizes $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ e $C_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ matrizes constantes pertencentes ao politopo de incertezas Ω definido por

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{ \left[A(\alpha), B(\alpha), C_1(\alpha), C_2(\alpha) \right] = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i \left[A_i, B_i, C_{1i}, C_{2i} \right], \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \text{ for } i = 1, 2, \dots, n_r \right\}.\end{aligned}\quad (3.20)$$

A lei de controle, com realimentação de saída é definida como:

$$u = -Ky = -KC_1(\alpha)x, \quad (3.21)$$

desse modo, o sistema em malha fechada, descrito pela Equação 3.19, pode ser representado conforme

$$\dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)u = (A(\alpha) - B(\alpha)KC_1(\alpha))x. \quad (3.22)$$

Teorema 2. (BOCCA et al., 2020) Considere o sistema descrito pela Equação 3.19 e com a lei de controle definida pela Equação 3.21 com $K = VU^{-1}$. Sendo $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ uma matriz

simétrica definida positiva, escalares $\eta > 0$, $\rho > 0$ e $\gamma \geq 0$ e as matrizes auxiliares $U \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ e $V \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, o sistema será assintoticamente estável se

$$\begin{bmatrix} He(A_i X - B_i V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) + 2\gamma X & * & * \\ -\rho V^T B_i^T & -I_{n_y \times n_y} & * \\ -\eta V^T B_i^T + C_{1i} X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U & -\eta U - \eta U^T \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.23)$$

seja satisfeita para todo $i \in \mathbb{R}^{n_x}$.

Demonstração. Considere o politopo de incertezas Ω definido pela Equação 3.20. Multiplicando a Equação 3.23 por α_i , de forma que $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1$, e somando de 1 até n_r , segue:

$$\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) + 2\gamma X & * & * \\ -\rho V^T B(\alpha)^T & -I_{n_y \times n_y} & * \\ -\eta V^T B(\alpha)^T + C_1(\alpha)X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U & -\eta U - \eta U^T \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.24)$$

Considere os seguintes termos relativos à Inequação 3.24:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) + 2\gamma X & * \\ -\rho V^T B(\alpha)^T & -I_{n_y \times n_y} \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} -B(\alpha)V \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

$$\mathcal{A} = U^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

aplicando o Lema 1 é possível reescrever a Inequação 3.24 como

$$\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X) + 2\gamma X & * \\ 0_{n_y \times n_x} & -I_{n_y \times n_y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} He(-B(\alpha)V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ -\rho V^T B(\alpha)^T & 0 \end{bmatrix} + He \left(\begin{bmatrix} -B(\alpha)V \\ 0 \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \end{bmatrix} \right) \prec 0, \quad (3.28)$$

desenvolvendo o terceiro termo da Inequação 3.28, tem-se

$$\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X) + 2\gamma X & * \\ 0_{n_y \times n_x} & -I_{n_y \times n_y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} He(-B(\alpha)V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ -\rho V^T B(\alpha)^T & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} He(-B(\alpha)V U^{-1} C_1(\alpha)X) + He(B(\alpha)V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ (\rho B(\alpha)V)^T & 0 \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.29)$$

substituindo $K = VU^{-1}$ é possível reescrever a Inequação 3.29 como

$$\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)KC_1(\alpha)X) + 2\gamma X & * \\ 0_{n_y \times n_x} & -I_{n_y \times n_y} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.30)$$

Considerando que $-I_{n_y \times n_y} \prec 0$ é possível aplicar o complemento de Schur (definido pela Equação 2.24) na Inequação 3.30

$$A(\alpha)X + XA(\alpha)^T - B(\alpha)KC_1X - XC_1^T(\alpha)K^TB(\alpha)^T + 2\gamma X \prec 0. \quad (3.31)$$

Pré e pós multiplicando a Inequação 3.31 por $P = X^{-1}$, obtêm-se:

$$PA(\alpha) + A(\alpha)^TP - PB(\alpha)KC_1(\alpha) - C_1^T(\alpha)K^TB(\alpha)^TP \prec -2\gamma P. \quad (3.32)$$

Conforme a Definição 5, considere a candidata à função de Lyapunov descrita como $V(x) = x^TPx > 0$ com $P = X^{-1}$ e o sistema de malha fechada definido conforme a Equação 3.22. Derivando a Inequação 2.13 em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^TPx + x^TP\dot{x} \\ &= x^T(A(\alpha)^TP + PA(\alpha) - PB(\alpha)KC_1(\alpha) - C_1^T(\alpha)K^TB(\alpha)^TP)x < 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

pré e pós multiplicando a Equação 3.33 por respectivamente x^T e x , tem-se

$$x^T(PA(\alpha) + A(\alpha)^TP - PB(\alpha)KC_1(\alpha) - C_1^T(\alpha)K^TB(\alpha)^TP)x < 0. \quad (3.34)$$

Deste modo, conforme demonstrado nas Equações 3.32 e 3.34 pode-se chegar à seguinte Inequação para todo $x \neq 0$

$$\dot{V}(x) < -2\gamma x^TPx, \quad (3.35)$$

$$\dot{V}(x) < 2\beta V(x), \text{ com } \beta = -\gamma. \quad (3.36)$$

Conforme apresentado na Definição 7 e na Equação 2.50 é possível classificar o sistema como assintoticamente estável com uma taxa de decaimento maior ou igual a γ . \square

3.3 Projeto de controladores considerando índice de desempenho quadrático

Considere o sistema linear descrito pelas Equações 3.19, a lei de controle 3.21, o sistema em malha fechada 3.22 e o politopo de incertezas Ω definido pela Equação 3.20.

Neste trabalho, busca-se minimizar a energia do sinal de saída por meio da minimização da função custo J descrita na Equação 2.27 com as condições iniciais apresentadas na Equação 2.29. Como descrito em Silva et al. (2020), deseja-se obter uma resposta rápida e sem muitas oscilações com a minimização do custo garantido.

Teorema 3. (SIMONE et al., 2021) *Considere um sistema linear incerto definido como 3.19, a lei de controle 3.22, o índice de desempenho quadrático J definido em 2.27 com conjunto de condições iniciais 2.29. Suponha a existência de uma matriz simétrica positiva $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$,*

matrizes auxiliares $U \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ e $V \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ e escalares ω, η, ρ e $\gamma \geq 0$. Então, a otimização desse sistema pode ser descrita como:

$$\max_{X,U,V} \omega \quad (3.37)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \omega & * \\ \omega x_m(0) & X \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (3.38)$$

$$\begin{bmatrix} He(A_i X - B_i V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) + 2\gamma X & * & * & * \\ C_{2i} X - \rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B_i^T & -R^{-1} & * & * \\ V \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & \rho V \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & -Q^{-1} & * \\ -\eta V^T B_i^T + C_{1i} X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & \eta V^T & -\eta U - \eta U^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.39)$$

exista para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$ e $m \in \mathbb{K}_{n_{x0}}$ considerando as matrizes de flexibilização representadas pelas Equações 3.6 e 3.7.

Como consequência da otimização do problema descrito anteriormente, a lei de controle descrita pela Equação 3.21, considerando $K = VU^{-1}$, torna o sistema linear incerto em 3.19 assintoticamente estável, com o índice de performance quadrático $J < \omega^{-1} = \beta$, descrito por 2.27, garantido para todo $x(0)$.

Demonstração. Multiplicando 3.39 por α_i e somando de 1 até n_r , o resultado obtido será

$$\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) + 2\gamma X & * & * & * \\ C_2(\alpha)X - \rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B^T(\alpha) & -R^{-1} & * & * \\ V \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & \rho V \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & -Q^{-1} & * \\ -\eta V^T B^T(\alpha) + C_1(\alpha)X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & \eta V^T & -\eta U - \eta U^T \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.40)$$

Note que, se a Inequação 3.39 é satisfeita, então U é não singular e possui uma inversa. Considerado $\mathcal{U} = U$ pode-se reescrever 3.40 como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) + 2\gamma X & * & * \\ C_2(\alpha)X - \rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B^T(\alpha) & -R^{-1} & * \\ V \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & \rho V \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & -Q^{-1} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{P} &= \begin{bmatrix} -B(\alpha)V \\ 0 \\ V \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A} &= U^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

aplicando o Lema 1 leva à

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) + 2\gamma X & * & * \\ C_2(\alpha)X - \rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B^T(\alpha) & -R^{-1} & * \\ V \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & \rho V \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & -Q^{-1} \end{bmatrix} \\ & + He \left(\begin{bmatrix} -B(\alpha)V \\ 0 \\ V \end{bmatrix} U^{-1} \times \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & 0 \end{bmatrix} \right) \prec 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Deve ser observado que a Inequação 3.42 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} He(A(\alpha)X) + 2\gamma X & * & * \\ C_2(\alpha)X & -R^{-1} & * \\ 0 & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} He(-B(\alpha)V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * & * \\ -\rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B^T(\alpha) & 0 & * \\ V \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & \rho V \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & 0 \end{bmatrix} \\ & + He \left(\begin{bmatrix} -B(\alpha)V \\ 0 \\ V \end{bmatrix} U^{-1} \times \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & 0 \end{bmatrix} \right) \prec 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Porém, note que o segundo termo da Inequação 3.43 pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} He(-B(\alpha)V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * & * \\ -\rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B^T(\alpha) & 0 & * \\ V \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & \rho V \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & 0 \end{bmatrix} = \\ & He \left(\begin{bmatrix} -B(\alpha)V \\ 0 \\ V \end{bmatrix} U^{-1} \times \begin{bmatrix} U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & \rho U \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & 0 \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Substituindo o termo 3.44 na Inequação 3.43 e simplificando, segue

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} He(A(\alpha)X) + 2\gamma X & * & * \\ C_2(\alpha)X & -R^{-1} & * \\ 0 & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix} \\ & + He \left(\begin{bmatrix} -B(\alpha)V \\ 0 \\ V \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \prec 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Substituindo $K = VU^{-1}$ na Inequação 3.45, obtém-se

$$\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)KC_1(\alpha)X) + 2\gamma X & * & * \\ C_2(\alpha)X & -R^{-1} & * \\ KC_1(\alpha)X & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.46)$$

Se $R \succ 0$ e $Q \succ 0$, então $R^{-1} \succ 0$ e $Q^{-1} \succ 0$. Portanto, $-R^{-1} \prec 0$ e $-Q^{-1} \prec 0$.

Ao aplicar o complemento de Schur, Inequação 2.24, à última linha e coluna da Inequação 3.46, o resultado obtido será

$$\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)KC_1(\alpha)X) + XC_1^T(\alpha)K^T QKC_1(\alpha)X + 2\gamma X & * \\ C_2X & -R^{-1} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.47)$$

aplicando novamente o complemento de Schur à última linha e coluna da Inequação 3.47, o resultado será

$$\begin{aligned} A(\alpha)X + XA^T(\alpha) - B(\alpha)KC_1(\alpha)X - XC_1^T(\alpha)K^T B^T(\alpha) \\ + XC_2^T(\alpha)RC_2(\alpha)X + XC_1^T(\alpha)K^T QKC_1(\alpha)X + 2\gamma X \prec 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Pré e pós multiplicando a Inequação 3.48 por $P = X^{-1}$ leva à

$$\begin{aligned} PA(\alpha) + A^T(\alpha)P - PB(\alpha)KC_1(\alpha) - C_1^T(\alpha)K^T B^T(\alpha)P \\ + C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha) + C_1^T(\alpha)K^T QKC_1(\alpha) + 2\gamma P \prec 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Considerando o sistema em malha fechada conforme descrito na Inequação 3.22 e a função candidata à Lyapunov $V(x) = x^T P x > 0$, com $P = X^{-1}$, sua derivada em relação ao tempo será dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}, \\ &= x^T (A(\alpha)^T P + PA(\alpha) - PB(\alpha)KC_1(\alpha) - C_1^T(\alpha)K^T B(\alpha)^T P)x, \\ &= x^T (He(PA(\alpha) - PB(\alpha)KC_1(\alpha)))x, \end{aligned} \quad (3.50)$$

existirá para todo $x \neq 0$.

Dessa forma, da Inequação 3.50 o resultado obtido pode ser escrito do seguinte modo

$$He(PA(\alpha) - PB(\alpha)KC_1(\alpha)) \prec -C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha) - C_1^T(\alpha)K^T(\alpha)QK(\alpha)C_1 - 2\gamma P(\alpha). \quad (3.51)$$

Como $-R, -Q \prec 0$, então

$$-C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha) - C_1^T(\alpha)K^T QKC_1 - 2\gamma P \prec 0. \quad (3.52)$$

Portanto, das Inequações 3.50 e 3.51, pode-se chegar à seguinte Inequação para todo $x \neq 0$

$$\dot{V}(x) < -2\gamma x^T P x, \quad (3.53)$$

$$\dot{V}(x) < 2\beta V(x), \text{ com } \beta = -\gamma. \quad (3.54)$$

Desse modo, de acordo com Boyd et al. (1994) é garantida a estabilidade assintótica do sistema descrita na Equação 3.23 considerando a lei de controle 3.22, com uma taxa de decaimento maior ou igual a γ , conforme apresentado na Definição 7 e na Equação 2.50.

Adicionalmente, pré e pós multiplicando a Inequação 3.52 por x^T e x respectivamente e integrando ambos os lados da Inequação de 0 até ∞ , é obtido, da Equação 2.27,

$$\int_0^{\infty} \dot{V}(x) dt < \int_0^{\infty} -x^T (C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha) - C_1^T(\alpha)K^T QKC_1(\alpha))x dt = -J. \quad (3.55)$$

Sendo assim, da Inequação 3.55,

$$V(x(t \rightarrow \infty)) - V(x(0)) < -J. \quad (3.56)$$

Como o sistema em malha fechada é assintoticamente estável, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ e, consequentemente, $V(x(t \rightarrow \infty)) = 0$ da Inequação 3.56 pode-se obter

$$J < V(x(0)) = x(0)^T Px(0). \quad (3.57)$$

Considere o conjunto de condições iniciais definidos na Equação 2.29, multiplicando a Equação 3.38 por λ_m e somando de 1 até n_{x0} e aplicando o complemento de Schur, o resultado será

$$\omega - \omega^2 x(0)^T X^{-1} x(0) \geq 0. \quad (3.58)$$

Substituindo $P = X^{-1}$, $\omega = \beta^{-1}$ na Inequação 3.58 e multiplicando ambos os lados por β^2 , segue

$$\beta \geq x(0)^T Px(0). \quad (3.59)$$

Consequentemente, das Inequações 3.57 e 3.59, chega-se ao resultado $\beta \geq x(0)^T Px(0) > J$. Desse modo, é possível assegurar que $\beta > J$ para toda condição inicial descrita pela Equação 2.29.

Note que a otimização do problema do Teorema 3, ou seja, a maximização de ω é equivalente à minimização de β , do mesmo modo para o índice J , porque $J < \beta$. \square

3.4 Projeto de controladores considerando saturação no atuador

Para o projeto de controladores, levando em conta a saturação no atuador, será considerado o sistema linear descrito na Equação 3.23, a lei de controle 3.21, o politopo de incertezas Ω definido por 3.20 e a saturação descrita como combinação convexa que pode ser observada na Equação 2.46.

Dessa forma, a saturação pode ser reescrita como

$$sat(u) = (-D_q KC_1(\alpha)X + \overline{D}_q HX)x \quad (3.60)$$

e o sistema em malha fechada definido como

$$\dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)sat(u). \quad (3.61)$$

Será considerada a função custo conforme descrita na Equação 2.26 considerando $S = 0_{n_u \times n_z}$, $Q = 0_{n_u \times n_u}$ e $R \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$. Dessa forma, a função custo pode ser reescrita como:

$$J = \int_0^\infty \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & * \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix} dt, \quad (3.62)$$

$$J = \int_0^\infty z^T R z dt = \int_0^\infty x^T C_2^T(\alpha) R C_2(\alpha) x dt, \quad (3.63)$$

considerando as mesmas condições iniciais dadas pela Equação 2.29.

O Teorema 4 proposto é uma complementação ao Corolário 1, descrito em Fernandes (2022). Neste trabalho, será acrescentada a taxa de decaimento, além disso os escalares η e ρ serão encontrados via algoritmo ED objetivando a minimização do custo J .

Teorema 4. *Considere um sistema linear incerto definido na Equação 3.19, a lei de controle 3.61 com $K = VU^{-1}$ e o índice de desempenho quadrático J definido em 3.63 com o conjunto de condições iniciais 2.29. Suponha a existência da matriz simétrica positiva $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ matrizes auxiliares $U \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ e $V \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, matrizes de flexibilização 3.6 e 3.7, a matriz $G \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, o conjunto \mathcal{D} descrito em 2.43 e escalares ω, η, ρ e $\gamma \geq 0$. Então, a otimização desse sistema pode ser descrita como:*

$$\max_{X, U, V} \quad \omega$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \omega & * \\ \omega x_m(0) & X \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 \omega & * \\ X N_h^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \mu_l^2 \omega & * \\ G^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.65)$$

$$\begin{bmatrix} He(A_i X + B_i \overline{D}_q G - B_i D_q V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) + 2\gamma X & * & * \\ C_{2i} X - \rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T D_q^T B_i^T & -R^{-1} & * \\ -\eta (B_i D_q V)^T + C_1(\alpha) X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & -\eta U - \eta U^T \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.66)$$

exista para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$, $q = 1, \dots, 2^{n_u}$ e

Demonstração. Multiplicando a Inequação 3.66 por α_i e somando de 1 até n_r , o resultado obtido será

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M} & * & * \\ C_2(\alpha) X - \rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T D_q^T B^T(\alpha) & -R^{-1} & * \\ -\eta (B(\alpha) D_q V)^T + C_1(\alpha) X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & -\eta U - \eta U^T \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.67)$$

com $\mathcal{M} = He(A(\alpha) X + B(\alpha) \overline{D}_q G - B(\alpha) D_q V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) + 2\gamma X$.

Note que, se a Inequação 3.66 é satisfeita, então U é não singular e possui uma inversa. Considerado $\mathcal{U} = U$ pode-se reescrever a Inequação 3.67 como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \begin{bmatrix} He(A(\alpha)X + B(\alpha)\overline{D}_q G - B(\alpha)D_q V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) + 2\gamma X & * \\ C_2(\alpha)X - \rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T D_q^T B^T(\alpha) & -R^{-1} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{P} &= \begin{bmatrix} -B(\alpha)D_q V \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A} &= U^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \mathcal{F}_{n_y \times n_z} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

aplicando o Teorema 1 leva à

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} He(A(\alpha)X + B(\alpha)\overline{D}_q G - B(\alpha)D_q V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) + 2\gamma X & * \\ C_2(\alpha)X - \rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T D_q^T B^T(\alpha) & -R^{-1} \end{bmatrix} \\ & + He \left(\begin{bmatrix} -B(\alpha)D_q V \\ 0 \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \mathcal{F}_{n_y \times n_z} \end{bmatrix} \right) \prec 0. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Simplificando os termos e substituindo $K = VU^{-1}$ e $G = HX$ na Inequação 3.69, obtêm-se

$$\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X + B(\alpha)\overline{D}_q HX - B(\alpha)D_q K C_1(\alpha)X) + 2\gamma X & * \\ C_2(\alpha)X & -R^{-1} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.70)$$

Ao aplicar o complemento de Schur, Inequação 2.24, à última linha e coluna de 3.70, o resultado obtido será

$$He(A(\alpha)X + B(\alpha)\overline{D}_q HX - B(\alpha)D_q K C_1(\alpha)X) + 2\gamma X + C_2^T(\alpha)R C_2(\alpha)X \prec 0. \quad (3.71)$$

Pré e pós multiplicando a Inequação 3.71 por respectivamente x^T e x tem-se

$$x^T [He(A(\alpha)X + B(\alpha)\overline{D}_q HX - B(\alpha)D_q K C_1(\alpha)X) + 2\gamma X + C_2^T(\alpha)R C_2(\alpha)X] x \prec 0. \quad (3.72)$$

Desenvolvendo a Inequação 3.72 obtém-se

$$\begin{aligned} x^T [PA(\alpha) + A^T(\alpha)P + PB(\alpha)\overline{D}_q H + H^T \overline{D}_q^T B^T(\alpha)P - PB(\alpha)D_q K C_1(\alpha) \\ - C_1^T(\alpha)K^T D_q^T B^T(\alpha)P + 2\gamma P + C_2(\alpha)^T R C_2(\alpha)] x \prec 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Considerando o sistema em malha fechada, conforme descrito na Inequação 3.61, e a função candidata à Lyapunov, $V(x) = x^T P x > 0$, a derivada da função de Lyapunov em relação ao tempo, para todo $x \neq 0$, será dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T [PA(\alpha) + A^T(\alpha)P + PB(\alpha)\overline{D}_q H + H^T \overline{D}_q^T B^T(\alpha)P - PB(\alpha)D_q K C_1(\alpha) \\ & \quad - C_1^T(\alpha)K^T D_q^T B^T(\alpha)P] x \prec 0. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Substituindo a Inequação 3.74 em 3.73 e considerando $-R, -Q < 0$ então

$$\dot{V}(x) + 2\gamma x^T P x < -x^T (2\gamma P + C_2(\alpha)^T R C_2(\alpha)) x. \quad (3.75)$$

Como $-R, -Q < 0$

$$-x^T (2\gamma P + C_2(\alpha)^T R C_2(\alpha)) x < 0, \quad (3.76)$$

dessa forma, é possível concluir

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) + 2\gamma x^T P x &< 0, \\ \dot{V}(x) &< -2\gamma x^T P x. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Portanto, das Inequações 3.75 e 3.77, pode-se chegar à seguinte Inequação para todo $x \neq 0$

$$\dot{V}(x) < 2\beta V(x), \text{ com } \beta = -\gamma. \quad (3.78)$$

Desse modo, de acordo com Boyd et al. (1994) é garantida a estabilidade assintótica do sistema descrito na Equação 3.66 considerando a lei de controle 3.61, com uma taxa de decaimento maior ou igual a γ , conforme apresentado na Definição 7 e na Equação 2.50.

Adicionalmente, pré e pós multiplicando a Inequação 3.77 por x^T e x respectivamente e integrando ambos os lados da Inequação de 0 até ∞ , é obtido, de 3.63,

$$\int_0^{\infty} \dot{V}(x) dt < \int_0^{\infty} -x^T C_2(\alpha)^T R C_2(\alpha) x < 0 dt = -J. \quad (3.79)$$

Sendo assim, da Inequação 3.79,

$$V(x(t \rightarrow \infty)) - V(x(0)) < -J. \quad (3.80)$$

Como o sistema em malha fechada é assintoticamente estável, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ e, conseqüentemente, $V(x(t \rightarrow \infty)) = 0$ da Inequação 3.80 pode-se obter

$$J < V(x(0)) = x(0)^T P x(0). \quad (3.81)$$

Considere o conjunto de condições iniciais definidas pela Equação 2.29, multiplicando 3.64 por λ_m e somando de 1 até n_{x0} e aplicando o complemento de Schur, o resultado será

$$\omega - \omega^2 x(0)^T X^{-1} x(0) \geq 0. \quad (3.82)$$

Substituindo $P = X^{-1}$, $\omega = \beta^{-1}$ na Inequação 3.82 e multiplicando ambos os lados por β^2 , segue

$$\beta \geq x(0)^T P x(0). \quad (3.83)$$

Consequentemente, das Inequações 3.81 e 3.83, chega-se ao resultado $\beta \geq x(0)^T P x(0) > J$. Desse modo é possível assegurar que $\beta > J$ para toda condição inicial descrita por 2.29.

Assim, do Teorema 4, a LMI 3.66 e as condições iniciais pertencentes ao conjunto convexo 2.29 estão contidas na elipsoide $\mathcal{E}(p, \delta)$. E as LMIs descritas nas Inequações 3.65 asseguram respectivamente que a elipsoide está contida no poliedro \mathcal{L} e na região de operação \mathcal{X} .

Portanto, o custo apresentado na Equação 3.63 é garantido para todas as condições impostas.

□

4 ALGORITMO DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

Conforme descrito por Sadabadi e Peaucelle (2016), atualmente para resolução de problemas não convexos não há métodos determinísticos, ou *solvers*, na literatura capazes de encontrar uma solução otimizada. Desse modo, uma solução para esse tipo de problema é utilizar parâmetros que possam ser variados com o objetivo de encontrar valores que otimizem o sistema em análise (CORNE et al., 1999).

Como a otimização global de parâmetros é muito utilizada em vários tipos diferentes de modelos, existem diversas técnicas propostas na literatura para resolução desses problemas. Uma das formas mais utilizadas na engenharia e em diferentes áreas é o Algoritmo de Evolução Diferencial (ED), devido à possibilidade de aplicá-lo na otimização global em espaços contínuos (LIU, 2002) tendo como principal vantagem a possibilidade de encontrar um valor otimizado globalmente com uma convergência rápida (STORN; PRICE, 1997).

O algoritmo de evolução diferencial é utilizado nesse trabalho para determinar os parâmetros η e ρ , presentes nos Teoremas 3 e 4 com o objetivo de minimizar o custo garantido definido na Equação 2.26, o qual pode estar contido em uma região não convexa de soluções pelos *solvers* de LMI (BOCCA et al., 2020).

O algoritmo ED pode ser dividido nos seguintes estágios: inicialização do vetor inicial, mutação, *crossover* e seleção. No Apêndice A é possível visualizar um fluxograma que ilustra o AED descrito a seguir.

Seu funcionamento utiliza como parâmetro N vetores $x_{i,G}$, com $i \in \mathbb{K}_N$, como população para cada geração G para fazer uma busca paralela (N não muda durante o processo de minimização). Segundo Storn e Price (1997) a população do vetor inicial ($G = 1$) deve ser escolhida aleatoriamente e deve abranger todo o espaço de parâmetros.

No estágio de mutação, para cada vetor alvo $x_{r_1,G-1}$, um vetor mutação é gerado de acordo com

$$v_{i,G} = x_{r_1,G-1} + F \cdot (x_{r_2,G-1} - x_{r_3,G-1}), \quad (4.1)$$

onde $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{K}_N$ são índices aleatórios, inteiros e diferentes uns dos outros e de i . O fator de mutação F deve ser uma constante real compreendida entre $[0, 2]$.

Para a etapa de *crossover*, é preciso definir como serão obtidos os vetores de teste $u_{i,G} = (u_{1i,G}, u_{2i,G}, \dots, u_{Di,G})$. Conforme a metodologia utilizada em Bocca et al. (2020), além de considerar os vetores mutação $v_{i,G}$, será incluída uma distribuição uniforme rd presente no intervalo $[0, m]$ com uma função densidade de probabilidade definida como:

$$rd(j) = \begin{cases} m, & \text{se } 0 \leq j \leq m, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Dessa forma, os vetores de teste podem ser obtidos conforme

$$u_{ij,G} = \begin{cases} v_{ij,G}, & \text{se } rd(j) \leq C_R \text{ ou } j = rn(i), \\ x_{ij,G}, & \text{se } rd(j) > C_R \text{ e } j \neq rn(i), \end{cases} \quad (4.3)$$

sendo C_R a constante de *crossover* definida pelo usuário e contida entre $[0, 1]$. $rn(i) \in \mathbb{K}_D$ é um índice aleatório com D sendo o número de parâmetros e $j \in \mathbb{K}_D$. Nesse processo, todos os vetores $x_{i,G}$ da população tem a mesma chance de serem escolhidos como vetor alvo, ou seja, não há dependência do custo (KARABOĞA; ÖKDEM, 2004). Nesse trabalho, cada vetor população é composto pelo valor dos parâmetros η e outro para o parâmetro ρ , assim a variável D que contabiliza número de parâmetros da população de vetores será igual a 2.

No estágio de seleção os valores de custo de ambos os vetores alvo $x_{i,G-1}$ e teste $u_{i,G}$ são avaliados e o vetor que leva a um custo menor é mantido na próxima geração como $x_{i,G}$. Os processos de mutação, *crossover* e seleção são repetidos até que seja atingido o critério de parada definido pelo usuário.

De acordo com Bachur (2017), esse tipo de algoritmo pode satisfazer outros requisitos, como a capacidade de contemplar funções de custo não-lineares e não-diferenciáveis, sendo um recurso de boa acessibilidade, por causa da existência de poucas variáveis de controle, cujos valores podem ser ajustados de maneira simples.

5 SISTEMA ACTIVE MASS DAMPER 1 + SHAKE TABLE II

A engenharia estrutural, no que se refere aos avanços na ciência dos materiais e aos desenvolvimentos de técnicas de construção e métodos de análise mais eficientes, tem permitido uma crescente verticalização das cidades urbanas de acordo com Connor (2003). Como consequência, há um aumento de tecnologias que permitam que as estruturas sejam mais estáveis, mesmo se sujeitas à vibrações, como terremotos, ventos e outras forças de carga, com o objetivo de prover mais segurança e conforto para as pessoas.

De acordo com Jr e Nagarajaiah (2003) nas últimas duas décadas, muitos esforços foram realizados para tornar sistemas de controle estrutural em uma tecnologia viável, esses controladores precisam atuar na estrutura de forma que o conjunto absorva e dissipe energia de uma maneira estável.

Sistemas de controle passivos têm sido utilizados para dissipar parte da energia de entrada e têm sido fabricados intensivamente por causa de seu mecanismo simples. Porém, esses sistemas possuem restrições de resposta à cargas dinâmicas, ou seja, há uma limitação desses sistemas de se adaptarem em relação a distúrbios e à resposta global da estrutura (SAAED et al., 2015).

Outro tipo de sistema estrutural são os sistemas de controle ativos. Eles têm sido desenvolvidos para responder aos requisitos dos sistemas de modo que possam atuar em vibrações não previsíveis resultando em uma resposta dinâmica para diferentes modos de vibração como descrito em Saaed et al. (2015).

Porém, esses sistemas de controle ativo são mais complexos por possuírem mais elementos para serem analisados, como sensores e atuadores. Este trabalho visa descrever um sistema de controle ativo utilizando dois sensores.

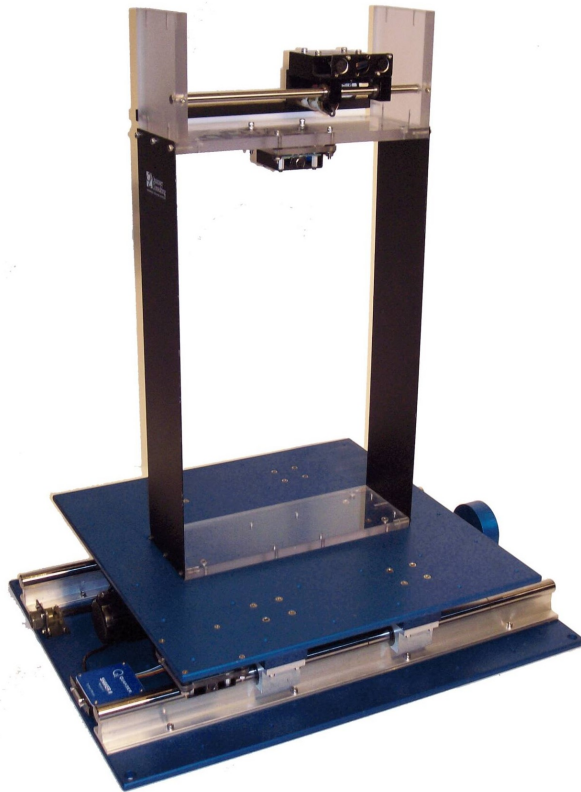
5.1 Descrição do equipamento

Sistemas de controle estrutural tem sido utilizados para proteger estruturas contra fenômenos naturais como ventos, terremotos e cargas diversas (SOONG, 1990). Os sistemas amortecedores de massa ativa (AMD) são empregados para o desenvolvimento de estudos baseado nos sistemas estruturais de controle, com eles é possível simular diversos distúrbios como exemplo, terremotos.

Na Figura 6 é possível visualizar um sistema de massa ativa (AMD) com um andar, nomeado de Shake Table II, fabricado pela Quanser (2009). O modelo matemático utilizado no controlador foi formulado com base nos trabalhos de Buzachero et al. (2018), Bocca et al. (2020), Moraes (2021) e Suman (2020).

O objetivo principal de utilizar um sistema AMD é a possibilidade de modelar um controlador que diminua as vibrações causadas na estrutura. Desse modo, uma força controlada é aplicada

Figura 6 – Sistema amortecedor de massa ativa de bancada Quanser.



Fonte: Quanser (2009).

ao sistema de modo a suprimir ativamente as vibrações. Neste trabalho, a força mencionada é calculada por um controlador que apenas tem acesso apenas à algumas variáveis do sistema (YANG et al., 2017).

Para pequenas variações angulares no piso superior, o sistema pode ser matematicamente aproximado pelo modelo padrão massa mola, composto por uma mola com uma constante (K_f), a altura do piso como (H_f) e duas massas: uma do piso superior (M_f) e outra da massa móvel (M_c) (BUZACHERO et al., 2018). Para este modelo, é considerado o lado direito como positivo.

Os parâmetros utilizados no modelo matemático do sistema AMD com um piso são detalhados em Buzachero et al. (2018) e eles podem ser observados na Tabela 1.

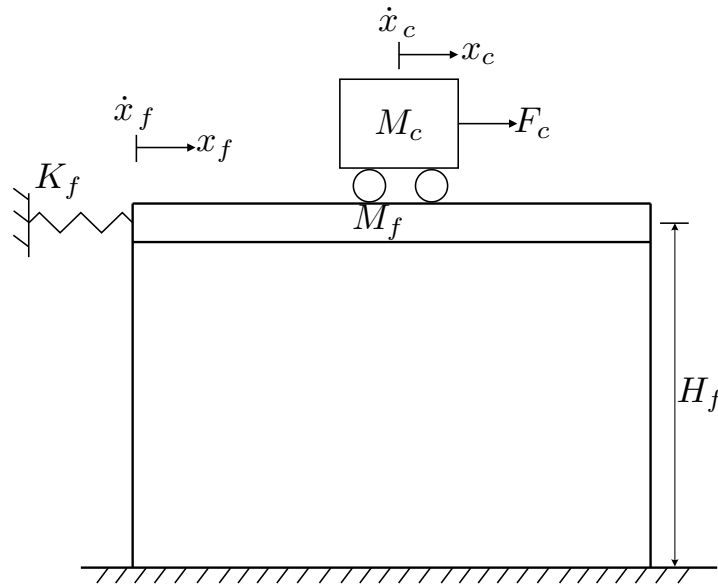
Tabela 1 – Parâmetros utilizados no sistema AMD com um piso (QUANSER, 2009).

Parâmetro [Unidade]	Variável	Valor
Resistência da armadura do motor [Ω]	R_m	2.6
Constante de torque do motor [$N.m/A$]	K_t	0.00767
Eficiência eletromecânica do motor	η_m	1
Constante de eficiência do motor [$V.s/rad$]	K_m	0.00767
Eficiência do redutor planetário	η_g	1
Altura do patamar superior [m]	H_f	0.5334
Massa do patamar superior [kg]	M_f	1.38
Constante da mola [N/m]	K_f	500.9
Inércia do rotor [$kg.m^2$]	J_m	3.9×10^{-7}
Massa total do carro [kg]	M_c	0.65
Relação da engrenagem	K_g	3.71
Raio do pinhão (engrenagem) [m]	r_{mp}	6.35×10^{-3}
Coefficiente de amortecimento viscoso eq. [$N.s/m$]	B_{eq}	3

6 PROJETOS, SIMULAÇÕES E IMPLEMENTAÇÕES DOS CONTROLADORES

Considere como representação do sistema da Figura 6 o modelo apresentado na Figura 7 e que o vetor de estados seja representado por $x = [x_c \ x_f \ \dot{x}_c \ \dot{x}_f]^T$.

Figura 7 – Modelo matemático do sistema AMD contendo 1 piso



Fonte: Adaptado de (BUZACHERO et al., 2018).

Desse modo, o sistema AMD pode ser descrito como $\dot{x} = Ax + Bu$ em que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{M_c r_{mp}^2 K_f}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f}, \\
a_2 &= \frac{(M_c - M_f) \eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m - (M_c + M_f) B_{eq} R_m r_{mp}^2}{R_m (M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f)}, \\
a_3 &= -\frac{K_f (M_c r_{mp}^2 + J_m K_g^2)}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f}, \\
a_4 &= \frac{M_c (\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m + B_{eq} R_m r_{mp}^2)}{R_m (M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f)}, \\
b_1 &= \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t r_{mp} (M_c + M_f)}{R_m (M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f)}, \\
b_2 &= -\frac{M_c \eta_g K_g \eta_m K_t r_{mp}}{R_m (M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f)}.
\end{aligned}$$

Para os controladores do Teorema 3 é considerado que o conjunto de condições iniciais é formado pela combinação convexa $-0.05 \leq x_1(t) \leq 0.05$, $-0.03 \leq x_2(t) \leq 0.03$ e $x_3(t) = x_4(t) = 0$. Já para os controladores do Teorema 4 é considerado o seguinte conjunto de condições iniciais $-0.04 \leq x_1(t) \leq 0.04$, $-0.03 \leq x_2(t) \leq 0.03$ e $x_3(t) = x_4(t) = 0$.

O sistema é representado por um politopo com dois vértices. Quando não há falhas no sistema, o conjunto pode ser descrito pelo vértice 1 que é formado pelas matrizes A_1 e B_1 .

Será considerada uma incerteza no modelo, que pode ser uma falha ocasionada pelo uso repetitivo dos componentes no módulo amplificador do sistema, reduzindo assim a potência do atuador do sistema. Nesse caso, é considerado que o vértice 2 representa uma falha de 40% e pode ser descrita pelas matrizes A_2 e B_2 .

Conforme descrito nos trabalhos de Moraes (2021) e Suman (2020) o politopo pode ser definido como

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 278.9341 & -18.6497 & 0 \\ 0 & -336.0626 & 5.9716 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.9975 \\ -0.9598 \end{bmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.7985 \\ -0.5759 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

O controlador é projetado com o objetivo de otimizar a posição do piso superior x_f , portanto a saída controlada $C_2(\alpha)$ é definida como

$$C_2(\alpha) = C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

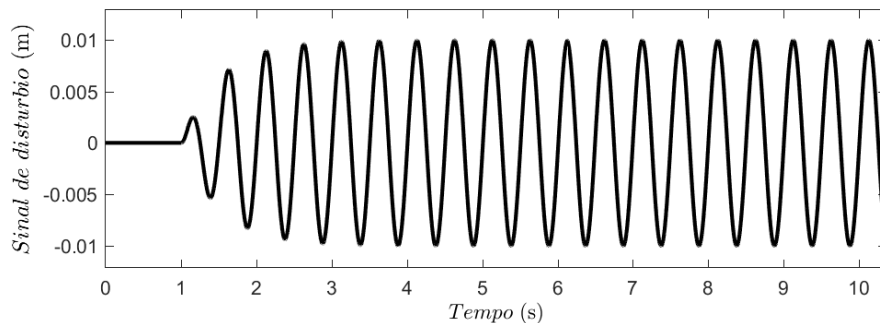
As variáveis de controle disponíveis são x_f e x_c , que podem ser obtidas pelos sensores. Dessa forma, a matriz de saída mensurável $C_1(\alpha)$ pode ser descrita como

$$C_1(\alpha) = C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

O software MATLAB é utilizado para calcular o controlador apresentado neste trabalho. Os parâmetros η e ρ foram selecionados pelo algoritmo ED, e as LMIs foram solucionadas utilizando LMILab (GAHINET et al., 1994) e a interface YALMIP (LOFBERG, 2004).

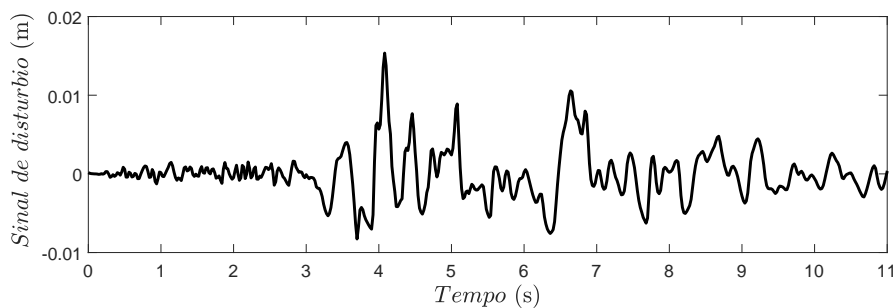
Os resultados obtidos para as constantes e o controlador foram implementados inicialmente no software Simulink, para verificação da resposta do sistema, e, posteriormente, foram implementados no equipamento da Figura 6. O módulo AMD permite a implementação de diferentes tipos de terremotos em uma escala possível de verificar em laboratório, para obter resultados mais precisos. Para esse trabalho, são utilizadas uma onda senoidal ilustrada na Figura 8 e os dados do terremoto de Northridge, que ocorreu no Vale de São Fernando, Califórnia, no dia 17 de janeiro de 1994 ilustrados na Figura 9.

Figura 8 – Sinal senoidal utilizado nos testes.



Fonte: Próprio autor.

Figura 9 – Sinal terremoto de Northridge utilizado nos testes.



Fonte: Adaptado de (QUANSER, 2009).

Os resultados apresentados são compostos por três diferentes tipos de testes. O primeiro é realizado utilizando o modo passivo, apenas com um controlador proporcional integral derivativo (PID), como um meio de manter o carro em um estado imóvel, a fim que sua massa não influencie para tornar o sistema mais oscilante. Os dois outros tipos de testes simulam duas situações diferentes, uma considerando o controlador projetado e a outra com este mesmo controlador, porém com uma falha de 40% no atuador.

6.1 Controlador considerando índice de desempenho quadrático

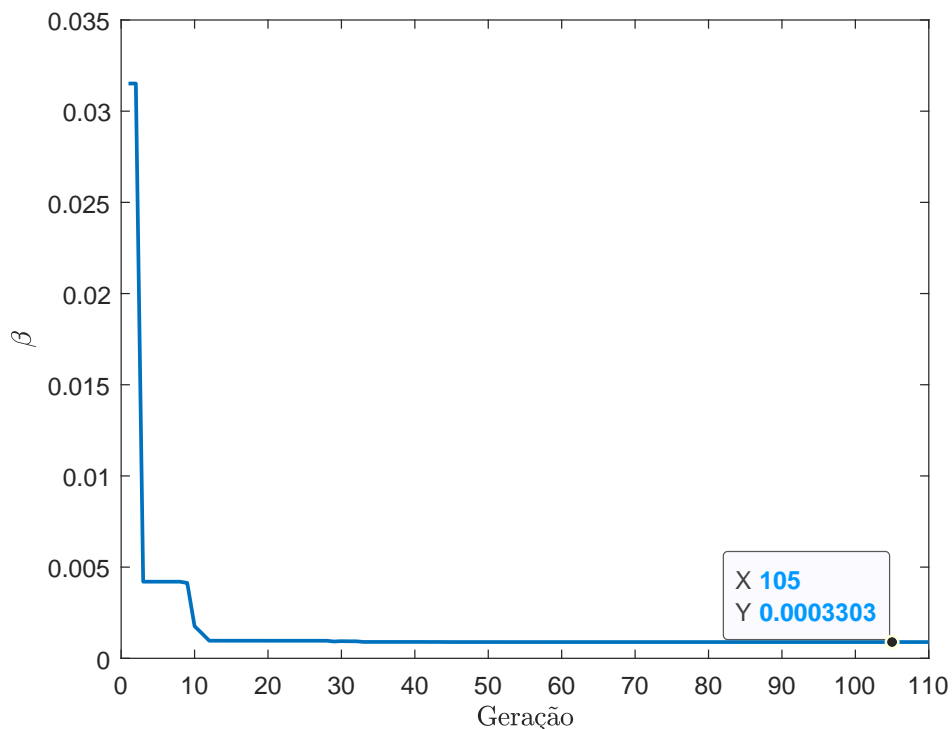
Para encontrar o melhor custo, inicialmente é preciso definir alguns parâmetros para as LMIs descritas pelas Equações 3.38 e 3.39 como $\gamma = 0.5$, $Q = 10^{-6}$ e $R = 1$, em seguida é utilizado o algoritmo ED e considerado uma população inicial composta por $G = 1000$ gerações com $N = 10$ indivíduos para cada geração, criada com uma distribuição uniforme para os parâmetros com uma função densidade de probabilidade $f(x)$ como proposto por Bocca et al. (2020):

$$f(x) = \begin{cases} 10/8, & \text{se } 0 \leq x \leq 8/10, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.5)$$

Para cada nova geração G todas as LMIs são solucionadas por indivíduo N para melhor ajuste das variáveis e para obter um menor custo garantido.

Na Figura 10 é possível visualizar o limitante superior do custo garantido obtido para cada geração do algoritmo ED, com o critério de parada definido como uma variação menor do que 0,3% no valor do custo ou 40 gerações.

Figura 10 – Custo por geração controlador considerando índice de desempenho quadrático.



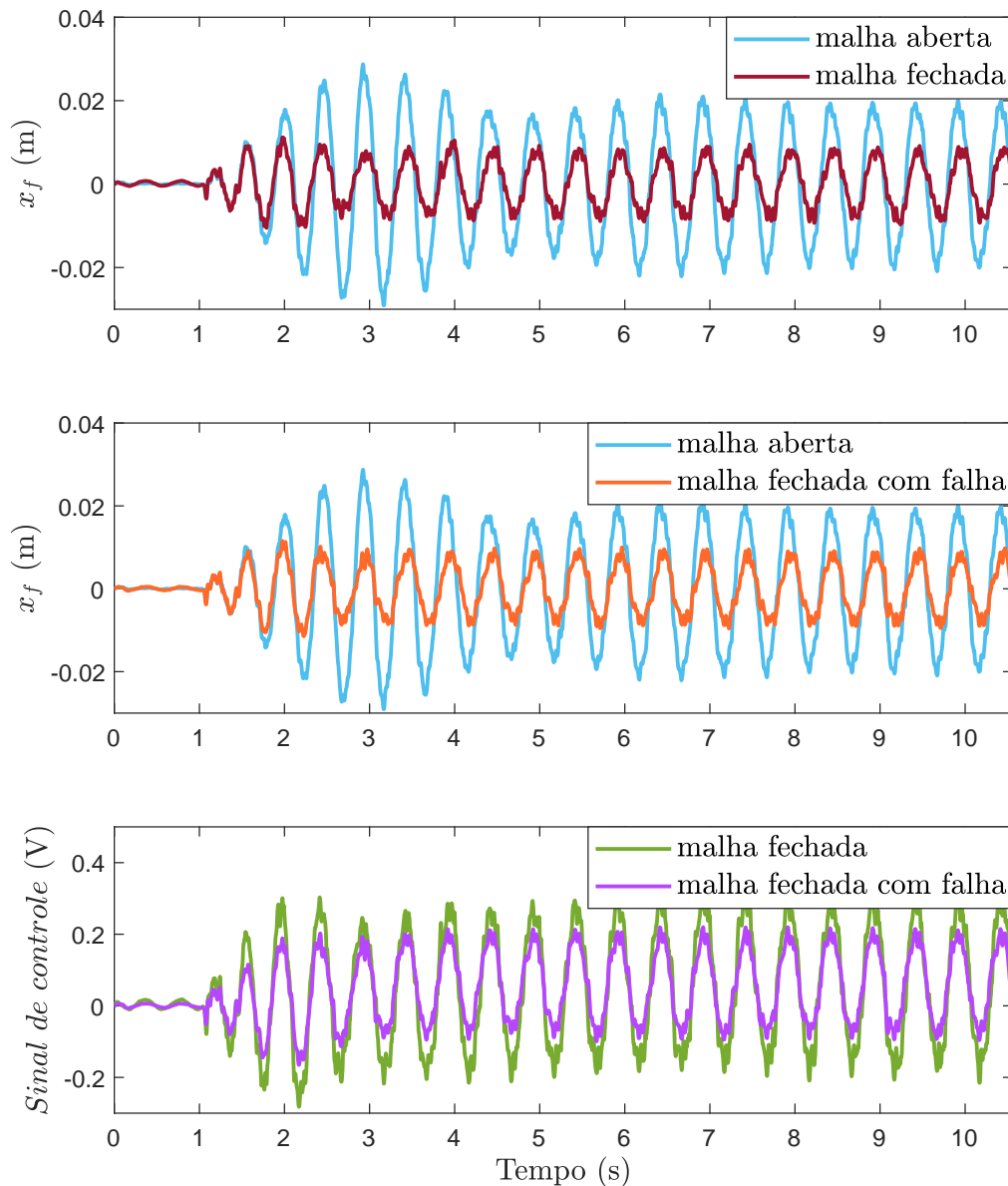
Fonte: Próprio autor.

Os resultados gerados pelo algoritmo ED são $\eta = 1,0895$ e $\rho = 0,0395$. Além disso, o valor calculado de β foi $3,3 \times 10^{-4}$ e o seguinte controlador foi calculado:

$$K = \begin{bmatrix} 5.2135 & -23.0715 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Ao simular o módulo pelo software Simulink, as respostas do sistema incluindo o controlador projetado diminuiu as oscilações não desejáveis, dessa forma, é possível realizar sua implementação no módulo AMD para verificação da resposta. Esses testes podem ser vistos nas Figuras 11 e 12.

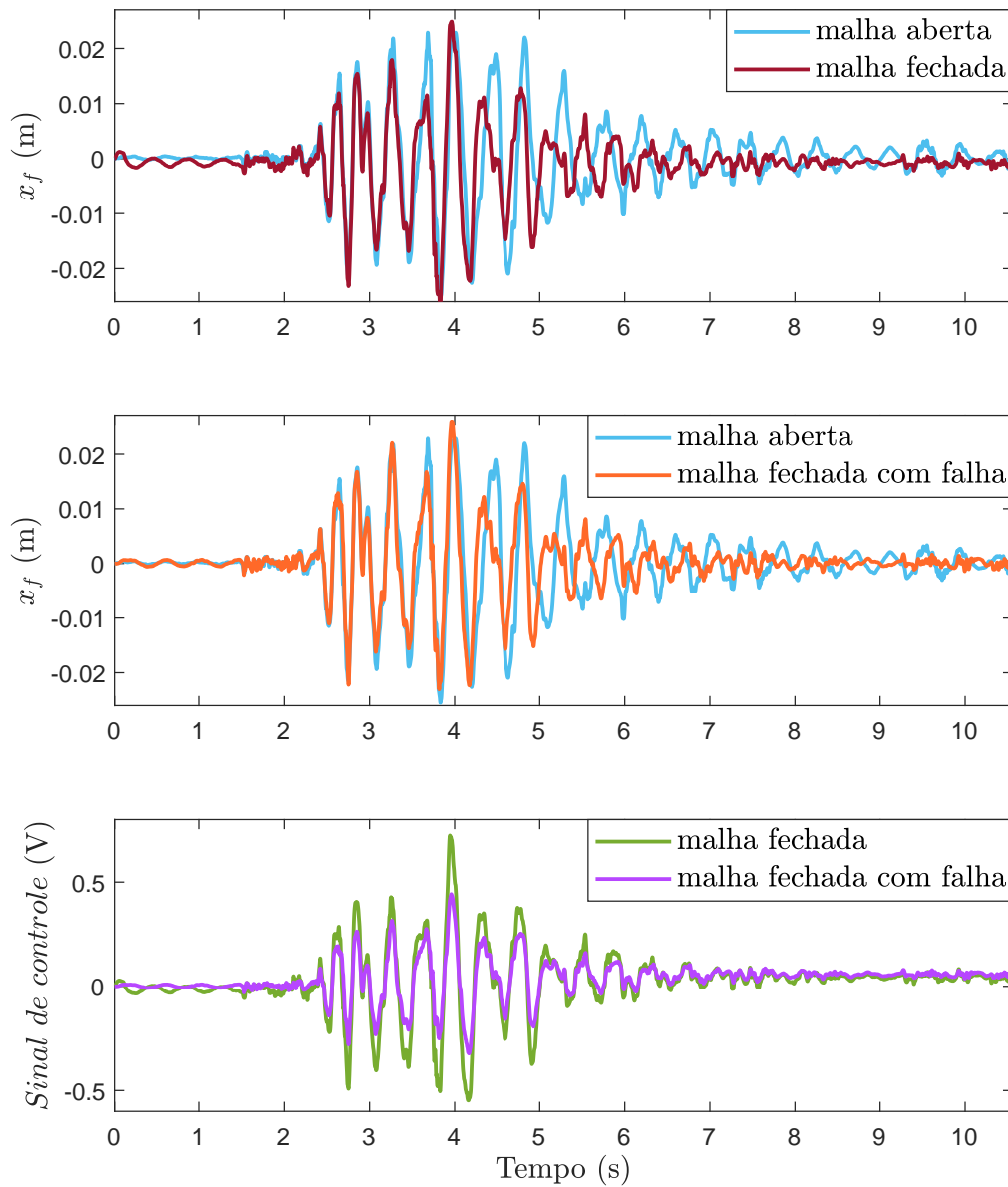
Figura 11 – Posição do piso superior e do sinal de controle utilizado nos testes no módulo Shake Table II utilizando uma onda senoidal.



Fonte: Próprio autor.

Os resultados permitem uma comparação de performance entre o sistema em malha aberta, malha fechada e malha fechada considerando uma falha. As Figuras 8 e 9 mostram os sinais de entrada aplicados no sistema e nas Figuras 11 e 12 é possível a visualização do comportamento da posição do piso superior do sistema AMD (x_f) e o sinal de controle utilizado na implementação.

Figura 12 – Posição do piso superior e do sinal de controle utilizado nos testes no módulo Shake Table II utilizando dados de um terremoto.

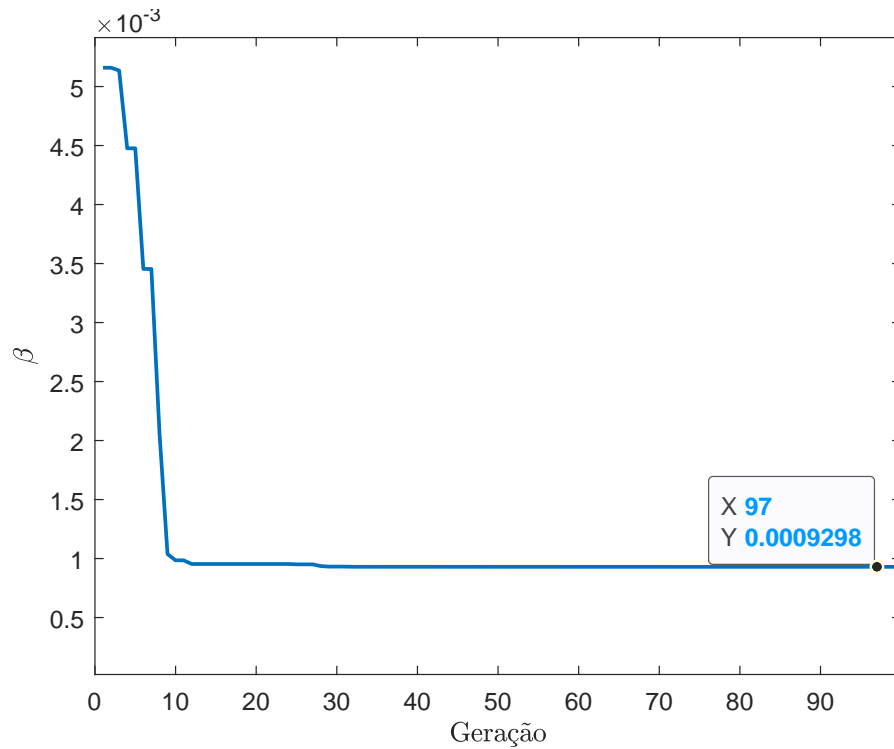


Fonte: Próprio autor.

6.2 Controlador considerando saturação no atuador

Inicialmente são definidos alguns parâmetros para as LMIs descritas nas Equações 3.65 e 3.66 como $\gamma = 0,5$, a tensão máxima do sinal de controle $\mu = 10 V$ e a região de operação $\phi = \begin{bmatrix} 0,05 & 0 & 0,05 & 0 \end{bmatrix}$, são definidos para o algoritmo ED $G = 1000$ gerações com $N = 10$ indivíduos para cada geração e os parâmetros, gerados pela função densidade de probabilidade $f(x)$, conforme a Equação 6.5. O critério de parada foi definido para que haja uma variação menor do que 0,3% no valor do custo ou 40 gerações. É possível visualizar na Figura 13 o limitante superior do custo garantido obtido para cada geração do algoritmo ED.

Figura 13 – Custo por geração controlador considerando saturação no atuador.



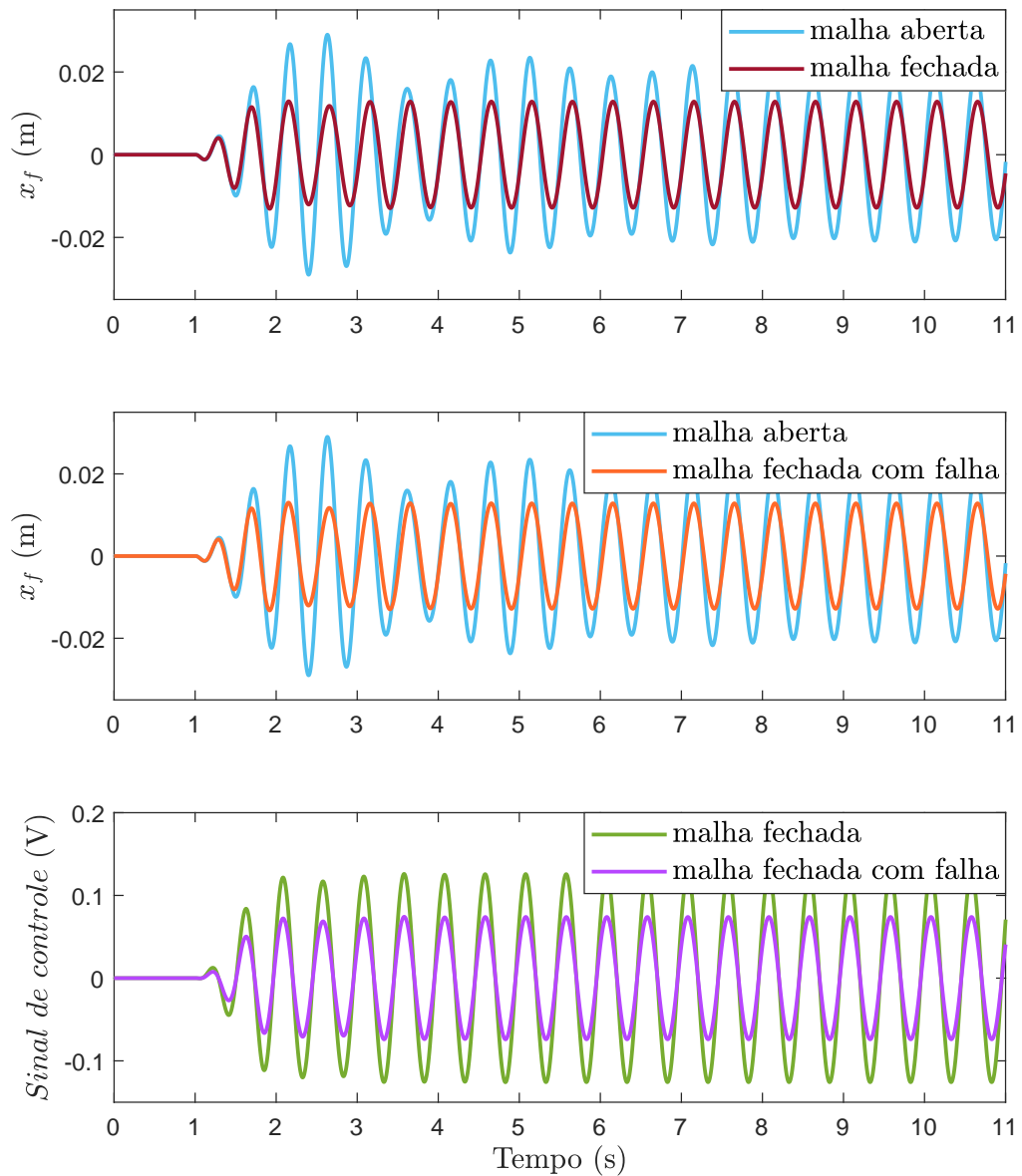
Fonte: Próprio autor.

Os resultados gerados pelo algoritmo ED são $\eta = 1,0822$ e $\rho = 0,0395$. Além disso, o valor calculado de β foi $1,4567 \times 10^{-5}$ e o seguinte controlador foi calculado:

$$K = \begin{bmatrix} 8,7681 & -1,1178 \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

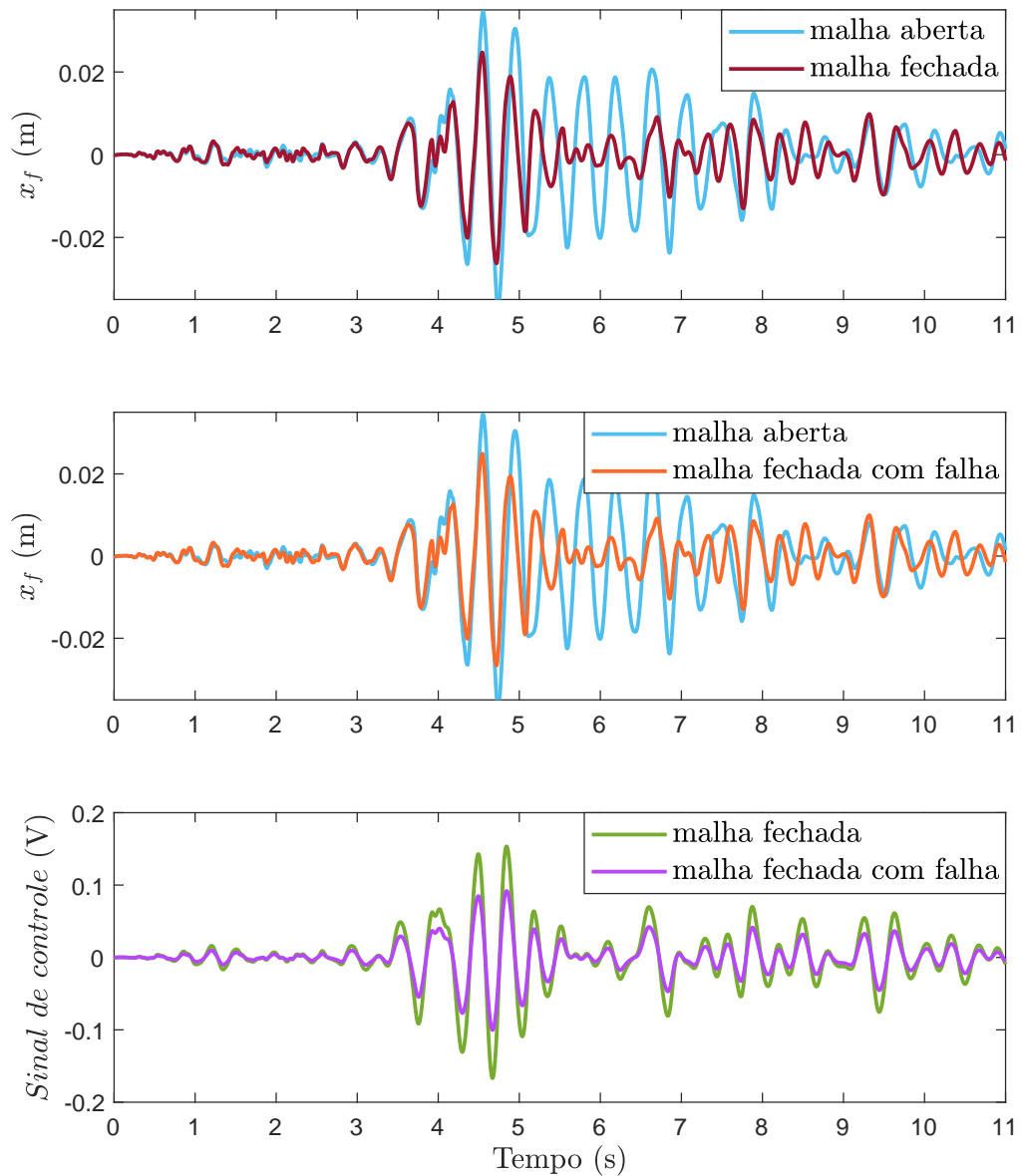
Nas Figuras 14 e 15 pode-se visualizar os testes realizados no software Simulink, simulando como seria a resposta do sistema presente no módulo Shake Table II aos sinais de entrada representados nas Figuras 8 e 9. Os resultados permitem uma comparação de performance entre o sistema em malha aberta, malha fechada e malha fechada considerando uma falha. Desse modo, é possível a visualização do comportamento da posição do piso superior do sistema AMD (x_f) e o sinal de controle utilizado na implementação.

Figura 14 – Posição do piso superior e do sinal de controle utilizado sistema simulando uma onda senoidal aplicado ao módulo Shake Table II no software Simulink.



Fonte: Próprio autor.

Figura 15 – Posição do piso superior e do sinal de controle utilizado sistema simulando um terremoto aplicado ao módulo Shake Table II no software Simulink.



Fonte: Próprio autor.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É proposto nesse trabalho um novo procedimento descrito no Teorema 3, que tem como objetivo minimizar o sinal de saída e o de controle. Este método utiliza o índice de performance descrito na Equação 2.26 que possui duas matrizes de ponderação, R e Q , para o cálculo do controlador de realimentação de saída com incertezas politópicas e taxa de decaimento.

Adicionalmente, é proposto o Teorema 4 com o acréscimo da taxa de decaimento ao Corolário 1, apresentado no trabalho de Fernandes (2022), além disso, é utilizado o algoritmo de evolução diferencial para obter um custo menor pelo ajuste dos parâmetros η e ρ , é possível visualizar o funcionamento do algoritmo ED no Anexo A. Ao final, os controladores projetados foram implementados no modelo presente no software Simulink, que possibilita visualizar como seria a resposta do simulador de terremoto Shake Table II aos sinais de entrada considerados, Figuras 8 e 9.

Como os controladores projetados são assintoticamente estáveis, ao analisar as Figuras 11, 12, 14 e 15 é possível notar que o controlador robusto foi capaz de gradualmente manter o piso superior próximo a sua posição original, conforme descrito na Definição 2. As oscilações também foram atenuadas mesmo com os sistemas sujeitos a uma falha de 40% no atuador.

É possível visualizar no Apêndice B, nas Figuras 17 e 18, a sobreposição da resposta simulada pelo software Simulink do sistema do módulo Shake Table II utilizando os dois Teoremas 3 e 4 propostos. Observa-se que as respostas são similares para o sistema em malha fechada, indicando que a resposta à oscilação permanece similar na presença de incertezas no sistema.

O sinal de controle utilizado se manteve próximo ao intervalo entre 0,5V e -0,5V para o sistema simulado utilizando o Teorema 3, porém ao utilizar o controlador proposto no Teorema 4 o sinal de controle se manteve próximo ao intervalo -0,1V e 0,1V indicando que o controlador projetado considerando a saturação no atuador pôde diminuir significativamente o sinal de controle, evitando assim que haja uma sobrecarga no sistema mesmo há uma rápida variação na posição do piso superior. Além disso, ao se considerar a saturação no sinal de controle, evita-se que este ultrapasse os limites pré-fixados $\mu = 10 V$, o que poderia levar a uma instabilidade do sistema. Desse modo, é possível diminuir a ocorrência de problemas nos equipamentos, como a queima de componentes.

Com os resultados dessas implementações é possível notar que os controladores projetados foram capazes de manter o piso superior próximo à região de sua posição original, além disso houve uma redução nas oscilações e vibrações indesejadas na estrutura, mesmo com uma falha de 40% no sinal de controle. Esses resultados mostram que o desenvolvimento desses controladores pode promover, em uma situação real, mais conforto e segurança para os habitantes de um edifício.

7.1 Perspectivas futuras

A metodologia utilizada nesse projeto pode ser implementada para outros tipos de módulos para verificação da resposta dos controladores projetados, como exemplo, no módulo de suspensão ativa. Também pode-se incluir outros parâmetros de projetos nos teoremas propostos, como a norma H^∞ com o intuito de diminuir as oscilações no sistema.

REFERÊNCIAS

- ALVES, U. N. L.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, West Sussex, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016.
- ÂNGELO, C. G. M. Projeto de desacopladores para sistemas incertos via lmis. 2019.
- BACHUR, W. E. G. *Síntese de Controladores Robustos via Otimização Evolutiva Multiobjetivo*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2017.
- BARMISH, B. R.; JURY, E. New tools for robustness of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, NY: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1963-, v. 39, n. 12, p. 2525–2525, 1994.
- BOCCA, L. F.; RAMOS, I. T. M.; ALVES, U. N. L. T.; BIZARRO, D. B.; PERES, J. C.; TEIXEIRA, M. C. M. Projeto de controladores ótimos robustos com realimentação estática de saída. In: SBA. *Sociedade Brasileira de Automática (vol. 2 no 1)*. [S.l.], 2020.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. [S.l.]: Siam, 1994. v. 15.
- BUZACHERO, L. F.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, E. R. da. Switched optimized robust control of uncertain LPV systems subject to structural faults. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier, v. 51, n. 25, p. 353–358, 2018.
- CAUN, R. da P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, A. da P. LQR-LMI control applied to convex-bounded domains. *Cogent Engineering*, Cogent OA, v. 5, n. 1, p. 1457206, 2018.
- CHANG, X. H.; PARK, J. H.; ZHOU, J. Robust static output feedback h_∞ control design for linear systems with polytopic uncertainties. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 85, p. 23–32, 2015.
- CONNOR, J. J. *Structural Motion Control*. [S.l.]: Pearson Education, Inc, 2003.
- CORNE, D.; DORIGO, M.; GLOVER, F.; DASGUPTA, D.; MOSCATO, P.; POLI, R.; PRICE, K. V. *New ideas in optimization*. [S.l.]: McGraw-Hill, UK, 1999. 77–106 p.
- FERNANDES, D. S. *Projeto de controladores robustos chaveados com custo garantido utilizando realimentação de saída para sistemas não lineares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2022.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. The LMI control toolbox. In: IEEE. *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 1994. v. 3, p. 2038–2041.
- HU, T.; LIN, Z. *Control systems with actuator saturation: analysis and design*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001.

- HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation. *Systems & control letters*, Elsevier, v. 45, n. 2, p. 97–112, 2002.
- JR, B. S.; NAGARAJAIAH, S. State of the art of structural control. *Journal of structural engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 129, n. 7, p. 845–856, 2003.
- KARABOĞA, D.; ÖKDEM, S. A simple and global optimization algorithm for engineering problems: differential evolution algorithm. *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, The Scientific and Technological Research Council of Turkey, v. 12, n. 1, p. 53–60, 2004.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear control*. [S.l.]: Pearson New York, 2015. v. 406.
- KUČERA, V. Discrete linear control: The polynomial equation approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, IEEE, n. 4, p. 595–596, 1985.
- LEVINE, W. S. *Control system fundamentals*. [S.l.]: CRC press, 1999.
- LIU, J. L. J. A fuzzy adaptive differential evolution algorithm. In: *IEEE Region Conference on Computers, Communications, Control and Power Engineering*. [S.l.: s.n.], 2002. v. 1, p. 606–611.
- LOFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: *IEEE. 2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)*. [S.l.], 2004. p. 284–289.
- MORAES, L. L. d. *Projeto de controle chaveado considerando saturação no atuador e minimização da norma H para o sistema active mass damper 1+ shake table II*. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado) — Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2021.
- MOREIRA, H. R. *Realimentação de saída robusta a partir de controladores dependentes de parâmetros para sistemas lineares incertos discretos no tempo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, SP, 2009.
- MOREIRA, M. R. *Controle robusto com realimentação derivativa de sistemas não lineares via LMI*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2011.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle moderno*. 5. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2011.
- OLIVEIRA, M. C. *Algoritmos de pontos interiores e desigualdades matriciais lineares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, SP, 1996.
- QUANSER. *Active Suspension - User's Manual*. Ontario, Canada, 2009. Disponível em: <<https://www.quanser.com/products/active-suspension/>>. Acesso em: 4 de setembro de 2021.
- SAAED, T. E.; NIKOLAKOPOULOS, G.; JONASSON, J. E.; HEDLUND, H. A state-of-the-art review of structural control systems. *Journal of Vibration and Control*, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 21, n. 5, p. 919–937, 2015.
- SADABADI, M. S.; PEAUCELLE, D. From Static Output Feedback to Structured Robust Static Output Feedback: A Survey. *Annual Reviews in Control*, Elsevier, v. 42, n. 11-26, out. 2016. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01342560>>.

SILVA, H. R. M.; RAMOS, I. T. M.; ALVES, U. N. L. T.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. Switched control design with guaranteed cost for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. In: *21st IFAC World Congress Virtual (IFAC-V 2020)*. [S.l.]: Elsevier, 2020. p. 8123–8128.

SILVA MARCUS PANTOJA E BOTTURA, C. P. D. Controle robusto descentralizado de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo limitadas em norma. In: *XVIII Congresso Brasileiro de Automática*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 486–491.

SILVEIRA, M. A. *Enciclopédia de Automática: Controle e Automação*. 1. ed. São Paulo, SP, Brasil: Editora BLUCHER, 2007.

SIMONE, T. S. D.; RAMOS, I. T. M.; BOCCA, L. F.; ALVES, U. N. L.; BIZARRO, D. B.; TEIXEIRA, M. C. Output feedback controller design for quadratic cost minimization for linear systems with polytopic uncertainties. In: IEEE. *2021 14th IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON)*. [S.l.], 2021. p. 1154–1160.

SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. et al. *Applied nonlinear control*. [S.l.]: Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. v. 199.

SOONG, T. T. Active structural control. *Longman Scientific and Technical*, 1990.

STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of global optimization*, Springer, v. 11, n. 4, p. 341–359, 1997.

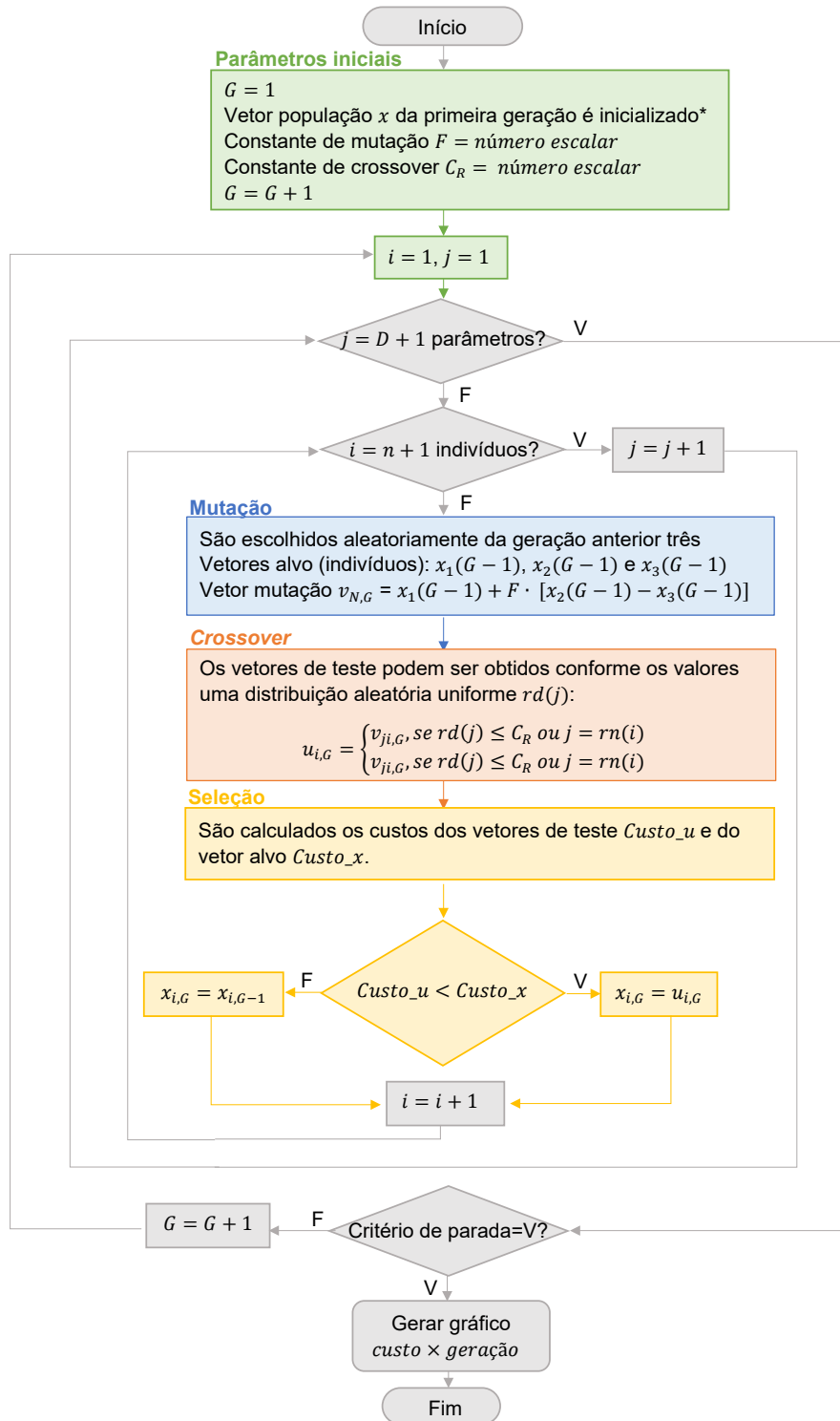
SUMAN, N. R. *Projeto de controle chaveado considerando saturação no atuador e minimização da norma H para o sistema active mass damper I+ shake table II*. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado) — Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2020.

SYRMOS, V.; ABDALLAH, C.; DORATO, P.; GRIGORIADIS, K. Static output feedback—a survey. *Automatica*, v. 33, n. 2, p. 125–137, 1997. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109896001410>>.

YANG, D.-H.; SHIN, J. H.; LEE, H.; KIM, S. K.; KWAK, M. K. Active vibration control of structure by active mass damper and multi-modal negative acceleration feedback control algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 392, p. 18–30, 2017.

ANEXO A – FLUXOGRAMA DO ALGORITMO DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

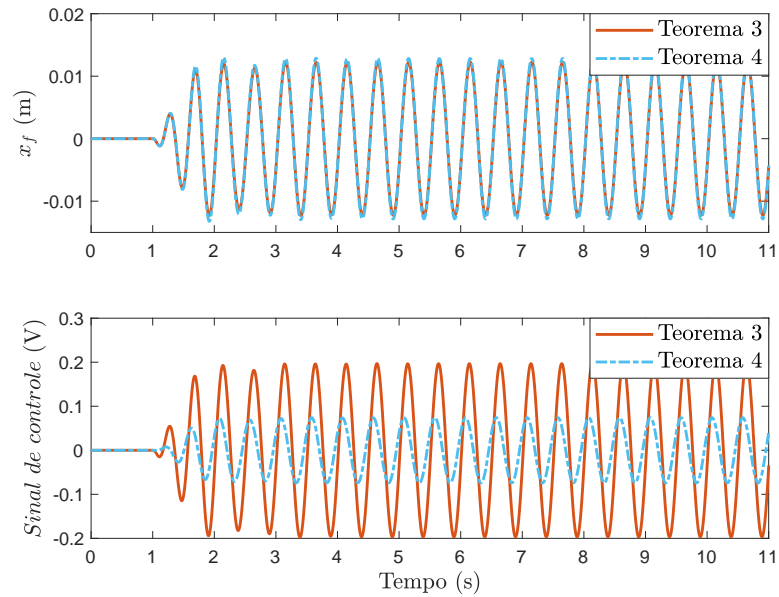
Figura 16 – Fluxograma do algoritmo ED



Fonte: Próprio autor.

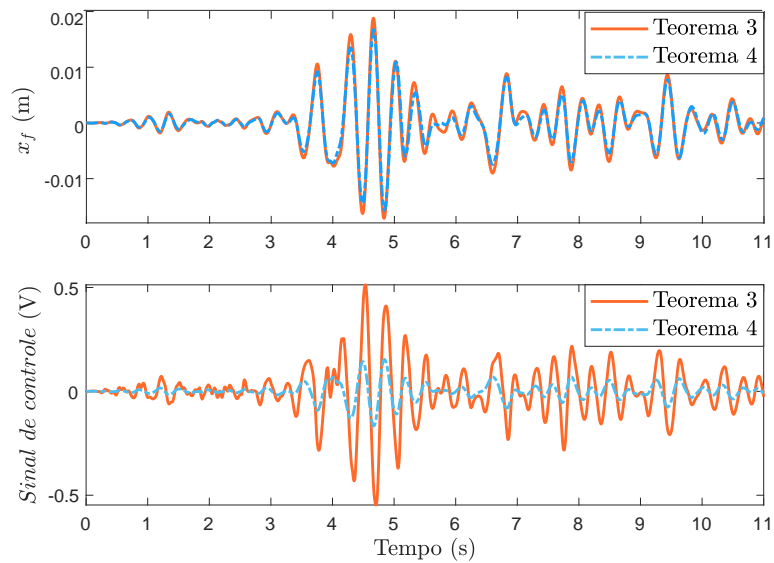
ANEXO B – COMPARAÇÃO DA SIMULAÇÃO ENTRE OS TEOREMAS

Figura 17 – Sobreposição da resposta do sistema a uma entrada senoidal considerando os controladores sem (Teorema 3) e com a saturação no atuador (Teorema 4), utilizando o software Simulink



Fonte: Próprio autor.

Figura 18 – Sobreposição da resposta do sistema a um terremoto considerando os controladores sem (Teorema 3) e com a saturação no atuador (Teorema 4), utilizando o software Simulink



Fonte: Próprio autor.