UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA

TESE DE DOUTORADO

DA ARGUMENTAÇÃO À PROVA: produção e avaliação de argumentos matemáticos produzidos por alunos ingressantes em um curso de formação de professores

Fredy Coelho Rodrigues

Bauru - SP
2023

FREDY COELHO RODRIGUES

DA ARGUMENTAÇÃO À PROVA: produção e avaliação de argumentos matemáticos produzidos por alunos ingressantes em um curso de formação de professores

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru, como um dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência, área de concentração Ensino de Ciências e Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Marco Aurélio Alvarenga Monteiro.

Bauru, SP
2023

R696a

Rodrigues, Fredy Coelho

Da argumentação à prova: : produção e avaliação de argumentos matemáticos produzidos por alunos ingressantes em um curso de formação de professores / Fredy Coelho Rodrigues. -- Bauru, 2023

327 p. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru

Orientador: Marco Aurélio Alvarenga Monteiro

1. Formação de professores. 2. Argumentação matemática. 3. Argumentação coletiva. 4. Argumentos de prova. 5. Argumentos de justificação. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Bauru

Faculdade de Ciências

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE FREDY COELHO RODRIGUES, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA, DA FACULDADE DE CIÊNCIAS - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 14 dias do mês de julho do ano de 2023, às 09:00 horas, por meio de Videoconferência, realizou-se a defesa de TESE DE DOUTORADO de FREDY COELHO RODRIGUES, intitulada **Da argumentação à prova: produção e avaliação de argumentos matemáticos produzidos por alunos ingressantes em um curso de formação de professores**. A Comissão Examinadora foi constituida pelos seguintes membros: Prof. Dr. MARCO AURELIO ALVARENGA MONTEIRO (Orientador(a) - Participação Virtual) do(a) Departamento de Fisica e Quimica / Faculdade de Engenharia - UNESP/Guaratingueta, Profa. Dra. ELIANE SCHEID GAZIRE (Participação Virtual) do(a) Departamento de Educação / Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Prof. Dr. PAULO CESAR OLIVEIRA (Participação Virtual) do(a) Departamento de Física, Química e Matemática / Universidade Federal de São Carlos, Prof. Assoc. NELSON ANTONIO PIROLA (Participação Virtual) do(a) Departamento de Educacao / Faculdade de Ciências - UNESP/Bauru, Prof. Assoc. EDER PIRES DE CAMARGO (Participação Virtual) do(a) Departamento de Física e Química / Faculdade de Engenharia - UNESP/Ilha Solteira. Após a exposição pelo doutorando e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, o discente recebeu o conceito final:_ APROVADO_ _ _ _ _ _ _ _ _ . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.

gov.br Documento assinado digitalmente
MARCO AURELIO ALVARENGA MONTEIRO
Data: 24/07/2023 08:24:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. MARCO AURELIO ALVARENGA MONTEIRO

Dedico este trabalho de tese a minha mãe Mariete Ferreira Coelho que sempre lutou e trabalhou incansavelmente para investir e apoiar a educação dos filhos. Você plantou a semente, acreditou no poder transformador da Educação e hoje estamos aqui, colhendo o fruto desse sonho realizado. Se não fosse por você eu não teria chegado até aqui.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por me conceder equilíbrio e saúde mental, para me reconstruir e finalizar este projeto que constitui um sonho realizado.

À minha mãe Mariete Ferreira Coelho pelo amor, acolhida e apoio incondicional durante o período de medo, solidão e instabilidade emocional que vivi ao longo do doutorado.

Ao meu irmão Franco Coelho Rodrigues pelo suporte e incentivo durante as adversidades.

Às minhas queridas filhas, Sophia Coelho, Ana Lívia Coelho e Isabela Coelho, pelo amor e compreensão nos momentos de ausência.

Ao meu orientador Marco Aurélio Alvarenga Monteiro, pela parceria, confiança, aprendizado e troca de experiências.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da Unesp campus Bauru, em especial, Marco Aurélio Alvarenga Monteiro, Nelson Antônio Pirola, Roberto Nardi, Fernanda Bozelli, Silvia Regina Vieira da Silva, Wilson Massashiro Yonezawa e Ivete Baraldi (in memória) pela amizade, aprendizado, conselhos e parcerias no desenvolvimento de artigos.

Aos meus colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência, pelo trabalho colaborativo, aprendizado, trocas de experiências e parcerias na escrita de artigos.

Ao Instituto Federal do Sul de Minas, campus Passos, por apoiar o desenvolvimento desta pesquisa contribuindo para o meu afastamento integral das atividades docentes.

Aos meus colegas de trabalho da licenciatura em matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos, pela compreensão e apoio durante o período de afastamento docente.

À minha orientadora do Mestrado Eliane Scheid Gazire pelo incentivo ao prosseguimento na pós-graduação, trocas de experiência e oportunidades de divulgação do meu trabalho.

É experiência aquilo que “nos passa”, ou que nos toca, ou que nos acontece, e ao nos passar nos forma e nos transforma. Somente o sujeito da experiência está, portanto, aberto à transformação (LARROSA, 2002, p.26).

RESUMO

Este estudo teve por objetivo investigar como alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos argumentam e avaliam seu desempenho durante o processo de justificação e validação de conceitos matemáticos em um contexto de ensino baseado em argumentação coletiva e investigação. O estudo se justifica na medida em que contribui para aprofundar a discussão sobre o tema, oferecendo subsídios teóricos e metodológicos para fomentar e avaliar a prática de argumentação coletiva (processo e produto) em sala de aula, contribuindo assim para a formação conceitual e proficiência da prática argumentativa. Para tanto foi realizado um estudo de caso (exploratório/descritivo/explicativo) para compreender melhor o fenômeno que envolve "**três situações de argumentação coletiva**". O estudo de caso foi estruturado em três fases. Na **1ª fase** realizamos uma pesquisa bibliográfica (estado do conhecimento da literatura nacional e internacional) e uma pesquisa bibliométrica (literatura internacional) para estabelecer a definição do problema, os objetivos de pesquisa, a questão central de investigação bem como a seleção do referencial teórico da pesquisa. Já na **2ª fase** coletamos dados por meio de observação participante (documentada por meio de videogravação e notas de campo), recolha de registros escritos produzidos por três grupos de trabalho e autoscopia operacionalizada pela dinâmica de grupo focal. Com a observação participante registramos todo o processo de argumentação coletiva realizada de modo oral e multimodal. Por meio da recolha dos registros escritos produzidos pelos grupos de trabalho documentamos toda a produção de argumentos gerados por escrito. E por último, com a autoscopia, propiciamos cada grupo de trabalho autoavaliar coletivamente o seu desempenho na prática da argumentação. Na **3ª e última fase,** analisamos os dados com base na lente teórica da análise argumentativa (Toulmin, 1958; 2001) e da análise de conteúdo (Bardin, 1985). Com base nas ideias de Toulmin e nas estruturas globais de argumentação analisamos a anatomia do processo argumentativo buscando compreender como os alunos argumentam (raciocinam) para justificar conceitos e ideias matemáticas. Por outro lado, por meio da estrutura do argumento de Toulmin aliado as ideias de Nicolas Balacheff sobre os tipos e níveis de prova analisamos a fisiologia do argumento de prova enquanto produto final da argumentação para compreender como os alunos argumentam (raciocinam) para validar ideias matemáticas em problemas de prova. Por fim, aplicamos a análise de conteúdo nas transcrições das sessões de autoscopia para compreender como os alunos autoavaliam seu desempenho na prática da argumentação e quais competências e habilidades argumentativas são evidenciadas como importantes por eles visando a formação do professor que ensina matemática. Ao examinarmos a anatomia das situações de argumentação coletiva, os resultados indicaram que as estruturas de argumentação global encontradas no estudo (estrutura fonte; estrutura linear; estrutura de argumentos independentes; estrutura espiral; estrutura reservatório; estrutura fonte divergente) variavam em sua complexidade muito em função do apoio docente que é oferecido durante a argumentação como também em função da natureza do tipo de problema proposto. Em particular, uma nova estrutura global de argumentação (Estrutura fonte divergente) não documentada na literatura emergiu nos dados da pesquisa. No contexto dos 5 problemas analisados, as argumentações de uma maneira geral, evoluíram do campo visual de justificação para o campo conceitual e o material concreto utilizado na atividade viabilizou essa transição. Por outro lado, ao examinamos em detalhes toda a fisiologia e qualidade (solidez) do argumento de prova utilizado para fins de validação nos problemas 3 e 5 da atividade, os resultados mostraram que os alunos investigados tiveram dificuldades em produzir provas conceituais (forte e de boa elaboração), contudo, essa dificuldade foi minimizada na medida em que o professor ofereceu apoio solicitando generalizações. Em relação ao contexto citado anteriormente, o modelo de avaliação do argumento de prova proposto por Rodrigues e Monteiro (2021) foi testado pela primeira vez durante este estudo e os resultados mostraram que o referido modelo demonstrou sua eficiência na avaliação e classificação dos componentes do argumento de prova, exceto em uma situação particular, onde foi proposto nos resultados do estudo, uma classificação adicional para os dados (dado genérico). Quando chamados a refletirem e realizarem uma autoavaliação do seu desempenho na prática da argumentação coletiva, os alunos destacaram estar diante de uma abordagem nova e desconhecida por eles, no entanto, em meio as dificuldades (conteúdo e com a metodologia), eles conseguiram colaborativamente atingir um aprendizado conceitual e desenvolver competências e habilidades relacionadas a proficiência da prática de argumentação e prova em sala de aula. Neste último caso, os alunos apresentaram um conjunto de competências e habilidades argumentativas nos quais eles julgaram ter grande importância para a formação do professor que ensina matemática.

Palavras-chave: formação de professores; argumentação matemática; argumentação coletiva; argumentos de prova; argumentos de justificação; prática argumentativa.

ABSTRACT

This study aimed to investigate how new students in a Mathematics Degree course at IFSULDEMINAS, Campus Passos argue and evaluate their performance during the process of justification and validation of mathematical concepts in a teaching context based on collective argumentation and investigation. The study is justified in that it contributes to deepen the discussion on the subject, offering theoretical and methodological subsidies to encourage and evaluate the practice of collective argumentation (process and product) in the classroom, thus contributing to the conceptual formation and proficiency of argumentative practice. For that, a case study (exploratory/descriptive/explanatory) was carried out to better understand the phenomenon that involves “three situations of collective argumentation”. The case study was structured in three phases. In the 1st phase we carried out a bibliographical research (state of knowledge of national and international literature) and a bibliometric research (international literature) to establish the definition of the problem, the research objectives, the central question of investigation as well as the selection of the theoretical reference of the research. In the 2nd phase, we collected data through participant observation (documented through video recording and field notes), collection of written records produced by three working groups and autoscopy operationalized by the focus group dynamics. With participant observation, we recorded the entire process of collective argumentation carried out in an oral and multimodal way. Through the collection of written records produced by the working groups, we documented the entire production of arguments generated in writing. And finally, with autoscopy, we allow each work group to collectively self-assess their performance in the practice of argumentation. In the 3rd and last phase, we analyzed the data based on the theoretical lens of argumentative analysis (Toulmin, 1958; 2001) and content analysis (Bardin, 1985). Based on Toulmin's ideas and on the global structures of argumentation, we analyze the anatomy of the argumentative process, seeking to understand how students argue (reason) to justify mathematical concepts and ideas. On the other hand, through the structure of Toulmin's argument combined with Nicolas Balacheff's ideas about the types and levels of proof, we analyze the physiology of the proof argument as a final product of argumentation to understand how students argue (reason) to validate mathematical ideas in proof problems. Finally, we applied content analysis to the transcripts of the autoscopy sessions to understand how students self-assess their performance in the practice of argumentation and which argumentative skills and abilities are evidenced as important by them, aiming at the formation of teachers who teach mathematics. When examining the anatomy of collective argumentation situations, the results indicated that the global argumentation structures found in the study (source structure; linear structure; structure of independent arguments; spiral structure; reservoir structure; divergent source structure) varied in their complexity greatly depending on the teaching support that is offered during the argumentation, as well as depending on the nature of the type of problem proposed. In particular, a new global structure of argumentation (Divergent source structure) not documented in the literature emerged in the research data. In the context of the 5 problems analyzed, the arguments in general evolved from the visual field of justification to the conceptual field and the concrete material used in the activity made this transition possible. On the other hand, when we examined in detail all the physiology and quality (solidity) of the proof argument used for validation purposes in problems 3 and 5 of the activity, the results showed that the investigated students had difficulties in producing conceptual proofs (strong and well elaborated), however, this difficulty was minimized as the professor offered support by requesting generalizations. Regarding the aforementioned context, the proof argument evaluation model proposed by Rodrigues and Monteiro (2021) was tested for the first time during this study and the results showed that the referred model demonstrated its efficiency in the evaluation and classification of the proof argument components, except in a particular situation, where an additional classification for the data was proposed in the results of the study (generic data). When asked to reflect and carry out a self-assessment of their performance in the practice of collective argumentation, the students highlighted that they were facing a new and unknown approach, however, amidst the difficulties (content and methodology), they managed to collaboratively achieve conceptual learning and develop skills and abilities related to proficiency in the practice of argumentation and proof in the classroom. In the latter case, the students presented a set of competences and argumentative abilities in which they judged to be of great importance for the formation of the teacher who teaches mathematics.

Keywords: teacher training; mathematical argumentation; collective argumentation; proof arguments; justification arguments; argumentative practice.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Base Digital de Teses e Dissertações
AProvaME	Argumentação e Prova na Matemática Escolar
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
M	Mestrado Acadêmico
MP	Mestrado Profissional
D	Doutorado
IES	Instituição de Ensino Superior
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
UNESP	Universidade Estadual Paulista
USP	Universidade de São Paulo
UEM	Universidade Estadual de Maringá
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFG	Universidade Federal de Goiás
UFMS	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFN	Universidade Franciscana
WoS	Web of Science
TUR	Turquia
ALE	Alemanha
FRA	França
ESP	Espanha
EUA	Estados Unidos
ESC	Escócia
ISR	Israel
IND	Indonésia
BNCC	Base Nacional Comum Curricular

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Meu nome é Fredy Coelho Rodrigues, sou natural de Araçuaí-MG, cidade localizada no Vale do Jequitinhonha, norte do Estado de Minas Gerais.

Sou oriundo de família humilde, o filho mais velho de um total de dois irmãos. A minha mãe, professora aposentada dos anos iniciais do Ensino Fundamental na rede pública de ensino, desde a minha infância e adolescência, foi quem me incentivou a estudar para conquistar um bom emprego.

Sempre estudei em escola pública e procurava me dedicar ao máximo aos estudos porque tinha o sonho de algum dia cursar uma faculdade e conquistar o meu sucesso financeiro.

Em dezembro de 2000, após a conclusão do ensino médio, eu e meu irmão, com o dinheiro do décimo terceiro salário da minha mãe fizemos a inscrição para o vestibular da Universidade Estadual de Minas Gerais (UNIMONTES) Campus Montes Claros-MG. Na oportunidade, consciente do fraco Ensino Médio que tivemos na rede pública de ensino, estrategicamente, optamos pela inscrição em cursos de menor concorrência da Universidade no intuito de aumentar a probabilidade de êxito na aprovação pelo vestibular. Na época, optei pelo curso de Licenciatura em Matemática, pela afinidade na área e por ser um curso noturno e que me possibilitasse trabalhar durante o dia. O meu irmão pelas mesmas razões optou pelo curso de Ciências Contábeis.

Com a aprovação no vestibular, que contou com nosso esforço e também muita sorte, tivemos que nos mudar para Montes Claros-MG mesmo sem perspectiva de recursos financeiros para se manter na cidade. Logo de início, precisei trabalhar para me manter. Como eu tinha muita facilidade na área de exatas, comecei a ministrar aulas particulares de Matemática, Física e Química. De início eu ficava o dia inteiro na porta de várias escolas particulares da cidade oferecendo serviço de reforço escolar aos pais que levavam os filhos para a escola.

Em pouco tempo adquiri uma clientela de alunos para reforço escolar, o que ajudou a me manter nos primeiros meses na cidade. O meu irmão, por ser mais novo, dependia de mim. Eu ministrava aulas particulares o dia inteiro e a noite me deslocava para a faculdade, orgulhoso, feliz, focado e comprometido com o curso.

Durante o período que cursei a Licenciatura em Matemática (2001-2004), pude vivenciar uma experiência que contribuiu muito para o meu desenvolvimento profissional. Ao iniciar esse curso, eu acreditava que para ser um bom professor era preciso ter apenas um bom conhecimento teórico do conteúdo de Matemática a ser trabalhado com os alunos. No entanto, essa ideia começou a mudar a partir do momento que passei a experienciar metodologias alternativas de ensino ao longo de um estágio realizado no Laboratório de Educação Matemática dessa instituição. A experiência de ensino-aprendizagem vivenciada no ambiente deste laboratório me deixou marcas e veio, posteriormente, influenciar de forma positiva a minha prática docente em sala de aula.

A minha história com o Laboratório de Educação Matemática (LEM) teve início no segundo semestre de 2001, período em que eu cursava o segundo período do curso de Licenciatura em Matemática e fui contemplado com uma bolsa de estágio neste laboratório. Na época, não sabia dizer ao certo o que era um Laboratório de Educação Matemática e muito menos que tipo de atividades passaria a desenvolver durante o estágio neste ambiente. A única coisa que me vinha à cabeça era a ideia de um espaço reservado ao estudo da Matemática, orientação de estágio e utilização de jogos. Eu acreditava que o meu papel dentro daquele projeto, portanto, consistiria apenas em prestar assistência aos professores e acadêmicos do curso no que diz respeito ao controle do acervo de livros didáticos e materiais manipulativos ali existentes, em especial os jogos. Acreditava, também, que a minha função seria zelar pela manutenção deste espaço, de modo que o mesmo estivesse sempre pronto para recepcionar os acadêmicos durante as atividades de estudo e estágio.

No entanto, eu estava errado, já que, antes mesmo do laboratório começar a funcionar, pude participar ativamente da fase de construção do seu espaço físico, como também, depois de pronto, experienciar, neste ambiente, várias atividades de ensino envolvendo a elaboração de oficinas didáticas, a confecção e uso de materiais manipuláveis e metodologias alternativas para o ensino da Matemática. Desde então, pude perceber que não bastava apenas ter o domínio de conteúdo para ensinar, é preciso também deter o conhecimento de metodologias alternativas capazes de propiciar ao aluno uma compreensão melhor da Matemática. Por meio dessa experiência de ensino, percebi que o Laboratório de Educação Matemática representa uma necessidade nos cursos de formação de professores.

Após um ano de estágio, fui indicado pelo coordenador do laboratório e por outro professor do curso de Matemática para uma vaga de emprego em um colégio particular da cidade. Sendo assim, tive que abandonar aquela atividade, de modo a ceder a vaga do referido estágio a outro acadêmico do curso para que o mesmo pudesse ter a mesma oportunidade que tive. O exercício da docência representava para mim a oportunidade de colocar em prática toda aquela experiência de ensino-aprendizagem que vivi no ambiente do laboratório, que me deixou marcas e que vem me transformando ao longo dos anos como professor de Matemática. Essa experiência me possibilitou ser um professor reflexivo, que a todo o momento passa a questionar a sua prática profissional.

Após concluir a Licenciatura em Matemática no final de 2004, pude ingressar no início de 2005 em uma pós-graduação lato sensu em Matemática Superior com ênfase na área de Análise Matemática na própria instituição. Não era a área que eu desejava dar continuidade aos meus estudos, no entanto, era a única área de especialização ofertada pela Universidade naquele período. Não imaginava que esta especialização, depois de concluída, fosse me abrir as portas para a docência na Educação Superior.

No final de 2006, após a conclusão da especialização, de maneira despretensiosa para testar meus conhecimentos, prestei um processo seletivo para professor na referida Universidade para a área de Cálculo Diferencial e Integral (área que eu tinha muita facilidade) e acabei sendo aprovado para um regime de trabalho de 20 horas. Em pouco tempo, sai da condição de aluno para professor da Universidade que havia estudado.

Em 2007, apenas com uma titulação de especialista em uma grande Universidade, veio a cobrança pela titulação de mestre uma vez que o Conselho Estadual de Educação passaria a exigir a referida titulação para o exercício do magistério da Educação Superior no âmbito da Universidade. Neste período eu lecionava Cálculo Diferencial e Integral no curso de Licenciatura em Matemática da UNIMONTES como também em cursos de engenharia em uma Universidade privada. Paralelo a isso, mantinha o vínculo docente de professor da Educação Básica em um colégio particular da cidade (Colégio Berlaar Imaculada Conceição) em que eu atuava desde a época de acadêmico.

No ano posterior, em 2008 ingressei no Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC-MINAS (Belo Horizonte). Na época, este era o único programa de pós-graduação na área de Ensino de Matemática em Minas Gerais. Na impossibilidade de afastamento das atividades docentes, tentei conciliar as atividades do mestrado com uma demanda semanal de 40 aulas semanais. Diante das dificuldades para trabalhar, viajar e estudar acabei trancando o mestrado. Frustrado com a grande quantidade de aulas que eu tinha semanalmente, resolvi tentar concurso na rede federal de ensino, almejando melhores condições de trabalho em um regime de Dedicação Exclusiva que posteriormente pudesse viabilizar algum tipo de afastamento para que eu pudesse cursar mestrado.

Em 2009, já contando com a minha experiência, ainda que curta, na docência de disciplinas de cálculo, prestei o concurso para o Instituto Federal do Norte de Minas Gerais para a área de Cálculo Diferencial e Integral – fui aprovado em 1º lugar no certame. Em 2010, com um quantitativo bem menor de aulas (12 aulas) e em um regime de dedicação exclusiva, pude retornar ao mestrado em ensino e sob a orientação da profa. Dra. Eliane Scheid Gazire conclui o mestrado em 2011 defendendo uma dissertação que na época foi elogiada pelo professor Sergio Lorenzato (UNICAMP) como “tese acadêmica em um mestrado profissional”. O título da minha dissertação de mestrado foi “**Laboratório de Educação Matemática: Descobrindo as potencialidades do seu uso em um curso de formação de professores**” e teve relação com a minha experiência formativa na época de bolsista-estagiário no Laboratório de Educação Matemática da Universidade onde realizei a graduação. A partir deste trabalho, publiquei artigos, livro e realizei inúmeros projetos de extensão associados ao meu trabalho de mestrado.

Atuando como docente na rede federal de ensino, logo depois que conclui o mestrado, passei a coordenar o curso de Licenciatura em Matemática do IFNMG Campus Salinas. Foram 2 anos à frente deste curso de Licenciatura e com vários projetos aprovados, sendo o projeto mais importante deles o PIBID/CAPES em 2012.

Entre 2012 e 2014 passei a almejar um doutorado na área de Ensino. Havia, porém, um grande obstáculo, os programas de pós-graduação do estado de São Paulo, almejados por mim, eram muito distantes da cidade onde eu morava e trabalhava (Salinas/Norte de Minas Gerais).

A solução que eu encontrei para encurtar a distância e então viabilizar a minha qualificação (Doutorado) foi solicitar transferência do Instituto Federal do Norte de Minas para o Instituto Federal do Sul de Minas, o que acabou dando certo.

Em julho de 2014, por meio de transferência, iniciei minhas atividades docentes no IFSULDEMINAS, Campus Passos. Pouco tempo depois de lotado no Campus, fui designado coordenador do curso de Licenciatura em Matemática, período em que trabalhei na implantação do Laboratório de Educação Matemática (LEM) bem como do Laboratório Virtual de Educação Matemática (LAVEM). No período a frente a coordenação de curso, o sonho do doutorado ficou em segundo plano devido as inúmeras atribuições e contratempos que a função administrativa me consumia.

A pós-graduação a nível de doutorado constituía uma necessidade cada vez maior na medida em que inúmeros projetos financiados pela CAPES e FAPEMIG exigiam a titulação de doutor para submissão/coordenação. Durante o ano de 2019, por exemplo, passei por uma situação desconfortável em tive que tomar o “nome emprestado” de um colega doutor para submeter um projeto a FAPEMIG.

Em 2019, prestei o processo seletivo de doutorado da UNESP Campus Bauru, motivado pela necessidade de aprimorar meus conhecimentos e melhorar minha prática docente.

Após lograr êxito com a aprovação no processo seletivo, logo em seguida consegui o afastamento das minhas atividades docentes junto ao IFSULDEMINAS, Campus Passos para então me dedicar integralmente as atividades do doutorado.

Pretendia de início dar prosseguimento aos meus estudos sobre **“Laboratórios de Ensino na formação de professores**”. No entanto, não foi possível seguir diretamente com a temática uma vez que a minha proposta de investigação teria que se ajustar ou estar em consonância com a área de atuação/pesquisa do meu orientador de doutorado. Nesse sentido, passei a estudar o processo de “**argumentação**” no ensino de ciências, com foco ao meu contexto de formação -a matemática. Ainda que a temática tivesse mudado, no entanto, ela ainda possuía uma forte relação/ligação com os meus estudos anteriores a nível de mestrado, afinal de contas toda a exploração de material manipulável e atividades de ensino realizadas no âmbito do LEM se dá a partir de uma situação de argumentação coletiva.

O primeiro contato com a argumentação no ensino de ciências ocorreu durante as aulas da disciplina de Análise de Discurso ministrada pelo prof. Dr. Marco Aurélio Alvarenga Monteiro (meu orientador) durante o segundo semestre de 2019 junto ao programa de pós-graduação em Educação para a Ciência da Unesp, campus Bauru. Nesta oportunidade, a leitura de trabalhos envolvendo a temática da argumentação informal em diferentes campos da ciência despertou a minha curiosidade de explorar a temática no campo da educação matemática crítica. A ideia, portanto, era buscar reflexões numa tentativa de relativizar o termo “argumentação matemática” para além do campo da técnica. A pretensão era explorar outras possibilidades de argumentação matemática desprovido da “forma” e do “formalismo” matemático, reconhecendo e valorizando, diferentes etnoargumentações e justificações conceituais que pudessem ser consideradas como provas válidas e explicativas.

No contexto da referida disciplina tive a oportunidade de conhecer a teoria (anatômica e fisiológica) da estrutura do argumento, amplamente utilizada no ensino de ciências e baseada no estudo do filósofo Stephen Toulmin. O conhecimento desta teoria alavancou os meus estudos na medida em que busquei produzir articulações do referido estudo com o meu campo de formação – a matemática.

No campo da disciplina de Psicologia da Educação Matemática, tive o primeiro contato com os estudos de Nicolas Balacheff envolvendo a temática relativo aos tipos e níveis de prova em matemática. A partir daí, tendo em vista o estudo de tese, surgiu a ideia de articular/juntar a teoria de Balacheff ao modelo do argumento proposto por Toulmin.   A referida ideia, portanto, se materializou na criação de um modelo ou abordagem metodológica (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021) para avaliar a qualidade/solidez do argumento de prova em Educação

Matemática. O trabalho de tese neste contexto passou a adquirir forma e contornos na medida em que se voltou à exploração e teste do referido modelo teórico desenvolvido pelo autor e seu orientador (RODRIGUES e MONTEIRO, 2021).

A partir daí nos propusemos a estudar a argumentação enquanto um “processo” e também “produto” e dessa forma o estudo ganhou forma sob o título: “**Da argumentação à prova: produção e avaliação de argumentos matemáticos por alunos ingressantes em curso de formação de professores em matemática**”.

Sendo este o título do nosso trabalho de tese, os resultados apresentados ao longo do texto, irão cotejar importantes contribuições à literatura para aprofundar a discussão e compreensão do tema envolvendo a complexa passagem/transição da argumentação (prova) empírica para argumentação (prova) conceitual. No que tange a formação de professores, cuja experiência do autor foi brevemente relatada, o estudo pretende levantar subsídios teóricos e metodológicos para apoiar a instrumentalização do futuro professor de matemática com o trabalho da argumentação e prova em sala de aula como também no âmbito de atividades de laboratório envolvendo uso de material concreto e argumentação coletiva.

INTRODUÇÃO

A argumentação constitui um campo de estudo interdisciplinar que recebe contribuições de profissionais e estudiosos de diferentes áreas do conhecimento: filosofia, psicologia, linguística, comunicação, educação, ensino de ciências, matemática etc. Este campo de estudo teve um grande impulso no final da década de 50 a partir da publicação de duas obras clássicas e de referência na área, o "*Tratado da Argumentação*" de Perelman e Olbretchs-Tyteca e "*Usos do Argumento*" de Stephen Toulmin, ambos publicados em 1958 (MENDONÇA; JUSTI, 2013).

Contribuições para a evolução deste campo de estudo advém das diferentes perspectivas que refletem os modos variados de como a argumentação vem sendo conduzida e trabalhada ultimamente (WENZEL, 1990).

Para Wenzel (1990) a argumentação pode ser pensada por meio de três perspectivas diferentes: retórica, dialética e lógica.

No campo da retórica, por exemplo, a argumentação tem por finalidade a persuasão na medida que se ocupa com a produção de um discurso (oral ou escrito) para auxiliar membros de um grupo social a resolver problemas e orientá-los na tomada de uma decisão. Já no campo da dialética, uma argumentação está relacionada a organização sistemática de uma interação discursiva (debate) para discutir ideias e orientar membros de um grupo social na produção e a tomada das melhores decisões. Por fim, no campo da lógica, a argumentação está associada a um conjunto de afirmativas devidamente fundamentadas por evidências e razões suficientemente relevantes para convencer um determinado grupo social (WENZEL, 1990).

Em relação a estas três formas de se pensar a argumentação, Wenzel (1990) explica que a perspectiva retórica está relacionada ao processo de construção do argumento, a dialética por sua vez ao procedimento utilizado na produção e a lógica concebe o argumento enquanto produto já acabado.

O estudo da retórica, da dialética e da lógica teve origem na Grécia Antiga e obteve maior destaque a partir do trabalho de Aristóteles (MENDONÇA; JUSTI, 2013). Ainda de acordo com Mendonça e Justi (2013) a perspectiva lógica de argumentação subdivide-se em duas categorias: lógica formal e lógica informal.

> A lógica formal tem como intuito criar meios de garantir que nosso pensamento proceda corretamente a fim de chegar a conhecimentos verdadeiros. No trabalho de Aristóteles, os argumentos demonstrativos (aqueles que objetivam atingir uma certeza absoluta) foram estudados no domínio da lógica formal (também denominada analítica) a partir de raciocínios silogísticos dedutivos e indutivos. Na lógica formal, a validade dos

> argumentos depende apenas do formato das afirmativas (as premissas precedem a conclusão, que é uma consequência das mesmas) (MENDONÇA; JUSTI, 2013, p.190).

Por outro lado,

> A lógica informal tem como intuito desenvolver procedimentos para análise, interpretação, avaliação, crítica e construção da argumentação no discurso cotidiano. No prefácio da edição de 2003 do livro “Os usos do Argumento”, Toulmin afirma que sua intenção original ao escrevê-lo era criticar a suposição de muitos filósofos anglo americanos de que qualquer argumento significativo deveria ser expresso em terminações formais. Toulmin alertou contra os riscos desse tipo de raciocínio, devido à pretensão de se basear em universalidades que nem sempre se encontram presentes na proposição maior ou geral. De fato, a partir desse livro, Toulmin rompeu com o campo tradicional da lógica formal e se focou no estudo de como as pessoas argumentam em situações corriqueiras (MENDONÇA; JUSTI, 2013, p.190).

Dentro da perspectiva da lógica informal, a argumentação tem sido recentemente definida como

> uma atividade verbal, social e racional destinada a convencer uma crítica razoável da aceitabilidade de um ponto de vista, apresentando uma constelação de proposições que justificam ou refutam a proposição expressa no ponto de vista. (VAN EEMEREN; GROOTENDORST, 2004, p.1, **tradução nossa)**.

Enquanto atividade verbal, a argumentação faz uso da linguagem oral ou escrita. Os autores reconhecem a importância de outras formas de comunicação não verbal tais como gestos e expressões faciais, no entanto, recomendam que estas últimas atuem de forma a complementar os significados gerados pelas ações verbais. Para além do componente verbal, consideramos importante também o componente visual, expresso por representações envolvendo desenhos, gráficos, diagramas, figuras, tabelas, quadros, modelos e imagens (TRIANTAFILLOU; SPILIOTOPOULOU; POTARI, 2016).

A argumentação é também uma atividade social, isso porque envolve duas ou mais pessoas em um debate de ideias (VAN EEMEREN; GROOTENDORST, 2004). Toda via, o caráter social, pode ser caracterizado também no ato de pensamento individual na medida em que um sujeito realiza ponderações envolvendo os prós e os contras de um determinado assunto ou ideia. Nesse caso, ele argumenta consigo mesmo, contudo, prevê reações e contra-argumentos de possíveis interlocutores para os quais ele deseja convencer. Por fim configura-se como uma atividade racional porque envolve o emprego de raciocínio para desenvolver e defender um ponto de vista. O julgamento racional relaciona-se à avaliação da solidez do argumento no contexto de um debate ou discussão (VAN EEMEREN; GROOTENDORST, 2004).

A definição proposta por Van Eemeren e Grootendorst (2004) tem sido comumente utilizada na literatura educacional e "*envolve a construção de alegações, o fornecimento de provas para apoiar as alegações, e a avaliação destas provas para julgar a validade das alegações*" (AYALON; HERSHKOWITZ, 2018 p.164). Ela, portanto, situa a argumentação em um espaço social, e se incorporada ao discurso em sala de aula tem o potencial de viabilizar um espaço de articulação e avaliação crítica de ideias, reflexão, raciocínio e apoio a construção colaborativa do conhecimento (SCHWARZ; HERSHKOWITZ; PRUSAK, 2010; AYALON; HERSHKOWITZ, 2018; AYALON, 2019).

Este tipo de argumentação é considerada mais "frutífera" e propícia à aprendizagem (ASTERHAN; SCHWARZ, 2016). Ela é caracterizada por uma interação discursiva envolvendo dois ou mais alunos no exercício de uma escuta crítica e respeitosa envolvendo as ideias do outro, a tentativa de identificar os pontos fracos e fortes de cada ideia, a busca por ideias alternativas e o estabelecimento de um consenso (FELTON; GARCIA-MILA; GILABERT, 2009; MUELLER; YANKELEWITZ; MAHER, 2012; AYALON; HERSHKOWITZ, 2018; AYALON, 2019).

De acordo com Jiménez-Aleixandre e Brocos (2015) a argumentação, portanto, envolve um processo de interação discursiva marcado pelo contraste entre duas ou mais ideias (ou pontos de vista), ainda que uma destas esteja implícita. Essa divergência de pontos de vista constitui a base da argumentação (AMOSSY, 2011) e o desenvolvimento marcado pelo confronto e debate destas ideias em resposta a uma questão é o que Plantin (2008) denomina por uma situação argumentativa.

É importante destacar que dentro de uma situação argumentativa, uma argumentação "*não se desenrola no espaço abstrato da lógica pura, mas em uma situação de comunicação em que o locutor apresenta seu ponto de vista na língua natural com todos os seus recursos*" que dispõe (AMOSSY, 2011, p.132).

Nesse contexto, uma ação argumentativa envolve, portanto, a elaboração de um raciocínio embasado por evidências para justificar (formular) uma conclusão própria ou avaliar de forma crítica a conclusão do outro (JIMÉNEZ-ALEIXANDRE; BROCOS, 2015). O conhecimento, assim, é avaliado sob a luz de evidências empíricas ou teóricas e o raciocínio empregado na justificação de uma conclusão tem por finalidade o convencimento. Dessa forma, o objetivo da argumentação é convencer e a sua especificidade é "*por em ação um raciocínio em uma situação de comunicação*" (BRETON, 1999, p.7).

No intuito de refinar os conceitos subjacentes a prática da argumentação, Jiménez-Aleixandre e Brocos (2015, p.144) sugerem "*usar o termo argumento para o produto, o enunciado ou o resultado de um discurso razoado, e argumentação, o discurso argumentativo, para o processo dialógico social*". Ainda de acordo com estes autores, um argumento pressupõe minimamente a existência de dados (evidências), justificativa e conclusão (JIMÉNEZ-ALEIXANDRE; BROCOS, 2015).

Um argumento científico, portanto, é definido como uma proposição devidamente embasada por uma justificativa de natureza empírica ou teórica (JIMÉNEZ-ALEIXANDRE; ERDURAN, 2008 e MENDONÇA; JUSTI, 2013).

Para Asterhan e Schwarz (2016) a argumentação é um dos principais processos associados ao desenvolvimento de competências e habilidades que podem ajudar os alunos a lidar melhor com as novas exigências de uma sociedade cada vez mais diversa e complexa do século XXI. Estas competências e habilidades envolvem, pensamento crítico, flexibilidade de pensamento, autonomia, aprendizagem colaborativa, escuta ativa, resolução de problemas, comunicação e expressão de argumentos. A prática da argumentação desempenha, portanto, um papel essencial no desenvolvimento destas competências e habilidades nos estudantes (SCHWARZ; BAKER, 2017; AYALON, 2019).

Dentro das diversas áreas que compõem a atividade humana, o pensamento racional (pensamento crítico) não se satisfaz apenas com declarações vazias e sem nenhum tipo de embasamento, pelo contrário, ele avalia a solidez das relações que envolvem dados, conclusão e justificativas e em um segundo momento avalia a força e a verdade do argumento composto por estes elementos (SCARPA, 2015).

Ainda de acordo com Scarpa (2015) saber argumentar e avaliar argumentos são habilidades importantes em várias esferas sociais uma vez que contribuem para o indivíduo organizar o seu pensamento (raciocínio), avaliar ideias e tomar decisões importantes. É por meio da argumentação, por exemplo, que diversos segmentos da sociedade discutem pautas sociais e estabelecem consensos necessários para viabilizar uma vida em sociedade (SCARPA, 2015).

No contexto dessa pesquisa o interesse pela temática da "argumentação" surgiu durante as aulas da disciplina de Análise de Discurso ministrada pelo professor Doutor Marco Aurélio Alvarenga Monteiro junto ao programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência da Unesp campus Bauru. No âmbito da disciplina, o pesquisador teve a oportunidade de explorar e aprofundar suas leituras no estudo da Análise do Discurso voltado para a produção e análise de argumentos científicos em sala de aula. O vasto referencial teórico sobre o tema e a sua grande relevância para a área do ensino de ciências aguçou inicialmente a curiosidade do pesquisador em aprofundar o estudo da temática na área do Ensino da Matemática, haja visto que, nessa área de ensino o seu conhecimento estava restrito único e exclusivamente a argumentação enquanto produção de argumentos lógicos e formais.

Posteriormente, o interesse pela temática foi se tornando cada vez maior, na medida em que as pesquisas sobre o tema começaram a ganhar cada vez mais destaque por diferentes razões: contribui para o estabelecimento de competências e habilidades relevantes ao processo de justificação e formação de conceitos; potencializa a interação social no desenvolvimento do conhecimento; e ao nível do currículo, desenvolve a autonomia intelectual dos alunos (DOUEK; PICHAT, 2003).

Motivado e imerso no contexto da pesquisa referente ao assunto, o pesquisador sob a orientação do professor Dr. Marco Aurélio Alvarenga Monteiro desenvolveu um modelo teórico metodológico (RODRIGUES; MONTEIRO, 2021) para avaliar a qualidade (solidez) de um argumento utilizado para fins de justificação/ validação. No entanto o modelo teórico ainda que descrito e apresentado em publicação internacional não havia sido testado em uma situação prática de argumentação e prova em sala de aula. Diante deste contexto, portanto, esta pesquisa se justifica na medida em que pretende buscar subsídios teóricos e metodológicos para compreender, aprimorar e avaliar a prática da argumentação e prova em sala de sala de aula a partir da aplicação do modelo teórico desenvolvido e publicado por Rodrigues e Monteiro (2021).

O estudo, neste contexto, visa compreender em detalhes o fenômeno que envolve a argumentação enquanto processo e produto a partir da análise de três situações de argumentação envolvendo alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos. Em outras palavras, o objetivo consiste em investigar como alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos argumentam e avaliam seu desempenho durante o processo de justificação e validação de conceitos matemáticos em um contexto de ensino baseado em argumentação coletiva e investigação.

Para tanto, optamos pela realização de um estudo de caso, uma vez que o nosso objeto de estudo envolve a exploração de "**situações de argumentação coletiva envolvendo alunos ingressantes em um curso de formação de professores em matemática de uma instituição federal de ensino localizada no sul do estado de Minas Gerais durante a realização de uma investigação numérica**".

Investigar situações de argumentação coletiva em um curso de formação de professores em matemática é de extrema importância para o referido curso, uma vez que o projeto pedagógico não contempla elementos que fazem referência ao processo de argumentação na formação do futuro professor de matemática. Dessa forma, os resultados da investigação poderão em um futuro bem próximo fornecer subsídios teóricos visando a elaboração de ações propositivas para atender as eventuais necessidades de reformulação/atualização do projeto pedagógico do curso.

Em suma, os objetivos secundários decorrentes do objetivo principal são:

a) Investigar como os alunos ingressantes em um curso de licenciatura em matemática argumentam coletivamente para justificar e validar ideias e conjecturas matemáticas;
b) Identificar qual (is) estrutura (s) de argumentação global está (ão) presente (s) na argumentação coletiva e avaliar o raciocínio associado a esta (s) estrutura (s);
c) Investigar como os alunos ingressantes autoavaliam o seu desempenho durante a argumentação coletiva. Com base na autoavaliação, identificar quais competências e habilidades argumentativas são consideradas por eles como importantes/fundamentais/necessárias para a formação do professor que ensina matemática.

O que se espera, ao fim dessa investigação, é que o relato de caso, possa contribuir para formação de professores em matemática, oferecendo subsídios teóricos e metodológicos para a reflexão sobre a prática docente.

O estudo está estruturado em sete (7) capítulos, descritos suscintamente a seguir.

No capítulo 1, por meio de um estudo bibliométrico, é apresentado o cenário da produção científica internacional referente a temática. Neste capítulo foram levantados os principais “hot topics” de pesquisa na área com o objetivo de auxiliar o pesquisador no delineamento do problema de pesquisa e das questões de investigação.

Já no capítulo 2 é apresentado o estado do conhecimento da produção cientifica internacional (*corpus*: artigos científicos) envolvendo o tema argumentação no ensino da matemática.

Por sua vez, no capítulo 3, é apresentado o estado do conhecimento da produção científica nacional (*corpus:* dissertações e teses) envolvendo o mesmo tema. A partir dos resultados apresentados neste capítulo e nos capítulos anteriores foi possível delinear com exatidão o problema de pesquisa, os objetivos e as questões de investigação.

O capítulo 4 apresenta a primeira parte do referencial teórico da pesquisa, ou seja, a argumentação no contexto do ensino e aprendizagem da matemática. É explicitado distinções entre argumentação e argumento, o significado de argumentar coletivamente, a aprendizagem no contexto da argumentação coletiva bem como as competências e habilidades associadas ao processo argumentativo.

No capítulo 5, a segunda parte do referencial teórico da pesquisa é apresentado. O capítulo destaca, de modo especial, o conceito de prova explicativa (HANNA, 2000), o argumento de prova e a teoria de Nicolas Balacheff (1987;1988) sobre os tipos e níveis de prova em matemática.

A metodologia do estudo compõe o capítulo 6. Ela é apresentada estrategicamente após o referencial teórico do estudo uma vez que os procedimentos de análise a serem utilizados na leitura dos dados da investigação requerem uma fundamentação teórica nos aportes teóricos da literatura. Neste capítulo, portanto, é descrito os procedimentos metodológicos do estudo, a descrição do caso estudado, os participantes da pesquisa, os instrumentos utilizados para a coleta de dados bem como as estratégias de análise propostas construídas sob a luz do quadro teórico indicado nos capítulos 4 e 5.

Por fim, o capítulo 7 apresenta os resultados da pesquisa, analisados e discutidos sob a luz do quadro teórico descrito nos capítulos 4 e 5.

E nas considerações finais do estudo são apresentadas as reflexões finais sobre o caso investigado, as respostas às questões de pesquisa, as limitações do estudo, as possibilidades de investigações futuras e a conclusão final de todo o trabalho realizado.

Considerações finais

Este trabalho teve por objetivo investigar como alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática do IFSULDEMINAS, Campus Passos argumentam e avaliam seu desempenho durante o processo de justificação e validação de conceitos matemáticos em um contexto de ensino baseado em argumentação coletiva e investigação.

Para tanto realizamos um estudo de caso (exploratório/descritivo/explicativo) para compreender melhor o fenômeno que envolve "**três situações de argumentação coletiva**" em um contexto de ensino envolvendo argumentação coletiva (3 grupos) e investigação matemática. O estudo de caso foi estruturado em três fases. Na **1ª fase** realizamos uma pesquisa bibliográfica (estado do conhecimento) e uma pesquisa bibliométrica para estabelecer a definição do problema, os objetivos de pesquisa, a questão central de investigação bem como a seleção do referencial teórico da pesquisa. Já na **2ª fase** coletamos dados por meio de observação participante (documentada por meio de videogravação e notas de campo), recolha de registros escritos produzidos pelos grupos de trabalho e autoscopia operacionalizada pela dinâmica de grupo focal. Com a observação participante registramos todo o processo de argumentação coletiva realizada de modo oral e multimodal. Por meio da recolha dos registros escritos produzidos pelos grupos de trabalho documentamos toda a produção de argumentos gerados por escrito. E por último, com a autoscopia, propiciamos cada grupo de trabalho autoavaliar coletivamente o seu desempenho na argumentação. Na **3ª e última fase,** analisamos os dados com base na lente teórica da análise argumentativa (Toulmin, 1958; 2001) e da análise de conteúdo (Bardin, 1985). Com base na análise da estrutura do argumento (Toulmin, 2001) e nas estruturas globais de argumentação analisamos a anatomia do processo argumentativo buscando compreender como os alunos argumentam (raciocinam) para justificar conceitos e ideias matemáticas. Por outro lado, por meio da estrutura do argumento de Toulmin aliado as ideias de Nicolas Balacheff sobre os tipos e níveis de prova analisamos a fisiologia do argumento de prova enquanto produto final da argumentação para compreender como os alunos argumentam (raciocinam) para validar ideias matemáticas em problemas de prova. Por fim, aplicamos a análise de conteúdo nas transcrições das sessões de autoscopia para compreender como os alunos autoavaliam seu desempenho da prática da argumentação e quais competências e habilidades argumentativas são evidenciadas como importantes por estes alunos visando a formação do professor que ensina matemática.

Com base na análise da argumentação coletiva (oral, escrita, multimodal) realizada em torno da atividade de investigação numerica (5 problemas) os resultados obtidos são apresentados a seguir de modo a trazer as respostas para as questões de pesquisa.

1-Como alunos ingressantes na licenciatura em matemática argumentam para justificar conceitos e ideias matemáticas em um contexto de argumentação coletiva e investigação? Que estrutura (s) de argumentação global pode (m) ser identificada (s) para examinar o tipo de raciocínio empregado por estes alunos durante a argumentação?

No **problema 1** da atividade de investigação três estruturas globais de argumentação foram encontradas muito em função do tipo de apoio docente fornecido aos grupos. Tanto o grupo 1 quanto o grupo 2 contaram com um tipo de apoio docente bem semelhante e por consequência disso geraram estruturas globais de argumentação bem parecidas (Estrutura reservatório). A estrutura de reservatório é tida como a mais complexa dentre todas as estruturas citadas na literatura uma vez que o raciocínio do aluno retroage para frente e para trás promovendo deduções adicionais em direção a novas justificações para apoiar a conclusão. O apoio docente na orquestração do discurso corroborou para que esta estrutura fosse obtida. Por outro lado, o grupo 3 atuando de forma mais autônoma no processo de argumentação coletiva e sem contar com o mesmo tipo de apoio docente oferecido aos grupos 1 e 2, acabou, contudo, por gerar uma estrutura nova e não documentada na literatura. Esta foi descrita neste estudo como Estrutura Fonte Divergente. A explicação para o surgimento desta estrutura, portanto, se deve a natureza do problema proposto na atividade, ou seja, o problema permitia uma leitura subjetiva e diferente dos dados o que levou os alunos a obterem conclusões diferentes apoiados nos dados. A melhoria da qualidade do argumento de justificação, ou seja, a passagem da argumentação visual para a argumentação conceitual foi viabilizada pelo apoio docente para os grupos 1 e 2 e pela orientação inserida na atividade para o grupo 3. Para ambos os grupos, a aprendizagem durante a argumentação coletiva foi documentada em termos de mudanças na qualidade do argumento produzido pelos grupos como também através do processo de conversão das representações semióticas entre registros.

O **segundo problema** de investigação resultou em uma estrutura de argumentação semelhante para os três grupos, ou seja, a estrutura espiral. Contudo, a estrutura se diferenciou um pouco de um grupo para outro em função do número de fluxos paralelos existentes, ou seja, o número de soluções diferentes que os grupos conseguiram exibir. Os grupos 1 e 3 exibiram duas resoluções diferentes para justificar a sua conclusão para o problema. Por sua vez o grupo 2 exibiu três resoluções diferentes para justificar a sua conclusão. É importante ressaltar que a natureza do problema proposto (problema não estruturado) favoreceu a utilização de diferentes estratégias de justificação (resolução) da conclusão. Para além disso, o apoio do professor, na orquestração do discurso, especialmente solicitando aos grupos a exibição de outros métodos e estratégias de solução do problema corroborou também para o surgimento da estrutura espiral.

O raciocínio utilizado pelos grupos 2 e 3 durante a exibição das soluções geométricas e aritméticas como forma justificação para a conclusão do problema esteve associado a uma argumentação que transitou da produção de argumentos visuais para argumentos conceituais. No entanto, nas justificações produzidas pelo grupo 1, o raciocínio utilizado pelos alunos ficou restrito a produção de argumentos visuais a partir dos quais o material concreto (ficha e grãos de feijão) foi acionado a todo momento para auxiliar a argumentação. Nesse caso, a passagem da argumentação visual para a argumentação conceitual poderia ter sido viabilizada pelo docente, caso este tivesse solicitado aos alunos a elaboração de argumentos de justificação desprendidos do uso do material concreto. Para os grupos 2 e 3 a aprendizagem foi documentada pela mudança (evolução) na qualidade do argumento de justificação produzido pelos alunos. Em todos os grupos aprendizagem conceitual relativo ao tema proposto no problema foi documentado através dos variados processos de conversão das representações semióticas entre registros no âmbito de cada grupo no estudo do problema.

O **terceiro problema** resultou em uma estrutura de argumentação semelhante para os grupos 1 e 3, ou seja, a estrutura espiral. Contudo, a estrutura se diferenciou um pouco uma da outra em função do número de fluxos paralelos existentes, ou seja, o número de modos de provas exibidos por cada grupo a pedido do professor. A anatomia desta estrutura reflete, portanto, o apoio docente junto ao grupo, na medida em que ele avaliava os raciocínios utilizados nos modos de prova e solicitava aos alunos logo em seguida outros tipos de justificações mais generalistas. Por outro lado, sem contar com o apoio docente, a discussão ocorrida no âmbito do grupo 2 gerou uma estrutura anatômica linear. Isso ocorreu porque o grupo não solicitou apoio docente na avaliação do argumento produzido. Esta estrutura pode ser gerada também em situações em que o professor não participa da argumentação coletiva junto ao grupo e os alunos são livres para expressar o seu modo de prova. A aprendizagem foi documentada na evolução da qualidade dos argumentos produzidos durante a argumentação coletiva. Em particular, no âmbito do grupo 1 a argumentação visual evoluiu do nível concreto-visual para o nível visual-conceitual. Em relação ao grupo 2, os argumentos evoluíram de uma argumentação visual para uma argumentação conceitual e por fim no âmbito do grupo 3, a argumentação iniciou em um nível concreto-visual, transitou na sequência para uma argumentação visual a nível de teste crucial e por fim avançou para uma argumentação em um nível conceitual e racional.

O **quarto problema** de investigação resultou em três estruturas de argumentação distintas para cada grupo. A estrutura de argumentos independentes modelou a anatomia da argumentação do grupo 1 uma vez que o grupo, ainda que apoiado pelo professor, não conseguiu estabelecer uma resolução (conclusão) para o problema. Já a estrutura de linha representou a argumentação do grupo 2. O fato do professor não ter participado da discussão (oferecendo suporte e apoio) contribuiu para que a estrutura argumentativa gerada fosse mais simples, uma vez que os alunos apresentaram apenas uma única solução para o problema. Caso o apoio do professor tivesse sido requisitado, ou se ele tivesse acompanhado a discussão do grupo no momento da resolução da questão, provavelmente teria solicitado ao grupo outro tipo de justificação relacionada a outro modo de resolução do problema. Nessa situação, a estrutura poderia ter evoluído para uma estrutura espiral. Por fim, a estrutura espiral modelou geometricamente toda a argumentação no âmbito do grupo 3. O grupo conseguiu produzir duas estratégias de resolução para efeito de justificação da solução do problema. Isso foi devido ao apoio do professor que solicitou do grupo outra forma de resolução para o problema. Isso acabou contribuindo com o tipo e forma da estrutura gerada. A aprendizagem foi documentada no âmbito dos grupos 2 e 3, pela evolução na qualidade da argumentação que se iniciou com a produção de argumentos visuais e terminou com a elaboração de um argumento conceitual. Para tanto, o papel do professor foi importante para viabilizar esta transição, especialmente no âmbito da argumentação coletiva realizada pelo grupo 3. Ainda com relação a este último grupo a aprendizagem de conceitos foi documentada por meio da conversão das representações semióticas entre registros.

O **quinto problema** da atividade resultou em uma estrutura de argumentos independentes e duas estruturas fonte. A estrutura de argumentos independentes surgiu no contexto em que o grupo 1 não conseguiu resolver o problema de prova proposto. Por sua vez a estrutura fonte surgiu no contexto de argumentação dos grupos 2 e 3. O grupo 2, partindo de um caso empírico de referência, conseguiu desenvolver uma argumentação essencialmente conceitual ao longo de toda a situação argumentativa. Apoiados pelo professor em melhorar a justificação empreendida, o grupo desenvolveu uma etno-argumentação que transitou de uma explicação conceitual e geral na linguagem informal para uma explicação conceitual e geral na linguagem matemática. Por outro lado, no âmbito do grupo 3, a argumentação se baseou em argumentos essencialmente empíricos para viabilizar sem sucesso uma generalização o que tornou a prova apresentada não probatória. O professor ofereceu apoios ao grupo na tentativa de melhorar o argumento de prova, contudo, o grupo não conseguiu avançar na discussão em direção a uma argumentação conceitual e mais generalista. A aprendizagem de prova foi documentada apenas para o contexto de argumentação envolvendo o grupo 2, uma vez que o grupo mostrou evolução na qualidade do argumento produzido. Em outras palavras, contando com o apoio docente, o argumento de prova conceitual contemplou uma generalização que evoluiu da linguagem corrente (informal) para a linguagem matemática, sem, contudo, envolver rigor e forma característicos do argumento analítico.

De modo geral os grupos 2 e 3 conseguiram na maioria das questões desenvolver uma argumentação que evoluiu de justificações com base no visual para justificações conceituais e racionais. Por outro lado, o grupo 1 teve dificuldades em produzir argumentos de justificação conceitual. Em todas as situações de argumentação, o material didático concreto auxiliou no surgimento da argumentação visual e a transição desta para a argumentação conceitual esteve na maioria das vezes ligadas ao apoio docente durante a argumentação. Destacamos nesta parte dos resultados o surgimento de uma nova estrutura de argumentação global não documentada na literatura e descrita por nós como “estrutura fonte divergente”.

Para o contexto de formação de professores os resultados mostraram a importância da aprendizagem de conceitos matemáticos se dar a partir de uma dinâmica de trabalho em grupo em um contexto de ensino envolvendo argumentação coletiva e investigação matemática. Por meio dos resultados obtidos, foi possível verificar que a natureza da atividade (investigação) proposta, os problemas (não estruturados) utilizados, a metodologia proposta (argumentação coletiva) e o material concreto (MD) utilizado como recurso didático contribuíram para viabilizar e fomentar inicialmente a produção de argumentos empírico-visuais. Estes argumentos por sua vez evoluíram para argumentos conceituais muito em função do apoio fornecido pelo professor (solicitando generalizações) durante a sua participação na argumentação coletiva como também através do roteiro de colaboração inserido na atividade. Este resultado, reforça também, a necessidade de os cursos de formação de professores, investirem em pesquisa e planejamento de práticas metodológicas semelhantes a que foi apresentada, uma vez que estas são capazes de viabilizar a complexa passagem/transição do argumento empírico para o argumento conceitual.

2-Como alunos ingressantes na licenciatura em matemática argumentam para validar conceitos e ideias matemáticas em um contexto de argumentação coletiva e investigação?

No que tange a produção e avaliação do argumento de prova inserido no **problema 3** da atividade, os resultados revelaram ainda que os alunos do grupo 1 produziram dois tipos prova empírica (prova pragmática) para validar o problema. Ambos os tipos de prova foram considerados não probatórios, contudo, ao menos o segundo tipo de prova produzida representou um avanço no aprendizado de prova para os alunos do grupo uma vez que eles transitaram de nível inferior de “empirismo ingênuo” no primeiro modo de prova pragmática para um nível superior “exemplo genérico” no segundo modo de prova pragmática. Por sua vez o grupo 2, obteve melhor êxito, na medida em que conseguiu produzir um tipo de prova conceitual em um nível de experiência mental. O raciocínio do grupo partiu de um caso particular de referência, se desprendeu da contextualização em torno do objeto durante a descrição da garantia, apresentando por fim um argumento de validação com uma descrição genérica, explicativa, probatória e expressa por meio da linguagem informal. Por fim o grupo 3, apresentou três modos de prova que no decorrer do processo foram evoluindo. Do primeiro modo de prova para o segundo modo, o grupo transitou de uma prova pragmática no nível de "empirismo ingênuo" para uma prova pragmática no nível "experimento crucial". E na sequência, no terceiro modo de prova, apresentaram por fim uma prova conceitual no nível de "experiência" mental. A evolução no modo de prova, se deu muito por conta do apoio fornecido pelo professor aos grupos, principalmente quando este avaliava as provas produzidas pelos alunos e incentivava os mesmos a melhorarem a explicação promovendo generalizações. Apenas os grupos 2 e 3 conseguiram produzir uma prova sólida de qualidade, ou seja, um argumento de prova forte e bem elaborado.

Com relação a produção e avaliação do argumento de prova inserido no **problema 5** da atividade, os resultados revelaram que apenas os grupos 2 e 3 foram capazes de apresentar provas na tentativa de validar o problema proposto. Em particular o grupo 2 produziu uma prova conceitual no nível de "experiencia mental". A prova atingiu satisfatoriamente a função de "provar e explicar" dentro de um contexto de etno-argumentação em sala de aula. Durante a sua produção pelo grupo, a generalização evoluiu da linguagem corrente (informal) para a linguagem matemática. Já o grupo 3 produziu uma prova empírica (pragmática) no nível de "empirismo ingênuo" para validar o processo de conversão. A prova foi recusada pelo professor uma vez que a considerou não probatória. Ele incentivou o grupo a produzir uma outra prova mais genérica para explicar o processo de conversão, no entanto, o grupo não avançou na discussão, talvez por terem se sentido convencidos com a prova produzida. Apenas o grupo 2 conseguiu produzir uma prova sólida e de qualidade, ou seja, um argumento de prova forte e bem elaborado.

De modo geral apenas o grupo 2 foi capaz de obter êxito nos dois problemas de prova, mantendo a qualidade (solidez) do argumento de prova como forte e bem elaborado. O grupo 1 não foi capaz de produzir uma prova probatória em nenhum momento. Já o grupo 3 evoluiu na qualidade da prova produzida (argumento fraco e pouco elaborado para argumento forte e bem elaborado) para o problema 3, no entanto, não foi capaz de produzir uma prova probatória para o problema 5. O apoio docente foi importante para a evolução do argumento de prova.

No contexto da formação de professores, o estudo mostrou a importância do professor de matemática conhecer os vários tipos de prova em matemática e as suas diferentes possibilidades de etnoargumentação no contexto de sala de aula. Os resultados mostraram o quanto é importante em um primeiro momento o professor identificar o nível de prova dos alunos com base no primeiro modo de prova elaborado por eles durante o trabalho em grupo. Posteriormente, tomando como ponto de partida este primeiro modo de prova elaborado pelo grupo, o estudo mostrou a importância da intervenção do professor junto ao grupo, participando ativamente da argumentação coletiva, promovendo reflexões e incentivando os alunos a realizarem raciocínios generalizadores de modo a produzirem colaborativamente provas conceituais em diferentes níveis de etnoargumentação. A participação ativa do professor durante a argumentação coletiva, avaliando e reavaliando os argumentos de validação, considerando o que é probatório e não probatório, bem como solicitando generalizações junto ao grupo, constituiu por meio deste estudo uma estratégia interessante e eficaz para minimizar a tensão envonvendo a complexa passagem/transição da prova empírica para a prova conceitual/formal.

A estrutura de avaliação do argumento de prova proposto por Rodrigues e Monteiro (2021) foi testada pela primeira vez neste estudo. Diante dos resultados obtidos ela se mostrou útil para avaliar a qualidade (solidez) do argumento de prova produzido a partir da classificação dos componentes do argumento de prova. Em particular no contexto deste estudo, não houve nenhum tipo de dado que pudesse ser classificado como bibliográfico, no entanto, os resultados apontaram para a necessidade de a estrutura incorporar uma terceira classificação para os tipos de dados, ou seja, “o dado genérico”. Em nenhum momento da análise foi reportado dados que fizesse referência a qualificadores modais durante a produção dos argumentos de prova.

No contexto da formação de professores, o modelo de avaliação do argumento de prova proposto por Rodrigues e Monteiro (2021), em decorrência dos resultados encontrados neste estudo, se apresenta, portanto, como uma ferrametne útil para ser explorada e utilizada pelo professor de matemática para avaliar a qualidade do argumento de prova para fins de validação na Educação Básica. O modelo desenvolvido pelo autor pode ser utilizado como um instrumento eficaz para avaliar o nível de competência e habilidade do (s) aluno (s) da Educação Básica no que tange a proficiência da prática argumentativa para fins de prova.

3) Como os alunos investigados autoavaliam o seu desempenho na prática de argumentação coletiva?

De modo geral, a autoavaliação do processo argumentativo pelos grupos corroborou para um exercício de prática reflexiva por meio do qual os alunos destacaram estar diante de uma abordagem nova e desconhecida por eles. No entanto, em meio as dificuldades (conteúdo e metodologia), eles conseguiram colaborativamente atingir um aprendizado conceitual e desenvolver competências e habilidades relacionadas a proficiência da prática de argumentação e prova em sala de aula. De modo particular o grupo 1 ressaltou a importância de a atividade de investigação conter problemas abertos com diferentes possibilidades de resolução como forma de fomentar a investigação e argumentação em sala de aula. Para eles o conhecimento prévio do assunto é fundamental para que se possa sustentar uma argumentação durante o debate. O grupo 2, por sua vez ressaltou o uso do material concreto utilizado na atividade para viabilizar a argumentação bem como a aprendizagem por meio do concreto e visual. Por fim, o grupo 3 também destacou o uso do material concreto na atividade para estimular o raciocínio e fomentar a argumentação. Para além disso o grupo também ressaltou o apoio do professor para que os alunos pudessem construir argumentos de melhor qualidade.

4) Com base na autoavaliação dos alunos, que competências e habilidades argumentativas são explicitadas como importantes para a formação do professor que ensina matemática?

Diante da experiencia de argumentação coletiva experienciada e do exercício de refletir coletivamente sobre esta prática, emergiu, portanto, da autoavaliação dos grupos um conjunto de competências e habilidades argumentativas que os alunos declararam terem tido dificuldades, contudo, foram tidas como importantes/necessárias/fundamentais para a formação do professor que ensina matemática. **1- Competências e habilidades argumentativas ligadas ao componente social discursivo:** Realizar escuta ativa, respeitar as ideias do colega, discutir ideias, avaliar, questionar e contestar as ideias do parceiro de aprendizagem, pensar juntos, expressar com clareza na comunicação das ideias, elaborar e reelaborar as ideias a partir das ideias do colega; construir argumentos a partir das ideias do parceiro de aprendizagem; ter autocontrole para gerenciar e superar situações de desacordos e conflitos para estabelecer o consenso, validar resultados coletivamente e colaborativamente, ter atenção para não perder o foco na discussão. **2- Competências e habilidades argumentativas ligadas ao componente específico matemático:** Ter conhecimento prévio do assunto para sustentar a discussão/argumentação; elaborar conjecturas; testar; refutar; reformular conjecturas; justificar; provar; compreender o tipo de prova válida, estabelecer a verdade por meio da prova, compreender o que conta como verdadeiro no campo, argumentar com base no conteúdo, propor diferentes estratégias de justificação de uma conjectura, expressar matematicamente por escrito o que foi pensado.

No que tange a formação do professor que ensina matemática, o estudo mostrou que o o desenvolvimento destas competências e habilidades ligadas à proficiência da prática de argumentação e prova foram desenvolvidas e potencializadas por meio da dinâmica de argumentação coletiva em grupo, contando com o apoio do professor nas discussões bem como o suporte do material didático concreto em uma atividade de investigação contendo problemas não estruturados.

Com relação as limitações deste estudo, o modelo que envolve as estruturas globais de argumentação não contempla em seu layout as contribuições individuais de alunos e professor para a argumentação coletiva. Nesse sentido, trabalhos futuros poderão ser realizados no intuito de testar uma implementação diagramática de cores diferentes para cada componente do argumento e associá-las a participação individual de cada sujeito envolvido na prática de argumentação coletiva. Outra limitação deste modelo envolve a impossibilidade de representar os fluxos de argumentação na linha do tempo em que eles ocorrem em sala de aula, ou seja, o modelo desvaloriza o momento em que um determinado argumento é introduzido na estrutura.

Neste contexto, sugerimos para efeito de trabalhos futuros, um estudo comparativo sobre a natureza das estruturas de argumentação global em um contexto de ensino que avalie o surgimento e a complexidade destas estruturas ao longo de atividades experimentais presenciais, virtuais e remotas.

Com relação ao modelo utilizado para avaliar a qualidade (solidez) do argumento de prova produzido pelos alunos, ele foi testado pela primeira vez neste estudo e os resultados mostraram a compatibilidade do modelo para avaliar e classificar os componentes do argumento de prova, exceto os qualificadores modais, uma vez que estes não foram identificados durante o processo de argumentação coletiva neste estudo. A única não conformidade encontrada na avaliação deste modelo foi a impossibilidade de classificar um tipo de dado que apareceu no contexto da nossa pesquisa, ou seja, o dado genérico. Nesse sentido, mais estudos podem ser realizados no intuito de avaliar a compatibilidade do modelo a outros contextos de ensino bem como avaliar a possibilidade de ampliação das categorias propostas para cada componente do argumento.

Na perspectiva das práticas educacionais inclusivas, ressaltamos a necessidade de trabalhos futuros que contemplem o desenvolvimento de estruturas (modelos) de argumentação e prova que leve em consideração a captação e avaliação de argumentos produzidos por modos de argumentação não escritos e orais. Esta discussão não está presente na literatura de pesquisa.

Por meio do estudo de caso envolvendo alunos ingressantes em um curso de formação de professores examinamos com detalhes toda a anatomia do processo de argumentação em um contexto de ensino que envolve argumentação coletiva e investigação matemática. Os resultados indicaram que as estruturas de argumentação global variavam em sua complexidade muito em função do apoio docente que é oferecido a argumentação como também em função da natureza do tipo de problema proposto. Neste contexto global, as argumentações de uma maneira geral, evoluíram do campo visual de justificação para o campo conceitual e o material concreto utilizado na atividade viabilizou essa transição. Por outro lado, examinamos em detalhes toda a fisiologia e qualidade (solidez) do argumento de prova utilizado para fins de validação. Os resultados mostraram que os alunos investigados tiveram dificuldades em produzir provas conceituais, contudo essa dificuldade é minimizada quando o professor oferece apoio solicitando generalizações. Quando chamados a refletirem e realizarem uma autoavaliação do desempenho deles na prática da argumentação coletiva, os alunos destacaram a possibilidade de em colaboração com os colegas melhorar o aprendizado e desenvolver competências e habilidades relacionadas a proficiência da prática de argumentação e prova em sala de aula. Neste último caso, os alunos citam uma relação de competências e habilidades argumentativas relacionados aos componentes “social-discursivo” e “individual-matemático” nos quais eles avaliam ser importantes para a formação do professor que ensina matemática.

Avaliar a argumentação e prova em sala de aula é uma questão complexa. Perspectivas de pesquisas passadas nos ajudaram a entender alguns dos dilemas e desafios de envolver os alunos em uma atividade de argumentação e prova em sala de aula. Complementar estes pontos de vista com análises baseadas em modelos e métodos originais neste estudo foi promissor e nos permitiu ampliar o conhecimento na área.

REFERÊNCIAS

ALBANO, G.; DELLO IACONO, U. A scaffolding toolkit to foster argumentation and proofs in mathematics: some case studies. **International Journal of Educational Technology in Higher Education**, v. 16, n. 1, 1 dez. 2019.

ALMEIDA. J. C. P. de. **Argumentação e prova na matemática escolar do ensino básico:** a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. 2007. 221 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ALMEIDA, W. N. C.; MALHEIRO, J. M. S. A argumentação e a experimentação investigativa no ensino de matemática. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 11, n. 2, p. 57-83, nov. 2018.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. **O método nas ciências sociais**. São Paulo: Editora Pioneira, 1998.

AMOSSY, R. Argumentação e análise do discurso: perspectivas teóricas e recortes disciplinares. **Revista Eletrônica de Estudos Integrados em Discurso e Argumentação**, v. 0, n. 1, p. 129–144, 2011.

ANDRIESSEN, J.; BAKER, M.; SUTHERS, D. D. Argumentation, computer support, and the educational context of confronting cognitions. In: ANDRIESSEN, J.; BAKER, M.; SUTHERS, D. D. (Eds.). . **Arguing to learn: Confronting cognitions in computer-supported collaborative learning environments**. New York: Springer, 2003. p. 1–25.

ARAUJO, I. B. de. **Uma abordagem para a prova com construções geométricas e Cabri-géomètre**. 2007. 291 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ASTERHAN, C. S. C.; SCHWARZ, B. B. Argumentation and explanation in conceptual change: Indications from protocol analyses of peer-to-peer dialog. **Cognitive Science**, v. 33, n. 3, p. 374–400, 2009.

ASTERHAN, C. S. C.; SCHWARZ, B. B. Argumentation for Learning: Well-Trodden Paths and Unexplored Territories. **Educational Psychologist**, v. 51, n. 2, p. 164–187, 2016.

AYALON, M. Exploring changes in mathematics teachers' envisioning of potential argumentation situations in the classroom. **Teaching and Teacher Education**, v. 85, p. 190–203, 1 out. 2019.

AYALON, M.; HERSHKOWITZ, R. Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 49, p. 163–173, 1 mar. 2018.

AZEVEDO, S. A. A. **O desafio de argumentar nas aulas de Matemática:** uma investigação com estudantes do 1º ano do Ensino Fundamental. 2019. 259 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 18, n. 2, p. 147–176, 1987.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics (ODD). **Mathematics, teachers, and children**, p. 215–235, 1988.

BARBOSA, E. S. de S**. Argumentação e prova no ensino médio:** análise de uma coleção didática de matemática. 2007. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1985.

BARTO, M. C. A. L. **Um olhar sobre as ideias matemáticas em um curso de cálculo:** a produção de significados para a continuidade. 2004. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

BASTOS, C. L.; KELLER, V. **Aprendendo a aprender**. 6 edição ed. Petrópolis: Vozes, 1995.

BAUER, M. .; GASKELL, G. **Pesquisa Qualitativa com texto, imagem e som: um manual prática**. 7. ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

BERLAND, L. K.; MCNEILL, K. L. A learning progression for scientific argumentation: Understanding student work and designing supportive instructional contexts. **Science Education**, v. 94, n. 5, p. 765–793, 2010.

BERLAND, L. K.; REISER, B. J. Making sense of argumentation and explanation. **Science Education**, v. 93, n. 1, p. 26–55, 2009.

BIANCHI, C. **A lógica no desenvolvimento da competência argumentativa**, 2007. 206f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

BICUDO, I. Demonstração em Matemática. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, v. 15, n. 18, p. 79–90, 2002.

BOAVIDA, A. M. R. **A argumentação em Matemática Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração**. 2005. 975f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2005.

BOAVIDA, A.M.R.; PAIVA, A. L.; CEBLA, G.; VALE, I.; PIMENTEL, T. **A experiências matemática no ensino básico**: Programa de formação contínua em matemática para professores dos 1º e 2º ciclos do ensino básico. Lisboa: Ministério da Educação, 2008.

BOERO, P. Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. **Prueba: International Newsletter on the Teaching and Learning of Proof**, p. 1–6, 1999.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. et al. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BOZELLI, F. C.; TEIXEIRA, O. P. B. **Contextos argumentativos e discursivos no ensino de Ciências**. 1. ed. São Paulo: Espelho D'alma, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão; Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. **Base Nacional Comum Curricular**. 2017.

BRESOLIN, N. R. Q. **Geometria sintética**: investigação sobre o uso de um software de geometria dinâmica como meio para demonstrações visuais. 2016. 108f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria – RS.

BRETON, P. **A argumentação na comunicação**. Bauru: EDUSC, 1999.

CAMPOS, R. R. **Argumentação e demonstração dos alunos do Ensino Médio:** uma proposta de investigação matemática sobre crescimento e decrescimento de funções afins. 2018. 94f. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Matemática) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

CAPONE, R. et al. Mathematical competencies: a case study on semiotic systems and argumentation in an Italian High School. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 2020.

CARPES, A. D. M.; SCHERER, F. L.; BEURON, T. A. PANORAMA INTERNACIONAL DAS PUBLICAÇÕES EM MARKETING E Hot Topics RELACIONADOS. **Estudo & Debate**, p. 29–40, 2011.

CARVALHO, M. B. de. **Concepções de alunos sobre provas e argumentos matemáticos:** análise de questionário no contexto do Projeto AProvaME. 2007. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

CERVANTES-BARRAZA, J. A.; HERNANDEZ MORENO, A.; RUMSEY, C. Promoting mathematical proof from collective argumentation in primary school. **School Science and Mathematics**, v. 120, n. 1, p. 4–14, 1 jan. 2020.

CIVIL, M.; HUNTER, R. Participation of non-dominant students in argumentation in the mathematics classroom. **Intercultural Education**, v. 26, n. 4, p. 296–312, 4 jul. 2015.

CONNER, A. M. et al. Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. **Educational Studies in Mathematics**, v. 86, n. 3, p. 401–429, 2014.

COSTA, V. M. **Argumentações matemáticas sob uma perspectiva crítica:** análise de práticas didáticas no ensino fundamental. 2017. 123f. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Matemática) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

CRUZ, F. P. da. **Argumentação e prova no ensino fundamental:** análise de uma coleção didática de matemática. 2008. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

DA ROCHA, A. C. et al. Recursos Hídricos e Gestão: Um estudo bibliométrico da produção científica e dos hot topics publicados na base Web of Science na última década. **Espacios**, v. 34, n. 5, p. 1–16, 2013.

DEDE, A. T. Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 50, n. 2, p. 292–314, 2019.

DEMIRAY, E.; IŞIKSAL BOSTAN, M. An Investigation of Pre-service Middle School Mathematics Teachers' Ability to Conduct Valid Proofs, Methods Used, and Reasons for Invalid Arguments. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 15, n. 1, p. 109–130, 1 jan. 2017.

DIAS, C. A. Grupo focal: técnica de coleta de dados em pesquisas qualitativas. **Informação & Sociedade: estudos**, v. 10, n. 2, p. 141–158, 2000.

DOGRUER, S. S.; AKYUZ, D. Mathematical Practices of Eighth Graders about 3D Shapes in an Argumentation, Technology, and Design-Based Classroom Environment. **International Journal of Science and Mathematics Education**, 2020.

DOMINGUES, H. H. A Demonstração ao Longo dos Séculos. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, v. 15, n. 18, p. 55–67, 2002.

DORO, A. T. **Argumentação e prova: análise de argumentos geométricos de alunos da educação básica.** 2007. 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. 227.

DOUEK, N.; PICHAT, M. From oral to written texts in grade I and the approach to mathematical argumentation. **Proceedings of PME-XXVII**, v. 2, p. 341-348, Honolulu, 2003.

DRIVER, R.; NEWTON, P.; OSBORNE, J. Establishing the norms of scientific argumentation in classrooms. **Science Education**, v. 84, n. 3, p. 287–312, 2000.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, n. 1–2, p. 103–131, 2006.

EDUARDO, A. C. **Contextos para argumentar:** uma abordagem para iniciação a prova no EM utilizando P.A. 2007. 213 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ELLIS, A. B. et al. Middle school students' example use in conjuecture exploration and justification. **34th Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology Of Mathematics Education**, n. April 2014, p. 135–142, 2012.

ERKEK, Ö.; BOSTAN, M. I. A different look at the reasoning process of prospective middle school mathematics teachers: Global argumentation structures. **Egitim ve Bilim**, v. 44, n. 199, p. 1–27, 2019.

ERKEK, Ö.; IŞIKSAL BOSTAN, M. Prospective Middle School Mathematics Teachers' Global Argumentation Structures. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 17, n. 3, p. 613–633, 15 mar. 2019.

EVANGELISTA, E.M. **A educação matemática na revista Nova Escola.** 2008. 65f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e o Ensino da Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2008.

FARIA, R. **Elaborando e lendo gráficos cartesianos que expressam movimento:** uma aula utilizando sensor e calculadora gráfica. 2007. 119 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FELTON, M.; GARCIA-MILA, M.; GILABERT, S. Deliberation versus Dispute: The Impact of Argumentative Discourse Goals on Learning and Reasoning in the Science Classroom. **Informal Logic**, v. 29, n. 4, p. 417, 2009.

FERREIRA FILHO, J. L. **Um estudo sobre argumentação e prova envolvendo o teorema de Pitágoras.** 2007. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FERRÉS, J. **Vídeo e educação.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

FIALLO, J.; GUTIÉRREZ, A. Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 2, p. 145–167, 2017.

FIGUEIRA, M. J. S.; NARDI, R. A argumentação no ensino de Ciências: perspectivas teóricas, apontamentos metodológicos e atividades didáticas sobre o tema. In: BOZELLI, F. C.; TEIXEIRA, O. P. B. (Eds.). . **Contextos argumentativos e discursivos no ensino de Ciências**. 1ª ed. São Paulo: Espelho D’alma, 2019. p. 318.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. **Educational Studies in Mathematics**, v. 24, n. 2, p. 139–162, 1993.

FLICK, U. **Introdução à Metodologia de Pesquisa: um guia para iniciantes**. Porto Alegre: Penso, 2013.

FREEMAN, J. B. Systematizing Toulmin’s warrants: An epistemic approach. **Argumentation**, v. 19, n. 3, p. 331–346, 2005.

GOODE; HATT, K. **Métodos em Pesquisa Social**. São Paulo: Editora Nacional, 1968.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. [s.l: s.n.].

GRINKRAUT, M. L**. Formação de professores envolvendo a prova matemática:** um olhar sobre o desenvolvimento profissional. 2009. 349 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

HANNA, G. Some pedagogical aspects of proof. **Interchange**, v. 21, n. 1, p. 6–13, 1990.

HANNA, G. Proof, explanation and exploration: An overview. **Educational Studies in Mathematics**, v. 44, n. 1–3, p. 5–23, 2000.

HANNA, G.; DE VILLIERS, M. ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, v. 40, n. 2, p. 329–336, 2008.

HEINTZ, B. **Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin**. Wien: Springer, 2000.

HEINZE, A.; REISS, K.; RUDOLPH, F. Mathematics achievement and interest in mathematics from a differential perspective. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, v. 37, n. 3, p. 212–220, 2005.

HILBERT, T. S. et al. Learning to prove in geometry: Learning from heuristic examples and how it can be supported. **Learning and Instruction**, v. 18, n. 1, p. 54–65, 2008.

HUANG, Y. et al. Rehabilitation using virtual reality technology: a bibliometric analysis, 1996–2015. **Scientometrics**, v. 109, n. 3, p. 1547–1559, 2016.

INGLIS, M.; MEJIA-RAMOS, J. P.; SIMPSON, A. Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. **Educational Studies in Mathematics**, v. 66, n. 1, p. 3–21, 2007.

JAMELLI, S. M. **Abordagens no ensino da prova e argumentação escolar:** análise de uma coleção de livros didáticos do ensino fundamental. 2007. 117 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

JIMÉNEZ-ALEIXANDRE, M. P.; BROCOS, P. Desafios Metodológicos Na Pesquisa Da Argumentação Em Ensino De Ciências. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, v. 17, n. spe, p. 139–159, 2015.

JIMÉNEZ-ALEIXANDRE, M. P.; BUGALLO RODRÍGUEZ, A.; DUSCHL, R. A. “Doing the lesson” or “doing science”: Argument in high school genetics. **Science Education**, v. 84, n. 6, p. 757–792, 2000.

JIMÉNEZ-ALEIXANDRE, M. P.; ERDURAN, S. Argumentation in science education: An overview. In: ERDURAN, S.; JIMÉNEZ-ALEIXANDRE, M. P. (Eds.). . **Argumentation in science education: Perspectives from classroom-based research**. Dordrecht: Springer., 2008. p. 3–27.

KELLY, G. J. Inquiry, activity and epistemic practice. In: DUSCHL, R.; GRANDY, R. (Eds.). . **Teaching Science Inquiry: Recommendations for Research and Implementation**. Holanda: Rotterdan Sense Publishers, 2008. p. p.99-117.

KNIPPING, C. A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, v. 40, n. 3, p. 427–441, 2008.

KOEDINGER, K. R. Conjectura e argumentação em alunos de geometria do ensino médio. In: LEHRER, R. (Ed.). . **Projetando ambientes de aprendizagem para o desenvolvimento da**

compreensão da geometria e do espaço. Mahwah: NJ: Erlbaum, 1998. p. 319–347.

KOLLAR, I. et al. Effects of collaboration scripts and heuristic worked examples on the acquisition of mathematical argumentation skills of teacher students with different levels of prior achievement. **Learning and Instruction**, v. 32, p. 22–36, ago. 2014.

KOLLAR, I.; FISCHER, F.; HESSE, F. W. Collaboration scripts - A conceptual analysis. **Educational Psychology Review**, v. 18, n. 2, p. 159–185, 2006.

KOLLAR, I.; FISCHER, F.; SLOTTA, J. D. Internal and external scripts in computer-supported collaborative inquiry learning. **Learning and Instruction**, v. 17, n. 6, p. 708–721, 2007.

KOSKO, K. W. Making use of what's given: Children's detailing in mathematical argumentative writing. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 41, p. 68–86, 1 mar. 2016.

KOSKO, K. W.; ROUGEE, A.; HERBST, P. What actions do teachers envision when asked to facilitate mathematical argumentation in the classroom? **Mathematics Education Research Journal**, v. 26, n. 3, p. 459–476, 2014.

KOSKO, K. W.; ZIMMERMAN, B. S. Emergence of argument in children's mathematical writing. **Journal of Early Childhood Literacy**, v. 19, n. 1, p. 82–106, 1 mar. 2019.

KRUMMHEUER, G. The ethnography of argumentation. In: COBB, P.; BAUERSFELD, H. (Eds.). . **The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures**. Hillsdale: Erlbaum, 1995. p. 229–269.

KRUMMHEUER, G. The relationship between diagrammatic argumentation and narrative argumentation in the context of the development of mathematical thinking in the early years. **Educational Studies in Mathematics**, v. 84, n. 2, p. 249–265, 2013.

KUHN, D. **The Skills of Argument**. New York: Cambridge University, 1991.

LAKATOS, I. **A Lógia do Descobrimento Matemático: Provas e refutações**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LARROSA, Jorge. Notas sobre a experiência e o saber da experiência. **Revista Brasileira de Educação.** São Paulo: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, n.19,jan./abr, p.20-28, 2002.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1999.

LEANDRO, E. J. **Um panorama de argumentação de alunos da educação básica:** O caso do fatorial. 2006. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

LEITÃO, S. The potential of argument in knowledge building. **Human Development**, v. 43, p. 332–360, 2000.

LEITÃO, S. **Argumentação e desenvolvimento do pensamento reflexivo.** Psicologia: Reflexão e Crítica, v. 20, n.3, 2007, p. 454-462.

LIMA, P. J. dos S. **Prática argumentativa no ensino de matemática:** contribuições para o processo de resolução de problemas verbais. 2018. 305f. Tese (Doutorado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2018.

LIN, Y.; DURBIN, J. M.; RANCER, A. S. Perceived instructor argumentativeness, verbal aggressiveness, and classroom communication climate in relation to student state motivation and math anxiety. **Communication Education**, v. 66, n. 3, p. 330–349, 2017.

LITHNER, J. A research framework for creative and imitative reasoning. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, n. 3, p. 255–276, 2008.

LUDKE, M.; ANDRE, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MAKAR, K.; BAKKER, A.; BEN-ZVI, D. Scaffolding norms of argumentation-based inquiry in a primary mathematics classroom. **ZDM - Mathematics Education**, v. 47, n. 7, p. 1107–1120, 1 nov. 2015.

MALHEIRO, J.M.S. **Panorama da educação fundamental e média no Brasil:** o modelo da Aprendizagem Baseada em Problemas como experiência na prática docente. Dissertação de mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas – Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

MARCOS LUIZ LOURENÇO. A Demonstração com Informática Aplicada a Educação. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, v. 15, n. 18, p. 100–111, 2002.

MARIOTTI, M. A.; BALACHEFF, N. Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, v. 40, n. 3, p. 341–344, 2008.

MARIOTTI, M. A.; FISCHBEIN, E. Defining in classroom activities. **Educational Studies in Mathematics**, v. 34, n. 3, p. 219–248, 1997.

MARTIN, L. C.; TOWERS, J. Improvisational coactions and the growth of collective mathematical understanding. **Research in Mathematics Education**, v. 11, n. 1, p. 1–19, 2009.

MARTINS, P.R.G.M.V. **Matemática sem Números:** uma proposta de atividades para o estudo da Lógica. 2014. 82f. Dissertação (Mestrado profissional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.

MENDES, L. J. **Uma análise da abordagem sobre argumentações e provas numa coleção do ensino médio**. 2007. 92 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. 228

MENDONÇA, P. C. C.; JUSTI, R. DA S. Ensino-Aprendizagem de Ciências e Argumentação: Discussões e Questões Atuais. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 13, n. 1, p. 187–216, 2013.

MERCIER, H.; HEINTZ, C. Scientists' Argumentative Reasoning. **Topoi**, v. 33, n. 2, p. 513–524, 2014.

MONTEIRO, M. A. A.; TEIXEIRA, O. P. . B. An analysis of the dialogical interactions science in classes of the primary school. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 9, n. 3, p. 243–263, 2004.

MONTEIRO, M. A. A.; TEIXEIRA, O. P. . B. Contextos argumentativos e processos interativos em sala de aula. In: BOZELLI, F. C.; TEIXEIRA, O. P. B. (Eds.). . **Contextos argumentativos e discursivos no ensino de Ciências**. 1. ed. São Paulo: Espelho D'alma, 2019. p. 27–44.

MUELLER, M.; YANKELEWITZ, D.; MAHER, C. A framework for analyzing the collaborative construction of arguments and its interplay with agency. **Educational Studies in Mathematics**, v. 80, n. 3, p. 369–387, 2012.

NARDI, E.; BIZA, I.; ZACHARIADES, T. "Warrant" revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 79, n. 2, p. 157–173, fev. 2012.

NORDIN, A. K.; BJÖRKLUND BOISTRUP, L. A framework for identifying mathematical arguments as supported claims created in day-to-day classroom interactions. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 51, p. 15–27, 1 set. 2018.

NUNES, J. M. V. **A prática da argumentação como método de ensino:** o caso dos conceitos de área e perímetro de figuras planas. 2011. 220 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011

PASINI, M. F. **Argumentação e prova: explorações a partir da análise de uma coleção didática.** 2007. 225 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

PEDEMONTE, B. **Etude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l ' apprentissage des mathématiques To cite this version : HAL Id : tel-00004579 E t u d e d i d a c t i q u e e t c o g n i t i v e d e s r a p p o r t s d e l ' a r g u**. [s.l: s.n.].

PEDEMONTE, B.; BALACHEFF, N. Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 41, p. 104–122, 2016.

PERELMAN, C.; OLBRECHTS-TYTECA, L. **Traité de I'argumentation: La nouvelle rhétorique**. Bruxelles: Éditions de I' Université de Bruxelles, 1958.

PIVETA, M. N. et al. A contribuição da visão baseada em recursos para o estudo da internacionalização: uma análise bibliométrica da produção científica entre os anos de 2007 e 2016. **Internext**, v. 13, n. 2, p. 43, 2018.

PLANTIN, C. **A argumentação: história, teorias, perspectivas**. Tradução d ed. São Paulo: Parábola, 2008.

PONTE, J. .; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

REGINALDO, B.K.S. **Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática**. 2012, 168f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012

REICHERSDORFER, E. et al. **Different collaborative learning settings to foster mathematical argumentation skills**. (T. Y. Tso, Ed.)Proceedings of the 36th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. **Anais**...Taipei: PME, 2012

REID, D. A.; KNIPPING, C. **Proof in mathematics education: Research, learning, and teaching**. Rotterdam: The Netherlands: Sense Publishers., 2010.

REISS, K. M. et al. Reasoning and proof in geometry: Effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, v. 40, n. 3, p. 455–467, 2008.

REISS, K.; RENKL, A. Learning to prove: The idea of heuristic examples. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, v. 34, n. 1, p. 29–35, 2002.

RODRIGUES, F. C; MONTEIRO, M.A.A. Modelo para avaliação do argumento de prova em um contexto de ensino baseado em modelagem. **Revista Ensenanza de la Física**, v. 33, n. 2, p. 143–151, 2021.

RODRIGUES; SILVA; MONTEIRO. Argumentação no Ensino da Matemática: a produção nacional e a formação do professor que ensina matemática. **Revista Ensino da Matemática em Debate,** v.8, n.1, p.202-229, 2021.

RODRIGUES, F. C. ALVES, G. G. YONEZAWA, W. M. MONTEIRO, M.A.A. ensamento computacional : proposta metodológica para o ensino de números binárioS. **Revista de produtos educacionais e pesquisas em ensino**, v.5, n.1, p.129-153, 2021.

RODRIGUES, F.C; SANTOS, M.S. JALHIUM, N. B. MONTEIRO, M.A.A. A argumentação em uma atividade de investigação na formação de professores de matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v.10, n.21, p. 293-312, 2021

ROGERS, K. C.; KOSKO, K. W. How elementary and collegiate instructors envision tasks as supportive of mathematical argumentation: A comparison of instructors' task constructions. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 53, n. September 2018, p. 228–241, 2019.

ROMANOWSKI, J. P.; ENS, R. T. Revista Diálogo Educacional. **Revista Diálogo Educacional**, v. 6, n. 19, p. 37–50, 2006.

ROMANOWSKI, P. J.; ENS, R. T. As pesquisas denominadas do tipo "estado da arte" em educação. **Revista Diálogo Educacional**, [S.l.], v. 6, n. 19, p. p. 37-50, jul. 2006. ISSN 1981-416X.

ROSADO, E. M. . O alcance do vídeo na sala de aulas. In: **O vídeo no campo da educação**.

Ijuí: Unijui, 1993. p. 8–56.

RUMMEL, N.; SPADA, H. Learning to collaborate: An instructional approach to promoting collaborative problem solving in computer-mediated settings. **Journal of the Learning Sciences**, v. 14, n. 2, p. 201–241, 2005.

SÁ, L. P.; QUEIROZ, S. L. Argumentação no ensino de ciências: contexto brasileiro. **Revista Ensaio**, v. 13, n. 2, p. 13-30, 2011.

SADALLA, A. M. F. DE A.; LAROCCA, P. Autoscopia: um procedimento de pesquisa e de formação. **Educação e Pesquisa**, v. 30, n. 3, p. 419–433, 2004.

SALES, A. **Práticas argumentativas no estudo da geometria por acadêmicos de Licenciatura em Matemática**, 2010, 229f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

SALOMÃO, P. R. **Argumentação e prova na matemática do ensino médio:** progressões aritméticas e o uso de tecnologia. 2007. 133 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007

SANTOS, J. B. S. **Argumentação e prova:** análise de argumentos algébricos de alunos da educação básica. 2007. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SASSERON, L.H., Interações discursivas e investigação em sala de aula: o papel do professor. In: Anna Maria Pessoa de Carvalho. (Org.). **Ensino de Ciências por investigação: condições para implementação em sala de aula**. 1ed.São Paulo: Cengage Learning, v. 1, p. 41-62, 2013.

SASSERON, L. H.; CARVALHO, A. M. P. Construindo argumentação na sala de aula: a presença do ciclo argumentativo, os indicadores de alfabetização científica e o padrão de Toulmin. **Ciência & Educação,** v. 17, p. 97-114, 2011.

SCARPA, D. L. **Cultura escolar e cultura científica: aproximações, distanciamentos e hibridações por meio da análise de argumentos no ensino de biologia e na Biologia.** [s.l.] Universidade de São Paulo, 2009.

SCARPA, D. L. O Papel Da Argumentação No Ensino De Ciências: Lições De Um Workshop. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, v. 17, n. spe, p. 15–30, 2015.

SCHWAIGHOFER, M. et al. How to combine collaboration scripts and heuristic worked examples to foster mathematical argumentation – when working memory matters. **International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning**, v. 12, n. 3, p. 281–305, 1 set. 2017.

SCHWARZ, B. B. Argumentation and learning. In: MULLER-MIRZA, N.; PERRET-CLERMONT, A.-N. (Eds.). . **Argumentation and education – theoretical foundations and practices**. Berlin: Springer Verlag, 2009. p. 91–126.

SCHWARZ, B. B.; BAKER, M. J. **Dialogue, argumentation and education: History, theory and practice**. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.

SCHWARZ, B. B.; HERSHKOWITZ, R.; PRUSAK, N. Argumentation and mathematics. In: LITTLETON, K.; HOWE, C. (Eds.). . **Educational dialogues: Understanding and promoting productive interaction**. London, UK: Taylor & Francis, Routledge, 2010. p. 103–127.

SILVA, J. J. DA. A Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, v. 15, n. 18, p. 68–78, 2002.

SILVA, R. C. M. da. **O manual do professor de Matemática nos livros didáticos:** uma análise no fomento à argumentação. 2017. 137f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.

SILVA FILHO, A. F. da. **Desenvolvimento de uma sequência didática sobre quadriláteros e suas propriedades:** contribuições de um grupo colaborativo. 2007. 178 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SIMPSON, A. **Developing a proving attitude**. Justifying and Proving in School Mathematics. **Anais**...Londres: Instudo de Educação, Universidade de Londres, 1995

SKOVSMOSE, O. **Um convite a Educação Matemática Crítica**. Tradução: Orlando de Andrade Figueiredo. 1 Ed. Campinas, SP: Papirus, 2014 229

SOCOLOWSKI, R. C. A. J. **Análise das interações tutor/participantes:** um ponto de partida para avaliação de cursos de desenvolvimento profissional à distância. 2004. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004

SOLAR, H. et al. Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 2020.

SOLIS, A. **Argumentação e prova no estudo de progressões aritméticas com o auxílio do Hot Potatoes**. 2008. 183 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

SOUSA, W. E. **Raciocínio lógico-analítico:** uma proposta de conteúdo e abordagem para o ensino médio e para concursos públicos. 2019. 236 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2019.

SOUZA, M. E. C. de O. de. **A questão da argumentação e prova na matemática escolar:** o caso da medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer. 2009. 115 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

STAATS, S. The poetics of argumentation: the relevance of conversational repetition for two theories of emergent mathematical reasoning. **Research in Mathematics Education**, v. 19, n. 3, p. 276–292, 2017a.

STAATS, S. The poetics of argumentation: the relevance of conversational repetition for two theories of emergent mathematical reasoning. **Research in Mathematics Education**, v. 19, n. 3, p. 276–292, 2 set. 2017b.

STAPLES, M.; NEWTON, J. Teachers' Contextualization of Argumentation in the Mathematics Classroom. **Theory into Practice**, v. 55, n. 4, p. 294–301, 1 out. 2016.

STOCK, S.B. **A argumentação na resolução de problemas de Matemática:** uma análise a partir da Epistemologia Genética. 2015, 182 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015.

STYLIANIDES, A. J. The notion of proof in the context of elementary school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 65, n. 1, p. 1–20, 2007a.

STYLIANIDES, A. J. Introducing Young Children to the Role of Assumptions in Proving. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 9, n. 4, p. 361–385, 2007b.

STYLIANIDES, A. J. Secondary students' proof constructions in mathematics: The role of written versus oral mode of argument representation. **Review of Education**, v. 7, n. 1, p. 156–182, 2019.

SUOMINEN, A. L.; CONNER, A.; PARK, H. Prospective mathematics teachers' expectations for middle grades students' arguments. **School Science and Mathematics**, v. 118, n. 6, p. 218–231, out. 2018.

TAYLOR, C. Proving in Geometry: A Sociocultural Approach to Constructing Mathematical Arguments Through Multimodal Literacies. **Journal of Adolescent and Adult Literacy**, v. 62, n. 2, p. 175–184, 1 set. 2018.

TOULMIN, S. **The uses of Argument**. New York: Cambridge University Press, 1958.

TOULMIN, S. **Os usos do argumento.** São Paulo: Editora Martins Fontes**,** 2001.

TRIANTAFILLOU, C.; SPILIOTOPOULOU, V.; POTARI, D. The Nature of Argumentation in School Mathematics and Physics Texts: The Case of Periodicity. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 14, n. 4, p. 681–699, 1 maio 2016.

VAN EEMEREN, F. H. et al. **Fundamentals of argumentation theory: A handbook of historical backgrounds and contemporany developments**. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1996.

VAN EEMEREN, F. H.; GROOTENDORST, R. A. **A Systematic theory of argumentation: the pragma-dialectical approach**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

VICENTE, A.; GARNICA, M. As Demonstrações em Educação Matemática : 2002.

VIEIRA, R. D.; NASCIMENTO, S. S. **Argumentação no ensino de ciências: tendências, práticas e metodologia de análise**. 1ª ed. ed. Curitiba: Editora Appris, 2013.

VIEIRA, W. Z. V. **Argumentação e prova:** uma experiência em geometria espacial no ensino médio. 2007. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. 2. ed. São Paulo: WMF

Martins Fontes, 2009.

VINCENT, J.; CHICK, H.; MACCRAE, B. **Argumentation profile charts as tools for analysing studentes argumentations.** In H.L. CHICK; J.L. VINCENT (Eds.) Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psycholgy of Mathematics Education (Vol.4, pp.281-288). Melborne: PME, 2005.

VOGEL, F. et al. Developing argumentation skills in mathematics through computer-supported collaborative learning: the role of transactivity. **Instructional Science**, v. 44, n. 5, p. 477–500, 1 out. 2016.

VON AUFSCHNAITER, C. et al. Arguing to learn and learning to argue: Case studies of how students' argumentation relates to their scientific knowledge. **Journal of Research in Science Teaching**, v. 45, n. 1, p. 101–131, 2008.

WALTER, J. G.; BARROS, T. Students build mathematical theory: Semantic warrants in argumentation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 78, n. 3, p. 323–342, dez. 2011.

WALTON, D. N. **Lógica informal: manual de informação crítica**. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

WEGERIF, R. Dialogic or dialectic? The significance of ontological assumptions in research on educational dialogue. **British Educational Research Journal**, v. 34, n. 3, p. 347–361, 2008.

WENZEL, J. W. Three Perspectives on Argument: Rhetoric, Dialetic, Logic. In: TRAPP, R.; SCHUETZ, J. (Eds.). . **Perspetives of argumentation: Essays in honour of Wayne Brockriede**. New York: Waveland, 1990. p. 9–26.

WOOD, T. Creating a context for argument in mathematics class. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 30, n. 2, p. 171–191, 1999.

YACKEL, E. What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 21, n. 4, p. 423–440, 2002.

YACKEL, E.; COBB, P. Sociomathematical Norms , Argumentation , and Autonomy in Mathematics Author (s): Erna Yackel and Paul Cobb Source : Journal for Research in Mathematics Education , Jul ., 1996 , Vol . 27 , No . 4 (Jul ., Published by : National Council of Teachers of. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 27, n. 4, p. 458–477, 1996.

ZAMBAK, V. S.; MAGIERA, M. T. Supporting grades 1–8 pre-service teachers' argumentation skills: constructing mathematical arguments in situations that facilitate analyzing cases. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 2020.

ZULATTO, R. B. A. **A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente online de formação continuada de professores**. 2007. 174 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2007.

APÊNDICE A – TRANSCRIÇÃO DA VIDEOGRAVAÇÃO E REGISTROS DE OBSERVAÇÕES DO PESQUISADOR REFERENTE A ATIVIDADE REALIZADA JUNTO AO GRUPO 1

Data: 08/12/2022; **Grupo 1:** Alisson, Ana Paula, Cristina e Paulínia**.**

<Nº>	<Sujeito>	<Transcrição da fala>	Observações (notas)
1	Paulínia	Tipo assim, binário é assim... no caso, zero e um, zero e dois.	Assume a liderança do grupo com as anotações e iniciando o debate.
2	Alisson e Cristina	Não!	Discordância
3	Alisson	Binário é sempre zero e um.	
4	Cristina	É tudo zero e um.	
5	Cristina	Pode ser, “um e zero”, “um e um”, “um, zero e um”	Alisson concorda balançando a cabeça.
6	Paulínia	Ah tá! É tipo uma....	Cristina indica com as mãos que se refere a uma sequência ordenada.
7	Alisson	Não passa para o dois não.	Ana Paula observa a discussão com insegurança no olhar.
8	Paulínia	Então são os números de zeros combinados com um, tipo: “zero e um”, “um e zero”, “um, zero, zero” etc... pode repetir os números...	Erro de compreensão da Paulínia: número é diferente de numeral.
9	Alisson	Isso! Pode repetir o um também viu, tipo “um, um, zero, zero”, “um, zero, zero, zero”, desse jeito.	
10	Paulínia	Assim, tipo... ordem... 1= 01 2= 10 3= 11	Começa a escrever o que foi discutido. Cita o termo ordem (critério).
11	Alisson	Isso, vai só alternando zero e um em diferentes ordens. Você pode repetir o um ou o zero.	
12	Cristina	Sempre trocando de lugar zero e um ao longo das casas.	Alisson concorda, balançando a cabeça e sorrindo.
13	Alisson	Você pode repetir o 1.	
14	Cristina	Pode trocar de lugar também.	
15	Alisson	Isso ai pode! De repente você pode ter 010; 011, confundi.	
16	Cristina	0101.	
17	Paulínia	Entendi. Eu coloquei aqui, que de acordo com a ordem, eu coloquei o tanto de zero. Entendeu?	
18	Alisson	Só não pode ser 000 ou 111.	Conceitos equivocados.
19	Cristina	Potências de expoente e base envolvendo 0 e 1 pode ser um número binário	Conceitos equivocados.
20	Paulínia	Eu sei que é só zero e um... a cabeça falha, você sabe né, você entende.	Paulínia realiza anotações... parece estar ordenando os números binários.
21	Alisson	Agora você pode fazer o inverso.	

22	Paulínia	Não. Agora a gente tem que achar o outro sistema de...	O pesquisador se aproxima do grupo e acompanha a discussão.
23	Pesquisador	O que vocês estão discutindo aí?	
24	Cristina	Colocando os números binários.	
25	Pesquisador	Tá! mas aqui... vejam só. Você tem essa quantidade de feijão. Essa quantidade de feijão remete a um número para vocês. Este número vai estar associado a um numeral no sistema de numeração de base decimal.	O pesquisador pega a quantidade de feijões em mãos. O pesquisador se afasta do grupo
26	Cristina	O número é 15	Realiza contagem dos grãos
27	Paulínia	A quantidade?	
28	Cristina	Isso.	Em referência à disposição dos feijões representados na ficha.
29	Paulínia	Sim!	
30	Alisson	Pensei que tinha alguma coisa relacionado com decimal também.	
31	Cristina	Então vamos colocar aqui, que diversas formas que a gente chega.	
32	Alisson	Pode ser	
33	Cristina	É assim: 5 + 10 ou 3x5	Ela representa na ficha na primeira ordem um grupo de 10 e um grupinho de 5 e na segunda ordem um grupo de 3 e um grupo de 5
34	Paulínia	Na primeira ordem é soma e na segunda é a multiplicação, ah tá entendi.	Os alunos estão pensando provavelmente em operações que resultam no 15.
35	Pesquisador	E aí? Melhorou a compreensão do grupo?	O pesquisador se aproxima do grupo. Os integrantes do grupo balançam a cabeça sinalizando que sim.
36	Paulínia	Agora está saindo...	
37	Pesquisador	Trabalhe com a quantidade de feijões indicada, estou observando que tem feijões a mais aí. Olhe, a quantidade de feijão que está aqui na tabelinha de vocês. Vocês dispõem desta quantidade aqui que está relacionada a um número. Que número é este?	Faz um alerta a equipe para a quantidade de feiões na segunda ordem
38	Todos	15	
39	Pesquisador	Ok! Como a gente representa esta quantidade aqui relacionada ao 15 aqui na ficha?	
40	Cristina	Certo, cada feijãozinho representa uma unidade, então na primeira ordem a gente utilizou várias formas diferentes. Na primeira ordem a gente colocou 5 feijões mais 10 feijões. Aqui na segunda ordem 3 feijãozinhos x 5 feijãozinhos que dá 15 feijãozinhos, ou não pode ser assim?	Os alunos estão representando o 15 por meio de soma e multiplicação na primeira e segunda ordem respectivamente.

41	Pesquisador	Eu pergunto a vocês o seguinte: Porque vocês fizeram um grupo de 10 na primeira ordem? Aqui você separou 5 unidades e deixou um grupinho de 10 aqui.	
42	Alisson	Decimal.	
43	Pesquisador	Isso! Sistema de numeração de base decimal. O sistema de enumeração de base decimal trabalha com que? Vamos pensar em regras que compõe este sistema de numeração. Quais as regras que estão por trás do sistema de numeração de base decimal que a gente utiliza?	
44	Paulínia	Tem a dezena.	
45	Alisson	Na segunda ordem aqui vai só 1.	
46	Cristina	Vai ficar 5 unidades e passar uma dezena, o que eu entendi foi isso.	
47	Pesquisador	A ideia de dezena vem de que?	
48	Cristina	De 10.	
49	Pesquisador	Sim, do que vocês acabaram de fazer aqui na ficha... de um grupo. Então quando você trabalha com o sistema de numeração de base decimal, você trabalha com grupos de que?	Aponta para a representação na ficha.
50	Paulínia	Dezenas.	
51	Pesquisador	Isso! De dez, grupamento de 10. Quando você tem a centena é um agrupamento de 10^2. O que é a unidade de milhar? Não é mil? É 10^3, ou seja, você está trabalhando com agrupamento de 10, correto? Para além dessa ideia que vocês indicaram aqui, o que mais vocês sabem a respeito da representação de um número no sistema de numeração de base 10? Tem alguma outra regra que a gente pode utilizar?	
52	Cristina	Tem.	
53	Pesquisador	É isso que eu quero que vocês discutam e anotem. A atividade pede exatamente para vocês fazerem essa representação aqui e o porquê disso? Discutam entre vocês, ouça o colega... o que o colega pode acrescentar na resposta.	Ele faz referência a representação do 15 na ficha.
54	Alisson	Você fala a dezena aqui	
55	Cristina	A gente tem que representar em grupos, um conjunto de 10.	
56	Paulínia	Como a gente vai fazer?	
57	Alisson	O problema aqui, 15 né, vai gerando grupo de 10.	
58	Cristina	A gente pode representar uma dezena por um saquinho de 10 feijões.	
59	Pesquisador	Como vocês estão trabalhando no sistema de numeração de base 10, a cada grupo de 10 formado você vai passar um grão de feijão para a segunda ordem para simbolizar/representar o grupo formado na primeira ordem.	

60	Paulínia	E qual o objetivo da terceira, quarta e quinta ordem...?	
61	Pesquisador	Isso aí é para quando você for trabalhar com quantidades maiores. Imagine se eu tivesse a quantidade de 243 feijões e quisesse representar essa quantidade aqui na ficha... Aí você iria colocar eles aqui e fazer a distribuição dos grupos.	
62	Paulínia	O objetivo desse primeiro exercício é saber explicar essa quantidade de 15 feijões na ficha?	
63	Pesquisador	Sim. O porquê disso aqui resultou nisso, quais critérios ou regras que vocês utilizaram? Lembrando que vocês estão no sistema de numeração de base decimal.	O pesquisador se afasta do grupo.
64	Paulínia	Unidade...	Fala realizando registros.
65	Alisson	Na segunda ordem aqui vai só 1 grão.	
66	Pesquisador	temos a decomposição do número, por exemplo o 15... decompor é pensar ele assim... ele é formado por 2 dígitos, certo, o 5 e o 1. Esse 1 aqui significa que é um grupinho de 10, concordam? Mais 5 unidades. Por exemplo, se eu falo 328, você tem quantos dígitos?	O pesquisador confunde a questão. 1) letra c).
67	Todos	Três.	
68	Pesquisador	Isso! Significa que cada digito é uma potência de 10. O que é 3? 3 centenas, só que uma centena é 10^2, então temos $3x10^2$ (3 grupos de 10 ao quadrado), o que é 2? 2 grupos de 10, o que é 8? 8 unidades $8x10^0$. Veja que a potência vai diminuído... 10^2, 10^1, 10^0. Veja que cada digito é possível escrever como uma potência de 10. E o número é gerado a partir da soma destas potências. Isso é uma decomposição que você faz do número. Outro exemplo, 8.729.... vamos pensar aqui, tem quantos dígitos? Como seria a decomposição?	Todos acompanham o raciocínio e fala do pesquisador.
69	Alisson	4 dígitos Unidade, dezena, centena e unidade de milhar... 8 unidades de milhar, 8x1000= $8x10^3$. 7 centenas, 7x100 =$7x10^2$. Duas dezenas, 2x10 = $2x10^1$. 9 unidades, ou seja, $9x10^0$.	
70	Pesquisador	Vou dar como desafio para vocês... 649,5... como eu escrevo este número sob a forma de potências de 10?	Os alunos acompanham o raciocínio do pesquisador repetindo em voz baixa o que ele diz.
71	Cristina	Divido ele?	
72	Pesquisador	O que está complicando o número aí?	
73	Alisson	O meio né.	
74	Pesquisador	Vamos sumir com esta parte por enquanto? Pense apenas no 649, como fica?	
75	Cristina	$6x10^2 + 4x10^1 + 9x10^0$	
76	Pesquisador	E o que seria o 5? Veja que é bem sugestivo a potência, olha 10^2, 10^1, 10^0 então fica 5?	
77	Cristina	$5x10^{-1}$	

78	Alisson	Dá meio.	
79	Pesquisador	Sim, 10^{-1} =1/10 vezes 5 resulta em meio. Se eu colocasse um 7 aqui, aí ficaria $7x10^{-2}$.	
80	Paulínia	Porque é duas casas depois da virgula, se fosse três seria menos 3.	
81	Pesquisador	Moral da história, no sistema de numeração de base 10, você trabalha com grupos de 10, você dispõe de 10 algarismos para escrever um número (0 a 9) e cada dígito do número pode ser escrito como uma potência de base 10, certinho?	
82	Paulínia	Certinho	
83	Pesquisador	Então, essa parte da decomposição aqui eu quero que vocês façam a decomposição do número 15 e estabeleçam uma relação com a conclusão estabelecida	O pesquisador se afasta. Conversa informal.
84	Cristina	Ok! Então vai ficar 15 = 1x10 + $5x10^{0}$. Esse resultado representa algebricamente 1 dezena (1 grão de feijão na segunda ordem) e 5 unidades (5 grãos na primeira ordem da ficha). 10 elevando a zero é 1 e vezes 5 da 5.	Conversa informal. Cristina realizando anotações. Paulínia lê o enunciado da três
85	Alisson	A próxima agora é a dois... com essa dois é por 15 também né.	
86	Cristina	Eu acho que é a mesma ideia de antes.	
87	Adecio	Mas não tem como uah...	OBS: Na questão 1, parece que a equipe não deu importância ao roteiro de colaboração.
88	Cristina	Com esta mesma quantidade de grãos de feijão é possível encontrar/fabricar outros números em outros sistemas de numeração que não seja o decimal? Justifique suas ideias.	Realiza a leitura do enunciado da questão 2). Não leu a orientação do roteiro.
89	Alisson	Oh Cristina, essa dois aí não é igual ao que a gente estava fazendo não?	
90	Cristina	Aquela de 2^{2}.... porque aqui está falando de diferentes né... em outros sistemas de numeração que não seja decimal... pode ser.	A equipe pensa na decomposição do 15 por meio de outras operações/potências. Silêncio no grupo. Cristina realiza registros escritos.
91	Ana Paula	Vocês estão em qual? Na segunda? Nessa aqui?	
92	Alisson	A segunda aqui, é do mesmo jeito que nós estávamos fazendo, entendeu?	
93	Ana Paula	Aquele de aumentar...de decompor?	
94	Alisson	Isso!	
95	Paulínia	Só que não decimal, então a gente pode usar qualquer outro número.	
96	Alisson	Mas agora o negócio que a dezena pode ser diferente.	
97	Cristina	Então pode utilizar daquela forma mesma que a gente estava fazendo de decomposição... colocar 3+2 + uma dezena que não seja o decimal... ai pode ser uma potência 3^{2}.	

98	Ana Paula	Então eu vou utilizar a base 10.	
99	Alisson	Não pode ter base 10.	Em referência a potência. Paulínia lê o roteiro de orientação da questão.
100	Cristina	Não pode ter a base 10.	
101	Paulínia	Que não seja sistema de base 10... então vamos lá gente? Então vamos...	Paulínia lê parte da orientação do roteiro de colaboração. Conversa informal.
102	Ana Paula	Então faz o raiz de 125.	
103	Cristina	Mas não pode pegar mais do que 15 né.	
105	Paulínia	Lê... lê aí.	
105	Cristina	2) Com esta mesma quantidade de grãos de feijão é possível encontrar/fabricar outros números em outros sistemas de numeração que não seja o decimal? Justifique suas ideias. Orientação: Discuta com seus colegas a possibilidade de criar outros números em diferentes sistemas de numeração que não seja o sistema de base 10 (sistema decimal). Discuta com seu colega, as regras/critérios para a apresentação desse número. Você pode se espelhar no sistema de numeração de base decimal. Fiquem à vontade para criar ilustrações, semelhantes àquela indicada na questão 1, bem como realizar testes para verificar a ideia e posteriormente tirar uma conclusão.	
106	Paulínia	Então... é.	
107	Cristina	Com esta mesma quantidade de grãos de feijão é possível encontrar/fabricar outros números... tipo assim, com o 15 mesmo, não pode passar.	
108	Paulínia	A quantidade dele aqui tem que ter 15? Ou pode passar? Entendeu?	
109	Paulínia	Então vamos lá... o quinze aqui... 3x5... vai dar 15 feijões., mas aqui não tem 15 feijões.... eu posso fazer essa conta? será que pode?	
110	Cristina	Qual que você fez, 5x3?	
111	Paulínia	Sim, por que aí o resultado vai dar 15, eu posso fazer dessa forma?	
112	Cristina	Pode uai.	
113	Ana Paula	Pode, porque a única coisa que ele fala é para não utilizar o número na base 10.	O grupo entendeu que não pode utilizar o 10 como um fator no produto durante a decomposição
114	Cristina	Multiplicação, raiz e potenciação...acabamos. Vamos perguntar ele p ver se estamos no caminho.	Conversa informal. O grupo aguarda o pesquisador para verificar se a questão 2) está correta
115	Alisson	A dois deu certo?	
116	Cristina	Vamos ver com ele se é maios ou menos isso.	O professor Bruno sai da sala

117	Alisson	É assim Paulínia, é que ele não seja... pelo que eu entendi aqui... que não seja igual a primeira. Você teve que juntar um grupinho de 10, entendeu? Na 1) você teve que juntar o grupinho de 10 para dar o decimal, certo? Agora aqui não precisa juntar esse grupinho, pode ser outro valor entendeu?	
118	Cristina	Dando grupo de cinco ou de três.	
119	Paulínia	Então... então...tá!	
120	Alisson	Você tem que ter os 15 feijões. Na primeiro nós tivemos que separar 1 grupo de 10 mais 5 para dar 15. Neste agora não...pode ser outros grupos.	O pesquisador chega no grupo.
121	Cristina	O 2) seria mais ou menos isso?	
122	Pesquisador	Se eu quiser organizar esta mesma quantidade de grãos em grupos de dois é possível? Ou seja, quero agora apenas mudar o critério do agrupamento, ao invés de um grupo de 10, agora será grupos de dois, é possível?	Ana Paula balança a cabeça, dizendo que sim.
123	Cristina	Sim, é possível, agora a dezena será um grupo de dois	
124	Paulínia	Pera aí... não entendi.	
125	Ana Paula	O grupo de dois agora valerá uma dezena.	
126	Pesquisador	Vamos pensar... qual a ideia por traz do sistema de numeração de base decimal?	
127	Cristina	Formar grupos de 10.	
128	Pesquisador	Isso. Você está trabalhando com grupos de dez que estão relacionados a dezena, certo? Agora tem sentido falar dezena se você está organizando a quantidade de grãos em grupos de dois?	Os alunos por meio de expressões faciais parecem perceber que chamar o grupo de dois de dezena é um equívoco.
129	Pesquisador	O sistema de numeração de base 2 é utilizado na informática. O computador utiliza uma lógica binária para codificar a informação por meio de uma sequência de zeros e uns. Faremos o seguinte, peguem essa quantidade de feijão (15) e organizem ela em grupos de dois na primeira ordem da ficha e realizem o mesmo procedimento de formação de grupos que vocês fizeram na base 10.	Paulínia de posse da ficha e sob olhares dos colegas realiza o que o pesquisador solicitou.
130	Paulínia	Cada dupla de feijão que formou na primeira ordem vai passar a ser um feijão novo na segunda ordem e fica um apenas na primeira. Não pode ser dezena porque não é 10 que foi passado.	Os colegas observam o deslocamento dos grãos realizado por Paulínia.
131	Pesquisador	Certo, e na segunda ordem ainda é possível formar grupos e continuar o processo?	
132	Cristina, Paulínia e Alisson	Sim!	Ana Paula apenas observa.
133	Paulínia	Na segunda ordem dá para formar mais três grupos e vai sobrar 1 feijão.	
134	Pesquisador	Ok, continuem...	

135	Paulínia	Na terceira ordem vai ter três feijões, cada um representa um grupo formado na segunda e sobra um feijão.	
136	Paulínia	Na quarta ordem vai ter apenas 1 feijão de um grupo formado na terceira ordem. Tem um feijão que não dá para montar grupo.	O grupo todo observa o deslocamento de grãos realizados por Paulínia.
137	Pesquisador	Se não deu para formar mais grupos, então a fabricação do numeral se encerra. Vamos registrar o que sobrou em cada ordem?	
138	Cristina	Fica 1 feijão na primeira ordem, 1 na segunda ordem, 1 na terceira 1 na quarta ordem.	
139	Pesquisador	Vejam que vocês acabaram de fabricar um numeral no sistema de numeração binário correspondente ao numeral 15 do sistema de numeração de base decimal.	
140	Alisson	Mil cento e onze.	
141	Pesquisador	Tem certeza? Quando você diz mil cento e onze não dá uma ideia de organização do número em grupos de 10?	
142	Alisson	Mas e aí? Como que eu falo então?	
143	Cristina	Lembrei, lembra da aula de informática, você só fala os números, tipo 1111.	
144	Pesquisador	Isso, você fala somente os algarismos, certo? após isso você utiliza uma notação especial para se referir a base binária. Pode ser $(1111)_2$ ou 1111_2. Se você chegar no teclado do computador e digitar 15, o computador vai codificar em $(1111)_2$ ou 1111_2..	Os alunos observaram com atenção o pesquisador mostrar no papel a notação que pode ser utilizada.
145	Paulínia	Cada casa que passa então é um grupo de dois.	
146	Cristina	Isso.	
147	Alisson	Na base dez é grupos de 10, a lógica aí é trabalhar com grupos de dois.	
148	Alisson	Então cada feijão que restou se ele voltar para a casa (ordem) anterior ele vai desfazendo a conversão...multiplicando por dois.	
149	Pesquisador	Isso Alisson! Vocês perceberam que estão a trabalhar com potências?	
150	Paulínia	Potências de dois porque a base é dois.	
151	Pesquisador	Existe alguma relação entre cada algarismo que compõe o número binário com as potências de dois?	
152	Alisson	A potencias de dois vão crescendo para cada número (algarismo) porque vai acumulando (dobrando). Cada número (algarismo) tem a valência de uma potência de dois.	
153	Pesquisador	Bacana isso! Quais seriam essa potencias de dois para cada algarismo do número encontrado?	
154	Alisson	2, 4, 8, 16	
155	Pesquisador	Será? Vocês concordam que 2 remete a quantidade de grãos restantes na primeira ordem?	
156	Cristina	Gente, é 1, 2, 4, 8, 16 e assim vai...	

157	Alisson	Mas não pode ter 16 porque só tem 4 números (algarismos).	Cristina e Paulínia concordam balançando a cabeça.
158	Pesquisador	Agora pense na representação destes números em potências para então associá-los a cada algarismo do número binário encontrado.	
159	Cristina	Como assim?	
160	Pesquisador	Cada algarismo do número binário encontrado tem uma identificação com uma potência de dois, concordam ou não?	
161	Alisson	É a valência que eu disse antes, 2^0; 2^1; 2^2;2^3. Quatro números (algarismos) ligados as potencias de dois.	
162	Pesquisador	Concordam com o que Alisson disse? Agora pensem na possibilidade de trabalhar com grupos de três, quatro... como seria isso? É possível? Fiquem à vontade para realizar testes. Discutam entre vocês.	Todos do grupo confirmam que sim, balançando a cabeça ou fazendo sinal de positivo com as mãos.
163	Paulínia	Da sim, é o mesmo raciocínio usado na base 2 e 10.	O grupo não sente a necessidade de realizar testes.
164	Pesquisador	Agora imagine uma situação em que você tenha que converter o número 150 (Base decimal) para a base 2. Será que você irá colocar 150 grãos na primeira ordem da ficha e exaustivamente até formar grupos e obter o resultado? Teria uma outra opção para diminuir este trabalho árduo?	O grupo fica confuso e em silêncio sem pensar em uma estratégia para realizar tal procedimento
165	Pesquisador	Voltem na ficha e na fabricação do número binário correspondente ao número decimal 15. Que operação matemática poderia comandar todo este processo de conversão?	
166	Alisson	É a divisão pegando os resultados e sobras para formar o novo número. Por exemplo: 15 dividido por 2 da 7 e sobra 1, depois 7 feijões dividido por 2, da os 3 feijões da 3 ordem e sobra 1. E ai você pega os feijões da terceira ordem e divide novamente por 2 e da 1 com sobra de 1. Sempre pegando os resultados da divisão e as sobras.	Após alguns momentos de silêncio e teste.
167	Pesquisador	Ok! Pensem numa generalização para este processo e lembrem-se da existência de outras bases não decimais.	Fredy se afasta do grupo, o grupo fica em silencio.
168	Paulínia	Isso é meio complicado...não estou entendendo.	
169	Alisson	Essa é a três.	
170	Paulínia	Mostre para o seu colega de grupo como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal qualquer	Paulínia lê e relê a questão 3, se mostrando confusa e sem saber o que tem que fazer.
171	Cristina	Vamos pegar um número diferente do exemplo dele e dividir por três para testar. 15 dividido por 3 da grupos e não sobra nada. Depois 5 dividido por 3 da 1grupo e sobra 2	Pensando em voz alta.

		que não dá para dividir. Como não dá mais p dividir tem o número 120 na base 3.	
172	Alisson	A 4) é isso aqui.	Paulínia e Ana Paula acenam para a câmera.
173	Pesquisador	E aí como anda a discussão por aqui?	Fredy se aproxima do grupo.
174	Cristina	Estou escrevendo aquela que discutimos.	
175	Paulínia	Eu estou quebrando a cabeça na 5).	
176	Cristina	Tá! Estamos na 5) então.	
177	Paulínia	Olha como fizemos a 4).	O pesquisador observa o registro escrito.
178	Pesquisador	Vocês estão misturando os registros do número 2 e do número 4. Vejam melhor isso aqui e discutam.	O pesquisador se afasta do grupo. Os alunos passam a reler os registros para melhor organizá-los.
179	Cristina	Então temos que fazer a 4) e a 5) porque isso aqui então vai entrar na 1) e na 2).	Paulínia e Alisson balança a cabeça concordando. Cristina continua realizando registros escritos.
180	Paulínia	Da uma olhadinha se a 3) está correta?	O pesquisador se aproxima do grupo.
181	Pesquisador	Como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal? Se eu quiser converter para a base 2, o que eu faço?	
182	Cristina	Divide por 2.	
183	Pesquisador	Isso! Se eu quiser converter para a base 3, o que eu faço?	
184	Cristina	Divide por 3	
185	Pesquisador	Isso! Ilustre isso p mim e tentem generalizar isso... como seria para uma base qualquer?	Os alunos ficam pensativos sem saber o que fazer.
186	Pesquisador	Chamem essa base qualquer de b, por exemplo.	
187	Ana Paula	Para um número n vou dividir por b.	
188	Pesquisador	Isso! Pensem de maneira mais geral, tomando como referência aquilo que vocês fariam para a base 2 e 3.	O pesquisador se afasta do grupo e os alunos começam a realizar registros na ficha.
189	Paulínia	Um número do sistema de numeração de base decimal, pode ser qualquer número.	
190	Alisson	Então pega 99.	Teste crucial.
191	Paulínia	Pode!	Ela Realiza registros com o número escolhido. Enquanto isso Cristina trabalha sozinha em outra questão.
192	Paulínia	Como que a gente vai fazer para passar um número do sistema decimal para uma base não decimal?	Alisson, Ana Paula e Paulínia ficam em silencio pensando.
193	Paulínia	Já sei, “0,1” é um número na base decimal...	Confusão de número decimal com número no

			sistema de numeração de base decimal.
194	Ana Paula	Esse número decimal multiplicado por outro decimal vira um número inteiro.	Paulínia realiza registros com base no que Ana Paula disse e posteriormente começa a coçar a cabeça com dúvidas
195	Paulínia	Como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal?	O pesquisador se aproxima do grupo e Cristina o chama.
196	Pesquisador	E aí? Alguma questão para discutir?	
197	Paulínia	É a três	Dúvida na questão 3)
198	Pesquisador	Vocês podem começar a explorar isso aí com exemplos mais simples/particulares e depois tentar ampliar esta compreensão, o que acham?	Os alunos ficam com dúvida sem saber por onde partir. Observa-se que Ana Paula e Alisson não estão concentrados na atividade. A todo momento se distraem com o celular.
199	Paulínia	Vou ler aqui novamente para todo mundo. Como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal?	O grupo fica atento a leitura.
200	Pesquisador	E aí? Olha vamos generalizar? Chama no número de n e a base de b... e com base nos exemplos que vocês testaram tentem generalizar. Tente escrever de uma maneira geral aquilo que em particular você fez no número 2). Tentem aí, discutam entre vocês	
201	Paulínia	Ah tá divisões sucessivas até chegar no zero.	Começa a pensar e realizar registros na ficha. Fredy se afasta do grupo. Cristina parece concordar com o que Paulínia escreveu. Alisson e Ana Paula manuseando o celular.
202	Cristina	Falta ainda a 4) e a 5)	
203	Ana Paula	Fredy, e a 4) como que a gente consegue solucionar?	O pesquisador se aproxima do grupo.
204	Pesquisador	Pessoal, percebam que agora é o caminho inverso. Vocês devem discutir e pensar o caminho da volta do que vocês fizeram na questão 2 e 3. Entenderam?	
205	Ana Paula	Sim.	O pesquisador se afasta do grupo.
206	Pesquisador	Para você ter um resultado na base 10, você pensa o seguinte, como eu estou na base 2, se esse feijãozinho está aqui é porque ele foi originado a partir de grupos de dois... então se ele voltar para essa ordem, gera dois...e cada uma destas, ao retornar a ordem anterior gera outras duas... ai no final das contas, quando todos chegarem a primeira ordem, teremos um	Ele aponta para o feijão na ficha. Os alunos balançam a cabeça para sinalizar que sim.

		quantitativo que representa o número na base 10. Entenderam?	
207	Paulínia	O processo é inverso.	
208	Pesquisador	Sim. Na dois você formava grupos, agora você vai decompor/desmanchar os grupos, entenderam? Agora é o inverso.	
209	Paulínia	Vamos escrever aqui.	Inicia os registros da discussão.
210	Cristina	Oh Paty, como que eu escrevo aqui?	
211	Paulínia	Vamos lá... a gente pega de dois em dois e vai voltando...2,4, 8. Você quer saber como nós vamos colocar isso no papel? Vamos escrever... É o processo inverso! Se dá através da devolução de quantidade de pares atribuída a cada ordem anterior e pronto.	Ela explica para Cristina como se decompõe o grupo o grupo realizando mostrando como o processo inverso ocorre. O procedimento é fetio com Paulínia deslocando os grãos na ficha
212	Cristina	Sim.	Ela realizava os registros escritos em função da explicação de Paulínia.
213	Paulínia	Falta só a 5) agora para a gente ir embora	
214	Paulínia	5) Mostre para o seu colega de grupo "*como converter um número do sistema de numeração não decimal para um número correspondente no sistema de numeração decimal*".	
215	Alisson	É aquele negócio do 0,1 x10 lá, da 15.	
216	Paulínia	0,1 é um decimal, no caso. Ele multiplicado por 10 é isso ai. Um decimal multiplicado pela base 10 vai dar um número decimal.	
217	Alisson	Ele vai voltar um número na escala zero	Paulínia e Cristina ficam realizando registros escritos e pensativas.
218	Paulínia	Vamos colocar exemplos: 0,1 no sistema de numeração decimal, ele multiplicado por 10 se torna um numeral decimal.	
219	Alisson	Como que é?	
220	Cristina	Ponha aí, 01x10.	
221	Alisson	Da 1	
222	Paulínia	É da 1, ele não é decimal.	
223	Cristina	Não.	
224	Paulínia	O que é um número decimal?	Risos.
225	Cristina	Decimal é duas casas, eu acho.	
226	Alisson	É uai.	
227	Paulínia	Então é aqui oh... elevado a dois... aí se transforma em 10. Vocês concordam?	Potência de 10 ao quadrado. Eles estão pensando na potência que multiplicado 0,1 resulta em 10. Risos.
228	Alisson	Um decimal pelo que estou vendo aqui... é o que vem depois da vírgula, é desse jeito aí mesmo.	Consulta ao celular.
229	Paulínia	Então, você vai tirar um número do sistema de numeração não decimal, ele não é decimal,	Risos de Paulínia. Conversa informal.

		então é dividido, então ele é dividido, no caso ali é 1/10 que vai dar 0,1, é o contrário disso... entendeu... então não é multiplicado... é dividido. É o contrário, 1/10... então $1/10^2$ é igual a 0,1.	Encerramento do trabalho.

APÊNDICE B – TRANSCRIÇÃO DA VIDEOGRAVAÇÃO E REGISTROS DE OBSERVAÇÕES DO PESQUISADOR REFERENTE A ATIVIDADE REALIZADA JUNTO AO GRUPO 2

Data: 08/12/2022; **Grupo 2:** Caique, Carolina e Luiz Fernando

<Nº>	<Sujeito>	<Transcrição da fala>	Observação (notas)
1	Luiz Fernando	Vamos focar em fazer o 1)	Luiz Fernando assume o papel de líder do grupo, propondo aos demais a leitura da primeira questão.
2	Carolina	O que você entendeu?	Olhando para Luiz Fernando.
3	Luiz Fernando	Devemos representar na ficha essa quantidade de feijão.... será que é por fileira aqui? ...sim!	
4	Carolina	Caique fica ai pensando...	Carolina sorri
5	Luiz Fernando	O que você pensou Caique?	Todos olham para Caique
6	Caique	Uah...eu pensei que tem que distribuir a quantidade de feijão, mas acho que isso pode ser feito assim 9 e depois 6 ...pode ser de várias maneiras diferentes.	O grupo fica em silencio e pensativo
7	Luiz Fernando	Éh... então primeiro a gente representa 9 e depois 6.	O grupo entendeu que os 15 feijões estavam distribuídos em dois grupos devendo cada um deles ser representados na ficha.
8	Luiz Fernando	Ah tá, temos que representar é o total de feijões, 15. Temos que fazer na folha... como que gerar o 15	Silêncio. O grupo houve a discussão de outro grupo. O pesquisador se aproxima do grupo. Luiz realiza a contagem dos grãos.
9	Pesquisador	Vocês compreenderam a questão 1?	
10	Luiz Fernando	Temos que representar o 15 aqui na ficha né..., mas?	O grupo volta a atenção para o pesquisador.
11	Pesquisador	Esta quantidade de feijão está associada a diferentes numerais em diferentes sistemas de numeração... vai depender de critérios que eu vou adotar para gerar estes numerais. Critérios diferentes para agrupamentos desta quantidade vão gerar numerais diferentes.	
12	Caique	Poderia ser um critério, por exemplo, um feijão aqui na segunda ordem vale 10 e outro aqui na primeira ordem vale uma unidade.	Caique aponta para o valor correspondente a um feijão na 2ª e 1ª ordem da ficha. Intuitivamente ele faz uso da base decimal.
13	Pesquisador	Isso! Como vocês organizariam então essa quantidade de feijão na ficha? Lembrem-se de explicar o porquê de ter organizado dessa forma, certo?	Silêncio. O grupo fica pensativo e um começa a olhar para o outro.
14	Pesquisador	Bom, de início vocês associaram a quantidade ao número 15. Agora eu quero saber como vocês poderiam representar o número 15 aqui na ficha, ao longo dessas ordens?	O grupo ouve a instrução.

15	Luiz Fernando	Huum...	Em silencio e sorrindo, ele pega 15 grãos de feijão e coloca um grão na 2ª ordem e 5 grãos na 1ª ordem.
16	Caique	Mas a gente tem que desenhar na ficha né	
17	Pesquisador	Sim! Na folha de resposta do grupo vocês deverão fazer o desenho para representar essa ideia. Agora eu preciso entender por que razão vocês colocaram 1 feijão na 2ª ordem e 5 feijões na 1ª ordem. Discutam e tire suas conclusões.	
18	Carolina	Como assim?	Todos olham para o pesquisador
19	Pesquisador	Bom, da quantidade de feijão que vocês tinham aí (15), que critério vocês adotaram para ter essa representação que vocês indicaram ai na ficha?	
20	Luiz Fernando	Ah tá, foi assim... quando tem 1 aqui (referindo ao feijão da segunda ordem) se refere a um grupo de 10 unidades que foi formado na primeira casa e estes cinco aqui é porque não gerou um grupo de 10 unidades (dezena).	Ele indica a representação na ficha.
21	Luiz Fernando	Se eu adotasse como critério um grupo de 5 elementos, então eu teria 3 feijões na 2ª ordem e nenhum feijão na 1ª ordem, não é isso?	Os outros dois elementos do grupo balançam a cabeça concordando.
22	Pesquisador	Isso!	Se afasta do grupo e solicita o registro das ideias.
23	Carolina	Vou escrever aqui.	Todos acompanham Carolina passar a limpo o registro realizado por Luiz Fernando.
24	Pesquisador	vocês não discutiram a decomposição número...Como que eu posso decompor o número 15 no sistema de numeração de base 10 utilizando potências de base 10 para justificar a conclusão?	O grupo fica pensativo diante do questionamento do pesquisador.
25	Luiz Fernando	Decompor realizando divisão né.	
26	Pesquisador	Será? Pensemos o seguinte, o 15, você tem 1 dezena e 5 unidades, certo? Se fosse 523?	
27	Carolina	Seria 5 centenas, 2 dezenas e 3 unidades.	
28	Pesquisador	Isso! Perceberam que cada algarismo do numeral pode ser escrito como uma potência de 10?	
29	Caique	2 dezenas e depois 5 centenas que é 50 dezenas.	
30	Pesquisador	Então seria, 2 dezenas (2x10) + 5 centenas ($5x10^2$). Certo? E a unidade como fica?	Os membros do grupo balançam a cabeça concordando.
31	Caique	Uah... aí fica 3 na potência 10 elevado a zero para gerar a unidade.	
32	Pesquisador	Isso! Logo o 523 pode ser decomposto da seguinte forma: $5x10^2+2x10^1+3x10^0$. No sistema de numeração de base decimal cada	

		dígito do numeral pode ser escrito como uma potência de 10. Testa para mim por favor a decomposição de 1.326. Como ficaria?	
33	Luiz Fernando	Vai ficar $1x\ 10^3+\ 3x10^2+2x10^1+6x10^0$.	
34	Pesquisador	Isso! Veja que o número está sendo escrito por meio de grupamentos de 10, certo? Como ficaria a decomposição de 378,5?	Os alunos balançam a cabeça concordando. O pesquisador se afasta do grupo.
35	Luiz Fernando	$3x10^2+7x10+8x10^0$	
36	Caique	Ai o outro vai ser menos 1 por que é 0,5 = 5/10 = 1/5 $=5x10^{-1}$	
37	Pesquisador	Então, destas decomposições podemos concluir que cada dígito de um número no sistema de numeração de base decimal pode ser escrito como potências de base 10.	
38	Luiz Fernando	Agora a gente tem que fazer isso agora do 15 para terminar a questão. Então vai ser 1x10	
39	Caique	Mais $5x10^0$	
40	Luiz Fernando	Aqui não dá para fazer desenho.	O grupo aguarda enquanto Carolina passa a limpo a conclusão final.
41	Caique	Nesta 1 letra c) nós podemos fazer de outras formas também tipo $15\ x\ 10^0$ ou então $5x10^0 + 5x10^0 +5x10^0$	
42	Luiz Fernando	Calma que eu me perdi, $5x10^0 + 5x10^0 +... +5x10^0$ (5 somas). É está certo.	
43	Caique	Dá para escrever de outra forma ainda $1,5\ x10^0$.	Luiz Fernando pede para Caique escrever no papel para que ele possa analisar. Carolina e Luiz Fernando concordam com Caique, sorrindo e balançando a cabeça.
44	Luiz Fernando	15 ao quadrado (devia estar pensando na raiz de 225). Mas não dá porque tem que ser na base 10.	Ele tenta encontrar outro exemplo, mas depois refuta.
45	Carolina	Quais destes exemplos eu vou colocar?	Ela aponta para o seu manuscrito. Os alunos selecionam os exemplos que deverão ser apresentados no registro escrito. Conversa informal.
46	Caique	E nesse caso aqui envolvendo raiz (raiz de 225)	O grupo se propõe a analisar o exemplo apresentado por Caique e todos concordam em colocá-lo no registro a ser entregue ao pesquisador.
47	Luiz Fernando	Ah, tem que escrever que é base decimal viu... coloca um título... 15 na base decimal. A 2) agora perguntou a mesma coisa só que é fora do sistema decimal. Com esta mesma quantidade de grãos de feijão é possível encontrar/fabricar outros números em outros sistemas de numeração que não seja o	Carolina balança a cabeça, concordando. Enquanto Carolina faz a transcrição do que foi discutido no número 1), Luiz Fernando enuncia a questão 2).

		decimal? É aquela de representar em vários números (bases)	
48	Caique	É tipo no sistema de base 3 né...cada feijãozinho aqui vai valer três. Três de segunda ordem e três de primeira ordem.	
49	Luiz Fernando	Não! Um feijão da segunda ordem equivale a três da primeira ordem. Dessa forma aí está sendo um para cada.	Refutação do argumento de Caique.
50	Carolina	Pera aí que eu vou representar aqui...aí a gente anota depois.	Carolina distribui 15 feijões sendo, 3 na primeira ordem, 3 na segunda, 3 na terceira, 3 na quarta e 3 na quinta ordem. A discussão é pausada com a chegada do pesquisador.
51	Luiz Fernando	Espera aí, mas a cada três não forma um?	
52	Carolina	Verdade.	
53	Luiz Fernando	Então tem que ser um aqui, um aqui, um, um e um. Estamos na base três.	Conforme a distribuição de Carolina de três feijões em cada ordem, Luiz substitui cada grupo de 3 feijão por 1 único feijão.
54	Caique	Não! Tem que pegar as potencias de 3, cada feijão na primeira ordem vale 3^1 e cada feijão na segunda ordem 3^2.	Caique por este entendimento ilustra dois feijões na primeira ordem e 1 feijão na segunda ordem. Assim no entendimento dele $3^1+3^1+3^2=15$.
55	Luiz Fernando	Eu acho que é assim... você começa com três aqui e vai passando para cada casa, tipo, 6, 9, 12 até chegar no 15.	Na representação por desenho, Luiz mostra os três feijões se deslocando da primeira ordem até a 5 ordem onde segundo ele os mesmos valerão 15. Os alunos não avançam na discussão. O pesquisador se aproxima do grupo.
56	Pesquisador	E aí como vão? Conseguiram resolver o problema lá daquela decomposição?	Carolina mostra Fredy o resultado da decomposição.
57	Carolina	Fizemos de várias formas aqui.	
58	Pesquisador	Ok! Esse primeiro aqui já basta, porque vocês expressaram cada dígito como uma potência de 10. E os outros que eu deixei? Quero ver... O importante é que vocês percebam que um número na base decimal ele pode ser decomposto como uma soma onde cada digito que compõe uma parcela dessa soma é escrito como uma potência de base 10.	O pesquisador verificou como os alunos expressaram os outros exemplos de números para decomposição deixados.
59	Caique	Olhe aqui para mim, eu converti 15 na base 3. Cada feijão da primeira ordem é uma potência de 3, ou seja, 1x3+1x3 =6. O feijão na segunda ordem é $1x3^2$=9 e totaliza 15.	Ele mostra o exemplo de dois feijões na primeira ordem e um feijão na segunda ordem.

60	Pesquisador	Sim, você trabalhou com potencias, no entanto, a potência de três na primeira ordem é 3^0 é a unidade.	Refutação do resultado de Caique.
61	Luiz Fernando	Como que eu represento na base 3?	
62	Pesquisador	Primeiramente você tem que representar a quantidade de feijões que você quer converter na primeira ordem. Na base decimal você organiza a quantidade de feijões na primeira ordem em grupos de 10 e passa um feijão para a segunda ordem para representar o agrupamento formado. Como seria isso na base 3?	Luiz Fernando pega os 15 feijões e coloca na 1ª ordem da ficha.
63	Luiz Fernando	Ah tá, então eu formo 5 grupos de 3 na primeira ordem e passo feijões para a segunda ordem. Na segunda ordem formo 1 grupo de três que vai para a terceira ordem e sobra dois feijões na segunda ordem que não dá para formar grupo. O número formado será 120 (cento e vinte) na base 3.	Sob orientação do pesquisador Luiz remaneja os grãos.
64	Caique	Então a primeira ordem é 3 elevado a zero né... aí fica $0x\ 3^0+2x3^1+1x3^2$.	
65	Pesquisador	Isso! Cuidado para não falar cento e vinte. É um, dois, zero base 3.	
66	Carolina	Vou anotar e tem que colocar as regras e critérios.... temos que fazer a decomposição também.	Carolina começa a produzir os registros por escrito do que foi discutido. Conversa informal entre Caique e Luiz Fernando. Carolina também faz a ilustração da situação discutida.
67	Luiz Fernando	Temos, igual fizemos no outro.	
68	Carolina	Então a decomposição seria 120 (cento e vinte) =	Carolina acompanha o raciocínio de Luiz e Caique para chegar ao resultado.
69	Luiz Fernando e Caique	$0x\ 3^0+2x3^1+1x3^2$.	Luiz comete erros na soma e Caique corrige.
70	Luiz Fernando	120 é o total de feijão, o número é um, dois e zero. Com esta mesma quantidade de feijões é possível encontrar/fabricar números em outros sistemas de numeração que não seja o decimal? Já fizemos com base 3, vamos fazer com a base 5. A gente faz só de duas mesmas.	Carolina anota. Luiz Fernando relê o enunciado da questão 2). Carolina passa a limpo alguns registros e Luiz e Caique aproveita para lanchar
71	Pesquisador	Veja bem, como vocês estão a trabalhar na base três, não tem sentido dizer dezena e centena... porque dezena e centena são referentes a base 10. Então o número obtido por vocês é $(120)_3$. Eu não posso falar 120 porque remete a um número na base decimal composto por dezena e centena. Vocês fizeram com o deslocamento do feijãozinho, ok! Com 15 é tranquilo! Agora imagine se eu fosse transformar/passar 150 da base decimal para a base 3. Será que eu vou	

		precisar colocar 150 feijãozinho e ter todo aquele trabalho de ficar formando grupo e remanejando para outras ordens e assim sucessivamente? Será que não existe uma estratégia mais simples para realizar essa conversão?	
72	Carolina	Como assim?	O grupo fica em silêncio e não progride na discussão da tarefa.
73	Pesquisador	Qual a operação matemática que está por traz deste processo de organização de feijão em grupos?	
74	Caique	É divisão!	
75	Pesquisador	Isso! Acompanhem aqui na ficha de vocês. 15 feijões na primeira ordem, dividido por 3, resulta em um quociente 5 e em um primeiro resto 0. Depois 5 feijões na segunda ordem dividido por 3, resulta em um quociente igual a 1 e um resto igual a 2. Veja que o último quociente obtido mais os restos obtidos na ordem inversa vai gerar o numeral que vocês obtiveram por meio da exploração da ficha $(120)_3$. Vocês também podem utilizar aquela tabela de divisão ensinado lá no Ensino fundamental.	O pesquisador em conjunto com os alunos foram realizando as operações. Luiz Fernando cita um exemplo. O pesquisador desenha uma tabela de divisão para mostrar outra estratégia de divisão. Valor inicial Dividir pela base Resultado Resto.
76	Carolina	Isso facilita bastante.	
77	Luiz Fernando	Então nessa 2) pode aumentar os números para dar mais exemplos?	
78	Pesquisador	Pode. Existem várias estratégias de transformação e eu quero ver quais que vocês são capazes de exibir.	Caique cita um exemplo de divisão euclidiana de 15 na base 2 para explicar ao pesquisador como ele compreendeu. Ele explora as propriedades da divisão mentalmente
79	Caique	$15= 1111_2$	
80	Pesquisador	Se você digitar quinze no teclado do computador, o computador vai registrar/armazenar na memória 1111_2. O computador trabalha com a base binária, base 2.	
81	Caique	Ahhhh entendi.	Descoberta expressa por meio de um sorriso.
82	Pesquisador	O que é um byte? É um conjunto de 8 bits. Um bit é um caractere 0 ou 1. Megabyte, terabyte, kylobayte são múltiplos de byte e do bit	Caique experimenta converter 1024 para a base 2 para ver a quantidade de um e zeros....1024= (100000000). O pesquisador confere e da ok, explicando que se ele digitar 1024 o computador vai gerar uma combinação de zeros e 1

83	Caique	Hummm, interessante!	O pesquisador se afasta e vai em direção a outro grupo.
84	Carolina	Na 3) Mostre para o seu colega de grupo como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal qualquer. Vamos ficar atento com a essa orientação.... validar a conclusão tirada na questão anterior.	
85	Luiz Fernando	Vamos voltar, bora focar...já fizemos na base 3, agora basta fazer na base 5.	Momento de conversa informal.
86	Carolina	Generalize essa ideia.	
87	Luiz Fernando	Tem que fazer os desenhos... o que nós fizemos na questão anterior? Ah representar os feijões. É aquela ideia que fizemos com o 3, agora vamos fazer com o 5.	Luiz diz olhando para Caique aguardando aprovação.
88	Caique	Por cinco é a mesma coisa... aqui oh...	Caique organiza os 15 feijões na primeira ordem e os agrupa em grupos de 5.
89	Luiz Fernando	Faz a separação das casas	Caique coloca 3 feijões na segunda ordem, não restando feijão na primeira ordem.
90	Caique	Vai ficar 3x 5 na segunda casa.	
91	Luiz Fernando	Agora a gente explica da mesma forma que a base 3. Então da $0x5^0+3x5^1$.	
92	Carolina	Como que a gente explica isso de uma forma geral? Para ter todas as formas.	
93	Luiz Fernando	Sim, igual Caique está fazendo ali...Da forma que ele explicou a da base 5 temos que mostrar para todas as bases.	Apontando para a representação do 15 na base 5, indicado na ficha de Caique.
94	Carolina	Tipo, tem que valer para todas 5, 6, 7, 8....	
95	Luiz Fernando	Tem que pegar um número n na base 10, uma base b, e um número x que é o resultado final	Conversa informal durante o período. Carolina realizando anotações. *Parece que ele quis dizer, a cada digito aumenta um expoente.
96	Carolina	Mas ai eu pego uma quantidade e distribuo em grupos conforme for a base né..	Interessante, generalização de Carolina para a distribuição na ficha.
97	Luiz Fernando	Sim, vamos escrever assim... tipo... vamos dividir n pela base, cada base (tipo 3 grupos de 3, 5 grupos de 5, 6 grupos de 6)... como nós vamos explicar? É dividir e sair fazendo grupos e novamente	
98	Caique	A cada número da base você forma grupos que tem a quantidade da base, tipo a base 5	Todos do grupo pensando apenas na generalização da base e não do número n (base decimal)
99	Luiz Fernando	E pode ser um número qualquer viu. Escreve aí Caique	Luiz lê o enunciado da questão para compreender.

100	Caique	Para converter da base 10 para uma base qualquer é preciso pegar um número qualquer (n) e dividir pela base (b) formando grupos conforme for a base (b) e a partir disso o número de grupos formados você torna dividir pela base (b) e assim vai até quando for possível dividir e formar grupos. O resultado final e as sobras que não resultou em grupo vai gerar a fabricação do número na base qualquer	O pesquisador se aproxima do grupo e pergunta sobre a questão 2).
101	Luiz Fernando	Agora é a 4). Imagine agora que você tenha a seguinte situação, a "*representação de um número binário*" (sistema de numeração de base 2) indicado na ficha a seguir. O que fazer para converter este número (representado na ficha) para o sistema de numeração de base decimal? Justifique suas ideias.	Conversa informal e Luiz Fernando realizando registros por escrito. Ele acrescenta o exemplo de Caique (10024 na base 2) na questão fazendo a divisão utilizando uma tabela. O pesquisador responde uma dúvida de Caique sobre 1 byte aleatório convertido para a base decimal.
102	Caique	A 4) eu sei fazer... é mais ou menos o que eu estava conversando com ele (pesquisador) antes.	
103	Luiz Fernando	Então você escreve aí e faz a 4). Imagine agora que você tenha a seguinte situação, a representação de um número binário (sistema de numeração de base 2) indicado na ficha a segui. O que fazer para converter este número indicado na ficha para o sistema de numeração de base decimal? Justifique suas ideias	O grupo por algum tempo fica em silencio, aguardando Caique realizar alguns registros escritos. Depois disso Luiz Fernando passa a enunciar a questão 4).
104	Pesquisador	Vocês estão em qual questão?	Conversa informal sobre o PIBID enquanto Caique realiza a transcrição do número 4).
105	Carolina	Agora eu vou fazer a 5). É o inverso do que fizemos na 3), tipo é descrever como desfaz aquelas divisões da 3). É desmanchar os grupos da base feitos pela divisão. Vamos fazer a 5). Parece ser tranquila.	Conversa informal
106	Luiz Fernando	Mostre para o seu colega de grupo como converter um número do sistema de numeração não decimal para um número correspondente no sistema de numeração decimal.... No caso a gente divide e multiplica, não? Exemplo: Aqui você vai dividindo para chegar no número decimal, 3x1=3, 5x2=10, 5x1...não! Não é isso não!	
107	Carolina	É aquilo que eu falei antes	
108	Luiz Fernando	3x3=9, 9+5 da 15? Não...	
109	Caique	Da direita para a esquerda a gente considera a base elevado a zero. A gente multiplica o	

		primeiro algarismo da direita do número pela base elevado a zero.	
110	Luiz Fernando	O número da primeira ordem vezes a base elevado a zero...depois 1,2,3, voltando né.	
111	Caique	Cada ordem representa um expoente para a base. 1ª ordem, expoente zero, 2ª ordem expoente 1, 3ª ordem expoente 2.	
112	Luiz Fernando	Vamos ver se dá certo aqui.... Essa aqui foi a última né (referente ao último exemplo do número 3, “120” base 3).	
113	Caique	Isso!	
114	Carolina	Decompõe ai	
115	Luiz Fernando	$0x3^0+2x3^1+1x3^2$. Essa é a justificativa... Agora como que nós vamos explicar isso? Tem que ser geral viu.	
116	Pesquisador	Agora vocês precisam generalizar essa ideia. Não é pensar que a base é somente 2,3,4,5,6... é preciso generalizar... a base pode ser um “b”	
117	Carolina	É	
118	Caique	Cada algarismo do número na base correspondente multiplicado pela sua base elevando a ordem (onde a primeira ordem é zero, a segunda ordem é equivalente a 1, a terceira ordem a 2 e assim por diante....) A soma dos seus resultados vai gerar o número na base decimal.	Caique consegue uma generalização
119	Pesquisador	Isso. Pense na possibilidade de generalizar a quantidade de dígitos do número, “d_n, d_{n-1}, ..., d_0”... depois a base e depois as potencias em ordem decrescente “b^n, b^{n-1}, ..., b^0”	
120	Caique	O resultado será sempre na base 10?	
121	Pesquisador	Sim. Quando você pega um número em uma base não decimal e você trabalha com as potencias relativas aquela base você vai gerar um número na base decimal.	
122	Luiz Fernando	É o caso de voltar né... a gente vai voltar para a base 10. Então seria qualquer base, cada ordem dela conforme a separação aqui será elevado a zero (ordem 1), 1 (ordem 2) ....etc. que vai dar o resultado na base 10.	
123	Pesquisador	Isso, agora transcreva essa ideia para o papel	
124	Luiz Fernando E Caique	Escreve.... Em cada base... em cada valor de base...cada algarismo da base correspondente vezes b elevado a sua ordem.	Os dois pensam juntos e falam juntos.
125	Carolina	A sua ordem menos 1 (-1)	
126	Caique	Eu estou colocando assim, a primeira ordem equivalente a expoente zero (expoente da base)	
127	Luiz Fernando	Tá! Cada algarismo da base correspondente elevado a ordem.	
128	Caique	Elevado a sua ordem, em que a primeira ordem corresponde ao expoente zero, a segunda ordem corresponde ao expoente 1, a	

		terceira ordem ao expoente 2 e assim por diante... todos os resultados.	
129	Luiz Fernando	Cada algarismo da base correspondente elevado a ordem que ... a primeira ordem está relacionada ao expoente zero, mas só que aqui elevado a sua ordem 10 né? Não.	
130	Caique	A ordem do expoente da base.	
131	Luiz Fernando	Mas qual vai ser o elevado? A base aqui não é 10?	
132	Caique	A base pode ser qualquer base b.	
133	Carolina	Se eu utilizar a base 10, eu vou estar voltando do decimal para o decimal.	
134	Caique	Não importa a base que tiver o resultado vai gerar um número na base 10.	
135	Luiz Fernando	Entendi.	
136	Caique	Não importa a base que tiver. O resultado da multiplicação da base correspondente vezes o algarismo correspondente e o resultado somado individualmente vão dar um número na base 10 e assim por diante.	
137	Luiz Fernando	Que mais? Só?	
138	Caique	Vou anotar...cada algarismo da base correspondente elevado a sua ordem (que está correspondendo a ordem da sua base ne – ordem 1 expoente zero, ordem 2, expoente 1, ordem 3, expoente 2....) A multiplicação do algarismo do número na base.	Caique realiza o registro do que pensa e do que havia raciocinado com os colegas. Caique e Luiz relê e fazem ajuste no texto.
139	Carolina	Esse negócio da ordem aqui convém sempre colocar -1	Ela volta nesta sugestão.
140	Luiz Fernando	-1 de cada ordem 1-1=0 2-1=1 3-1=2	
141	Caique	Hum... é verdade, vai ser a linguagem matemática nesse caso. A soma dos resultados da multiplicação de xb^{n-1} onde x representa um digito qualquer, b a base e n, a ordem correspondente sempre vai dar resultado de base 10.	
142	Carolina	Você escreveu na linguagem matemática e ficou bem mais resumida.	
143	Luiz Fernando	Em forma de desenho fica muito mais fácil de ser escrito.	
144	Carolina	Sim.	Começa a transcrever no rascunho a conclusão da 5). Conversa informal (PIBID)

APÊNDICE C – TRANSCRIÇÃO DA VIDEOGRAVAÇÃO E REGISTROS DE OBSERVAÇÕES DO PESQUISADOR REFERENTE A ATIVIDADE REALIZADA JUNTO AO GRUPO 3

Data: 08/12/2022**; Grupo 3:** Ana Lívia, Lena, Luiz Felipe

<Nº>	**<Sujeito>**	**<Transcrição da fala>**	**Observação (notas)**
1	Ana Lívia	Acho que é assim, unidade, dezena, centena, unidade de milhar, centena de milhar.... parecido com o que a gente faz no ábaco.	Ela aponta para a ordem dos feijões na ficha.
2	Ana Lívia	Vamos pensar como se fosse o ábaco. Que número seria esse?	O grupo fica um tempo em silencio.
3	Luiz Felipe	Três, três, três, dois, dois, dois... 333.222 (trezentos e trinta e três mil duzentos e vinte e dois).	
4	Ana Lívia	Aham	Concordando com o colega
5	Luiz Felipe	Vamos colocar aqui...	Leticia toma a iniciativa de representar a quantidade de feijões na ficha...dois feijões na primeira ordem, 2 na segunda ordem, 2 na terceira ordem, 3 na quarta ordem, 3 na quinta ordem e 3 na sexta ordem.
6	Lena	Mas esse número nós podemos colocar de outro jeito também né.	
7	Ana Lívia	A quantidade de feijões que você dispõe representa um número no sistema de numeração de base decimal, que número é este? Represente este número na ficha.	Ana Lívia chama a atenção da equipe para o enunciado da questão 1 e o que está sendo pedido. O grupo fica pensativo. O pesquisador se aproxima.
8	Pesquisador	Aqui vocês têm essa quantidade de feijão. Essa quantidade de feijão está associada a uma ideia de número. Que número que é este?	
9	Ana Lívia	A gente pode montar o número que quiser?	
10	Pesquisador	Qual o número que está associado a esta quantidade de feijão no sistema decimal?	
11	Lena	Você fala no total ou separado para cada um deles?	Leticia aponta para a fileira de feijões da ficha, pensando não no total, mas no ordenamento deles.
12	Pesquisador	É em relação ao total, ou seja, a quantidade que você tem aí.	
13	Lena	Vai dar 15	Lena realiza contagem dos grãos.
14	Pesquisador	15 é o número que representa esta quantidade de feijões. A quantidade de feijões representa o número quinze que é representado pelo numeral 15. Agora, discutam.... com essa quantidade de feijões, como eu vou gerar o quinze aqui.	O pesquisador aponta para a ficha. O grupo por meio de expressões faciais sinaliza ter compreendido a questão.

15	Lena e Ana Lívia	É o quinze.	Sob os olhares de Luiz Felipe as duas alunas representam o quinze na ficha, sendo um feijão na segunda ordem e cinco feijões na primeira ordem.
16	Ana Lívia	Apresente critérios e regras para a fabricação e decomposição do numeral correspondente a este número... tipo assim, uma dezena e cinco unidades, ou pode ser quinze unidades também, né.	Ana Lívia lê o que é solicitado posteriormente na atividade
17	Lena	15 dividido por 10 da um e sobra 5	
18	Ana Lívia	Verdade, faz sentido	
19	Lena	Hunrum	O grupo fica pensativo e cada um fica relendo o enunciando da questão.
19	Luiz Felipe	1 dezena, dez unidades formam uma dezena.	
20	Lena	Podemos usar o método do material dourado para chegar no 15	Sugere isso...,mas a discussão não vai adiante. O pesquisador se aproxima
21	Luiz Felipe	Pronto!	
22	Lena	É isso ai.	
23	Ana Lívia	Pode ser métodos... utilizar método do quadro valor de lugar...expressão	
24	Pesquisador	Olha, vocês poderiam explorar a decomposição do numeral 15 para tentar uma justificação adicional aqui na resposta	Ana Lívia realiza anotações e o silêncio no grupo se instala. Lena pega uma folha para realizar alguns testes... Ela começa a decompor o 15.
25	Luiz Felipe	Como que a gente vai fazer isso aqui?	Lena começa a rir. Ana Lívia Segue realizando anotações sozinha
26	Ana Lívia	É preciso fazer o desenho aqui?	
27	Luiz Felipe	Desenho de que?	
28	Ana Lívia	20 menos 5? Colocando feijãozinho	Ela começa a fazer o desenho
29	Lena	Não tem como colocar raiz de 15 né?	
30	Luiz Felipe	Não	Cada integrante do grupo trabalha sozinho, realizando testes e pensando sozinho
31	Lena	Como que eu provo (mostrar) isso?	
32	Ana Lívia	Pode ser raiz de 225	Ela responde olhando para Lena. O pesquisador se aproxima do grupo.
33	Lena	Tem como envolver raiz dentro dessa representação?	Pergunta feita ao pesquisador

34	Pesquisador	Dentro dessa em especial, não, porque estamos trabalhando com quantidades, a não ser que envolva raiz que resulte em um número inteiro. É na representação de que? Quero entender melhor sua pergunta.	
35	Lena	Eu estava tentando entender assim, o 15 na potência ao quadrado	
36	Pesquisador	Por que ao quadrado?	
37	Lena	Eu penso depois para chegar na raiz exata.	
38	Ana Lívia	E a raiz de 225 é 15.	
39	Lena	Eu pensei assim, na base 10, 10 elevado ao quadrado, cem mais cinco ao quadrado 25, da 125, raiz quadrada, 15.	
40	Pesquisador	Fiquem atentos ao critério envolvendo a decomposição dos algarismos do número viu, saiu alguma coisa?	
41	Todos	Sim	Todos os membros do grupo balançam a cabeça sinalizando que sim.
44	Pesquisador	Ótimo!	O pesquisador se afasta do grupo
45	Ana Lívia	Com esta mesma quantidade de feijões é possível encontrar/fabricar outros números em outros sistemas de numeração não decimal? Justifique suas ideias	Questão 2) Ela começa a ler as orientações e para no meio para então começar a discutir a questão com os colegas. Ana Lívia começa a realizar registros e os colegas acompanham.
46	Ana Lívia	Fredy, aqui está pedindo para gerar um número em outro sistema de numeração não decimal.	
47	Luiz Felipe	Na 2) pode ser base 5. Pode ser 3x5 ou 5 ao quadrado -10	
48	Leticia	Não pode ser base 10	
49	Luiz Felipe	Então pode ser 5 ao quadrado menos 2 vezes 5.	O grupo aparentemente aceita a ideia de Luiz e se mantem em silencio e pensativo.
50	Ana Lívia	Fredy, aqui a gente pode fazer desse jeito “5 ao quadrado menos 2 vezes 5”. A gente usaria a base 5.	Ana Lívia chama o pesquisador e pergunta.
51	Pesquisador	Bom, se a base é 5, vocês vão utilizar qual ideia?	
52	Lena	Meia dezena...meia centena.	
53	Pesquisador	A base agora é 5. Vocês esqueçam dezena, centena e unidade de milhar... são termos utilizados para a base decimal. Antes trabalhávamos com grupos de 10, agora vocês vão trabalhar na base 5, com grupos de quanto?	
54	Ana Lívia	Grupos de 5	

55	Pesquisador	Então a ideia é essa. Peguem os 15 feijões e organizem eles dentro dessa proposta de grupos de 5. Na base decimal a gente trabalhava com grupos de 10, agora nós vamos trabalhar com esta mesma quantidade e formar grupos de 5, conforme vocês mesmos querem.... Então, se a gente organizar em grupos de 5 teremos, 3 grupos na grupos na primeira ordem e não sobra nenhum feijão. Para cada grupo formado passa um feijão para a segunda ordem. Na primeira ordem não temos feijão e na segunda ordem três feijões, logo $(30)_5$ é o numeral que representa a quantidade de feijões referente a 15 na base decimal. Experimentem agora gerar um número binário. Já ouviram falar no número binário? É o sistema de numeração que o computador utiliza. No sistema de numeração decimal nós trabalhamos com grupos de 10, isso porque a nossa máquina de calcular, as mãos têm 10 dedos. Já o computador ele trabalha com a base 2 e em virtude disso temos os termos, bit, byte, kilobyte, megabyte... tudo isso está por traz do conceito de binário, 0 e 1. Organize essa quantidade de feijões aí em grupos de dois para ver a que resultado vocês chegam. Quando você chegar no teclado do computador e digitar 15 o computador vai armazenar na memória o número binário que vocês irão gerar aí.	Lena pega os 15 feijões e passa a distribui-los na ficha. O professor Bruno sai da sala. O grupo se mostra surpreso com o resultado.
56	Lena	Vamos organizar aqui, vai sobrar um.	
57	Ana Lívia	Será 7 grupos de 2 e sobrará 1.	Luiz Felipe concorda balançando a cabeça. O grupo para e não avança com o raciocínio de continuar formando grupos. Ana Lívia começa a escrever registrando o que foi feito e discutido. O grupo se mantém em silencio enquanto Ana Lívia realiza registros.
58	Lena	Falta a 3), 4) e 5) agora.	Ana Lívia continua realizando registros e em seguida chama o pesquisador.
59	Ana Lívia	Fredy, é assim?	
60	Pesquisador	Isso! Aqui neste caso, há sete feijões na segunda ordem, é possível formar grupos de dois?	
61	Ana Lívia	Ah tá, então devo continuar.	
62	Pesquisador	Talvez seja interessante retornar a ficha e realizar o deslocamento dos grãos.	Leticia pega a ficha e os grãos de feijão.

63	Todos	Com 15 feijões na primeira ordem eu formo 7 grupos de dois e sobra 1. Então eu devo colocar 7 feijões na segunda ordem. Com esta quantidade de feijões na segunda ordem eu formo 3 grupos e sobra 1. Agora eu vou colocar três feijões na terceira ordem. Com esta quantidade de feijões eu formo um grupo e sobra 1. Na quarta ordem então terá um único feijão e não será possível mais formar grupo. O número $(1111)_2$ representa o número 15 no sistema de numeração de base binaria.	Pesquisador realiza o movimento dos grãos e os alunos vão falando.
64	Ana Lívia	Ah então podemos fazer assim, passo a passo né...	
65	Pesquisador	Entenderam a lógica? Tudo que fizermos em outras bases é por analogia aquilo que fizemos na base decimal.	
66	Ana Lívia	Vamos lá... uma unidade eu posso utilizar este termo né, na base dois?	Ela passa a registrar o que foi discutido com o grupo e o pesquisador a respeito da conversão para a base 2. Conversa informal e lanche.
67	Pesquisador	sim	Ana Lívia volta a realizar registros por escrito.
68	Pesquisador	Tentem mudar a estratégia de conversão. Pega o 15 e utilize aquela estratégia que vocês haviam mencionado.	
69	Ana Lívia	No caso de dividir por 3?	
70	Pesquisador	Vocês estão trabalhando com qual base?	
71	Ana Lívia	Base 2	
72	Pesquisador	Na base dois vocês trabalharam formando grupos de dois, isso sugere que a divisão seja por quanto?	
73	Ana Lívia	Divisão por 2	
74	Pesquisador	Olha que interessante, a lógica disso tudo, temos o 15. 15 dividido por 2, é formar 7 grupos de dois e sobra 1 que é o resto, circule este resto. Depois 7 dividido por 2, resultado em 3 grupos de dois e sobra 1, circule este novo resto. Com três é possível formar grupos, então continuamos a divisão por 2. Forma um grupinho e sobra 1. Com este resultado dá para formar grupo? Não! Então o último quociente, circule ele, mais os restos tomando na ordem inversa formam o número procurado, $(1111)_2$. É útil essa estratégia caso você tenha que converter um número muito grande como 240 por exemplo. Testa aí para outras bases.	Ana Luiz realiza a anotação por escrito em torno da fala do pesquisador. O pesquisador mostra na ficha a ilustração geométrica dessa divisão.
75	Ana Lívia	15 dividido por 5, vai dar 3 e resto zero. Aqui não dá para dividir. Vai dar $(30)_5$	Ana Lívia passa a maior parte do tempo realizando registros escritos para

			justificar a questão 2. Conversa informal.
76	Lena	Vamos para a três?	
77	Ana Lívia	Mostre para o seu colega de grupo como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em um sistema de numeração de base não decimal qualquer. Orientação: Nesta etapa você precisa validar a conclusão tirada na questão anterior, produzindo uma generalização da ideia produzida. Você pode argumentar utilizando uma prova conceitual, ou seja, articulando ideias e conceitos e objetos matemáticos para produzir uma generalização, como também fazer uso da linguagem matemática (formal e simbólica) para realizar uma demonstração.	Importante: Ana Lívia chamou a atenção para a orientação da questão.
78	Lena	A gente tem que escolher um número e converter ele para qualquer base.	Ana Lívia balança a cabeça sinalizando que sim.
79	Luiz Felipe	Um número? Qualquer número? 23	Ana Lívia aguarda Luiz escolher o número.
80	Ana Lívia	Podia ser maior...nós vamos converter para grupos de quanto? De base quanto?	O grupo generaliza a partir da escolha de um caso aleatório.
81	Lena	Põe 24 e faz na base 4... A representação decimal é 20 +4	Luiz Felipe e Ana Lívia concordam balançando a cabeça. Ana Lívia realiza registro por escrito enquanto Lena pega a ficha e os grãos para realizar algum teste. Luiz Felipe entrega 24 grãos de feijão a Lena. Ela organiza 24 em seis grupos de 4 na primeira ordem. Enquanto isso Ana Lívia continua realizando anotações.
82	Ana Lívia	E na segunda ordem? Na segunda ordem temos 6 feijões onde é possível formar um grupo de 4 e sobra 2. Então fica $(120)_4$. Agora vamos pegar 24 e dividir por 4 da 6 e resto zero. O resultado da divisão não deu resultado igual ao resultado na representação na ficha. Fredy, o que deu errado aqui?	Leticia imediatamente começa a formar grupos com os feijões da segunda ordem com o suporte da ficha. Ana Lívia realiza registros. Conversa informal. O grupo tem dificuldade de discutir o assunto. O grupo fica parado...parece que algo deu errado...ficam à espera do pesquisador para tirar dúvidas.
83	Pesquisador	Isso... entendi. Pela Lógica quando você trabalha no sistema de numeração de base 10, você dispõe de 10 algarismos de 0 a 9. Na base dois, dois algarismos 0 e 1, sempre abaixo da	

		base. Na base 3, os algarismos são 0,1,2. Na base quatro, você pode utilizar os algarismos 0,1,2,3. Como apareceu um 6 aqui na divisão tem algo errado... vejam que esse resto aqui ainda é possível continuar a divisão e formando grupos de 4.	
84	Todos	ahhhh	O grupo inteiro percebeu o vacilo em não dar continuidade a divisão
85	Pesquisador	Lembrem-se da ficha na representação dos 24 feijões... ou seja... isso significa que na segunda ordem ainda é possível você continuar formando mais grupos.	
86	Leticia	É mesmo, vai sobrar e dar certinho.	Ana Lívia refaz o registro escrito enquanto Leticia fala.
87	Ana Lívia	Ai Fredy, a três é isso? Pegar qualquer número e provar?	
88	Pesquisador	A três... como podemos generalizar isso? Mostre para o seu colega de grupo como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em um sistema de numeração de base não decimal qualquer. Aí você mostrou para a base 4, certo? E se fosse para uma outra base qualquer? Como vocês fariam?	
89	Ana Lívia	Você diz um número muito grande?	
90	Pesquisador	Que número seria este?	
91	Lena	Você fala, de mais de dois algarismos? Tipo 625	
92	Ana Lívia	Aí nós podemos pegar qualquer base	
93	Pesquisador	A ideia é produzir uma generalização, pegar um número qualquer na base decimal e converter para uma base não decimal qualquer.	
94	Ana Lívia	Então 625 dividido por 5 resultado $(5000)_5$	Ana Lívia realiza os cálculos sob a supervisão dos colegas.
95	Lena	Outra questão...nossa!	Os alunos não leram o enunciado da questão coletivamente. Ana Lívia ficou concentrada nos registros da questão anterior.
96	Luiz Felipe	Tem que voltar agora para o decimal.	
97	Ana Lívia	É assim?	Ela pergunta ao pesquisador sobre o que ela registrou na questão 3.
98	Pesquisador	Aí você mostrou como converter o número 24 na base 4 e 625 na base 5... Mas na base 5, não pode aparecer o algarismo 5	
99	Lena	Uah...625 na base 5.	

100	Pesquisador	Eu não posso utilizar o algarismo 5 na base 5. Eu só posso utilizar o 0,1,2,3,4. São 5 algarismos.	
101	Ana Lívia	Eu não posso utilizar o 6 aqui?	
102	Pesquisador	Você não pode utilizar o algarismo 5. Com 5 ainda não é possível formar grupos de 5? Dá 1 grupo e sobra zero. Entenderam?	A partir daí Ana Lívia começa a corrigir o registro escrito
103	Ana Lívia	É assim? $(10000)_5$ só isso?	
104	Pesquisador	Isso! Agora vocês acham que isso aí apenas é capaz de convencer alguém como que prova? Vocês se sentem convencidos com a validade deste método?	O pesquisador lê o enunciado do que foi pedido na questão 3
105	Todos	Sim	Sorrisos entre os integrantes do grupo
106	Pesquisador	A ideia é generalizar ao máximo. Como utilizar a matemática para promover essas generalizações? Na questão 3, vocês provaram como converter 24 para a base 4 e 625 para a base 5. Vamos pensar fora da caixinha. Se eu quero generalizar eu devo evitar particularizar situações. Então como converter um número qualquer do sistema de numeração de base decimal para uma base b qualquer? Vamos tentar ampliar o pensamento? o que poderíamos fazer? Tentem explicar de uma forma mais genérica. Está certo o que vocês fizeram, contudo vocês utilizaram casos particulares. Vamos pensar de uma maneira mais ampla. Como eu poderia justificar isso? Pode ser com suas próprias palavras	
107	Ana Lívia	Dividindo um número n pela base b e conforme os resultados, vai dividindo pela mesma base na medida em que for formando grupos e deixando restos ao longo das ordens.	Tentativa de produzir uma generalização por Ana Lívia. OBS: o papel do pesquisador foi importante para estabelecer a passagem da prova empírica para a prova conceitual. Conversa informal.
108	Ana Lívia	Algum número de base decimal. Para transformar algum número de base decimal em um número de base qualquer, divide-se....	Ana Lívia fala e escreve ao mesmo tempo
109	Luiz Felipe	O número pela base e os restos também (quocientes) pela mesma base	
110	Ana Lívia	...um número pela base e os seus resultados (quocientes) se possível, pela	Dando continuidade à escrita anterior dela.
111	Luiz Felipe	mesma base	
112	Ana Lívia	...pela mesma base. Imagine agora que você tem a seguinte situação, a representação de um número binário (sistema de numeração de base 2) indicado na ficha a seguir. O que fazer para converter este número (representado na ficha) para o sistema	A equipe passa para a questão 4). Ana Lívia aponta para a ficha mostrando os colegas.

		de numeração de base decimal? Justifique suas ideias. Bom, aqui na quinta ordem tem 1 então volta dois e depois quatro. E ai voltando dobrado mais o resto. É assim Fredy?	
113	Pesquisador	Isso, agora conte quantos feijões tem na primeira ordem.	
114	Ana Lívia	Deu 21	
115	Pesquisador	Isso significa que este número indicado aqui na ficha corresponde ao número 21 na base decimal. Entenderam?	
116	Ana Lívia	Tá. Aí eu vou ter que explicar isso?	
117	Pesquisador	Sim, você pode fazer isso por desenho como também dá para gente pensar em outras possibilidades de encontrar o 21 que não seja por desenho na ficha. Pensem em outra estratégia. Se você tivesse um número binário com algarismo na ordem 10, você iria ficar a vida toda passando/deslocando feijão?	
118	Ana Lívia	Eu posso justificar dizendo que serão realizadas sucessivas multiplicações por 2 até chegar a primeira ordem?	
119	Pesquisador	Sim	
120	Ana Lívia	Como estamos trabalhando com um número binário, o feijão na quinta ordem corresponde a dois na quarta ordem. Esses dois feijões passam para a terceira ordem multiplicado por dois e se juntando com um feijão que já estava lá né. Então com 5 feijões na terceira ordem multiplicados por 2 somam 10 feijões na segunda ordem. Os 10 feijões da segunda ordem multiplicados por 2 e somados com um feijão dá o resultado 21	
121	Pesquisador	Sim, agora pense na decomposição que a gente fez com um número na base decimal. Como a base era 10, cada digito não poderia ser escrito como uma potência de 10? E o número então gerado pela soma destas potencias. Lembram disso? Na unidade 10^0, depois tantos grupos de 10^2, 10^3, etc... Como a base aqui é dois você pode fazer a mesma coisa.	
122	Ana Lívia	Entendi, eu posso colocar....	
123	Todos	$1x2^0$ $0x2$ $1x2^2$ $0x2^3$ $1x2^4$	O pesquisador vai apontando para cada ordem e os alunos vão falando as potencias e a quantidade de feijão em cada ordem.
124	Pesquisador	Agora é obter os resultados e realizar as somas, entenderam? É algo semelhante ao que vocês fizeram la atras na decomposição na base 10	Todos balançam a cabeça, sinalizando compreensão.
125	Ana Lívia e Luiz Felipe	Uhum..	Ana Lívia realiza registros escritos para explicar a

			estratégia anterior bem como a nova estratégia originada com o apoio do pesquisador.
126	Ana Lívia	Como este número está na base dois, vai acontecer igual na base 10 que ele disse, cada algarismo vai ser escrito na potência de 2. $1x2^0 =1$ $0x2 =0$ $1x2^2=4$ $0x2^3 =0$ $1x2^4=16$ Somando tudo vai dar 21 Tudo acontece semelhante a base 10.	Os alunos finalmente parecem ter compreendido.
126	Luiz Felipe	Essa 5) aqui é o que ele tinha falado.... é o que ele falou transformar o número para a base 10. Pegar aqui o 24... eu não lembro o que faz com isso aqui depois.... tipo isso...	Ana Lívia se concentra nos registros da questão anterior. Conversa informal sobre Pibid. O pesquisador é chamado por Ana Lívia.
127	Ana Lívia	Fredy.... Como converter um número do sistema de numeração não decimal para um número correspondente no sistema de numeração decimal, por exemplo 24 e 625	Ela cita exemplos de questões anteriores
128	Pesquisador	Eu vou dar a vocês um desafio, tentem pensar de uma forma mais genérica... porque a matemática ela parte disso aqui e posteriormente ela tenta promover uma generalização... Por exemplo, lembram que vocês promoveram generalizações na questão 3? Perceberam que ao término da questão vocês tentaram ser mais genéricos com a estratégia adotada? Os exemplos estão corretos, mas eu posso generalizar a partir disso aqui? Aqui vocês pretendem particularizar o resultado com 24 e 625. Vocês precisam partir de um número no sistema de numeração não decimal para gerar um número no sistema de numeração decimal. Vocês podem, se quiser, se espelhar na conversão do número $(10101)_2$ para a base decimal e depois generalizar.	O pesquisador se afasta do grupo
129	Ana Lívia	Na base 5. Aqui vai ficar... $0x5^0$ $0x5^1$ $0x5^2$ $1x5^3$ vai dar 625 Fredy, é assim?	Ana Lívia Realiza registros. Parte de um exemplo já usado. Chama o pesquisador.
130	Pesquisador	Isso! Você fez dois exemplos né. Vocês conseguiriam generalizar isso? Não estou dizendo que o que vocês fizeram está tudo errado, só gostaria que vocês fizessem um esforço para pensarem de forma mais ampla possível. Vocês tentaram com a base 4 e 5. Porque não experimentem justificar usando uma base b, uma base genérica. Sendo assim	Os alunos têm dificuldade de prosseguir e o pesquisador tenta ajudar

		você estaria a trabalhar com as potencias de base b. A quantidade de potencias de b dependeria também da quantidade de dígitos do número na base decimal. Vocês podem propor uma generalização do número na base decimal como xyz. Vamos pensar em uma generalização?	
131	Ana Lívia	Ok!	Ana Luiz realiza registros. Ana Lívia deixa o grupo para ir embora por causa do ônibus.
132	Leticia	Nós temos que terminar agora. Vamos deixar assim mesmo?	
133	Luiz Felipe	Vamos! Pode entregar? Pode deixar os escritos aqui?	Conversa informal. Leticia balança a cabeça dizendo que sim
134	Pesquisador	Pode sim. Obrigado viu gente pela participação	

ANEXO A

Atividade: fabricação de números

EQUIPE: ____

Considere a quantidade de grãos de feijão abaixo

1) A quantidade de feijões que você dispõe representa um número no sistema de numeração de base decimal, que número é este? Represente este número na ficha, posicionando adequadamente os feijões ao longo das diferentes ordens e justifique suas ideias (apresente critérios/regras para a fabricação e decomposição do numeral correspondente a este número.)

Ficha: Fabricação de números

8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem

Orientação: Debatam o problema ouvindo com atenção as ideias de cada colega do grupo. Caso não concorde, contra-argumente respeitosamente, apontando um contra-exemplo para refutar a ideia do colega. Você pode também reformular a ideia (ou parte dela) do seu colega e juntos, de forma colaborativa, construirem um argumento para justificar as suas ideias. O respeito e a escuta ativa são fundamentais em uma argumentação, uma vez que esta envolve o confronto de ideias e não o embate pessoal.

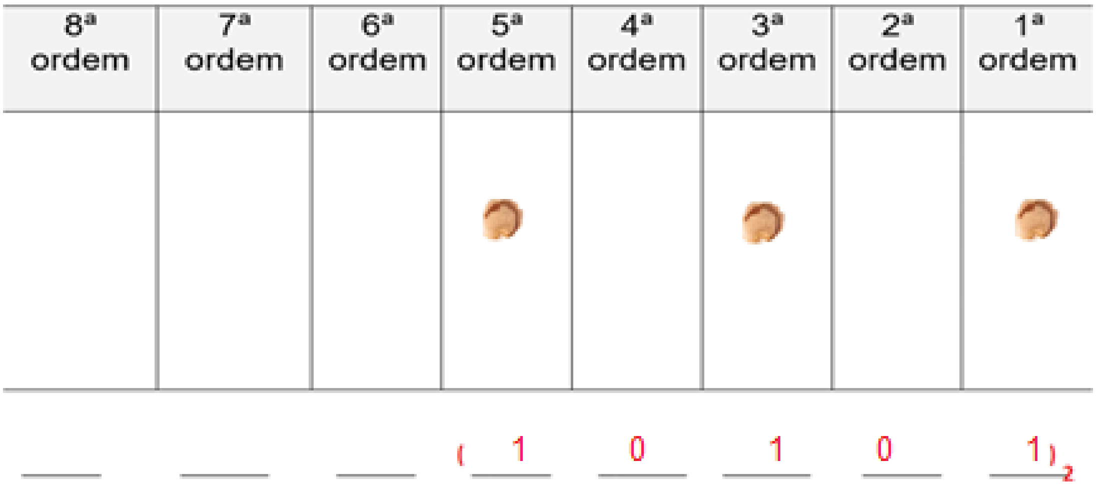
2) Com esta mesma quantidade de grãos de feijão é possível encontrar/fabricar outros números em outros sistemas de numeração que não seja o decimal? Justifique suas ideias.

Orientação: **Discuta com seus colegas a possibilidade de criar outros novos números em diferentes sistemas de numeração que não seja o sistema de base 10 (sistema decimal). Discuta com seu colega, as regras/critérios para a apresentação desse número. Você pode se espelhar no sistema de numeração de base decimal. Fiquem à vontade para criar ilustrações, semelhantes àquela indicada na questão 1, bem como realizar testes para verificar a ideia e posteriormente tirar uma conclusão.**

3) Mostre para o seu colega de grupo “*como converter um número do sistema de numeração de base decimal para um número em uma base não decimal qualquer*”

Orientação: Nesta etapa você precisa validar a conclusão tirada na questão anterior, produzindo uma generalização da ideia produzida. Você pode argumentar exibindo uma prova conceitual, ou seja, articulando conceitos, ideias e objetos matemáticos para produzir uma generalização, como também pode fazer uso da linguagem matemática (formal e simbólica) para realizar uma demonstração.

4) Imagine agora que você tenha a seguinte situação, a “*representação de um número binário*” (sistema de numeração de base 2) indicado na ficha a seguir.



O que fazer para converter este número (representado na ficha) para o sistema de numeração de base decimal? Justifique suas ideias.

5) Mostre para o seu colega de grupo “*como converter um número do sistema de numeração não decimal para um número correspondente no sistema de numeração decimal*”